

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LEONARDO WENDLER FELCHAK

CONFIABILIDADE DE PERFIS PPRFV DE SEÇÃO I AO ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE
FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO CONSIDERANDO A VARIABILIDADE
ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

CURITIBA

2025

LEONARDO WENDLER FELCHAK

CONFIABILIDADE DE PERFIS PPRFV DE SEÇÃO I AO ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE
FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO CONSIDERANDO A VARIABILIDADE
ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof^o Roberto Dalledone Machado,
DSc

Coorientador: Prof^o Henrique Machado Kroetz,
DSc

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Felchak, Leonardo Wendler

Confiabilidade de perfis PPRFV de seção I ao estado limite último de flambagem lateral com torção considerando a variabilidade espacial do teor de fibra e resina. / Leonardo Wendler Felchak. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Profº Roberto Dalledone Machado, DSc

Coorientador: Profº Henrique Machado Kroetz, DSc

1. Polímeros. 2. Método dos elementos finitos. 3. Processo Gaussiano. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Machado, Roberto Dalledone. IV. Kroetz, Henrique Machado. V. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LEONARDO WENDLER FELCHAK**, intitulada: **CONFIABILIDADE DE PERFIS PPRFV DE SEÇÃO I AO ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE FLAMBAGEM LATERAL COMTORÇÃO CONSIDERANDO A VARIABILIDADE ESPACIAL DO TEOR DEFIBRA ERESINA**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO DALLEDONE MACHADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 18 de Setembro de 2025.

Assinatura Eletrônica
19/09/2025 16:42:16.0
ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
22/09/2025 09:37:17.0
ANDRÉ JACOMEL TORII
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO
LATINO AMERICANA)

Assinatura Eletrônica
19/09/2025 12:22:50.0
RAFAEL HOLDORF LOPEZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica
19/09/2025 17:18:47.0
MARCOS ARNDT
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela minha vida, pela minha saúde, família, oportunidades, e por absolutamente tudo o que me concede e determina como meus futuros passos.

A minha família, meus pais, meus irmãos, meus avós e tantos outros, pelo suporte, carinho e amor incondicional que sempre me concederam ao longo da minha caminhada, prestando apoio independente das decisões que eu tome e desafios que encare.

Ao meu orientador Roberto Dalledone Machado, pela oportunidade de trabalharmos em conjunto para elaboração dessa dissertação, e pela liberdade pela escolha de um tema um tanto fora da sua zona de conforto. Agradeço por ser sempre muito solícito, atencioso, e além disso um exemplo de ser humano, pesquisador e profissional, o qual admiro desde a época da minha graduação.

Ao meu coorientador Henrique Machado Kroetz, que nas palavras do mesmo "caiu de paraquedas" na etapa final do trabalho, e entretanto, fez contribuições valiosas para consolidação dos resultados e conclusão do trabalho.

Aos meus colegas e amigos que conheci no PPGE-UFPR, pelos momentos muito agradáveis vividos, pelas conversas, risadas e confraternizações. A convivência com vocês foi indispensável para viver o período de mestrado de maneira mais leve.

Aos meus chefes, parceiros e colegas da Halis Engenharia pela compreensão e flexibilidade em momentos em que precisei me ausentar para atender demandas do mestrado.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa concedida para o desenvolvimento desta pesquisa.

RESUMO

Os perfis pultrudados de polímeros reforçados com fibras (PPRF) são elementos estruturais inovadores, economicamente viáveis e com propriedades mecânicas notáveis. Dentre essas propriedades pode-se citar: a resistência à corrosão, a alta resiliência ao impacto, a superioridade da relação resistência-peso quando comparada a materiais convencionais da indústria civil, como o aço e o alumínio. Adicionalmente, os processos de fabricação dos pultrudados de PRF tendem a ser mais econômicos em comparação aos tradicionalmente utilizados na construção, como o aço e concreto, pelo fato de serem altamente automatizáveis, escaláveis e por exigirem menor gasto energético. Na literatura são escassos os estudos sobre os efeitos da heterogeneidade das propriedades elásticas e mecânicas na confiabilidade desses membros estruturais sob condições usuais de carregamento. Portanto, nesse contexto, o presente trabalho compara resultados de análises de confiabilidade de vigas pultrudadas de seção I sujeitas à flambagem global considerando duas abordagens. Na primeira abordagem, assume-se que a incerteza do teor de fibra-resina é descrita por uma variável aleatória gaussiana, e está associada a uma distribuição de material homogênea ao longo da seção transversal. Enquanto na segunda abordagem, a variabilidade espacial das propriedades é modelada utilizando campos aleatórios gaussianos homogêneos e estacionários. O método de Análise de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) e a Simulação de Monte Carlo (SMC) com Amostragem de Hipercubo Latino foram empregados para calcular as probabilidades de falha dos perfis pultrudados sob o estado limite de flambagem. As estimativas de cargas de flambagem foram obtidas pela análise de elementos finitos de flambagem linear por autovalores. A fim de reduzir o custo computacional dos modelos em elementos finitos, foram empregados metamodelos de processo gaussiano. Os resultados mostram que, em alguns dos modelos com incerteza de variabilidade espacial do material incorporada, a probabilidade de falha aumentou 9,26% em comparação com o modelo de material homogêneo.

Palavras-chave: Polímeros reforçados com fibras; variabilidade espacial; campos aleatórios gaussianos; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Pultruded Fiber-Reinforced Polymers (PFRP) profiles are innovative structural elements with noteworthy mechanical properties, combined with economic viability. As some interesting properties of that material, it is possible to mention: its corrosion resistance, high impact resilience, superior strength to-weight when compared to conventional civil industry materials like steel and aluminum. Additionally, the manufacturing processes of fiber-reinforced polymer composites tend to be more cost-effective than those of traditional construction materials, like steel and concrete, due to their high degree of automation, scalability and lower energy consumption. In the literature studies regarding the effects of heterogeneity of the material properties on the reliability of those structural members under common loading conditions are scarce. So, in this sense the present work compares reliability analysis results of global buckling ultimate limit state of I-section pultruded beams from two different approaches. In the first approach, it is assumed that the fiber-resin content uncertainty is described by a gaussian random variable, and corresponds to a homogeneous distribution of material properties across the profile cross-section. The second approach considers the material properties spatial variability by using stationary gaussian homogeneous random fields models. First Order Reliability Analysis (FORM) method and Monte Carlo Simulation (MCS) with Latin Hypercube Sampling were employed to calculate failure probabilities of pultruded profiles under buckling limit state. Buckling loads estimates were obtained by linear eigenvalue buckling finite element analysis. In order to reduce computational cost of the FEM models gaussian process metamodels were employed. Results show that in some of the models with material spatial variability uncertainty incorporated, the failure probability increased 9,26% when compared to the homogeneous material model.

Keywords: Pultruded fiber-reinforced polymers; spatial variability; gaussian random fields; finite element method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – APLICAÇÕES DE POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRA . . .	31
FIGURA 2 – PROCESSO DE PULTRUSÃO TÍPICO PARA PERFIS PRFV DE SEÇÃO I	32
FIGURA 3 – TIPOS DE MANTAS DE FIBRA: (a) DISPOSTAS ALEATORIAMENTE, (b) TECELAGEM BIDIRECIONAL 0/90, (c) TECELAGEM BIDIRECIONAL E FIBRAS DISPOSTAS ALEATORIAMENTE E (d) FIBRAS ALINHADAS 0/90/±45 E DISPOSTAS ALEATORIAMENTE	33
FIGURA 4 – ARQUITETURA TÍPICA DE PERFIL PULTRUDADO	33
FIGURA 5 – SEÇÃO TRANSVERSAL DE PERFIL I VISUALIZADA EM TRÊS ESCALAS DISTINTAS	35
FIGURA 6 – ANÁLISE DE INSTABILIDADE: RESPOSTA DE UMA COLUNA .	38
FIGURA 7 – VISTAS VIGA DUPLAMENTE SIMÉTRICA SUJEITA À FLAMBAGEM LATERAL	40
FIGURA 8 – ESQUEMA GERAL DE UMA ANÁLISE DE INCERTEZAS	42
FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA ESTIMATIVA DA p_f PELO FORM VIA LINEARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO LIMITE EM TORNO DO PONTO DE PROJETO	50
FIGURA 10 – LOCAIS DE EXTRAÇÃO DAS AMOSTRAS DO PERFIL	62
FIGURA 11 – GEOMETRIA DO ELEMENTO SHELL281 DA BIBLIOTECA DE ELEMENTOS DO ANSYS	65
FIGURA 12 – EXEMPLO DE COMPARAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FLAMBAGEM LOCAL E GLOBAL E RELAÇÃO COM O TEOR DE RESINA	68
FIGURA 13 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA SIMULAÇÃO DA FLT	69
FIGURA 14 – MALHA DO MODELO EM ELEMENTOS FINITOS	70
FIGURA 15 – PRIMEIRO MODO DE FLAMBAGEM E CONFIGURAÇÃO DEFORMADA DA SEÇÃO	71
FIGURA 16 – DEFINIÇÃO DOS EIXOS LOCAIS ELEMENTOS FINITOS	73
FIGURA 17 – SENSIBILIDADE DE MALHA	74
FIGURA 18 – FLUXOGRAMA ALGORITMO FORM	79
FIGURA 19 – REALIZAÇÕES DO CAMPO ALEATÓRIO: MODELAGEM DA VARIABILIDADE DO TEOR DE RESINA NA SEÇÃO	87
FIGURA 20 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 1, 2 E 3 - $S(\mu = 2000 \text{ N/m})$: MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	94

FIGURA 21 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 4, 5 E 6 - $S(\mu = 2250 \text{ N/m})$: MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	95
FIGURA 22 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 7, 8 E 9 - $S(\mu = 2500 \text{ N/m})$: MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	96
FIGURA 23 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 10, 11 E 12 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$: MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	98
FIGURA 24 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 13, 14 E 15 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$: MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	99
FIGURA 25 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 16, 17 E 18 - $S(\mu = 3900 \text{ N/m})$: MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	100
FIGURA 26 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 1, 2 E 3 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$ e $\theta = 20 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	102
FIGURA 27 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 4, 5 E 6 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$ e $\theta = 90 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	103
FIGURA 28 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 7, 8 E 9 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$ e $\theta = 1000 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	104
FIGURA 29 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 10, 11 E 12 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 20 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	105
FIGURA 30 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 13, 14 E 15 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 90 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	106
FIGURA 31 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 16, 17 E 18 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 1000 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	107
FIGURA 32 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAGEM 13, 14 E 15 CONJUNTA - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 90 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	109

FIGURA 33 – COMPARAÇÃO ESTIMATIVAS PARA PROBABILIDADE DE FALHA OBTIDAS POR SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO: MODELOS SEM E COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	111
FIGURA 34 – VALORES MÉDIOS, MÍNIMOS E MÁXIMOS DE M_m PARA AS SIMULAÇÕES COM $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ E $\theta = 20 \text{ mm}$	114
FIGURA 35 – VALORES MÉDIOS DE E_1 PARA AS SIMULAÇÕES COM $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ E $\theta = 20 \text{ mm}$	115
FIGURA 36 – ILUSTRAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO COMPOSTA $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}$	140

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – GEOMETRIA DOS PERFIS PULTRUDADOS PRFV	61
TABELA 2 – TEOR DE RESINA DAS AMOSTRAS DE PERFIL I	62
TABELA 3 – PROPRIEDADES MECÂNICAS DA FIBRA E DA RESINA	66
TABELA 4 – ESTATÍSTICAS DAS MALHAS AVALIADAS	72
TABELA 5 – PROPRIEDADES ELÁSTICAS DO MATERIAL: CONVERGÊNCIA DE MALHA	72
TABELA 6 – CARACTERIZAÇÃO DAS VA'S: PROBLEMA CONSIDERANDO HOMOGENEIDADE DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS	76
TABELA 7 – DETERMINAÇÃO DO PASSO ÓTIMO	77
TABELA 8 – DEFINIÇÃO DAS SEMENTES E TAMANHO DAS AMOSTRAS DAS SIMULAÇÕES SUPONDO HOMOGENEIDADE DO TEOR DE RESINA	80
TABELA 9 – CARACTERIZAÇÃO DAS VA'S: PROBLEMA CONSIDERANDO A VARIABILIDADE DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS	85
TABELA 10 – DESEMPENHO DO MODELO DE KRIGAGEM PARA O MEF HE- TEROGÊNEO	89
TABELA 11 – DEFINIÇÃO DAS SEMENTES E TAMANHO DAS AMOSTRAS DAS SIMULAÇÕES	91
TABELA 12 – RESULTADOS FORM: MODELAGEM SUPONDO HOMOGENEI- DADE DO TEOR DE RESINA	92
TABELA 13 – RESUMO RESULTADOS SMC E FORM: MODELO SEM VARIA- ÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	101
TABELA 14 – RESULTADOS SMC COM LHS: MODELOS COM E SEM VARIA- ÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA	114

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

CSM	<i>Continuous Strand Mat</i> (manta de fios contínuos)
EF	Elementos Finitos
FDA	Função Distribuição Acumulada
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FDPC	Função Densidade de Probabilidade Conjunta
FLT	Flambagem Lateral com Torção
IC	Intervalo de confiança
LHS	<i>Latin Hiper-cube Sampling</i>
LRFD	<i>Load and Resistance Factored Design</i> (projeto por coeficientes parciais de ações e resistência)
MEF	Método dos Elementos Finitos
MPP	<i>Most Probable Point</i> (ponto mais provável de falha ou ponto de projeto)
PET	Polietileno Tereftalato
PG	Processo Gaussiano
PPRFV	Pultrudados Poliméricos Reforçados com Fibra de Vidro
PRF	Polímero Reforçado com Fibra
PRFV	Polímero Reforçado com Fibra de Vidro
SMC	Simulação de Monte Carlo
VA	Variável aleatória

LISTA DE SÍMBOLOS

β_{HL}	Índice de confiabilidade de Hasofer-Lind
β_{MC}	Índice de confiabilidade equivalente para simulação de Monte Carlo
d	Altura total do perfil (mm)
$\phi_i(\mathbf{x})$	Autofunção da função de covariância
β_j	Coefficiente a determinar do modelo de Krigagem
ν_f	Coefficiente de Poisson da fibra
ν_m	Coefficiente de Poisson da resina
ν_{LT}	Coefficiente de Poisson longitudinal característico
ν_{12}	Coefficiente de Poisson principal maior
ν_{21}	Coefficiente de Poisson principal menor no plano 2-1
ν_{23}	Coefficiente de Poisson principal menor no plano de isotropia 2-3
C_1	Coefficiente de correção para cálculo de $M_{cr,FT,CNR}$
C_2	Coefficiente de correção para cálculo de $M_{cr,FT,CNR}$
C_3	Coefficiente de correção para cálculo de $M_{cr,FT,CNR}$
C_b	Coefficiente de modificação para vãos destravados com momento fletor variável e ambas as extremidades contraventadas
$\xi_{cr,f}$	Coefficiente de restrição
COV	Coefficiente de variação
η_{12}	Coefficiente para cálculo do módulo de cisalhamento G_{12}
η_2	Coefficiente para cálculo do módulo de elasticidade transversal E_2
L_b	Comprimento entre pontos travados contra deslocamentos laterais da mesa comprimida ou com restrição à torção da seção transversal (mm)
Ω_s	Conjunto complementar ao domínio de falha, ou domínio de segurança

\mathcal{D}	Conjunto discreto (possivelmente infinito) quando associado à variáveis aleatórias discretas, ou um conjunto contínuo quando associado à variáveis aleatórias contínuas
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
k_r	Constante de mola rotacional (kN/rad)
J	Constante de torção para seção aberta (mm ⁴)
z_q	Coordenada do ponto de aplicação da carga em relação ao centro de cisalhamento do perfil (mm)
δ	Critério de tolerância do algoritmo iHLRF para a norma da função de estado limite no ponto
ρ_f	Densidade da fibra
ρ_m	Densidade da resina
σ	Desvio padrão
\mathbf{d}_k	Direção de descida da k -ésima iteração do algoritmo iHLRF
\mathcal{N}	Distribuição normal
y	Distância da linha neutra até a fibra mais extrema da seção (mm)
Ω_f	Domínio de falha
w_i	Elementos do espaço amostral
s_{ij}	Entradas da matriz de amostragem base do hipercubo latino S
\widehat{x}_{ij}	Entradas do vetor $\widehat{\mathbf{x}}_i$
r_i	Entradas do vetor de correlação $\mathbf{r}(\mathbf{x})$
f_j	Entradas do vetor de funções arbitrárias do modelo de Krigagem
\mathbb{X}	Espaço de projeto
\mathbb{U}	Espaço normal padrão
Ω	Espaço amostral
t_w	Espessura da alma (mm)

t_f	Espessura da mesa (mm)
\widehat{p}_f	Estimativa da probabilidade de falha
$\widehat{\theta}$	Estimativa dos hiperparâmetros
\mathbb{E}	Experimento
R	Função de correlação
\mathbf{x}'	Função de correlação
g	Função de estado limite
$f_X(\mathbf{x})$	Função densidade de probabilidade conjunta do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X}
Φ	Função distribuição de probabilidade normal acumulada
φ_n	Função distribuição de probabilidades normal multivariada
$I[\mathbf{x}]$	Função indicadora
$m(\mathbf{u}_k)$	Função mérito para cálculo do passo ótimo do algoritmo iHLRF
$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$	Função de autocorrelação
$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$	Função de autocovariância
θ	Hiperparâmetros
λ_i	i -ésimos autovalores ou fator multiplicador
$\{\psi_i\}$	i -ésimos autovetores de deslocamento
$F_{X_j}^{-1}$	Inversa da função de distribuição acumulada da variável X_j
\mathcal{L}	Lagrangeano
b_f	Largura total da mesa (mm)
$\mu_{\widehat{\gamma}}$	Média do vetor de previsões do modelo
G_f	Módulo de cisalhamento da fibra
G_m	Módulo de cisalhamento da matriz (resina)
G_{12}	Módulo de cisalhamento no plano 1-2
E_f	Módulo de elasticidade da fibra

E_m	Módulo de elasticidade da matriz (resina)
E_1	Módulo de elasticidade longitudinal
E_2	Módulo de elasticidade transversal
S	Matriz de amostragem base do hipercubo latino
P	Matriz de permutação da técnica de amostragem por hipercubo latino
[K]	Matriz de rigidez elástica global
[K_G]	Matriz de rigidez geométrica global
D^{neq}	Matriz diagonal contendo os desvios padrão da distribuição normal equivalente
I_M	Matriz identidade de ordem M
J_{ZX}	Matriz jacobiana de transformação $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$
J_{XZ}	Matriz jacobiana de transformação $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$
R_A	Matriz para construção do plano de amostragem base do hipercubo latino
M^K	Metamodelo por Krigagem
M	Modelo de um sistema físico
$M_{cr,FT,CNR}$	Momento crítico de instabilidade flexo-torsional segundo o CNR-205
I_w	Momento de inércia da alma em torno do eixo de flexão (mm ⁴)
I_f	Momento de inércia da mesa em torno do eixo de flexão (mm ⁴)
I_p	Momento de inércia da seção em torno do eixo de flexão (mm ⁴)
I_{\min}	Momento de inércia em torno do eixo de menor inércia (mm ⁴)
M_n	Momento resistente nominal à flexão (N.mm)
λ	Multiplicador de Lagrange
E	Módulo de Young
G_{ef}	Módulo de cisalhamento efetivo (MPa)
G_{LT}	Módulo de cisalhamento no plano característico (MPa)
E_{ef}	Módulo de elasticidade efetivo (MPa)

$E_{L,w}$	Módulo longitudinal característico da alma (MPa)
$E_{L,f}$	Módulo longitudinal característico da mesa (MPa)
$E_{T,w}$	Módulo transversal característico da alma (MPa)
$E_{T,f}$	Módulo transversal característico da mesa (MPa)
n_S	Número de amostras
P_{func}	Número de funções arbitrárias e coeficientes a determinar do valor médio do modelo de Krigagem
n_f	Número de pontos no domínio de falha
M	Número de variáveis aleatórias ou dados de entrada
N	Número de variáveis de resposta ou dados de saída
π	Número pi
M_T	Número de termos para truncamento da série de Karhunen-Loève
γ	Parâmetro para garantia da condição de convergência do algoritmo iHLRF
a	Parâmetro pré-definido da regra de Armijo
b	Parâmetro pré-definido da regra de Armijo
c_k	Parâmetro real de penalização do algoritmo iHLRF
k	Parâmetro relacionado com o nível de confiança desejado, segundo uma distribuição normal
λ_k	Passo da k -ésima iteração do algoritmo iHLRF
m_3	Peso da amostra somado ao do cadinho (ou crisol) pós-calcinação
m_2	Peso da amostra somado ao do cadinho (ou crisol) pré-calcinação
m_1	Peso do cadinho
ω	Ponto amostral
\mathbf{u}^*	Ponto de projeto
\mathcal{X}	Pontos de suporte
P	Probabilidade

p_f	Probabilidade de falha
\mathbf{x}	Realização do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X}
\mathbf{u}	Realização do vetor de variáveis aleatórias normais padrão \mathbf{u}
w^*	Realização de um experimento
\mathcal{Y}	Respostas do modelo nos pontos de suporte
D_J	Rigidez à torção de seções abertas (N.mm ²)
f_{cr}	Tensão crítica de flambagem dada pelo mínimo entre a tensão de flambagem local da mesa comprimida e da flambagem local da alma (MPa)
$f_{cr,w}$	Tensão crítica de flambagem local da alma (MPa)
$f_{cr,f}$	Tensão crítica de flambagem local da mesa comprimida (MPa)
M_m	Teor de resina
\mathcal{T}	Transformação isoprobabilística
$M_{\text{máx}}$	Valor do momento fletor máximo solicitante de cálculo, em módulo, no comprimento destravado (N.mm)
M_B	Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção central do comprimento destravado (N.mm)
M_C	Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a três quartos do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda (N.mm)
M_A	Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a um quarto do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda (N.mm)
E	Valor esperado
Var	Variância
σ_Y^2	Variância do vetor de previsões do modelo
$\xi_i(\theta)$	Variáveis aleatórias normais padrão descorrelacionadas
δ_e	Variância explicada
L	Verossimilhança

$\widehat{\mathbf{x}}_i$	Vetor com os dados de entradas das simulações
β	Vetor de coeficientes a determinar do modelo de Krigagem
$\mathbf{r}(\mathbf{x})$	Vetor de correlação cruzada entre ponto previsto e os pontos de suporte
\mathbf{R}	Vetor de forças externas aplicadas
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Vetor de funções arbitrárias do modelo de Krigagem
\mathbf{M}^{neq}	Vetor de médias distribuição normal equivalente
$\widehat{Y}(\mathbf{x})$	Vetor de previsões do modelo
\mathbf{X}	Vetor de variáveis aleatórias
\mathbf{U}	Vetor de variáveis aleatórias normais padrão
α	Vetor gradiente unitário
V_f	Volume de fibras

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	OBJETIVOS	23
1.1.1	Objetivo geral	23
1.1.2	Objetivos específicos	23
1.2	DELIMITAÇÕES DO TRABALHO	24
1.3	JUSTIFICATIVA	25
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	27
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	29
2.1	INTRODUÇÃO AOS COMPÓSITOS PULTRUDADOS POLIMÉRICOS REFORÇADOS COM FIBRA (PRF)	29
2.2	PROPRIEDADES MECÂNICAS E FÍSICAS DOS PERFIS PPRFV	35
2.3	MODELAGEM DA VARIABILIDADE ESPACIAL DAS PROPRIEDADES	36
2.4	ANÁLISE DE FLAMBAGEM	37
2.5	FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO	39
2.6	QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS E CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	41
2.6.1	Quantificação das fontes de incertezas (Passo A)	43
2.6.2	Modelagem do sistema físico (Passo B)	44
2.6.3	Propagação de incertezas (Passo C)	45
2.7	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	46
2.8	MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM: FORM	47
2.9	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	52
2.10	METAMODELAGEM: REGRESSÃO COM PROCESSOS GAUSSIANOS OU KRIGAGEM	55
2.11	DEFINIÇÕES GERAIS	56
2.12	FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO	57
2.13	DETERMINAÇÃO DOS HIPERPARÂMETROS	58
3	ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE FIBRAS E RESINAS: AQUISIÇÃO DOS DADOS E MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS	60
3.1	PROGRAMA EXPERIMENTAL DE FENG et al. (2022) PARA MENSURAÇÃO DO TEOR DE RESINA	60
3.2	PREVISÃO TEÓRICA DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS	62
3.3	MODELAGEM NUMÉRICA EM ELEMENTOS FINITOS	64
3.3.1	Elementos finitos utilizados	64
3.3.2	Condições de contorno e configurações de análise	65
3.3.3	Estudo de sensibilidade de malha	71
4	METODOLOGIA DE ANÁLISE E MODELAGEM NUMÉRICA	75
4.1	FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE E MODELO PROBABILÍSTICO: MODELO COM DISTRIBUIÇÃO HOMOGÊNEA DO TEOR DE RESINA	75
4.2	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL: FORM	77

4.3	MODELO COM DISTRIBUIÇÃO HOMOGÊNEA DO TEOR DE RESINA: IMPLEMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM AMOSTRAGEM POR HIPERCUBO LATINO	80
4.4	IMPLEMENTAÇÃO DA METAMODELAGEM POR KRIGAGEM: MODELO SEM VARIABILIDADE ESPACIAL DO TEOR DE RESINA	81
4.5	FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE E MODELO PROBABILÍSTICO: MODELO COM VARIABILIDADE ESPACIAL DO TEOR DE RESINA	82
4.6	IMPLEMENTAÇÃO DA METAMODELAGEM POR KRIGAGEM: MODELO CONSIDERANDO A VARIABILIDADE ESPACIAL DO TEOR DE RESINA	88
4.7	MODELO COM DISTRIBUIÇÃO HETEROGÊNEA DO TEOR DE RESINA: IMPLEMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM AMOSTRAGEM POR HIPERCUBO LATINO	90
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	92
5.1	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO MODELO HOMOGÊNEO: APLICAÇÃO DO MÉTODO FORM	92
5.2	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO MODELO HOMOGÊNEO: APLICAÇÃO DA SMC COM LHS	93
5.3	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO MODELO HETEROGÊNEO: APLICAÇÃO DA SMC COM LHS	101
5.4	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS	109
6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	116
6.1	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	117
	REFERÊNCIAS	119
APÊNDICE 1	ALGORITMO DE BLOCK LANZOS GENERALIZADO	129
1.1	FUNCIONAMENTO DO ALGORITMO	129
APÊNDICE 2	TEORIA DE PROBABILIDADES	131
2.1	DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE	131
2.1.1	Definição axiomática	131
2.1.2	Definição frequentista	131
2.1.3	Definição Bayesiana ou probabilidade como grau de confiança	132
2.2	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	132
2.2.1	Função de distribuição acumulada de probabilidades e função densidade de probabilidades	133
2.2.2	Valor esperado e momentos de uma variável aleatória	133
2.3	CAMPOS ALEATÓRIOS	134
APÊNDICE 3	DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE E TRANSFORMAÇÕES ISOPROBABILÍSTICAS	137
3.1	FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE	137
3.1.1	Distribuição uniforme	137
3.1.2	Distribuição normal ou Gaussiana	137

3.2	TRANSFORMAÇÕES ISOPROBABILÍSTICAS	138
3.3	TRANSFORMAÇÃO DE ROSENBLATT	139
3.4	TRANSFORMAÇÃO COMPOSTA USANDO O MODELO DE NATAF	139
3.4.1	Princípio da aproximação normal	140
3.4.2	Modelo de Nataf	142
3.4.3	Decomposição ortogonal da matriz de correlação	143
3.4.4	Decomposição de Cholesky da matriz de correlação	144
3.4.5	Transformação resultante	145
APÊNDICE 4 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS NECESSÁRIOS AO CÁLCULO DA RESISTÊNCIA À FLAMBAGEM LOCAL E GLOBAL		146
4.1	DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DAS PROPRIEDADES E PARÂMETROS	146
ANEXOS		149
ANEXO 1 RESISTÊNCIA À FLEXÃO DO PERFIL DEVIDO À INSTABILIDADE LOCAL CONFORME ASCE: LOAD AND RESISTANCE FACTOR DESIGN (LRFD) OF PULTRUDED FIBER REINFORCED POLYMER (FRP) STRUCTURES		150
1.1	RESISTÊNCIA NOMINAL DO PERFIL DEVIDO À INSTABILIDADE LOCAL	150
1.2	RESISTÊNCIA NOMINAL DO PERFIL DEVIDO À FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO	151
ANEXO 2 RESISTÊNCIA À FLEXÃO DO PERFIL DEVIDO À INSTABILIDADE GLOBAL CONFORME CNR-DT 205/2007: GUIDE FOR THE DESIGN AND CONSTRUCTION OF STRUCTURES MADE OF FRP PULTRUDED ELEMENTS		153
2.1	RESISTÊNCIA NOMINAL À INSTABILIDADE GLOBAL DE PERFIS SUJEITOS À FLEXÃO	153

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, elementos estruturais poliméricos reforçados com fibra (PRF) obtiveram notoriedade como uma alternativa viável e atrativa aos materiais tradicionais da indústria da construção. A utilização extensiva de compósitos PRF em aplicações envolvendo engenharia civil e infraestrutura se deve às suas promissoras propriedades, como elevada razão resistência-peso, durabilidade, resistência à corrosão, à fadiga e ao desgaste (Kaw, 2005; Bank, 2006). Dentre estas aplicações destacam-se os perfis pultrudados poliméricos reforçados com fibra de vidro (PPRFV), os quais vem conquistando espaço na indústria da construção civil.

Os perfis pultrudados, como o próprio nome sugere, são produzidos por pultrusão, um processo de fabricação contínuo e automatizado, em que materiais fibrosos como fibras de vidro ou carbono, são inicialmente tracionados na direção de uma pré-forma que define o formato de perfil, sendo simultaneamente impregnadas com resina. Essa mistura é então tracionada no molde aquecido onde se dá a conformação e a cura do material. O perfil totalmente curado segue sendo tracionado até um dispositivo de corte, o qual corta os perfis no comprimento desejado.

Por serem perfis leves, isto permite que sejam instalados em estruturas existentes sem exigir modificações significativas. Ademais, o peso reduzido para manuseio destes perfis facilita sua movimentação e instalação, reduzindo custos de transporte. Outras vantagens do material são a alta resistência à corrosão, aos agentes químicos e atmosféricos, o que proporciona redução nos custos operacionais (Zureick, 1998).

A utilização generalizada de materiais compósitos reforçados com fibra em várias indústrias instigou a elaboração de diversas normas e recomendações (ASCE, 2024; Clarke, 2003; CNR-DT, 2007; Ascione *et al.*, 2016; Sørensen, 2016), de modo a definir procedimentos e padronizações de projeto. A título de exemplo, no âmbito nacional tem-se a recente publicação da norma brasileira ABNT NBR 17231 (2025), relativa a projetos estruturais de perfis PPRFV. Contudo, ainda existem lacunas nas diretrizes de projeto e na literatura no que diz respeito a modelagem probabilística do comportamento destes perfis à flambagem, fenômeno de falha que costuma dominar os estados limites últimos para este elemento estrutural.

Os modos de falha dominantes dos perfis pultrudados tendem a ser os relacionados à flambagem, devido a sua elevada razão resistência-rigidez, e a geometrias esbeltas e de paredes finas, o que aumenta a suscetibilidade destes perfis a este fenômeno. Especialmente no caso de seções abertas como as do tipo "U", "I" ou cantoneiras, existe ainda a possibilidade de flambagem por distorção ou torsional.

Uma vez que estruturas compósitas de PRF apresentam variabilidade inerente a seus processos complexos de fabricação e montagem, além das diversas fontes significativas de incerteza relacionadas às propriedades mecânicas, parâmetros geométricos, de carregamento, imperfeições, à sua modelagem matemática, dentre outros, torna-se imperativo analisar o desempenho estrutural por uma abordagem probabilística.

A incorporação das incertezas associadas à análise do estado limite último por flambagem em perfis PRF pultrudados propicia uma abordagem mais segura e de maior controle dos riscos associados em comparação aos procedimentos normativos, assegurando uma aceitação e participação maior do material no mercado (Sá *et al.*, 2021; Pacheco *et al.*, 2021).

O presente trabalho avalia o problema de confiabilidade para perfis pultrudados reforçados por fibra de vidro em relação ao estado limite último de flambagem. As incertezas relativas ao teor de fibras e resina foram incorporadas ao problema, por meio de modelagem numérica com propriedades elásticas do material calculadas através de formulações determinísticas, as quais apresentam como parâmetro de entrada o teor de fibra/resina do ponto analisado.

A incerteza do parâmetro teor de fibra/resina foi tratada num primeiro momento como variável aleatória (VA), assumindo que a distribuição das propriedades do material é homogênea ao longo de toda a seção transversal do perfil. Posteriormente, essa abordagem foi refinada por meio da consideração da variabilidade espacial do teor fibra/resina, utilizando para essa finalidade a modelagem com campos aleatórios.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

O trabalho tem como propósito geral investigar o problema de confiabilidade ao estado limite último de flambagem global de perfis poliméricos pultrudados reforçados com fibras, incorporando a incerteza em suas propriedades elásticas, supondo que a distribuição espacial do teor de resina é homogênea numa primeira análise, e numa segunda como sendo heterogênea ao longo da seção transversal. Mais especificamente, o enfoque do estudo se dará em polímeros reforçados com fibras de vidro, avaliando a confiabilidade estrutural quanto aos estados limites últimos de flambagem lateral com torção de perfis de seção I.

1.1.2 Objetivos específicos

- Representar o estado limite de flambagem de PPRFV por meio de um modelo baseado no MEF e avaliar a confiabilidade estrutural para diferentes configurações

de propriedades do material;

- Comparação das probabilidades de falha associadas ao estado limite de flambagem para o caso de perfis I, considerando ou não a variabilidade espacial do teor de resinas e fibras;
- Implementação da metamodelagem com processos gaussianos, e avaliação de seu desempenho na previsão de cargas críticas de modelos de elementos finitos.

1.2 DELIMITAÇÕES DO TRABALHO

No sentido de fomentar a melhoria e/ou motivar futuros estudos no tema, são feitas as seguintes observações com relação às delimitações do presente trabalho, a citar:

- As cargas críticas foram estimadas por meio da solução do problema de autovalores e autovetores pelo método dos elementos finitos (análise de flambagem linear), onde os efeitos da não-linearidade geométrica e física, bem como as imperfeições geométricas da estrutura não foram consideradas no trabalho;
- Apenas a variabilidade relacionada às propriedades elásticas ortotrópicas foi considerada na modelagem das incertezas do material. A variabilidade das propriedades elásticas na direção longitudinal do perfil foi desprezada;
- Modelos contemplando outras dimensões para as seções "I", bem como a variação do comprimento do vão da viga, não foram analisados. Outro ponto a enfatizar é que as análises consideram perfis pultrudados de resina epóxi, sendo perfis com matriz de outros tipos de resina não contemplados no trabalho;
- A disponibilidade de dados experimentais na literatura para embasamento dos modelos probabilísticos empregados na representação da incerteza na distribuição do teor de resina e fibra é bastante escassa, o que impossibilitou um estudo mais detalhado e robusto dos parâmetros e distribuições mais adequados, e melhor ajustados às variáveis analisadas;
- Em todas as análises de confiabilidade estudadas considera-se que estas se tratam de problemas independentes do tempo.

1.3 JUSTIFICATIVA

A pultrusão tem se estabelecido como um dos processos mais proeminentes de fabricação de peças compostas para inúmeros produtos, em mercados como infraestrutura, telecomunicações e serviços públicos, tornando os produtos pultrudados um elemento básico da economia industrial global.

Ao longo dos próximos anos, prevê-se que os produtos pultrudados sejam um dos segmentos mais promissores da indústria de compósitos: estima-se que o mercado global de pultrusão atinja cerca de US\$ 5,9 bilhões até 2028, e que apresente uma taxa de crescimento composto anual (CAGR - *compound annual growth rate*) de 5,3% de 2022 a 2028 de acordo com pesquisa de mercado da Lucintel (2023).

Por conta de custos operacionais e de transporte, a substituição do aço e alumínio por compósitos pultrudados torna-se relevante. Segundo um artigo da Unicomposite (2025), estudos em campo demonstraram que a substituição do aço carbono por perfis pultrudados PRF pode reduzir os custos de instalação em torno de 40%, por conta da leveza destes perfis, necessitando de menos mão de obra e equipamento para içamento.

Esse mesmo artigo apresenta ainda um estudo de caso de retrofit da planta química costeira, no qual grades de aço corroídas foram substituídas por pultrudados PRF. Os registros de manutenção da estrutura constataram uma redução de 60% nos gastos com manutenção em 10 anos, e zero tempo de inatividade não planejado associado a falhas no piso.

Aproximadamente 15% de todo o alumínio consumido provém de extrusão de alumínio, ao passo de que apenas 5% de todos os polímeros reforçados produzidos respondem pelos produtos de compósitos pultrudados (Miracle *et al.*, 2001). Segundo a Strongwell Corporation (2016), as estruturas de PRF podem custar até 15% a menos que o aço carbono, 30% a menos que o aço galvanizado e até 50% a menos que o aço inoxidável.

Ainda conforme Strongwell Corporation (2016), a instalação envolvendo estruturas de PRF custa em média 20% menos em comparação com aqueles relacionados ao aço convencional, empregando menor tempo de inatividade, menos equipamentos e menor mão de obra especializada. Isto reforça o fato de que o mercado de produtos pultrudados possui um grande espaço para crescimento, desenvolvimento e promoção da sustentabilidade em escala global.

O processo de fabricação de perfis pultrudados em PRFV caracteriza-se por sua simplicidade e apelo sustentável, pois emite uma quantidade de CO₂ reduzida em comparação à manufatura de materiais tradicionais como aço e concreto, os quais usualmente requerem um consumo energético mais elevado. Ademais, outra vantagem

significativa é a possibilidade de uso da resina reciclada proveniente de polietileno tereftalato (PET), ou outros plásticos na produção dos materiais, conferindo-lhes um caráter ecologicamente responsável.

Apesar das diversas vantagens na aplicação dos perfis, a falta de recomendações ou normas técnicas que apresentem formulações coerentes e não excessivamente conservadoras para dimensionamento dos elementos estruturais quanto ao fenômeno de flambagem, se apresentam como empecilhos para um efetivo emprego dos perfis pultrudados pelos projetistas estruturais.

As práticas de projeto convencionais usualmente baseiam-se na utilização de coeficientes parciais de segurança, muitas vezes baseados em julgamento técnico, carecendo de análises estatísticas dos estados limites para calibração destes coeficientes, ou avaliação direta da segurança via teoria da confiabilidade estrutural. Como resultado desse processo de calibração, a otimização das estruturas com o emprego dos métodos de projeto convencionais (semi-probabilísticos) pode acarretar na configuração estruturalmente mais vulnerável, caso as incertezas envolvidas no problema não sejam devidamente consideradas ou conhecidas, ou muito distintas das premissas usadas na calibração dos coeficientes parciais de segurança.

Sendo assim, as práticas de projetos correntemente empregadas nas verificações da segurança da estrutura por critérios semi-probabilísticos tendem a fornecer o projeto menos econômico para as condições dadas no processo de calibração dos coeficientes parciais, e também potencialmente mais vulnerável, caso as incertezas relativas ao projeto em estudo não sejam devidamente quantificadas, controladas e caracterizadas, podendo ocasionar um efeito catastrófico ao longo dos estágios do ciclo de vida da estrutura. Nesse sentido a aplicação dos métodos de confiabilidade figura como uma ferramenta poderosa para obtenção de projetos econômicos, robustos, confiáveis e menos vulneráveis (Tsompanakis *et al.*, 2008; Frangopol, 1995).

Um dos fatores de incerteza relacionados à análise estrutural de perfis pultrudados é o teor de resina empregado em sua constituição, e sua distribuição espacial ao longo da seção transversal. Segundo Feng *et al.* (2022), perfis pultrudados de seção I apresentaram um COV (*coefficient of variation*) de em torno de 16%, o maior coeficiente de variação de teor de resina ao longo da seção transversal em comparação com perfis tubulares circulares, retangulares, cantoneira e U.

Isto posto, estudos relacionados à modelagem probabilística das incertezas na distribuição do teor de resina, e seu impacto na confiabilidade de perfis pultrudados quanto à flambagem são incipientes na literatura. O artigo apresentado por Feng *et al.* (2022) evidencia que a não uniformidade da distribuição de resinas é relevante sobretudo no caso de seções I, e isso evidentemente influencia a capacidade resistente à flambagem do perfil, levando a reduções na resistência da estrutura e na sua

confiabilidade.

Sendo assim, os dados abordados ilustram a relevância dos materiais PPRFV para o setor da construção civil, encorajando o desenvolvimento de estudos acerca do comportamento mecânico de tais materiais. Dada a existência de incertezas inerentes à análise estrutural de PRF pultrudados, como as incertezas das ações que atuam nas estruturas, incertezas relacionadas à composição física e às propriedades elásticas dos materiais, bem como as resistências dos mesmos, estas devem ser consideradas para um entendimento robusto das respostas dos sistemas estruturais. Essa incorporação das incertezas propiciará um entendimento probabilístico do problema em estudo, e possibilitará a obtenção de estimativas mais precisas quanto à suscetibilidade e confiabilidade da estrutura.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em oito capítulos. O atual capítulo introduz e contextualiza o tema deste trabalho, é apresentado ainda o objetivo geral e os objetivos específicos.

- Capítulo 2: Apresenta a revisão bibliográfica, a qual aborda uma introdução aos principais conceitos, definições e propriedades mecânicas relativas aos compósitos pultrudados poliméricos reforçados com fibra. O capítulo contempla também o referencial teórico relacionado à análise de flambagem linear, e a flambagem lateral com torção em vigas de seções abertas. Ainda neste mesmo capítulo, se discorre a respeito das conceituações relativas à quantificação de incertezas aplicada em sistemas de engenharia, apresentando também uma introdução ao tema da confiabilidade estrutural e a dois de seus métodos de análise mais difundidos na literatura, o método de confiabilidade de primeira ordem FORM, e a simulação de Monte Carlo. Por fim, é abordada a revisão teórica sobre regressão com processos gaussianos, também conhecidos como krigagem, uma técnica de metamodelagem amplamente empregada na literatura para aproximação de modelos numéricos de alta fidelidade.
- Capítulo 3: Apresenta a referência utilizada para aquisição dos dados experimentais de teor de resina, e discorre a respeito da modelagem numérica em elementos finitos, demonstrando as definições das condições de contorno, e análise de sensibilidade de malha.
- Capítulo 4: Aborda a formulação geral, assim como a metodologia utilizada para modelagem probabilística, e implementação computacional dos métodos FORM e SMC com amostragem LHS para as duas aplicações numéricas propostas. Inicialmente, é apresentada a metodologia relacionada à aplicação que considera

a incerteza do teor de resina e fibra admitindo que a distribuição de propriedades é homogênea ao longo da seção transversal. Posteriormente, nesse mesmo capítulo são abordadas as metodologias de análise do modelo que considera a incerteza relativa à variabilidade espacial do teor de fibra e resina, utilizando campos aleatórios gaussianos.

- Capítulo 5: Neste capítulo estão apresentadas as análises e discussões dos resultados para os modelos propostos segundo as duas abordagens distintas para tratamento da incerteza nas propriedades do material.
- Capítulo 6: Apresenta as conclusões finais e sugestões para trabalhos futuros.
- Apêndice 1: Neste apêndice é apresentado o funcionamento do algoritmo de Block Lanczos Generalizado para solução de problemas de autovalores e autovetores para grandes matrizes esparsas.
- Apêndice 2: Contempla uma revisão teórica a respeito de teoria de probabilidade.
- Apêndice 3: Apresenta as distribuições de probabilidade empregadas no trabalho, e um referencial teórico sobre transformações isoprobabilísticas.
- Apêndice 4: Desenvolve os cálculos das propriedades do material, e dos parâmetros relacionados às resistências à flambagem local e global pelas equações da ASCE (2024) e CNR-DT (2007).
- ANEXO 1: Trata das formulações da ASCE (2024) para determinação das resistências de perfis PPRFV à flexão devido à instabilidade local.
- ANEXO 2: Apresenta as expressões da CNR-DT (2007) para determinar a resistência por flambagem lateral com torção de perfis PPRFV.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada a revisão bibliográfica pertinente ao trabalho. São tratados os tópicos pertinentes ao tema, como definições gerais sobre compósitos pultrudados poliméricos, uma revisão da teoria da estabilidade estrutural, e da teoria da confiabilidade estrutural, com enfoque no método de confiabilidade de primeira ordem FORM e na simulação de Monte Carlo. O leitor é convidado a consultar o Apêndice 2 e Apêndice 3 como material de apoio aos conceitos apresentados neste capítulo.

2.1 INTRODUÇÃO AOS COMPÓSITOS PULTRUDADOS POLIMÉRICOS REFORÇADOS COM FIBRA (PRF)

O termo compósito é utilizado para definir a combinação macroscópica de duas ou mais fases distintas, possuindo uma interface entre elas. O material resultante apresenta uma combinação de propriedades superior a de seus componentes individuais (Chawla, 2012). No caso de materiais poliméricos reforçados por fibras, estes são compostos pela fase matriz polimérica e pelo reforço com fibras.

Em polímeros reforçados por fibras, as propriedades das fibras são usadas para transmitir rigidez e garantir resistência estrutural à tração, ao passo de que a matriz (material polimérico) confina o reforço, transmitindo tensões cisalhantes e conservando as fibras das condições ambientais, em virtude de suas características adesivas e coesivas (COMPOSITES, 2003).

Matrizes orgânicas para aplicações comerciais incluem resinas de poliéster, éster vinílico e resinas epóxi. As resinas de poliéster e éster vinílico são as de utilização mais corrente dentre todos os materiais de matriz. O grande número de formulações de resina, agentes de cura e outros componentes fornece uma enorme variedade de propriedades possíveis. As resinas epóxi são atualmente mais utilizadas em materiais compósitos avançados para aplicações estruturais, edificações, em tubos petroquímicos, peças de barcos e aeronaves, entre muitas outras (Ratna *et al.*, 2003).

Os epóxios são geralmente superiores aos poliésteres na resistência à umidade e a outras influências ambientais, além de oferecer melhores propriedades mecânicas (Miracle *et al.*, 2001). Embora o alongamento até a falha da maioria dos epóxios curados seja relativamente baixo, para muitas aplicações os epóxios proporcionam uma combinação quase imbatível de características de manuseamento, flexibilidade de processamento, propriedades mecânicas compostas e custo aceitável.

A compreensão técnico-científica e de engenharia inicial dos compósitos de matriz polimérica reforçado com fibras baseou-se no estudo de reforço com fibras de

vidro. Este tipo de fibra tem sido amplamente aplicado nas mais diversas áreas desde utilizações não estruturais, como painéis em aviões e eletrodomésticos, até aplicações que exigem alto desempenho, como vasos de pressão e estruturas civis.

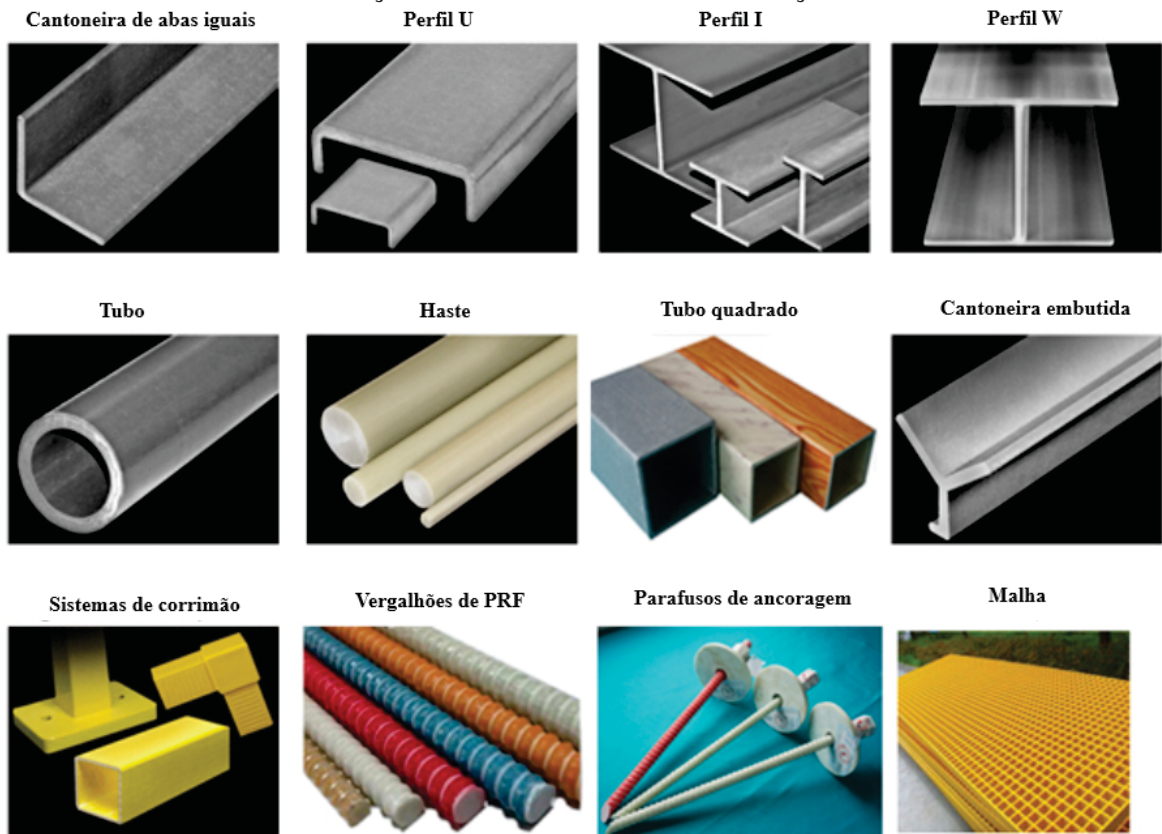
Segundo Miracle *et al.* (2001), o que motiva a utilização generalizada de fibras de vidro em compósitos, tanto no passado como no presente, são fatores como o preço competitivo, a disponibilidade, fácil manuseio e processamento, e a elevada resistência. Ademais, de acordo com os mesmos autores, o advento de agentes de acoplamento de silano altamente eficientes e compatíveis com matrizes de poliéster ou epóxi, proporcionou um importante e necessário impulso nas propriedades do material e na durabilidade ambiental. A fibra de vidro de aplicação mais comum é conhecida como E-glass (*electric glass*), caracterizada por apresentar propriedades mecânicas, químicas e elétricas balanceadas, além de um custo moderado.

No contexto da construção civil, uma aplicação dos compósitos PRF que vem ganhando notoriedade nos últimos anos são os elementos estruturais pultrudados, tendo sido utilizados como vigas e treliças em edificações e pontes (Bank, 2006), pórticos em estruturas marítimas (Fangueiro, 2011; Jones, 2018), estacas em fundações profundas (Guades *et al.*, 2012), postes de iluminação, mísulas em infraestrutura elétrica (Kaw, 2005), dentre outros.

Apesar da existência de diversos métodos de produção de materiais PRF, o método de pultrusão é mais comumente utilizado para uma ampla gama de aplicações na engenharia devido ao grande número de vantagens sobre outros métodos. Madenci *et al.* (2020) citam algumas vantagens deste método de produção: seu baixo custo econômico e de mão de obra; rapidez e agilidade na produção; formas de geometria complexa podem ser facilmente manufaturadas; PRF podem ser produzidos com diferentes combinações e camadas de fibras a fim de obter diferentes propriedades mecânicas.

Atualmente, tem-se inúmeros exemplos de aplicações estruturais de componentes pultrudados de PRF, tais como vergalhões, malhas, elementos de reforço, perfis e painéis sanduíche. Tais elementos vem sendo utilizados na construção de edifícios e pontes, tanto em construções novas quanto em reabilitação de estruturas já existentes (Keller, 2002; Correia, 2008). A FIGURA 1 ilustra alguns exemplos de aplicação de polímeros pultrudados.

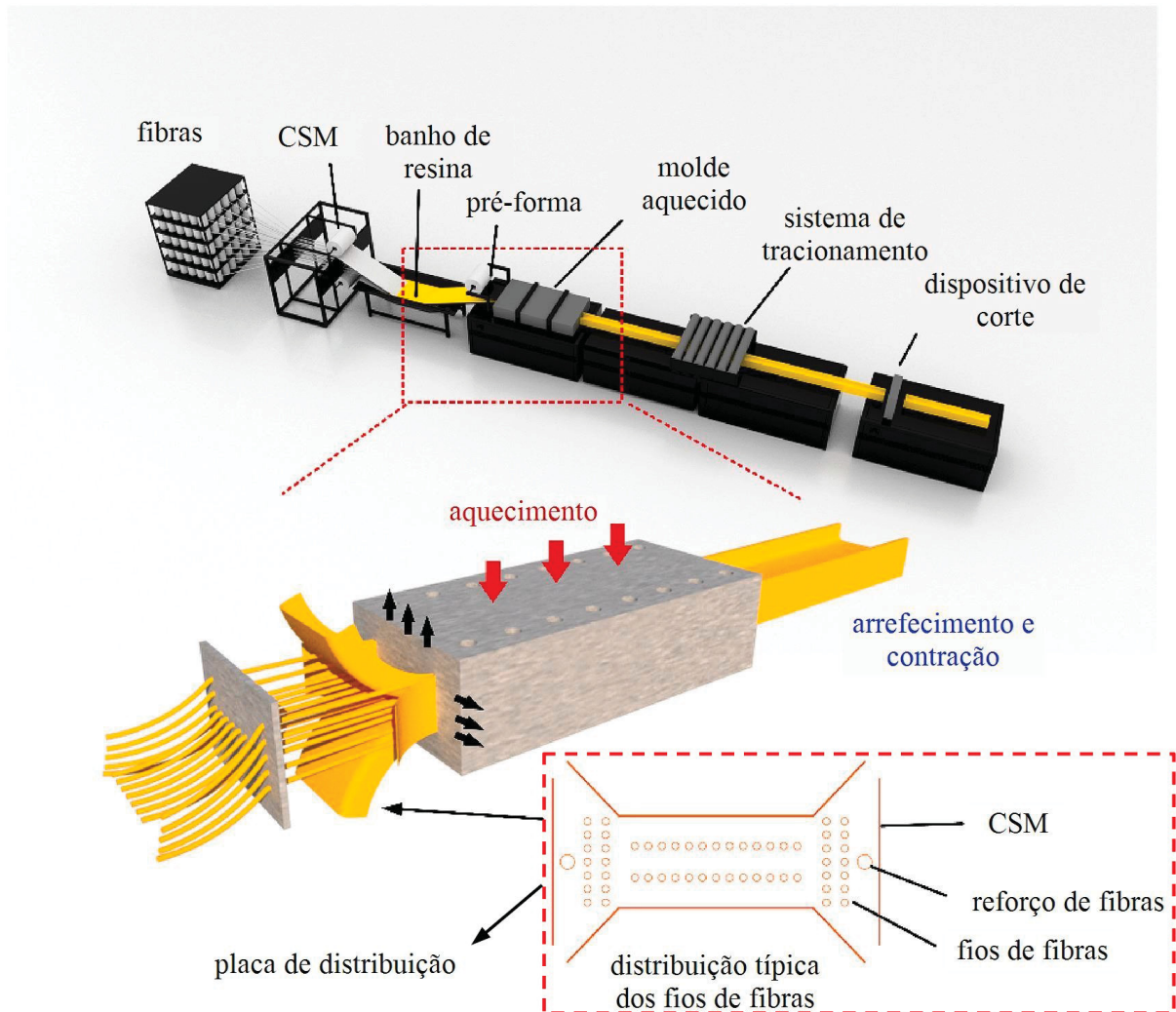
FIGURA 1 – APLICAÇÕES DE POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRA



FONTE: VVR Innovate Materials Pvt Ltd (2020).

O processo de fabricação por pultrusão de perfis PPRFV é apresentado na FIGURA 2 para o caso típico de perfis I. Os fios de fibra (*rovings*) e a manta de filamentos contínuos, indicada na FIGURA 2 como CSM (*continuous strand mat*), são tracionados por um sistema de tracionamento e simultaneamente imersos em um banho de resina. Em seguida, na pré-forma os *rovings* de fibra e as mantas de fios (CSM) são puxados através de uma placa de distribuição com diversos orifícios para correto posicionamento das fibras. Posteriormente, todos os materiais são tracionados para dentro de um molde, no qual a resina é aquecida e curada. Finalmente, depois de serem retirados do molde, os perfis de PRFV curados passam por um processo de arrefecimento e contração (Fairuz *et al.*, 2014).

FIGURA 2 – PROCESSO DE PULTRUSÃO TÍPICO PARA PERFIS PRFV DE SEÇÃO I



FONTE: Adaptado de Feng *et al.* (2022).

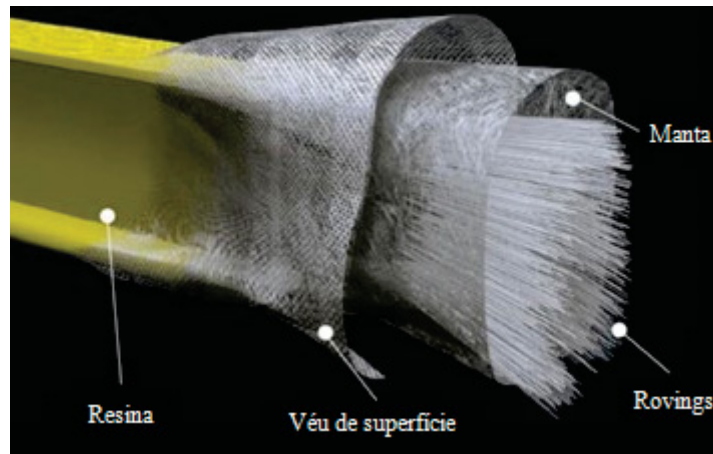
Na fabricação de componentes pultrudados, dois tipos diferentes de reforço de fibra são comumente empregados: *rovings* e mantas (CSM). Segundo Correia (2004), as mantas de fibra ou tecidos (CSM) podem ser orientadas ($0^\circ/90^\circ$ ou $\pm 45^\circ$) ou trançadas aleatoriamente (FIGURA 3). Este reforço é responsável por fornecer rigidez e resistência ao cisalhamento ao compósito. Os véus de superfície são mantas muito finas, aleatoriamente orientados, utilizados próximos às superfícies de perfis pultrudados de PRF para criar uma camada de revestimento de resina, melhorando o acabamento superficial e a resistência à corrosão, este véu atua também como uma barreira de proteção contra a exposição aos raios ultravioleta. Os *rovings* ou mechas, consistem em filamentos de fibra contínuos unidirecionais fornecidos em bobinas, que proporcionam quase toda a resistência axial e rigidez dos perfis pultrudados. A FIGURA 4 ilustra a constituição típica de fibra (mantas e mechas) exibida por perfis pultrudados de PRFV de seção I.

FIGURA 3 – TIPOS DE MANTAS DE FIBRA: (a) DISPOSTAS ALEATORIAMENTE, (b) TECELAGEM BIDIRECIONAL 0/90, (c) TECELAGEM BIDIRECIONAL E FIBRAS DISPOSTAS ALEATORIAMENTE E (d) FIBRAS ALINHADAS 0/90/ \pm 45 E DISPOSTAS ALEATORIAMENTE



FONTE: Correia (2004).

FIGURA 4 – ARQUITETURA TÍPICA DE PERFIL PULTRUDADO



FONTE: Adaptado de Strongwell Corporation (2016).

Conforme previamente mencionado, o *roving* proporciona resistência longitudinal no processo de pultrusão e no produto final, entretanto estas propriedades se manifestam unidirecionalmente, acarretando numa resistência interlaminar relativamente baixa, predominantemente controlada pela resina. No entanto, com a introdução de forma estratégica dos reforços de alto desempenho, características específicas de resistência podem ser incorporadas ao projeto do compósito, otimizando seu desempenho estrutural ao cisalhamento e carregamento lateral.

O processo de manufatura de pultrusão induz efeitos únicos nos produtos finais, como a introdução de imperfeições iniciais (Bai; Keller, 2009), microfissuras e distribuições de fibras e resina não homogênea. Feng *et al.* (2022) evidenciam em seu estudo a inomogeneidade da distribuição de fibras e resinas, e a formação de microfissuras na seção transversal dos perfis induzidas pelo próprio processo de fabricação.

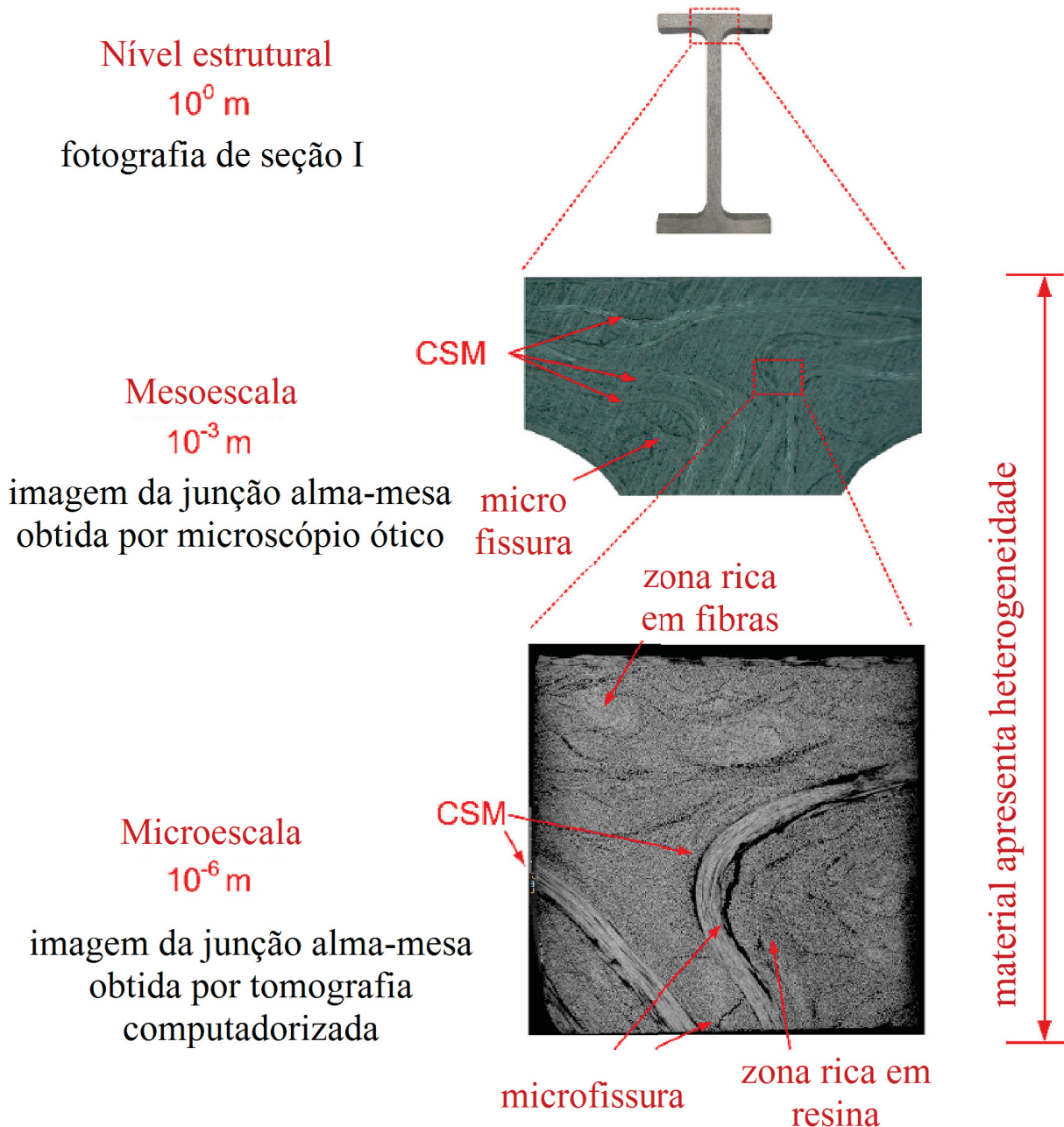
Como principais causas das distorções geométricas e tensões residuais produzidas pelo processo de pultrusão, estão a temperatura não uniforme e o grau variável

de cura, conforme relata Baran *et al.* (2013). Outros efeitos como a anisotropia térmica, retração devido a polimerização/cristalização, interação ferramenta-peça, enrugamento das fibras e o fluxo e a compactação de resina são outros fatores responsáveis pela geração de tensões residuais e variações geométricas (Baran *et al.*, 2017).

A FIGURA 5 apresenta imagens da seção transversal de um perfil I em três níveis distintos: escala estrutural (macro), meso e micro escala. É perceptível que na macro escala as imperfeições são praticamente inexistentes, e o material aparenta possuir uma distribuição de fibras e resinas uniforme, entretanto, na micro escala é evidente a presença de microfissuras e de uma distribuição de fibras e resinas não homogênea.

A imperfeição gerada pela distribuição heterogênea leva à manifestação de zonas ricas em resinas e zonas ricas em fibras. Sabe-se que o percentual de fibras em compósitos PRFV está intimamente ligado às propriedades mecânicas globais, dessa forma a distribuição não homogênea do teor de fibras ou de resina resulta na variabilidade destas propriedades ao longo da seção transversal do perfil. Tal variabilidade pode se dar, por exemplo, na resistência mecânica, e nas propriedades elásticas do material, tanto nas direções longitudinal quanto transversais, devendo ser apropriadamente consideradas em projeto e análise estrutural (Nguyen *et al.*, 2013; Antin *et al.*, 2019; Ascione, 2014).

FIGURA 5 – SEÇÃO TRANSVERSAL DE PERFIL I VISUALIZADA EM TRÊS ESCALAS DISTINTAS



FONTE: Adaptado de Feng *et al.* (2022).

2.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS E FÍSICAS DOS PERFIS PPRFV

As propriedades dos perfis PPRFV são altamente dependentes do volume de fibras e seus materiais constituintes. Entretanto, há certos aspectos que são comuns para todo compósito pultrudado independente do tipo e/ou volume de fibras e resina utilizada em sua fabricação. Pelo fato das fibras serem posicionadas predominantemente na direção longitudinal (apenas as mantas apresentam fibras na direção transversal ou demais orientações vistas na Seção 2.1), isto torna os perfis pultrudados altamente

ortotrópicos. Tal fator se impõe como uma questão importante para a prática de engenharia estrutural de projetos, uma vez que os cálculos estruturais tornam-se mais complexos em comparação com as estruturas de aço por exemplo, que são isotrópicas. A título de exemplo, a rigidez e a resistência transversal dos perfis PPRFV costumam ser da ordem de 3 a 4 vezes inferiores que a resistência na direção longitudinal (Fernandes *et al.*, 2015a; Fernandes *et al.*, 2015b). Esta questão torna o perfil suscetível à flambagem local quando submetido a carregamentos laterais localizados.

Outra inconveniência dos perfis pultrudados PRFV é o seu comportamento frágil na ruptura, com alta liberação de energia e falha abrupta. Nunes (2016) menciona a falta de informação disponível por parte de fornecedores e fabricantes destes compósitos, as diferenças de fabricante para fabricante e a vasta gama de formulações de projeto disponibilizadas por diferentes autores e diretrizes. Estes fatores possivelmente estão impedindo a utilização generalizada destes elementos estruturais.

No caso de perfis compósitos pultrudados de PRF geralmente se considera que o material é transversalmente isotrópico, um caso particular de ortotropia, onde a composição do material, ou suas propriedades são as mesmas para um eixo de simetria. Essa consideração se baseia na premissa de que a fibra e a resina estão uniformemente distribuídas na seção transversal (Qiao; Shan, 2005; Qiao; Chen, 2014; Mottram, 1992).

2.3 MODELAGEM DA VARIABILIDADE ESPACIAL DAS PROPRIEDADES

A incerteza nas propriedades físicas e mecânicas é inerente aos materiais compósitos, isso decorre pelas imperfeições e distorções geradas durante o processo de fabricação, conforme abordado na Seção 2.1. Uma adequada caracterização e quantificação dessas incertezas se faz imprescindível na condução de análises de confiabilidade robustas e acuradas.

Na literatura, uma abordagem muito recorrente para a descrição das incertezas devido à variabilidade espacial nas propriedades é a modelagem com campos aleatórios (Guillemot *et al.*, 2008, 2009). A utilização de campos aleatórios nesse contexto permite a representação da variabilidade estatística juntamente da correlação espacial, definida através de uma função de correlação. Para um maior aprofundamento a respeito da teoria de campos aleatórios, recomenda-se que o leitor consulte a Seção 2.3 do Apêndice 2.

Dentre os inúmeros métodos difundidos na literatura para modelagem de campos aleatórios, destaca-se a expansão de Karhunen-Loève, técnica com utilização ampla por se tratar de uma decomposição espectral da função de covariância do campo aleatório, dada pela EQUAÇÃO AP2.12 do Apêndice 2.

Geralmente, assume-se que o campo seja gaussiano e estatisticamente homogêneo. A hipótese do campo gaussiano se dá por questões de simplificação da expansão de Karhunen-Loève, devido à aproximação do teorema do limite central, e também a grande complexidade inerente a modelagem de campos não-gaussianos. A premissa da estacionariedade (ou homogeneidade estatística) se sustenta em contextos nos quais a variabilidade é similar em todo o domínio. Além disso, a hipótese da estacionariedade permite a simplificação da função de correlação, e reduz o custo computacional da representação numérica do campo.

2.4 ANÁLISE DE FLAMBAGEM

De importância ímpar no projeto de qualquer elemento estrutural está o estudo das possíveis instabilidades que possam ocorrer com a aplicação de carregamentos. De forma geral, a instabilidade estrutural é uma condição na qual a estrutura sofre deformações significativas de maneira abrupta quando sujeita a esforços de compressão. Este fenômeno é também conhecido como flambagem, podendo muitas vezes resultar até mesmo no colapso parcial ou total da estrutura.

A segurança com relação à flambagem está relacionada à determinação das cargas críticas da estrutura, carregamentos que ocasionarão uma mudança do estado de equilíbrio estável para uma configuração de equilíbrio instável, uma vez que sejam aplicados. A título de exemplo, é apresentada na FIGURA 6 a resposta de um pilar sob a ação de uma força de compressão P , e de uma força desestabilizadora γP atuando na direção transversal. A força desestabilizante está relacionada às imperfeições na geometria, à variabilidade nas propriedades do material e à imperfeição no ponto de aplicação da carga em relação à posição perfeitamente vertical e centrada.

Para γ muito pequenos, a resposta da coluna se aproxima da obtida pela solução de Euler para flambagem linear elástica, e deflexões consideráveis surgem pela mudança de configuração abrupta exibida pela estrutura. A carga crítica de flambagem de Euler P_{crit} é dada por:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{4L_b^2} \quad (2.1)$$

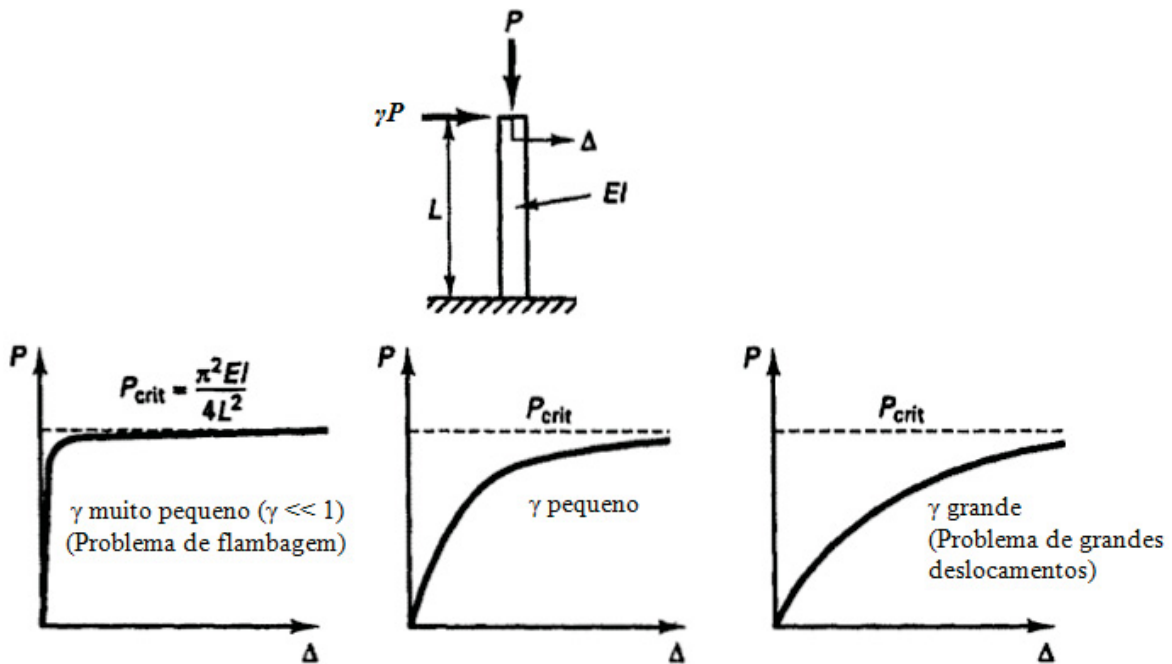
onde:

E é o módulo de elasticidade da coluna;

I_{\min} é o momento de inércia da coluna em torno do eixo de menor inércia;

L_b é o comprimento de flambagem da barra.

FIGURA 6 – ANÁLISE DE INSTABILIDADE: RESPOSTA DE UMA COLUNA



FONTE: Adaptado de Bathe (2014).

Supondo a validade de determinadas simplificações e premissas, a análise de flambagem linear representa com boa precisão o comportamento das estruturas sujeitas à instabilidade por flambagem. As premissas e hipóteses simplificadoras necessárias à correta aplicação deste tipo de análise são: o modelo constitutivo do material é elástico-linear até a flambagem; os carregamentos são estáticos e proporcionais; assume-se que a geometria inicial da estrutura e a aplicação do carregamento é ideal, onde as imperfeições geométricas, de material e no ponto de aplicação de carga possam ser desprezadas.

A análise de flambagem por problema de autovalores e autovetores apresenta vantagens em comparação com análises numéricas mais robustas e complexas, como uma solução numérica não-linear incremental completa, por ser computacionalmente muito mais barata em relação a esta última, fornecendo boas estimativas para a carga crítica real da estrutura, supondo a validade das simplificações apresentadas.

Em problemas de análise não-linear o comportamento da estrutura pode ser capturado de forma incremental, com a resolução da equação:

$$[\mathbf{K}_t]d\psi = d\mathbf{P} \quad (2.2)$$

onde $[\mathbf{K}_t]$ é a matriz de rigidez tangente, $d\delta$ é o vetor de deslocamentos nodais incrementais, e $d\mathbf{P}$ é o vetor de cargas nodais incrementais e reações. A EQUAÇÃO 2.2 pode ser escrita também como:

$$[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g]d\psi = d\mathbf{P} \quad (2.3)$$

onde $[K_e]$ designa a matriz de rigidez linear elástica global e $[K_g]$ é a matriz de rigidez geométrica, a qual representa a mudança na rigidez provocada pelos efeitos das deformações e deslocamentos finitos.

Para o cálculo das cargas críticas elásticas, a equação de rigidez global é formulada na forma de um problema de autovalores e autovetores generalizado, sendo a equação de equilíbrio no estado crítico (McGuire *et al.*, 2000):

$$([K_e] + \lambda_i [\widehat{K}_G]) \{\psi_i\} = \{0\} \quad (2.4)$$

onde:

$[K_G]$ = é a matriz de rigidez geométrica global, computada a partir do estado de tensões inicial, para uma carga de referência P_{ref} ;

λ_i = são os i -ésimos autovalores (usados como multiplicadores dos carregamentos que geraram $[\widehat{K}_G]$);

$\{\psi_i\}$ = são os i -ésimos autovetores de deslocamento, que descrevem a configuração da estrutura flambada.

Diversos métodos se prestam à resolução do problema de autovalores generalizados descrito pela EQUAÇÃO 2.4, como a decomposição de Cholesky, algoritmo QZ, algoritmo de Krylov-Schur e o algoritmo de Block Lanczos.

O algoritmo de Block Lanczos é uma poderosa ferramenta para extração dos autovalores extremos (mais elevados ou mínimos em magnitude) e autovetores de grandes matrizes simétricas esparsas. No Apêndice 1 é apresentado o funcionamento geral desse método.

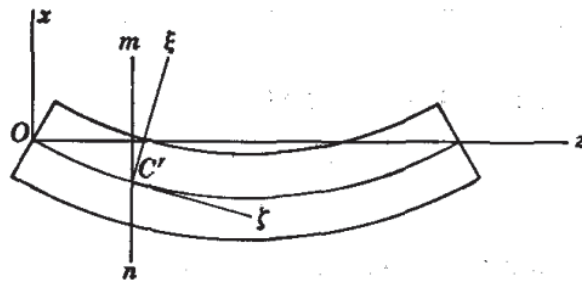
2.5 FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO

Em vigas sem restrição lateral e sujeitas à flexão em torno do eixo de maior inércia, dado que a rigidez do perfil no plano de flexão é muito superior em comparação à rigidez à flexão lateral, pode vir a ocorrer o fenômeno conhecido como flambagem lateral quando um certo carregamento vertical crítico for aplicado. Na medida em que a carga aumenta, em função das imperfeições geométricas e do ponto de aplicação da carga em relação a uma posição perfeitamente vertical e centrada, uma condição de equilíbrio ligeiramente defletida (e torcida) se torna possível. Nessa situação, a configuração plana da viga torna-se instável, e a menor carga na qual essa condição ocorre representa a carga crítica da viga (Timoshenko; Gere, 2012).

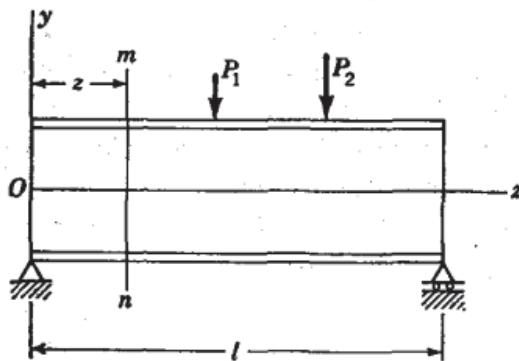
Considerando-se uma viga com dois planos de simetria, sujeita a carregamentos arbitrários atuando num plano yz , no qual a rigidez à flexão é máxima, conforme mostra a FIGURA 7. Admitindo que ocorra uma pequena deflexão em função dessas cargas arbitrárias, então, a partir das equações diferenciais de equilíbrio para uma porção de viga defletida é possível determinar as cargas críticas de flambagem.

Para derivar tais equações são considerados os eixos cartesianos fixos x , y , z , e os eixos ξ , η , ζ tomados no centróide da seção transversal a uma seção qualquer mn , conforme apresentados na FIGURA 7. Os eixos ξ e η são eixos de simetria e, portanto, os eixos principais da seção, e ζ é a direção da tangente ao eixo da viga defletida após a flambagem. A posição deslocada da viga é descrita pelas componentes u e v do deslocamento do centróide da seção nas direções x e y , respectivamente, e pelo ângulo de rotação ϕ da seção transversal. Os componentes de deslocamento u e v são positivos nas direções positivas dos eixos correspondentes, enquanto, o ângulo de rotação ϕ é considerado positivo em torno do eixo z de acordo com a convenção da regra da mão direita.

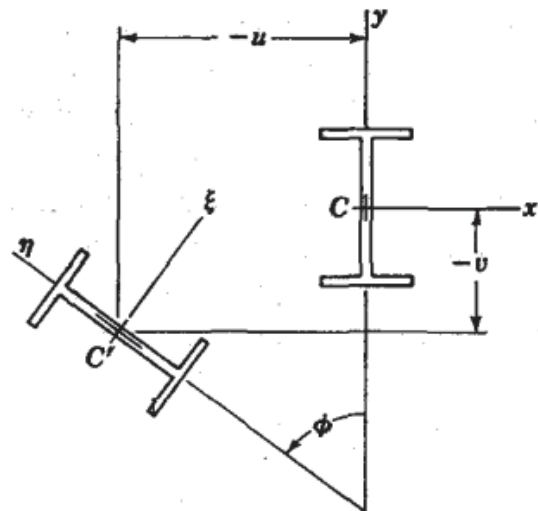
FIGURA 7 – VISTAS VIGA DUPLAMENTE SIMÉTRICA SUJEITA À FLAMBAGEM LATERAL
(a) VISTA DE CIMA



(b) VISTA LATERAL



(c) SEÇÃO TRANSVERSAL



FONTE: Adaptado de Timoshenko e Gere (2012).

Para pequenos deslocamentos as curvaturas do eixo baricêntrico da viga deformada nos planos xz e yz são dadas por $\frac{d^2 u}{dz^2}$ e $\frac{d^2 v}{dz^2}$, respectivamente. Admitindo pequenos ângulos de giro ϕ então as curvaturas nos planos $\xi\zeta$ e $\eta\zeta$ são aproximadamente iguais. Com isso as equações diferenciais para flexão são dadas por (Timoshenko; Gere,

2012):

$$EI_{\xi} \frac{d^2 v}{dz^2} = M_{\xi} \quad (2.5)$$

$$EI_{\eta} \frac{d^2 u}{dz^2} = M_{\eta} \quad (2.6)$$

onde E é o módulo de elasticidade, I_{ξ} e I_{η} são os momentos principais de inércia da seção transversal em torno dos eixos ξ e η , respectivamente. M_{ξ} e M_{η} são os momentos fletores em torno desses mesmos eixos.

Já a equação diferencial para torção da barra defletida é dada por (Timoshenko; Gere, 2012):

$$GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} = M_{\zeta} \quad (2.7)$$

onde G é o módulo de cisalhamento, J é o momento polar de inércia, C_w é a constante de empenamento (*warping*), e M_{ζ} é o momento torsor em torno do eixo ζ .

A solução do problema do valor de contorno dado pelo sistema de EQUAÇÕES (EQUAÇÃO 2.5, EQUAÇÃO 2.6, e EQUAÇÃO 2.7) e as condições de fronteira, recai num problema de autovalores e autovetores, cuja resolução fornece os modos de flambagem e a respectiva carga crítica associada.

No caso de uma viga biapoiada sujeita à flexão pura, com momento $M_{\xi} = M_0$ aplicado em ambas suas extremidades, a solução do problema de autovalores e autovetores fornece o momento crítico de flambagem $M_{0,cr}$ (Timoshenko; Gere, 2012):

$$M_{0,cr} = \frac{\pi}{L_b} \sqrt{EI_{\eta} GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJ L_b^2} \right)} \quad (2.8)$$

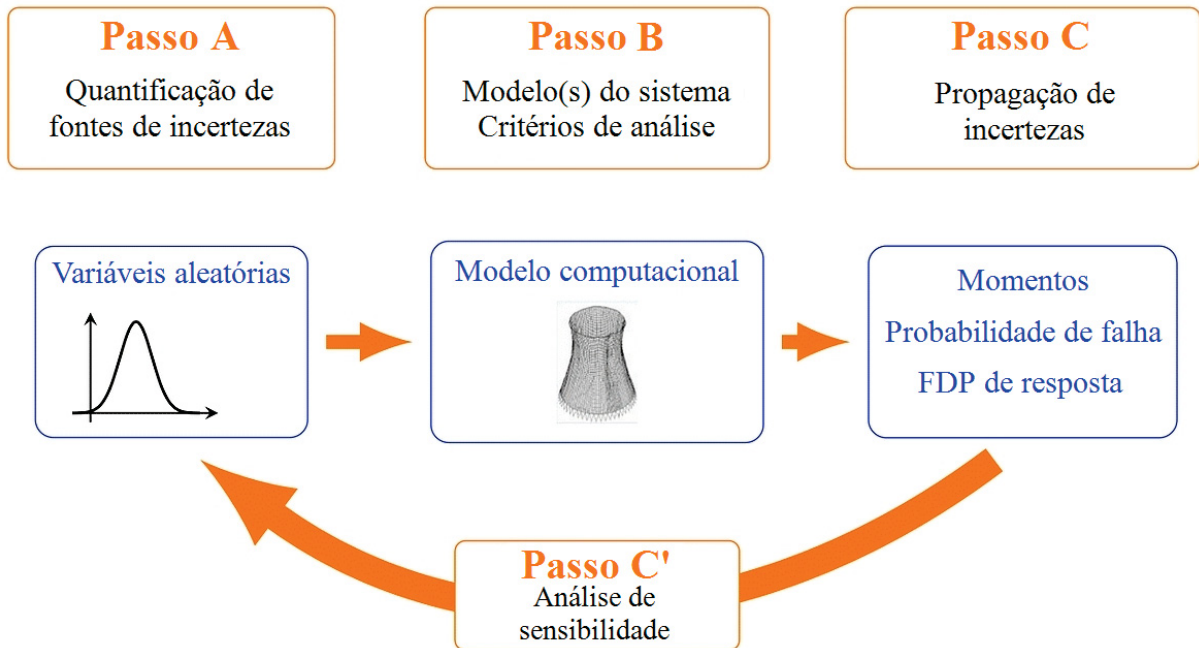
Para condições de contorno mais complexas, como momento fletor variável ao longo do comprimento, e carregamentos aplicados fora do centro de cisalhamento da seção, são propostos na literatura fatores de correção e termos adicionais a serem aplicados na EQUAÇÃO 2.8 para consideração desses efeitos (Trahair, 2017; Vlasov, 1961; Ascione *et al.*, 2011). No contexto de projetos de perfis PPRFV, diversas normalizações e recomendações técnicas foram desenvolvidas com base nessas equações propostas na literatura, derivadas a partir de soluções analíticas e numéricas, e adaptadas no âmbito dos perfis pultrudados (CNR-DT, 2007; Ascione *et al.*, 2016; ASCE, 2024).

2.6 QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS E CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

A modelagem probabilística em engenharia visa estudar os efeitos das incertezas dos sistemas físicos, e por vezes das incertezas dos modelos propostos para

representação dos fenômenos físicos, para então avaliar os impactos destas incertezas nas respostas dos modelos. Este campo encontra-se na interseção entre as disciplinas da física e da matemática aplicada (como por exemplo a estatística, teoria da probabilidade e simulação computacional). A FIGURA 8 esquematiza os principais passos envolvidos na análise de incertezas.

FIGURA 8 – ESQUEMA GERAL DE UMA ANÁLISE DE INCERTEZAS



FONTE: Adaptado de Rocquigny (2006).

Três passos podem ser identificados pela FIGURA 8:

- O passo A consiste na definição do modelo matemático, físico ou numérico e seus critérios de análise (por exemplo critérios de falha, tolerâncias de deslocamentos, entre outros) a serem empregados no estudo do sistema físico. Esta etapa caracteriza por completo as informações necessárias para realização de uma análise determinística clássica do sistema físico;
- O passo B compreende a quantificação das fontes de incertezas, em outras palavras, definir os parâmetros de entrada incertos e elaborar modelos probabilísticos que descrevam apropriadamente suas distribuições;
- O passo C consiste na propagação das incertezas inseridas na entrada dos modelos, caracterizando de maneira apropriada a resposta aleatória do modelo em relação aos critérios estabelecidos no passo A. Os resultados obtidos nesta etapa podem compreender momentos estatísticos, a probabilidade de falha, a função densidade de probabilidade (FDP) da resposta em análise, dentre outros;

- Usualmente, subprodutos dos métodos de propagação de incerteza são informações a respeito do impacto dos parâmetros de entrada aleatórios nas respectivas respostas aleatórias. Esta categorização dos parâmetros de entrada é conhecida como análise de sensibilidade, identificada na FIGURA 8 como passo C'.

Para informações a respeito dos conceitos básicos relativos à construção de modelos probabilísticos, o leitor é aconselhado a consultar o Apêndice 2, onde elementos básicos da teoria de probabilidades pertinentes a este trabalho são abordados.

2.6.1 Quantificação das fontes de incertezas (Passo A)

No projeto de sistemas estruturais, sabe-se que inúmeras simplificações e hipóteses são admitidas de forma a se obter um modelo do sistema físico real, sob o qual análises, validações e verificações são realizadas conforme os procedimentos normativos. Da prática, é sabido que a correspondência entre modelo e sistema real nunca é perfeita. Os procedimentos normativos baseados na filosofia de projeto LRFD (*Load and Resistance Factor Design*) normalmente asseguram, dentro de certa margem de segurança, que o sistema estrutural atenda aos requisitos de projeto propostos. No entanto, estas normas de projeto estabeleceram a calibração dos coeficientes parciais de segurança conforme situações médias de projeto, inviabilizando a garantia de níveis de confiabilidade coerentes para condições de projeto específicas (Tsompanakis *et al.*, 2008).

Soize (2005) e Ditlevsen e Madsen (1996, cap. 3) pontuam que existe uma distinção entre sistemas ditos "de projeto" e sistemas "reais". Um "sistema de projeto" é um objeto abstrato cujo modelo matemático e seus parâmetros de entrada associados foram selecionados de sorte que os critérios de projeto fossem atendidos. O "sistema real" por sua vez é um objeto físico construído conforme o projeto. Sabe-se que na prática o sistema real nunca é exatamente idêntico ao projeto inicial. Sudret (2007) elenca algumas razões para tal:

- Por conta das imperfeições no processo de fabricação, as dimensões do sistema real diferem das de projeto;
- As propriedades do material do sistema real podem diferir ligeiramente das propriedades catalogadas na classe de material da qual este é suposto pertencer;
- As condições de contorno do sistema de projeto são idealizadas de modo que representam de maneira aproximada a complexidade daquelas do sistema real.

Por estes motivos uma abordagem probabilística dos parâmetros de entrada se faz aplicável. As incertezas relacionadas aos parâmetros de entrada podem ser de vários tipos (Melchers; Beck, 2018):

- incertezas intrínsecas por definição são aquelas inerentes ao processo ou fenómeno envolvido, não podendo ser eliminadas mas sim reduzidas com coleta de dados ou informações adicionais, modelagem analítica ou numérica aprimorada e melhor estimativa de parâmetros. Exemplos: ocorrência e intensidade de ações ambientais como tempestades, ciclones, tornados e furacões, ações decorrentes de terremotos, variações nas propriedades mecânicas de materiais, entre outros;
- incertezas epistêmicas decorrem da lacuna ou falta de conhecimento. Estas incertezas podem ser reduzidas, e em teoria, eliminadas, via coleta de informações a respeito dos processos envolvidos, ou melhor conhecimento do problema sendo investigado. Exemplos: incerteza estatística relacionada a um modelo de distribuição para uma variável aleatória, representação do comportamento estrutural por um modelo simplificado, etc.;
- incertezas devido a fatores humanos são aquelas resultantes do envolvimento humano no projeto, construção, uso da edificação, entre outros. De acordo com Beck (2019), esta incerteza não admite separação entre intrínseca ou epistêmica, sendo em última análise inevitável (e, portanto, intrínseca), porém redutível através de qualificação e treinamento (epistêmica).

O tratamento destas incertezas nos parâmetros de entrada por uma abordagem probabilística compreende o Passo B, cujo objetivo final, para problemas independentes do tempo, é a descrição do vetor de variáveis aleatórias dos parâmetros de entrada \mathbf{X} em termos de sua função densidade de probabilidade conjunta (FDPC) $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. No Apêndice 2 são apresentados alguns dos conceitos da teoria de probabilidades pertinentes ao desenvolvimento desta dissertação, como o conceito de variáveis aleatórias.

2.6.2 Modelagem do sistema físico (Passo B)

Normalmente, um modelo de um sistema físico pode ser caracterizado como uma função tipo "caixa preta" ou *black box*, por exemplo um programa de computador, a qual associa a entrada de dados a resultados ou dados de saída.

Considerando que o modelo de um sistema físico possa ser representado por uma função geral $\mathcal{M} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$, então nessa notação os dados de entrada estão agrupados no vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^M$, ao passo que as respostas do modelo são o vetor coluna $\mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N$. Um modelo assim definido inclui tanto

as equações que descrevem o sistema físico objeto de estudo quanto os algoritmos empregados na sua resolução.

No caso de um modelo *black box*, a função geral que define o modelo \mathcal{M} só é conhecida por meio de avaliações $\mathbf{y}^{(i)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)})$ de cada vetor de dados de entrada $\mathbf{x}^{(i)}$ no qual o programa de computador é alimentado e executado.

Os parâmetros de entrada no âmbito da mecânica estrutural geralmente são os seguintes:

- Medidas dos componentes estruturais, dimensões, seções transversais, ou seja as informações que caracterizam a geometria do sistema;
- Parâmetros descrevendo as propriedades físicas do material, como densidade, coeficiente de expansão térmica, resistência à corrosão, etc.;
- Parâmetros descrevendo as leis constitutivas dos materiais, como por exemplo: módulo de Young, coeficiente de poisson, módulo de cisalhamento, etc.;
- Parâmetros que descrevem o carregamento do sistema, tais como pressão (devido à ação do vento, ondas, etc.), estado de pré-tensões, um campo de tensões induzidas pela temperatura, etc.;
- Parâmetros envolvendo as condições de contorno, como deslocamentos, contatos, entre outros.

As respostas por sua vez usualmente incluem:

- Campo de deslocamentos, ou deslocamentos nodais no contexto do método dos elementos finitos;
- Componentes do tensor de deformações;
- Componentes do tensor de tensões e as grandezas derivadas a partir deste, como tensões equivalentes, índices de falha (derivados a partir de critérios de falha), etc.

2.6.3 Propagação de incertezas (Passo C)

Considerando o modelo $\mathcal{M} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{X})$, supondo que a descrição probabilística dos parâmetros de entrada é dada em termos do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} , o vetor de variáveis aleatórias de resposta pode ser definido por:

$$\mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{X}) \quad (2.9)$$

O objetivo primário da propagação de incertezas é o estudo do conteúdo probabilístico da resposta y , mais precisamente sua FDPC $f_X(x)$. Na prática, a FDPC não pode ser determinada diretamente pela falta ou ausência de observações que permitam sua caracterização, exceto em casos especiais como problemas acadêmicos. Sendo assim, esta função usualmente é construída a partir das informações existentes sobre as funções de distribuição marginais de cada variável e, em alguns contextos, os coeficientes de correlação entre cada par de variáveis aleatórias. Inúmeros métodos para propagação de incertezas foram propostos ao longo dos anos, no entanto neste trabalho o enfoque será dado nos métodos de confiabilidade estrutural. Esses métodos serão explorados na Seção 2.7, Seção 2.8 e Seção 2.9.

2.7 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Pode-se definir a confiabilidade de um elemento, componente ou sistema de engenharia como a probabilidade de que este não falhe, ou o grau de confiança com que este sistema atenda aos requisitos estabelecidos em projeto, durante um dado período (vida útil especificada), respeitadas as condições de operação, uso, manutenção e projeto. O termo é também associado à probabilidade de sucesso (Beck, 2019).

A confiabilidade é, em termos gerais, o complemento da probabilidade de falha, outro conceito importante no contexto da teoria de confiabilidade estrutural. A probabilidade de falha é a probabilidade de que o sistema falhe, não atendendo aos critérios e especificações de projeto, para a vida útil determinada, apesar de respeitadas as condições de operação, uso, manutenção e projeto do sistema.

A determinação da probabilidade de falha do sistema de engenharia com respeito aos requisitos a serem satisfeitos, consideradas as incertezas decorrentes da descrição do modelo do sistema físico e/ou de seu ambiente, é o objetivo primário de uma análise de confiabilidade. Os requisitos a serem cumpridos pela estrutura incluem a segurança contra o colapso, limitações quanto a danos que esta possa sofrer, deslocamentos máximos e outros critérios. Cada um destes requisitos pode ser designado por um ou mais estados limites. Outra definição possível para a probabilidade de falha é uma medida da propensão da estrutura à violação dos estados limites. Neste contexto “violação” pode ser entendida como uma condição indesejada para o sistema estrutural.

Cada modo de falha pode ser matematicamente expresso por uma função de estado limite $g(\mathbf{X}, \mathcal{M}(\mathbf{X}))$, a qual depende dos parâmetros de entrada e das respostas. Convencionalmente a função de estado limite é formulada de tal forma que:

- $\Omega_f = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ é o domínio de falha formado por todos os pontos do espaço amostral de \mathbf{X} que levam à falha da estrutura;

- $\Omega_s = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) > 0\}$ é o conjunto complementar ao domínio de falha.

O conjunto de pontos $\{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) = 0\}$ define a superfície de estado limite. Denotando por $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, a função densidade de probabilidade conjunta do vetor coluna de variáveis aleatórias \mathbf{X} , então a probabilidade de falha do sistema é:

$$p_f = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

O uso da formulação mostrada na EQUAÇÃO 2.10 supõe que a função densidade de probabilidade conjunta do vetor \mathbf{X} exista, e define a probabilidade de falha como essa integração, entretanto, a FDPC raramente é conhecida, impossibilitando a resolução da EQUAÇÃO 2.10 por integração direta (Lemaire, 2013). Assim sendo, o cálculo dessa integral de forma analítica é inviável para a maioria dos problemas.

Segundo Melchers e Beck (2018) a EQUAÇÃO 2.10 pode ser solucionada por simplificação ou tratamento numérico (ou ainda por ambas as abordagens conjuntamente) do (i) processo de integração, (ii) do integrando $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ e (iii) da definição do domínio da falha Ω_f . Ainda conforme estes mesmos autores, duas abordagens principais emergiram na resolução deste problema:

1. Métodos que evitam o processo de integração, transformando o integrando $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ em uma FDPC multi-normal e utilizando certas propriedades notáveis que permitem a determinação, de forma aproximada, da probabilidade de falha. Tais abordagens são conhecidas como métodos de “segundo momento de primeira ordem” e os seus desenvolvimentos (*First Order Reliability Method-FORM* e *Second Order Reliability Method-SORM*);
2. Abordagens que utilizam os chamados métodos de Monte Carlo, técnicas de aproximação numéricas que se baseiam em amostragens aleatórias para efetuar a integração multidimensional exigida pela EQUAÇÃO 2.10.

2.8 MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM: FORM

O método de confiabilidade de primeira ordem (FORM) é um método de transformação, assim como os métodos *First Order Second Moment* (FOSM) e *Second Order Reliability Method* (SORM). Estes métodos recebem esta denominação pois envolvem uma transformação, ou mapeamento do vetor de variáveis aleatórias do problema, $\mathbf{X} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^M$, com função conjunta de distribuição de probabilidades arbitrária, em um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{U} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^M$, com distribuição normal padrão, sendo n o número de variáveis aleatórias do problema.

O conjunto \mathbb{X} forma o chamado espaço de projeto, no qual as variáveis aleatórias assumem dimensões físicas (exemplo: MPa, kN, m, mm, etc.). Já o conjunto \mathbb{U} é denominado como "espaço normal padrão", onde as variáveis aleatórias são adimensionais, com média nula e desvio-padrão unitário. Os mapeamentos que levam de $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$ para $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$ constituem a base dos métodos de transformação.

O FORM envolve a construção de uma FDPC $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ com base nas distribuições marginais e nos coeficientes de correlação entre pares de variáveis aleatórias, bem como a transformação desta para o espaço normal padrão \mathbb{U} .

O primeiro passo para aplicação do método FORM consiste nessa reformulação do problema no espaço normal padrão, utilizando uma transformação isoprobabilística $\mathbf{U} = \mathcal{T}(\mathbf{X})$, onde o vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ é transformado em um vetor de variáveis aleatórias independentes e com distribuição normal padrão multivariada $\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_M)$. Dois tipos de transformação tem sido amplamente utilizados no contexto da confiabilidade estrutural:

- A transformação de Rosenblatt (Rosenblatt, 1952), introduzida no contexto da confiabilidade estrutural por Hohenbichler e Rackwitz (1981);
- A transformação de Nataf (Nataf, 1962), introduzida no contexto das aplicações estruturais por Der Kiureghian e Liu (1986).

Empregando uma destas transformações (as quais são melhor abordadas no Apêndice 3), a EQUAÇÃO 2.10 é reescrita como:

$$p_f = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M: g(\mathbf{u}) \leq 0\}} \varphi_M(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (2.11)$$

onde:

$g(\mathbf{u}) = g(\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{u}))$ é a função de estado limite avaliada no espaço normal padrão;

$\varphi_M(\mathbf{u})$ é a função distribuição de probabilidades normal multivariada. A função densidade de probabilidade normal multivariada é dada por:

$$\varphi_M(\mathbf{u}) = (2\pi)^{-M/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(u_1^2 + \dots + u_M^2)\right) \quad (2.12)$$

Essa FDP é esfericamente simétrica, com simetria centrada em sua origem, depende apenas de $\|\mathbf{u}\|^2$, é máxima na origem e decresce exponencialmente com o argumento da função $\exp(-\|\mathbf{u}\|^2/2)$. Portanto, os pontos que mais contribuem na integração da EQUAÇÃO 2.11 são os pontos do domínio de falha mais próximos da origem no espaço padrão \mathbb{U} . O método FORM tira proveito desta propriedade realizando uma aproximação linear da superfície de estado limite na região mais

próxima da origem do espaço normal padrão. Com isso, o ponto sobre a fronteira da superfície de falha mais próximo da origem do espaço padrão é o ponto sobre o domínio de falha de maior probabilidade de ocorrência, chamado ponto de projeto \mathbf{u}^* , também conhecido na literatura como *Most Probable Point* (MPP).

O segundo passo do FORM consiste em encontrar o ponto de projeto \mathbf{u}^* , o qual é obtido pela resolução do problema de otimização com restrições:

$$\mathbf{u}^* = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M}{\operatorname{argmin}} \{ \|\mathbf{u}\|, g(\mathbf{u}) = 0 \} \quad (2.13)$$

Diversos algoritmos disponíveis na literatura se aplicam à resolução do problema definido pela EQUAÇÃO 2.13. Dentre eles destaca-se o algoritmo de Hasofer-Lind e Rackwitz-Fiessler (HLRF) (Rackwitz; Fiessler, 1978) e o algoritmo de Hasofer-Lind e Rackwitz-Fiessler melhorado iHLRF (*improved Hasofer-Lind and Rackwitz-Fiessler*) (Zhang; Der Kiureghian, 1995).

A norma do ponto de projeto \mathbf{u}^* representa uma importante quantidade na confiabilidade estrutural, conhecida como índice de confiabilidade de Hasofer-Lind (Hasofer; Lind, 1974):

$$\beta_{HL} = \|\mathbf{u}^*\| \quad (2.14)$$

O índice de confiabilidade β_{HL} está diretamente associado à probabilidade de falha exata p_f de uma função de estado limite linear no espaço normal padrão:

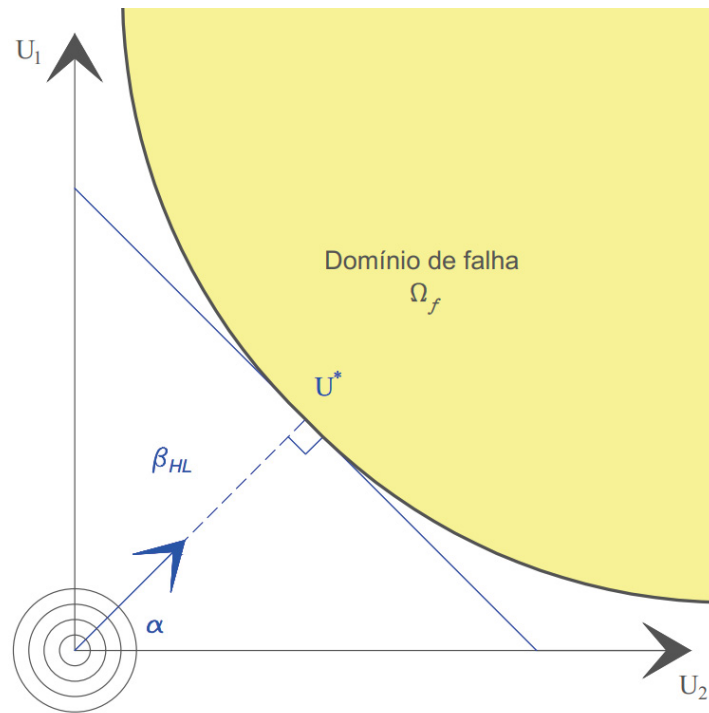
$$p_f = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (2.15)$$

onde:

Φ é a função distribuição de probabilidade normal acumulada.

O terceiro e último passo do algoritmo FORM envolve a aproximação linear da função de estado limite como o hiperplano tangente desta função no ponto de projeto. E então, a probabilidade de falha p_f calculada para essa aproximação linear da superfície de falha pode ser obtida de forma exata. Para um caso em duas dimensões a FIGURA 9 ilustra graficamente este tipo de aproximação, representando o escalar β_{HL} que geometricamente é a menor distância da função de estado limite à origem, a função de estado limite aproximada por sua reta tangente no ponto de projeto \mathbf{u}^* , além do domínio de falha Ω_f e um vetor unitário α ortogonal à essa reta tangente, que é o vetor gradiente de $g(\mathbf{u}^*)$.

FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA ESTIMATIVA DA p_f PELO FORM VIA LINEARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO LIMITE EM TORNO DO PONTO DE PROJETO



FONTE: O autor (2024).

De forma mais geral, para problemas não-lineares a EQUAÇÃO 2.13 pode ser enunciada utilizando um multiplicador de Lagrange λ , resultando num problema de otimização sem restrições. O Lagrangeano do problema pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \lambda g(\mathbf{u}) \quad (2.16)$$

Se a solução do problema de otimização existe, as condições de estacionariedade são as seguintes:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \lambda^*) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\mathbf{u}^*, \lambda^*) &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Que podem ser escritas explicitamente como:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}^*) &= 0 \\ \mathbf{u}^* + \lambda^* \nabla g(\mathbf{u}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

A primeira condição garante que o ponto de projeto pertença à superfície de estado limite. A segunda condição da EQUAÇÃO 2.18 assegura que o vetor \mathbf{u}^* é colinear ao vetor normal à superfície de estado limite no ponto \mathbf{u}^* , em outras palavras, garante que o vetor \mathbf{u}^* seja colinear ao vetor $\nabla g(\mathbf{u}^*)$. A abordagem mais utilizada para solução deste problema é o algoritmo HLRF (Rackwitz; Flessler, 1978).

A ideia básica do algoritmo HLRF é resolver iterativamente um problema linear em torno de um ponto. A cada iteração a função de estado limite é aproximada como uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, em torno de um ponto inicial arbitrário \mathbf{u}_k :

$$g(\mathbf{u}) \approx g(\mathbf{u}_k) + \nabla g|_{\mathbf{u}_k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_k) \quad (2.19)$$

As condições descritas pela EQUAÇÃO 2.18 são expressas para cada iteração k por:

$$\nabla g|_{\mathbf{u}_k} \cdot (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) + g(\mathbf{u}_k) = 0 \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \lambda \nabla g|_{\mathbf{u}_k} \quad (2.21)$$

Realizando algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\nabla g|_{\mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k - g(\mathbf{u}_k)}{\|\nabla g|_{\mathbf{u}_k}\|^2} \nabla g|_{\mathbf{u}_k} \quad (2.22)$$

Introduzindo o vetor unitário α_k :

$$\alpha_k = -\frac{\nabla g|_{\mathbf{u}_k}}{\|\nabla g|_{\mathbf{u}_k}\|} \quad (2.23)$$

Obtém-se finalmente:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \left[\alpha_k \mathbf{u}_k + \frac{g(\mathbf{u}_k)}{\|\nabla g|_{\mathbf{u}_k}\|} \right] \alpha_k \quad (2.24)$$

O índice de confiabilidade β_k associado a k -ésima iteração pode ser então estimado pela equação:

$$\beta_k = \alpha_k \mathbf{u}_k + \frac{g(\mathbf{u}_k)}{\|\nabla g|_{\mathbf{u}_k}\|} \quad (2.25)$$

Numa situação hipotética de convergência perfeita do algoritmo: $g(\mathbf{u}_k) = 0$, o que conduziria a $\beta_k = \beta_{HL} = \alpha \cdot \mathbf{u}_k$. Entretanto, na prática isso não ocorre e o algoritmo é executado até que algum(ns) critério(s) de parada seja(m) satisfeito(s), como por exemplo a estabilidade de β_k ou \mathbf{u}_k entre iterações e a proximidade de $g(\mathbf{u}_{k+1})$ em relação à superfície de estado limite (Marelli *et al.*, 2024).

O algoritmo HLRF é um caso particular de uma ampla gama de algoritmos iterativos, bastante usados em problemas de otimização, chamados de algoritmos de gradiente descendente. Esta classe de algoritmos envolve um esquema iterativo da forma:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k \quad (2.26)$$

onde:

λ_k é o passo da k -ésima iteração;

\mathbf{d}_k é a direção de descida da k -ésima iteração. Dada por:

$$\mathbf{d}_k = \frac{\nabla g|_{\mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k - g(\mathbf{u}_k)}{\|\nabla g|_{\mathbf{u}_k}\|^2} \nabla g|_{\mathbf{u}_k} + \mathbf{u}_k \quad (2.27)$$

No algoritmo HLRF, originalmente formulado por Rackwitz e Flessler (1978) $\lambda_k = 1$. Na versão "melhorada" deste algoritmo conhecida como iHLRF, proposta por Zhang e Der Kiureghian (1995), o cálculo do passo é feito de forma mais sofisticada, baseado na premissa de que $g(\mathbf{u})$ é diferenciável. Estes autores introduziram o conceito de uma função mérito:

$$m(\mathbf{u}_k) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_k\| + c_k \|g(\mathbf{u})\| \quad (2.28)$$

onde:

c_k é um parâmetro real de penalização, tal que $c_k > \frac{\|\mathbf{u}_k\|}{\|\nabla g(\mathbf{u}_k)\|}$.

Se $\|\nabla g(\mathbf{u})\| \geq \delta$, sendo δ um critério de tolerância para a norma da função de estado limite no ponto, então, o parâmetro de penalização c_k é determinado por:

$$c_k = \gamma \max \left[\frac{\|\mathbf{u}_k\|}{\|\nabla g(\mathbf{u}_k)\|}, \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k\|^2}{|g(\mathbf{u}_k)|} \right] \quad (2.29)$$

Caso contrário ($\|\nabla g(\mathbf{u})\| < \delta$):

$$c_k = \gamma \frac{\|\mathbf{u}_k\|}{\|\nabla g(\mathbf{u}_k)\|} \quad (2.30)$$

onde γ é um parâmetro para garantia da condição de convergência do algoritmo iHLRF.

Pode-se provar que a função $m(\mathbf{u}_k)$ tem mínimo global no mesmo ponto que o problema dado pela EQUAÇÃO 2.13, bem como a mesma direção descendente \mathbf{d} . Para determinação do passo ótimo λ_k , a regra de Armijo pode ser empregada (Zhang; Der Kiureghian, 1995):

$$\lambda_k = \max_s \{b^s \mid m(\mathbf{u}_k + b^s \mathbf{d}_k) - m(\mathbf{u}_k) \leq -ab^s \nabla m(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{d}_k\} \quad (2.31)$$

onde:

$a, b \in (0, 1)$ são parâmetros pré-definidos, e $s \in \mathbb{N}$.

2.9 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Conforme mencionado na Seção 2.7, devido à complexidade da integração da EQUAÇÃO 2.10, a técnica de simulação de Monte Carlo (SMC) se apresenta como uma

abordagem consagrada para a determinação de uma aproximação da probabilidade de falha. Utilizando uma função indicadora $I[\mathbf{x}]$ tal que:

$$\begin{aligned} I[\mathbf{x}] &= 1 \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega_f \text{ (falha)} \\ I[\mathbf{x}] &= 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega_s \text{ (sobrevivência)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

A EQUAÇÃO 2.10 torna-se uma integração sobre todo o domínio:

$$p_f = \int_{\Omega} I[\mathbf{x}] f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.33)$$

Por definição, a EQUAÇÃO 2.33 representa o valor esperado da função indicadora $I[\mathbf{x}]$ com respeito a $f_X(\mathbf{x})$. O valor esperado da probabilidade de falha pode ser estimado com base em uma amostra de tamanho finito, onde o vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} é amostrado, e, para cada amostra, a função de estado limite $g(\mathbf{x}^k)$ é avaliada. Matematicamente isso se traduz como (Beck, 2019):

$$p_f \approx \widehat{p}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}^k] = \frac{n_f}{n_s} \quad (2.34)$$

onde:

\widehat{p}_f é o estimador da probabilidade de falha;

n_s é o número de amostras (subíndice $()_s$ do inglês *samples*);

n_f é o número de pontos no domínio de falha.

A EQUAÇÃO 2.34 representa um estimador não tendencioso da probabilidade de falha, visto que $p_f = E[I[\mathbf{x}]]$.

Pelo fato do estimador na EQUAÇÃO 2.34 ser calculado com base numa amostra de tamanho finito, este está sujeito a um erro estatístico, o qual corresponde à variância de $I[\mathbf{x}]$ por ser um estimador não-tendencioso. A variância pode ser estimada pela expressão (Beck, 2019):

$$\text{Var}[\widehat{p}_f] = \frac{1}{(n_s - 1)} \sum_{k=1}^{n_s} (I[\mathbf{x}^k] - \widehat{p}_f)^2 \quad (2.35)$$

O coeficiente de variação de \widehat{p}_f é obtido conforme a expressão a seguir, válida para valores comuns de probabilidade de falha ($p_f \ll 1$):

$$\text{COV}_{\widehat{p}_f} = \frac{\sqrt{\text{Var}[\widehat{p}_f]}}{E[\widehat{p}_f]} \approx \frac{1}{\sqrt{n_s p_f}} \therefore n_s = \frac{1}{p_f \delta^2_{\widehat{p}_f}} \quad (2.36)$$

onde:

$\text{COV}_{\widehat{p}_f}$ é o coeficiente de variação do estimador da probabilidade de falha.

$E[\widehat{p}_f]$ é o valor esperado do estimador da probabilidade de falha.

A partir da EQUAÇÃO 2.36 é possível derivar também o número de simulações necessário para atingir um determinado $COV_{\widehat{p}_f}$. Por exemplo, a avaliação de uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-p} com $COV_{\widehat{p}_f} \approx 0,05 = 5 \cdot 10^{-2}$, requer $n_S > 4 \cdot 10^{p+2}$ amostras.

Em problemas típicos de confiabilidade estrutural a probabilidade de falha costuma ser da ordem de 10^{-3} a 10^{-6} , fato que tende a tornar o número de amostras proibitivo, sobretudo em situações onde cada avaliação da função indicadora implica na solução de modelos complexos com um grande número de graus de liberdade e alto custo computacional (Beck, 2019).

O método de Monte Carlo quando aplicado conforme a dedução apresentada, sem utilização de técnicas de redução de variância é conhecido como Monte Carlo Simples, Direto, Bruto ou Cru.

Em posse das Equações (EQUAÇÃO 2.34 e EQUAÇÃO 2.35), o intervalo de confiança (IC) do resultado da simulação pode ser determinado:

$$\widehat{p}_f - k \frac{\sqrt{\text{Var}[\widehat{p}_f]}}{\sqrt{n_S - 1}} \leq \widehat{p}_f \leq \widehat{p}_f + k \frac{\sqrt{\text{Var}[\widehat{p}_f]}}{\sqrt{n_S - 1}} \quad (2.37)$$

onde:

k é o parâmetro relacionado com o nível de confiança desejado, segundo uma distribuição normal.

Probabilidades de falha são os resultados diretos das simulações de Monte Carlo. Entretanto, de forma análoga aos métodos de transformação como o FORM e SORM (Seção 2.8), um índice de confiabilidade equivalente pode ser determinado para a simulação de Monte Carlo:

$$\beta_{MC} = -\Phi^{-1}(\widehat{p}_f) \quad (2.38)$$

Para endereçar o problema do número de simulações proibitivo para determinação da p_f pelo método de Monte Carlo Bruto, diversas técnicas de redução de variância foram desenvolvidas. Segundo Beck (2019), estas se dividem em técnicas de geração de amostras e técnicas de amostragem inteligente. Neste trabalho será dado enfoque na técnica de geração de amostras por hipercubo latino.

A amostragem por hipercubo latino (*Latin Hyper-cube Sampling* ou LHS (amostragem por hipercubo latino)) consiste em uma técnica de amostragem estratificada, onde o domínio de cada variável aleatória do problema é dividido em faixas equiprováveis, visando produzir amostras mais bem distribuídas no espaço amostral do que aquelas obtidas pelo método de Monte Carlo Bruto (Olsson *et al.*, 2003). Isto permite a obtenção de uma cobertura esparsa e homogênea do espaço amostral em problemas multidimensionais.

Supondo um conjunto de amostras M -dimensional, com VAs independentes, sendo M o número de VAs do problema. Estabelecendo uma matriz \mathbf{P} de dimensões $n_S \times M$, na qual cada uma das M colunas é uma permutação aleatória de $1, \dots, M$, e uma matriz \mathbf{R} de dimensões $n_S \times M$ cujos componentes são números aleatoriamente distribuídos entre $(0, 1)$. Essas matrizes constituem o plano de amostragem base, representado pela matriz \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n_S} (\mathbf{P} - \mathbf{R}) \quad (2.39)$$

Cada elemento de \mathbf{S} , s_{ij} , é então mapeado de acordo com a FDP marginal:

$$\widehat{x}_{ij} = \left\{ F_{X_j}^{-1}(s_{ij}) \right\}_{i=1, \dots, M}^t \quad (2.40)$$

onde:

$F_{X_j}^{-1}$ representa a inversa da função de distribuição acumulada da variável X_j ;
 \widehat{x}_{ij} constitui as entradas do vetor $\widehat{\mathbf{x}}_i$ que reúne todos os dados de entrada para computar as simulações.

Em suma, a amostragem por LHS é realizada da seguinte forma:

- Passo 1: O intervalo de cada variável de entrada é estratificado em células isoprobabilísticas¹;
- Passo 2: Uma célula é escolhida uniformemente entre todas as células disponíveis;
- Passo 3: O número aleatório é obtido pela inversa da função distribuição de probabilidade cumulativa da VA X localmente na célula escolhida;
- Passo 4: Todas as células que possuem um estrato comum com a célula anterior são separadas da lista de células disponíveis.

2.10 METAMODELAGEM: REGRESSÃO COM PROCESSOS GAUSSIANOS OU KRIGAGEM

Diversas vezes, no contexto das áreas envolvendo a engenharia, emergem problemas onde há a necessidade da avaliação de modelos, sejam estes analíticos ou numéricos, da ordem de centenas, milhares ou até milhões de vezes. As simulações de Monte Carlo são um exemplo de abordagem onde isso ocorre com frequência, tornando inviável a sua aplicação em determinadas situações devido ao elevado custo

¹ São regiões (ou “células”) em um espaço amostral ou domínio de uma FDP nas quais a probabilidade de se observar um valor dentro de cada região é idêntica.

computacional, o que é potencializado com o aumento do grau de complexidade dos modelos. Essa problemática pode ser contornada com a utilização dos chamados metamodelos (*meta-model* ou *surrogate model*).

Metamodelos são representações mais aproximadas (e analíticas) das respostas de modelos computacionais de alta fidelidade. Matematicamente, a metamodelagem visa aproximar uma resposta ou comportamento do modelo computacional \mathcal{M} , de modo que:

$$\tilde{y} = \tilde{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \approx \mathcal{M}(\mathbf{x}) \quad (2.41)$$

onde:

\tilde{y} é a resposta do metamodelo $\tilde{\mathcal{M}}$;

No contexto da mecânica, \mathcal{M} pode ser um modelo numérico em EF, elementos de contorno, elementos discretos, dentre outros. Já no contexto da confiabilidade, em geral \mathcal{M} representa a função de estado limite, a qual pode conter de forma implícita um modelo numérico em sua formulação. A metamodelagem se aplica justamente no sentido de substituir o modelo \mathcal{M} com alto custo computacional, onde uma única avaliação poderia consumir diversas horas ou até mesmo dias/semanas, por um modelo simplificado, mais simples e barato computacionalmente. Dentre as diversas técnicas de metamodelagem presentes na literatura, a Krigagem é uma que se destaca em termos de precisão e eficiência (Kroetz, 2015; Kroetz *et al.*, 2017).

2.11 DEFINIÇÕES GERAIS

A Krigagem ou regressão com Processo Gaussiano (PG) é uma técnica que assume as respostas do modelo $\tilde{\mathcal{M}}$ como realizações de um PG indexado por $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R}^M$. Pode-se descrever um metamodelo por Krigagem \mathcal{M}^K pela seguinte equação (Santner *et al.*, 2003):

$$\mathcal{M}^K(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.42)$$

onde:

$\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é o valor médio do PG, consistindo de P_{func} funções arbitrárias $\{f_j; j = 1, \dots, P_{func}\}$ e seus coeficientes correspondentes a determinar $\{\beta_j; j = 1, \dots, P_{func}\}$;

$Z(\mathbf{x}, \omega)$ é um Processo Gaussiano estacionário homogêneo, de variância constante σ^2 e média nula. O espaço de probabilidade relativo ao ponto amostral ω é definido em termos de uma função de correlação $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \boldsymbol{\theta})$, que depende dos pares de pontos amostrais \mathbf{x} e \mathbf{x}' , e de seus hiperparâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

Seja $X = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}$ um conjunto de dados observados, também chamados de pontos de suporte, e assumindo que as respostas do modelo correspondente sejam livres de ruído $\mathcal{Y} = \{y^{(1)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, y^{(N)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(N)})\}$, a ideia central da Krigagem é fornecer uma previsão $\mathcal{M}^K(\mathbf{x})$ para um novo ponto desconhecido \mathbf{x} , com base na

premissa de que o vetor de previsões $\widehat{Y}(\mathbf{x})$ neste novo ponto e o vetor de respostas do modelo \mathcal{Y} no conjunto de dados observados, seguem uma distribuição conjunta Gaussiana definida por:

$$\begin{bmatrix} \widehat{Y}(\mathbf{x}) \\ \mathcal{Y} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_{M+1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} \\ [\mathbf{F}]\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}) & [\mathbf{R}] \end{bmatrix} \right) \quad (2.43)$$

onde:

$[\mathbf{F}]$ é uma matriz $N \times P$ contendo os valores das funções f_j nos pontos de suporte \mathcal{X} :

$$F_{ij} = f_j(\mathbf{x}^{(i)}), i = 1, \dots, N; j = 0, \dots, P_{func} \quad (2.44)$$

$\mathbf{r}(\mathbf{x})$ é o vetor de correlação cruzada entre o ponto previsto \mathbf{x} e cada um dos pontos de suporte:

$$r_i = R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta}), i = 1, \dots, N \quad (2.45)$$

$[\mathbf{R}]$ é uma matriz $N \times N$ de correlação com elementos:

$$R_{ij} = R(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}; \boldsymbol{\theta}), i, j = 1, \dots, N \quad (2.46)$$

A média e a variância do vetor de variáveis aleatórias Gaussianas $\widehat{Y}(\mathbf{x})$ condicionada ao conjunto de dados observados \mathcal{X} e \mathcal{Y} , pode ser computada pelas expressões (Santner *et al.*, 2003):

$$\mu_{\widehat{Y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{R}]^{-1} (\mathcal{Y} - [\mathbf{F}]\boldsymbol{\beta}) \quad (2.47)$$

$$\sigma_{\widehat{Y}}^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left(1 - \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \left([\mathbf{F}]^T [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{F}] \right)^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \quad (2.48)$$

sendo $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T [\mathbf{R}^{-1}] \mathbf{r}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

2.12 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO

A função de correlação $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \boldsymbol{\theta})$ no contexto de campos aleatórios ou processos gaussianos, descreve o grau de correlação do parâmetro observado em dois pontos em função da distância entre eles.

Na literatura existem diversos tipos de funções de correlação, em geral definidas por um par de parâmetros de entrada unidimensionais $x, x' \in \mathbb{R}$ e parametrizada por $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}_{>0}$, comumente referido na literatura como comprimento de escala característico, comprimento de correlação ou parâmetro de escala (Lataniotis *et al.*, 2024).

Dentre as funções de correlação, a família de funções mais usual em aplicações gerais, e também muito empregada em estudos envolvendo análise de elementos finitos estocásticos de estruturas compósitas, é a família exponencial, tanto em estudos sem validações experimentais (Sriramula; Chryssanthopoulos, 2009), quanto em trabalhos

com comprovações experimentais para o caso de painéis compósitos PRFV (Sriramula; Chryssanthopoulos, 2013). As funções da família exponencial são definidas como:

Exponencial:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \theta) = \exp\left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\theta}\right] \quad (2.49)$$

Gaussiana ou Exponencial Quadrática:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \theta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\theta}\right)^2\right] \quad (2.50)$$

Quando a dimensão dos dados de entrada é maior que um, é possível a construção de funções de correlação multi-dimensionais a partir das unidimensionais.

O presente trabalho se limitará às funções de correlação ditas isotrópicas do tipo elipsoidais. Uma função de correlação é dita isotrópica quando apresenta um mesmo comportamento para todas as dimensões, com um único parâmetro de escala θ associado a todas as dimensões de entrada. Conforme Williams e Rasmussen (2006), funções de correlação elipsoidais são construídas substituindo o termo $\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\theta}$ por h , que é calculado como:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \theta) = R(h), \quad h = \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{x_i - x'_i}{\theta_i}\right)^2\right]^{0.5} \quad (2.51)$$

Como $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \theta)$ é isotrópica:

$$h = \frac{1}{\theta} \left[\sum_{i=1}^M (x_i - x'_i)^2\right]^{0.5} \quad (2.52)$$

sendo M o número de dados de entrada.

2.13 DETERMINAÇÃO DOS HIPERPARÂMETROS

Conforme visto nas seções (Seção 2.11 e Seção 2.12) a matriz de correlação $[\mathbf{R}]$, e conseqüentemente o vetor $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 dependem do conhecimento de θ , o vetor de hiperparâmetros a ser estimado.

Um método bastante usual para determinação de θ no contexto da krigagem é o método da máxima verossimilhança, o qual busca pelo conjunto de hiperparâmetros que maximizem a probabilidade da ocorrência de $\mathcal{Y} = \{y^{(1)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, y^{(N)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(N)})\}^T$. Conforme abordado na Seção 2.11, assume-se que \mathcal{Y} segue uma distribuição conjunta Gaussiana, com função de probabilidade:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \theta; \mathcal{Y}) = \frac{(\det[\mathbf{R}])^{-1/2}}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathcal{Y} - [\mathbf{F}]\boldsymbol{\beta})^T [\mathbf{R}]^{-1}(\mathcal{Y} - [\mathbf{F}]\boldsymbol{\beta})\right] \quad (2.53)$$

Maximizando a função descrita pela EQUAÇÃO 2.53, obtém-se o vetor de coeficientes² β e σ^2 como funções dos hiperparâmetros θ (Dubourg, 2011; Santner *et al.*, 2003):

$$\beta = \left(\mathbf{F}^T [\mathbf{R}^{-1}] \mathbf{F} \right)^{-1} \mathbf{F}^T [\mathbf{R}^{-1}] \mathcal{Y} \quad (2.54)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (\mathcal{Y} - [\mathbf{F}] \beta)^T [\mathbf{R}]^{-1} (\mathcal{Y} - [\mathbf{F}] \beta) \quad (2.55)$$

Com base nas equações (EQUAÇÃO 2.54 e EQUAÇÃO 2.55), os hiperparâmetros θ podem ser então estimados pelo seguinte problema de otimização:

$$\widehat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}_\theta} [-\log L(\theta; \mathcal{Y})] \quad (2.56)$$

$$\widehat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}_\theta} \frac{1}{2} \left[\log(\det \mathbf{R}) + N \log(2\pi\sigma^2) + N \right] \quad (2.57)$$

Para solução do problema de otimização descrito pela EQUAÇÃO 2.57, no presente trabalho empregou-se o método baseado em gradiente de ponto interior L-BFGS (Byrd *et al.*, 1999; Nocedal, 1980).

² Uma expressão equivalente para o vetor de coeficientes pode ser obtida por mínimos quadrados.

3 ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE FIBRAS E RESINAS: AQUISIÇÃO DOS DADOS E MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS

O presente capítulo, assim como os dois que se seguem contemplam um estudo de caso, no qual a modelagem das incertezas na distribuição de propriedades do material, e seu impacto na probabilidade de falha foi analisado pela definição de dois modelos probabilísticos. No primeiro assume-se que as propriedades da seção transversal são distribuídas de forma homogênea; no segundo a variabilidade espacial das propriedades da seção é considerada. Construíram-se ambos estes modelos com base em dados experimentais de teores de fibra e resina de perfis PPRFV de seção "I", sendo as propriedades do material derivadas a partir deste parâmetro.

Como a experimentação não compõe a proposta do presente trabalho, buscou-se por fonte de dados e resultados experimentais para quantificação e modelagem das incertezas e previsão das propriedades mecânicas e físicas dos materiais. Neste capítulo, se faz uma explanação dos procedimentos e da metodologia empregados na obtenção dos resultados experimentais disponíveis em literatura, utilizados como base para a avaliação da distribuição não homogênea do teor de resina e fibras.

A base de dados relacionada às medidas experimentais do teor de resinas, assim como os parâmetros geométricos das seções I analisadas, e a metodologia para derivação das propriedades mecânicas foram baseadas na publicação de Feng *et al.* (2022). Neste artigo, o teor de resina foi selecionado como critério para mensurar a uniformidade do material dos perfis PPRFV. Feng *et al.* (2022) utilizam o teor de resina como parâmetro para descrever quantitativamente a distribuição não homogênea de fibras e resinas pela sua fácil aferição e por sua relação com o volume das fibras, o qual pode ser utilizado diretamente no cálculo das propriedades mecânicas do material por meio de equações empíricas.

O programa experimental empregado por estes autores será brevemente explicado e maior enfoque será dado no procedimento para determinação das propriedades mecânicas usadas como dado de entrada para as análises de flambagem com o método dos elementos finitos.

3.1 PROGRAMA EXPERIMENTAL DE FENG *et al.* (2022) PARA MENSURAÇÃO DO TEOR DE RESINA

No estudo apresentado por Feng *et al.* (2022), o teor de resina foi medido pelo método da calcinação preconizado pelas normas GB/T 2577 (2005) e ISO 1172: 1996 (s.d.). A calcinação é um processo químico no qual o material compósito é aquecido a

altas temperaturas, o que resulta na decomposição térmica ou combustão da matriz polimérica, deixando o material remanescente, as fibras de reforço, intactas (Bernatas *et al.*, 2021; Pimenta; Pinho, 2011).

Por meio deste processo, o cálculo da taxa de resina é dado pela razão entre a diferença do peso da amostra e cadinho (ou crisol) pré e pós-calcinação, e o peso da amostra pré-calcinação. Matematicamente o teor de resina M_m pode ser então expresso pela relação:

$$M_m = \frac{m_2 - m_3}{m_2 - m_1} \quad (3.1)$$

onde:

m_2 é o peso da amostra somado ao do cadinho (ou crisol) pré-calcinação;

m_3 é o peso da amostra somado ao do cadinho (ou crisol) pós-calcinação;

m_1 é o peso do cadinho.

Um total de 6 seções I foram submetidas ao procedimento de ensaio para avaliação do teor de resina, visando levar em consideração discrepâncias entre fabricantes, os autores avaliaram perfis de dois fornecedores distintos, denotados como M1 e M2. O tipo de fibra empregado na composição de todos os perfis é a fibra de vidro livre de álcalis. As geometrias e tipos de resinas relacionados aos perfis avaliados nestes estudos são apresentados na TABELA 1. As dimensões do perfil são dadas pela altura total da seção d , largura da mesa b_f e pela espessura das mesas t_f e da alma t_w .

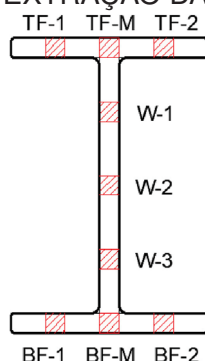
TABELA 1 – GEOMETRIA DOS PERFIS PULTRUDADOS PRFV

Seção transversal	Amostra	d (mm)	b_f (mm)	t (mm)	Fornecedor	Tipo de resina
Seção I $d \times b_f \times t_f = t_w$	1	100	70	6	M2	Epóxi
	2	102	51	6,4	M1	Viniléster
	3	120	70	8	M2	Epóxi
	4	152	76	6,35	M1	Epóxi
	5	152	80	10	M1	Epóxi
	6	200	100	9,5	M1	Epóxi

FONTE: Feng *et al.* (2022).

A FIGURA 10 especifica os locais onde as amostras para os ensaios de calcinação foram extraídas em relação à seção transversal dos perfis. O local de amostragem foi selecionado de tal modo que englobasse todas as camadas do compósito e fosse representativa das mesmas. Para as seções I, os autores extraíram amostras de nove locais, incluindo três na alma (com espaçamento igual), dois nas junções entre a alma e a mesa, e quatro nos pontos médios das mesas superior e inferior.

FIGURA 10 – LOCAIS DE EXTRAÇÃO DAS AMOSTRAS DO PERFIL



(a) Seção I

FONTE: Adaptado de Feng *et al.* (2022).

Os resultados obtidos pelos autores para o teor de resina são apresentados na TABELA 2, onde os valores médios de teor de resina de três ensaios repetidos são mostrados. São mostrados também a média e o COV calculado com base em todos os pontos de amostragem ao longo da seção transversal.

TABELA 2 – TEOR DE RESINA DAS AMOSTRAS DE PERFIL I

Amostra	Teor de resina (%)									Média (COV)
	Mesa superior			Alma			Mesa inferior			
	TF-1	TF-M	TF-2	W-1	W-2	W-3	BF-1	BF-M	BF-2	
1	20,25	21,60	20,28	20,22	20,36	19,89	20,04	21,74	20,96	20,59 (0,03)
2	23,96	28,80	23,23	32,42	33,74	33,43	22,15	27,65	23,39	27,64 (0,16)
3	23,99	27,00	23,78	29,28	29,29	30,00	25,56	27,54	25,64	26,90 (0,08)
4	25,66	27,75	21,55	33,70	33,99	31,90	28,68	30,05	28,82	29,12 (0,13)
5	30,52	33,06	30,07	29,92	30,16	30,72	26,81	25,05	31,72	29,78 (0,08)
6	26,07	27,44	27,77	30,28	30,16	29,75	20,76	24,72	21,93	26,54 (0,12)

FONTE: Adaptado de Feng *et al.* (2022).

Na maioria das amostras teores de resina superiores ocorrem na região da alma do perfil, o que é mais pronunciado em amostras com elevado desvio padrão, o que possivelmente se explica pela distribuição dos fios de fibras no molde. O maior desvio padrão observado dentre as amostras foi de 16%, reportado na 2ª amostra, seguido por 13% da 4ª amostra, em ambos os casos na região da alma ocorrem teores de resina maiores do que no restante da seção transversal.

3.2 PREVISÃO TEÓRICA DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS

No presente trabalho, o parâmetro teor de resina é utilizado como base para determinação das constantes de engenharia, e demais propriedades mecânicas dos

materiais. Esta metodologia foi empregada no trabalho de Feng *et al.* (2022), e está em conformidade com a maioria das normas de projeto existentes, as quais indicam que as propriedades mecânicas dos perfis pultrudados de PRFV são determinadas relativamente às suas distribuições/teor de fibra-resina ao longo da seção transversal. Possíveis variações das propriedades do material na direção longitudinal serão negligenciadas. É admitido que o material é transversalmente isotrópico (Feng *et al.*, 2022).

Para aplicação das equações clássicas de propriedades mecânicas de materiais PRFV, inicialmente é necessária a conversão do teor de resina para a fração do volume de fibras V_f , conforme a equação, também conhecida como regra da mistura (Alger, 1996):

$$V_f = \frac{(1 - M_m) \rho_m}{M_m \rho_f + (1 - M_m) \rho_m} \quad (3.2)$$

onde:

M_m é o teor de resina;

ρ_m é a densidade da resina;

ρ_f é a densidade da fibra.

O cálculo do módulo de elasticidade longitudinal E_1 e do coeficiente de Poisson principal maior ν_{12} se dá pelas expressões:

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (3.3)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (3.4)$$

onde:

E_f é o módulo de elasticidade da fibra;

E_m é o módulo de elasticidade da matriz (resina);

ν_f é o coeficiente de Poisson da fibra;

ν_m é o coeficiente de Poisson da resina.

O módulo de elasticidade transversal E_2 e o módulo de cisalhamento G_{12} podem

ser calculados de acordo com o modelo proposto por Huang (1999):

$$E_2 = \frac{E_f E_m [V_f + \eta_2 (1 - V_f)]}{E_m V_f + E_f \eta_2 (1 - V_f)} \quad (3.5)$$

$$\text{sendo } \eta_2 = \frac{0,2}{1 - \nu_m} \left(1, 1 - \sqrt{\frac{E_m}{E_f}} + \frac{3,5 E_m}{E_f} \right) (1 + 0,22 V_f) \quad (3.6)$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m [V_f + \eta_{12} (1 - V_f)]}{G_m V_f + G_f \eta_{12} (1 - V_f)} \quad (3.7)$$

$$\text{sendo } \eta_{12} = 0,28 + \sqrt{\frac{E_m}{E_f}} \quad (3.8)$$

da isotropia transversal resultam as relações:

$$E_3 = E_2; G_{13} = G_{12}; \nu_{13} = \nu_{12}; \nu_{32} = \nu_{23} \quad (3.9)$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (3.10)$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (3.11)$$

$$\nu_{23} \approx \nu_{12} \quad (3.12)$$

onde:

G_f é o módulo de cisalhamento da fibra;

G_m é o módulo de cisalhamento da matriz (resina);

η_2 e η_{12} são coeficientes utilizados nos cálculos de E_2 e G_{12} , respectivamente;

E_3 é o módulo de elasticidade na direção 3;

G_{23} é o módulo de cisalhamento no plano de isotropia 2-3;

ν_{21} é o coeficiente de Poisson principal menor;

ν_{23} é o coeficiente de Poisson no plano de isotropia.

3.3 MODELAGEM NUMÉRICA EM ELEMENTOS FINITOS

O comportamento à flambagem das barras sujeitas à flexão pode ser estudado a partir da modelagem computacional pelo MEF (Método dos elementos finitos), com o auxílio do *software* ANSYS MECHANICAL APDL 2024 R1 (2024b) na versão estudantil. Visando a predição da resistência da estrutura quanto à flambagem, análises de flambagem linear (*eigenvalue buckling*) foram realizadas.

3.3.1 Elementos finitos utilizados

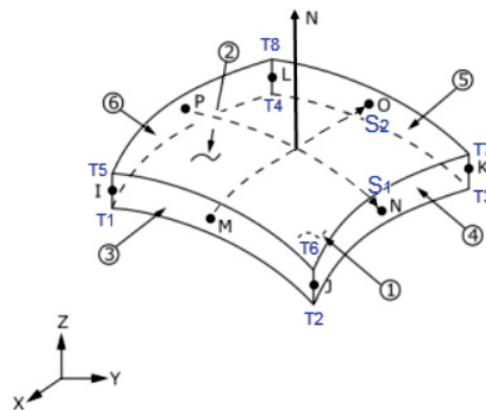
Na modelagem da estrutura foram empregados elementos de casca. Para definição da malha, com o auxílio da propriedade *offset* do ANSYS, os nós do elemento podem ser posicionados na superfície média, na parte do topo ou inferior, determinando dessa forma como a espessura é posicionada em relação à superfície de referência do elemento (Miracle *et al.*, 2001).

Definiu-se o modelo de modo que os nós fossem posicionados na superfície média para o plano da alma (metade da espessura para cada lado da superfície de referência), na superfície do topo para a mesa inferior (espessura posicionada abaixo da superfície de referência) e na superfície inferior para a mesa superior (espessura posicionada acima da superfície de referência). Dessa forma, evitou-se qualquer duplicação ou interferência da área de seção transversal no local de junção da alma com as mesas, possibilitando assim uma modelagem geometricamente mais precisa do perfil estrutural. O contato desta junção foi definido como o contato *bounded*, ou contato perfeito, onde os elementos simplesmente compartilham os nós que se sobrepõem.

A FIGURA 11, retirada do Manual ANSYS MECHANICAL APDL 2024 R1 (2024a), mostra a geometria, a localização dos nós e a direção normal do elemento. O elemento SHELL281 possui 8 nós (indicados na figura como I, J, K, L, M, N, O e P), 6 graus de liberdade por nó, e é adequado para aplicações lineares, de grande rotação e/ou não lineares com grandes deformações.

A teoria de deformação por cisalhamento implementada no elemento é a de primeira ordem, também referida na literatura como teoria de Mindlin (1951) e Reissner (1945). Este elemento é adequado para análise de cascas finas a moderadamente espessas (ANSYS MECHANICAL APDL 2024 R1, 2024b).

FIGURA 11 – GEOMETRIA DO ELEMENTO SHELL281 DA BIBLIOTECA DE ELEMENTOS DO ANSYS



FONTE: ANSYS MECHANICAL APDL 2024 R1 (2024).

3.3.2 Condições de contorno e configurações de análise

Conforme apresentado na Seção 2.5, em vigas sem restrição lateral, suficientemente esbeltas, e sujeitas à flexão em torno do eixo de maior inércia o fenômeno de flambagem lateral com torção tende a ocorrer. As configurações de análise foram selecionadas para o modelo com o objetivo de que o modo de flambagem dominante seja global, e do tipo lateral com torção.

Em função disso, definiu-se um comprimento total destravado da viga (ou

comprimento de flambagem) de modo que impedisse, para uma distribuição de propriedades mecânicas arbitrária ao longo da seção, dentro de uma faixa de variação no teor de resina de 10% a 34% (o maior segundo a TABELA 2), o aparecimento de modos de flambagem locais.

Com a finalidade de assegurar esse comportamento, empregou-se as formulações presentes na ASCE (2024) para comparar as resistências aos fenômenos de instabilidade global e local, tais expressões são apresentadas nos Apêndice 1. No Apêndice 4 é apresentado o cálculo das propriedades mecânicas do perfil PPRFV, e dos demais parâmetros necessários à determinação das resistências à flambagem. Para tanto, foram consideradas as propriedades relativas ao maior teor de resina dentre as amostras (e conseqüentemente a menor resistência ao momento fletor nominal). A resistência à flambagem local foi determinada conforme a formulação apresentada em maiores detalhes na Seção 1.1 do ANEXO 1, ao passo de que o momento fletor crítico de instabilidade flexo-torsional é calculado com base nas equações mostradas na Seção 1.2 do ANEXO 1.

As dimensões da seção transversal escolhida para a análise são as da amostra 6 da TABELA 1 com $d = 200$ mm, $b_f = 100$ mm e $t_w = t_f = 9,5$ mm. O tipo de resina desta amostra é Epóxi. Na TABELA 3 são apresentadas as propriedades da fibra de vidro e da resina epóxi usados como base para o cálculo das propriedades mecânicas do perfil pultrudado.

TABELA 3 – PROPRIEDADES MECÂNICAS DA FIBRA E DA RESINA

Material	Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Fibra	Densidade	ρ_f	2600	kg/m ³
	Módulo de Young	E_f	81	GPa
	Módulo de Cisalhamento	G_f	33	GPa
	Coeficiente de Poisson	ν_f	0,22	-
Resina Epóxi	Densidade	ρ_m	1300	kg/m ³
	Módulo de Young	E_m	3,7	GPa
	Módulo de Cisalhamento	G_m	1,4	GPa
	Coeficiente de Poisson	ν_m	0,35	-

FONTE: Adaptado de Feng *et al.* (2022).

Considerando a fibra mais distante da linha neutra $y = \frac{d}{2} = \frac{200}{2} = 100$ mm, pela EQUAÇÃO A1.3 do Apêndice 1, conforme os cálculos apresentados em maior detalhe no Apêndice 4, tem-se o momento fletor resistente nominal para o fenômeno

de flambagem local:

$$M_n = \min(f_{cr,fl}; f_{cr,web}) \frac{I_p}{y} = \min(282,718; 812,318) \frac{21.946.536,625}{100}$$

$$M_n = 66.680.443,126 \text{ N.mm} = 6.668,044 \text{ kN.cm}$$

Com relação à resistência ao momento fletor nominal do perfil à flambagem global, é possível determiná-la de acordo com a EQUAÇÃO A1.8 da Seção 1.2:

$$M_n = C_b \sqrt{\frac{\pi^2 \times E_{L,f} I_{\min} D_J}{L_b^2} + \frac{\pi^4 \times E_{L,f}^2 I_{\min} C_w}{L_b^4}}$$

$$M_n = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 41.773 \times 1.596.265 \times 417.362.434}{4000^2} + \frac{\pi^4 \times 41.773^2 \times 1.596.265 \times 1,583 \times 10^{10}}{4000^4}}$$

$$M_n = 5.826.524,200 \text{ N.mm} = 582,652 \text{ kN.cm}$$

Estes resultados ilustram que para 4 m de comprimento entre pontos com restrições à flexo-torção, e para um teor de resina de 34%, a resistência à flambagem global da peça é aproximadamente 11 vezes menor do que a resistência à flambagem local.

Uma formulação mais condizente com a modelagem numérica é apresentada pelo CNR-DT (2007), onde os efeitos relacionados a uma distribuição de momentos fletores variável, e ao ponto de aplicação da carga localizado fora do centro de cisalhamento da seção, são considerados de maneira aproximada pela incorporação de fatores de correção adicionais.

No Apêndice 2, é apresentada a expressão para cálculo do momento crítico de instabilidade flexo-torsional $M_{cr,FT,CNR}$, segundo a recomendação técnica do CNR-DT (2007). Para vigas biapoizadas sujeitas a carregamento uniformemente distribuído, as constantes assumem os valores $C_1 = 1,13$, $C_2 = 0,45$ e $C_3 = 1,00$, segundo a tabela 4.1 da seção 4.2.1 do CNR-DT (2007), então, conforme a EQUAÇÃO A2.1:

$$M_{cr,FT,CNR} = \frac{C_1 \pi^2}{C_3 L_b^2} E_{ef} I_{\min} \left[-C_2 Z_q + \sqrt{\left(\frac{C_2 Z_q}{C_3}\right)^2 + \frac{C_w}{I_{\min}} \left(\frac{1}{C_3^2} + \frac{G_{ef} J L_b^2}{E_{ef} C_w \pi^2}\right)} \right]$$

$$M_{cr,FT,CNR} = \frac{1,13}{0,45} \frac{\pi^2}{4.000^2} \times 41.773 \times 1.596.265,4 \times$$

$$\left[-0,45 \times 100 + \sqrt{\left(\frac{0,45 \times 100}{1,00}\right)^2 + \frac{1,583 \times 10^{10}}{1.596.265,4} \left(\frac{1}{1,00^2} + \frac{3833108.886,625 \times 4.000^2}{41.773 \times 1,583 \times 10^{10} \pi^2}\right)} \right]$$

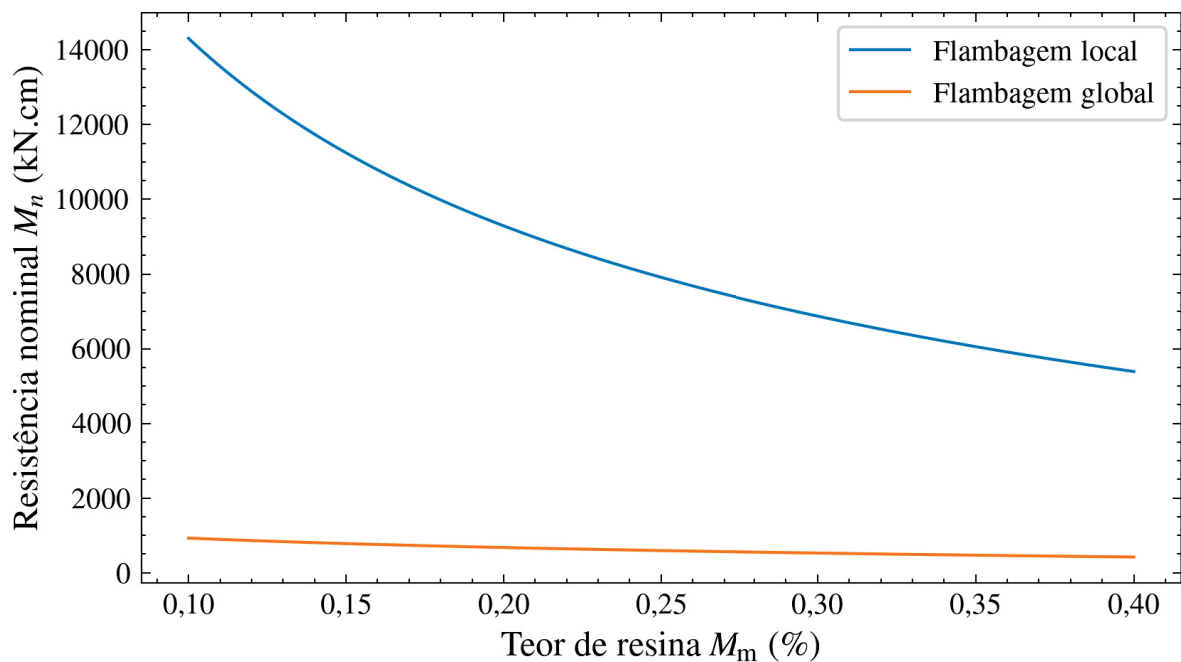
$$M_{cr,FT,CNR} = 4.816.465,247 \text{ N.mm} = 481,647 \text{ kN.cm}$$

Nota-se que o valor obtido é aproximadamente 17% inferior ao encontrado com a EQUAÇÃO A1.8, o que é explicado pelo efeito instabilizante gerado pelo

carregamento aplicado acima do centro de cisalhamento, o qual tende a gerar um momento torsor adicional.

Para comparação entre a resistência à flambagem global e local do perfil considerando teores de resina na faixa de 10 a 40%, simulações foram realizadas, aplicando o mesmo procedimento de cálculo apresentado anteriormente. Na determinação dos momentos críticos para instabilidade por flambagem lateral considerou-se a EQUAÇÃO A2.1. Os resultados estão apresentados na FIGURA 12.

FIGURA 12 – EXEMPLO DE COMPARAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FLAMBAGEM LOCAL E GLOBAL E RELAÇÃO COM O TEOR DE RESINA



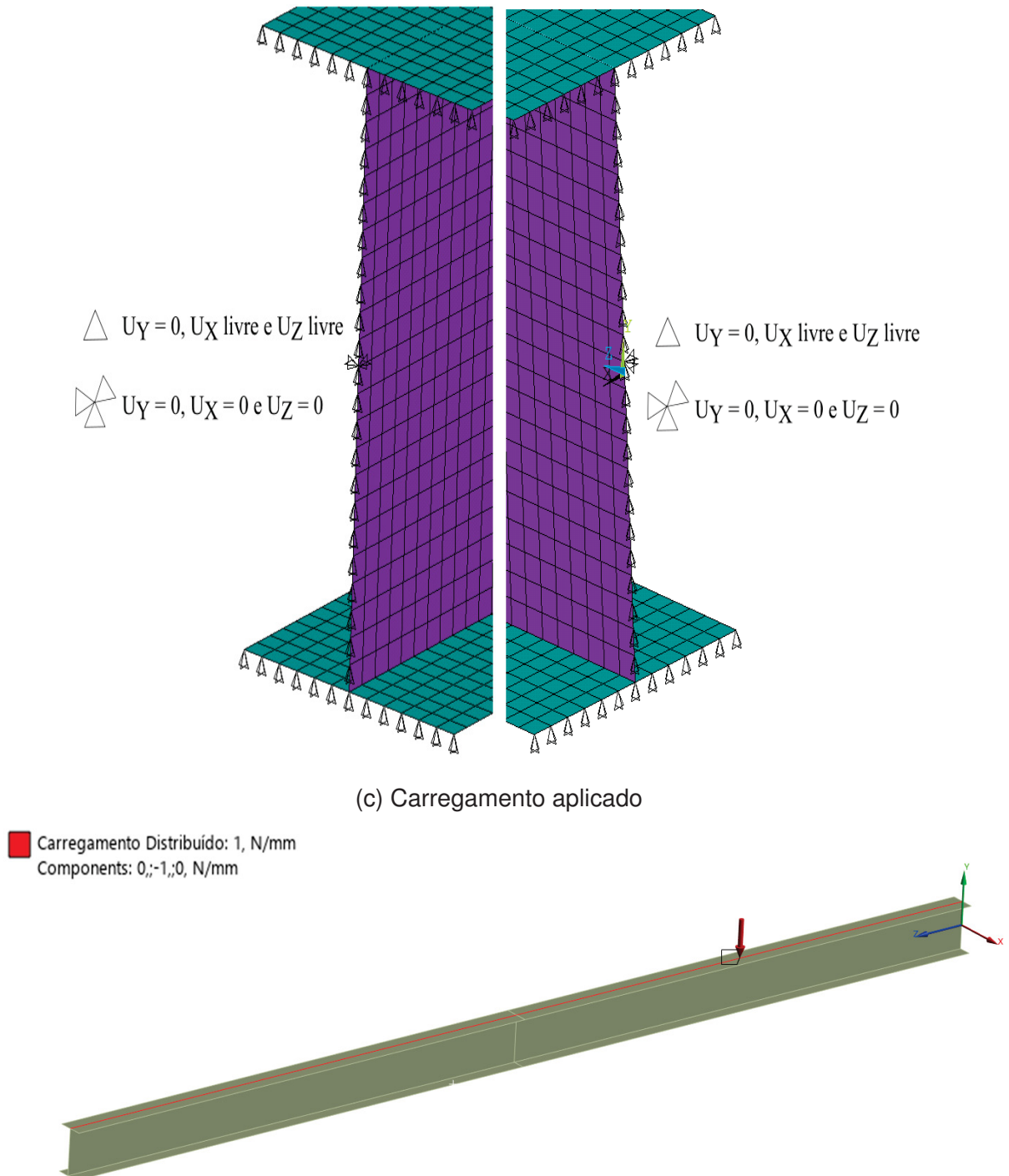
FONTE: O autor (2024).

Da FIGURA 12 é evidente o domínio da falha por flambagem global em relação à falha por flambagem local da mesa ou alma, para o comprimento destravado estabelecido e a faixa de teor de resina usual para PPRFV. Dessa forma, como o enfoque do trabalho se dará na variabilidade das propriedades mecânicas, e não das propriedades geométricas, que serão mantidas constantes, é possível afirmar que os primeiros modos de flambagem dominantes serão sempre globais, para fins das análises conduzidas neste trabalho, no caso da distribuição homogênea de propriedades.

Na FIGURA 13 são apresentadas as condições de contorno. Com relação às vinculações, restrições de deslocamento nas direções x , y e z são aplicadas sobre o nó situado no centróide da seção em ambas as suas extremidades, para remover possibilidade de translação axial global, e a translação transversal rígida. Impõe-se também, que na direção y a translação seja totalmente impedida em todos os nós de ambas as extremidades da viga, impedindo movimentação de corpo rígido na

vertical. Um carregamento uniformemente distribuído $-Y$ é aplicado ao longo de todo o comprimento longitudinal da viga. Essas condições de contorno visam a representação do cenário clássico de ocorrência de flambagem lateral em vigas, o caso de vigas biapoias sujeitas à flexão devido carregamento transversal.

FIGURA 13 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA SIMULAÇÃO DA FLT
(a) Restrições extremidade esquerda (b) Restrições extremidade direita



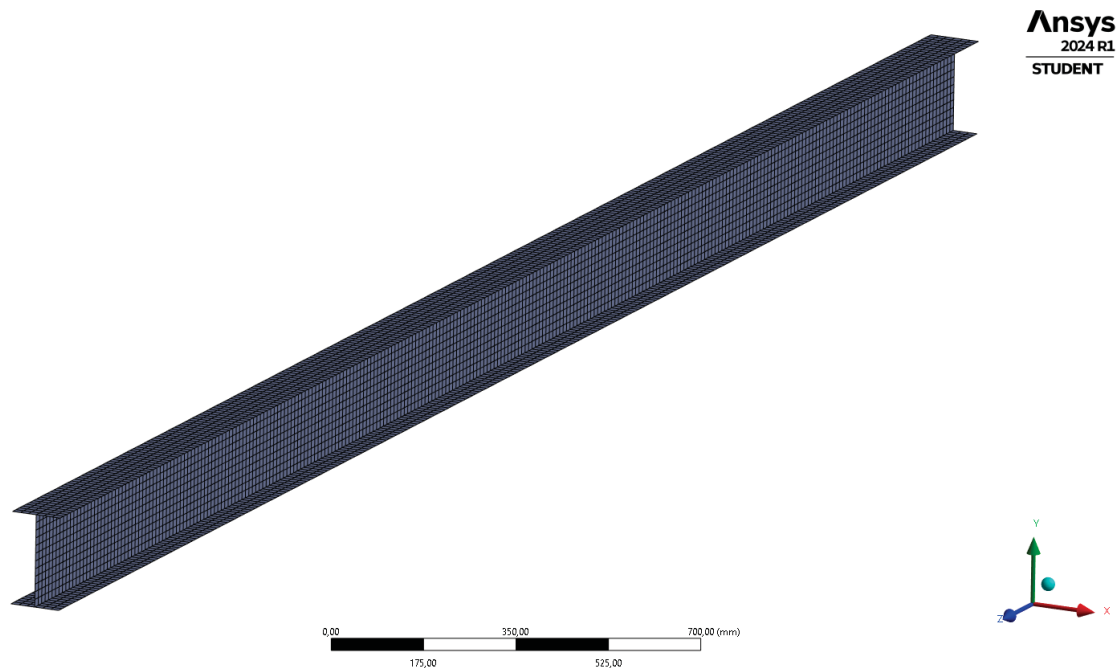
FONTE: O autor (2024).

A análise é elástica linear de flambagem por autovalores e autovetores. A es-

tratégia de solução (*solver*) escolhida foi o método de Block Lanczos (Golub; Van Loan, 2013), por ser um método muito robusto para obtenção de autovalores e autovetores de matrizes grandes, esparsas e mal condicionadas, muito comum em aplicações estruturais nas quais o número de graus de liberdade é muito significativo.

Para validação das configurações de modelo e dos cálculos da resistência à FLT conforme ASCE (2024), uma modelagem em MEF foi executada considerando as propriedades mecânicas do material utilizadas nos cálculos apresentados na Seção 4.1. A malha foi definida com o objetivo de preservar uma regularidade nos elementos e uma razão de aspecto de 1:1, mantendo fixas as dimensões do elemento em 15 mm. Na FIGURA 14 é apresentado o sistema de coordenadas global, bem como a malha selecionada para a discretização do modelo em EF, composta por um total de 6384 elementos e 6675 nós.

FIGURA 14 – MALHA DO MODELO EM ELEMENTOS FINITOS



FONTE: O autor (2024).

A FIGURA 15 apresenta a configuração deformada do primeiro modo de flambagem da peça, um mapa de cores com as variações de deslocamento relativas, normalizadas e sem unidade física é mostrado na Figura 15a. A forma deslocada lateralmente e torcida da seção é mostrada na Figura 15b, que apresenta uma vista em seção transversal no meio do vão.

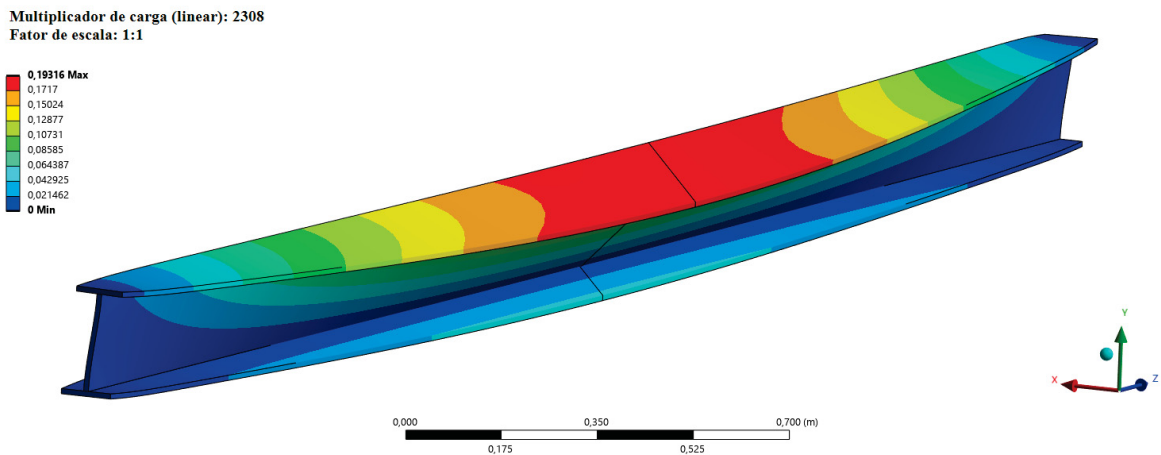
Percebe-se ainda que a carga crítica obtida de 2308 N/m é relativamente próxima da calculada pela EQUAÇÃO A2.1, quando se recupera o carregamento

uniforme a partir do momento fletor resistente da seção:

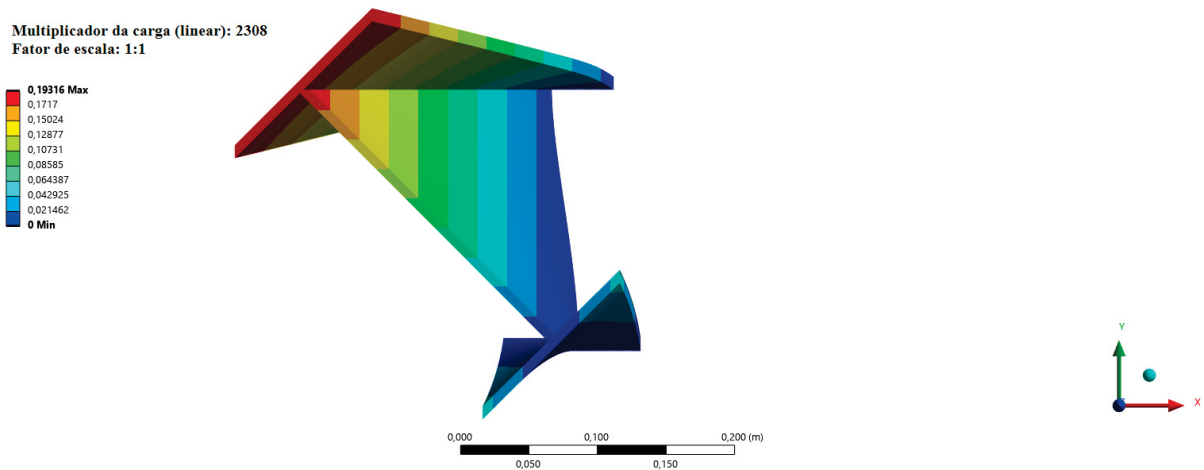
$$M_n = \frac{q \times L^2}{8} \rightarrow q = \frac{8M_n}{L^2} = \frac{8 \times 4816,47}{4^2} = 2408,24 \text{ N/m}$$

FIGURA 15 – PRIMEIRO MODO DE FLAMBAGEM E CONFIGURAÇÃO DEFORMADA DA SEÇÃO

(a) Mapa de cores deslocamento total relativo: Primeiro modo de flambagem



(b) Configuração deformada vista em seção transversal no meio do vão da viga



FONTE: O autor (2024).

3.3.3 Estudo de sensibilidade de malha

Um estudo da sensibilidade da malha foi realizado considerando dez malhas, cujos parâmetros e estatísticas são apresentados na TABELA 4. As dez malhas foram definidas buscando manter uma regularidade nos elementos e uma razão de aspecto de 1:1, mantendo fixas as dimensões do elemento conforme a segunda coluna da TABELA 4.

TABELA 4 – ESTATÍSTICAS DAS MALHAS AVALIADAS

Malha	Estatísticas			
	Tamanho elemento (mm)	Número de elementos	Número de nós	Número de graus de liberdade
1	50	640	729	4374
2	45	704	801	4806
3	40	900	1010	6060
4	35	1026	1150	6900
5	30	1876	2025	12150
6	25	2400	2576	15456
7	20	4200	4422	26532
8	15	6384	6675	40050
9	10	15200	15639	93834
10	8	23500	24048	144288

FONTE: O autor (2024).

No modelo para o estudo de sensibilidade foram definidas as mesmas condições de contorno e geometria da análise de flambagem conforme explicado na Subseção 3.3.2, com a diferença de que nesta foi aplicado um carregamento uniforme de 2,5 kN/m, e as propriedades ortotrópicas do material foram consideradas constantes ao longo da seção, com os valores dados na TABELA 5.

TABELA 5 – PROPRIEDADES ELÁSTICAS DO MATERIAL: CONVERGÊNCIA DE MALHA

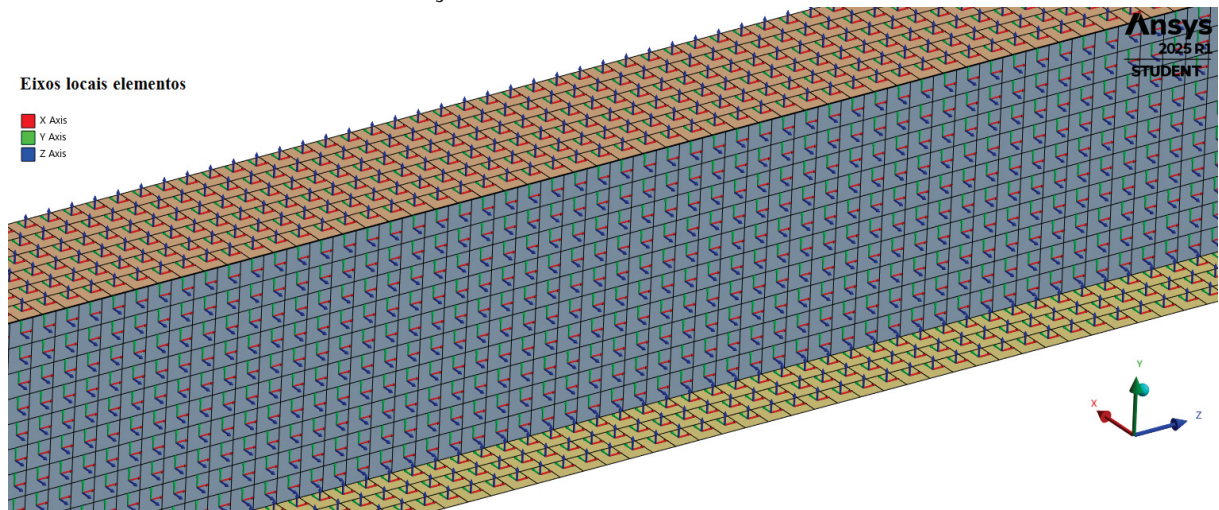
Propriedade	Valor	Unidade
E_1	42	GPa
E_2	42	GPa
E_3	42	GPa
G_{12}	3,88	GPa
G_{23}	4,82	GPa
G_{13}	3,88	GPa
ν_{12}	0,29	-
ν_{23}	0,29	-
ν_{13}	0,29	-

FONTE: O autor (2024).

Na TABELA 5 os eixos nomeados como 1, 2 e 3 referem-se aos eixos principais para definição do sistema de coordenadas do material, devendo estes estarem compatíveis com os eixos locais dos elementos e com o sistema de coordenadas cartesiano global. Como o material é ortotrópico, é primordial a atribuição correta das propriedades mecânicas nos respectivos eixos materiais. No ANSYS, o sistema de coordenadas do material e o dos eixos locais dos elementos são os mesmos, portanto

os eixos locais foram corretamente atribuídos de forma que a direção 1 corresponda ao eixo longitudinal principal (eixo X), e as direções 2 e 3 aos eixos transversais (eixos Y e Z). Assim sendo, um sistema de coordenadas local foi criado para os elementos da alma e outro para os elementos das mesas. A FIGURA 16 exibe um mapa de cores dos eixos locais dos elementos para uma das malhas testadas.

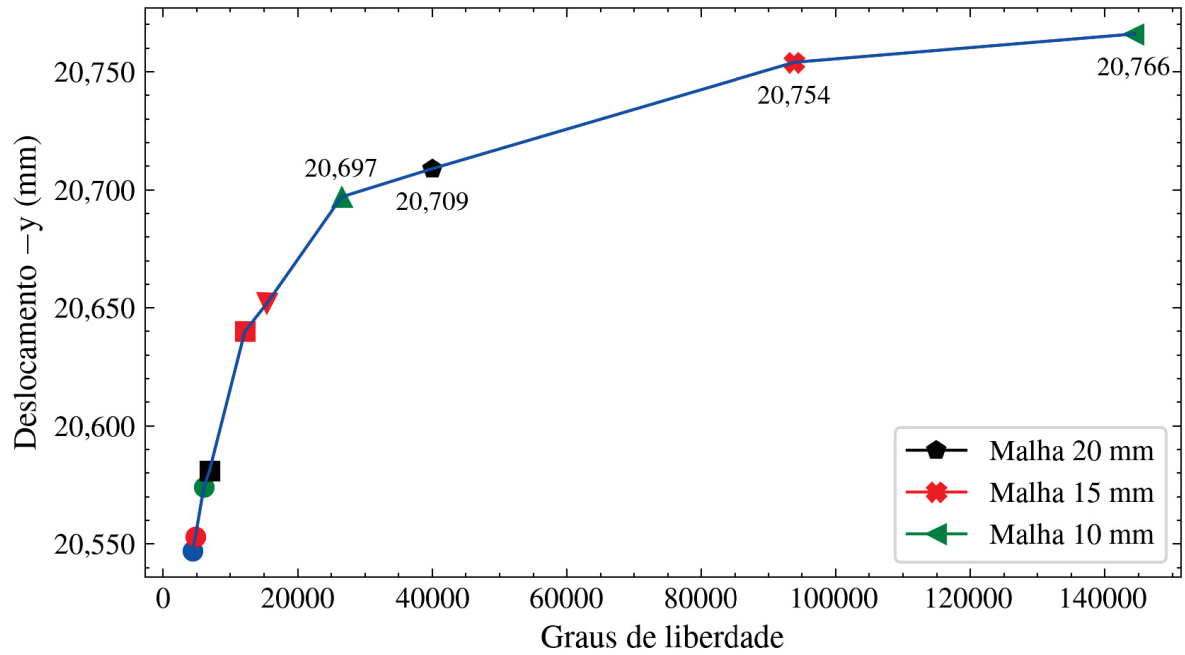
FIGURA 16 – DEFINIÇÃO DOS EIXOS LOCAIS ELEMENTOS FINITOS



FONTE: O autor (2024).

Na FIGURA 17 se apresenta o gráfico da convergência do deslocamento na direção $-y$ em mm, num ponto situado no centróide da seção transversal no meio do vão, em relação ao número de graus de liberdade. Se percebe a pequena variabilidade de resultados para as 4 últimas malhas, as quais seriam relativas aos tamanhos de elemento de 20, 15, 10 e 8 mm.

FIGURA 17 – SENSIBILIDADE DE MALHA



FONTE: O autor (2024).

Com os resultados da FIGURA 17, e visando uma redução de custo computacional, optou-se pela malha de 15 mm, a qual foi considerada aceitável em termos de precisão, apresentando pequenas diferenças relativas quando comparada às malhas de 20 mm e 10 mm, sendo estas diferenças de 0,058% e 0,217%, respectivamente. Os parâmetros de malha estão também de acordo com as recomendações do estudo de Turvey e Zhang (2006, 2004), onde a convergência e sensibilidade da malha foram avaliadas para um modelo em EF (elementos finitos) similar.

4 METODOLOGIA DE ANÁLISE E MODELAGEM NUMÉRICA

Este capítulo apresenta a formulação geral, assim como a metodologia utilizada para modelagem probabilística, e implementação computacional dos métodos FORM e SMC com amostragem LHS. São explanadas as metodologias da análise de confiabilidade conforme abordagens distintas no tratamento das incertezas das propriedades do material, sendo num primeiro momento apresentada a modelagem e os métodos numéricos empregados na análise supondo distribuição de fibra e resina homogênea ao longo da seção transversal, e posteriormente, para o caso da modelagem assumindo a variabilidade espacial do teor de resina na seção.

Toda a implementação computacional foi realizada com a linguagem Python, sendo a execução do *software* ANSYS de EF também integrada ao *script*. As condições de contorno, de análise e a malha de discretização utilizadas nos modelos de EF são as mesmas para ambas as abordagens consideradas no tratamento da incerteza nas propriedades do material, variando, naturalmente, a maneira como os dados de entrada relativos às propriedades do material são alimentados pelo *script*. As informações relacionadas à modelagem numérica pelo MEF já foram discutidas e seguem as premissas abordadas na Seção 3.3.

Os arquivos de código, dados de entrada, arquivos de entrada do *software* e planilhas de dados, estão disponibilizados em repositório próprio do GitHub pelo link de acesso: github.com/LeonardoWendler/MestradoPPGEC-UFPR. Os códigos computacionais foram executados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-10300H 2,50 GHz.

4.1 FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE E MODELO PROBABILÍSTICO: MODELO COM DISTRIBUIÇÃO HOMOGÊNEA DO TEOR DE RESINA

Na formulação do problema de confiabilidade estrutural considerando a distribuição homogênea do teor de resina, a função de estado limite depende de duas VAs, uma representando o teor de resina M_m e outra um carregamento S aplicado:

$$g(M_m, S) = \lambda_{i,crit}(M_m) - S \leq 0 \quad (4.1)$$

onde:

$\lambda_{i,crit}(M_m)$ é o primeiro autovalor, ou multiplicador do carregamento aplicado, considerando um carregamento unitário, obtido pela análise de flambagem da estrutura pelo MEF (N/m);

S é o carregamento efetivamente aplicado sobre a barra, sendo neste caso um carregamento uniforme dado em (N/m).

O carregamento considerado é do tipo permanente, proveniente de carga gravitacional, conforme usualmente considerado em modelagem probabilística dessa classe de carregamentos, seu modelo probabilístico corresponde ao de uma VA do tipo normal, de média a baixa variabilidade. O valor médio da variável aleatória foi assumido como o valor característico, conforme recomendado pela European Committee for Standardization (CEN) (2002a) para cargas permanentes que não possuam alta variabilidade. Para o coeficiente de variação foi considerado o valor fixo de 10%, conforme recomendação dos EUROCODES (European Committee for Standardization (CEN), 2002a,b) para carregamentos permanentes oriundos de cargas gravitacionais.

Quanto ao modelo probabilístico do teor de resina, este também foi assumido como uma VA com distribuição gaussiana, a qual é utilizada com frequência para parâmetros relacionados a propriedades de materiais devido à falta de testes experimentais necessários para embasar a escolha da distribuição mais apropriada (Charpis *et al.*, 2007). A média foi definida como sendo o teor de resina médio para todo o conjunto de amostras apresentadas na TABELA 2, e o desvio-padrão foi então calculado considerando este valor médio e o mesmo conjunto de dados amostrais. A TABELA 6 resume os parâmetros das variáveis aleatórias consideradas neste problema, nota-se que no caso da VA representando a carga aplicada, diferentes valores para sua média foram testados, com a finalidade de abarcar diferentes faixas de probabilidade de falha, desde as muito baixas (tipicamente encontradas nos problemas de confiabilidade estrutural) até as mais altas.

TABELA 6 – CARACTERIZAÇÃO DAS VA'S: PROBLEMA CONSIDERANDO HOMOGENEIDADE DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS

VA	Distribuição	Média (μ)	C.V. (%)
M_m (%)	Normal	26,76	16,03
S_1 (N/m)	Normal	2000,00	10,00
S_2 (N/m)	Normal	2250,00	10,00
S_3 (N/m)	Normal	2500,00	10,00
S_4 (N/m)	Normal	3000,00	10,00
S_5 (N/m)	Normal	3300,00	10,00
S_6 (N/m)	Normal	3900,00	10,00

FONTE: O autor (2024).

Os valores da média para a VA S foram estimados por meio de testes numéricos até convergência para as faixas de probabilidade de falha selecionadas: $S(\mu = 2000)$ para $p_f \leq 10^{-3}$, $S(\mu = 2250)$ para $p_f \leq 10^{-2}$, $S(\mu = 2500)$ para $p_f \geq 10\%$, $S(\mu = 3000)$ para $p_f \geq 50\%$, $S(\mu = 3300)$ para $p_f \geq 80\%$ e $S(\mu = 3900)$ para $p_f \geq 90\%$. Os testes numéricos envolveram tanto a resolução do problema com distribuição homogênea quanto heterogênea.

4.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL: FORM

O método de confiabilidade de primeira ordem FORM foi um dos métodos aplicados para estimativa da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade do problema considerando o modelo homogêneo, especialmente pelo fato de que neste caso a dimensionalidade do vetor de variáveis aleatórias é pequena.

Na implementação computacional do método FORM deve-se notar que a EQUAÇÃO 4.1 é implícita com relação ao teor de resina, e não possui expressão analítica, com isso o gradiente é desconhecido e precisa ser computado por técnicas numéricas. Diferenças finitas progressivas foram implementadas para cálculo dos componentes do vetor gradiente da função de estado limite, expressos por:

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cong \frac{g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x})}{h} \quad (4.2)$$

onde:

h é o passo utilizado na diferenciação numérica;

\mathbf{e}_i é um vetor unitário na direção i .

Optou-se pela diferença finita progressiva por requerer um menor custo computacional do que outros esquemas de diferenciação numérica, como a diferença central. Alguns testes de estabilidade numérica foram efetuados para escolha do passo h apropriado, conforme se apresenta na TABELA 7. É possível notar uma certa proximidade nos valores das aproximações para o gradiente com passos de $h = 1e^{-1}$ até $h = 1e^{-4}$, sendo que para passos inferiores o fenômeno da perda de significância começa a ocorrer, o qual pode ser verificado pela dispersão nos resultados das aproximações. Com isto, neste trabalho, o passo de $h = 1e^{-4}$ foi considerado para o cálculo numérico do vetor gradiente aproximado.

TABELA 7 – DETERMINAÇÃO DO PASSO ÓTIMO

	Estabilidade numérica do gradiente							
Passo h	1E-01	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	1E-07	1E-08
$\frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial x_1}$	-1,00	-1,00	-0,98	-1,00	-1,00	24,00	249,00	-1,00
$\frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial x_2}$	-70,39	-70,50	-70,50	-70,50	-65,00	-25,00	250,00	0,00

FONTE: O autor (2024).

O algoritmo implementado em Python inicia com as definições das variáveis aleatórias, selecionando o tipo de distribuição e momentos ou parâmetros correspondentes, a definição da matriz de correlação, que neste caso pelo fato das variáveis aleatórias serem descorrelacionadas é a matriz identidade $[I]_{2 \times 2}$, pelos parâmetros do algoritmo iHLRF $a = 0,2$, $b = 0,5$ e $\gamma = 2$, relativos ao cálculo do passo otimizado λ_k pela regra de Armijo, e de tolerância dos critérios de convergência $\epsilon = 10^{-3}$ e $\delta = 10^{-3}$.

A estimativa inicial para o ponto de projeto \mathbf{u}_0 , foi definida como a média das VA's no espaço normal padrão descorrelacionado, ou seja, neste caso $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Após a inicialização do ponto inicial, o algoritmo procede para a transformação do vetor \mathbf{u}_k para o espaço de projeto, conhecido então o teor de resina M_m da iteração atual, o modelo MEF é alimentado com as propriedades elásticas correspondentes, conforme as equações apresentadas na Seção 3.2. Essas propriedades são transcritas para um arquivo de entrada do ANSYS APDL, por meio de uma rotina em Python.

Com o uso da biblioteca *subprocess* do Python, o programa ANSYS pode ser inicializado em *batch mode*. Para isso, é necessário fornecer a localização do executável do programa, a pasta de trabalho do software, o caminho do arquivo de entrada a ser lido pelo *software*, e um arquivo de saída que conterá os resultados do pós-processamento da análise. Outros parâmetros opcionais podem ser selecionados, como o jobname a ser adotado, o número de processadores a serem utilizados, a remoção automática de arquivos .lock, além de identificadores de execução (*flags*) apresentados no manual do ANSYS.

Após a inicialização do ANSYS no modo *batch*, o modelo MEF é processado para obter o valor de $\lambda_{i,crit}$. Desse modo, é efetuado o cálculo da função de estado limite e do seu gradiente.

Posteriormente, a convergência é checada por três critérios distintos, o primeiro verifica a proximidade do ponto atual à superfície de falha, o segundo testa se o gradiente da função de estado limite e o vetor \mathbf{u}_{k+1} são ortogonais, e por fim, o terceiro testa a estabilidade de β entre iterações. Os critérios de convergência considerados são dados pelas expressões:

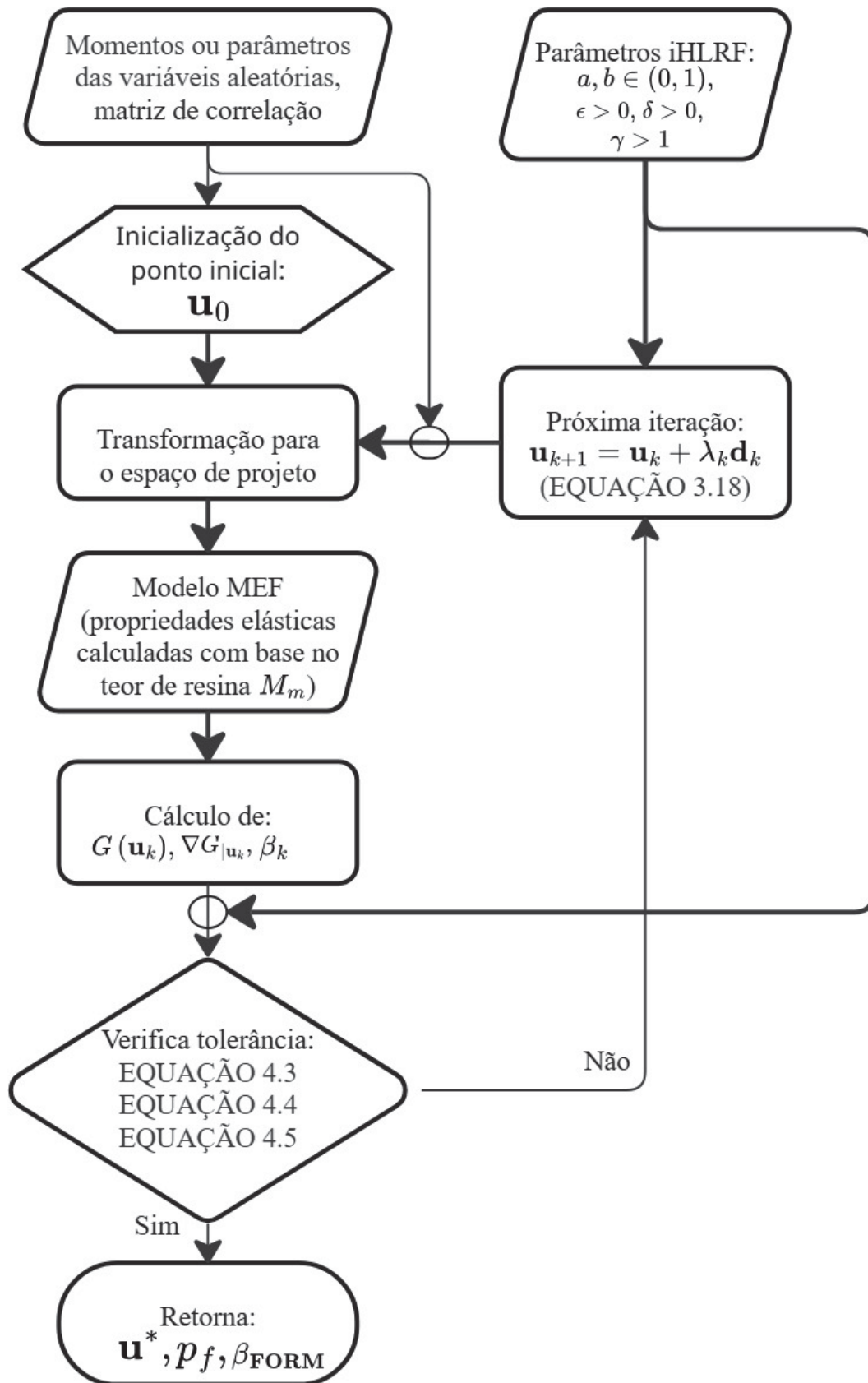
$$\left| \frac{G(\mathbf{u}_{k+1})}{G(\mathbf{u}_0)} \right| \leq \delta \quad (4.3)$$

$$1 - \left| \frac{\nabla G|_{\mathbf{u}_{k+1}} \mathbf{u}_{k+1}}{\|\nabla G|_{\mathbf{u}_{k+1}}\| \|\mathbf{u}_{k+1}\|} \right| \leq \epsilon \quad (4.4)$$

$$\beta_{k+1} - \beta_k \leq \epsilon \quad (4.5)$$

Se todas as tolerâncias são verificadas, o algoritmo retorna o ponto de projeto buscado \mathbf{x}^* , a probabilidade de falha p_f e o parâmetro β_{FORM} , caso contrário, o vetor \mathbf{u}_{k+1} é atualizado de acordo com a EQUAÇÃO 2.26. A FIGURA 18 apresenta um fluxograma do funcionamento do algoritmo implementado.

FIGURA 18 – FLUXOGRAMA ALGORITMO FORM



FONTE: O autor (2024).

4.3 MODELO COM DISTRIBUIÇÃO HOMOGÊNEA DO TEOR DE RESINA: IMPLEMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM AMOSTRAGEM POR HIPERCUBO LATINO

Três simulações de Monte Carlo com amostragem por hipercubo latino (LHS) para cada uma das variações dos parâmetros de S , propostas na Seção 4.1, foram executadas variando a *seed* (ou semente) do gerador de números pseudoaleatórios da biblioteca Numpy do Python (Harris *et al.*, 2020). Para implementação da amostragem LHS foi utilizado o Quasi-Monte Carlo *submodule* do SciPy, mesma biblioteca empregada para obter os dados de treinamento do modelo de PG (Virtanen *et al.*, 2020).

Em todas as simulações um total de $1,5 \times 10^5$ amostras foram geradas. A TABELA 8 apresenta os principais parâmetros e o tamanho das amostras relacionadas às simulações realizadas.

TABELA 8 – DEFINIÇÃO DAS SEMENTES E TAMANHO DAS AMOSTRAS DAS SIMULAÇÕES SUPONDO HOMOGENEIDADE DO TEOR DE RESINA

Amostra	$S(\mu)$ (N/m)	<i>seed</i>	Dimensão
1	2000	900989	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
2	2000	803680	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
3	2000	211104	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
4	2250	737988	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
5	2250	164545	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
6	2250	854678	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
7	2500	57199	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
8	2500	431163	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
9	2500	299802	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
10	3000	729438	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
11	3000	649660	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
12	3000	220776	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
13	3300	785067	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
14	3300	404554	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
15	3300	399329	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
16	3900	176086	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
17	3900	945493	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$
18	3900	409787	$[1,5 \times 10^5 \times 2]$

FONTE: O autor (2025).

4.4 IMPLEMENTAÇÃO DA METAMODELAGEM POR KRIGAGEM: MODELO SEM VARIABILIDADE ESPACIAL DO TEOR DE RESINA

Devido ao elevado custo computacional das simulações numéricas do problema de flambagem linear por autovalores, somado à necessidade de múltiplas avaliações destes modelos caso se opte, por exemplo, pela utilização do método da SMC, foi construída uma modelagem por krigagem. Este modelo recebe como parâmetro de entrada o teor de resina da seção, e tem como parâmetro de saída a carga crítica resultante do carregamento uniformemente distribuído ao longo dos 4 m de viga.

Para treinamento do metamodelo, gerou-se um conjunto de dados com um total de 200 amostras com a técnica LHS, em conjunto com o gerador de números pseudoaleatórios Mersenne Twister, implementado no módulo Quasi-Monte Carlo das funções estatísticas da biblioteca SciPy do Python (Virtanen *et al.*, 2020). Essa amostra compreende valores percentuais de teores de resina, seguindo uma distribuição uniforme, variando de 5% até 60%, e as cargas críticas de flambagem obtidas pelo modelo MEF correspondente (no treinamento dos modelos considerou-se a carga crítica resultante, e não o carregamento uniformemente distribuído ao longo do comprimento da viga, conforme definido na função de estado limite).

O procedimento aqui utilizado para geração, análise e processamento do modelo MEF para determinação da carga crítica é muito semelhante ao apresentado na Seção 4.2. Nesse caso, o modelo MEF é alimentado com as propriedades elásticas correspondentes ao teor de resina M_m fornecido por cada amostra do gerador de números aleatórios. Tais propriedades são então transcritas para o arquivo de entrada do ANSYS APDL, com o auxílio da rotina em Python já abordada na seção anterior.

Empregou-se a biblioteca *scikit-learn* para treinamento e otimização dos hiperparâmetros, e configuração da metamodelagem com processos gaussianos no programa em Python (Pedregosa *et al.*, 2011). A função de correlação definida para o PG é do tipo exponencial quadrática (EQUAÇÃO 2.50), com variância constante. Definiu-se o valor inicial para o parâmetro de escala como $\theta = 1,0$, com limites superior e inferior dados pelo intervalo: $[0,01; 10^3]$. O método de otimização dos hiperparâmetros adotado foi o L-BFGS.

Após a convergência do L-BFGS obteve-se o parâmetro de escala otimizado $\theta = 16,4$ e a variância $\sigma^2 = 228,01$. Para validação deste modelo gerou-se um novo conjunto de dados com 40 amostras aleatórias, de maneira análoga ao realizado na amostragem de treinamento.

Avaliou-se o desempenho do modelo nos dados de teste pelas métricas MAE (*Mean Absolute Error* - Erro Absoluto Médio), MSE (*Mean Squared Error* - Erro Qua-

drático Médio) e Erro máximo (*Max Error*), definidos como:

$$\text{MAE}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} |y_i - \tilde{y}_i| \quad (4.6)$$

$$\text{MSE}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} (y_i - \tilde{y}_i)^2 \quad (4.7)$$

$$\text{MaxError}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \max(|y_i - \tilde{y}_i|) \quad (4.8)$$

onde:

y_i são os valores reais observados (resultados do modelo MEF);

\tilde{y}_i são os valores previstos pelo metamodelo.

Aplicando-se estas métricas no conjunto de dados de teste obteve-se:

$$\text{MAE}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0,675$$

$$\text{MSE}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = 1,033$$

$$\text{MaxError}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = 3,575$$

Pode-se observar que o erro quadrático médio é um pouco superior ao erro absoluto médio, sugerindo que o erro de previsão em alguns pontos muito específicos é relativamente maior do que na grande maioria dos dados, pelo fato de que esta métrica penaliza muito mais grandes erros residuais. O erro máximo obtido foi relativamente baixo, sendo da ordem de 3,6 N, fazendo a razão percentual entre este erro e a média dos valores reais observados y_i , obtemos 0,032%, o que é bastante aceitável para aproximações de uma carga crítica de modelo numérico, em termos de precisão.

Pode-se concluir que o modelo desempenhou bem pelas métricas avaliadas, apresentando erros bastante toleráveis, tendo em conta o contexto da aplicação.

4.5 FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE E MODELO PROBABILÍSTICO: MODELO COM VARIABILIDADE ESPACIAL DO TEOR DE RESINA

Com a finalidade de estudar a influência da variabilidade espacial do teor de fibra e resina na confiabilidade dos perfis PPRFV, um segundo problema análogo ao abordado no Seção 4.1 foi formulado. O que difere as abordagens é a consideração da variabilidade do teor de fibra e resina. No modelo da Seção 4.1, assumiu-se que a distribuição de propriedades é homogênea ao longo da seção transversal, e representada por uma única variável aleatória, enquanto que neste segundo problema a variação espacial do teor de resina é incorporada ao modelo, como um campo estocástico gaussiano.

Na formulação do problema de confiabilidade estrutural considerando a distribuição heterogênea do teor de resina, a função de estado limite depende de um campo

aleatório $H(\mathbf{x}, \omega)$, o qual caracteriza a modelagem da variabilidade do teor de resina ao longo da seção transversal, e de uma VA normal representando o carregamento S aplicado sobre o perfil. Com isso, a função de estado limite é definida como:

$$g(H(\mathbf{x}, \omega), S) = \lambda_{i,crit}(H(\mathbf{x}, \omega)) - S \leq 0 \quad (4.9)$$

onde:

$\lambda_{i,crit}(H(\mathbf{x}, \omega))$ é o primeiro autovalor, ou multiplicador do carregamento aplicado, considerando um carregamento unitário, para que se obtenha a primeira carga crítica de flambagem da estrutura em análise (N/m);

$H(\mathbf{x}, \omega)$ é um campo aleatório de variância σ^2 , média μ e função de autocorrelação $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \theta)$;

S é o carregamento efetivamente aplicado sobre a barra, sendo neste caso um carregamento uniforme dado em (N/m).

No modelo probabilístico do carregamento, S foi considerado o apresentado na Seção 4.1, sendo aplicadas as mesmas premissas assumidas para definição de sua média, desvio padrão e coeficiente de variação.

Quanto ao modelo probabilístico para a variabilidade do teor de resina, este foi assumido como sendo um campo aleatório gaussiano estacionário estatisticamente homogêneo. Na Seção 2.3 do Apêndice 2, constam os principais conceitos e a base teórica relevante a esse tema.

A justificativa para escolha desse modelo estatístico na modelagem da variabilidade de propriedades do material se baseia no artigo de Sriramula e Chryssanthopoulos (2013), no qual os autores aplicaram campos aleatórios para caracterizar a variabilidade espacial de propriedades mecânicas e elásticas de painéis compósitos reforçados com fibra de vidro. Este estudo foi usado ainda como base para caracterização e implementação da modelagem do campo aleatório, auxiliando na definição da função de autocorrelação e do comprimento de correlação associados ao campo.

Devido à escassez de dados experimentais adequados para embasar a definição dos parâmetros do campo aleatório, adotou-se uma abordagem análoga à empregada na Seção 4.1 para determinação do valor esperado ou média μ , e do desvio padrão σ do campo. Portanto, calculou-se a média e o desvio padrão amostral com base em todo o conjunto de dados da TABELA 2.

A caracterização completa do campo gaussiano homogêneo requer a definição de sua função de autocorrelação e do comprimento de correlação espacial ou parâmetro de escala θ . Na implementação da função de autocorrelação, optou-se pelo uso da função exponencial dada pela EQUAÇÃO 2.49. Segundo Sriramula e Chryssanthopoulos (2013), esta família de funções foi a que melhor se ajustou considerando as medições experimentais para o módulo de elasticidade longitudinal do

material dos painéis. Como a variabilidade espacial das propriedades elásticas é o enfoque do presente trabalho, optou-se pela função com melhor ajuste no conjunto de dados relacionados ao módulo de elasticidade do material avaliado por Sriramula e Chryssanthopoulos (2013), desprezando-se os dados das propriedades mecânicas. Os valores assumidos para o parâmetro de escala θ foram também extraídos deste mesmo artigo, o qual recomenda comprimentos de correlação da ordem de 20 mm para funções de correlação exponenciais.

A TABELA 9 resume os parâmetros dos modelos probabilísticos considerados neste problema, nota-se que no caso da VA representando a carga aplicada, de forma análoga ao feito na Seção 4.1, diferentes valores para a média e desvio padrão foram contemplados, entretanto, devido ao maior custo computacional atrelado às análises envolvendo o modelo com variabilidade espacial, apenas os casos com $S(\mu = 3000, \sigma = 300)$ e $S(\mu = 3300, \sigma = 330)$ foram considerados. Isso se justifica pelo fato de que a aplicação da SMC nestas situações não demanda um número excessivo de simulações para a obtenção de uma estimativa aceitável da probabilidade de falha, por não ser inferior a 10^{-2} , conforme visto na calibração dos valores médios.

Para cada par de parâmetros associados a S , testou-se três variações para os comprimentos de correlação na modelagem do campo aleatório, visando o estudo do impacto deste parâmetro nas análises, os quais assumem os valores $\theta = 20$ mm, $\theta = 90$ mm e $\theta = 1000$ mm. O valor de $\theta = 90$ mm acabou sendo também selecionado para análise, por ter sido o maior comprimento de correlação obtido por Sriramula e Chryssanthopoulos (2013) no estudo dos dados experimentais de módulo de elasticidade longitudinal. O parâmetro $\theta = 1000$ mm foi adicionado para fins comparativos, por estar atrelado a um campo com pouca variabilidade local, se aproximando de uma condição de homogeneidade das propriedades elásticas.

TABELA 9 – CARACTERIZAÇÃO DAS VA'S: PROBLEMA CONSIDERANDO A VARIABILIDADE DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS

Caso	VA/ Campo Aleatório	Distribuição/ Classificação	Média (μ) (N/m)	Desvio Padrão (σ)	$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \theta)$	θ (mm)
1	$H_1(\mathbf{x}, \omega)$	Gaussiano	26,76	4,29	Exponencial	20,00
	S_1 (N/m)	Normal	3000,00	300,00	-	-
2	$H_1(\mathbf{x}, \omega)$	Gaussiano	26,76	4,29	Exponencial	20,00
	S_2 (N/m)	Normal	3300,00	330,00	-	-
3	$H_1(\mathbf{x}, \omega)$	Gaussiano	26,76	4,29	Exponencial	90,00
	S_1 (N/m)	Normal	3000,00	300,00	-	-
4	$H_2(\mathbf{x}, \omega)$	Gaussiano	26,76	4,29	Exponencial	90,00
	S_2 (N/m)	Normal	3300,00	330,00	-	-
5	$H_2(\mathbf{x}, \omega)$	Gaussiano	26,76	4,29	Exponencial	1000,00
	S_1 (N/m)	Normal	3000,00	300,00	-	-
6	$H_2(\mathbf{x}, \omega)$	Gaussiano	26,76	4,29	Exponencial	1000,00
	S_2 (N/m)	Normal	3300,00	330,00	-	-

FONTE: O autor (2025).

A discretização do campo aleatório $H(\mathbf{x}, \omega)$ foi realizada pelo método de expansão de Karhunen-Loève discreto, explanado na Seção 2.3 do Apêndice 2. A matriz de correlação é determinada diretamente nos centroides dos elementos da malha de discretização do MEF, então a decomposição espectral desta matriz fornece os autovalores e autovetores para computar a aproximação por série de Karhunen-Loève pela EQUAÇÃO AP2.12.

Assume-se que o teor de resina/fibra e suas respectivas propriedades elásticas associadas, determinadas conforme mostrado na Seção 3.2, são constantes em cada elemento finito, sendo atribuídas ao ponto centroidal de cada elemento da malha do MEF, no qual o cálculo da matriz de correlação é feito considerando as coordenadas espaciais nas direções x e y do elemento respectivo. Recordando o mencionado na Seção 3.2, variações de propriedades do material na direção longitudinal (direção z) serão negligenciadas.

Definiu-se uma razão de energia mínima de $\delta_e \geq 0,98$ como critério para determinar o número de termos M_T da série truncada. A biblioteca NumPy foi empregada para cálculo da matriz de correlação, enquanto que o pacote de rotinas de álgebra linear dessa mesma biblioteca foi usado para obtenção dos autovalores e autovetores da matriz de correlação (Harris *et al.*, 2020).

Na FIGURA 19 se apresentam exemplos de realizações do campo aleatório modelado. A FIGURA 19 considera a malha de elementos finitos da FIGURA 14 resultante do estudo de sensibilidade de malha realizado na Subseção 3.3.3, a função

de correlação exponencial, e os parâmetros de escala selecionados. Ao todo, podem-se ver 24 elementos, o que se traduz em 24 pontos centroidais, e, portanto, 24 "nós" ou pontos da malha de discretização do campo aleatório, nos quais a expansão de Karhunen-Loève foi aplicada para representação aproximada deste campo. Uma vez aproximado o campo no nó, as propriedades elásticas são determinadas e extrapoladas para o elemento com centroide associado a esse ponto.

As fronteiras dos elementos da malha de elementos de casca extrudados, ou seja, com suas espessuras representadas, podem ser visualizadas na imagem, tornando perceptível a premissa de que o teor de resina permanece constante em cada elemento.

Quanto a definição do número de termos M_T necessários, tem-se para o caso de $\theta = 20$, que $M_T = 23$ pelo critério da variância explicada:

$$\sum_{i=1}^{23} \lambda_i / \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cong 0,985 \geq \delta_e = 0,98$$

Para $\theta = 90$, $M_T = 19$:

$$\sum_{i=1}^{19} \lambda_i / \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cong 0,981 \geq \delta_e = 0,98$$

E por fim, para $\theta = 1000$, $M_T = 5$:

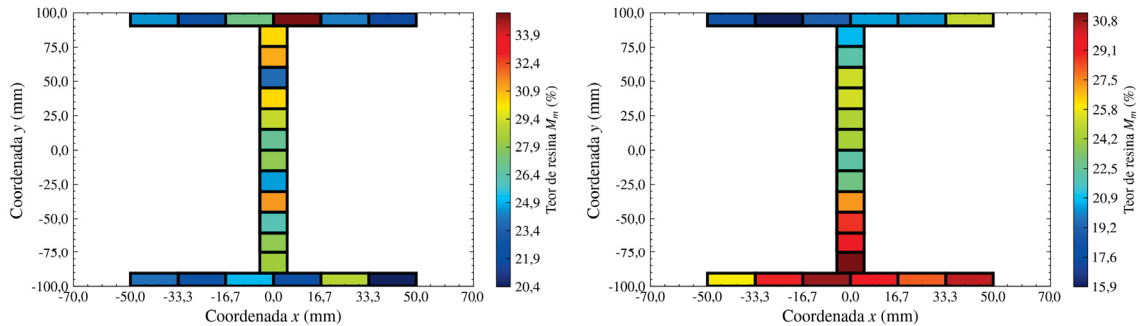
$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i / \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cong 0,983 \geq \delta_e = 0,98$$

Esses resultados são reflexo da relação entre o comprimento de correlação θ e o decaimento dos autovalores da função de covariância. Se θ é pequeno, o campo apresenta maior variabilidade, e a correlação se concentra em pontos próximos, a consequência disso é que o espectro da matriz de covariância $C(x_1, x_2)$ apresenta muitos autovalores relevantes. Entretanto, se θ é grande ocorre o inverso, o campo é suave, e poucos termos da expansão de Karhunen-Loève já capturam a maior parte da variância explicada, pois os autovalores associados a matriz de covariância decaem rapidamente (Tao, 2023).

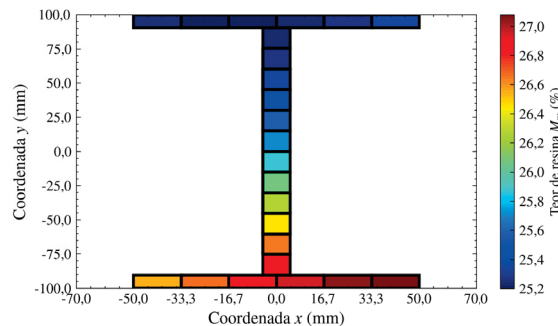
Na FIGURA 19 são representados os números de termos considerados para truncamento das séries associadas a cada uma das realizações dos campos aleatórios, com seus respectivos comprimentos de correlação θ . Percebe-se a diminuição do número de termos M_T , e a redução da variabilidade do teor de resina na seção transversal na medida em que o comprimento de correlação aumenta.

FIGURA 19 – REALIZAÇÕES DO CAMPO ALEATÓRIO: MODELAGEM DA VARIABILIDADE DO TEOR DE RESINA NA SEÇÃO

(a) Variabilidade do teor de resina ($\theta = 20$ mm e $M_T = 23$ termos) (b) Variabilidade do teor de resina ($\theta = 90$ mm e $M_T = 19$ termos)



(c) Variabilidade do teor de resina ($\theta = 1000$ mm e $M_T = 5$ termos)



FONTE: O autor (2025).

Com relação à obtenção das cargas críticas de flambagem $\lambda_{i,crit}$ pelo modelo MEF, esta é feita de forma muito parecida ao apresentado na Seção 4.4. O que difere do procedimento usado no modelo MEF sem variabilidade é a utilização do recurso do *software* ANSYS denominado *field variables*, o qual possibilita a introdução das propriedades do material do modelo em função de um parâmetro (*field variable*). No caso da aplicação desenvolvida neste trabalho esse parâmetro corresponde ao teor de resina. Na implementação do código em ANSYS APDL, as propriedades elásticas foram atribuídas com base nos valores dos teores de resina obtidos a partir da realização do campo aleatório, utilizando-se para isso o comando TBFIELD do *software* ANSYS.

Com a inicialização do comando TBFIELD, as propriedades elásticas do material atreladas às *field variables* (o teor de resina) são definidas com base nas expressões apresentadas na Seção 4.1, restando ainda a sua correspondência com os elementos da malha. Então, na sequência, mapearam-se os elementos cujos centroides possuem mesmas coordenadas espaciais x e y , com a finalidade de atribuir a cada um desses conjuntos de elementos da malha a *field variable* referente a essa coordenada centroidal.

4.6 IMPLEMENTAÇÃO DA METAMODELAGEM POR KRIGAGEM: MODELO CONSIDERANDO A VARIABILIDADE ESPACIAL DO TEOR DE RESINA

Com a incorporação da incerteza relacionada à variabilidade espacial do teor de resina, o modelo probabilístico do problema passa a apresentar uma dimensionalidade muito superior em relação ao do problema homogêneo. Conforme visto na Seção 4.5, para o comprimento de correlação de $\theta = 20$ mm, um total de 23 VA's normais padrão independentes são necessárias para representação do campo aleatório discretizado. Isso somado à não linearidade da função de estado limite EQUAÇÃO 4.9, torna a aplicação do método FORM inviável.

Assim sendo, o emprego do método da SMC se apresenta como uma abordagem mais adequada. Como já mencionado, as simulações MEF de flambagem de autovalor possuem um elevado custo computacional, o que acaba tornando a aplicação deste método praticamente proibitiva em problemas com probabilidade de falha muito baixas, por conta da necessidade de avaliações múltiplas destes modelos. Para contornar esta problemática, de maneira similar ao que foi feito na Seção 4.4, construiu-se um modelo de krigagem.

Este modelo possui como parâmetros de entrada 24 valores de teor de resina, associados a cada um dos centroides dos elementos da seção transversal, e similarmente ao modelo da Seção 4.4, tem como parâmetro de saída a carga crítica resultante do carregamento uniformemente distribuído ao longo dos 4 m de viga.

No treinamento do metamodelo, foi gerado um total de 2500 amostras com a técnica LHS, de maneira similar ao efetuado na Seção 4.4. O número de amostras adotado foi escolhido de modo que o critério de parada relativo a um COV de 5% na SMC fosse respeitado. Entretanto, essa amostra não foi propriamente dimensionada considerando uma melhor cobertura do seu espaço amostral, pelo seu número de dimensões e a faixa de variação de teores de resina. O refino desse espaço amostral não foi efetuado, pela necessidade da avaliação das respostas de inúmeras simulações computacionais do modelo MEF, a qual possui tempo de processamento relativamente elevado para as especificações da máquina empregada no trabalho.

Analogamente ao procedimento da Seção 4.4, o conjunto de treinamento compreende valores percentuais de teores de resina como dados de entrada, variando na faixa de 5% até 60%, gerados de forma aleatória com a biblioteca Harris *et al.* (2020), com base numa distribuição uniforme, e as cargas críticas de flambagem obtidas pelo processamento do modelo MEF correspondente¹. Neste caso, o modelo MEF recebe diretamente os valores dos teores de resina em cada um dos 24 pontos centroidais

¹ De forma análoga ao primeiro metamodelo apresentado, no treinamento considerou-se a carga crítica resultante, e não o carregamento uniformemente distribuído ao longo do comprimento da viga

da seção, os quais são os próprios dados de entrada obtidos pelo NumPy (Harris *et al.*, 2020). Após o processamento da análise, as cargas críticas de flambagem são retornadas pelo programa.

A configuração do kriging, bem como treinamento e otimização dos hiperparâmetros do programa em Python implementado se deu conforme apresentado na Seção 4.4. A função de correlação do tipo exponencial quadrática (EQUAÇÃO 2.50) com variância constante foi novamente selecionada. Como valor inicial para o parâmetro de escala definiu-se $\theta = 1,0$, com limites superior e inferior dados pelo intervalo: $[0,01; 10^3]$. O método de otimização dos hiperparâmetros adotado foi o L-BFGS.

O parâmetro de escala otimizado $\theta = 137,0$ e a variância $\sigma^2 = 4,537$ foram obtidos após a convergência do L-BFGS. A validação deste modelo foi efetuada gerando-se dois novos conjuntos de dados com 400 amostras aleatórias. Na primeira amostragem denominada como conjunto de VALIDAÇÃO 1, foi empregada a mesma metodologia usada nos dados de treinamento, ou seja, a amostra dos dados de entrada foi obtida pelo método do Hipercubo Latino, seguindo uma distribuição uniforme. No segundo conjunto de dados nomeado como VALIDAÇÃO 2, as amostras de teor de resina foram geradas sem a utilização da técnica de geração de amostras pelo LHS, segundo uma distribuição uniforme, numa faixa de variação de 5% a 60%.

Avaliou-se o desempenho do modelo nos dados de teste pelas métricas MAE (*Mean Absolute Error* - Erro Absoluto Médio), dada pela EQUAÇÃO 4.6, MSE (*Mean Squared Error* - Erro Quadrático Médio), calculada pela EQUAÇÃO 4.7, e o Erro máximo (*Max Error*), determinada pela EQUAÇÃO 4.7. Adicionalmente, verificou-se também o parâmetro R^2 , conhecido como coeficiente de determinação, dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad (4.10)$$

onde: \bar{y} é a média dos dados observados (resultados do modelo MEF).

Aplicando-se estas métricas nos dois conjuntos de dados de teste (VALIDAÇÃO 1 E VALIDAÇÃO 2) obteve-se os resultados apresentados na TABELA 10.

TABELA 10 – DESEMPENHO DO MODELO DE KRIGAGEM PARA O MEF HETEROGÊNEO

Métrica	VALIDAÇÃO 1	VALIDAÇÃO 2
MAE(y, \tilde{y})	97,742	456,332
MSE(y, \tilde{y})	125,369	592,832
MaxError(y, \tilde{y})	479,125	2795,886
R^2	0,986	0,808

FONTE: O autor (2025).

Comparando-se com os erros obtidos na validação do metamodelo apresentado na Seção 4.4, pode-se constatar que nesta modelagem estes foram mais elevados,

devido ao aumento da complexidade do modelo em elementos finitos, bem como o aumento da dimensão dos parâmetros de entrada.

Notam-se erros bastante significativos principalmente no segundo conjunto de dados avaliados, os quais foram simplesmente gerados de forma aleatória, sem a aplicação do algoritmo de amostragem por Hipercubo Latino. Calculando a razão percentual o máximo erro absoluto e a média dos valores reais observados y_i , obtém-se 22,66%.

Pelas métricas avaliadas, é possível inferir o baixo desempenho apresentado pelo modelo nos dados de teste, o qual apresentou erros significativos, além de um baixo coeficiente de determinação no caso do segundo conjunto de dados, atestando a baixa qualidade do ajuste do metamodelo às previsões do modelo numérico.

Possivelmente, visando a melhoria da capacidade de previsão das respostas do modelo numérico pelo metamodelo de PG, uma quantidade significativamente superior de amostras poderia ser proposta, e ao invés de considerar a isotropia do comprimento de correlação, esse pode ser tratado como anisotrópico, numa tentativa de incorporar os diferentes comportamentos entre cada um dos parâmetros de entrada e o parâmetro de saída do modelo.

4.7 MODELO COM DISTRIBUIÇÃO HETEROGÊNEA DO TEOR DE RESINA: IMPLEMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM AMOSTRAGEM POR HIPERCUBO LATINO

Três simulações foram conduzidas variando a *seed* do gerador de números pseudoaleatórios. Na Seção 4.5 foi apresentada na TABELA 9 os parâmetros para definição das variáveis aleatórias e dos campos aleatórios considerados para modelagem da variabilidade espacial do teor de resina. Na TABELA 11 são representados de forma resumida os parâmetros dos modelos probabilísticos, e as informações relacionadas às amostras geradas para as simulações. Pode-se perceber que um número reduzido de amostras foi selecionado. Essa decisão deve-se ao fato de que nestas simulações, a função de estado limite será avaliada diretamente pelo modelo MEF, o qual demanda maior custo computacional. A utilização direta do modelo de alta fidelidade neste caso se dá também pela garantia da melhor representatividade destes resultados, tendo em vista que de acordo com as validações realizadas na Seção 4.6, o metamodelo proposto apresentou baixo desempenho considerando as métricas aplicadas.

TABELA 11 – DEFINIÇÃO DAS SEMENTES E TAMANHO DAS AMOSTRAS DAS SIMULAÇÕES

Amostra	$S(\mu)$ (N/m)	θ (mm)	<i>seed</i>	Dimensão
1	3000	20	4266645	[150x24]
2	3000	20	3566911	[150x24]
3	3000	20	29815	[150x24]
4	3000	90	489822	[150x24]
5	3000	90	657667	[150x24]
6	3000	90	835037	[150x24]
7	3000	1000	664608	[150x20]
8	3000	1000	498614	[150x20]
9	3000	1000	815202	[150x20]
10	3300	20	461433	[150x20]
11	3300	20	600232	[150x20]
12	3300	20	649636	[150x20]
13	3300	90	889113	[150x6]
14	3300	90	142492	[150x6]
15	3300	90	559493	[150x6]
16	3300	1000	49524	[150x6]
17	3300	1000	605242	[150x6]
18	3300	1000	5819737	[150x6]

FONTE: O autor (2025).

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as análises e discussões dos resultados para os modelos propostos segundo as duas abordagens distintas para tratamento da incerteza nas propriedades do material.

5.1 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO MODELO HOMOGÊNEO: APLICAÇÃO DO MÉTODO FORM

Seis casos foram avaliados para o problema de confiabilidade proposto, conforme exposto na Seção 4.1. Os resultados obtidos para o ponto de projeto, número de iterações necessárias para convergência do algoritmo, índice de confiabilidade β_{FORM} e a probabilidade de falha p_f são apresentadas na TABELA 12.

TABELA 12 – RESULTADOS FORM: MODELAGEM SUPONDO HOMOGENEIDADE DO TEOR DE RESINA

Caso	$S (\mu)$	Iterações	x_1^*	x_2^*	β_{FORM}	p_f
1	2000	32	2295,140	34,581	2,345	9,507E-03
2	2250	4	2468,890	31,508	1,473	7,036E-02
3	2500	4	2619,680	29,088	0,723	2,348E-01
4	3000	4	2898,210	25,166	-0,504	6,928E-01
5	3300	5	3054,45	23,2371	-1,109	8,662E-01
6	3900	13	3350,26	20,031	-2,110	9,826E-01

FONTE: O autor (2024).

Dentre as situações avaliadas, os casos 1 e 6 foram os que apresentaram maior número de iterações necessárias para convergência. É possível notar o aumento da probabilidade de falha da estrutura conforme o valor médio da VA S se eleva. Este resultado é esperado visto que o acréscimo da média μ de S , implica num desvio padrão maior para esta mesma VA, uma vez que este é dado por 10% de seu valor esperado, aliado a isso, tem-se o efeito direto de elevar a média do carregamento.

Estas duas condições tendem a provocar uma redução da distância mínima entre a superfície de falha à origem do espaço normal padrão, o que consequentemente eleva a p_f do sistema. Isso pode ser averiguado pela expressão do índice de confiabilidade de Cornell, a qual fornece a mínima distância no espaço normal padrão entre a superfície de falha e a origem, para um problema de confiabilidade análogo ao da EQUAÇÃO 4.1, com duas VA's normais. Denotando por $\mu_{\lambda_{i,crit}(M_m)}$ a média da carga

crítica, tem-se:

$$\beta_{Cornell} = d_{\min} = \frac{\mu_{\lambda_{i,crit}(M_m)} - \mu_S}{\sqrt{\sigma_{\lambda_{i,crit}(M_m)}^2 + \sigma_S^2}} \quad (5.1)$$

Da EQUAÇÃO 5.1, nota-se de maneira mais explícita que o acréscimo da média, necessariamente, implica numa redução no índice de confiabilidade, e portanto, num aumento da probabilidade, visto que estas variáveis estão inversamente relacionadas considerando a FDA da VA normal padrão, ou seja, o decréscimo de um parâmetro implica no acréscimo do outro, e vice-versa. Para os casos 4, 5 e 6 devido ao fato de que a p_f foi superior a 50%, os valores de β_{FORM} são negativos considerando a FDA normal padrão e a EQUAÇÃO 2.15.

5.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO MODELO HOMOGÊNEO: APLICAÇÃO DA SMC COM LHS

A Figura 20a à Figura 25a apresentam os resultados das simulações de Monte Carlo realizadas, variando em cada caso a *seed* do gerador de números pseudoaleatórios. Na FIGURA de subitem (a) é ilustrada a convergência da estimativa para a probabilidade de falha \widehat{p}_f e no subitem (b) seu intervalo de confiança (IC) de 95%, em função do número de amostras.

Um resumo das estimativas de probabilidade e COV obtidas ao final da SMC, bem como um comparativo de resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade com o FORM é apresentado na TABELA 13.

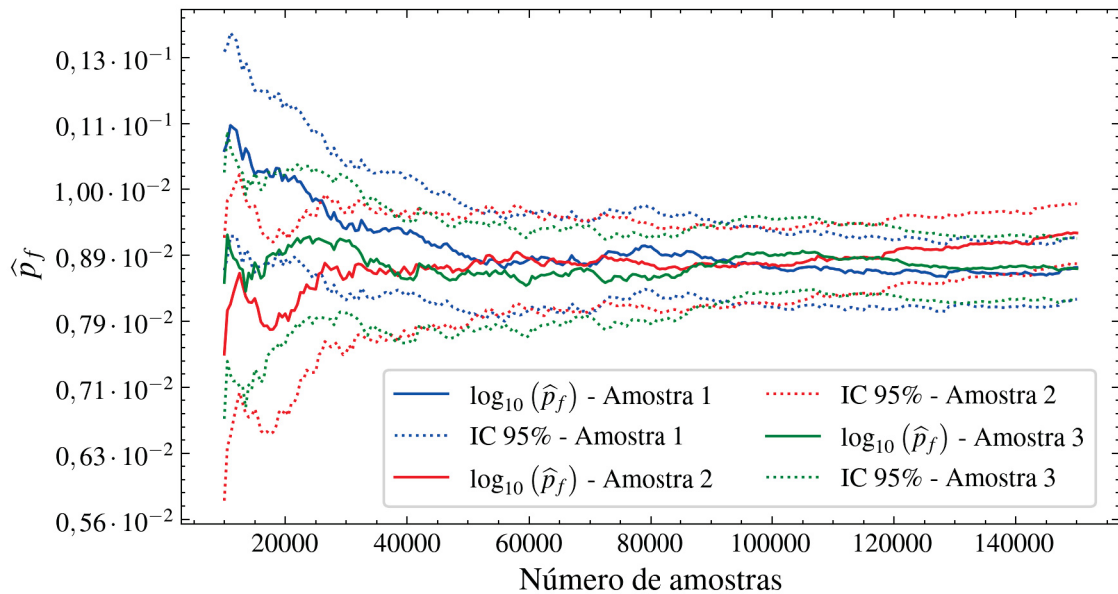
Nas simulações com $S(\mu = 2000 \text{ N/m})$ representadas na FIGURA 20, é possível notar pela Figura 20a que a convergência se dá na faixa de 50 a 60 mil amostras, se verificando também em todas as amostragens geradas o estreitamento e a proximidade dos intervalos de confiança para um número de amostras alto, com um relativo afastamento tanto da estimativa quanto dos limites do intervalo de confiança da amostra 2.

Com relação à evolução do COV, mostrada na Figura 20b, as amostragens apresentaram comportamentos bastante similares, sendo que na segunda simulação a variação foi ligeiramente superior nas amostras iniciais.

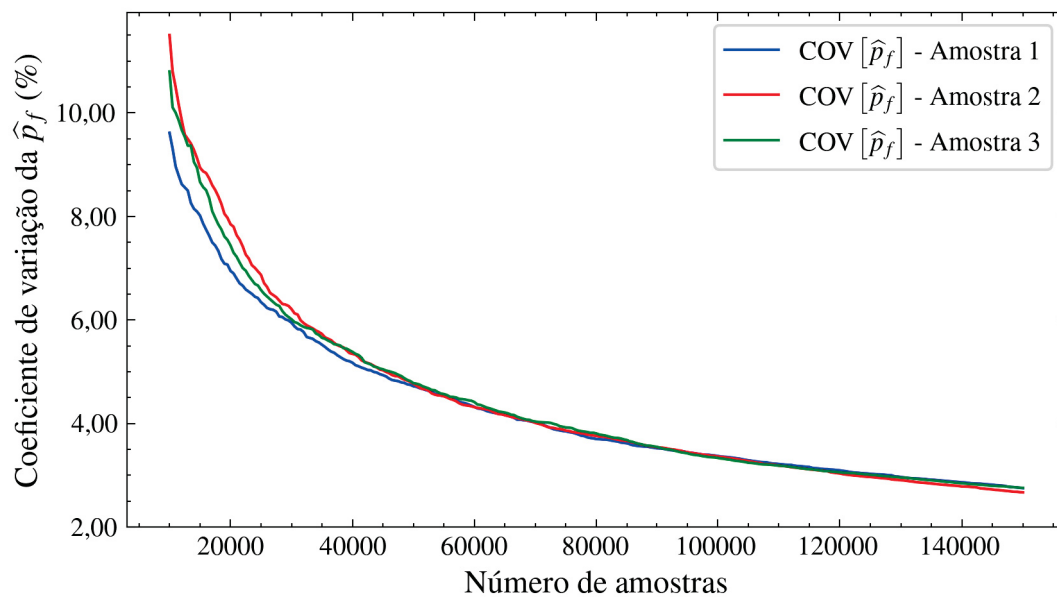
Pela TABELA 13 é possível notar que as estimativas da \widehat{p}_f das simulações são próximas, sendo que a da amostra 2 apresentou maior desvio em relação às demais. Os valores do coeficiente de variação são também bastante semelhantes em todos os testes. Sendo os resultados estatísticos das simulações similares nas três amostras avaliadas, pode-se constatar sua consistência e independência da amostra gerada.

FIGURA 20 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 1, 2 E 3 - $S(\mu = 2000 \text{ N/m})$:
 MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC $\log_{10}(\hat{p}_f)$



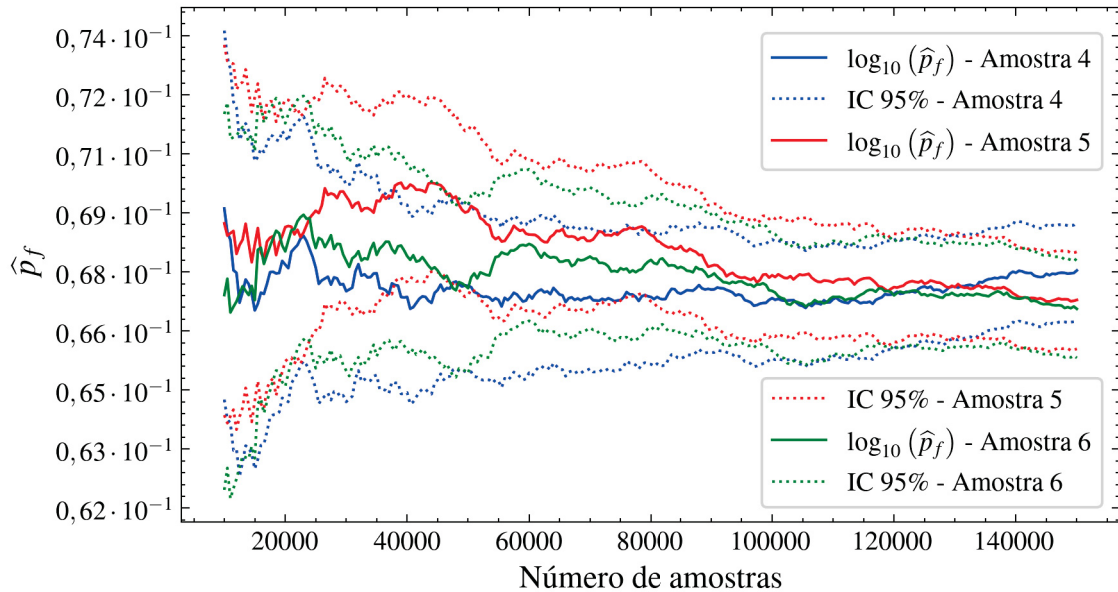
(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$



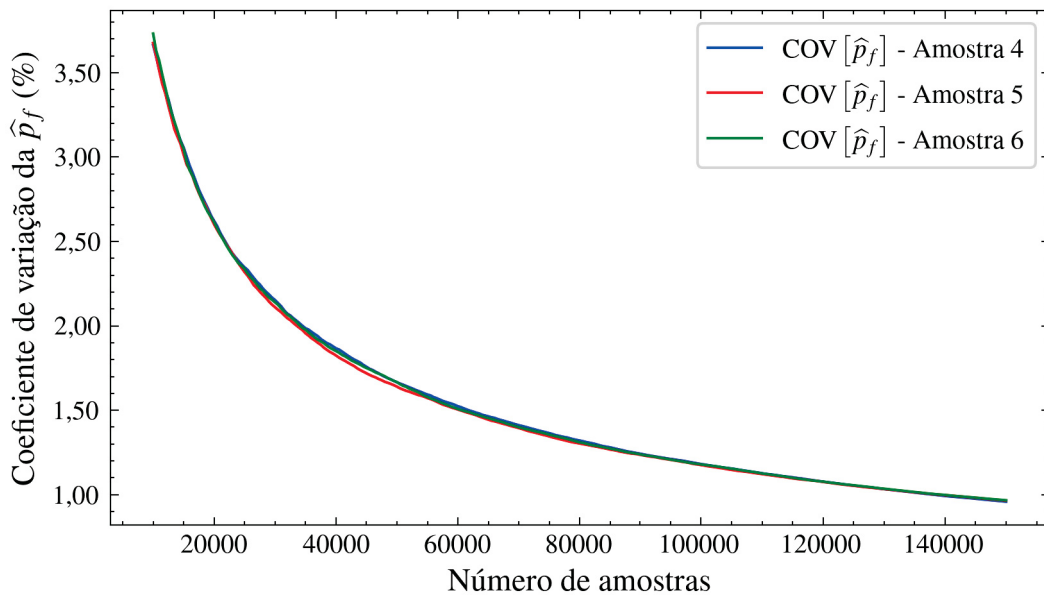
No cenário com $S(\mu = 2250 \text{ N/m})$, se nota um comportamento errático do valor de \hat{p}_f para as amostras iniciais, o qual converge para um resultado semelhante na medida em que os intervalos de confiança se estreitam, denotando mais uma vez a independência da *seed* usada. Os gráficos de COV mostram um comportamento praticamente idêntico, atingindo uma variabilidade bastante baixa já nas amostras iniciais, a qual progride de forma muito similar conforme o aumento do número de amostras.

FIGURA 21 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 4, 5 E 6 - $S(\mu = 2250 \text{ N/m})$:
 MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC $\log_{10}(\hat{p}_f)$



(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$



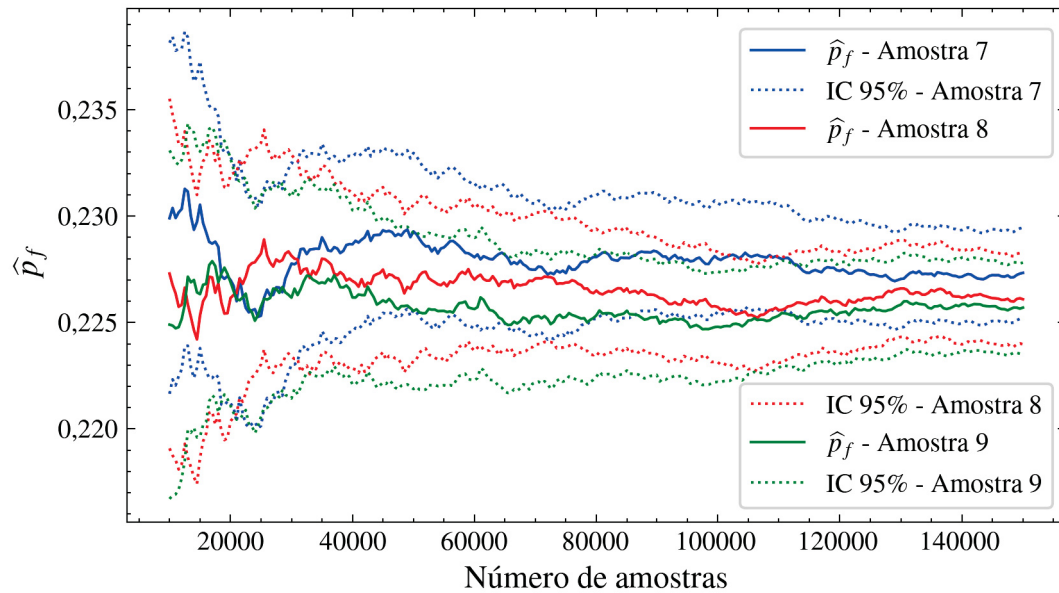
A partir do caso de $S(\mu = 2500 \text{ N/m})$, optou-se por não representar a probabilidade pelo seu logaritmo na base 10, como feito nos eixos verticais mostrados na FIGURA 20 e FIGURA 21, pelo fato desta passar a assumir valores mais significativos.

Na FIGURA 22 são apresentados os resultados das simulações aplicando um carregamento $S(\mu = 2500 \text{ N/m})$. Pela grandeza das probabilidades de falha serem superiores às dos casos prévios, se percebe da Figura 22a e Figura 22b uma convergência mais rápida das estimativas, se considerarmos a alteração da escala do eixo

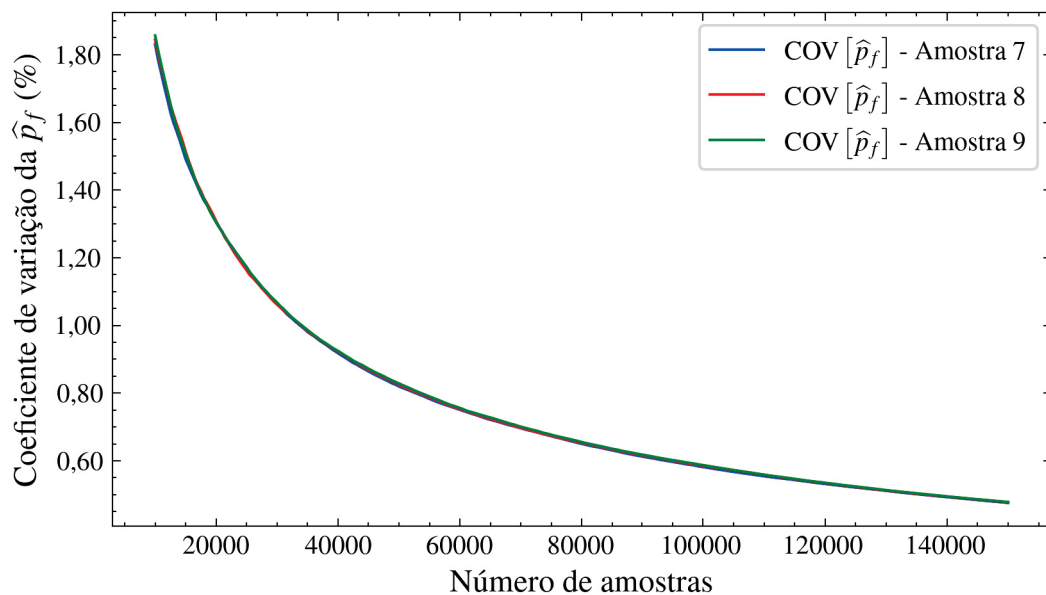
vertical. Percebe-se ainda a grande semelhança dos intervalos de confiança para um número de amostras grande. Sobre os coeficientes de variação, estes apresentaram comportamentos praticamente coincidentes, o que se evidencia pela sobreposição das curvas.

FIGURA 22 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 7, 8 E 9 - $S(\mu = 2500 \text{ N/m})$:
MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \hat{p}_f



(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$



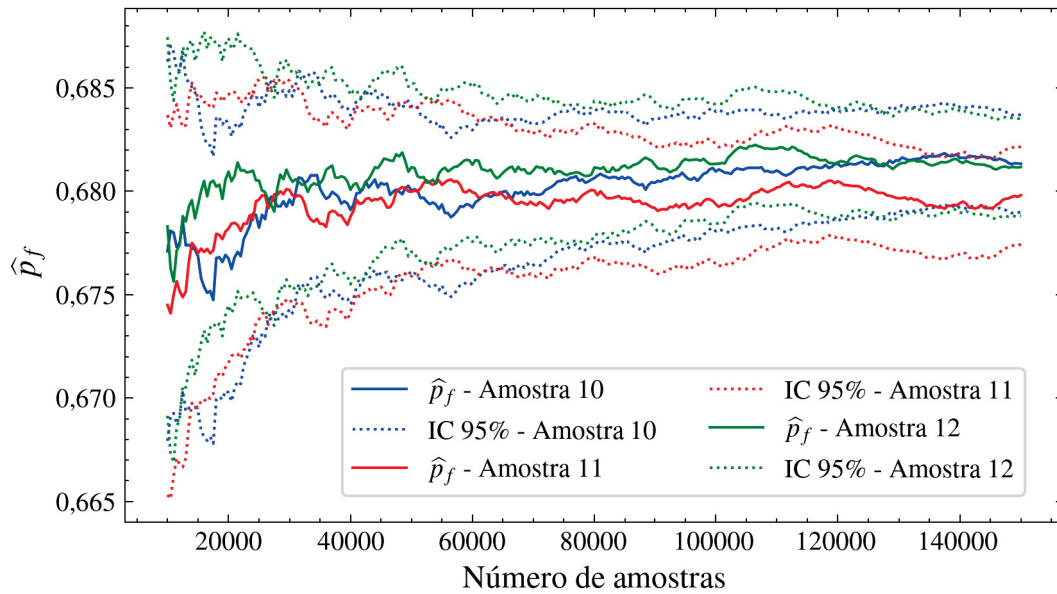
No caso com $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$, $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $S(\mu = 3900 \text{ N/m})$, se verifica um comportamento qualitativo semelhante ao observado para os valores de carga inferiores, conforme apresentam as FIGURAS (FIGURA 23, FIGURA 24 e FIGURA 25),

tanto para a probabilidade de falha quanto para o coeficiente de variação. Sobre a estimativa \widehat{p}_f , esta apresenta inicialmente uma certa variabilidade, e então estabiliza em um número de amostras relativamente mais baixo que os dos casos previamente analisados, pelo fato desses estarem atrelados a uma probabilidade de falha significativamente maior. Uma grande proximidade entre a probabilidade de falha e os intervalos de confiança pode ser observada particularmente no caso da FIGURA 24.

Com relação aos gráficos da convergência do COV apresentados nas FIGURAS (Figura 23b, Figura 24b e Figura 25b), novamente estes ilustram um decaimento progressivo conforme o número de amostras aumenta, e também um comportamento qualitativo praticamente idêntico, sem dependência da amostra gerada. A robustez da SMC é mais uma vez verificada, com os resultados convergindo consistentemente com um grau de precisão tolerável independente da amostragem.

FIGURA 23 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 10, 11 E 12 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$:
 MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \hat{p}_f



(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$

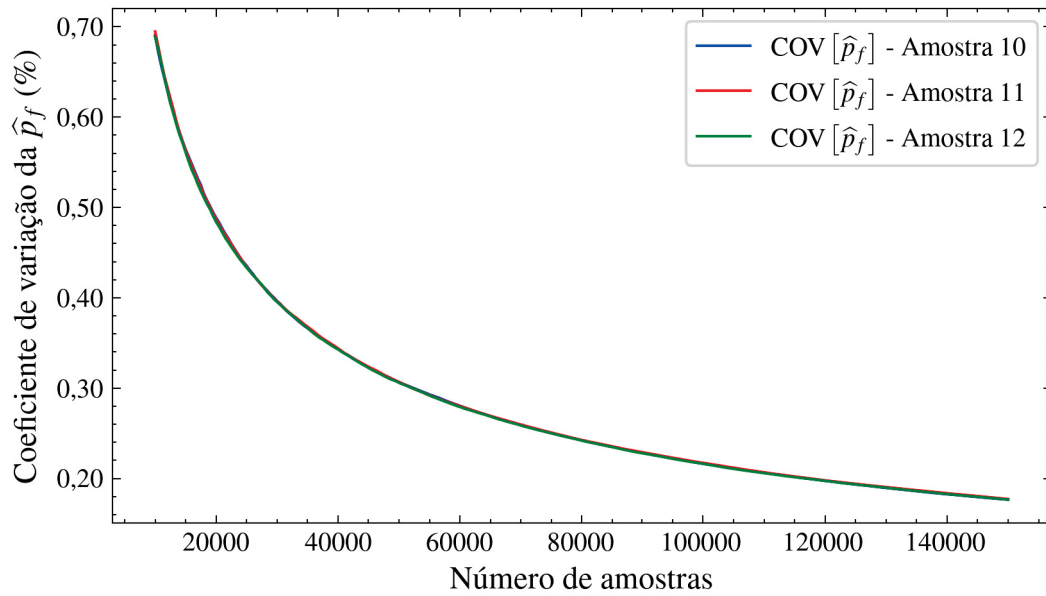
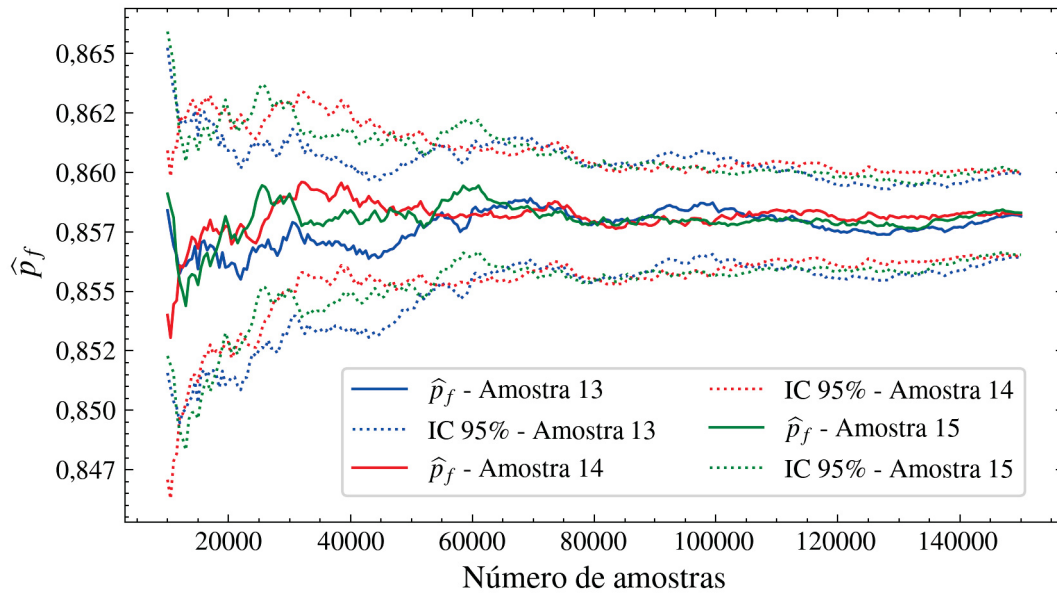


FIGURA 24 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 13, 14 E 15 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$:
 MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \hat{p}_f



(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$

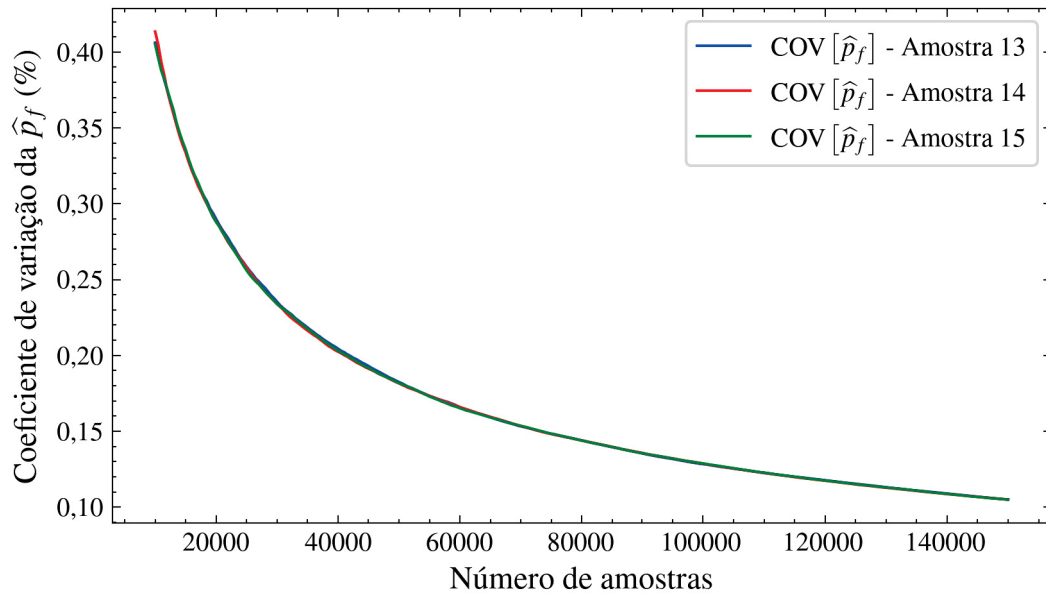
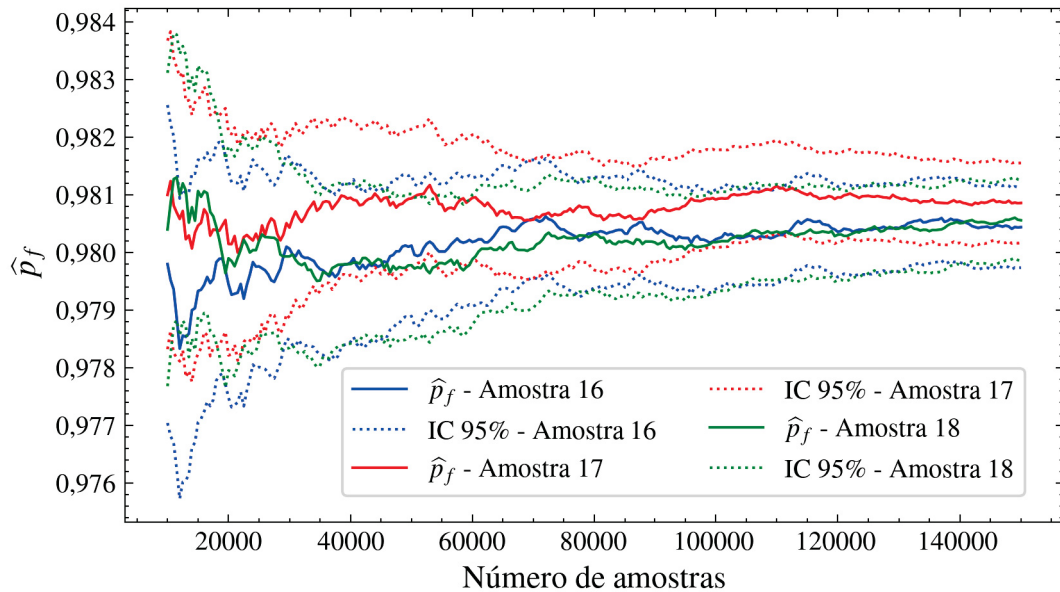
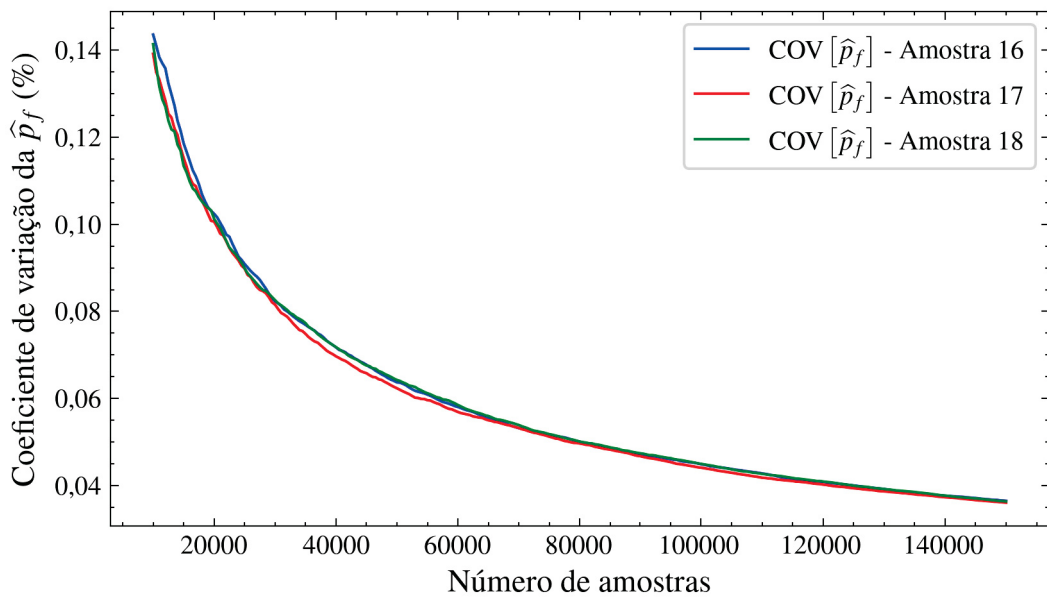


FIGURA 25 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 16, 17 E 18 - $S(\mu = 3900 \text{ N/m})$:
 MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \hat{p}_f



(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$



Um resumo dos resultados obtidos com a aplicação da SMC e do algoritmo FORM é apresentado na TABELA 13. Nota-se o mesmo comportamento de aumento da p_f observada na Seção 5.1, relativo ao uso do método FORM, conforme se elevam os parâmetros da distribuição normal de S . Pode-se ver ainda que os resultados encontrados por ambos os métodos foram bastante próximos, com diferenças não muito significativas de precisão, sinalizando neste cenário a aplicabilidade do FORM, o qual apesar de ser um método menos robusto e geral que a SMC, manteve precisão e

acurácia similar. Em todas as simulações efetuadas se observa um COV(%) inferior a 3%.

TABELA 13 – RESUMO RESULTADOS SMC E FORM: MODELO SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

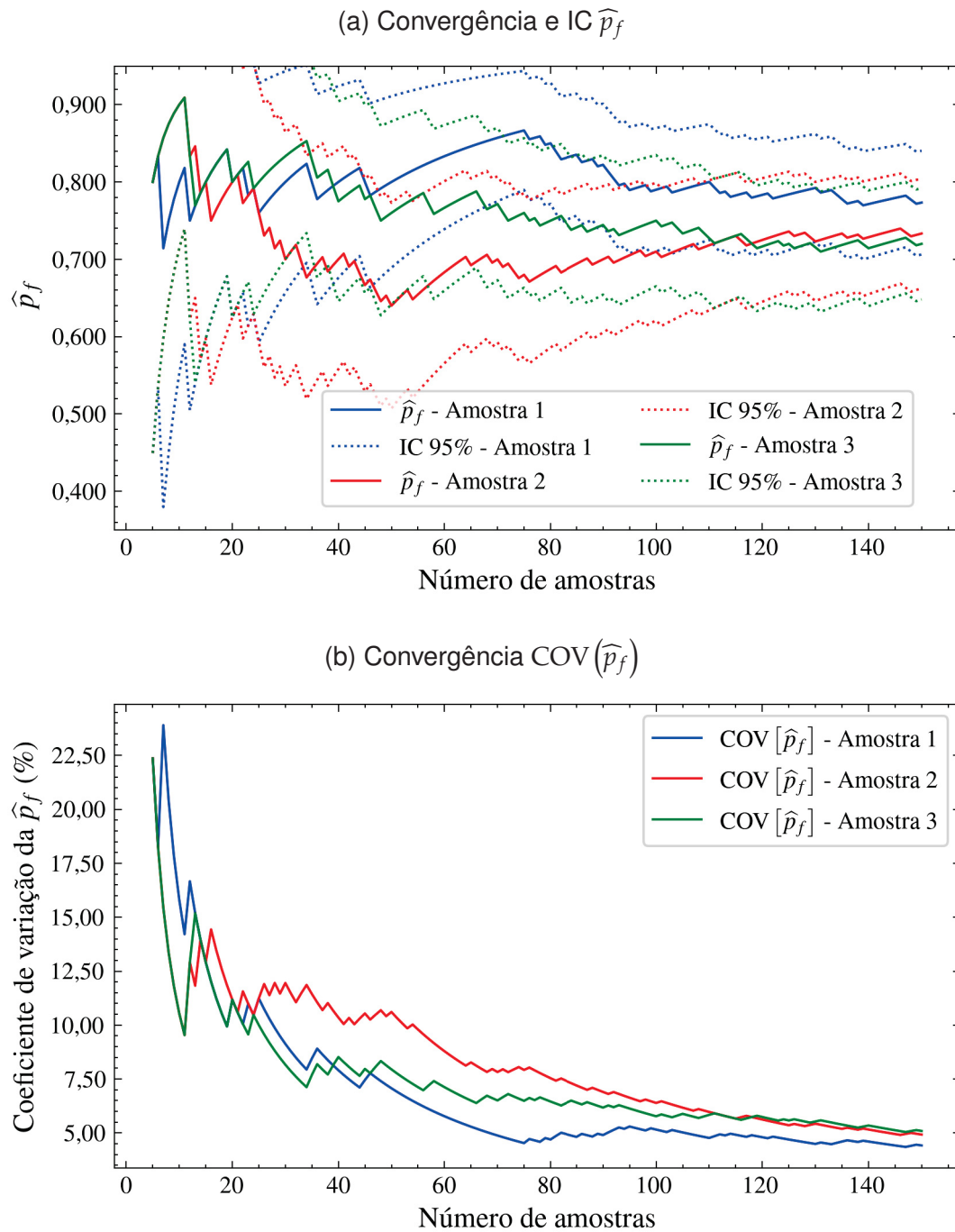
Caso	$S(\mu)$	$p_{f,FORM}$	β_{FORM}	$p_{f,SMC}$	β_{SMC}	COV(%)	Amostra SMC
1	2000	9,507E-03	2,345	8,727E-03	2,377	2,752	Amostra 1
				9,267E-03	2,355	2,670	Amostra 2
				8,707E-03	2,378	2,755	Amostra 3
2	2250	7,036E-02	1,473	6,765E-02	1,494	0,959	Amostra 1
				6,687E-02	1,499	0,964	Amostra 2
				6,664E-02	1,501	0,966	Amostra 3
3	2500	2,348E-01	0,723	2,273E-01	0,748	0,476	Amostra 1
				2,261E-01	0,752	0,478	Amostra 2
				2,257E-01	0,753	0,478	Amostra 3
4	3000	6,928E-01	-0,504	6,813E-01	-0,471	0,177	Amostra 1
				6,798E-01	-0,467	0,177	Amostra 2
				6,812E-01	-0,471	0,177	Amostra 3
5	3300	8,662E-01	-1,109	8,582E-01	-1,072	0,105	Amostra 1
				8,582E-01	-1,072	0,105	Amostra 2
				8,583E-01	-1,073	0,105	Amostra 3
6	3900	9,826E-01	-2,110	9,804E-01	-2,063	0,036	Amostra 1
				9,809E-01	-2,072	0,036	Amostra 2
				9,806E-01	-2,065	0,036	Amostra 3

FONTE: O autor (2025).

5.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO MODELO HETEROGÊNEO: APLICAÇÃO DA SMC COM LHS

A FIGURA 26 a FIGURA 31, apresentam os resultados das simulações de Monte Carlo realizadas com a avaliação direta da função de estado limite com o modelo de elementos finitos, variando em cada caso a *seed* do gerador de números pseudoaleatórios, com parâmetros da variável aleatória $S(\mu, \sigma)$ e do comprimento de correlação θ fixos, conforme abordado na Seção 5.3. O subitem (a) das figuras ilustra a convergência da estimativa para a probabilidade de falha \widehat{p}_f e os intervalos de confiança (IC) de 95% associados, ao passo de que no subitem (b) é mostrada a evolução do COV.

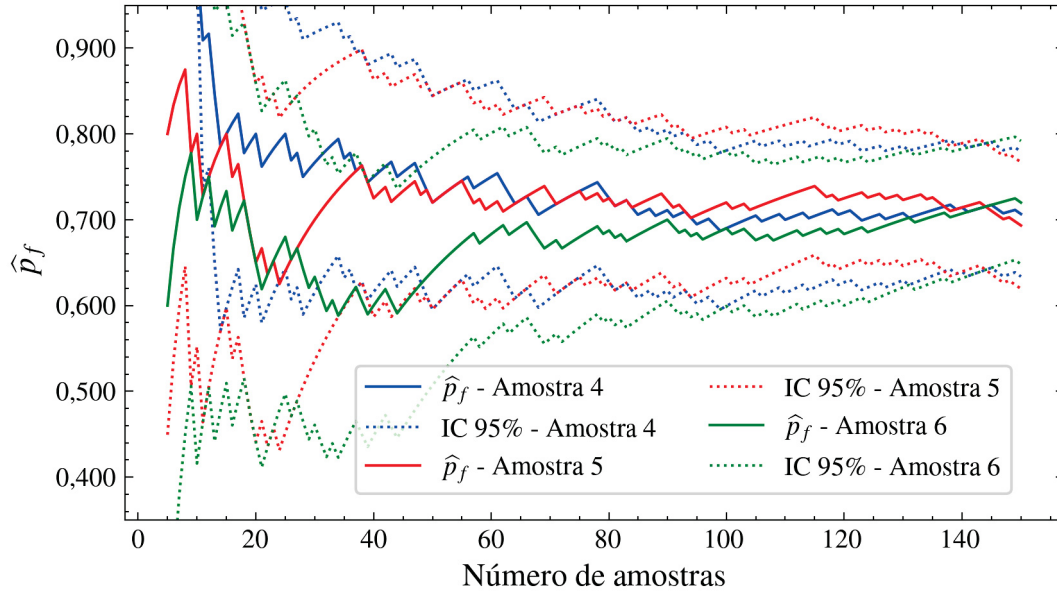
FIGURA 26 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 1, 2 E 3 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$ e $\theta = 20 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA



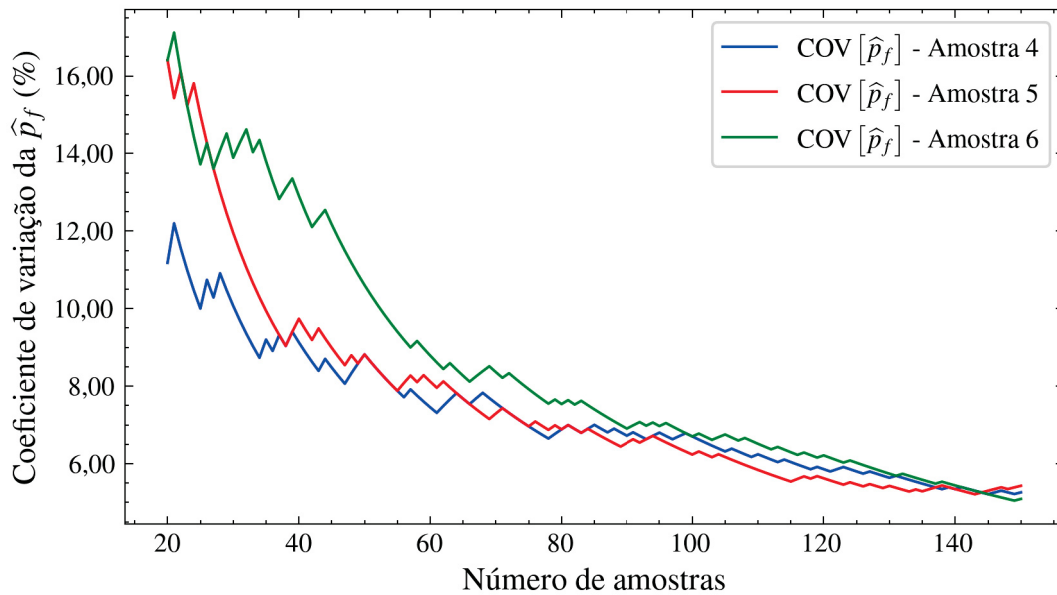
Com relação as três primeiras simulações é possível visualizar a convergência das estimativas para a p_f por volta de 70 a 80%, sendo as estimativas finais da primeira e segunda amostragem bastante próximas. Em todas as amostras um COV inferior a 5% é observado. A convergência ocorre de maneira bastante rápida para o COV alvo, o que se pode inferir tanto pela Figura 26a quanto Figura 26b.

FIGURA 27 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 4, 5 E 6 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$ e $\theta = 90 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \widehat{p}_f



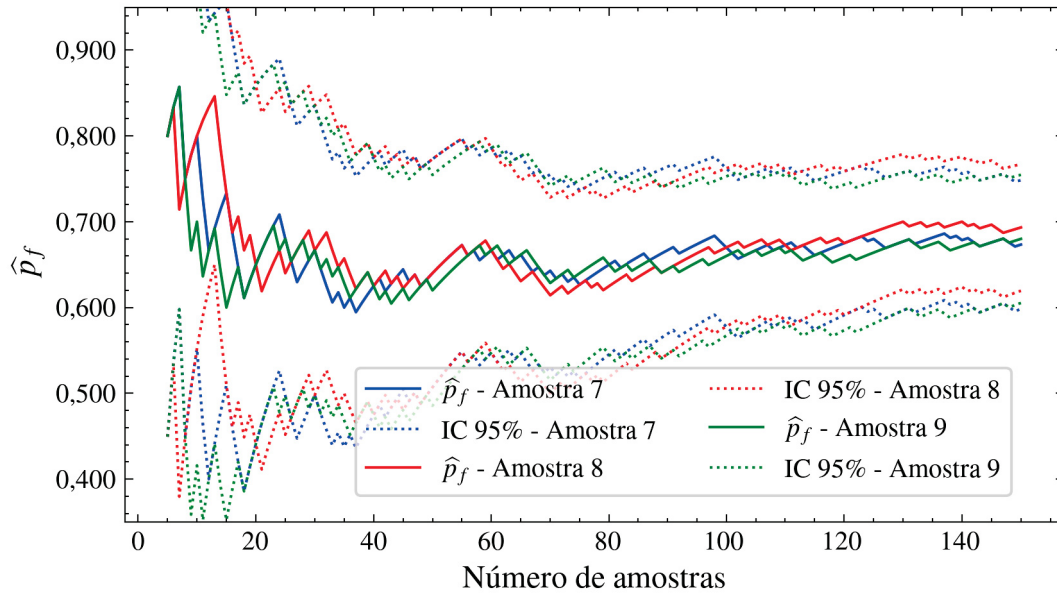
(b) Convergência $\text{COV}(\widehat{p}_f)$



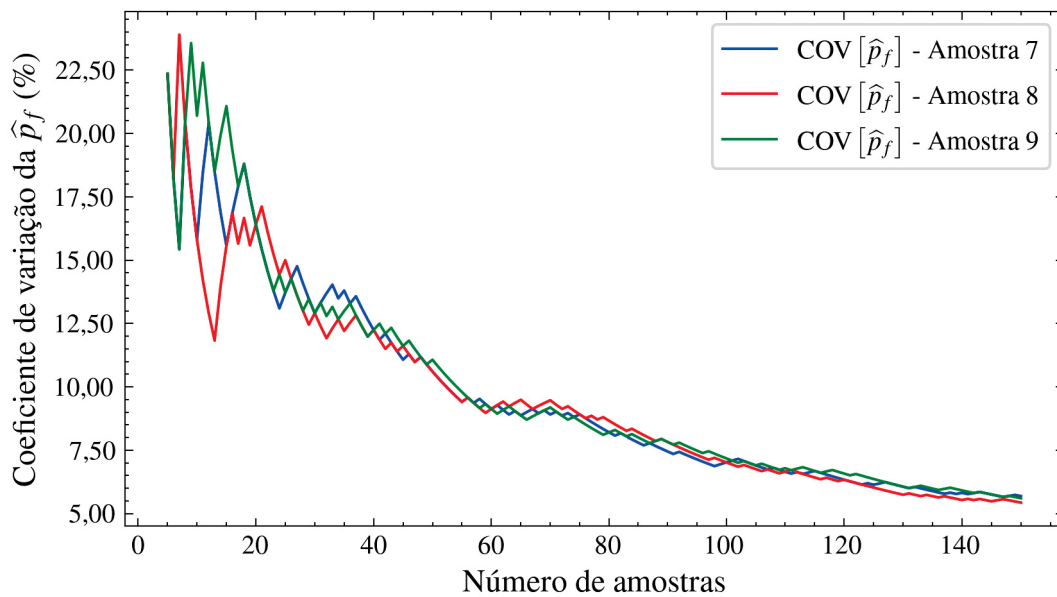
Para as amostras 4, 5 e 6 pode-se perceber uma maior proximidade entre as estimativas ao final da simulação, por volta de 65%, e também uma convergência mais rápida em relação ao caso com $\theta = 20 \text{ mm}$, visto que nestas simulações um campo aleatório com menor variabilidade e irregularidade local.

FIGURA 28 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 7, 8 E 9 - $S(\mu = 3000 \text{ N/m})$ e $\theta = 1000 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \hat{p}_f



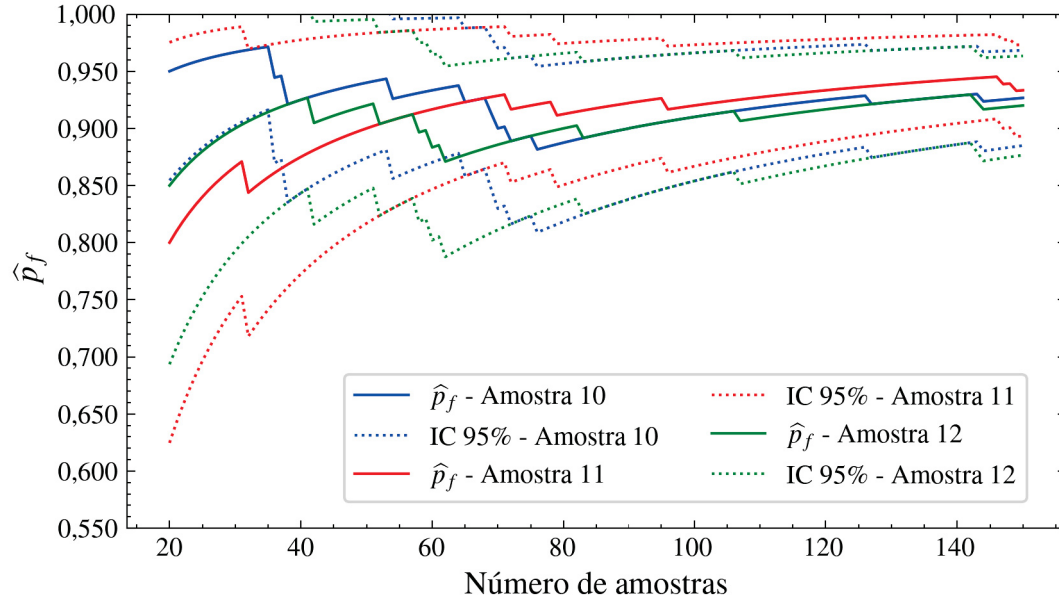
(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$



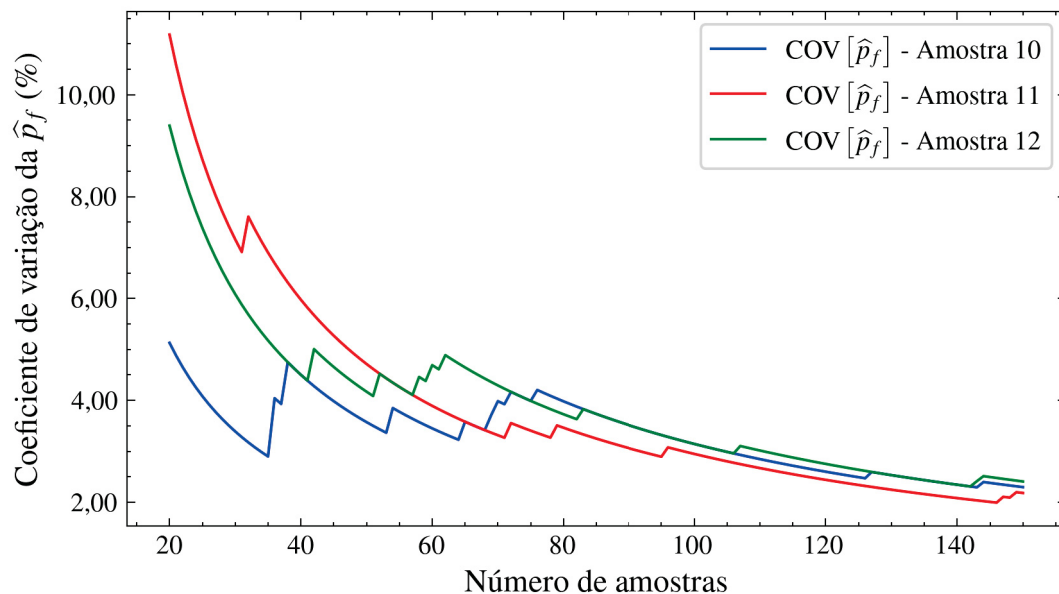
Quanto às simulações envolvendo o campo aleatório de $\theta = 1000 \text{ mm}$, o mais suave e regular dentre todos os avaliados, observa-se uma proximidade ainda maior do que a vista na FIGURA 27, seja para as estimativas de p_f quanto para o COV, um comportamento esperado dada a maior regularidade e menor variabilidade local do campo aleatório aqui analisado.

FIGURA 29 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 10, 11 E 12 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 20 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \hat{p}_f



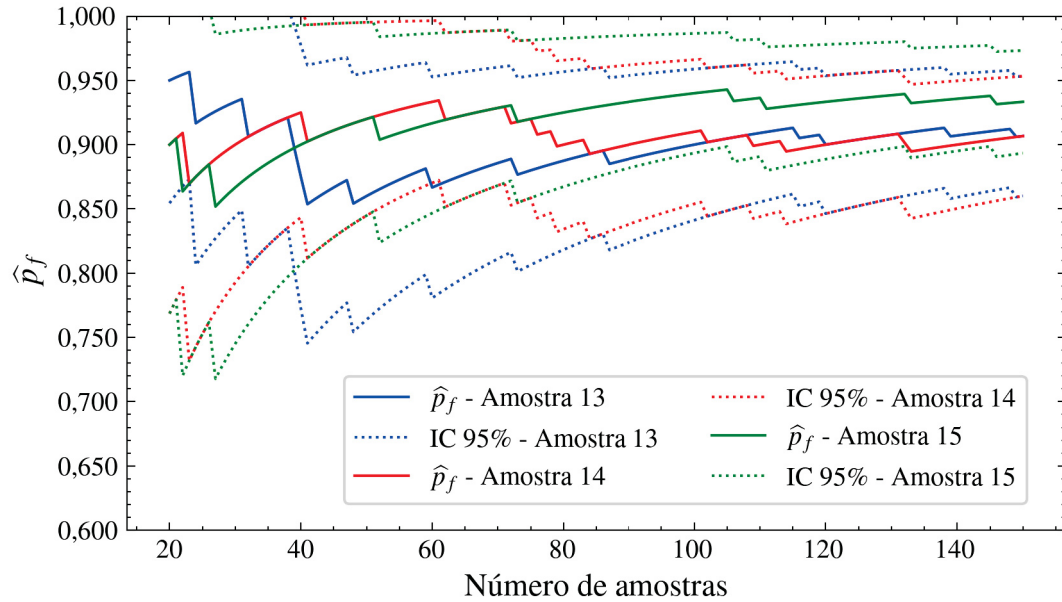
(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$



Nas simulações realizadas com $\mu = 3300 \text{ N/m}$ para S , a convergência se dá de maneira mais rápida em comparação aos casos apresentados na FIGURA 26, FIGURA 27 e FIGURA 28, pois em comparação com a condição em que $\mu = 3000 \text{ N/m}$, a falha é mais provável, afinal a VA S apresenta média e desvio padrão superiores. Isso se observa pelos gráficos de convergência do coeficiente de variação, os quais foram inferior a 3,5% em todos os casos ao final da simulação.

FIGURA 30 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 13, 14 E 15 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 90 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \hat{p}_f



(b) Convergência $\text{COV}(\hat{p}_f)$

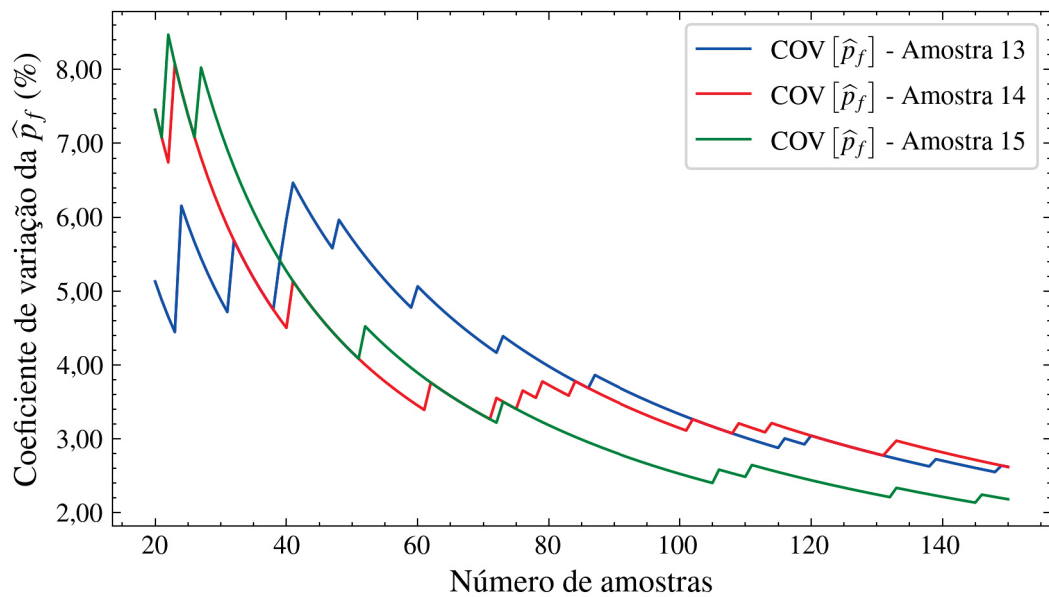
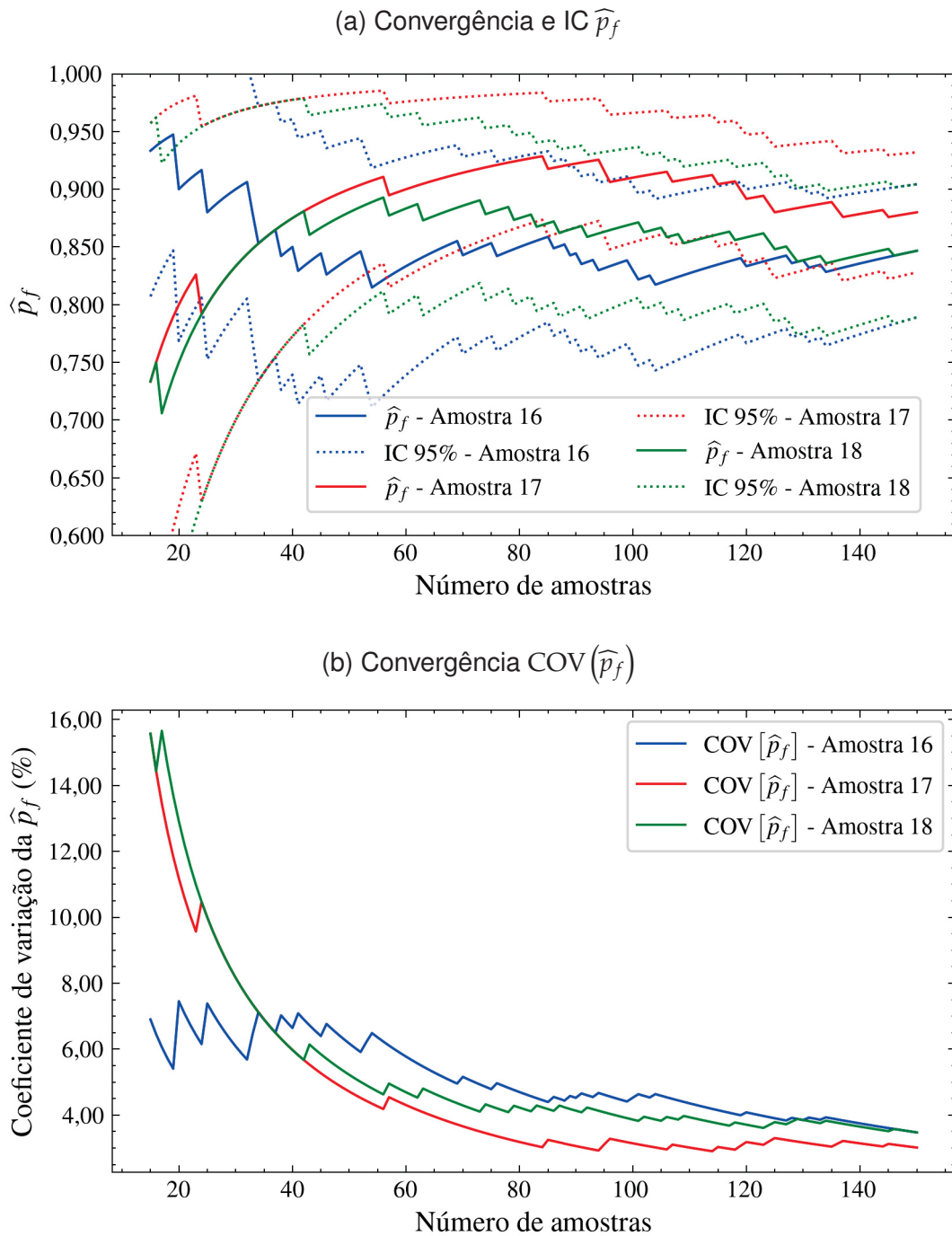


FIGURA 31 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAS 16, 17 E 18 - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 1000 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA



Pode-se observar que nas simulações com $\mu = 3300 \text{ N/m}$ para a VA S , os gráficos de convergência da estimativa \hat{p}_f , e também do COV, se distinguem dos padrões usualmente vistos graficamente para SMC de eventos raros e com elevada amostragem. Isso se deve ao fato de que a FIGURA 29, FIGURA 30 e FIGURA 31, se referem à convergência de simulações de eventos não raros, de falha muito mais frequente, limitados a um número de amostras reduzido (em comparação às necessárias para

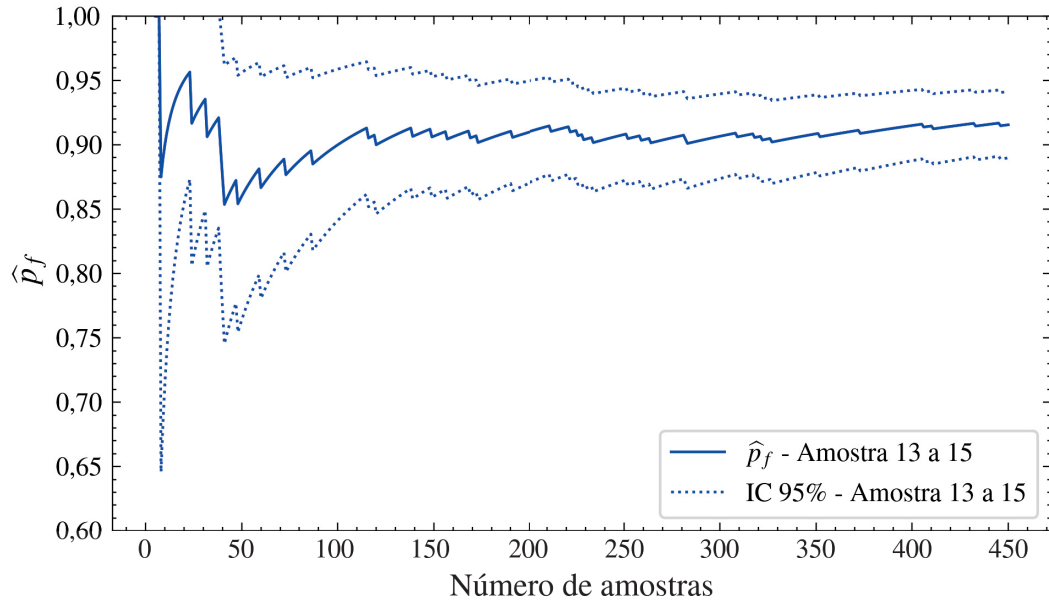
convergência em eventos extremamente raros).

Em eventos com probabilidade de falha mais elevada, seja pela sensibilidade da escala no eixo da \widehat{p}_f , ou pelo próprio número reduzido de amostras, comportamentos um tanto distintos dos padrões usuais de convergência, observados no Seção 5.2 e na atual seção para as simulações envolvendo a VA S com $\mu = 3000$ N/m.

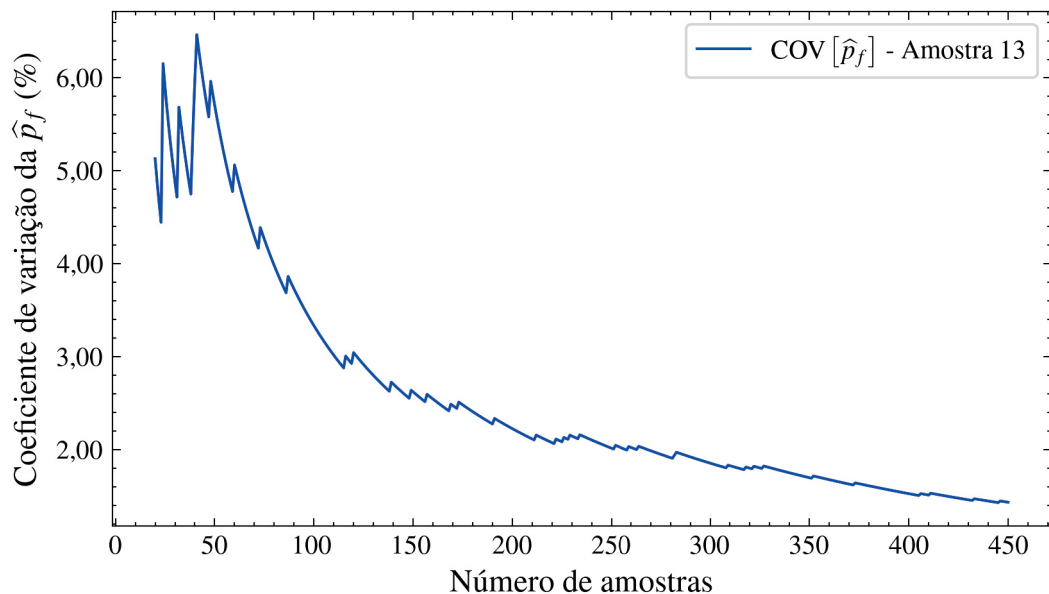
Visando ilustrar essa observação, na FIGURA 32 é apresentado o gráfico de convergência considerando que as amostras 13, 14 e 15 compuseram uma única amostragem conjunta, composta primeiro pela amostra 13, depois 14 e por fim pela 15. Nota-se que o comportamento com picos alternados não ocorre para a convergência da estimativa da p_f nem do coeficiente de variação.

FIGURA 32 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO AMOSTRAGEM 13, 14 E 15 CONJUNTA - $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ e $\theta = 90 \text{ mm}$: MODELO COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Convergência e IC \widehat{p}_f



(b) Convergência $\text{COV}(\widehat{p}_f)$



5.4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS

A Figura 33a e Figura 33b mostram uma comparação entre as estimativas de probabilidade de falha \widehat{p}_f média das SMC com o modelo heterogêneo. Essa estimativa média foi calculada considerando as três amostragens realizadas para simulações

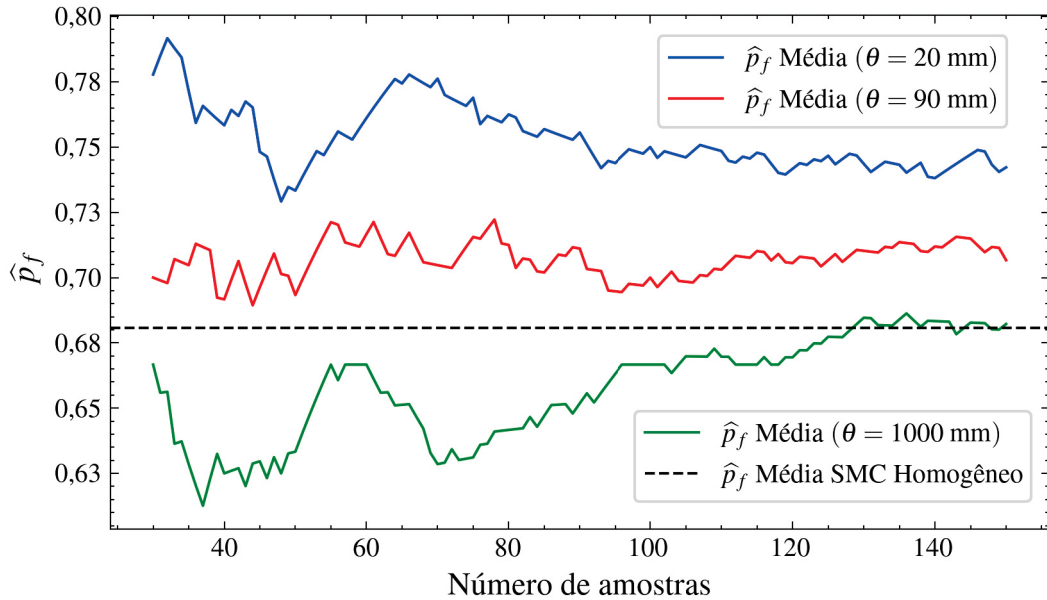
de mesmos pares de parâmetros de variável aleatória $S(\mu, \sigma)$ e do comprimento de correlação θ , para fins comparativos com as probabilidades de falha encontradas no modelo homogêneo, que estão representadas nos gráficos da FIGURA 33 por uma linha preta tracejada.

É possível observar que quanto maior a variabilidade do campo aleatório modelado, ou de forma equivalente, quanto menor o comprimento de correlação associado a esse campo, maior a probabilidade de falha associada. Tanto para $S(\mu = 3000, \sigma = 300)$ quanto $S(\mu = 3300, \sigma = 330)$ é perceptível que para $\theta = 20$ mm, a estrutura simulada apresentou probabilidade de falha superior aos demais modelos.

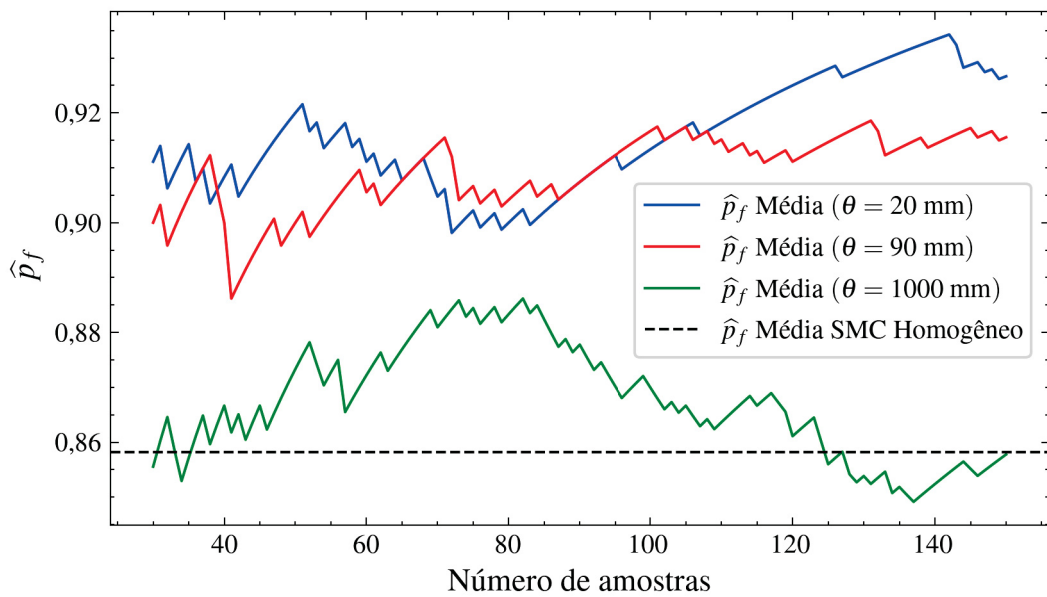
Nota-se ainda que conforme o parâmetro de escala aumenta, a probabilidade de falha se aproxima bastante dos resultados extraídos da análise considerando a homogeneidade da seção transversal, como se nota pela curva da \widehat{p}_f de $\theta = 1000$ mm, indicando a baixa variabilidade espacial expressa pelo campo aleatório, o qual tende a se comportar como variável aleatória.

FIGURA 33 – COMPARAÇÃO ESTIMATIVAS PARA PROBABILIDADE DE FALHA OBTIDAS POR SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO: MODELOS SEM E COM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

(a) Comparativo \hat{p}_f para simulações com $S(\mu = 3000, \sigma = 300)$



(b) Comparativo \hat{p}_f para simulações com $S(\mu = 3300, \sigma = 330)$



A TABELA 14 reúne os resultados obtidos pelas análises abordadas neste capítulo e estabelece uma comparação entre as abordagens distintas de modelagem, comparando as estimativas para probabilidade de falha extraídas com auxílio da meta-modelagem com PG e os valores obtidos da simulação direta com o modelo MEF. São representados também os valores para \hat{p}_f resultantes da SMC do modelo homogêneo. As duas últimas colunas apresentam a diferença percentual entre as estimativas obtidas

pela SMC, seja pela avaliação direta da EQUAÇÃO 4.9 com o modelo MEF denotada como $p_{f,MEF,HET.}$, ou pela krigagem nomeada como $p_{f,KR.}$, e a probabilidade de falha encontrada para o modelo que considera homogeneidade no teor de resina.

Apesar do baixo desempenho do metamodelo por PG abordado na Seção 4.6 em uma das validações propostas, é possível constatar que este apresentou boa capacidade de previsão das amostras selecionadas para realização da SMC, o que pode ser verificado pela proximidade com os resultados de probabilidade de falha determinados com o modelo numérico de EF.

As informações que constam da TABELA 14 reforçam as observações previamente apresentadas, e atestam ainda o baixo coeficiente de variação associado às simulações, o qual manteve-se aproximadamente em 5% para $S(\mu = 3000)$, e inferior a 3,5% em todas as simulações com $S(\mu = 3300)$. Considerando apenas as estimativas obtidas com o modelo MEF, o maior acréscimo na \widehat{p}_f foi de aproximadamente 9,26% para $\theta = 20$ mm e $S(\mu = 3000)$, enquanto que para $S(\mu = 3300)$ o maior acréscimo ocorre também para o parâmetro de escala de 20 mm, sendo de aproximadamente 7,51%.

Na FIGURA 34 é apresentado o valor médio do campo de teor de resina para cada amostra, assim como o valor máximo e mínimo do campo ao longo da seção, para as simulações envolvendo $S(\mu = 3300$ N/m) e $\theta = 20$ mm como comprimento de correlação. Nesse mesmo gráfico, o valor médio do teor de resina modelado como VA, no caso do problema homogêneo, é mostrado como uma linha horizontal tracejada. É possível notar que os valores médios do campo parecem oscilar entorno do valor médio da VA, de fato, calculando-se a média dos valores médios de cada amostra do campo estocástico obtemos $M_m \cong 26,76\%$, o que valida essa observação. Com relação aos valores máximos, pode-se observar que estes variam na faixa de 28% até picos de 45%, enquanto que os valores mínimos variam de 7% a 25%, aproximadamente.

A FIGURA 35, por sua vez, mostra a média de cada amostra do campo E_1 relativo às mesmas simulações do caso apresentado na FIGURA 34. A linha tracejada preta demonstra o valor médio da VA E_1 . Novamente, a mesma tendência de convergência entre as médias dos modelos é visualizada, conforme constatado pela análise do gráfico para o teor de resina, com uma pequena diferença entre os valores da média da VA $E_1 \cong 48,36$ GPa, e da média dos valores médios do campo $E_1 \cong 48,38$ GPa.

Esses resultados evidenciam que, na média, os modelos convergem para valores médios semelhantes, o que inicialmente não explica por que probabilidades de falha superiores foram observadas para a modelagem considerando a variabilidade espacial do teor de resina.

Tal efeito pode ser explicado como uma consequência da interação entre a

heterogeneidade espacial e os autovalores (cargas críticas) resultantes das análises, os quais acabam sendo dominados por realizações espacialmente desfavoráveis, dependentes localmente de regiões menos rígidas, e não pela média. Desse modo, a modelagem utilizando campos estocásticos gaussianos de baixo comprimento de correlação resulta em cargas críticas inferiores às obtidas com modelos determinísticos ou probabilísticos que consideram as propriedades do material como variáveis aleatórias.

Uma possível explanação para o fenômeno em questão se relaciona com a teoria espectral de operadores (autovalores) aleatórios. De acordo com essa teoria, os autovalores não são ergódicos em relação à rigidez média, ou seja, a redução do comprimento de correlação não converge para o modelo determinístico médio, mas sim para valores inferiores (Girko, 1985). Esse resultado foi observado no trabalho de Zhang e Ellingwood (1995), os quais avaliaram estruturas bidimensionais simples de viga, pilar e pórtico, mostrando que acréscimos na variabilidade e nas flutuações aleatórias do campo resultaram na redução da carga crítica de flambagem dos exemplos estudados.

No contexto da análise de placas laminadas com propriedades de material aleatórias usando o método dos elementos finitos estocástico, Hao *et al.* (2023) reportaram em seu estudo conclusões similares. Esses autores concluíram que a flambagem pode ocorrer a níveis significativamente inferiores ao da carga de flambagem média, devido à dispersão do material.

Esses estudos mencionados, bem como os resultados obtidos nessa dissertação, enfatizam a importância da incorporação da modelagem das incertezas associadas à variabilidade espacial nas propriedades dos materiais aos modelos computacionais, para obtenção de cargas críticas e probabilidades de falha mais fidedignas.

TABELA 14 – RESULTADOS SMC COM LHS: MODELOS COM E SEM VARIAÇÃO ESPACIAL DO TEOR DE FIBRA E RESINA

$S(\mu)$	θ (mm)	$p_{f,MEF,HET.}$	$p_{f,KR.,HET.}$	$p_{f,SMC,HOM.}$	$p_{f,MEF,HET.} - p_{f,SMC,HOM.}$ (%)	$p_{f,KR.,HET.} - p_{f,SMC,HOM.}$ (%)
3000	20	7,733E-01	7,315E-01		9,26%	5,08%
3000	20	7,333E-01	6,980E-01	6,808E-01	5,26%	1,72%
3000	20	7,200E-01	6,711E-01		3,92%	-0,96%
3000	90	7,067E-01	6,644E-01		2,59%	-1,63%
3000	90	6,933E-01	6,644E-01	6,808E-01	1,26%	-1,63%
3000	90	7,200E-01	6,779E-01		3,92%	-0,29%
3000	1000	6,733E-01	6,443E-01		-0,74%	-3,65%
3000	1000	6,933E-01	6,779E-01	6,808E-01	1,26%	-0,29%
3000	1000	6,800E-01	6,443E-01		-0,08%	-3,65%
3300	20	9,267E-01	9,060E-01		6,84%	4,78%
3300	20	9,333E-01	8,926E-01	8,582E-01	7,51%	3,44%
3300	20	9,200E-01	9,060E-01		6,18%	4,78%
3300	90	9,067E-01	8,926E-01		4,84%	3,44%
3300	90	9,067E-01	8,926E-01	8,582E-01	4,84%	3,44%
3300	90	9,333E-01	8,926E-01		7,51%	3,44%
3300	1000	8,467E-01	7,987E-01		-1,16%	-5,96%
3300	1000	8,800E-01	8,591E-01	8,582E-01	2,18%	0,08%
3300	1000	8,467E-01	8,121E-01		-1,16%	-4,62%

FONTE: O autor (2025).

FIGURA 34 – VALORES MÉDIOS, MÍNIMOS E MÁXIMOS DE M_m PARA AS SIMULAÇÕES COM $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ E $\theta = 20 \text{ mm}$

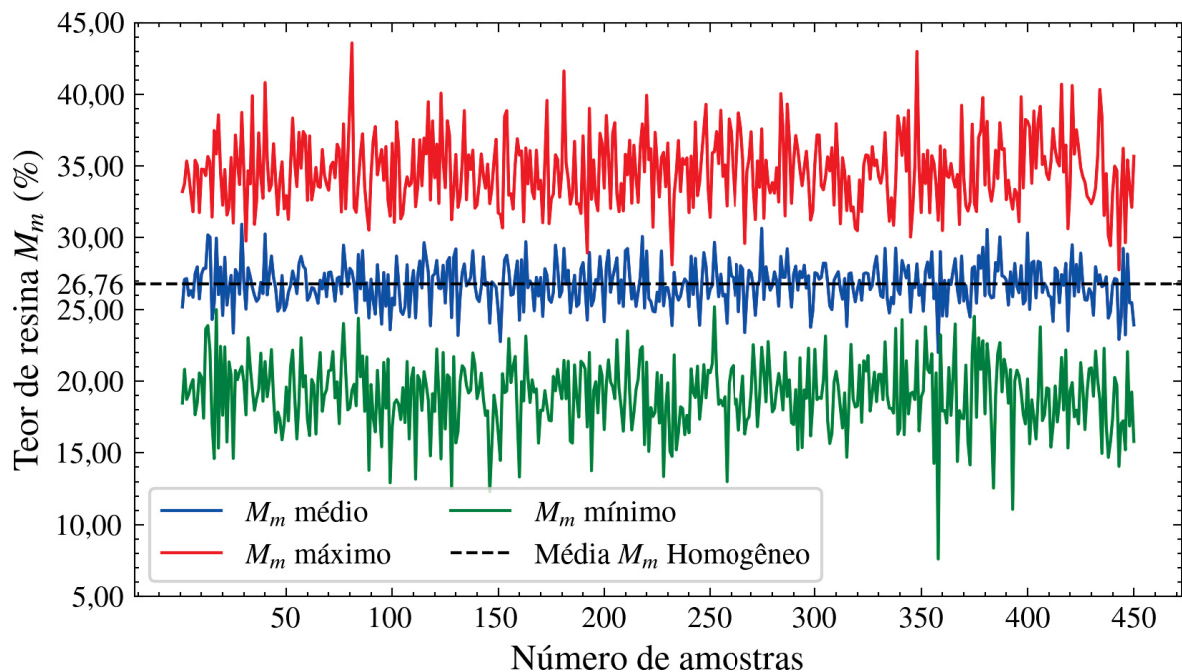
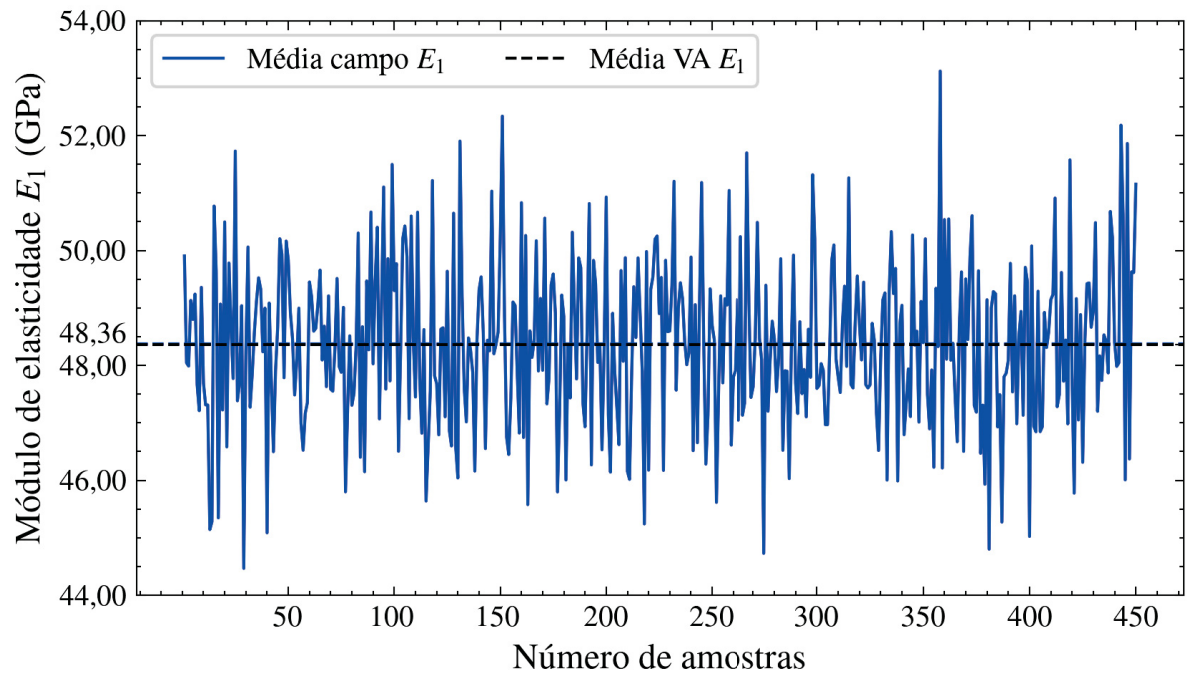


FIGURA 35 – VALORES MÉDIOS DE E_1 PARA AS SIMULAÇÕES COM $S(\mu = 3300 \text{ N/m})$ E $\theta = 20 \text{ mm}$



6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho, efetuaram-se análises de confiabilidade de perfis PPRFV em relação ao fenômeno de flambagem lateral com torção, contemplando a modelagem das incertezas nas propriedades elásticas do material sob duas abordagens que se distinguem pela consideração ou não da variabilidade espacial do teor de fibra e resina na seção transversal. A investigação limitou-se à vigas de seção "I" submetidas à flexão, com dimensões específicas dadas por uma das amostras avaliadas por Feng *et al.* (2022). O vão foi definido de sorte que garanta a predominância do modo de flambagem global lateral com torção, independente das propriedades elásticas associadas à faixa de variação de teor de resina usualmente empregados pelos fornecedores do material. Apenas resinas do tipo epóxi foram consideradas.

A probabilidade de falha do fenômeno de flambagem foi avaliada considerando apenas um carregamento do tipo permanente, simulado como variável aleatória normal. O problema de confiabilidade foi solucionado com os métodos FORM e SMC com amostragem LHS no caso da abordagem supondo distribuição homogênea de propriedades da seção transversal, enquanto o método da SMC com amostragem LHS foi aplicado para a abordagem considerando a variabilidade espacial do teor de fibra e resina.

Devido ao alto custo computacional das análises de flambagem linear por autovalores em EF, somada à disponibilidade de uma estação de trabalho sem capacidades de processamento consideráveis, metamodelos foram propostos para aproximação do modelo numérico MEF de alta fidelidade.

Com relação à modelagem do problema supondo homogeneidade espacial do teor de fibra e resina, foi possível constatar a proximidade nos resultados obtidos por ambos os métodos utilizados, validando a aplicabilidade do FORM nesse contexto. Com a aplicação da SMC com o método de amostragem por hipercubo latino, foi verificada a tendência de convergência das estimativas de probabilidade de falha, apesar do número limitado de simulações empregado.

Quanto à metamodelagem por PG proposta para previsão das cargas críticas de flambagem dos modelos MEF com distribuição homogênea de propriedades, conclui-se que essas apresentaram bom desempenho. A aplicação dessa técnica demandou uma baixa quantidade de dados para treinamento, sendo capaz de produzir aproximações bastante razoáveis dos modelos numéricos.

Avaliando-se o efeito da incorporação da incerteza associada à variabilidade espacial das propriedades do material, foi possível constatar com a aplicação da técnica

da SMC um aumento na probabilidade de falha de até 9,26% em uma das condições avaliadas, em comparação ao modelo com distribuição de propriedades homogênea. Esse resultado demonstra que a incorporação da variabilidade nas propriedades elásticas pode resultar num aumento significativo da probabilidade de falha em vigas sujeitas à flambagem lateral, o que possivelmente pode se traduzir em impactos com relação aos requisitos de segurança e gerenciamento de risco da estrutura.

Investigando a interação entre a variabilidade apresentada pelo campo aleatório, o comprimento de correlação, e o efeito desse parâmetro na probabilidade de falha da estrutura, é possível afirmar que uma redução da variabilidade na distribuição do teor de fibras e resinas do material pode ser mobilizada no contexto do processo de fabricação e manufatura de perfis PPRFV, por meio de um maior controle de qualidade e aprimoramento dos processos fabris. Esses fatores certamente proporcionariam um melhor comportamento mecânico e maior confiabilidade desses perfis estruturais com relação aos fenômenos de instabilidade global, e a outros estados limites.

6.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Embora muitos resultados em concordância com o apresentado em literatura tenham sido constatados, e um comparativo válido tenha sido estabelecido entre as respostas dos modelos analisados e as condições de fabricação e manufatura do material estudado neste trabalho, estudos neste linha de pesquisa são muito escassos e carecem de maiores esforços. As seguintes recomendações podem ser sugeridas para motivar futuros estudos neste campo, a citar:

- Determinação das cargas críticas por meio de análise de flambagem não-linear, considerando os efeitos da não-linearidade geométrica e física, bem como as imperfeições geométricas e as tolerâncias dimensionais da estrutura;
- Estudar outros modos de falha por flambagem, como outros modos de flambagem global, a flambagem local, distorcional, dentre outras;
- Incorporação de combinações de ações ou carregamentos na formulação das equações de estado limite, considerando ações variáveis como a ação do vento, variação térmica, sismos, dentre outros. Avaliar também a definição de funções de estado limite que contemplem critérios relativos ao estado limite de serviço. Essas propostas para a sofisticação do problema de confiabilidade o tornariam mais aderente às práticas e metodologias de projeto preconizadas pelas normas de projeto estrutural;

- Avaliar a aplicação de metodologias para redução do custo computacional de análises de flambagem com o método dos elementos finitos, por meio de abordagens como a modelagem de ordem reduzida;
- Comparar e analisar o desempenho apresentado por outras técnicas de meta-modelagem, além da krigagem, na previsão de cargas críticas de flambagem de modelos da mecânica dos sólidos;
- Realizar extenso programa de ensaios em laboratório para aquisição de dados experimentais das propriedades elásticas e mecânicas do material. Isso forneceria subsídios adequados à escolha dos parâmetros relativos aos modelos probabilísticos, como por exemplo, a seleção mais apropriada das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias e seus respectivos parâmetros. Outro exemplo seria a obtenção de funções de correlação e parâmetros de escala melhor ajustados ao conjunto de dados de interesse, no contexto de campos aleatórios.

REFERÊNCIAS

ABNT NBR 17231. **Projeto de estruturas de perfis pultrudados de PRFV**. Abr. 2025. p. 68. Citado na página 22.

ALGER, M. **Polymer science dictionary**. Springer Science & Business Media, 1996. Citado na página 63.

ANSYS MECHANICAL APDL 2024 R1. **Element Reference**. 2024. Citado na página 65.

ANSYS MECHANICAL APDL 2024 R1. **Theory Reference**. 2024. Citado nas páginas 64, 65.

ANTIN, K.-N. *et al.* A Multiscale Modelling Approach for Estimating the Effect of Defects in Unidirectional Carbon Fiber Reinforced Polymer Composites. **Materials**, v. 12, n. 12, 2019. ISSN 1996-1944. DOI: [10.3390/ma12121885](https://doi.org/10.3390/ma12121885). Disponível em: <https://www.mdpi.com/1996-1944/12/12/1885>. Citado na página 34.

ASCE. **Load and Resistance Factor Design (LRFD) for Pultruded Fiber Reinforced Polymer (FRP) Structures**. American Society of Civil Engineers, 2024. DOI: [10.1061/9780784415771](https://doi.org/10.1061/9780784415771). eprint: <https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/9780784415771>. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/9780784415771>. Citado nas páginas 22, 28, 41, 66, 70, 150, 151.

ASCIONE, F. Influence of initial geometric imperfections in the lateral buckling problem of thin walled pultruded GFRP I-profiles. **Composite Structures**, v. 112, p. 85–99, 2014. ISSN 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.02.002>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822314000592>. Citado na página 34.

ASCIONE, L. *et al.* Lateral Buckling of Pultruded FRP Beams. **Composites Part B: Engineering**, v. 42, n. 4, p. 819–824, 2011. Citado na página 41.

ASCIONE, L. *et al.* Prospect for new guidance in the design of FRP. **Ispra: EC Joint Research Centre**, EC: European Commission, 2016. Citado nas páginas 22, 41.

BAI, Y.; KELLER, T. Shear failure of pultruded fiber-reinforced polymer composites under axial compression. **Journal of Composites for Construction**, v. 13, n. 3, p. 234–242, 2009. DOI: [10.1061/\(ASCE\)CC.1943-5614.0000003](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000003). Disponível em: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-79951514068&doi=10.1061%2f%28ASCE%29CC.1943->

5614.0000003&partnerID=40&md5=3c3d0e8c06546b2f170f8de8d209c3fb. Citado na página 33.

BANK, L. C. **Composites for construction: structural design with FRP materials**. John Wiley & Sons, 2006. Citado nas páginas 22, 30.

BARAN, I. *et al.* A review on the mechanical modeling of composite manufacturing processes. **Archives of computational methods in engineering**, Springer, v. 24, p. 365–395, 2017. Citado na página 34.

BARAN, I. *et al.* Process induced residual stresses and distortions in pultrusion. **Composites Part B: Engineering**, v. 51, p. 148–161, 2013. ISSN 1359-8368. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.03.031>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836813001339>. Citado na página 34.

BATHE, K. **Finite Element Procedures**. Klaus-Jürgen Bathe, 2014. ISBN 9780979004957. Citado na página 38.

BECK, A. T. **Confiabilidade e segurança das estruturas**. Elsevier Brasil, 2019. Citado nas páginas 44, 46, 53, 54, 131, 132, 140, 142.

BECK, A. T. **Um método para análise de confiabilidade para elementos finitos**. 1999. Diss. (Mestrado) – Florianópolis, SC. Citado na página 138.

BERNATAS, R. *et al.* Recycling of fiber reinforced composites with a focus on thermoplastic composites. **Cleaner Engineering and Technology**, v. 5, p. 100272, 2021. ISSN 2666-7908. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.clet.2021.100272>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666790821002329>. Citado na página 61.

BYRD, R. H. *et al.* An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. **SIAM Journal on Optimization**, SIAM, v. 9, n. 4, p. 877–900, 1999. Citado na página 59.

CHARMPIS, D. *et al.* The need for linking micromechanics of materials with stochastic finite elements: A challenge for materials science. **Computational Materials Science**, v. 41, n. 1, p. 27–37, 2007. ISSN 0927-0256. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2007.02.014>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025607000602>. Citado na página 76.

CHAWLA, K. K. **Composite materials: science and engineering**. Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 29.

CLARKE, J. L. **Structural design of polymer composites: Eurocomp design code and background document**. CRC Press, 2003. Citado na página 22.

CNR-DT. **Guide for the Design and Construction of Structures made of FRP Pultruded Elements**. 2007. Citado nas páginas 22, 28, 41, 67, 153.

COMPOSITES, F. **Fiberline design manual**. 2003. Citado na página 29.

CORREIA, J. R. **GFRP pultruded profiles in civil engineering: hybrid solutions, bonded connections and fire behaviour**. 2008. Tese (Doutorado) – Instituto Superior Técnico-Universidade Técnica de Lisboa. Citado na página 30.

CORREIA, J. **Glass fibre reinforced polymer (GFRP) pultruded profiles. Structural behaviour of GFRP-concrete hybrid beams**. 2004. Diss. (Mestrado) – Instituto Superior Técnico-Universidade Técnica de Lisboa. Citado nas páginas 32, 33.

DER KIUREGHIAN, A.; LIU, P.-L. Structural reliability under incomplete probability information. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 112, n. 1, p. 85–104, 1986. Citado na página 48.

DITLEVSEN, O. Principle of normal tail approximation. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, American Society of Civil Engineers, v. 107, n. 6, p. 1191–1208, 1981. Citado nas páginas 140, 141.

DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. O. **Structural reliability methods**. Wiley New York, 1996. v. 178. Citado na página 43.

DUBOURG, V. **Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization**. 2011. Tese (Doutorado) – Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II. Citado na página 59.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **EN 1990: Eurocode - Basis of structural design**. 2002. Brussels, Belgium. Citado na página 76.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **EN 1991-1-1: Eurocode 1 – Actions on structures – Part 1-1: General actions – Densities, self-weight, imposed loads for buildings**. Brussels, Belgium, 2002. Citado na página 76.

FAIRUZ, A. M. *et al.* POLYMER COMPOSITE MANUFACTURING USING A PULTRUSION PROCESS: A REVIEW. **American Journal of Applied Sciences**, Science Publications, v. 11, p. 1798–1810, 2014. DOI: [10.3844/ajassp.2014.1798.1810](https://doi.org/10.3844/ajassp.2014.1798.1810). Citado na página 31.

FANGUEIRO, R. **Fibrous and composite materials for civil engineering applications**. Elsevier, 2011. ISBN 9780081017210. Citado na página 30.

FENG, P. *et al.* Non-uniform fiber-resin distributions of pultruded GFRP profiles. **Composites Part B: Engineering**, v. 231, p. 109543, 2022. ISSN 1359-8368. DOI: [10.1016/j.compositesb.2021.109543](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.109543). Citado nas páginas 26, 32, 33, 35, 60–63, 66, 116.

FERNANDES, L. A. *et al.* Web-cripling of GFRP pultruded profiles. Part 2: Numerical analysis and design. **Composite Structures**, Elsevier, v. 120, p. 578–590, 2015. Citado na página 36.

FERNANDES, L. A. *et al.* Web-cripling of GFRP pultruded profiles. Part 1: Experimental study. **Composite Structures**, Elsevier, v. 120, p. 565–577, 2015. Citado na página 36.

FRANGOPOL, D. M. Reliability-based optimum structural design. *In: PROBABILISTIC structural mechanics handbook: theory and industrial applications*. Springer, 1995. p. 352–387. Citado na página 26.

GB/T 2577. Test method for resin content of glass fiber reinforced plastics. Standardization Administration of China, 2005. Citado na página 60.

GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 117, n. 10, p. 2351–2372, 1991. Citado na página 136.

GIRKO, V. L. Spectral theory of random matrices. **Russian Mathematical Surveys**, IOP Publishing, v. 40, n. 1, p. 77, 1985. Citado na página 113.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix computations**. JHU press, 2013. Citado na página 70.

GRIMES, R. G. *et al.* A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, SIAM, v. 15, n. 1, p. 228–272, 1994. Citado nas páginas 129, 130.

GUADES, E. *et al.* A review on the driving performance of FRP composite piles. **Composite Structures**, Elsevier, v. 94, n. 6, p. 1932–1942, 2012. Citado na página 30.

GUILLEMINOT, J. *et al.* Mesoscale probabilistic models for the elasticity tensor of fiber reinforced composites: experimental identification and numerical aspects. **Mechanics of Materials**, Elsevier, v. 41, n. 12, p. 1309–1322, 2009. Citado na página 36.

GUILLEMINOT, J. *et al.* Theoretical framework and experimental procedure for modelling mesoscopic volume fraction stochastic fluctuations in fiber reinforced composites. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 45, n. 21, p. 5567–5583, 2008. Citado na página 36.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Reliability assessment using stochastic finite element analysis**. John Wiley & Sons, 2000. Citado na página 135.

HAO, P. *et al.* Stochastic isogeometric buckling analysis of composite shell considering multiple uncertainties. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 230, p. 108912, 2023. Citado na página 113.

HARRIS, C. R. *et al.* Array programming with NumPy. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 585, n. 7825, p. 357–362, set. 2020. DOI: [10.1038/s41586-020-2649-2](https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2). Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>. Citado nas páginas 80, 85, 88, 89.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. Exact and invariant second-moment code format. **Journal of the Engineering Mechanics division**, American Society of Civil Engineers, v. 100, n. 1, p. 111–121, 1974. Citado na página 49.

HOHENBICHLER, M.; RACKWITZ, R. Non-normal dependent vectors in structural safety. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, American Society of Civil Engineers, v. 107, n. 6, p. 1227–1238, 1981. Citado na página 48.

HUANG, Z. M. Micromechanical strength formulae of unidirectional composites. **Materials Letters**, v. 40, n. 4, p. 164–169, 1999. ISSN 0167-577X. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-577X\(99\)00069-5](https://doi.org/10.1016/S0167-577X(99)00069-5). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167577X99000695>. Citado na página 64.

ISO 1172: 1996. Textile-glass-reinforced plastics–Prepregs, moulding compounds and laminates–Determination of the textile-glass and mineral-filler content–Calcination methods. Citado na página 60.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. CRC press, 2018. Citado na página 30.

KAW, A. K. **Mechanics of composite materials**. CRC press, 2005. Citado nas páginas 22, 30.

KELLER, T. Fibre reinforced polymer materials in bridge construction. *In*: INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE e STRUCTURAL ENGINEERING, 7. IABSE Symposium Report. 2002. v. 86, p. 119–126. Citado na página 30.

KROETZ, H. M. *et al.* Performance of global metamodeling techniques in solution of structural reliability problems. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 114, p. 394–404, 2017. Citado na página 56.

KROETZ, H. M. **Meta-modelagem em confiabilidade estrutural**. 2015. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. Citado na página 56.

KRYLOV, A. On the numerical solution of equation by which are determined in technical problems the frequencies of small vibrations of material systems. **News Acad. Sci. USSR**, v. 7, p. 491–539, 1931. Citado na página 130.

LATANIOTIS, C. *et al.* **UQLab user manual– Kriging (Gaussian process modeling)**. 2024. Report UQLab-V2.1-105. Citado na página 57.

LEMAIRE, M. **Structural reliability**. John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 47.

LUCINTEL. **Pultrusion Market: Trends, Opportunities and Competitive Analysis [2023-2028]**. 2023. <https://www.lucintel.com/pultrusion-market.aspx>. Acesso em: 11 de outubro de 2023. Citado na página 25.

MADENCI, E. *et al.* Experimental and theoretical investigation on flexure performance of pultruded GFRP composite beams with damage analyses. **Composite Structures**, Elsevier, v. 242, p. 112162, 2020. Citado na página 30.

MARELLI, S. *et al.* **UQLab user manual – Structural reliability (Rare event estimation)**. 2024. Report UQLab-V2.1-107. Citado na página 51.

MCGUIRE, W. *et al.* **Matrix structural analysis**. 2000. Citado na página 39.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. John Wiley & Sons, 2018. Citado nas páginas 44, 47.

MERCER, J. Functions of positive and negative type and their connection with theory of integral equations. **Philosophical Transactions of Royal Society**, p. 4–415, 1909. Citado na página 135.

MINDLIN, R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. American Society of Mechanical Engineers, 1951. Citado na página 65.

MIRACLE, D. B. *et al.* **ASM handbook**. ASM international Materials Park, OH, 2001. v. 21. Citado nas páginas 25, 29, 30, 64.

MOTTRAM, J. Lateral-torsional buckling of thin-walled composite I-beams by the finite difference method. **Composites Engineering**, v. 2, n. 2, p. 91–104, 1992. ISSN 0961-9526. DOI: [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(92\)90048-B](https://doi.org/10.1016/0961-9526(92)90048-B). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/096195269290048B>. Citado na página 36.

MOUSTAPHA, M. *et al.* **UQLab user manual – Random fields**. 2024. Report UQLab-V2.1-119. Citado na página 135.

NATAF, A. Determination des distribution don't les marges sont donnees. **Comptes rendus de l'Académie des Sciences**, v. 225, p. 42–43, 1962. Citado nas páginas 48, 139, 142.

NGUYEN, T. *et al.* Influence of boundary conditions and geometric imperfections on lateral–torsional buckling resistance of a pultruded FRP I-beam by FEA. **Composite Structures**, v. 100, p. 233–242, 2013. ISSN 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.12.023>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822313000056>. Citado na página 34.

NOCEDAL, J. Updating quasi-Newton matrices with limited storage. **Mathematics of computation**, v. 35, n. 151, p. 773–782, 1980. Citado na página 59.

NUNES, F. **Structural behaviour of FRP pultruded beams and columns**. 2016. Tese (Doutorado) – IST—Civil Engineering, University of Lisboa Lisboa, Portugal. Citado na página 36.

OLSSON, A. *et al.* On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. **Structural safety**, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 47–68, 2003. Citado na página 54.

PACHECO, J. *et al.* Structural safety of pultruded FRP profiles for global buckling. Part 2: Reliability-based evaluation of safety formats and partial factor calibration. **Composite Structures**, Elsevier, v. 257, p. 113147, 2021. Citado na página 23.

PEDREGOSA, F. *et al.* Scikit-learn: Machine Learning in Python. **Journal of Machine Learning Research**, v. 12, p. 2825–2830, 2011. Citado na página 81.

PIMENTA, S.; PINHO, S. T. Recycling carbon fibre reinforced polymers for structural applications: Technology review and market outlook. **Waste Management**, v. 31, n. 2, p. 378–392, 2011. Environmental Implications of Alternative Materials in Construction and Treatment of Waste. ISSN 0956-053X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2010.09.019>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0956053X10004976>. Citado na página 61.

QIAO, P.; CHEN, Q. Post-local-buckling of fiber-reinforced plastic composite structural shapes using discrete plate analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 84, p. 68–77, 2014. ISSN 0263-8231. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.05.008>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823114001669>. Citado na página 36.

QIAO, P.; SHAN, L. Explicit local buckling analysis and design of fiber–reinforced plastic composite structural shapes. **Composite Structures**, v. 70, n. 4, p. 468–483, 2005. ISSN 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.09.005>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822304003125>. Citado na página 36.

RACKWITZ, R.; FLESSLER, B. Structural reliability under combined random load sequences. **Computers & structures**, Elsevier, v. 9, n. 5, p. 489–494, 1978. Citado nas páginas 49, 50, 52.

RATNA, D. *et al.* Nanocomposites based on a combination of epoxy resin, hyperbranched epoxy and a layered silicate. **Polymer**, Elsevier, v. 44, n. 24, p. 7449–7457, 2003. Citado na página 29.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. American Society of Mechanical Engineers, 1945. Citado na página 65.

ROCQUIGNY, É. de. La maîtrise des incertitudes dans un contexte industriel. 1re partie: une approche méthodologique globale basée sur des exemples. **Journal de la Société française de statistique**, v. 147, n. 3, p. 33–71, 2006. Citado na página 42.

ROSENBLATT, M. Remarks on a multivariate transformation. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 23, n. 3, p. 470–472, 1952. ISSN 0003-4851. DOI: [10.1214/aoms/1177729394](https://doi.org/10.1214/aoms/1177729394). Citado nas páginas 48, 139.

SÁ, M. F. *et al.* Structural safety of pultruded FRP profiles for global buckling. Part 1: Approach to material uncertainty, resistance models, and model uncertainties. **Composite Structures**, Elsevier, v. 257, p. 113304, 2021. Citado na página 23.

SANTNER, T. J. *et al.* **The design and analysis of computer experiments**. Springer, 2003. v. 1. Citado nas páginas 56, 57, 59.

SCHENK, C. A.; SCHUËLLER, G. I. **Uncertainty assessment of large finite element systems**. Springer Science & Business Media, 2005. v. 24. Citado na página 136.

SOIZE, C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 288, n. 3, p. 623–652, 2005. Citado na página 43.

SØRENSEN, J. **Design of fibre reinforced polymer structures–load combinations and partial factors to be used together with JRC document on ‘Design of FRP’-with Fiberline products**. Fiberline, 2016. Citado na página 22.

SRIRAMULA, S.; CHRYSSANTHOPOULOS, M. K. An experimental characterisation of spatial variability in GFRP composite panels. **Structural Safety**, Elsevier, v. 42, p. 1–11, 2013. Citado nas páginas 58, 83, 84.

SRIRAMULA, S.; CHRYSANTHOPOULOS, M. K. Quantification of uncertainty modelling in stochastic analysis of FRP composites. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, Elsevier, v. 40, n. 11, p. 1673–1684, 2009. Citado na página 57.

STRONGWELL CORPORATION. **Strongwell Corporation**. 2016. <http://www.strongwell.com/>. Acesso em: 11 de outubro de 2023. Citado nas páginas 25, 33.

SUDRET, B. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. **Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France**, p. 229, 2007. Citado nas páginas 43, 131.

TAO, T. **Topics in random matrix theory**. American Mathematical Society, 2023. v. 132. Citado na página 86.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. Courier Corporation, 2012. Citado nas páginas 39–41.

TRAHAIR, N. S. **Flexural-torsional buckling of structures**. CRC press, 2017. Citado na página 41.

TSOMPANAKIS, Y. *et al.* **Structural Design Optimization Considering Uncertainties: Structures & Infrastructures Book, Vol. 1, Series, Series Editor: Dan M. Frangopol**. CRC Press, 2008. Citado nas páginas 26, 43.

TURVEY, G.; ZHANG, Y. A computational and experimental analysis of the buckling, postbuckling and initial failure of pultruded GRP columns. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 84, n. 22-23, p. 1527–1537, 2006. Citado na página 74.

TURVEY, G.; ZHANG, Y. Local buckling of axially compressed, pultruded GRP, WF-section, short columns-comparison of experimental and FE analysis buckling loads. **Applied mechanics and materials**, Trans Tech Publ, v. 1, p. 87–92, 2004. Citado na página 74.

UNICOMPOSITE. **How FRP Pultruded Profiles Cut Maintenance Costs by 40%**. Accessed: 2025-19-04. 2025. Citado na página 25.

VANMARCKE, E. *et al.* Random fields and stochastic finite elements. **Structural safety**, Elsevier, v. 3, n. 3-4, p. 143–166, 1986. Citado na página 134.

VANMARCKE, E. **Random fields: analysis and synthesis**. World Scientific, 2010. Citado na página 135.

VIRTANEN, P. *et al.* SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. **Nature Methods**, v. 17, p. 261–272, 2020. DOI: [10.1038/s41592-019-0686-2](https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2). Citado nas páginas 80, 81.

VLASOV, V. **Thin-Walled Elastic Beams**. National Science Foundation, Washington D.C., 1961. English Translation. Citado na página 41.

VVR INNOVATE MATERIALS PVT LTD. **FRP Pultruded Structural Profiles**. 2020. <https://www.innovatematerials.com/frp-pultruded-structural-profiles/gl76275/>. Acesso em: 11 de outubro de 2023. Citado na página 31.

WILLIAMS, C. K.; RASMUSSEN, C. E. **Gaussian processes for machine learning**. MIT press Cambridge, MA, 2006. v. 2. Citado na página 58.

ZHANG, J.; ELLINGWOOD, B. Effects of uncertain material properties on structural stability. **Journal of structural engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 121, n. 4, p. 705–716, 1995. Citado na página 113.

ZHANG, Y.; DER KIUREGHIAN, A. Two improved algorithms for reliability analysis. *In*: SPRINGER. RELIABILITY and Optimization of Structural Systems: Proceedings of the sixth IFIP WG7. 5 working conference on reliability and optimization of structural systems 1994. 1995. p. 297–304. Citado nas páginas 49, 52.

ZUREICK, A. FRP pultruded structural shapes. **Progress in Structural Engineering and Materials**, Wiley Online Library, v. 1, n. 2, p. 143–149, 1998. Citado na página 22.

APÊNDICE 1 – ALGORITMO DE BLOCK LANCZOS GENERALIZADO

Neste apêndice é apresentado o funcionamento do algoritmo de Block Lanczos Generalizado aplicado a solução do problema de autovalores e autovetores de grandes matrizes esparsas.

1.1 FUNCIONAMENTO DO ALGORITMO

A iteração básica desse algoritmo é dada pelo algoritmo 1, supondo a iteração com bloco de tamanho p e as matrizes $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{K}_G]$ de dimensões $n \times n$ (Grimes *et al.*, 1994).

Algoritmo 1: Algoritmo de Block Lanczos Generalizado

$$[\mathbf{Q}_0] = 0$$

$$[\mathbf{B}_1] = 0$$

Defina $[\mathbf{R}_1]$ e ortonormalize as colunas de $[\mathbf{R}_1]$ para obter $[\mathbf{Q}_1]$ de modo que $[\mathbf{Q}_1^T][\mathbf{K}_G][\mathbf{Q}_1] = [\mathbf{I}_p]$

Lanczos Loop:

for $j = 1, 2, 3, \dots$ **do**

$$[\mathbf{U}_j] = ([\mathbf{K}] - \sigma[\mathbf{K}_G])^{-1}([\mathbf{K}_G][\mathbf{Q}_j]) - [\mathbf{Q}_{j-1}][\mathbf{B}_j^T]$$

$$[\mathbf{A}_j] = [\mathbf{U}_j^T][\mathbf{K}_G][\mathbf{Q}_j]$$

$$[\mathbf{R}_j] = [\mathbf{U}_j] - [\mathbf{Q}_j][\mathbf{A}_j]$$

Determine $[\mathbf{Q}_{j+1}]$ e $([\mathbf{K}_G][\mathbf{Q}_{j+1}])$ de forma que:

$$(a) [\mathbf{Q}_{j+1}][\mathbf{B}_{j+1}] = [\mathbf{R}_j]$$

$$(b) [\mathbf{Q}_{j+1}^T][\mathbf{K}_G][\mathbf{Q}_{j+1}] = [\mathbf{I}_p]$$

end

$$[\mathbf{Q}^T][\mathbf{K}_G]([\mathbf{K}] - \sigma[\mathbf{K}_G])^{-1}[\mathbf{K}_G][\mathbf{Q}] = [\mathbf{T}]$$

onde:

σ é o parâmetro real *shift*, para o problema de autovalores e autovetores deslocado (Grimes *et al.*, 1994);

$\mathbf{Q}_j, \mathbf{U}_j, \mathbf{R}_j$ para $j = 1, 2, 3, \dots$ são matrizes $n \times p$, enquanto \mathbf{A}_j e \mathbf{B}_j são matrizes $p \times p$, sendo \mathbf{A}_j simétrica;

$[\mathbf{Q}]$ é uma matriz $n \times jp$ contendo todos os blocos de vetores de Lanczos, onde:

$$[\mathbf{Q}] = \left[[\mathbf{Q}_1], [\mathbf{Q}_2], [\mathbf{Q}_3], \dots, [\mathbf{Q}_j] \right] \quad (\text{AP1.1})$$

$[\mathbf{T}]$ é a projeção $[\mathbf{K}_G]$ -ortogonal de $([\mathbf{K}] - \sigma[\mathbf{K}_G])^{-1}$ no subespaço de Krylov gerado pelas colunas de $[\mathbf{Q}]$. $[\mathbf{T}]$ é uma matriz banda tridiagonal e tem dimensões $jp \times jp$.

O subespaço de Krylov de ordem j , gerado por uma matriz $[A]$ $n \times n$ e um bloco de vetores $[Q_1]$ de dimensões $n \times p$, é o subespaço linear gerado pelas imagens de $[Q_1]$ sob as potências de $[A]$, ou seja: $\mathbb{K}_r(A, [Q_1]) = \text{span} \{[Q_1], [A][Q_1], [A]^2[Q_1], \dots, [A]^{j-1}[Q_1]\}$ (Krylov, 1931).

Os autovalores de T são aproximações dos autovalores dados pela EQUAÇÃO AP1.2, obtida pela manipulação da ?? para o problema inverso e deslocado (*shifted and invert problem*):

$$(\lambda - \sigma)[K_G] \{\psi\} = ([K] - \sigma[K_G]) \{\psi\}$$

pré-multiplicando ambos os lados por $([K] - \sigma[K_G])^{-1}$, temos:

$$(\lambda - \sigma)([K] - \sigma[K_G])^{-1}[K_G] \{\psi\} = \{\psi\}$$

pré-multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{\lambda - \sigma}[K_G]$, obtém-se:

$$[K_G] \{([K] - \sigma[K_G])^{-1} [K_G] \{\psi\}\} = \mu [K_G] \{\psi\} \quad (\text{AP1.2})$$

com $\mu = \frac{1}{\lambda - \sigma}$. Sendo $(\{s\}, \theta)$ um autopar de $[T]$, isto é, $[T] \{s\} = \theta \{s\}$, então $\{y\} = [Q] \{s\}$, $w = \sigma + \frac{1}{\theta}$ será um autopar aproximado para a EQUAÇÃO 1.1 (Grimes *et al.*, 1994). Pelo fato de $[T]$ ser uma matriz banda tridiagonal, a resolução do problema de autovalores é significativamente mais simples do que no problema original, sendo normalmente empregados métodos numéricos como o algoritmo QR. A ideia básica do método é realizar a decomposição QR da matriz $[T]$, reescrevendo-a como um produto de uma matriz ortogonal $[Q_k]$ e uma matriz triangular superior $[R_k]$, multiplicar por estes fatores em ordem reversa e iterar:

$$[T_{k+1}] = [R_k][Q_k] = [Q_k]^T [Q_k] [R_k] [Q_k] = [Q_k]^T [T_k] [Q_k] \quad (\text{AP1.3})$$

APÊNDICE 2 – TEORIA DE PROBABILIDADES

Neste apêndice são apresentados os fundamentos básicos teóricos de probabilidades, relevantes ao entendimento da teoria da confiabilidade estrutural, e do desenvolvimento da dissertação. Boa parte deste material está embasado no livro de Beck (2019) e no trabalho de Sudret (2007). Inicialmente é feita uma introdução à definição de probabilidade sob diferentes óticas, e posteriormente se apresentam os conceitos relacionados com variáveis aleatórias.

2.1 DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

Considere um experimento \mathbb{E} com resultados definidos de maneira unívoca, ou seja, sem ambiguidade. O experimento \mathbb{E} é definido como um fenômeno aleatório que tem um conjunto Ω contendo todos os elementos ou resultados possíveis, esse conjunto é denominado espaço amostral. Um evento consiste em um subconjunto de Ω , como por exemplo: $B = \{w_i\}, i = 1, \dots, n_e$, com $B \in \Omega$; onde n_e é o número de elementos que constituem o evento B . Uma realização de um experimento $w \in \Omega$ consiste na observação do seu resultado. Denotando este resultado por w^* , então, a realização corresponde à uma ocorrência do evento B se $w^* \in B$.

Na sequência serão introduzidas diferentes definições associadas a probabilidade de ocorrência de eventos.

2.1.1 Definição axiomática

A teoria matemática de probabilidades introduz o conceito de medida de probabilidade, a qual permite associar números a eventos, ou seja, a probabilidade de ocorrência relativa a estes eventos. Sendo assim, segundo a chamada definição axiomática de probabilidade, a probabilidade de um evento B é um número associado a este evento, que obedece três postulados:

- 1) $P[B] \geq 0$, ou seja, a probabilidade é um número maior ou igual a zero;
- 2) $P[\Omega] = 1$, isto é, a probabilidade de um evento certo é igual a um;
- 3) $P[B \cup C] = P[B] + P[C]$ se B e C são eventos mutuamente exclusivos.

2.1.2 Definição frequentista

A definição axiomática é puramente matemática, de difícil associação de forma clara na prática. Uma definição de probabilidade importante por associar probabilidades com o mundo observável é a definição frequentista. Segundo esta definição, a

probabilidade de um evento é obtida tomando o limite da frequência de ocorrência empírica.

Supondo que um experimento seja repetido n vezes, sendo n_B o número de ocorrências favoráveis ao evento B , então a frequência empírica de ocorrência de B é definida como:

$$Freq [B] = \frac{n_B}{n} \quad (\text{AP2.1})$$

A probabilidade de ocorrência de B segundo a definição frequentista é obtida quando se toma o limite da frequência empírica de ocorrência com o número de realizações do experimento tendendo ao infinito:

$$P [B] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_B}{n} \quad (\text{AP2.2})$$

A probabilidade nesta definição é calculada *à posteriori*, com base num grande número de observações do experimento. Esta definição na prática é limitada, pois nunca se obterá um número infinito de observações para um experimento. A EQUAÇÃO AP2.2 constitui a base para os métodos de simulação como o método de Monte Carlo, abordado na Seção 2.9.

2.1.3 Definição Bayesiana ou probabilidade como grau de confiança

A definição Bayesiana de probabilidade trata-se de uma definição subjetiva. Segundo esta conceituação a probabilidade $P [B]$ está associada ao grau de confiança do sujeito em relação à ocorrência do evento B . Ao contrário da definição frequentista que se relaciona a média de múltiplas observações de um evento, a definição Bayesiana se aplica a uma ocorrência única do evento. Um exemplo disso é a probabilidade de falha estrutural, a qual é estimada com base em modelos físicos e matemáticos, na interpretação frequentista dos parâmetros observáveis e na definição axiomática de probabilidades, sendo impossível a sua validação experimental, e, portanto, deve ser entendida como uma medida subjetiva do grau de confiança no qual a estrutura é capaz de desempenhar as funções para as quais foi projetada (Beck, 2019).

2.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Seja um determinado experimento com espaço amostral Ω formado por um conjunto de pontos amostrais w , define-se uma variável aleatória real $X(w)$ como uma função real que atribui a cada ponto amostral w do espaço Ω um valor real x , de tal modo que o conjunto $\{X \leq x\}$ é um evento para todo número real x .

Ao longo desta dissertação representa-se uma variável aleatória (VA) por uma letra maiúscula em itálico, um vetor de variáveis aleatórias por letra maiúscula em

negrito, e para realizações das variáveis aleatórias utiliza-se letras minúsculas em itálico.

Quando o domínio de uma VA, ou seja, o seu espaço amostral for formado por um número finito ou infinito contável de pontos, então esta VA é do tipo discreta. Em contrapartida, quando o domínio de uma VA é constituído por um número infinito de pontos, então trata-se de uma VA do tipo contínua.

Uma VA é descrita por sua função distribuição de probabilidades, por sua função de distribuição acumulada, e por seus momentos estatísticos, conforme se verá adiante. O enfoque se dará em variáveis aleatórias do tipo contínua.

2.2.1 Função de distribuição acumulada de probabilidades e função densidade de probabilidades

A probabilidade de ocorrência do evento $\{X \leq x\}$ é um número que depende de x , dado pela função de distribuição acumulada de probabilidades $F_X(x)$:

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] \quad \text{para } -\infty \leq x \leq +\infty \quad (\text{AP2.3})$$

A derivada com respeito a x da função de distribuição acumulada (FDA) é a chamada função densidade de probabilidades (FDP) $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (\text{AP2.4})$$

Tomando um Δx pequeno, resulta que $f_X(x) \Delta x \approx P[\{x \leq X \leq x + \Delta x\}]$, e com $\Delta x \rightarrow 0$, recupera-se EQUAÇÃO AP2.4. Sendo assim, a FDP fornece a distribuição das probabilidades de todos os valores que a VA pode assumir:

$$\int_x^{x+dx} f_X(t) dt = P[\{x \leq X \leq x + dx\}] \quad (\text{AP2.5})$$

Por consequência, para variáveis aleatórias contínuas a FDA é:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (\text{AP2.6})$$

2.2.2 Valor esperado e momentos de uma variável aleatória

Define-se o valor esperado de uma VA como a integral:

$$E[X] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \mu \quad (\text{AP2.7})$$

onde:

$E[\]$ é o operador valor esperado;

μ é a média da VA.

A variância $\text{Var}[X]$ é outra quantidade de importância na descrição de VA, sendo uma medida de sua dispersão em torno da média:

$$\text{Var}[X] \equiv E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx = \sigma^2 \quad (\text{AP2.8})$$

onde:

σ é o desvio-padrão, dado pela raiz quadrada da variância: $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$.

2.3 CAMPOS ALEATÓRIOS

Em diversas aplicações da análise estatística no campo da engenharia, é comum a modelagem envolvendo parâmetros de entrada que variem aleatoriamente no tempo e/ou espaço. A teoria de campos aleatórios é o tratamento matemático rigoroso que fornece maneiras de modelar tal tipo de incerteza.

Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ o domínio que descreve a geometria do sistema, um campo aleatório $H(x, \omega) : \mathcal{D} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro contínuo $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ representando uma coordenada no espaço topológico \mathcal{D} , com $\omega \in \Omega$ sendo uma realização do espaço amostral Ω (Vanmarcke *et al.*, 1986).

Duas categorias de campos aleatórios podem ser definidas com base em sua distribuição de probabilidade: Gaussiano e não-Gaussiano. Este trabalho se limitará a teoria envolvendo campos aleatórios Gaussianos estacionários estatisticamente homogêneos.

Um campo aleatório é dito Gaussiano se a FDPC $H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ for Gaussiana, para todo $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$. Um campo Gaussiano é totalmente caracterizado pela sua função média $E[H(x)] : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e função de autocovariância $C(x_1, x_2) : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, expressas respectivamente por:

$$\mu(\mathbf{x}) \equiv E[H(\mathbf{x}, \omega)] = \int_{\Theta} H(\mathbf{x}, \omega) dP(\theta) \quad (\text{AP2.9})$$

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Cov}[H(\mathbf{x}_1, \theta), H(\mathbf{x}_2, \theta)] \quad (\text{AP2.10})$$

A função de autocorrelação $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow [-1, 1]$ é definida como:

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\sigma(\mathbf{x}_1)\sigma(\mathbf{x}_2)} \quad (\text{AP2.11})$$

onde:

$\sigma(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função desvio-padrão do campo aleatório.

Um campo aleatório gaussiano é considerado estacionário estatisticamente homogêneo se sua média, a covariância e as propriedades de correlação associadas, bem como qualquer momento estatístico de primeira ordem ou de ordem superior,

são independentes da coordenada espacial e do tempo (Haldar; Mahadevan, 2000; Vanmarcke, 2010).

Sendo assim, campos aleatórios podem ser entendidos como uma generalização de processos estocásticos onde as variáveis aleatórias estão indexadas por pontos em um espaço multidimensional. Por consequência, todo o arcabouço teórico apresentado no Seção 2.10 para processos gaussianos no contexto de metamodelos, segue válido e aplicável também ao caso de campos aleatórios gaussianos.

Para tornar os campos aleatórios convenientes para aplicações computacionais se faz necessária a discretização do campo aleatório $H(\mathbf{x}, \omega)$, processo no qual o campo é aproximado por um conjunto finito de variáveis aleatórias. Diversas técnicas foram desenvolvidas para discretização de campos aleatórios na literatura, sendo os métodos de expansão em série o enfoque deste trabalho, por representarem uma abordagem bastante usual, popular e consagrada (Moustapha *et al.*, 2024).

Métodos de expansão em série envolvem a representação do campo aleatório como uma série de funções determinísticas ponderadas por variáveis aleatórias, como a expansão de Karhunen-Loève, uma das técnicas de discretização de campos aleatórios mais populares.

A expansão de Karhunen-Loève consiste na expansão espectral¹ da função de covariância, usando bases de funções determinísticas ortogonais e coeficientes aleatórios não correlacionados. Seja $H(\mathbf{x}, \omega)$ um campo aleatório, com segundos momentos finitos, média $\mu(\mathbf{x})$ e uma função de covariância definida limitada, simétrica e positiva $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Então, a expansão de Karhunen-Loève de $H(\mathbf{x}, \omega)$ é escrita como:

$$H(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (\text{AP2.12})$$

onde:

λ_i e $\varphi_i(\mathbf{x})$ são os autovalores e os autovetores, respectivamente da função de covariância, e $\{\xi_i(\theta); i = 1, \dots\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias descorrelacionadas, de média zero e desvio padrão unitário. De acordo com o teorema de Mercer (1909), $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ pode ser decomposto como:

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}_1) \varphi_i(\mathbf{x}_2) \quad (\text{AP2.13})$$

onde os autovalores λ_i e as autofunções $\varphi_i(x)$ são obtidas pela resolução da equação integral de Fredholm, dada por:

$$\int_{\mathcal{D}} C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \varphi_i(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}_1) \quad (\text{AP2.14})$$

¹ Técnica matemática utilizada para representar funções, operadores ou nesse caso campos aleatórios em termos de autovalores e autofunções de um operador associado.

O conjunto de autofunções $\varphi_i(\mathbf{x})$ são ortogonais e formam uma base completa para o campo aleatório. Devido a ortonormalidade das autofunções, a VA mostrada na série da EQUAÇÃO AP2.12 pode ser expressa como a seguinte transformação linear:

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\mathcal{D}} [H(\mathbf{x}, \omega) - \mu(\mathbf{x})] \varphi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{AP2.15})$$

Para campos aleatórios Gaussianos, as VAs $\{\xi_i(\theta), i = 1, \dots\}$ são variáveis aleatórias Gaussianas padrão independentes.

Com a finalidade de tornar viável a implementação computacional, a série da EQUAÇÃO AP2.12 é truncada após um número finito de termos, correspondendo aos M_T maiores autovalores:

$$H(\mathbf{x}, \omega) \approx \tilde{H}(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{M_T} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (\text{AP2.16})$$

Segundo Ghanem e Spanos (1991), dentre todas as possíveis bases, e para um número finito M de termos da série, as funções $\{\varphi_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, M\}$ satisfazendo a EQUAÇÃO AP2.14 minimizam o erro quadrático médio resultante da representação finita do campo, dado pela integral:

$$\int_{\theta \times \mathcal{D}} \left(H(\mathbf{x}, \omega) - \mu(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{M_T} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \right)^2 dP(\theta) d\mathbf{x} \quad (\text{AP2.17})$$

Na escolha do número de termos M_T , usualmente se considera como critério o parâmetro chamado razão de "energia" (também conhecido como variância explicada), a qual deverá ser superior a um dado limite δ_e para que a aproximação possa ser considerada suficiente:

$$\sum_{i=1}^{M_T} \lambda_i / \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \geq \delta_e \quad (\text{AP2.18})$$

A variância do erro de truncamento da expansão após M_T termos pode ser demonstrada como sendo:

$$\text{Var} [H(\mathbf{x}) - \tilde{H}(\mathbf{x})] = \sigma^2(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{M_T} \lambda_i^2 \varphi_i^2(\mathbf{x}) \quad (\text{AP2.19})$$

Uma alternativa à resolução da EQUAÇÃO AP2.14 para obtenção dos autovalores e autofunções, seria a abordagem da expansão de Karhunen-Loève discreta conforme abordado por Schenk e Schuëller (2005), na qual a matriz de correlação é calculada de forma direta na malha de discretização, então a decomposição espectral desta matriz resultante forneceria pares de autovalores e autovetores para uso na aproximação da expansão de Karhunen-Loève dada pela EQUAÇÃO AP2.16.

APÊNDICE 3 – DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE E TRANSFORMAÇÕES ISOPROBABILÍSTICAS

3.1 FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Esta seção apresenta as distribuições de probabilidade relevantes para o desenvolvimento deste trabalho no contexto das variáveis aleatórias contínuas.

3.1.1 Distribuição uniforme

A distribuição uniforme descreve eventos que são equiprováveis entre dois limites a e b . Uma variável aleatória uniforme $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ é definida pela seguinte FDP (supondo $b > a$):

$$f_X(x) = 1/(b - a) \quad \text{para } x \in [a, b], \quad 0 \text{ caso contrário} \quad (\text{AP3.1})$$

Sua FDA é:

$$F_X(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{para } x \in [a, b], \quad 0 \text{ caso contrário} \quad (\text{AP3.2})$$

Sua média e desvio-padrão (momentos estatísticos) são:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{a + b}{2} \\ \sigma &= \frac{b - a}{2\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (\text{AP3.3})$$

3.1.2 Distribuição normal ou Gaussiana

Uma variável aleatória normal ou Gaussiana $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ é definida por dois únicos parâmetros, média μ e desvio-padrão σ ($\sigma > 0$), que são seus próprios momentos. Seu suporte é $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$ e sua FDP é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{AP3.4})$$

onde:

$\varphi(x)$ é a chamada função densidade de probabilidade normal padrão associada a $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, definida como:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (\text{AP3.5})$$

Consequentemente, FDA de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ é:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{AP3.6})$$

onde:

$\Phi(x)$ representa a função densidade de probabilidade normal padrão, definida como:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad (\text{AP3.7})$$

3.2 TRANSFORMAÇÕES ISOPROBABILÍSTICAS

Conforme abordado na Seção 2.8, o primeiro passo da aplicação do FORM exige um mapeamento da FDPC $f_X(\mathbf{x})$ arbitrária em uma distribuição $\phi_n(\mathbf{u})$ multi-normal padrão. Isso se faz necessário, pois em grande parte dos problemas reais, a ocorrência de distribuições marginais limitadas ou assimétricas, bem como a presença de correlação entre as variáveis aleatórias, perturba a simetria necessária à determinação do ponto de projeto.

Esta transformação se faz possível considerando que a informação disponível a respeito do problema permita a caracterização das distribuições marginais e dos momentos estatísticos das VA, bem como dos coeficientes de correlação de cada par de VA. Com isso, a transformação para o espaço padrão inclui um modelo para FDP conjunta do problema, $f_X(\mathbf{x})$.

Cinco transformações serão apresentadas na sequência, na seguinte ordem:

1. transformação de Rosenblatt;
2. princípio da aproximação normal;
3. modelo de Nataf;
4. descorrelacionamento de VA por autovetores;
5. descorrelacionamento de VA por decomposição de Cholesky.

A transformação de Rosenblatt é uma transformação aplicada aos casos mais gerais, incluindo distribuições marginais não normais e VA correlacionadas, no entanto, é pouco usada na prática por fazer uso de distribuições conjuntas desconhecidas (Beck, 1999). Todas as demais transformações apresentadas são formas de aproximar a transformação de Rosenblatt, empregando as informações disponíveis. O princípio da aproximação normal possibilita a transformação das distribuições marginais originais das VA em distribuições marginais normais equivalentes. O descorrelacionamento de VA é um processo realizado por duas abordagens equivalentes: por autovetores ou decomposição de Cholesky. No entanto, o princípio da aproximação normal se aplica apenas a VA descorrelacionadas, e as transformações de descorrelacionamento são aplicáveis somente a distribuições normais. O modelo de Nataf combina estas três

transformações, permitindo um mapeamento do conjunto de VA correlacionadas com distribuição arbitrária em um conjunto multi-normal independente.

3.3 TRANSFORMAÇÃO DE ROSENBLATT

A transformação de Rosenblatt é uma transformação genérica que mapeia um conjunto de VA correlacionadas com distribuição marginal arbitrária em um conjunto de VA normais padrão independentes (Rosenblatt, 1952).

Seja um vetor de n variáveis aleatórias $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^t$ com FPA conjunta qualquer $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. Um conjunto de VA normais padrão independentes $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}^t$ com função de distribuição cumulativa normal padrão multivariada $\Phi(\mathbf{u})$ pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi^{-1} [F_1(x_1)] \\ u_2 &= \Phi^{-1} [F_2(x_2|x_1)] \\ &\vdots \\ u_n &= \Phi^{-1} [F_n(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})] \end{aligned} \tag{AP3.8}$$

onde:

$F_2(z_2|z_1)$ é a probabilidade condicional de z_2 dada a ocorrência de z_1 . As expressões da EQUAÇÃO AP3.8 foram obtidas invertendo-se a relação de igualdade entre as FPA dos dois conjuntos de VA. Em tese, as funções de probabilidade condicional podem ser obtidas a partir da distribuição conjunta:

$$f(x_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})} \tag{AP3.9}$$

$$F(x_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, u) du}{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})} \tag{AP3.10}$$

Na prática, as funções de probabilidade condicionais podem ser determinadas, a partir da EQUAÇÃO AP3.9 e EQUAÇÃO AP3.10 por integração numérica. No entanto, considerando que o problema pode possuir uma multi-dimensionalidade considerável (número n no vetor de VA grande), tal solução não é trivial, e pouco eficiente computacionalmente.

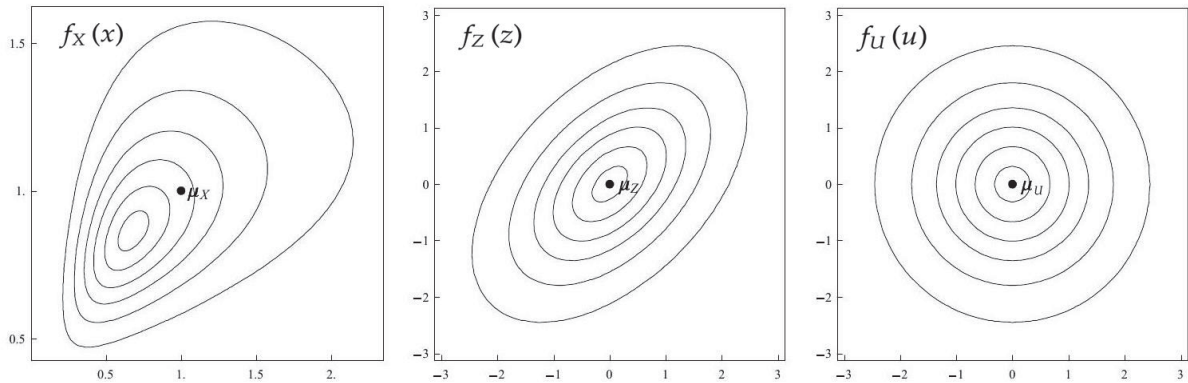
3.4 TRANSFORMAÇÃO COMPOSTA USANDO O MODELO DE NATAF

Uma transformação usual na prática, por se adequar melhor à informação disponível é uma transformação composta utilizando o modelo de Nataf (Nataf, 1962). Esta transformação é dita composta pois envolve, conforme a FIGURA 36:

1. uma transformação das distribuições marginais originais em distribuições normais equivalentes (em um conjunto de variáveis aleatórias \mathbf{U} correlacionadas);

2. determinação de coeficientes de correlação equivalentes para as distribuições marginais normais (modelo de Nataf);
3. eliminação da correlação através de decomposição ortogonal (descorrelacionamento por autovetores) ou da fatoração de Cholesky da matriz de correlação.

FIGURA 36 – ILUSTRAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO COMPOSTA $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}$



FONTE: Adaptado de Beck (2019).

3.4.1 Princípio da aproximação normal

O princípio da aproximação normal (Ditlevsen, 1981) consiste em determinar, dado um ponto x_i^* , uma distribuição normal equivalente que preserve o conteúdo de probabilidades da distribuição original $F_{X_i}(x_i^*)$ no mesmo ponto. Como a distribuição normal equivalente está definida no espaço \mathbb{X} , pode-se escrever:

$$F_{X_i}^{\text{neq}}(x_i^*) = F_{X_i}(x_i^*) \quad (\text{AP3.11})$$

A distribuição normal equivalente possui dois parâmetros: a média $\mu_{X_i}^{\text{neq}}$ e o desvio padrão $\sigma_{X_i}^{\text{neq}}$. Portanto, para determinação destes parâmetros da distribuição normal equivalente é necessária uma segunda equação. O critério para estabelecer esta outra equação é arbitrário, uma condição natural de se inferir é a seguinte:

$$f_{X_i}^{\text{neq}}(x_i^*) = f_{X_i}(x_i^*) \quad (\text{AP3.12})$$

Utilizando a transformação de Hasofer e Lind, obtém-se um conjunto de variáveis $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ cujas distribuições marginais são normais padrão, porém possivelmente ainda correlacionadas:

$$Z_i^* = \frac{x_i^* - \mu_{X_i}^{\text{neq}}}{\sigma_{X_i}^{\text{neq}}} \quad (\text{AP3.13})$$

Escrevendo a EQUAÇÃO AP3.11 em termos de z_i^* obtém-se:

$$F_{X_i}(x_i^*) = \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^{neq}}{\sigma_{X_i}^{neq}}\right) \quad (\text{AP3.14})$$

$$= \Phi(z_i^*) \quad (\text{AP3.15})$$

E fazendo o mesmo para a EQUAÇÃO AP3.12 resulta:

$$f_{X_i}(x_i^*) = \frac{1}{\sigma_{X_i}^{neq} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^{neq}}{\sigma_{X_i}^{neq}}\right)^2\right] \quad (\text{AP3.16})$$

$$= \frac{\phi(z_i^*)}{\sigma_{X_i}^{neq}} \quad (\text{AP3.17})$$

Com a EQUAÇÃO AP3.14 pode-se calcular z_i^* :

$$z_i^* = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i^*)) \quad (\text{AP3.18})$$

A EQUAÇÃO AP3.16 fornece uma expressão para o desvio padrão da distribuição normal equivalente, enquanto que a média pode ser determinada com a EQUAÇÃO AP3.13.

Esta transformação é realizada para cada uma das distribuições marginais, sendo válida para um ponto \mathbf{x}^* . Este procedimento de aproximação da cauda da distribuição original pela cauda de uma distribuição normal equivalente é conhecido na literatura como princípio da aproximação normal - *Principle of normal tail approximation* (Ditlevsen, 1981).

Escrevendo a transformação de $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ em notação matricial, sendo \mathbf{M}^{neq} um vetor de médias, e \mathbf{D}^{neq} uma matriz diagonal de desvios-padrão, contendo os parâmetros das distribuições normais equivalentes:

$$\mathbf{M}^{neq} = \{\mu_{X_1}^{neq}, \mu_{X_2}^{neq}, \dots, \mu_{X_n}^{neq}\}^T \quad (\text{AP3.19})$$

$$\mathbf{D}^{neq} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^{neq} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2}^{neq} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{X_n}^{neq} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{D}^{neq})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{X_1}^{neq}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{X_2}^{neq}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{X_n}^{neq}} \end{bmatrix} \quad (\text{AP3.20})$$

Introduzindo a notação em matrizes Jacobianas:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{z}\mathbf{x}} = (\mathbf{D}^{neq})^{-1} \quad (\text{AP3.21})$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{z}} = \mathbf{D}^{neq}$$

Então, as transformações de $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ resultam:

$$\mathbf{z} = \mathbf{J}_{\mathbf{z}\mathbf{x}} \cdot \{\mathbf{x} - \mathbf{M}^{neq}\} \quad (\text{AP3.22})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{M}^{neq} \quad (\text{AP3.23})$$

3.4.2 Modelo de Nataf

O modelo de Nataf (Nataf, 1962) consiste em construir uma aproximação para a função conjunta de densidade de probabilidades $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ com base na distribuição normal padrão multi-variada com matriz de correlação $\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}$:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}) \frac{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)}{\phi(z_1) \phi(z_2) \dots \phi(z_n)} \quad (\text{AP3.24})$$

Onde a matriz de correlação $\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}$ é dada por:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{Z_{12}} & \dots & \rho_{Z_{1n}} \\ \rho_{Z_{21}} & 1 & \dots & \rho_{Z_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{Z_{n1}} & \rho_{Z_{n2}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AP3.25})$$

Considerando duas variáveis aleatórias não normais X_i e X_j , com coeficiente de correlação $\rho_{X_{ij}}$, então, utilizando a definição da covariância obtém-se:

$$\rho_{X_{ij}} = \frac{\text{Cov}[X_i X_j]}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_i - \mu_{X_i})(x_j - \mu_{X_j})}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} f_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (\text{AP3.26})$$

Utilizando o modelo de Nataf, expresso pela EQUAÇÃO AP3.24, a expressão acima se reduz a:

$$\rho_{X_{ij}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_i - \mu_{X_i})(x_j - \mu_{X_j})}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \phi_2(z_i, z_j, \rho_{Z_{ij}}) \frac{f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j)}{\phi(z_i) \phi(z_j)} dx_i dx_j \quad (\text{AP3.27})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j \phi_2(z_i, z_j, \rho_{Z_{ij}}) dz_i dz_j \quad (\text{AP3.28})$$

A expressão acima permite o cálculo do coeficiente de correlação $\rho_{Z_{ij}}$ em função do coeficiente $\rho_{X_{ij}}$ conhecido, possibilitando a obtenção da matriz de correlação equivalente.

Em geral, a avaliação do coeficiente $\rho_{\mathbf{Z}}$ pela EQUAÇÃO AP3.27 é feita de forma iterativa, arbitrando-se valores $\rho_{\mathbf{Z}}$ e avaliando $\rho_{\mathbf{X}}$, até que o valor de $\rho_{\mathbf{X}}$ especificado seja atingido (Beck, 2019).

3.4.3 Decomposição ortogonal da matriz de correlação

O princípio da aproximação normal e o modelo de Nataf previamente abordados permitem a obtenção de um conjunto de variáveis aleatórias \mathbf{Z} correlacionadas, com distribuição normal padrão multi-variada, conforme visto. Entretanto, para aplicação do FORM e aproveitamento das propriedades de simetria da distribuição normal padrão multi-variada, se faz necessário eliminar a correlação entre as variáveis \mathbf{Z} . Uma primeira alternativa para realizar este processo é a decomposição ortogonal.

O objetivo deste processo é determinar a matriz \mathbf{A} , que satisfaça a transformação linear $\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Z}$, sendo \mathbf{U} um conjunto de VA independentes e com distribuição normal padrão multi-variada. A matriz de covariância em \mathbf{U} é dada por:

$$\mathbf{C}_U = \text{Cov} [\mathbf{U}, \mathbf{U}^T] \quad (\text{AP3.29})$$

$$= \text{Cov} [\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{A}] \quad (\text{AP3.30})$$

$$= \mathbf{A}^T \cdot \text{Cov} [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T] \cdot \mathbf{A} \quad (\text{AP3.31})$$

$$= \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}_Z \cdot \mathbf{A} \quad (\text{AP3.32})$$

Sendo \mathbf{A} a matriz ortogonal cujas colunas são autovetores de \mathbf{C}_Z , então é possível inferir que o lado direito da EQUAÇÃO AP3.32 resulta na matriz dos autovalores de \mathbf{C}_Z :

$$\mathbf{C}_U = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}_Z \cdot \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} = [\lambda_i]_{i=1, \dots, n} \quad (\text{AP3.33})$$

onde:

λ_i é o i -ésimo autovalor da matriz \mathbf{C}_Z . A fim de evitar uma transformação adicional para obter desvios-padrão unitários, uma vez que a aplicação direta da EQUAÇÃO AP3.33 implicaria em $\sigma_{U_i} = \sqrt{\lambda_i} \neq 1$, busca-se então, alternativamente \mathbf{A} tal que $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}_Z \cdot \mathbf{A}$ resulte na matriz identidade. Isto é obtido pela seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \quad (\text{AP3.34})$$

onde:

$\overline{\mathbf{A}}$ é matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores de \mathbf{C}_Z ;

$\mathbf{\Lambda}^{-1/2}$ é a matriz diagonal das inversas das raízes quadradas dos auto-valores de \mathbf{C}_Z .

As matrizes Jacobianas da transformação linear, $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z}$, são então:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{uz}} = \mathbf{A}^T = (\overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1/2})^T \quad (\text{AP3.35})$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{zu}} = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{\Lambda}^{1/2} \cdot \overline{\mathbf{A}})^T \quad (\text{AP3.36})$$

Finalmente, as transformações de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}$ e sua inversa são, respectivamente:

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}_{uz} \cdot \mathbf{Z} \quad (\text{AP3.37})$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{J}_{zu} \cdot \mathbf{U} \quad (\text{AP3.38})$$

3.4.4 Decomposição de Cholesky da matriz de correlação

Devido ao fato de que o custo computacional da decomposição ortogonal é considerável, uma alternativa aplicável é a decomposição de Cholesky da matriz de correlação \mathbf{C}_z .

O objetivo da fatoração de Cholesky aplicada à eliminação da correlação entre as VA de \mathbf{Z} é a determinação da matriz \mathbf{B} , que produza um conjunto de variáveis \mathbf{U} independentes e com variância unitária, satisfazendo a transformação linear: $\mathbf{U} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Z}$. Esta matriz de transformação deve produzir também o mesmo efeito apresentado na EQUAÇÃO AP3.33. Reescrevendo esta expressão em termos de \mathbf{B} :

$$\mathbf{C}_U = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}_Z \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (\text{AP3.39})$$

Pré-multiplicando a EQUAÇÃO AP3.39 por $(\mathbf{B}^T)^{-1}$ e posteriormente, pós-multiplicando por \mathbf{B}^{-1} , obtém-se:

$$\mathbf{C}_z \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{I} \quad (\text{AP3.40})$$

$$\mathbf{C}_z = (\mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{AP3.41})$$

$$= (\mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{AP3.42})$$

Sabendo da relação $(\mathbf{B}^T)^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})^T$ e denotando $(\mathbf{B}^T)^{-1} = \mathbf{L}$, resulta:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{B}^T)^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})^T \quad (\text{AP3.43})$$

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{B}^{-1}$$

Substituindo a expressão acima na EQUAÇÃO AP3.42 obtemos a fatoração de Cholesky de \mathbf{C}_z em matriz triangular inferior e superior:

$$\mathbf{C}_z = (\mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{AP3.44})$$

$$= \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \quad (\text{AP3.45})$$

Dessa forma, as matrizes jacobianas podem ser escritas como:

$$\mathbf{J}_{uz} = \mathbf{L}^{-1} \quad (\text{AP3.46})$$

$$\mathbf{J}_{zu} = \mathbf{L} \quad (\text{AP3.47})$$

3.4.5 Transformação resultante

As subseções Subseção 3.4.3 e Subseção 3.4.4 expuseram o procedimento para efetuar o mapeamento de um conjunto de variáveis aleatórias do espaço de projeto \mathbb{X} para um espaço de variáveis aleatórias normais equivalentes correlacionadas \mathbb{Z} , e do espaço \mathbb{Z} para o espaço multi-normal padrão descorrelacionado \mathbb{U} . Com a aplicação da regra da cadeia é possível combinar estas três transformações, sendo $\mathbf{J}_{\mathbf{u}\mathbf{x}}$ e $\mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{u}}$ os Jacobianos relacionados a transformação de \mathbb{X} para \mathbb{U} e \mathbb{U} para \mathbb{X} , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\mathbf{u}\mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_k} \right] = \mathbf{J}_{\mathbf{u}\mathbf{z}} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{z}\mathbf{x}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{u}} &= \left[\frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial u_k} \right] = \mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{z}\mathbf{u}}\end{aligned}\tag{AP3.48}$$

Utilizando a decomposição ortogonal, a matriz Jacobiana e sua inversa são escritas como:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u}\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2})^T \cdot (\mathbf{D}^{neq})^{-1}\tag{AP3.49}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{u}} = \mathbf{D}^{neq} \cdot (\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \cdot \bar{\mathbf{A}})^T\tag{AP3.50}$$

Utilizando a decomposição de Cholesky, temos:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u}\mathbf{x}} = \mathbf{L}^{-1} \cdot (\mathbf{D}^{neq})^{-1}\tag{AP3.51}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{u}} = \mathbf{D}^{neq} \cdot \mathbf{L}\tag{AP3.52}$$

De forma geral, a transformação resultante é expressa por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_{\mathbf{u}\mathbf{x}} \cdot \{\mathbf{x} - \mathbf{M}^{neq}\}\tag{AP3.53}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M}^{neq}\tag{AP3.54}$$

APÊNDICE 4 – DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS NECESSÁRIOS AO CÁLCULO DA RESISTÊNCIA À FLAMBAGEM LOCAL E GLOBAL

4.1 DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DAS PROPRIEDADES E PARÂMETROS

As propriedades elásticas do perfil PPRFV podem ser determinadas conforme as equações (EQUAÇÃO 3.2 a EQUAÇÃO 3.8):

$$V_f = \frac{(1 - M_m) \rho_m}{M_m \rho_f + (1 - M_m) \rho_m} = \frac{(1 - 0,34) 1300}{0,34 \times 2600 + (1 - 0,34) 1300} = 0,493$$

$$E_{L,f} = E_{L,w} = E_{ef} = E_L = E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) = 81 \times 0,493 + 3,7 \times (1 - 0,493)$$

$$E_1 = 41,773 \text{ GPa}$$

$$\eta_2 = \frac{0,2}{1 - \nu_m} \left(1,1 - \sqrt{\frac{E_m}{E_f}} + \frac{3,5 E_m}{E_f} \right) (1 + 0,22 V_f)$$

$$\eta_2 = \frac{0,2}{1 - 0,35} \left(1,1 - \sqrt{\frac{3,7}{81}} + \frac{3,5 \times 3,7}{81} \right) (1 + 0,22 \times 0,493) = 0,357$$

$$E_{T,f} = E_{T,w} = E_T = E_2$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m [V_f + \eta_2 (1 - V_f)]}{E_m V_f + E_f \eta_2 (1 - V_f)} = \frac{81 \times 3,7 [0,493 + 0,357 (1 - 0,493)]}{3,7 \times 0,493 + 81 \times 0,357 (1 - 0,493)}$$

$$E_2 = 12,244 \text{ GPa}$$

$$\eta_{12} = 0,28 + \sqrt{\frac{E_m}{E_f}} = 0,28 + \sqrt{\frac{3,7}{81}} = 0,494$$

$$G_{LT} = G_{ef} = G_{12} = \frac{G_f G_m [V_f + \eta_{12} (1 - V_f)]}{G_m V_f + G_f \eta_{12} (1 - V_f)} = \frac{33 \times 1,4 [0,493 + 0,494 (1 - 0,493)]}{1,4 \times 0,493 + 33 \times 0,494 (1 - 0,493)}$$

$$G_{12} = 3,833 \text{ GPa}$$

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) = 0,22 \times 0,493 + 0,35 (1 - 0,493)$$

$$\nu_{12} = 0,286 \approx \nu_{23}$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} = \frac{12,244}{2(1 + 0,286)} = 4,760 \text{ GPa}$$

Considerando a flambagem local da mesa comprimida, temos das equações

(EQUAÇÃO A1.5 e EQUAÇÃO A1.6):

$$k_r = \frac{E_{T,w}t_w^3}{6d} \left(1 - \left[\left(\frac{48t_f^2d^2E_{L,w}}{11,1\pi^2t_w^2b_f^2E_{L,f}} \right) \left(\frac{G_{LT}}{1,25\sqrt{E_{L,w}E_{T,w}} + E_{T,w}v_{LT} + 2G_{LT}} \right) \right] \right)$$

$$k_r = \frac{12.244 \times 9,5^3}{6 \times 200} \left(1 - \left[\left(\frac{48 \times 9,5^2 \times 200^2 \times 41.773}{11,1\pi^2 9,5^2 \times 100^2 \times 41.773} \right) \left(\frac{3.833}{1,25\sqrt{41.773 \times 12.244} + 12.244 \times 0,286 + 2 \times 3.833} \right) \right] \right)$$

$$k_r = 7258,206$$

$$\xi_{cr,f} = \frac{E_{T,f}t_f^3}{b_f k_r 6} = \frac{12.244 \times 9,5^3}{100 \times 7258,206 \times 6} = 2,411$$

A tensão de flambagem local crítica para a mesa comprimida é calculada conforme a EQUAÇÃO A1.4:

$$f_{cr,fl} = \frac{4t_f^2}{b_f^2} \left(\frac{7}{12} \sqrt{\frac{E_{L,f}E_{T,f}}{1 + 4,1\xi_{cr,f}}} + G_{LT} \right)$$

$$f_{cr,fl} = \frac{4 \times 9,5^2}{100^2} \left(\frac{7}{12} \sqrt{\frac{41.773 \times 12.244}{1 + 4,1 \times 2,411}} + 3.833 \right) = 282,718 \text{ MPa}$$

Já a tensão de flambagem local crítica para a alma é dada pela EQUAÇÃO A1.7:

$$f_{cr,web} = \frac{11,1\pi^2t_w^2}{12d^2} \left(1,25\sqrt{E_{L,w}E_{T,w}} + E_{T,w}v_{LT} + 2G_{LT} \right)$$

$$f_{cr,web} = \frac{11,1\pi^2 9,5^2}{12 \times 200^2} \left(1,25\sqrt{41.773 \times 12.244} + 12.244 \times 0,286 + 2 \times 3.833 \right)$$

$$f_{cr,web} = 812,318 \text{ MPa}$$

O momento de inércia em torno do eixo de flexão I_p é dado por:

$$I_p = 2 \left(b_f t_f^3 / 12 + b_f t_f (0,5d - 0,5t_f)^2 \right) + t_w (d - 2t_f)^3 / 12$$

$$I_p = 2 \left(100 \times 9,5^3 / 12 + 100 \times 9,5 (0,5 \times 200 - 0,5 \times 9,5)^2 \right) + 9,5 \times (200 - 2 \times 9,5)^3 / 12$$

$$I_p = 21.946.536,625 \text{ mm}^4$$

Para o cálculo da resistência do perfil à flambagem lateral com torção (FLT),

considera-se os seguintes parâmetros e propriedades:

$$L_b = 4 \text{ m}; C_b = 1,0;$$

$$I_{\min} = 2 \left(\frac{t_f b_f^3}{12} \right) + \frac{(d - 2t_f)t_w^3}{12} = 2 \left(\frac{9,5 \times 100^3}{12} \right) + \frac{(200 - 2 \times 9,5) \times 9,5^3}{12} = 1.596.265,406 \text{ mm}^4$$

$$C_w = \frac{t_f d^2 b_f^3}{24} = \frac{9,5 \times 200^2 \times 100^3}{24} = 1,583 \times 10^{10} \text{ mm}^4$$

$$J = \sum_i \frac{1}{3} b_i t_i^3 = \left(\frac{2}{3} 100 \times 9,5^3 + \frac{1}{3} (200 - 2 \times 9,5) \times 9,5^3 \right) = 108.886,625 \text{ mm}^4$$

$$D_J = G_{LT} J = G_{LT} 108.886,625$$

$$D_J = 417.362.434 \text{ N.mm}^4$$

ANEXOS

ANEXO 1 – RESISTÊNCIA À FLEXÃO DO PERFIL DEVIDO À INSTABILIDADE LOCAL CONFORME ASCE: LOAD AND RESISTANCE FACTOR DESIGN (LRFD) OF PULTRUDED FIBER REINFORCED POLYMER (FRP) STRUCTURES

Neste anexo é apresentada a tradução literal da norma ASCE (2024), que apresenta as formulações para cálculo da resistência do perfil à flexão devido à instabilidade local, conforme item 5.2.3, e a instabilidade por flambagem lateral com torção, de acordo com o item 5.2.4.

1.1 RESISTÊNCIA NOMINAL DO PERFIL DEVIDO À INSTABILIDADE LOCAL

A resistência nominal à flexão de uma seção I, C, T ou caixão governada pela instabilidade local da mesa ou da alma será determinado da seguinte forma:

a) Flambagem local da mesa comprimida:

$$M_n = f_{cr} \frac{E_{L,f} I_f + E_{L,w} I_w}{y E_{L,f}} \quad (\text{A1.1})$$

b) Flambagem local da alma:

$$M_n = f_{cr} \frac{E_{L,f} I_f + E_{L,w} I_w}{y E_{L,w}} \quad (\text{A1.2})$$

c) Quando a variação no módulo de elasticidade longitudinal entre a mesa e a alma estiver dentro de 15%, a expressão pode ser simplificada:

$$M_n = f_{cr} \frac{I_p}{y} \quad (\text{A1.3})$$

onde:

f_{cr} = Tensão crítica de flambagem dada pelo mínimo entre a tensão de flambagem local da mesa comprimida e da flambagem local da alma (MPa);

$E_{L,f}$ = Módulo longitudinal característico da mesa (MPa);

$E_{L,w}$ = Módulo longitudinal característico da alma (MPa);

I_f = Momento de inércia da mesa em torno do eixo de flexão (mm⁴);

I_w = Momento de inércia da alma em torno do eixo de flexão (mm⁴);

I_p = Momento de inércia da seção em torno do eixo de flexão (mm⁴);

y = Distância da linha neutra até a fibra mais extrema da seção (mm).

Para seções "I" fletidas em torno do eixo de maior inércia, conforme o item 5.2.3.1 da ASCE (2024), tem-se a tensão crítica de flambagem local da mesa comprimida $f_{cr,f}$, dada por:

$$f_{cr,f} = \frac{4t_f^2}{b_f^2} \left(\frac{7}{12} \sqrt{\frac{E_{L,f}E_{T,f}}{1 + 4,1\xi_{cr,f}}} + G_{LT} \right) \quad (\text{A1.4})$$

onde:

$$\xi_{cr,f} = \frac{E_{T,f}t_f^3}{6b_fk_r} \quad (\text{A1.5})$$

$$k_r = \frac{E_{T,w}t_w^3}{6d} \left(1 - \left[\left(\frac{48t_f^2d^2E_{L,w}}{11,1\pi^2t_w^2b_f^2E_{L,f}} \right) \left(\frac{G_{LT}}{1,25\sqrt{E_{L,w}E_{T,w}} + E_{T,w}\nu_{LT} + 2G_{LT}} \right) \right] \right) \quad (\text{A1.6})$$

onde:

$E_{T,f}$ = Módulo transversal característico da mesa (MPa);

$E_{T,w}$ = Módulo transversal característico da alma (MPa);

G_{LT} = Módulo de cisalhamento no plano característico (MPa);

ν_{LT} = Coeficiente de Poisson longitudinal característico;

b_f = Largura total da mesa (mm);

d = Altura total do perfil (mm);

t_f = Espessura da mesa (mm);

t_w = Espessura da alma (mm);

$\xi_{cr,f}$ = Coeficiente de restrição;

k_r = Constante de mola rotacional (kN/rad).

E, quanto a tensão crítica de flambagem local da alma $f_{cr,w}$, esta é dada por:

$$f_{cr,w} = \frac{11,1\pi^2t_w^2}{12d^2} \left(1,25\sqrt{E_{L,w}E_{T,w}} + E_{T,w}\nu_{LT} + 2G_{LT} \right) \quad (\text{A1.7})$$

1.2 RESISTÊNCIA NOMINAL DO PERFIL DEVIDO À FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO

A resistência nominal à flexão de uma seção I, C, T ou caixão governada pela instabilidade local da mesa ou da alma será determinada da seguinte forma, conforme item 5.2.4:

$$M_n = C_b \sqrt{\frac{\pi^2E_{L,f}I_yD_J}{L_b^2} + \frac{\pi^4E_{L,f}^2I_yC_w}{L_b^4}} \quad (\text{A1.8})$$

onde:

D_J = Rigidez à torção de seções abertas (N.mm²). $D_J = G_{LT} \sum_i \frac{1}{3} b_i t_i^3$, sendo "i" os

elementos da seção;

C_w = Constante de *warping* (mm^6). Para seções "I": $C_w = \frac{t_f d^2 b_f^3}{24}$;

$I_{\text{mín}}$ = Momento de inércia em torno do eixo de menor inércia (mm^4);

L_b = Comprimento entre pontos travados contra deslocamentos laterais da mesa comprimida ou com restrição à torção da seção transversal (mm);

C_b = Coeficiente de modificação para vãos destravados com momento fletor variável e ambas as extremidades contraventadas:

$$C_b = \frac{12,5M_{\text{max}}}{2,5M_{\text{max}} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \leq 3,0$$

onde:

$M_{\text{máx}}$ = Valor do momento fletor máximo solicitante de cálculo, em módulo, no comprimento destravado (N.mm);

M_A = Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a um quarto do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda (N.mm);

M_B = Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção central do comprimento destravado (N.mm);

M_C = Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a três quartos do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda (N.mm).

C_b pode ser tomado igual a 1,0 de forma conservadora para todos os casos.

ANEXO 2 – RESISTÊNCIA À FLEXÃO DO PERFIL DEVIDO À INSTABILIDADE GLOBAL CONFORME CNR-DT 205/2007: GUIDE FOR THE DESIGN AND CONSTRUCTION OF STRUCTURES MADE OF FRP PULTRUDED ELEMENTS

Neste anexo é apresentada a tradução literal de trechos do documento CNR-DT (2007), o qual apresenta recomendações técnicas do Comitê Consultivo Italiano de Recomendações Técnicas para Construção voltadas ao uso estrutural de compósitos PRF. Esse documento foi selecionado por apresentar, dentre as diversas normas e recomendações atualmente disponíveis, formulações para cálculo da resistência de perfis à flambagem lateral-torsional com condições de contorno e premissas mais próximas das consideradas neste trabalho.

2.1 RESISTÊNCIA NOMINAL À INSTABILIDADE GLOBAL DE PERFIS SUJEITOS À FLEXÃO

No caso de perfis pultrudados com seção duplamente simétrica, submetidos a um momento fletor variável no plano de máxima inércia, o momento crítico de instabilidade flexo-torsional $M_{cr,FT,CNR}$ tem a seguinte expressão, conforme item 5 da seção 4.2.1 do CNR-DT (2007):

$$M_{cr,FT,CNR} = \frac{C_1 \pi^2}{C_3 L_b^2} E_{ef} I_{\min} \left[-C_2 z_q + \sqrt{\left(\frac{C_2 z_q}{C_3} \right)^2 + \frac{C_w}{I_{\min}} \left(\frac{1}{C_3} + \frac{G_{ef} J L_b^2}{E_{ef} C_w \pi^2} \right)} \right] \quad (A2.1)$$

onde:

C_1, C_2 e C_3 = Coeficientes de correção que dependem das vinculações e do carregamento;

L_b = Comprimento entre pontos travados contra deslocamentos laterais da mesa comprimida ou com restrição à torção da seção transversal (mm);

E_{ef} = Módulo de elasticidade efetivo (MPa);

G_{ef} = Módulo de cisalhamento efetivo (MPa);

I_{\min} = Momento de inércia em torno do eixo de menor inércia (mm⁴)

z_q = Coordenada do ponto de aplicação da carga em relação ao centro de cisalhamento do perfil (ou centróide no caso das seções "I" duplamente simétricas) (mm);

C_w = Constante de empenamento (*warping*) (mm⁶). Para seções "I": $C_w = \frac{t_f d^2 b_f^3}{24}$;

J = Constante de torção para seção aberta (mm⁴)