

Universidade Federal do Paraná  
Programa de Pós - Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia

**PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS  
NA LOCALIZAÇÃO DE UNIDADES DE SAÚDE 24 HORAS**

Curitiba  
2002

Universidade Federal do Paraná  
Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia

**PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS  
NA LOCALIZAÇÃO DE UNIDADES DE SAÚDE 24 HORAS**

**RAIMUNDO RONILSON LEAL DO ROSÁRIO**

Dissertação apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia  
da Universidade Federal do Paraná  
como requisito parcial para obtenção  
do título de Mestre em  
Ciências.

Curitiba  
2002

RAIMUNDO RONILSON LEAL DO ROSÁRIO

PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS  
NA LOCALIZAÇÃO DE UNIDADES DE SAÚDE 24 HORAS

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Ciências, área de concentração em Programação Matemática, no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná

Curitiba, 24 de abril de 2002.

Prof<sup>a</sup>. Maria Teresinha Arns Steiner, Dra.  
Coordenadora do Curso

BANCA EXAMINADORA

Orientador:



Prof. Celso Carnieri, Dr.  
Departamento de Matemática, UFPR

Co-orientadora:



Prof<sup>a</sup>. Maria Teresinha Arns Steiner, Dra.  
Departamento de Matemática, UFPR



Prof. Heitor Silvério Lopes, Dr.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e  
Informática Industrial, CEFET-PR.

Aos meus pais Elias e Antônia  
pelo apoio e incentivo.  
Aos meus irmãos Roberto, Marília, Ronaldo e Romilton.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao orientador Prof. Celso Carnieri pelo acompanhamento competente.

À Prof<sup>ª</sup>. Maria Teresinha Arns Steiner Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia e co-orientadora pelo incentivo e contribuição.

Ao Prof. Heitor Silvério Lopes pela valiosa colaboração.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação pelos ensinamentos transmitidos.

À Daniele Durski Figueiredo, ao Elon Santos Corrêa e ao Sérgio Augusto Fleischfresser pela amizade, companheirismo e contribuição durante todo o transcorrer do curso.

Aos meus colegas de trabalho do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná pelo apoio e incentivo, especialmente ao chefe do departamento de Matemática o Prof. João Adão Inácio pelo apoio, incentivo e apreço.

Aos meus irmãos Marília, Ronaldo e Romilton pela compreensão.

À Carmem Regina Ribeiro do IPPUC e à Elziane Cazura Ferreira Xavier Soares da Secretaria municipal de Saúde pela colaboração prestada.

À Maristela Bandil e ao Elizeu dos Santos pela atenção e atendimento.

À Universidade Federal do Paraná, especialmente ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

A todos os colegas e amigos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	viii
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	ix
<b>RESUMO</b> .....	x
<b>ABSTRACT</b> .....	xi
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 Origem do Trabalho .....	1
1.2 Descrição do Problema .....	2
1.3 Objetivos do Trabalho .....	5
1.4 Importância do Trabalho .....	5
1.5 Limitações do Trabalho .....	6
1.6 Estrutura do Trabalho .....	8
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	9
2.1 Revisão da Literatura .....	9
2.2 Métodos exatos e heurísticos .....	16
2.3 Problemas de Localização de Facilidades .....	17
2.3.1 O problema das p-medianas .....	19
2.3.2 Definição do problema das p-medianas .....	20
2.3.3 Algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART .....	20
2.3.3.1 Número de transmissão .....	20
2.3.3.2 Teorema [CHRISTOFIDES, 1975] .....	23
2.3.3.3 Descrição do algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART .....	23
2.4 Algoritmo Genético (AG) .....	25
2.4.1 Introdução de Algoritmos Genéticos .....	25
2.4.2 Representação e Codificação .....	27
2.4.3 Inicialização .....	28
2.4.4 Função Aptidão .....	29
2.4.5 Esquema de Seleção .....	30
2.4.6 Operadores Genéticos .....	31
2.4.6.1 Operadores de recombinação .....	32
2.4.6.1.1 <i>Crossover</i> simples .....	32
2.4.6.1.2 <i>Crossover</i> de dois pontos .....	32
2.4.6.1.3 <i>Crossover</i> uniforme .....	33
2.4.6.2 Operador de mutação .....	34
2.4.7 Parâmetros de um AG .....	34
2.4.8 Pseudocódigo de um AG .....	35

<b>2.5 Diagrama de Voronoi</b> .....	38
2.5.1 Introdução ao diagrama de Voronoi.....	38
2.5.2 Definição e propriedades do diagrama de Voronoi .....	39
2.5.3 Teoremas e demonstrações do diagrama de Voronoi.....	41
2.5.4 Aplicações do diagrama de Voronoi .....	48
2.5.5 Triangulação de Delaunay .....	51
<b>CAPÍTULO III</b>	
<b>3 METODOLOGIA ADOTADA NESTE TRABALHO</b> .....	52
3.1 Introdução .....	52
3.2 Dados utilizados .....	52
3.3 Matriz de distâncias.....	52
3.3.1 Centro de gravidade de n partículas .....	53
3.3.2 Centro de gravidade de um polígono convexo .....	53
3.3.3 Centro de gravidade de um polígono côncavo .....	55
3.3.4 Centro de bairros .....	55
3.3.5 Distância Percorrida.....	56
3.4 Matriz de pesos .....	59
3.5 Propostas para a localização de Unidades de Saúde 24 Horas .....	65
3.5.1 Proposta 1 .....	66
3.5.2 Proposta 2 .....	66
3.6 Processo de descentralização da Atividade Saúde.....	66
3.7 Implementação Computacional.....	66
3.7.1 Implementação dos AGs .....	66
3.7.1.1 Representação e Codificação utilizada.....	66
3.7.1.2 Inicialização dos AGs.....	68
3.7.1.3 Função Aptidão utilizada.....	68
3.7.1.4 Esquema de Seleção utilizado.....	69
3.7.1.5 Operadores Genéticos utilizados.....	71
3.7.1.6 Parâmetros dos AGs.....	72
3.7.1.7 Aplicação dos operadores genéticos .....	72
3.7.1.8 Descrição das implementações dos AGs .....	73
3.7.1.9 Descrição da implementação do AG <i>steady-state</i> .....	73
3.7.1.10 Descrição da implementação do AG generacional .....	75
3.7.2 Implementação do algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART .....	77
3.7.2.1 Número de transmissão para o problema.....	77
3.7.2.2 Descrição da implementação do algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART.....	77
3.7.3 Implementação da Busca Exaustiva .....	78
3.7.3.1 Descrição da Implementação da Busca Exaustiva .....	78
3.8 Áreas de Proximidade de Unidades de Saúde 24 Horas .....	81
3.9 Algoritmo para a determinação do diagrama de Voronoi .....	81

**CAPÍTULO IV**

<b>4 RESULTADOS</b> .....	84
<b>4.1 Resultados encontrados</b> .....	84
<b>4.2 Diagrama de Voronoi para os resultados encontrados</b> .....	86

**CAPÍTULO V**

<b>5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b> .....	101
<b>5.1 Discussão dos resultados</b> .....	101
<b>5.2 Conclusões</b> .....	103
<b>5.3 Sugestões para trabalhos futuros</b> .....	104
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	105
<b>ANEXO 1</b>	
Tabela 11: Áreas e centros dos bairros do município de Curitiba.....	109
<b>ANEXO 2</b>	
Tabela 12: tabela 3 completa.....	110
<b>ANEXO 3</b>	
Tabela 13: tabela 4 completa.....	112
<b>ANEXO 4</b>	
Tabela 14: tabela 5 completa.....	114
<b>ANEXO 5</b>	
Tabela 15: tabela 6 completa.....	115
<b>ANEXO 6</b>	
Tabela 16: tabela 7 completa.....	117
<b>ANEXO 7</b>	
Relação dos bairros pertencentes à Administração Regional Matriz.....	119

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Bairros do município de Curitiba.....	7
Figura 2: <i>Crossover</i> simples .....	32
Figura 3: <i>Crossover</i> de dois pontos .....	33
Figura 4: <i>Crossover</i> uniforme .....	33
Figura 5: Mutação (troca simples) .....	34
Figura 6: Célula de um ponto do diagrama de Voronoi .....	39
Figura 7: Diagrama de Voronoi com 17 pontos .....	40
Figura 8: Diagrama de Voronoi com pontos colineares .....	42
Figura 9: Arestas e semi-retas de um diagrama de Voronoi.....	42
Figura 10: Interseção de bissetrizes .....	43
Figura 11: Grafo conectado .....	45
Figura 12: Círculo que determina quais são vértices ou arestas .....	46
Figura 13: Diagrama de Voronoi (Teorema 3) .....	47
Figura 14: Grafo de proximidade sobre a triangulação de Delaunay.....	49
Figura 15: Triangulação de Delaunay.....	51
Figura 16: Centro de gravidade (G) de um polígono convexo .....	54
Figura 17: Polígono com área aproximada à área do bairro Pinheirinho.....	55
Figura 18: Relação entre distância real percorrida e distância euclidiana .....	57
Figura 19: Codificação utilizada de indivíduo dos AGs.....	67
Figura 20: Esquema de seleção por atribuição de notas (método do <i>ranking</i> linear).....	70
Figura 21: PMX.....	71
Figura 22: Mutação.....	72
Figura 23: Diagrama de Voronoi p/ as Unidades de Saúde 24 Horas (2002).....	87
Figura 24: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (5 medianas – situação 1).....	88
Figura 25: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (6 medianas – situação 1).....	89
Figura 26: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (7 medianas – situação 1).....	90
Figura 27: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (8 medianas – situação 1).....	91
Figura 28: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (28 medianas – situação 1).....	92
Figura 29: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (5 medianas – situação 1).....	93
Figura 30: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (6 medianas – situação 1).....	94
Figura 31: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (7 medianas – situação 1).....	95
Figura 32: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (8 medianas – situação 1).....	96
Figura 33: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 1 (28 medianas – situação 1).....	97
Figura 34: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 2 (matrizes de pesos P3 e P5).....	98
Figura 35: Diagrama de Voronoi p/ a proposta 2 (matriz de pesos P4).....	99
Figura 36: Diagrama de Voronoi p/ a proposta do IPPUC .....	100

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resultado de testes computacionais [LORENA <i>et al.</i> , 2001].....	15
Tabela 2: Cálculo do coeficiente $\alpha$ para 10 pares de pontos situados na cidade de São Paulo.....	58
Tabela 3: Dados numéricos de aspectos do município de Curitiba de 1991 .....	60
Tabela 4: Dados numéricos de aspectos do município de Curitiba de 1996 .....	61
Tabela 5: Dados numéricos de aspectos do município de Curitiba de 2000 .....	61
Tabela 6: Pesos relacionados aos bairros do município de Curitiba, utilizando dados de 1991 .....	62
Tabela 7: Pesos relacionados aos bairros do município de Curitiba, utilizando dados de 1996 .....	62
Tabela 8: Resultados encontrados para a proposta 1 (matriz de pesos P1) .....	85
Tabela 9: Resultados encontrados para a proposta 1 (matriz de pesos P2) .....	85
Tabela 10: Resultados encontrados para a proposta 2 junto com a proposta do IPPUC .....	86

## RESUMO

Este trabalho verifica a necessidade da população quanto à implantação de Unidades de Saúde 24 Horas, devido ao crescimento populacional e, principalmente, considerando que os habitantes precisam de atendimento a qualquer hora. É proposta uma metodologia para a distribuição espacial de Unidades de Saúde 24 Horas com o objetivo de minimizar a distância média de deslocamento dos usuários, desde suas residências até a unidade mais próxima. Para a metodologia adotada neste trabalho, foram utilizados: algoritmos genéticos, o algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart, a busca exaustiva e os diagramas de Voronoi. Conhecendo-se a quantidade de unidades a serem implantadas, com as referidas técnicas adotadas aplicadas ao problema das p-medianas, em pouco tempo se encontra as melhores localizações para a implantação das Unidades de Saúde 24 Horas.

## ABSTRACT

This study verifies the population needs about the implantation of 24-hour Health Units considering the population growth and mainly because people need attention at any time. A methodology is proposed for the spatial distribution of these 24-hour Health Units aiming at the reduction the average distance that users have to travel, from their homes to the nearest health unit. The methodology applied in this study comprises the genetic algorithm, the Teitz and Bart p-medians algorithm, the exhaustive search and the Voronoi diagrams. As soon as one knows the number of units that should be implanted, with the adopted techniques applied to the p-medians problem, the best localizations can be found for the implantation of the 24-hour Health Units.

## CAPÍTULO I

### 1 INTRODUÇÃO

#### 1.1 Origem do Trabalho

Foram implantadas em Curitiba, entre 1992 e 1994 cinco Unidades de Saúde 24 Horas, fortalecendo a premissa de atendimento à demanda requerida pela população no setor saúde. Estas novas unidades também servem de retaguarda, pois além dos serviços inerentes a estas unidades, fazem a ligação entre as Unidades Básicas de Saúde e os hospitais e clínicas públicas do município.

Devido ao crescimento populacional, verifica-se que é necessária a implantação de novas unidades de saúde de atendimento ininterrupto, para que possa ser garantido à população todo tipo de atendimento à saúde, principalmente os emergenciais, em período integral diário inclusive aos sábados, domingos e feriados.

O processo de pesquisa, planejamento, análise e implantação de novas Unidades de Saúde (Básicas e 24 Horas) é feito pelo IPPUC – Instituto de Pesquisa e Planejamento Urbano de Curitiba.

Neste processo são analisadas muitas variáveis para que as Unidades de Saúde possam estar bem localizadas, de modo a satisfazer as necessidades relativas à saúde da população propriamente dita e as dificuldades relacionadas às distâncias dos deslocamentos dos usuários às unidades. Deste modo, deve-se implantar as unidades em locais onde exista pouco atendimento à saúde e maior concentração da população, principalmente carente (baixa renda).

A construção de Unidades de Saúde depende de questões políticas, administrativas e principalmente orçamentárias, pois o IPPUC também analisa a implantação de outras facilidades, como escolas municipais, creches e outras.

## **1.2 Descrição do Problema**

O modelo de assistência implantado pela Prefeitura Municipal, em Curitiba, assumiu a característica de atenção ambulatorial básica, pressupondo que outras instâncias seriam responsáveis pelo ambulatório especializado e atendimento hospitalar, através da hierarquização e integração de serviços [IPPUC, 1991].

Esse pressuposto levou ao desenvolvimento de Unidades de Saúde Básica que oferecem à população de uma área delimitada, assistência nas três especialidades básicas (Clínica Geral, Pediatria e Ginecologia/Obstetrícia) além de Clínicas Odontológicas.

No entanto, algumas dificuldades se apresentaram à simples permanência e multiplicação de Unidades Básicas de Saúde, baseadas nesse modelo de estrutura de serviços. A integração interinstitucional mostrou-se sempre problemática e a impossibilidade de acesso a serviços de maior complexidade dificultava o trabalho de atenção integral à saúde, à medida que as Unidades Básicas de Saúde não tinham retaguarda assegurada para situações que exigissem investigação diagnóstica ou observação do paciente [IPPUC, 1991].

Um dos principais problemas a ser resolvido pela Secretaria Municipal de Saúde, é assegurar local de referência, isto é, de encaminhamento de pacientes a outros níveis, seja ambulatorial, seja hospitalar e local onde o paciente possa ser assistido pelo médico, numa unidade que permita permanência de curta duração para acompanhamento e observação.

O número de Unidades Básicas de Saúde exigiu, administrativa e gerencialmente, a implantação de um processo de descentralização, sendo alcançado através da regionalização das unidades, centralizando algumas atividades dentro de cada regional, proporcionando otimização de recursos materiais e humanos.

Sem deixar de expandir a rede básica, onde se fizesse necessário, pretendeu-se construir oito Unidades de Saúde 24 Horas, a partir de 1991; um Serviço Municipal de Apoio Diagnóstico (SEMAD); um Centro Municipal de Especialidades Ambulatoriais (CEMEA) e um Centro de Atendimento à Mulher e à Criança e um Hospital Geral [IPPUC, 1991].

Com esse Sistema Municipal de Saúde seria possível expandir a todos os cidadãos, de forma regionalizada e hierarquizada a "vigilância sanitária" que, além de prestar assistência médico-odontológica, pudesse executar ações de vigilância epidemiológica e sanitária.

No processo de pesquisa e planejamento de locais para implantação de Unidades de Saúde vários aspectos são observados pelo IPPUC, sendo principais os seguintes: a densidade demográfica, o grau de carência sócio-econômica da população, a inexistência de serviços de saúde na região e o sistema viário de transporte.

Estes aspectos são relevantes para se determinar os locais onde serão implantadas as Unidades de Saúde 24 Horas, visto que todas as pessoas têm os mesmos direitos aos atendimentos públicos, principalmente aos de saúde. Vale salientar que as Unidades de Saúde 24 Horas possuem um maior raio de abrangência, em relação às Unidades Básicas de Saúde, devido aos seus portes e tipos de atendimentos.

Os procedimentos realizados pelo IPPUC, de modo a encontrar os locais para implantação de Unidades de Saúde, podem ser resumidos nas seguintes etapas: são retiradas fotografias aéreas do município de Curitiba, sendo que através destas tem-se uma visão atualizada sobre os tipos de habitações do município. Em seguida, com o uso destas fotografias faz-se um levantamento sobre: a quantidade da população, a classe social, a existência de serviços de saúde em certas regiões (que podem ser bairros). Nesta etapa são, então, escolhidas algumas regiões para a implantação de Unidades de Saúde (Básicas ou 24 Horas).

Para determinar o local exato a ser implantada uma Unidade de Saúde é feito um estudo em campo onde se verifica a satisfação e a facilidade dos usuários de se deslocarem de suas residências aos locais propostos pelo IPPUC. Através da análise do resultado deste estudo ficam definidos os locais para as implantações das Unidades de Saúde.

Neste processo de definição de locais, surgem algumas perguntas, dentre outras: quais os melhores locais para se implantar novas Unidades de Saúde 24 Horas a fim de minimizar as distâncias percorridas pelos usuários desde suas residências à Unidade de Saúde 24 Horas mais próxima?; será que as Unidades de Saúde 24 Horas já implantadas estão bem localizadas (de acordo com os aspectos mais relevantes)?; qual a Unidade de Saúde 24 Horas mais próxima de um dado ponto da cidade?

Desta forma, surge o problema a ser abordado neste trabalho, que é o de determinar as melhores localizações para implantação de Unidades de Saúde 24 Horas, levando em consideração os mesmos aspectos relevantes utilizados pelo IPPUC e, também determinar as áreas de proximidades de tais localizações.

### **1.3 Objetivos do Trabalho**

Este trabalho tem como objetivo principal propor uma metodologia para a distribuição espacial de Unidades de Saúde 24 Horas no município de Curitiba.

Como objetivo específico, apresentar uma sistemática para indicar em que regiões (bairros) devem ser localizadas as Unidades de Saúde 24 Horas. Busca-se encontrar a melhor localização, visando minimizar a distância média de deslocamento dos usuários desde o bairro onde residem ao bairro onde se localiza a Unidade de Saúde 24 Horas mais próxima, observando os mesmos aspectos relevantes considerados pelo IPPUC para a implantação de tais unidades: a densidade demográfica; o grau de carência sócio-econômica da população; a inexistência de serviços de saúde na região e o sistema viário de transporte. A inexistência de serviços de saúde na região e o sistema viário de transporte serão indiretamente considerados através dos índices de satisfação da qualidade de vida.

### **1.4 Importância do Trabalho**

O IPPUC, que é o órgão municipal responsável pelo planejamento urbano de Curitiba, tem como uma de suas metas encontrar localizações adequadas para a construção de Unidades de Saúde (Básicas e 24 Horas) com o intuito de dar maior satisfação aos usuários. Também procura implantar as unidades em locais onde exista maior concentração da população de baixa renda e inexistência de serviços de saúde, observando o sistema de transporte na região para facilitar o acesso às unidades.

Serão apresentados neste trabalho, procedimentos de obtenção de localizações para implantação de Unidades de Saúde 24 Horas, em se tratando de minimização de distâncias e observando os aspectos mais relevantes, obtendo-se com isto maior proximidade entre os usuários e as Unidades de Saúde, dando maior satisfação aos que mais precisam dos serviços.

Será determinada, também, a região de abrangência de cada Unidade de Saúde 24 Horas (região determinada pelos pontos cujas distâncias até a unidade pertencente a esta região é menor do que a qualquer outra unidade), informação importante ao usuário que pode, assim, localizar a Unidade de Saúde 24 Horas mais próxima de onde estiver.

## **1.5 Limitações do Trabalho**

Para maior aplicabilidade de um trabalho é importante direcioná-lo para um problema real e atual. Para isso é necessário utilizar dados atualizados para que se possa verificar sua importância, onde são feitas as devidas comparações entre os resultados obtidos no trabalho e a realidade.

Foram usados neste trabalho os dados do censo do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) de 1991, de 1996 e de 2000, os 3 últimos censos realizados. A quantidade da população do censo 2000 era o único dado relevante, a ser observado para implantação de Unidades de Saúde, disponível até o momento da realização das implementações dos algoritmos.

Foram utilizados como regiões, os bairros do município de Curitiba (figura 1) para se localizar as Unidades de Saúde 24 Horas em seus centros, sendo proposta a localização de, no máximo, uma Unidade em cada região.

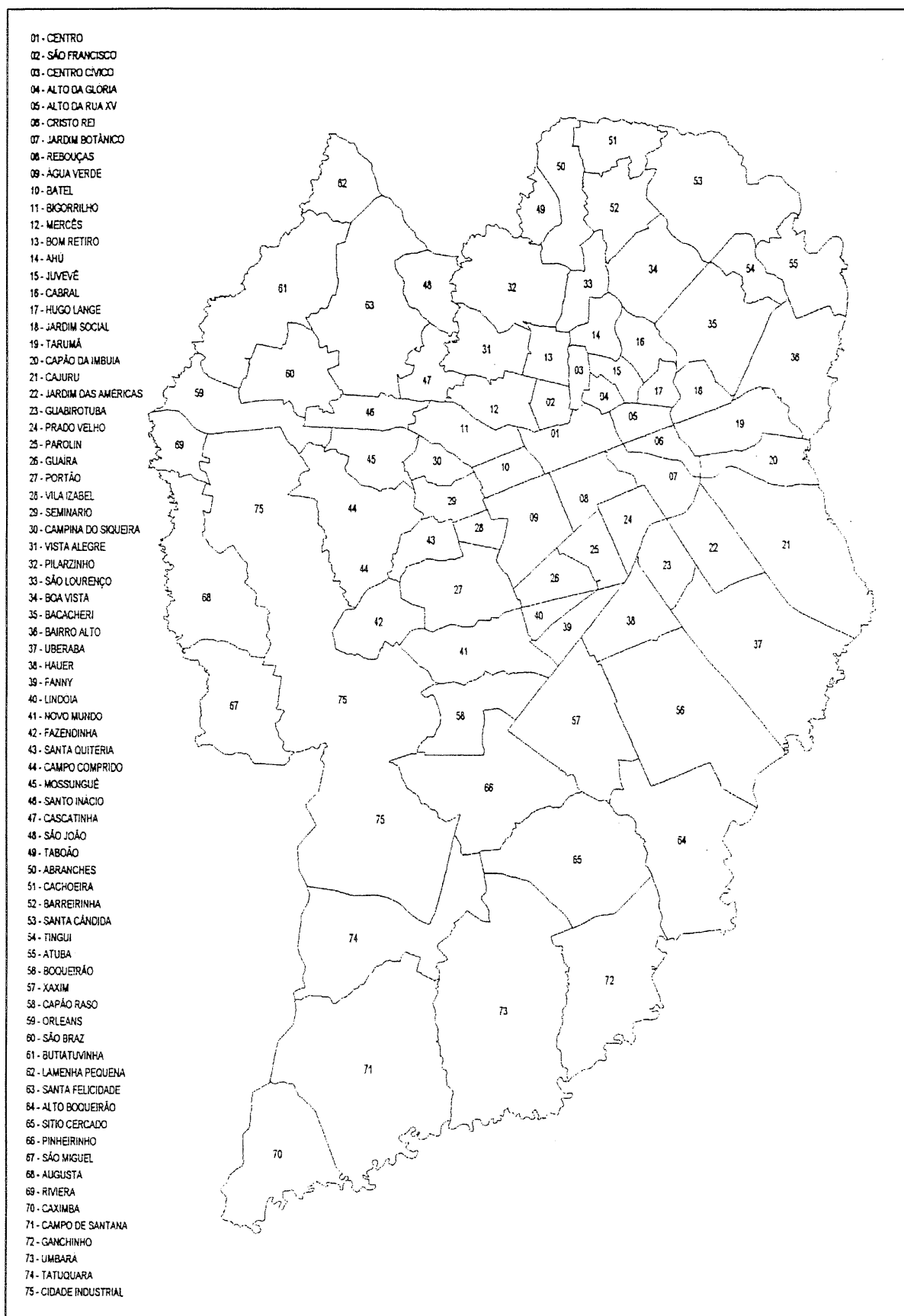


Figura 1: Bairros do município de Curitiba

## 1.6 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está estruturado em 5 capítulos.

Neste primeiro capítulo foram apresentados a origem do trabalho, a descrição do problema, os objetivos, a importância e as limitações do trabalho.

O segundo capítulo apresenta a revisão da literatura, onde são descritos outros trabalhos similares; a fundamentação teórica dos problemas de localização de facilidades (problema das medianas); o algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart; os algoritmos genéticos para resolução do problema das medianas; o diagrama de Voronoi, para se determinar áreas de proximidade das Unidades de Saúde 24 Horas.

O capítulo três apresenta a metodologia utilizada no presente trabalho, trazendo a implementação do algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart, dos algoritmos genéticos e da busca exaustiva como propostas para determinação de locais para implantação de Unidades de Saúde 24 Horas, assim como a implementação de um algoritmo para se determinar a construção do diagrama de Voronoi.

No quarto capítulo estão os resultados encontrados de acordo com cada um dos algoritmos abordados e os diagramas de Voronoi para os melhores resultados encontrados.

O quinto e último capítulo apresenta a discussão dos resultados encontrados, as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO II

### 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 2.1 Revisão da Literatura

Na literatura, os problemas de localização de facilidades são conhecidos como problemas dos centros e problemas das medianas. Em ambos os casos, o objetivo é a localização de facilidades ao longo de uma rede viária definida por um grafo. Nesta seção são apresentadas descrições de trabalhos publicados sobre localizações de instalações e de obras desenvolvidas sobre algoritmos genéticos.

Segundo MINIEKA (1977), com a possibilidade de a facilidade estar localizada em um vértice e/ou sobre uma aresta, torna-se necessário aqui distinguir dois conceitos: se as facilidades devem ser localizadas somente nos vértices, as localizações são chamadas medianas; se as facilidades podem ser localizadas sobre as arestas e nos vértices, as localizações são chamadas de medianas absolutas. Sendo  $p$  o número de facilidades a serem localizadas, tem-se assim, respectivamente, o problema das  $p$ -medianas e o problema das  $p$ -medianas absolutas.

As primeiras formulações do problema das  $p$ -medianas foram apresentadas em [HAKIMI, 1964] e [HAKIMI, 1965] onde demonstrou dois teoremas fundamentais para a obtenção de soluções para o problema das  $p$ -medianas. HAKIMI mostrou que existe pelo menos um conjunto  $V_p \subset V(G(V, A))$  é um grafo não orientado onde  $V$  é o conjunto dos vértices do grafo e  $A$  o conjunto das arestas) contendo exatamente  $p$  vértices do grafo que produz, para o problema, uma solução de menor valor (ou pelo menos igual) à solução produzida

por qualquer outro conjunto  $Y_p$  de vértices localizados nos arcos ou vértices do grafo  $G$ .

CHRISTOFIDES (1975), construiu um modelo matemático para o problema das  $p$ -medianas formulando este como um Problema de Programação Linear Inteiro Binário, que é descrito a seguir:

Seja  $[\xi_{ij}]$  uma matriz de alocações, onde:

$$\begin{cases} \xi_{ij} = 1, & \text{se o vértice } v_j \text{ é alocado ao vértice } v_i \\ \xi_{ij} = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um vértice  $x_i$  é dito vértice-mediana se, pelo menos um vértice  $x_j$  é alocado ao vértice  $x_i$ .

$$\begin{cases} \xi_{ii} = 1, & \text{se o vértice } v_i \text{ é um vértice-mediana} \\ \xi_{ii} = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja  $[d_{ij}]$  uma matriz de distâncias ponderadas, onde  $d_{ij}$  é o produto da distância entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$  ( $d(v_i, v_j)$ ) pelo peso  $w_j$ , sendo o peso  $w_j$  a demanda de cada vértice  $v_j$ , assim  $d_{ij} = w_j \cdot d(v_i, v_j)$

O problema, então, pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \xi_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i=1}^n \xi_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \xi_{ii} = p \quad (3)$$

$$\xi_{ij} \leq \xi_{ii} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\xi_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (5)$$

Quanto às restrições:

- a restrição (2) garante que todo vértice  $v_j$  é alocado a somente um vértice-mediana  $v_i$ ;
- a restrição (3) garante que existem exatamente  $p$  vértices-medianas;
- a restrição (4) garante que as alocações só podem ser feitas a vértices medianas;
- a restrição (5) impõe a integralidade, isto é,  $\xi_{ij}$  é variável binária, podendo assumir o valor 0 ou 1.

Se a restrição (5) do problema acima for escrita como  $\xi_{ij} \geq 0$ , o problema passa a ser um Problema de Programação Linear.

BEZERRA (1995) em seu trabalho apresenta uma metodologia aplicada ao extrativismo do babaçu, numa região do nordeste do Brasil, para localização de postos de apoio ao escoamento da produção de babaçu, visando racionalizar o trabalho de transporte entre o local de coleta e o local de processamento. Para a otimização do problema foram utilizados 3 (três) algoritmos: o algoritmo de Floyd para determinar as distâncias mínimas entre cada nó (total de 25 nós) que compõem a rede viária; o algoritmo das  $p$ -medianas de TEITZ e BART para a localização dos postos de coleta, e um algoritmo genético para determinar o roteiro para o problema do caixeiro viajante. Para avaliar as soluções obtidas neste problema de implantação dos postos de coleta, foi feita uma análise de viabilidade econômica. Com esta análise obteve-se como um bom resultado para a solução do problema 6 medianas (postos de coletas) (nós 20, 18, 11, 7, 6 e 25). A estas medianas está associado um valor (sigma) igual a 23.640,6 toneladas-km/ano, que representa o momento de transporte anual de amêndoas dentro do município de União-Pi relativo ao transporte entre os diversos nós da

rede e os pontos de coleta.

SAMPAIO (1999) utilizou a solução do problema das p-medianas capacitado para verificar a necessidade de ampliação ou redução da capacidade de escolas estaduais no município de Curitiba. Em relação ao problema das p-medianas, o problema das p-medianas capacitado possui as seguintes restrições adicionais: cada instalação pode suprir apenas um número limitado de demandas (restrições de capacidade); todos os pontos de demanda devem ser atendidos dentro das capacidades das respectivas instalações selecionadas como medianas.

Verificou-se a necessidade de ampliação ou redução da capacidade de 45 escolas estaduais, assim como a criação de novas escolas de acordo com a demanda, em uma região do município de Curitiba abrangendo 423 setores censitários (do total de 1500) do censo do IBGE de 1996, localizados no centro-sul da cidade, minimizando o caminho percorrido pelos alunos desde suas residências até à escola mais próxima, utilizando a técnica *Simulated Annealing* e algoritmo genético (*steady-state*), comparativamente, para resolver o problema.

Observou-se que se as escolas atuais (1996), tivessem a capacidade ideal, a distância média a ser percorrida pelos alunos seria de 909,80 metros. Como as capacidades não são ideais, sugeriu-se a ampliação de 4 das 45 escolas. De acordo com a melhor solução encontrada para a localização adequada de uma, duas, três, quatro e cinco novas escolas, têm-se: para uma escola, a distância média a ser percorrida pelos alunos a escola mais próxima é de 856,79m; para duas escolas, 818,88m; para três, 785,08m; para quatro, 756,75m; para cinco, 732,74m. A distância média de deslocamento dos alunos às escolas onde estão matriculados é umas das variáveis analisadas no planejamento de criação de

escolas. De acordo com a localização adequada de novas escolas, verifica-se que além da redução da distância percorrida pelo aluno desde sua residência até a escola mais próxima, têm-se: a redução do tempo gasto pelo aluno para chegar até a escola; maior satisfação por parte dos pais e alunos; menor utilização de automóveis e ônibus escolares, colaborando com o descongestionamento do trânsito no município e melhor aproveitamento das capacidades das escolas, assim como a criação de novas de acordo com a demanda.

CORREIA (2000) apresentou um trabalho sobre o problema de localização de facilidades, cujo problema é otimizar a designação de candidatos ao vestibular para os locais de provas mais próximos de suas residências. Este problema também é conhecido como problema das p-medianas capacitado. Para resolver este problema foram propostas duas heurísticas, uma baseada em um algoritmo genético simples que utiliza os operadores genéticos usuais e um operador heurístico chamado “hipermutação direcionada” (heurística denominada AGpMcap – algoritmo genético para o problema das p-medianas capacitado) e a outra heurística é baseada em busca tabu (heurística denominada BtpMcap – busca tabu para o problema das p-medianas capacitado). Considerou-se dois problemas: o primeiro, designar os 19.710 candidatos do vestibular 2001 da UFPR aos 26 locais de provas previamente selecionados pela CCCV (Comissão Central do Concurso Vestibular); o segundo, fazer a seleção de 26 locais de provas, dentre 43 locais disponíveis, de tal forma que a soma das distâncias percorridas pelos candidatos seja minimizada. Para o primeiro problema utilizou o algoritmo de designação denominado DeCan (Designação de candidatos), como resultado obteve: 55% do total de candidatos foram designados para o local mais próximo, 20% para o segundo local mais próximo e 25% para os demais. Para

selecionar 26 dos 43 locais disponíveis efetuando a designação dos candidatos utilizando a heurística AGpMcap, obteve-se: para o primeiro local mais próximo 83%, para o segundo 9% e 8% para os demais. Para o AGpMcap foram definidos os seguintes parâmetros: tamanho da população igual a 100, número de iterações igual a 1000, probabilidade de ocorrer mutação igual 1% e de ocorrer hipermutação direcionada igual a 0,5%, com tempo de processamento de 01:43:34. Usando a heurística BtpMcap foi definido o número máximo de iterações igual a 150 e número máximo de iterações sem melhoria na solução igual a 30, tempo de processamento 01:23:37, obteve: para o primeiro local mais próximo 82% dos candidatos, para o segundo 8% e 10% para os demais. Com base nos resultados obtidos nos testes computacionais, as duas heurísticas desenvolvidas demonstraram que é possível otimizar de forma bem sucedida a seleção dos locais de provas onde os candidatos do vestibular deverão realizar provas.

GALVÃO e CHIYOSHI (2000) apresentaram uma análise estatística do *simulated annealing* aplicado ao problema das p-medianas. O algoritmo usado combina elementos do método de substituição de vértices de Teitz e Bart com a metodologia geral de *simulated annealing*. Para os testes computacionais foram usados problemas testes que possuem de 100 a 900 vértices, retirados de BEASLEY (1990). Cada problema foi executado 100 vezes com diferentes entradas de números aleatórios. Foram encontradas soluções ótimas para 26 de 40 problemas testados. A pior diferença em relação à solução ótima foi 1,62%, após todas execuções de cada problema teste considerado. A melhor diferença média para a solução ótima foi 0,008% e a pior diferença média foi 0,55%.

LORENA *et al.* (2001) apresentaram um trabalho onde relatam a integração de um modelo de localização de p-medianas aos SIGs (Sistemas de Informações Geográficas), ArcView da ESRI (*Environmental Systems Research Institute*) e SPRING, um sistema desenvolvido no INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais). O trabalho apresenta alguns testes computacionais usando dados do município de São José dos Campos, com tamanhos variando até o máximo de 3.282 nós e 1.141 medianas. O problema das p-medianas considerado neste trabalho foi modelado como um Problema de Programação Linear Inteiro igual à modelagem apresentada por CHRISTOFIDES (1975).

Foi utilizada a heurística conhecida como relaxação lagrangeana/*surrogate* usada para resolver de forma aproximada o problema. Uma discussão sobre as relaxações lagrangeana e *surrogate* pode ser encontrada em [PARKER e RARDIN, 1988]. Para os testes, foi utilizado um microcomputador MMX, 233MHz com 128MB de RAM e foram utilizados dados correspondentes às quadras da região central da cidade de São José dos Campos. Um resumo dos resultados dos testes está apresentado na tabela 1. Nesta tabela, N é o número de nós da rede (quadras da região central do município de São José dos Campos); P é o número de medianas; T é o tempo computacional (em segundos). Os tempos computacionais excluem o tempo para estabelecer a matriz de distâncias.

Tabela 1: Resultado dos testes computacionais

N	P	T
324	5	4,72
	108	7,84
818	5	102,66
	272	85,58
3282	5	1.699,88
	1141	1.526,76

Fonte: LORENA *et al.* (2001).

Neste trabalho discutiu-se a integração, conforme mencionado, de um modelo de localização de  $p$ -medianas aos SIGs. O código integrado a estes SIGs implementa uma abordagem recente da heurística lagrangeana/*surrogate* que tem se mostrado eficiente em diversas classes de otimização combinatória. Testes computacionais usando dados do município de São José dos Campos demonstram a efetividade do algoritmo proposto para utilização em sistema de apoio à decisão usando Sistemas de Informações Geográficas.

## 2.2 Métodos exatos e heurísticos

A classificação de algoritmos em termos de complexidade é feita utilizando-se o conceito de limitação polinomial. Algoritmo polinomial (ou pertencentes à Classe-P), são aqueles em que o número de operações elementares necessárias para a obtenção da solução ótima de um dado problema é limitado, no pior caso, por uma função polinomial do tamanho do problema. Os problemas para os quais não se conhecem algoritmos polinomiais capazes de obter a solução exata para os mesmos, são classificados como NP-completos (ou NP-*hard*), e são considerados complexos e de difícil tratamento.

O problema das  $p$ -medianas é um exemplo típico de problema NP-*hard* para um sistema com muitos vértices [SAMPAIO, 1999]. Portanto, os algoritmos exatos são utilizados apenas em soluções de problema de pequeno porte. Para problemas de maiores portes usam-se métodos heurísticos.

O método de enumeração exaustiva é um método exato que consiste em avaliar cada possibilidade (uma a uma) até que seja encontrada a solução ótima

do problema. Este método foi utilizado por HAKIMI (1965) para determinar 3 medianas em um grafo com 10 vértices.

Os algoritmos heurísticos, ou simplesmente heurísticas, se caracterizam pela sua flexibilidade e têm como objetivo encontrar soluções de boa qualidade num tempo computacional satisfatório.

Os anos 80 marcaram o surgimento de artigos sobre novos métodos heurísticos com ferramentas adicionais para tentar superar as limitações das heurísticas convencionais. Dentre as várias técnicas produzidas para tentar reduzir os riscos de encontrar apenas extremos locais (máximos ou mínimos locais), destacam-se: as Redes Neurais Artificiais, *Simulated Annealing*, *Tabu Search* e a Computação Evolutiva incluindo: os Algoritmos Genéticos (AGs) inicialmente propostos por HOLLAND (1975), a Programação Genética, proposta por KOZA (1992), e a Programação Evolutiva proposta por FOGEL *et al.* (1966).

Embora com filosofias distintas, estes métodos heurísticos possuem em comum características que os distinguem das heurísticas convencionais, como, por exemplo, incluir ferramentas para tentar escapar das “armadilhas” dos extremos locais.

## **2.3 Problemas de Localização de Facilidades**

Segundo DASKIN (1995) os problemas de localização de facilidades tratam de decisões sobre onde devem ser localizadas facilidades, considerando clientes que podem ser servidos de forma a otimizar um certo critério. Este critério pode ser: as distâncias dos deslocamentos dos usuários de Unidades de Saúde desde suas residências a Unidade de Saúde mais próxima; o custo para transportar produtos de fábricas a depósitos, entre outros. O termo facilidades pode ser

substituído por fábricas, depósitos, escolas, unidades de saúde, creches e outros, enquanto que clientes se referem a depósitos, unidades de vendas, estudantes, usuários de unidades de saúde e outros.

As aplicações do problema de localização de facilidades no setor público procuram maximizar a satisfação dos clientes em detrimento dos custos necessários para o alcance de tal objetivo [LORENA *et al.*, 2001]. Exemplos de aplicação em setores públicos são as localizações de escolas, postos de saúde, corpo de bombeiros, ambulâncias, viaturas de polícia, pontos de ônibus, entre outros.

Os problemas de localização de facilidades consistem em encontrar a melhor localização para uma ou mais facilidades de serviços em uma certa área. Estes problemas estão divididos em 2 subproblemas básicos, conhecidos como problema dos centros e problema das medianas.

No problema dos centros, o objetivo é minimizar a distância até o ponto mais crítico, ou seja, minimizar a maior distância a ser percorrida. Este problema consiste em determinar pontos de localização como, por exemplo, de corpo de bombeiros, de viaturas de polícia e outros, cujos serviços precisam se deslocar aos pontos de demanda (clientes).

No problema das medianas, o objetivo é minimizar a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda à facilidade mais próxima. Este problema consiste em determinar pontos de localização como, por exemplo, de escolas, de unidades de saúde e outros, cujas demandas (clientes) precisam se deslocar aos pontos de localização de facilidades para utilizarem seus serviços.

Segundo DREZNER (1995) a solução do problema das p-medianas maximiza a acessibilidade ao serviço na medida em que a distância afeta tal

acesso.

### 2.3.1 O problema das p-medianas

O problema das p-medianas é um problema clássico de localização de facilidades e consiste em determinar a localização, em uma rede, de p facilidades (medianas) de um conjunto pré-definido n ( $n > p$ ) minimizando-se a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda à sua mediana mais próxima.

Têm sido desenvolvidos para o problema das p-medianas métodos heurísticos e métodos que exploram uma busca em árvore [MARANZANA, 1964], [TEITZ e BART, 1968], *branch-and-bound* [JARVINEN e RAJALA, 1972], [NEEBE, 1978], a heurística *simulated annealing* [GALVÃO e CHIYOSHI, 2000], técnicas baseadas em relaxação lagrangeana e otimização de sub-gradientes [BEASLEY, 1985], [BEASLEY e CHIYOSHI, 1993] e heurística lagrangeana/*surrogate* [LORENA, 2001].

Suponha que se queira construir algumas Unidades de Saúde 24 Horas e que se tenha algumas opções de localização, surgindo assim uma pergunta: "*Quais as melhores localizações para se implantar as Unidades de Saúde 24 Horas a fim de que as distâncias percorridas pelos usuários sejam mínimas, observado o sistema viário?*". Esta pergunta caracteriza um problema das p-medianas que é escolher um número p de medianas (unidades de saúde), de um total de n facilidades e otimizar a soma das distâncias de cada facilidade à mediana (unidade) mais próxima [ROSÁRIO, 2001].

### 2.3.2 Definição do problema das p-medianas

O problema das p-medianas pode ser definido da seguinte forma:

Seja  $G(V, A)$  um grafo não orientado onde  $V$  é o conjunto dos vértices do grafo e  $A$  é o conjunto das arestas. Deve-se encontrar um conjunto de vértices  $V_p \subset V$  ( $V_p$  é o conjunto das medianas do problema) com cardinalidade  $p$ , tal que a soma das distâncias de cada vértice pertencente a  $V$  até seu vértice mais próximo em  $V_p$  seja a mínima possível.

Será abordado, a seguir, o algoritmo das p-medianas proposto por Teiz e Bart para determinar a solução do problema das p-medianas.

### 2.3.3 Algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART

O algoritmo das p-medianas proposto por TEITZ e BART (1968), é um método aproximado para a determinação de  $p$  medianas entre  $n$  vértices (facilidades) candidatos à mediana do problema, baseado na substituição de vértices.

Antes da descrição do algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART é necessário definir número de transmissão.

#### 2.3.3.1 Número de transmissão

Seja  $G(V, A)$  um grafo;  $v_i \in V$ . Se  $G$  é um grafo orientado, segundo CHRISTOFIDES (1975), tem-se que:

- número de *out-transmission* é a distância total a ser percorrida desde o vértice  $v_i$  a todos os outros vértices do grafo, e é dado por:

$$\sigma_o(v_i) = \sum_{v_j \in V} w_j \cdot d(v_i, v_j) \quad (6)$$

onde  $\sigma_o(v_i)$  é o número de *out-transmission* do vértice  $v_i$ ;  $d(v_i, v_j)$  é a distância entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$ ;  $w_i$  é o peso associado ao vértice  $v_i$ ;

– número de *in-transmission* é a distância total percorrida a partir de todos os vértices do grafo até o vértice  $v_i$ , e é dado por:

$$\sigma_i(v_i) = \sum_{v_j \in V} w_j \cdot d(v_j, v_i) \quad (7)$$

onde  $\sigma_i(v_i)$  é o número de *in-transmission* do vértice  $v_i$ ;  $w_j$  é o peso associado ao vértice  $v_j$ .

Um vértice  $\bar{v}_o$  é *out-median* se, entre todos os vértices do grafo, é aquele que produz a menor distância total desde si próprio até todos os outros vértices, ou seja [SAMPAIO, 1999]:

$$\sigma_o(\bar{v}_o) = \min_{v_i \in V} [\sigma_o(v_i)] \quad (8)$$

Um vértice  $\bar{v}_i$  é *in-median* se, entre todos os vértices do grafo, é aquele que produz a menor distância total desde todos os outros vértices até si próprio, ou seja:

$$\sigma_o(\bar{v}_i) = \min_{v_i \in V} [\sigma_i(v_i)] \quad (9)$$

Para o problema de se encontrar  $p$ -medianas generaliza-se os conceitos de *out-transmission* e *in-transmission*, considera-se  $V_p$  um subconjunto de  $V$ , com cardinalidade  $p$ , ou seja,  $|V_p| = p$  e define-se [NUNES, 1998]:

$$d(V_p, v_j) = \min_{v_i \in V_p} [d(v_i, v_j)] \quad (10)$$

$$e \quad d(v_j, V_p) = \min_{v_i \in V_p} [d(v_j, v_i)] \quad (11)$$

onde  $d(V_p, v_j)$  representa a menor distância entre as distâncias de todos os vértices de  $V_p$  ao vértice  $v_j$ ;  $d(v_j, V_p)$  representa a menor distância entre as distâncias do vértice  $v_j$  aos vértices pertencentes a  $V_p$ .

De forma análoga às definições de *out-transmission* e *in-transmission*, tem-se os números:

$$\sigma_o(V_p) = \sum_{v_j \in V} w_j \cdot d(V_p, v_j) \quad (12)$$

$$e \quad \sigma_i(V_p) = \sum_{v_j \in V} w_j \cdot d(v_j, V_p) \quad (13)$$

que representam, respectivamente, os números de *out-transmission* e *in-transmission* do conjunto  $V_p$ .

E, analogamente, um conjunto de  $p$  vértices é *p-out-median* se, entre todos os outros conjuntos de  $p$  vértices do grafo, é aquele que produz a menor distância total desde si próprio até todos os outros vértices, ou seja:

$$\sigma_o(\overline{V_{po}}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_o(V_p)] \quad (14)$$

Um conjunto de  $p$  vértices é *p-in-median* se, entre todos os outros conjuntos de  $p$  vértices do grafo, é aquele que produz a menor distância total desde todos os outros vértices até si próprio, ou seja:

$$\sigma_i(\overline{V_{pi}}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_i(V_p)] \quad (15)$$

A *p-in-median* e a *p-out-median* se equivalem e também os números de *in-transmission* e *out-transmission*. Assim, daqui para frente esses números serão tratados apenas por número de transmissão.

Portanto, o objetivo do problema das *p*-medianas é achar um conjunto  $V_p \in V$  em que o número de transmissão seja mínimo.

### 2.3.3.2 Teorema [CHRISTOFIDES, 1975]

Existe pelo menos um subconjunto  $V_p$  que está contido em  $V$  contendo  $p$  vértices, para o qual  $\sigma(V_p) < \sigma(Y_p)$ , para qualquer conjunto  $Y_p$  arbitrário de  $p$  pontos nos arcos ou nos vértices do grafo  $G(V, E)$ .

A prova deste teorema para  $p = 1$  encontra-se em CHRISTOFIDES (1975), e que pode ser generalizada para qualquer  $p$ . Assim, conclui-se que a solução ótima para o problema das *p*-medianas encontra-se em um subconjunto de vértices de  $V$ . Deste modo, não será preciso considerar a possibilidade de implantação de uma ou mais facilidades ao longo dos arcos.

### 2.3.3.3 Descrição do algoritmo das *p*-medianas de TEITZ e BART (1968)

Escolhe-se, inicialmente,  $p$  vértices para formar um conjunto  $S$  inicial, o qual é considerado uma aproximação do conjunto  $V_p$  das *p*-medianas. Sendo  $V$  o conjunto de todos os vértices do grafo, verifica-se se pode haver um vértice  $v_i$  pertencente ao conjunto  $V - S$  que possa substituir um vértice  $v_j$  pertencente a  $S$  e produzir um novo conjunto  $S'$ , onde:

$$S' = S \cup \{v_i\} - \{v_j\} \quad (16)$$

para o qual o número de transmissão  $\sigma(S') < \sigma(S)$ . Se isto for possível, é feita a substituição de  $v_j$  por  $v_i$  e  $S'$  é uma nova aproximação para o conjunto  $V$ . O processo continua até obter-se um conjunto  $S_{\text{médio}}$ , onde nenhuma substituição de vértice de  $S_{\text{médio}}$  por outro vértice em  $V - S_{\text{médio}}$  produz um número de transmissão menor.

A seguir estão descritos os passos do algoritmo das  $p$ -medianas de Teitz e Bart.

**Passo 0.** Selecione um conjunto  $S$ , com  $|S| = p$  para formar uma aproximação inicial para as  $p$ -medianas;

**Passo 1.** Rotule todos os vértices  $v_j$  pertencente a  $V - S$  como "não analisados".

**Passo 2.** Enquanto existirem vértices "não analisados" em  $V - S$ , faça:

- a) Selecione um vértice  $v_i$  pertencente a  $V - S$ , "não analisado", e calcule a redução  $A$ , do número de transmissão, para todo  $v_j$  pertencente a  $S$ :

$$A_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\}); \quad (17)$$

- b) Faça  $A_{ij_0} = \max[A_{ij}]$ ;
- c) Se  $A_{ij_0} > 0$ , faça  $S = S \cup \{v_i\} - \{v_{j_0}\}$  e rotule  $v_{j_0}$  como "analisado";
- d) Se  $A_{ij_0} \leq 0$ , rotule  $v_i$  "analisado".

**Passo 3.** Se durante a execução do **Passo 2** houver alguma modificação no conjunto  $S$ .

Volte ao **Passo 1**.

Senão

PARE, e apresente o conjunto  $S$  como uma aproximação para a solução do problema das  $p$ -medianas.

## 2.4 Algoritmo Genético (AG)

### 2.4.1 Introdução de Algoritmos Genéticos

Na natureza, o processo evolutivo ocorre quando as quatro seguintes condições são satisfeitas [KOZA, 1992]:

- uma entidade tem a habilidade para reproduzir-se;
- existe uma população de tais entidades auto-reprodutoras;
- existe alguma variedade entre as entidades auto-reprodutoras;
- alguma diferença na habilidade para sobreviver no meio ambiente está associada com a variedade.

Na natureza, a variedade é manifestada como variação nos cromossomos das entidades da população. Esta variação é transferida para a estrutura e para o comportamento das entidades em seu ambiente. A variação na estrutura e no comportamento é refletida pelas diferenças na taxa de sobrevivência e reprodução. As entidades que são mais hábeis para realizar tarefas em seu ambiente sobrevivem e reproduzem-se em uma taxa elevada; entidades menos hábeis sobrevivem e reproduzem-se em uma taxa baixa. Este é o conceito de sobrevivência e seleção natural [DARWIN, 1982]. Em um grande período de tempo e muitas gerações, a população como um todo chega a conter mais indivíduos cujos cromossomos são traduzidos em estruturas e comportamentos que permitam aqueles indivíduos melhorarem a realização de suas tarefas no seu ambiente, assim como sobreviver e reproduzir. Portanto, com um excessivo tempo, a estrutura dos indivíduos na população modifica por causa da seleção natural. Quando são vistas estas visíveis e mensuráveis diferenças na estrutura

que surgiu de diferenças na aptidão, diz-se que a população tem evoluído [KOZA, 1992].

Os AGs foram criados por John Holland no final da década de 60 buscando inspiração no que se conhece sobre o processo de evolução natural, conhecimento este iniciado com a teoria da evolução de Darwin. Ele [HOLLAND, 1975] estava interessado no estudo de sistemas adaptativos complexos, biológicos ou não.

Os AGs simulam o processo evolutivo Darwiniano e naturalmente ocorrem operações genéticas nos cromossomos [KOZA, 1992]. Na natureza, os cromossomos são *strings* (fileiras) de caracteres em alfabeto de base 4. As quatro bases de nucleotídeos que aparecem ao longo da extensão da molécula de DNA são: adenina, citosina, guanina e tiamina. Esta seqüência de bases de nucleotídeos constitui a *string* dos cromossomos ou o genoma de um indivíduo biológico.

Os AGs têm se destacado na solução de uma gama de problemas devido a sua simplicidade e sua facilidade em resolver problemas sem exigir um excessivo conhecimento prévio destes.

Os AGs formam uma classe de ferramentas muito versátil e robusta e que podem ser utilizados na solução de problemas de otimização ainda que não devam ser considerados estritamente minimizadores de funções [DE JONG, 1992].

Quando usados como algoritmos de minimização, os AGs se distinguem das técnicas mais comuns de programação matemática basicamente por [BARBOSA, 1997]:

- empregar uma população de indivíduos, ou soluções;

- trabalhar sobre uma codificação das possíveis soluções (genótipos) e não sobre as soluções (fenótipos) propriamente ditas;
- empregar regras de transição probabilísticas;
- não requerer informações adicionais sobre a função a otimizar.

É de se ressaltar também que os AGs não são facilmente “aprisionados” a mínimos (máximos) locais como é o caso dos algoritmos usuais de programação matemática.

Sem afirmar que esta é a melhor definição possível, TANOMARU (1995) arrisca a seguinte definição para AGs: *“Algoritmos Genéticos (AGs) são métodos computacionais de busca baseados nos mecanismos de evolução natural e na genética. Em AGs, uma população de possíveis soluções para o problema em questão evolui de acordo com operadores probabilísticos concebidos a partir de metáforas biológicas, de modo que há uma tendência de que, na média, os indivíduos representem soluções cada vez melhores à medida que o processo evolutivo continua”*.

#### **2.4.2 Representação e Codificação**

A primeira etapa para se resolver um dado problema utilizando um AG consiste no estabelecimento de um esquema de codificação/representação para cada elemento do espaço de busca em questão já que os AGs não operam sobre tais elementos diretamente e sim sobre uma codificação dos mesmos [BARBOSA, 1997]. Utilizando a terminologia da Genética, cada elemento do espaço de busca é um fenótipo correspondente a realização de um dado código: o seu genótipo. Matematicamente, a escolha da codificação para um dado problema é a escolha da função ou regra que associa os elementos do espaço dos genótipos com

aqueles do espaço de busca, os fenótipos.

A forma mais comum de construção de uma codificação corresponde a uma cadeia de comprimento  $\ell$ , formada de caracteres tomados de um dado alfabeto. O caso mais comum é o binário, onde o alfabeto é composto dos símbolos 0 e 1. Assim, a cadeia 1011011 poderia representar uma possível solução de um certo problema. Neste caso, têm-se  $\ell = 7$  e o conjunto dos genótipos é formado por todos os números binários de 0000000 a 1111111 contendo portanto  $2^\ell = 2^7 = 128$  elementos. A codificação é a regra que associa a cada uma destas cadeias/números binários uma solução que pode ser uma variável real, inteira, ou outros [BARBOSA, 1997].

Pode-se associar mais de um cromossomo a cada indivíduo. O homo sapiens é diplóide, isto é, possui  $2n$  cromossomos. Uma grande quantidade das aplicações de AGs utiliza indivíduos haplóides, ou seja, indivíduos que possuem  $n$  cromossomos, sendo que a maioria dos AGs trabalha com  $n$  igual a 1, ou seja, um cromossomo apenas. Resumindo, o genótipo é composto de um ou mais cromossomos que são compostos de genes; construídos cada um por uma subcadeia de símbolos pertencentes ao alfabeto utilizado.

Em muitas aplicações é suficiente o uso de uma representação estática, isto é, de tamanho fixo, seja ela um vetor, matriz, etc.

Para a representação no caso mais simples, usa-se o alfabeto binário, mas no caso geral a representação depende de cada problema [TANOMARU, 1995].

### **2.4.3 Inicialização**

No processo de inicialização constrói-se a população inicial que é quase

sempre realizada aleatoriamente utilizando-se um gerador de números pseudo-aleatórios. No caso de codificação binária é simples se obter uma boa distribuição de zeros e uns para constituição da população inicial, observando a factibilidade de cada indivíduo, mas à medida que aumenta a cardinalidade do alfabeto empregado na codificação a codificação pode se tornar mais difícil.

#### **2.4.4 Função Aptidão**

A função aptidão é a responsável pelo processo de escolha dos indivíduos e deve indicar a qualidade de cada indivíduo/solução na população. Para o caso de otimização, ela está intimamente ligada à função objetivo que se deseja minimizar ou maximizar [BARBOSA, 1997].

Avaliar um indivíduo num AG significa determinar o seu nível de aptidão de sobrevivência, ou seja, num AG sobrevivem prioritariamente os indivíduos mais aptos. Assim, os indivíduos mais aptos têm maiores chances de sobreviver no ambiente e reproduzir-se, passando parte de seu material genético a gerações posteriores [TANOMARU, 1995].

A função aptidão é uma função matemática representativa do problema (ambiente onde a população de indivíduos está inserida).

Geralmente o valor atribuído a cada indivíduo, após tê-lo submetido à função aptidão, é o próprio valor resultante da função aptidão. Este valor representa o grau de adaptação do indivíduo ao ambiente em questão (função aptidão) [DIAS e BARRETO, 1998].

### 2.4.5 Esquema de Seleção

A seleção basicamente tem por objetivo fazer com que os indivíduos mais aptos da geração anterior tenham maior probabilidade de participarem do processo que irá gerar a nova população [DIAS e BARRETO, 1998].

Diversos esquemas de seleção já foram criados, analisados e implementados na prática de AGs mas, por simplicidade, apenas alguns desses esquemas serão aqui abordados.

Segundo BARBOSA (1997), vale comentar que um esquema de seleção pode ser enquadrado em uma das seguintes categorias:

- seleção estabilizante, também chamada normalizante, tende a eliminar indivíduos com valores extremos de aptidão;
- seleção direcional, que tem o efeito de aumentar (ou diminuir, em caso de minimização) a aptidão média da população e é usada na grande maioria dos AGs;
- seleção perturbante, que tende a eliminar os indivíduos moderados de aptidão.

Será abordado apenas o esquema direcional utilizado neste trabalho.

Supondo um problema de maximização, uma das técnicas de seleção empregadas em AGs estabelece que a probabilidade  $p_i$  do  $i$ -ésimo indivíduo da população vir a ser selecionado para reprodução é proporcional à sua aptidão relativa. Este esquema é conhecido como método da roleta (conhecido como roleta simples) ou método de seleção proporcional com reposição estocástica. Uma possível implementação corresponde a tomar:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^n f_j} \quad (18)$$

onde  $f_i$  é o valor da função aptidão do indivíduo  $i$ ;  $n$  é o número de indivíduos da população. Este método é conhecido como método da roleta ou método de seleção proporcional com reposição estocástica.

Outra idéia é abandonar a magnitude da função aptidão de cada indivíduo e utilizar somente a posição relativa (o *ranking*) de cada indivíduo na população. Assim, mantendo a população ordenada por valores decrescentes da função aptidão, a probabilidade de seleção de um indivíduo para a etapa de recombinação cresce com seu *ranking*: o primeiro do *ranking* tem maior probabilidade de seleção. Este método é conhecido como método do *ranking* linear. Este foi o método utilizado no presente trabalho.

Em certos tipos de aplicações uma outra idéia é utilizada: o torneio. Num esquema de seleção via torneios,  $k$  indivíduos são sorteados aleatoriamente na população e o vencedor do torneio (aquele de maior aptidão entre os  $k$  indivíduos) é selecionado. Este método é conhecido como torneio estocástico de tamanho  $k$ .

#### 2.4.6 Operadores Genéticos

Ao se definir a representação dos indivíduos da população é possível construir operadores genéticos que, atuando sobre os genótipos, produzam novos indivíduos.

Basicamente há dois tipos de operadores genéticos, recombinação e mutação. A recombinação explora a bagagem genética já existente nos pais, ou seja, faria uma busca local. A mutação tem a função de repor o material genético

perdido em gerações anteriores e também a introdução de material inexistente [DIAS e BARRETO, 1998].

#### 2.4.6.1 Operadores de recombinação

Os operadores de recombinação visam promover a recombinação do material genético de (pelo menos) dois “pais” para a geração de um ou dois “filhos” que serão avaliados posteriormente. Tais operadores são também conhecidos na literatura inglesa como operadores de *crossover*, termo oriundo da Genética.

##### 2.4.6.1.1 Crossover simples

Através de um esquema de seleção, dois indivíduos são escolhidos e, com uma probabilidade  $p_c$ , são submetidos à operação de recombinação. Uma posição de *crossover* é sorteada e o material genético dos “pais” é recombinado conforme a figura 2:

Pai 1	23	2	54	3	11	filho 1	23	2	54	66	50
Pai 2	62	33	4	66	50	filho 2	62	33	4	3	11

Figura 2: *Crossover* simples.

onde o “pai1” e o “pai2” dão origem ao “filho1” e ao “filho2”, com a posição de *crossover*, neste exemplo, entre o terceiro e o quarto gene dos cromossomos.

##### 2.4.6.1.2 *Crossover* de dois pontos

Nesta operação dois pontos de *crossover* são sorteados e o material

genético entre estes dois pontos é recombinação, como na figura 3:

Pai 1	23	2	54	3	11	filho 1	23	33	4	66	11
Pai 2	62	33	4	66	50	filho 2	62	2	54	3	50

Figura 3: *Crossover* de dois pontos

#### 2.4.6.1.3 *Crossover* uniforme

Com a mesma idéia do *crossover* de dois pontos verifica-se que o número de pontos de *crossover* pode aumentar, mas é comum usar *crossover* de um ou dois pontos. Um outro tipo de *crossover* é o *crossover* uniforme. Para a sua definição é conveniente introduzir o conceito de “máscara” para um *crossover* que permitirá também a descrição unificada de todos os outros tipos de *crossover* (1, 2, ..., n pontos).

Uma máscara de *crossover* é simplesmente uma cadeia de bits, de mesmo comprimento do cromossomo, que indicará também a ocorrência ou não da troca de material genético naquela posição da cadeia. Assim, a máscara  $m$  com uma seqüência 1 0 0 0 1 (por exemplo), indica que o primeiro e o último genes serão trocados, de acordo com a figura 4:

Pai 1	45	7	12	4	19
Pai 2	22	57	29	10	8
$m$	1	0	0	0	1
filho 1	22	7	12	4	8
filho 2	45	57	29	10	19

Figura 4: *Crossover* uniforme

### 2.4.6.2 Operador de mutação

O operador de mutação age sobre um dado indivíduo da população, produzindo uma alteração no seu genótipo dando origem a um novo fenótipo também modificado a ser avaliado posteriormente.

A operação de mutação proporciona uma forma de exploração do espaço de busca já que ela gera novos indivíduos, a serem avaliados, que podem revelar novas regiões promissoras no espaço de busca.

Utiliza-se o termo mutação como sinônimo de troca simples. No exemplo, a seguir, tem-se a mutação de um indivíduo, onde trocou-se o bit 1 pelo bit 0 no ponto de mutação (figura 5).

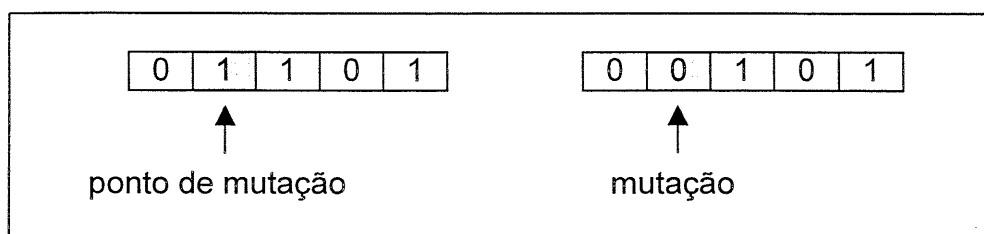


Figura 5: mutação (troca simples)

### 2.4.7 Parâmetros de um AG

É importante também analisar de que maneira alguns parâmetros influenciam no comportamento dos AGs, para que se possam ser estabelecidos conforme as necessidades do problema e dos recursos disponíveis.

O número de indivíduos da população, a probabilidade de ocorrer recombinação ( $p_{rec}$ ) e a probabilidade de acontecer mutação ( $p_m$ ) são os parâmetros de controle do AG [DIAS e BARRETO, 1998], assim como o número de gerações.

Quanto maior a probabilidade de recombinação mais rapidamente novas estruturas serão introduzidas na população. Com uma probabilidade de mutação muito alta a busca se torna essencialmente aleatória. Bons resultados geralmente são obtidos com valores baixos para a probabilidade de mutação, o qual introduz e mantém a diversidade genética da população [CORRÊA, 2000].

Através de estudos empíricos [DE JONG, 1975] mostrou que bons resultados normalmente são obtidos com alto valor de recombinação ( $p_{rec} \geq 0,7$ ), baixo valor para mutação (geralmente  $p_m \leq 0,01$ ), número de indivíduos entre 50 e 200 e o número máximo de gerações igual a 100.

#### 2.4.8 Pseudocódigo de um AG

Um pseudocódigo genérico capaz de englobar a maioria dos AGs existentes seria [BARBOSA, 1997]:

##### **Algoritmo Genético genérico**

Inicialize a população

Avalie indivíduos na população

##### **Repita**

    Selecione indivíduos para reprodução

    Aplique os operadores de recombinação e mutação

    Selecione indivíduos para sobreviver

**Até** critério de parada satisfeita

##### **Fim**

onde os verbos utilizados, inicialize, avalie, selecione e aplique são, propositalmente, ainda insuficientes para definir um algoritmo computacional único.

No que diz respeito à forma pela qual os indivíduos criados são inseridos na população, considera-se dois tipos extremos de AGs [BARBOSA, 1997].

Um extremo é o que pode ser chamado AG generacional, onde toda a população é substituída por novos indivíduos gerados pelo processo de seleção seguida da aplicação dos operadores genéticos:

### **Algoritmo Genético generacional**

Inicialize a população P aleatoriamente

Avalie indivíduos na população P

#### **Repita**

##### **Repita**

Selecione 2 ou mais indivíduos em P

Aplique operador de recombinação com probabilidade  $p_c$

Aplique operador de mutação com probabilidade  $p_m$

Insira novos indivíduos em P'

**Até** população P' completa

Avalie indivíduos na população P'

$P \leftarrow P'$

**Até** critério de parada satisfeita

#### **Fim**

Como toda geração (de “pais”) é integralmente substituída por outra mais nova (de “filhos”) – não há convivência – corre-se o risco de se perder um bom indivíduo neste processo. Assim, especialmente em problemas de otimização, um procedimento freqüentemente incluído neste algoritmo é o elitismo, ou seja, o(s) melhor(es) indivíduo(s) de uma geração é(são) preservado(s): uma cópia é passada diretamente à geração seguinte.

O outro extremo de AG é conhecido na literatura como “*steady-state*”: apenas um indivíduo é criado de cada vez. Em seguida ele é avaliado e, de acordo com alguma estratégia, ele é inserido ou não na população, vindo a substituir algum outro indivíduo. A estratégia de inserção pode ser: o indivíduo é inserido se for melhor do que o pior existente. A estratégia de substituição pode ser: substituir o pior de todos, por exemplo. Num AG *steady-state* a população é ordenada de acordo com a qualidade de cada solução: o seu *ranking*.

Um pseudocódigo seria [BARBOSA, 1997]:

### **Algoritmo Genético *steady-state***

Inicialize a população P aleatoriamente

Avalie indivíduos na população P

Ordene a população P de acordo com a aptidão

#### **Repita**

    Selecione operador genético

    Selecione indivíduo(s) para reprodução

    Aplique operador genético

    Avalie indivíduo(s) gerado(s)

    Selecione indivíduo f (dentre os gerados) para sobreviver

**Se f é melhor que o pior indivíduo de P Então**

        Remova o pior indivíduo da população

        Insira f em P de acordo com seu *ranking*

**Até** critério de parada satisfeita

**Fim**

## 2.5 Diagrama de Voronoi

### 2.5.1 Introdução ao diagrama de Voronoi

Imagine que estejam marcados em um mapa de Curitiba os locais onde estão (ou deveriam estar) implantadas Unidades de Saúde 24 horas, e que se queira determinar qual a área de cobertura de cada uma das unidades. Bastaria descobrir os conjuntos de pontos que estão mais próximos de cada unidade que se obteria uma solução para o problema.

Essa solução nada mais é que o Diagrama de Voronoi. Um dos principais recursos de que se dispõe para resolver problemas que envolvem o conceito de proximidade de um objeto no plano é o diagrama de Voronoi. Este diagrama é uma estrutura geométrica que foi inicialmente estudada pelos matemáticos Gauss e Dirichlet em meados do século XIX, e aprimorada pelo russo Voronoi em 1908.

O diagrama de Voronoi é uma estrutura geométrica muito versátil para fragmentar o espaço. Este tipo de diagrama pode ser utilizado em diversos campos, tais como geografia social, astronomia, física, robótica entre outros [BERG, 1997].

O diagrama de Voronoi é formado com base na seguinte regra: dado um conjunto de locais (pontos) no plano, associar a cada local a região do plano mais próxima dele do que de qualquer outro. Desta forma, várias perguntas podem ser respondidas sobre proximidade: qual local está mais próximo de um ponto dado?; qual a maior região desocupada?; qual é o vizinho mais próximo de um local?, e outras.

A seguir será apresentada a definição formal e as propriedades básicas do diagrama de Voronoi.

## 2.5.2 Definição e propriedades do diagrama de Voronoi

Considere um conjunto  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de  $n$  pontos distintos no plano. Estes pontos são chamados de locais (pontos de referência). Define-se o diagrama de Voronoi do conjunto  $P$  como a divisão do plano em  $n$  células (regiões), uma para cada local (ponto) em  $P$ . Um ponto  $q$  pertence à célula correspondente ao local  $p_i$  se e somente se  $\text{dist}(q, p_i) < \text{dist}(q, p_j)$  para cada  $p_j \in P$  com  $j \neq i$  ( $\text{dist}(a, b)$  é a distância euclidiana entre os pontos  $a$  e  $b$ ). Denota-se o diagrama de Voronoi como  $\text{Vor}(P)$ . A célula correspondente a um local  $p_i$  se representa como  $V(p_i)$ , e é chamada célula de Voronoi de  $p_i$  [BERG, 1997], [FERRERAS, 2001], [YANG, 2001] (figura 6).

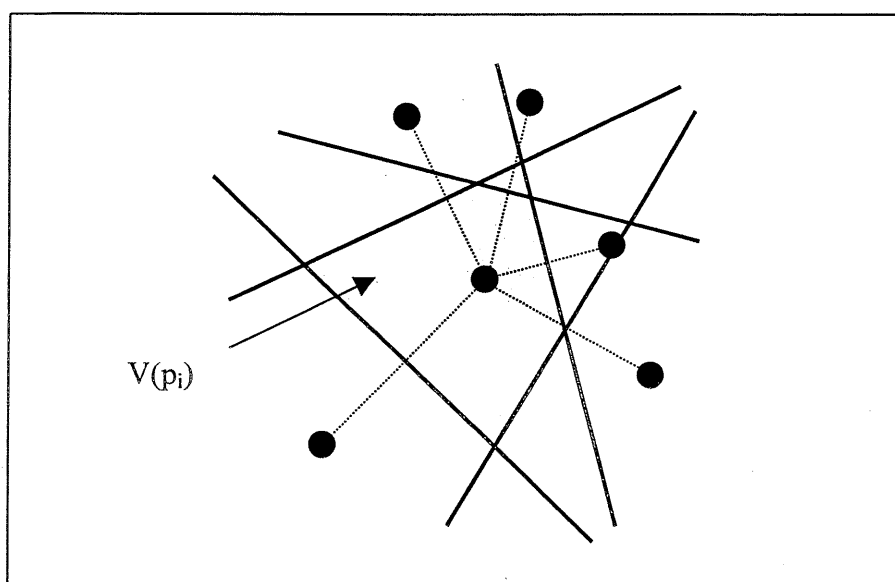


Figura 6: célula de um ponto do diagrama de Voronoi.

A bissetriz de dois pontos  $p$  e  $q$  divide o plano em dois semiplanos, denotando-se o semiplano que contém o ponto  $p$  como  $h(p, q)$ , e o outro semiplano, como  $h(q, p)$ . Nota-se que um ponto  $r \in h(p, q)$  se, e somente se,  $\text{dist}(r, p) < \text{dist}(r, q)$ .

Desta forma, verifica-se que a célula de Voronoi associado a um ponto  $p_i$  (denotado  $V(p_i)$ ) é a interseção de  $n - 1$  semiplanos definidos por  $p$  e os outros  $n - 1$  pontos em  $P$ . Assim, é gerada uma região poligonal convexa, possivelmente não limitada, formada por, no máximo,  $n - 1$  vértices e no máximo  $n - 1$  arestas. Assim, defini-se uma célula  $V(p_i)$  da seguinte forma [KRASNOGOR et al, 1995] (figura 6):

$$V(p_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j) \quad (19)$$

Diz-se que a região de Voronoi de um determinado ponto, consistirá na interseção de todos os semiplanos  $h(p_i, p_j)$ .

Verifica-se que cada célula está formada pela interseção de um número determinado de semiplanos. Então, o diagrama de Voronoi é uma subdivisão do plano onde as arestas são segmentos de retas [BERG, 1997].

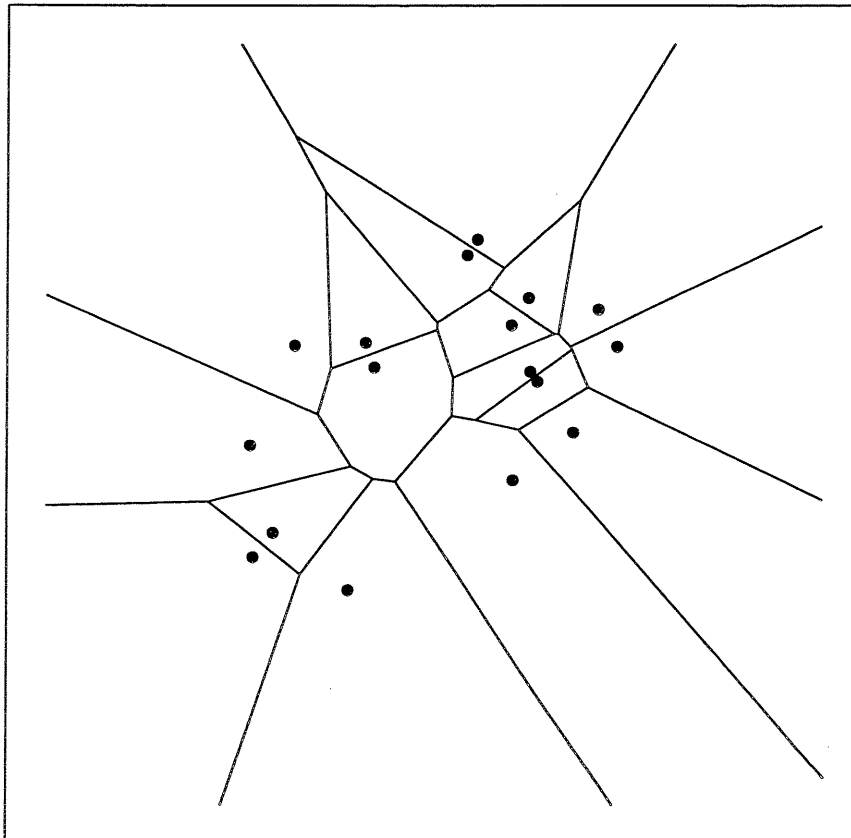


Figura 7: Diagrama de Voronoi com 17 pontos.

A figura 7 mostra um exemplo de diagrama de Voronoi com 17 pontos. Observa-se que existem 17 polígonos, denominados de polígonos de Voronoi, um para cada local. Os 9 polígonos externos se estendem infinitamente no plano, e por isso são desenhados como figuras abertas. Cada aresta do diagrama constitui um lugar onde os pontos são equidistantes a dois locais. Os vértices dos polígonos estão a três ou mais arestas, e portanto são pontos de equidistância entre três ou mais locais.

O problema da construção do diagrama de Voronoi pode ser resolvido de forma analítica (exata) [NEHAB *et al*, 2001]: *“São dois os algoritmos básicos com essa característica: um deles, o algoritmo de Fortune, baseia-se na ordenação prévia dos pontos em uma das dimensões e na construção, por varredura, do diagrama de Voronoi; o outro algoritmo é também baseado na ordenação prévia dos pontos, mas seguida de uma rotina de divisão-e-conquista. Ambos os algoritmos são ótimos, já que o problema de ordenação pode ser reduzido ao problema de construção do diagrama de Voronoi em tempo  $O(n \log n)$ ”*.

### 2.5.3 Teoremas e demonstrações do diagrama de Voronoi

Algumas arestas são segmentos de retas, entretanto outras são semi-retas. A menos que todos os sítios sejam colineares, desta forma todas serão retas.

Isto pode ser expresso com o seguinte teorema:

#### **Teorema 1.**

**Seja  $P$  um conjunto de  $n$  pontos de locais no plano. Se todos os locais são colineares então  $\text{Vor}(P)$  consiste de  $n - 1$  retas paralelas e de  $n$  células**

(figura 8). De outra maneira,  $\text{Vor}(P)$  está conectado e suas arestas são segmentos de retas ou semi-retas (figura 9).

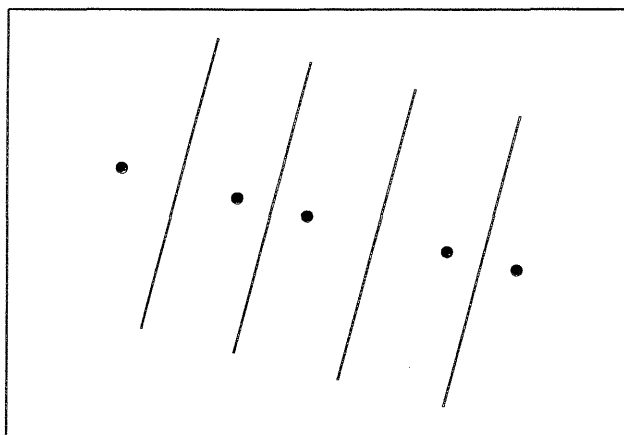


Figura 8: diagrama de Voronoi com pontos colineares

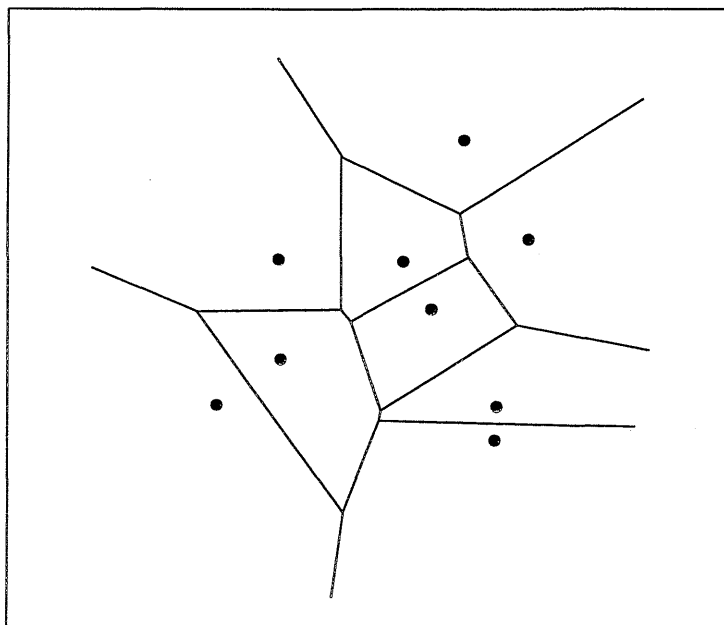


Figura 9: arestas e semi-retas de um diagrama de Voronoi

A demonstração deste teorema se faz por contradição. Suponha-se que se tenha dois pontos  $p$  e  $q$ , denotando-se sua bissetriz por  $t$ . Mas, juntando-se um terceiro ponto  $r$  não colinear aos outros dois, a bissetriz de  $q$  e  $r$  (denotando-se

por  $s$ ) já não será paralela a  $t$ , porque em algum ponto as retas  $t$  e  $s$  se interceptarão. Para demonstrar que  $\text{Vor}(P)$  está conectado suponha-se que se não fosse assim então existiria uma região que partiria o plano em dois. Esta região estaria definida por duas retas paralelas. Por serem retas paralelas sabe-se que não se interceptam, mas sua existência contradiz o demonstrado anteriormente (quando se fala de locais não colineares) [BERG, 1997] (figura 10).

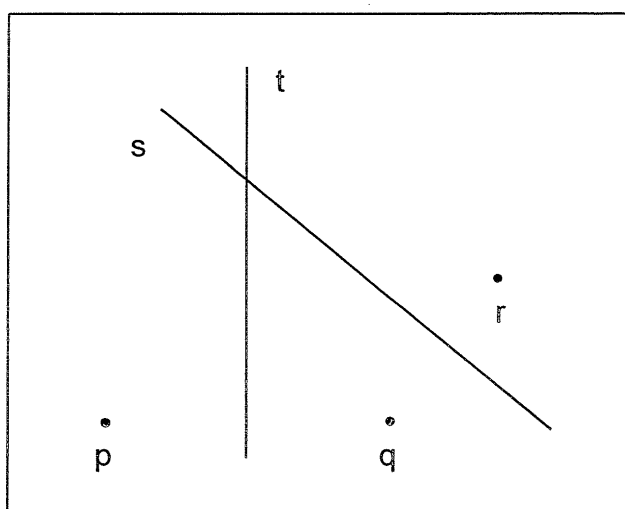


Figura 10: interseção de bissetrizes

Já foi exposta a estrutura de um diagrama de Voronoi. Enquanto a sua complexidade, diz-se, o número de vértices e arestas, se expressa mediante o seguinte teorema:

### Teorema 2.

O número de vértices do diagrama de Voronoi de um conjunto de  $n$  pontos de locais no plano é no máximo  $(2n - 5)$ . O número de arestas do mesmo diagrama é no máximo  $(3n - 6)$ .

Para provar este teorema é necessário utilizar a fórmula de Euler. Esta fórmula indica que para um grafo conectado que têm  $m_v$  nós,  $m_e$  arestas e  $m_f$  faces a seguinte igualdade se cumpre [BERG, 1997]:

$$m_v - m_e + m_f = 2 \quad (20)$$

Não se pode aplicar diretamente a um diagrama de Voronoi, porque  $\text{Vor}(P)$  contém arestas semi-infinitas (semi-retas, como na figura 10) e não seria propriamente um grafo. Para evitar isso se introduz um vértice “artificial” chamado  $v_\infty$  (vértice infinito). Ao vértice  $v_\infty$  se conectam todas as arestas semi-infinitas (figura 11) com o qual se pode ter um grafo plano conectado ao qual se pode aplicar a forma de Euler, tomando como  $n_v$  ao número de vértices mais um, porque se aumenta o vértice infinito ( $v_\infty$ ), que anteriormente na fórmula era os  $m_v$  nós,  $n_e$  ao de arestas ( $m_e$  arestas), e  $n$  aos locais de  $\text{Vor}(P)$ . Esta fórmula se adaptaria para dar a seguinte equação [BERG, 1997]:

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2 \quad (21)$$

Se cada aresta do grafo baseado no  $\text{Vor}(P)$  tem exatamente dois vértices, então se somar os pontos de todos os vértices tem-se o dobro do número de arestas. Dado que cada vértice, incluindo  $v_\infty$ , tem ao menos três pontos, o que significa que tem ao menos três arestas, obtendo-se o seguinte:

$$2n_e \geq 3(n_v + 1) \quad (22)$$

Substitui-se o valor de  $n_e$  da equação (21) na inequação (22), obtendo-se o seguinte processo:

$$n_e = (n_v + 1) - 2 + n$$

$$2(n_e) \geq 3(n_v + 1)$$

$$2((n_v + 1) - 2 + n) \geq 3(n_v + 1)$$

$$2n_v + 2 - 4 + 2n \geq 3n_v + 3$$

$$n_v \leq 2n - 5 \quad (23)$$

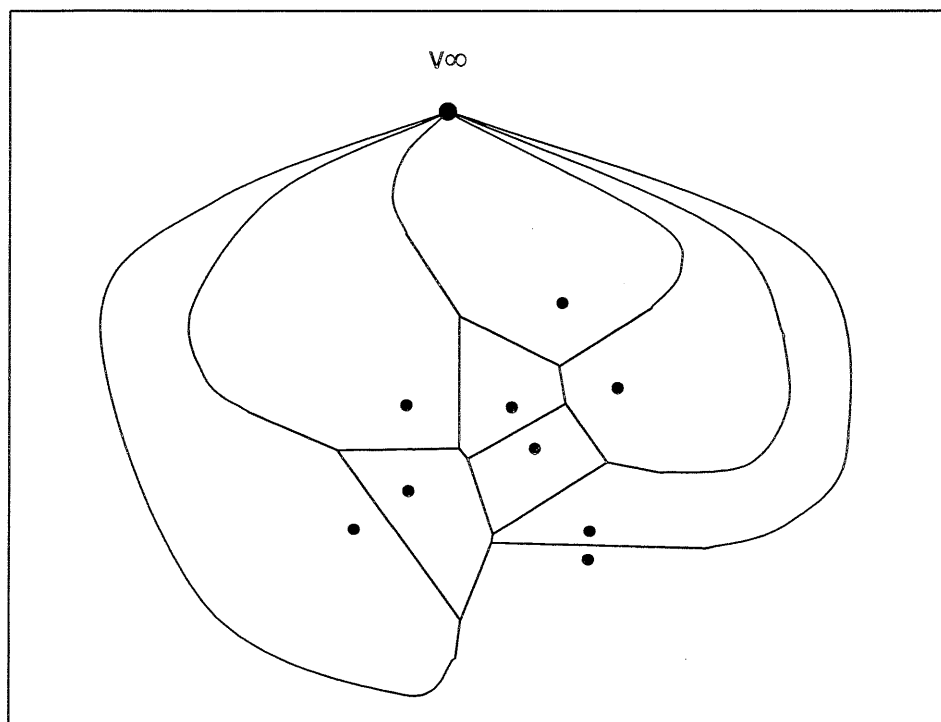


Figura 11: Grafo conectado

O resultado obtido, indicado pela expressão (23) confirma a primeira parte do teorema. Para comprovar a segunda parte do teorema 2, de forma análoga, substitui-se o valor de  $n_v$  da equação (21) na inequação (22), segundo os seguintes passos:

$$n_v = 2 - 1 + n_e - n$$

$$2n_e \geq 3((n_v) + 1)$$

$$2n_e \geq 3((1 + n_e - n) + 1)$$

$$2n_e \geq 3 + 3n_e - 3n + 3$$

$$2n_e \geq 3n_e - 3n + 6$$

$$n_e \leq 3n - 6 \quad (24)$$

Assim termina a demonstração do teorema 2.

Foi visto que, as arestas são partes de bissetrizes dadas por pares de locais, e que os vértices são pontos de interseção entre estas bissetrizes. Uma característica do diagrama de Voronoi é que o número de bissetrizes é quadrático ao passo que a complexidade do mesmo é linear  $O(n \log n)$ . Então, nem todas as bissetrizes definem aresta de  $\text{Vor}(P)$  e nem todas as interseções são vértices de  $\text{Vor}(P)$ . Para distinguir quais bissetrizes e interseções definem o  $\text{Vor}(P)$  é necessário antes tomar um ponto  $q$  do conjunto de pontos que formam as bissetrizes. Para este ponto define-se o círculo máximo vazio de  $q$  a respeito de  $P$ , denotado por  $C_P(q)$ , como o maior círculo que tem o ponto  $q$  como seu centro e que não contém local algum de  $P$  em seu interior (figura 12).

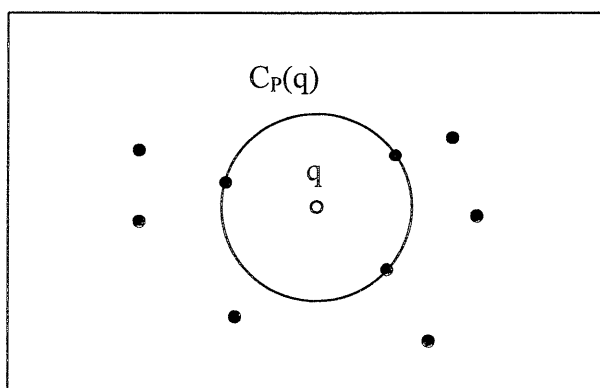


Figura 12: Círculo que determina quais são vértices ou arestas.

O teorema a seguir expressa esta propriedade dos vértices e das arestas do diagrama de Voronoi [BERG, 1997]:

### Teorema 3.

Para o diagrama de Voronoi  $\text{Vor}(P)$  de um conjunto  $P$  de pontos tem-se o seguinte:

- i. Um ponto  $q$ , pertence ao conjunto de pontos que formam as bissetrizes, é um vértice de  $\text{Vor}(P)$  se, e somente se, seu círculo máximo vazio  $C_P(q)$  contém três ou mais locais em sua borda (figura 13).
- ii. A bissetriz entre os locais  $p_i$  e  $p_j$  define uma aresta de  $\text{Vor}(P)$  se, e somente se, existe um ponto  $q \in \mathbb{R}^2$  tal que  $C_P(q)$  contém em sua borda  $p_i$  e  $p_j$  mas nenhum outro local (figura 13).

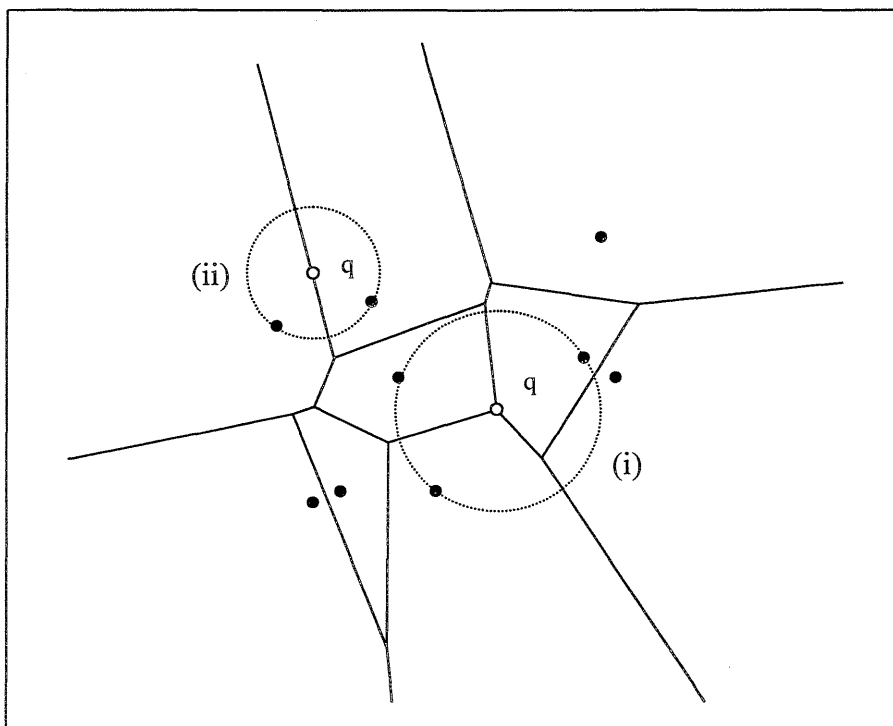


Figura 13: Diagrama de Voronoi (Teorema 3)

Para demonstrar o primeiro ponto deste teorema suponha-se que exista um ponto  $q$  tal que  $C_P(q)$  contém três ou mais locais em sua borda. Para demonstração consideremos os locais  $p_i$ ,  $p_j$  e  $p_k$ . Como o interior de  $C_P(q)$  está

vazio (não contém ponto ou local algum), que deve estar na borda as células  $V(p_i)$ ,  $V(p_j)$  e  $V(p_k)$ , e que deve ser um vértice do diagrama de Voronoi. O vértice  $q$  deve ser equidistante a  $p_i$ ,  $p_j$  e  $p_k$ , e não pode haver outro local mais próximo ao ponto  $q$ . Se existisse algum local mais próximo então as células  $V(p_i)$ ,  $V(p_j)$  e  $V(p_k)$  não concorreriam em  $q$ . Então, o interior do círculo que tem os pontos  $p_i$ ,  $p_j$  e  $p_k$  em sua borda não contém local algum.

Quanto à segunda parte do teorema, suponha-se que exista um ponto  $q$  com a propriedade mencionada. Dado que  $C_P(q)$  não contém locais em seu interior e tanto  $p_i$  como  $p_j$  estão em sua borda, tem-se que  $\text{dist}(q, p_i) = \text{dist}(q, p_j)$ . Mas denota-se os demais locais de Voronoi por  $p_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), então também se cumpre que aquela distância ( $\text{dist}(q, p_i)$  ou  $\text{dist}(q, p_j)$ ) é menor ou igual a  $\text{dist}(q, p_k)$ , pois  $p_k$  deve ficar fora do interior de  $C_P(q)$ . A primeira parte do teorema implica que  $q$  não pode ser um vértice de  $\text{Vor}(P)$ . Então,  $q$  forma parte de uma aresta de  $\text{Vor}(P)$ , a qual está definida pela bissetriz de  $p_i$  e  $p_j$ . Dito de outra forma, se a bissetriz de  $p_i$  e  $p_j$  define uma aresta de  $\text{Vor}(P)$ , o círculo máximo vazio de qualquer ponto  $q$  que define esta aresta deve conter os pontos  $p_i$  e  $p_j$  em sua borda e a nenhum outro local.

#### 2.5.4 Aplicações do diagrama de Voronoi

A seguir são apresentadas algumas aplicações do diagrama de Voronoi:

- **Ponto mais próximo** - dado um conjunto  $P$  de locais, deseja-se saber qual é o mais próximo, dentre os  $p$  locais, de um ponto  $q$  dado. Quando se dispõe do diagrama de Voronoi, a solução do problema consiste simplesmente em determinar o local correspondente ao polígono de Voronoi que contém  $q$ . Um exemplo prático: informar aos usuários de unidades de saúde qual é a unidade

mais próxima de sua residência ou local onde estiver.

- **Vizinhos mais próximos** - este problema consiste em, dado um conjunto  $P$  de locais, encontrar o local  $p_j$  mais próximo de cada local  $p_i$  (o vizinho mais próximo de  $p_i$ ) pertencente a  $P$ .

O resultado do problema é um grafo de proximidade (figura 14), definido como sendo um grafo em que os nós são os locais e as arestas são direcionadas entre cada local e seu vizinho mais próximo. Este grafo pode ser usado para responder com facilidade a questões como: qual é o local mais próximo deste?; que locais são mais próximos deste do que de qualquer outro?

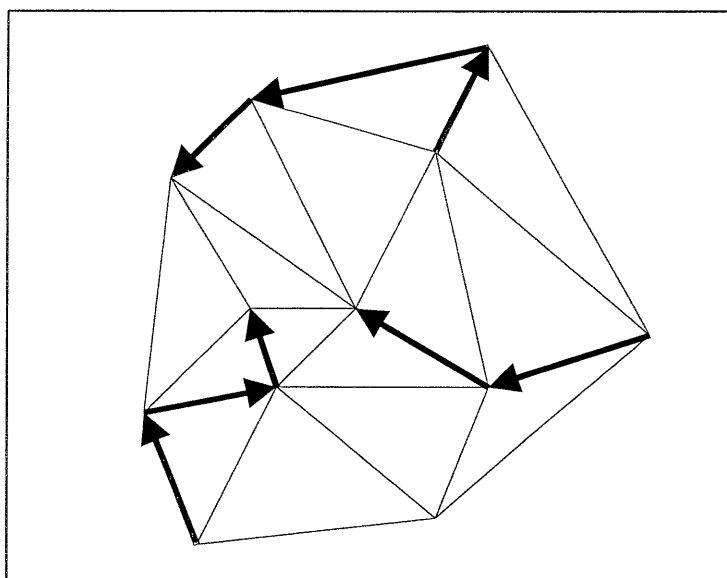


Figura 14: Grafo de proximidade sobre a triangulação de Delaunay

Este problema pode ser resolvido a partir da disponibilidade do diagrama de Voronoi. Basta analisar cada aresta definida no diagrama, calcular a distância entre os locais separados por aquela aresta, e armazenar o menor valor associado a cada local. Uma alternativa a esta solução é utilizar a triangulação de Delaunay (comentários sobre a triangulação de Delaunay na seção 2.5.5), verificando para cada vértice de triângulo (correspondente a um local) qual é a

aresta de menor comprimento que incide sobre ele. O local na outra extremidade desta aresta é o vizinho mais próximo.

- **Planejamento de caminho** – se os locais de  $S$  são os centros de obstáculos procura-se evitá-los, os lados do diagrama de Voronoi define a possibilidade de caminhar que maximize a distância dos obstáculos. Assim, no planejamento dos caminhos entre os locais, será mais “seguro” utilizar os lados do diagrama de Voronoi.

Além do diagrama de Voronoi com locais estáticos, existem muitas variações:

- **O diagrama de Voronoi de ordem  $k$**  – é o diagrama em que cada polígono corresponde ao lugar geométrico dos pontos do plano que compartilham o mesmo conjunto de  $k$  locais mais próximos. Esta variação pode ser usada para resolver problemas em que se deseja ter como resposta, além do local mais próximo, uma segunda alternativa.

- **O diagrama de Voronoi com locais em movimento** - é o diagrama em que o deslocamento de um determinado local provoca alterações apenas no polígono correspondente ao local que se move e em seus vizinhos. Este diagrama tem aplicações em despacho de viaturas, como monitoramento dinâmico da posição geográfica de cada uma delas.

- **O diagrama de Voronoi para pontos e segmentos de reta** - é o diagrama onde cada célula (polígono) contém os pontos do plano mais próximos de um objeto determinado ponto (ou segmento) do que de qualquer outro objeto.

A literatura sobre o diagrama de Voronoi e suas aplicações é bastante extensa como [PREPARATA e SHAMOS, 1985], [FOLEY *et al.*, 1991], [O'ROURKE, 1994], [BERG, 1997], [HOFF *et al.*, 2001], e continua crescendo.

A seguir, será feita uma pequena abordagem sobre a triangulação de Delaunay.

### 2.5.5 Triangulação de Delaunay

Uma triangulação de um conjunto de pontos consiste em encontrarmos segmentos de reta que conectam estes pontos de tal modo que nenhum desses segmentos cruze com nenhum outro e que cada ponto seja vértice de pelo menos um triângulo formado por esses segmentos. Esses segmentos particionam o conjunto de pontos em triângulos [FREITAS, 2001].

O grafo dual de um diagrama de Voronoi constitui uma triangulação cujos pontos são os pontos construtores do diagrama de Voronoi. A esta triangulação particular dá-se o nome de triangulação de Delaunay.

Um triângulo obtido pela triangulação de Delaunay tem a seguinte propriedade: ele determina um círculo cujo interior não contém nenhum outro ponto do conjunto de pontos a não ser os três pontos que determinam o triângulo. Tem-se uma triangulação de Delaunay para um conjunto de 14 pontos na figura 15.

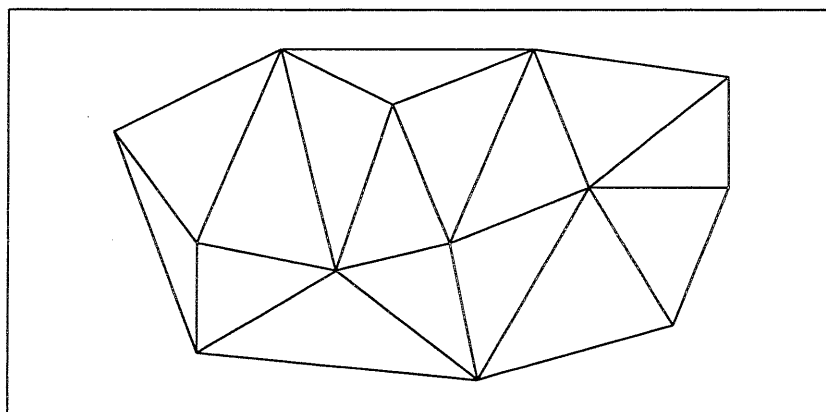


Figura 15: Triangulação de Delaunay

## CAPÍTULO III

### 3 METODOLOGIA ADOTADA NESTE TRABALHO

#### 3.1 Introdução

Para a resolução do problema das p-medianas onde se determina a localização das Unidades de Saúde 24 Horas, abordado neste trabalho, foi implementado o algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart, o algoritmo genético generacional, o algoritmo genético *steady-state* e a busca exaustiva. O raio de abrangência (a área de proximidade) de cada mediana foi determinado pelo diagrama de Voronoi.

#### 3.2 Dados utilizados

Os dados utilizados foram fornecidos pelo IBGE, pelo IPPUC e também retirados dos livros Curitiba em Dados (IPPUC, 1996, 1999a) e Curitiba em Números (IPPUC, 1999b).

Preliminarmente às implementações são determinadas as matrizes de distâncias e de pesos necessárias para se especificar a função objetivo.

#### 3.3 Matriz de distâncias

A formulação matemática para o problema das p-medianas exige que as facilidades (Unidades de Saúde 24 Horas) se localizem nos vértices de um grafo [MINIEKA, 1977]. Por isto cada bairro será representado por um ponto (pelo seu

centro, em um plano cartesiano), para que possam ser calculadas as distâncias entre os bairros, ou melhor, as distâncias entre os centros dos bairros.

A seguir serão abordados alguns conceitos sobre centro.

### 3.3.1 Centro de gravidade de n partículas

O centro de gravidade (C) de n de partículas coplanares é dado pelas coordenadas  $x_c$  e  $y_c$  (RESNICK e HALLIDAY, 1983):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (25)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (26)$$

onde,  $x_i$  é a abscissa da partícula i;  $y_i$  é a ordenada da partícula i;  $m_i$  é a massa da partícula i.

### 3.3.2 Centro de gravidade de um polígono convexo

O centro de gravidade (G) de um polígono convexo é definido, a seguir, através de um exemplo.

Seja um pentágono ABCDE (figura 16.a). Divide-se o pentágono em 3 três triângulos (figura 16.b). A seguir, calcula-se as coordenadas dos pontos L, M e N, baricentros dos três triângulos (figura 16.c). Usando as equações (25) e (26) encontra-se o centro de gravidade (G) do pentágono (figura 17.d).

As massas ( $m_i$ ) dos i (3) triângulos podem ser encontradas pela fórmula:

$$m_i = d_i \cdot A_i \quad (27)$$

onde,  $d_i$  é a densidade do triângulo  $i$  (unidade de massa por unidade de área) e  $A_i$  é a área do triângulo  $i$  (unidade de área).

Considerando a densidade de uma figura plana igual em qualquer ponto, para facilidade e redução de cálculos, determinou-se um valor unitário para a densidade ( $d_i$ ) dos triângulos, ou seja,  $d_i$  igual a 1, assim tem-se:

$$m_i = A_i \quad (28)$$

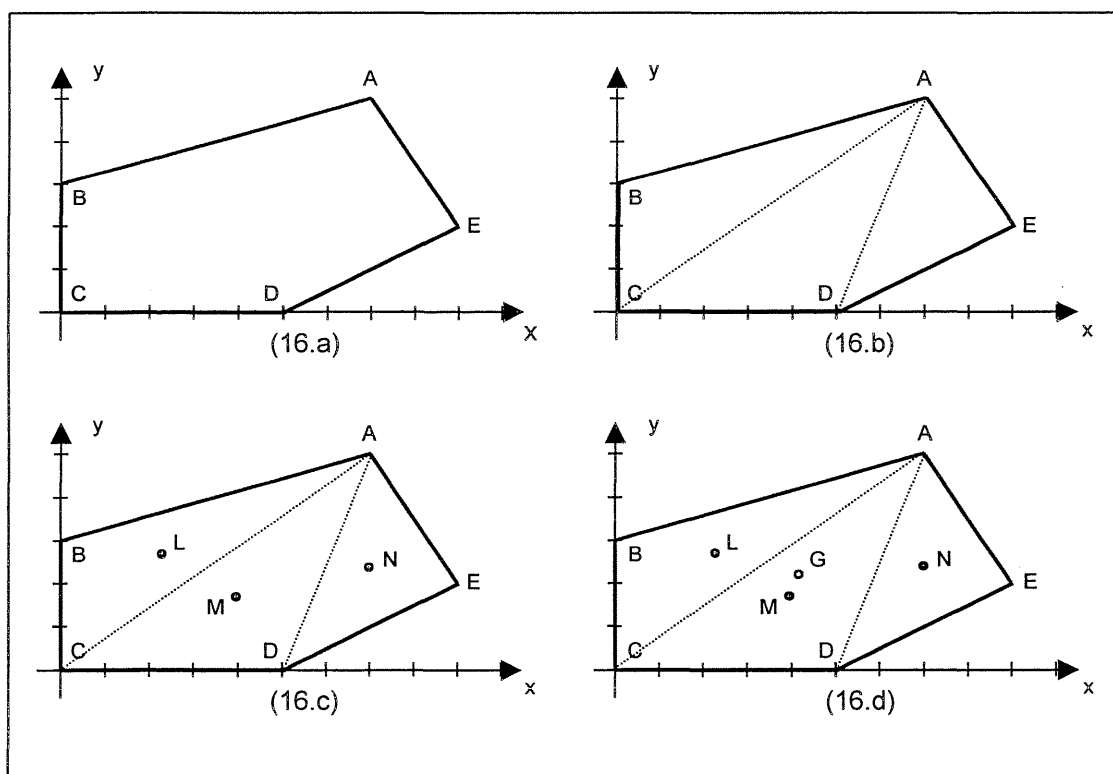


Figura 16: Centro de gravidade (G) de um polígono convexo.

### 3.3.3 Centro de gravidade de um polígono côncavo

Para se determinar o centro de gravidade de um polígono côncavo, faz-se os seguintes procedimentos: divide-se o polígono côncavo em vários polígonos convexos, em seguida determinam-se os centros de gravidade destes polígonos

convexos. Com estes centros e utilizando as equações (25) e (26), são determinadas as coordenadas de tal polígono côncavo.

### 3.3.4 Centro de bairros

Os centros utilizados para resolução do problema das p-medianas foram os centros aproximados de gravidade de cada bairro, porque o importante neste trabalho é determinar quais regiões estão melhores localizadas para se implantar Unidades de Saúde 24 Horas e não determinar o local exato.

Os centros aproximados de gravidade dos bairros foram calculados de acordo com o exemplo a seguir, onde é determinado o centro do bairro Pinheirinho (figura 17).

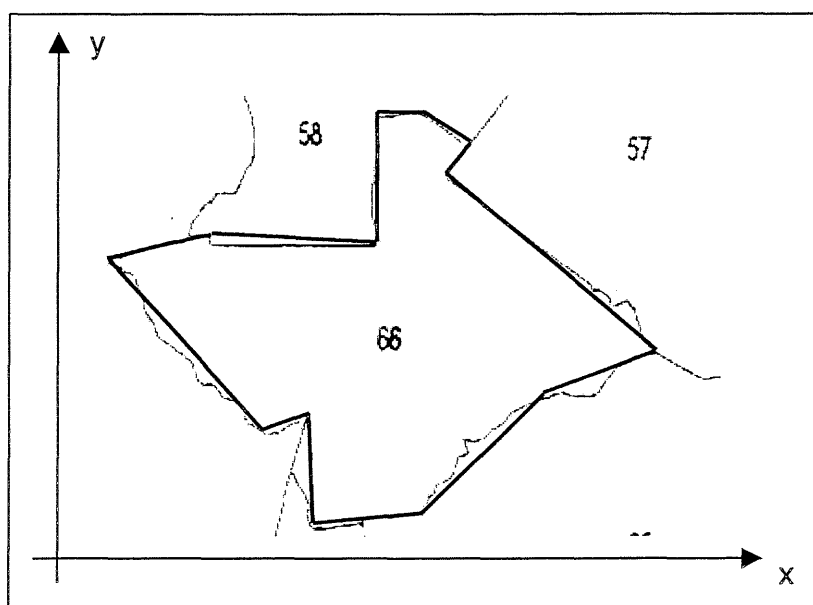


Figura 17: Polígono com área aproximada à área do bairro Pinheirinho.

Para se determinar o centro aproximado de gravidade do bairro Pinheirinho, por exemplo, construiu-se um polígono côncavo cujos vértices são

pontos da linha limítrofe (contorno) do bairro (figura 17) e determinou-se o centro de gravidade deste polígono de acordo com as seções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3. Assim, o centro de gravidade do polígono côncavo de  $n$  lados é o centro aproximado de gravidade do bairro. Verifica-se que quanto maior o número de lados do polígono mais se aproxima o centro de gravidade deste ao centro de gravidade do bairro.

### 3.3.5 Distância Percorrida

A distância real percorrida entre dois locais de duas regiões, ambas situadas numa área urbana, pode ser encontrada pela fórmula [NOVAES e ALVARENGA, 1994]:

$$d_R = \alpha \cdot d_E \quad (29)$$

onde,  $d_R$  é a distância real percorrida entre os dois locais, em unidade de comprimento;  $\alpha$  é o coeficiente de correção que transforma distância euclidiana em distância real percorrida e  $d_E$  é a distância euclidiana entre os dois locais, em unidade de comprimento.

O coeficiente  $\alpha$  leva em conta os efeitos das sinuosidades das vias (ruas, estradas) e o tráfego (ruas com uma mão de direção, etc) na distância percorrida.

Na figura 18 é mostrado o significado do coeficiente de correção  $\alpha$ . Tomando dois pontos quaisquer A e B, a distância euclidiana é representada por  $d_E$ . Suponhamos que o percurso real entre A e B corresponda a uma distância  $d_R$ . Obviamente,  $d_R$  é igual ou maior do que  $d_E$ . O coeficiente  $\alpha$  é calculado, dividindo-se  $d_R$  por  $d_E$ , e como  $d_R \geq d_E$ , o valor de  $\alpha$  será sempre igual ou maior que a unidade.

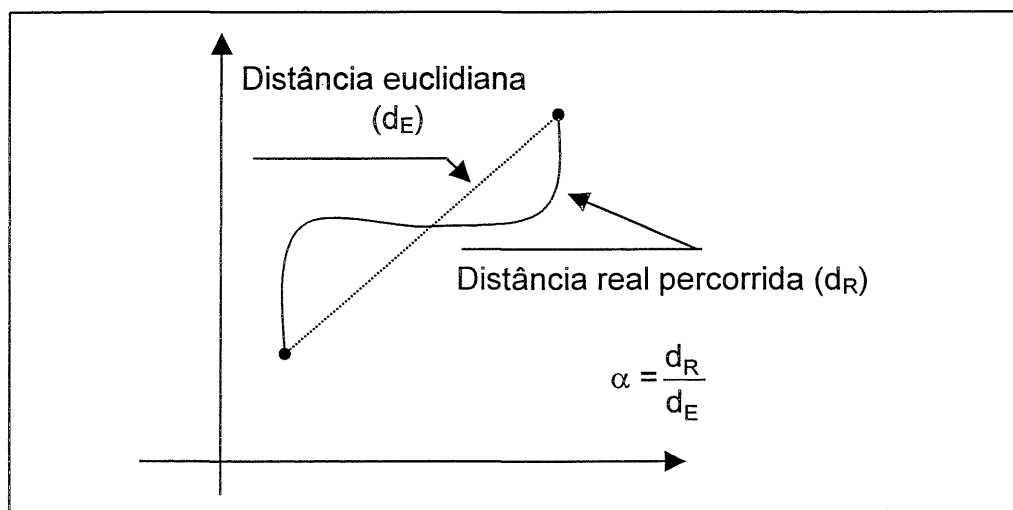


Figura 18: Relação entre distância real percorrida e distância euclidiana.

Para cada par de pontos tem-se um diferente valor de  $\alpha$ . Tendo uma quantidade pequena de pares de pontos é viável o cálculo de cada valor  $\alpha$ . Mas a medida que se aumenta a quantidade de pares de pontos, os cálculos de  $\alpha$  vão se tornando cada vez mais trabalhosos. Assim, dependendo da quantidade de pares de pontos e a precisão que é requerida, pode-se calcular um único  $\alpha$  para esses pares de pontos cujo valor é o mais representativo, tornado-se  $d_R$  um valor aproximado da distância real percorrida.

Para se ter uma medida representativa de  $\alpha$ , é conveniente levantar um conjunto razoavelmente grande de pares de pontos ( $n$ ), calculando-se para cada par a distância em linha reta ( $d_E$ ) e o percurso ( $d_R$ ). Sejam  $d_{Ei}$  e  $d_{Ri}$  os valores de  $d_E$  e  $d_R$  encontrados para o par  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

A equação que permite calcular  $\alpha$  [NOVAES e ALVARENGA, 1994] (obtido por meio de regressão) é a seguinte:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n d_{Ei} \cdot d_{Ri}}{\sum_{i=1}^n d_{Ei}^2} \quad (30)$$

Como exemplo temos a tabela 2, onde são apresentadas distâncias euclidianas reais medidas entre 10 pares de pontos escolhidos ao acaso, na cidade de São Paulo [NOVAES e ALVARENGA, 1994]. Na tabela 2, é mostrado o ajuste do coeficiente  $\alpha$  para esse caso, tendo sido obtido o valor  $\alpha = 1,52$ .

Tabela 2: Cálculo do coeficiente  $\alpha$  para 10 pares de pontos situados na cidade de São Paulo.

Par A, B	Distância Euclidiana ( $d_E$ ) (km)	Distância Real percorrida ( $d_R$ ) (km)	$\alpha$	$d_E * d_R$	$d_E^2$
1	3,0	4,1	1,37	12,3	9,0
2	1,6	2,0	1,28	3,2	2,6
3	3,9	5,1	1,31	19,9	15,2
4	1,1	2,3	2,01	2,6	1,3
5	1,2	1,7	1,36	2,1	1,5
6	1,6	1,9	1,20	3,0	2,6
7	2,6	4,0	1,53	10,4	6,8
8	1,6	2,7	1,71	4,3	2,6
9	2,2	3,2	1,44	7,0	4,8
10	3,1	6,6	2,17	20,5	9,6

Fonte: NOVAES e ALVARENGA (1994)

Quando a distância entre os pares de pontos aumenta, o valor de  $\alpha$  tende a cair, porque os efeitos das sinuosidades e restrições de trânsito passam a ser menos significativos. Segundo NOVAES e ALVARENGA (1994) é comum adotar um valor de  $\alpha$  igual a 1,35 para distribuição urbana, considerando-se para isso um levantamento suficientemente grande de pares de pontos e com distâncias bastante variadas entre si.

A distância média percorrida entre dois locais quaisquer de uma região urbana pode ser estimada através da medida da área desta região, segundo LARSON e ODONI (1981), através da equação:

$$d_R = k \cdot \sqrt{A} \quad (31)$$

onde,  $d_R$  é a distância percorrida aproximada entre dois locais, em unidade de comprimento;  $A$  é a área da região, em unidade de área e  $k$  é a constante de proporcionalidade.

Considerando deslocamento (distância) entre um local qualquer de uma região e seu centro, LARSON e ODONI (1991) a partir de estudos empíricos e métodos experimentais definiram um valor adequado para a constante de proporcionalidade  $k$  igual a 0,38.

Com os centros (vértices) localizados determina-se a matriz de distâncias, sendo utilizado para o cálculo das distâncias entre os centros dos bairros a equação (29). Para o cálculo dos valores da diagonal principal da matriz de distâncias, ou seja, os valores das distâncias médias percorridas de um local qualquer de um bairro ao centro deste, foi utilizada a equação (31).

Por exemplo, a distância média percorrida de um local qualquer do interior do bairro Boqueirão, que tem uma área de  $14,802 \text{ km}^2$ , ao seu centro é calculada, a seguir, por:

$$d_R = k \cdot \sqrt{A} = 0,38 \cdot \sqrt{14,802} \cong 1,462 \text{ km} \quad (32)$$

Assim, os elementos da diagonal principal da matriz de distância serão determinados pela equação (28) e os elementos não pertencentes à diagonal principal serão determinados pela equação (31).

No anexo 1 estão os valores das áreas e dos centros (calculados de acordo com a seção 3.2.4) de cada bairro do município de Curitiba.

### 3.4 Matriz de pesos

No problema das  $p$ -medianas cada vértice do grafo possui uma demanda

que é denominada peso, portanto cada vértice possui um peso. A localização de um vértice e o seu peso são os entes que determinam a “atratividade” de tal vértice para vir a ser uma mediana do problema. Assim, precisam ser determinados os pesos para cada vértice, construindo-se a matriz de pesos do problema.

Já foi visto que, para se determinar a localização para implantação de Unidades de Saúde, o IPPUC observa os seguintes aspectos: a densidade demográfica, o grau de carência sócio-econômica da população, a inexistência de serviços de saúde na região e o sistema viário de transporte. De acordo com estes aspectos serão determinadas algumas matrizes de pesos de acordo com as ênfases dadas aos aspectos.

A partir das tabelas 3, 4 e 5 que trazem dados numéricos do município de Curitiba dos anos de 1991, 1996 e 2000, respectivamente, serão determinadas as matrizes de pesos.

As tabelas 3, 4, 5, 6 e 7 a seguir, estão completas nos anexos 2, 3, 4, 5 e 6 respectivamente.

Tabela 3: Dados numéricos de aspectos do município de Curitiba de 1991.

nº do bairro	Bairros	População	Densidade demográfica (pessoas/km <sup>2</sup> )	Índice de satisfação saúde (%)	Índice de satisfação transporte (%)
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
50	Abranches	8.639	2.000,69	70	50
9	Água Verde	45.438	9.537,78	90	70
14	Ahú	10.492	5.689,80	90	50
64	Alto Boqueirão	43.280	3.573,32	90	90
...	...	...	...	...	...
73	Umbará	6.202	275,96	70	50
28	Vila Isabel	9.319	7.695,29	10	70
31	Vista Alegre	10.127	2.743,70	90	50
57	Xaxim	46.754	5.239,13	70	70

Fonte: IBGE/IPPUC.

Tabela 4: Dados numéricos de aspectos do município de Curitiba de 1996.

nº do bairro	Bairros	População	Densidade demográfica (pessoas/km <sup>2</sup> )	Índice de satisfação Habitação (%)	Índice de satisfação Saúde (%)	Índice de satisfação Educação (%)	Índice de satisfação Transporte (%)
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
50	Abranches	9.494	2.198,70	38,64	62,15	53,13	47,39
9	Água Verde	49.863	10.466,62	97,49	90,45	91,98	66,00
14	Ahú	10.194	5.528,20	94,84	84,59	68,64	55,55
64	Alto Boqueirão	47.619	3.931,56	59,04	85,86	68,66	87,11
...	...	...	...	...	...	...	...
73	Umbará	12.003	534,08	07,89	60,64	45,85	50,00
28	Vila Isabel	10.408	8.594,55	96,35	92,21	54,63	72,50
31	Vista Alegre	9.751	2.641,83	66,81	84,22	52,32	48,48
57	Xaxim	50.237	5.629,43	61,56	65,49	56,62	77,61

Fonte: IBGE/IPPUC.

Tabela 5: Dados numéricos de aspectos do município de Curitiba de 2000.

nº do bairro	Bairros	População	densidade demográfica (pessoas/km <sup>2</sup> )
[1]	[2]	[3]	[4]
50	Abranches	11.165	2.585,69
9	Água Verde	49.866	10.467,25
14	Ahú	11.148	6.045,55
64	Alto Boqueirão	51.155	4.223,50
...	...	...	...
73	Umbará	14.595	649,42
28	Vila Isabel	10.949	9.041,29
31	Vista Alegre	9.930	2.690,33
57	Xaxim	54.691	6.128,53

Fonte: IBGE/IPPUC.

Cada vértice no problema das p-mediana possui um único peso, assim para cada vértice (centro do bairro) deve ser atribuído um peso. Desta forma é necessário sintetizar os valores dos diversos aspectos para que se possa atribuir um único peso a cada vértice. Nas tabelas 6 e 7, têm-se alguns pesos atribuídos aos vértices (centro dos bairros) de acordo com a ênfase dada a cada aspecto, justificadas a seguir.

Tabela 6: Pesos relacionados aos bairros do município de Curitiba, utilizando dados de 1991.

Bairros	Peso 1	Índice sintético	Peso 2
[1]	[2]	[4]	[5]
Abranches	8.639	58,33	34,30
Água Verde	45.438	78,75	121,11
Ahú	10.492	64,29	88,51
Alto Boqueirão	43.280	90,00	39,70
...	...	...	...
Umbará	6.202	58,33	4,73
Vila Isabel	9.319	17,50	439,73
Vista Alegre	10.127	64,29	42,68
Xaxim	46.754	70,00	74,84

Tabela 7: Pesos relacionados aos bairros do município de Curitiba, utilizando dados de 1996.

Bairros	Peso 3	Índice sintético	Peso 4
[1]	[2]	[4]	[5]
Abranches	9.494	48,84	45,01
Água Verde	49.863	84,50	123,86
Ahú	10.194	72,81	75,92
Alto Boqueirão	47.619	73,22	53,69
...	...	...	...
Umbará	12.003	21,62	24,71
Vila Isabel	10.408	75,02	114,57
Vista Alegre	9.751	60,08	43,97
Xaxim	50.237	64,45	87,34

Uma matriz de pesos será constituída por uma coluna (coluna dos pesos) e 75 linhas (os bairros de Curitiba). Desta forma, cada matriz de pesos será determinada por cada coluna dos pesos das tabelas 6 e 7.

Assim, na tabela 6:

- os valores da coluna 2 (Peso 1) são formados pelos valores da quantidade da população, obtidos da tabela 3.
- os valores da coluna 3 são os índices sintéticos de satisfação da qualidade de vida dos setores saúde e transporte (que serão abordados adiante).

- os valores da coluna 4 (Peso 2) são formados pelas razões dos valores da densidade demográfica da coluna 4 da tabela 3 pelos da coluna 3 (índice sintético) da tabela 6.

A densidade da população (e/ou a quantidade da população em certa região) é o aspecto que é mais levado em consideração para se determinar a localização para implantação de Unidades de Saúde 24 Horas pelo IPPUC, pois são poucas as unidades e todos os habitantes têm o mesmo direito à saúde. Sendo a matriz de pesos determinada apenas pela quantidade da população (Peso 1) de cada bairro, isto significa que está sendo levada em consideração apenas a distância de deslocamento dos usuários do bairro onde residem à Unidade de Saúde 24 Horas mais próxima.

Para que os outros aspectos relevantes sejam levados em consideração é necessário determinar uma matriz de pesos que reflita a “atratividade” de cada região. Para isso deve-se verificar a relação que existe entre os aspectos.

Na coluna 3 da tabela 6, estão os valores do índice sintético de satisfação de qualidade de vida, sintetizando os índices de satisfação de qualidade de vida do aspecto saúde e transporte das colunas 5 e 6 da tabela 3. Este índice, segundo SLIWANY (1997), é calculado pela média harmônica dos índices de cada aspecto analisado, dado pela equação 33:

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij} \frac{100}{y_{ij}}}{\sum_{j=1}^n \frac{100}{y_{ij}}} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{y_{ij}}} \quad (33)$$

onde,  $y_i$  é o índice sintético do bairro (vértice)  $i$ ;  $y_{ij}$  é o índice do aspecto  $j$  do bairro  $i$  e  $n$  é o número de aspectos analisados.

Segundo SLIWANY (1997), o índice sintético permite o conhecimento geral do contexto sócio-econômico, em contraposição aos inúmeros indicadores sócio-econômicos fornecidos dispersamente. É necessário identificar os indicadores que possuem características sócio-econômicas, ou seja, para a análise do aspecto sócio-econômico da medição do nível de vida da população é importante saber situar os indicadores relevantes.

Quanto menor o índice sintético, menor a qualidade de vida da população do bairro. Para que aumente a qualidade de vida em uma cidade deve haver melhoria nos bairros de menores índices de satisfação de qualidade de vida. Portanto, quanto menor o índice maior a atratividade do bairro a vir a “sediá” uma Unidade de Saúde 24 Horas. Assim, verifica-se que o peso (“atratividade”) de cada vértice é diretamente proporcional à quantidade da população (ou densidade demográfica) e inversamente proporcional ao índice sintético de satisfação da qualidade de vida.

Na coluna 4 da tabela 6 (Peso 2) está relacionada a quantidade da densidade demográfica e o índice sintético de satisfação da qualidade de vida. Cada valor desta coluna é igual ao produto da quantidade da população pelo inverso do índice sintético de satisfação da qualidade de vida.

Assim, fica cada vez mais real a atratividade de cada bairro de acordo com os aspectos mais relevantes analisados para a determinação dos locais para implantação de Unidades de Saúde 24 Horas.

A tabela 7 foi feita de forma análoga à tabela 6, sendo que para sua construção foi utilizada a tabela 4.

Chamar-se-ão de P1, P2, P3 e P4 as matrizes de pesos das colunas Peso 1, Peso 2 (tabela 6), Peso 3 e Peso 4 (tabela 7), respectivamente. Os elementos

da coluna 3 da tabela 5 (população dos bairros de Curitiba de 2000) formará a matriz de pesos P5.

### **3.5 Propostas para a localização de Unidades de Saúde 24 Horas**

Serão determinadas a seguir algumas propostas para a localização das Unidades de Saúde 24 Horas de acordo os dados utilizados.

#### **3.5.1 Proposta 1**

Propõe-se determinar locais para implantação de Unidades de Saúde 24 Horas em Curitiba, considerando-se que não exista nenhuma unidade. Assim, serão utilizados dados de 1991 (ano em que o IPPUC fez a proposta para implantação de 8 Unidades de Saúde 24 Horas em Curitiba), ou seja, serão utilizadas as matrizes de pesos P1 (situação 1) e P2 (situação 2).

#### **3.5.2 Proposta 2**

Foi possível construir apenas 5 Unidades de Saúde 24 Horas (entre 1992 e 1994 nos bairros: Fazendinha, Campo Comprido, Tingüi, Boqueirão e Sítio Cercado), mas o IPPUC, após a implantação destas 5 unidades sempre pretendeu construir pelo menos mais duas novas unidades, uma no bairro Cajuru e outra no Pinheirinho. Desta forma propõe-se determinar dois locais (medianas) para a implantação de duas novas Unidades de Saúde 24 Horas.

Para a determinação destes locais serão utilizados dados de 1996 e 2000, ou seja, usando as matrizes de pesos P3, P4 e P5.

### **3.6 Processo de descentralização da Atividade Saúde**

No processo de descentralização onde o objetivo é deslocar para a periferia da cidade as atividades relacionadas à saúde, definiu-se que não se localizaria nenhuma Unidade de Saúde 24 Horas nos bairros localizados na Administração Regional (AR) Matriz que se localiza na parte central da cidade. Assim, os centros destes bairros não são candidatos a medianas do problema.

Para as implementações dos algoritmos genéticos, do algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart e da busca exaustiva, levando em consideração este processo de descentralização, foi determinado um conjunto de vértices (centro de bairros) que representam os bairros que não estão na AR Matriz (os 18 bairros pertencentes a AR Matriz estão no anexo 7), como o conjunto dos vértices candidatos a medianas do problema. Este conjunto possui 57 ( $75 - 18$ ) vértices.

### **3.7 Implementação Computacional**

A seguir têm-se as implementações dos algoritmos genéticos, do algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart e da busca exaustiva.

#### **3.7.1 Implementação dos AGs**

##### **3.7.1.1 Representação e Codificação utilizada**

O problema a ser resolvido neste trabalho é o problema das p-medianas, onde uma solução é um conjunto de p vértices de um grafo de n vértices ( $p \leq n$ ). O grafo

do problema a ser resolvido tem como vértices os centros dos bairros do município de Curitiba. Cada bairro está sendo representado pelo seu centro, pois o objetivo é determinar  $p$  vértices que neste caso são  $p$  bairros.

Será utilizada neste trabalho a codificação de números inteiros, sendo usados os valores de 1 a  $n$  ( $n$  é o número de bairros do município de Curitiba), onde cada número representa um bairro (centro do bairro) do município de Curitiba, de acordo com a tabela 3 (anexo 2).

Para a resolução dos problemas abordados neste trabalho, foram feitas as implementações de dois AGs (AG *steady-state* e AG generacional) onde cada indivíduo possui 1 cromossomo e  $p$  genes (neste caso cada gene não é formado por uma subcadeia de símbolos e sim por um número inteiro), onde a quantidade  $p$  equivale ao número de medianas do problema. Assim, se o número de medianas for igual a 5, por exemplo, os números 23, 15, 8, 52 e 3 poderiam ser uma solução para o problema com 5-medianas. Desta forma, esta solução em AGs seria representada pelo o indivíduo que possui um cromossomo e cinco genes, onde os genes são os números 23, 15, 8, 52 e 3, como representado na figura 19.

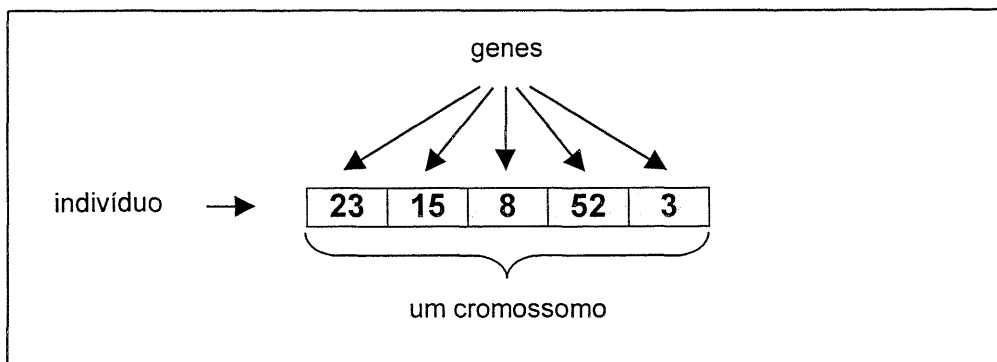


Figura 19: Codificação utilizada de indivíduo dos AGs.

Assim uma solução pode ser representada por  $p$  números inteiros, onde cada número inteiro representa um vértice (bairro). Neste caso, se  $p$  for igual a 5, o conjunto total dos genótipos possíveis é formado por  $C_{37}^5 = 4.187.106$  elementos.

### 3.7.1.2 Inicialização dos AGs

No problema das  $p$ -medianas uma solução é composta por  $p$  vértices distintos. Então um indivíduo viável é representado por um indivíduo com um cromossomo constituído de  $p$  genes distintos entre si. Assim, para a inicialização foram gerados  $m$  ( $m = 100$ ) indivíduos distintos entre si, com um cromossomo cada e  $p$  genes distintos entre si, formando a população inicial.

### 3.7.1.3 Função Aptidão utilizada

A aptidão de cada indivíduo está relacionada diretamente com a função objetivo do problema. O problema das  $p$ -medianas é um problema de minimização e, por definição, em AGs, quanto maior o valor da função aptidão, tanto melhor o indivíduo, ou seja, foi determinado que o valor da aptidão de cada indivíduo é  $C_i' = Q - C_i$  onde  $Q$  é uma constante arbitrariamente grande (foi adotado  $Q = 10^{10}$ ) e  $C_i$  é o valor da função objetivo do problema das  $p$ -medianas, mostrado na equação 34:

$$C_i = \sum_{j=1}^n w_j \cdot \{\min[d(v_k, v_j)]\} \quad (34)$$

onde,  $C_i$  é o valor da função objetivo para a solução  $i$  (indivíduo  $i$ );  $v_j$  são os vértices do problema;  $w_j$  é o peso associado ao vértice  $v_j$ ;  $v_k$  são os vértices-medianas e  $n$  é o número de vértices.

O valor  $C_i$  é igual à soma do produto das distâncias entre os vértices ( $j$ ) do problema e o vértice-mediana ( $k$ ) mais próximo ( $\min[d(v_k, v_j)]$ ) pelo peso de cada vértice ( $w_j$ ).

#### 3.7.1.4 Esquema de Seleção utilizado

Para a seleção de indivíduos, utilizou-se a idéia de *ranking*. Os indivíduos foram colocados em uma lista em ordem crescente de acordo com os valores da função aptidão e cada indivíduo recebeu uma nota, sendo que o pior indivíduo recebeu nota 1 e o melhor ficou com nota igual ao tamanho da população ( $m = 100$ ), formando o segmento  $\overline{AB}$  de tamanho  $\frac{100^2 + 100}{2} = 5.050$ , de acordo com a figura 20.

O comprimento do segmento  $\overline{AB}$  é a soma dos comprimentos dos segmentos de tamanho 1, 2, ..., 100, ou seja, é a soma dos  $m$  ( $m = 100$ ) termos de uma progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo 1, da mesma forma determina-se os locais (as abscissas) de cada extremidade ( $S_i$ ,  $i$  é a nota atribuída ao indivíduo  $i$ ) dos  $m$  segmentos, assim:

$$S_i = \frac{i^2 + i}{2} \quad (35)$$

Desta forma, será deduzida uma função de seleção ( $\text{seleção}(i)$ ) que relaciona um número  $r$  (gerado aleatoriamente) ao número  $i$  (indivíduo  $i$ );  $r \in [0; \frac{m^2 + m}{2}]$ , ou

seja,  $r = \text{rnd}() \cdot \left(\frac{m^2 + m}{2}\right)$ , onde  $\text{rnd}() \in [0, 1)$  é um número aleatório uniformemente distribuído.

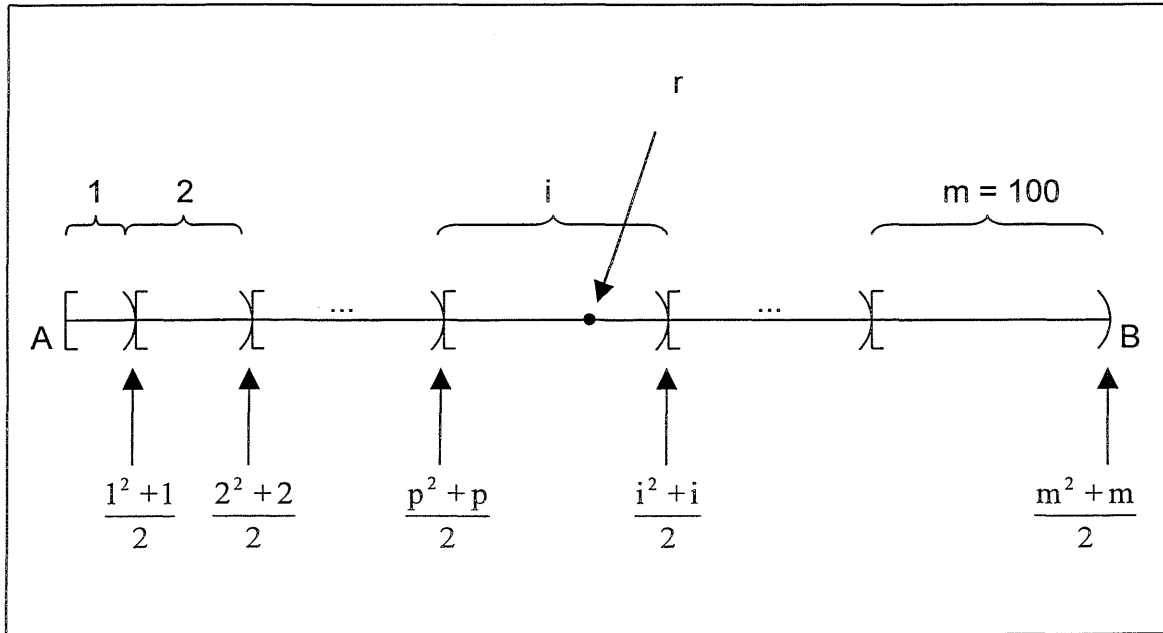


Figura 20: esquema de seleção por atribuição de notas (método do *ranking* linear)

Na figura 20,  $p = i - 1$ .

Como  $r$  é um número real e  $r \in \left[\frac{p^2 + p}{2}, \frac{i^2 + i}{2}\right)$  (figura 20), então existe um número real  $q$  ( $q \in [i - 1; i)$ ) tal que

$$\frac{q^2 + q}{2} = r \quad (36)$$

assim, 
$$q^2 + q - 2r = 0 \quad (37)$$

portanto, 
$$q = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8r}}{2} \quad (38)$$

usando a notação  $\lceil b \rceil$  que significa o menor inteiro maior do que  $b$ , temos que  $\lceil q \rceil = i$ , determinando, assim, a função de seleção adotada neste trabalho, também adotada por MAYERLE (1994):

$$\text{Seleção (i)} = \left\{ i = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 8r}}{2} \right\rceil \right\} \quad (39)$$

### 3.7.1.1 Operadores Genéticos utilizados

Como se trata de problema combinatorial a operação de recombinação utilizada foi a *partially matched crossover* (PMX) como mostrado em GOLDBERG (1989). Um exemplo de PMX é mostrado na figura 21.

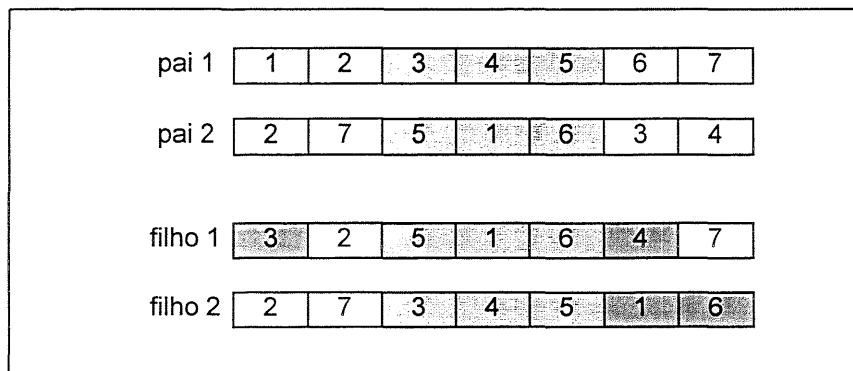


Figura 21: *partially matched crossover* (PMX)

Na PMX da figura 21, foi feito o *crossover* de dois pontos entre o terceiro e o quinto genes, surgindo “filhos” com genes repetidos (inviáveis para o problema das  $p$ -medianas), assim, trocou-se o primeiro gene do pai 1 pelo sexto gene do pai 2 e o sexto gene do pai 1 pelo sétimo gene do pai 2 e vice-versa.

Para o operação de mutação no caso de alfabeto de números inteiros, pode ser feita a modificação do valor corrente em uma posição do cromossomo por valor

pertencente ao conjunto de valores viáveis e não pertencente ao referido cromossomo, como na figura 22, onde o gene codificado como 54 foi substituído pelo gene 22:

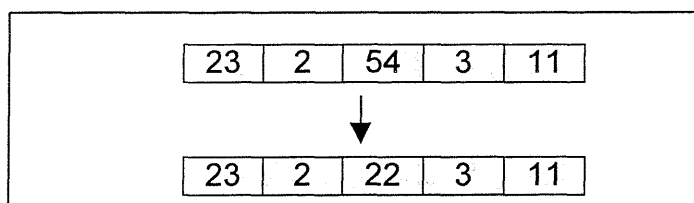


Figura 22: Mutação

#### 3.7.1.6 Parâmetros dos AGs

Foi determinada para os Algoritmos Genéticos (generacional e *steady-state*) uma população fixa  $m$  igual 100 indivíduos. Como critério de parada para o AG generacional determinou-se 50 gerações e para o AG *steady-state* determinou-se 10.000 iterações, como número máximo de iterações ( $z_{max}$ ).

Nos AGs a probabilidade de mutação usada foi  $p_m = 0,01$ . A probabilidade de recombinação utilizada no AG generacional foi  $p_{rec} = 0,9$  e no AG *steady-state* foi de  $p_{rec} = 1$ .

#### 3.7.1.7 Aplicação dos operadores genéticos

Geralmente costuma-se executar os operadores genéticos (OG), em seqüência nos AGs. Inicialmente aplica-se o OG de recombinação e em seguida o de mutação [DIAS e BARRETO, 1998]. Esta foi a aplicação dos OGs adotada neste trabalho.

### 3.7.1.8 Descrição das implementações dos AGs

Na maioria dos AGs assume-se que cada indivíduo seja constituído de um único cromossomo, razão pela qual é comum usarem-se os termos “indivíduo” e “cromossomo” indistintamente em trabalhos científicos e livros-texto [TANOMARU, 1995].

Seja  $G(V, A)$  um grafo não direcionado, onde  $V$  é o conjunto de  $n$  vértices (os vértices são os centros dos bairros do município de Curitiba) e  $A$  é o conjunto de arestas (distâncias percorridas entre os vértices). Cada representação ( $r_i$ ) dos  $m$  cromossomos será um subconjunto de  $V$  contendo  $p$  genes (elementos),  $r_i \in V$  ( $r_i$  é o conjunto que representa o cromossomo relacionado ao indivíduo  $i$ ), a cardinalidade de  $r_i$  é  $p$  ( $p$  é o número de medianas),  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $m$  é o número de indivíduos.

### 3.7.1.9 Descrição da implementação do AG *steady-state*

#### **Inicialização**

Gere aleatoriamente uma lista  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$  de  $m$  cromossomos (viáveis), constituídos de  $p$  genes sorteados entre os  $n$  vértices do grafo  $G(V, A)$

Avalie os cromossomos, calculando a aptidão de cada cromossomo, função aptidão  $(r_i) = C_i'$ ,  $r_i \in R$

Ordene a lista  $R$  de modo que  $C_1' \leq C_2' \leq \dots \leq C_m'$ , ou seja, coloque os cromossomos em ordem crescente (*ranking*) de acordo com a função aptidão

Faça  $z = 0$  ( $z$  é o contador do número de iterações)

Defina o critério de parada: número máximo de iterações ( $z_{max} = 10.000$ )

## Teste de parada

Se  $z = z_{\max}$

Pare e apresente o cromossomo  $r_m$  como solução aproximada do problema

Senão

### Esquema de Seleção

Selecione dois indivíduos  $i$  e  $j$  (cromossomos  $r_i$  e  $r_j$ ) de acordo com a equação (39), com  $i \neq j$ .

### Operador de recombinação

Após serem selecionados os dois cromossomos aplica-se o operador de recombinação (PMX). Surgindo dois descendentes  $r_x$  e  $r_y$ , analisando a viabilidade dos cromossomos.

### Operador de mutação

Aplique operador de mutação a cada gene dos cromossomos  $r_x$  e  $r_y$ , com probabilidade  $p_m$ .

### Avaliação dos cromossomos

Avalie  $r_x$  e  $r_y$  de acordo com a função aptidão, determinando  $C_x'$  e  $C_y'$

Se  $C_x' > C_y'$

Armazene  $r_x$  em  $r_t$  e  $C_x'$  em  $C_t'$

Senão

Armazene  $r_y$  em  $r_t$  e  $C_y'$  em  $C_t'$

### Inserção de cromossomo na lista

Se  $C_t' > C_1'$ , faça:

Elimine  $r_1$  (o cromossomo menos apto) da lista R

Insira  $r_t$  na lista R colocando-a em ordem crescente (*ranking*) de acordo com a função aptidão;

Faça  $z = z + 1$

Senão

Faça  $z = z + 1$

Volte ao **Teste de Parada**

### 3.7.1.10 Descrição da implementação do AG generacional

#### **Inicialização**

Inicialização igual ao do AG *steady-state* diferindo apenas no critério de parada

Critério de parada: defina o número de gerações ( $z_{\max} = 50$ )

Faça  $z = 0$  ( $z$  é o contador do número de gerações).

#### **Teste de parada**

Se  $z = z_{\max}$

Pare e apresente o cromossomo  $r_m$  como solução aproximada do problema

Senão

Faça  $z = z + 1$

Faça  $g = 0$  ( $g$  é o contador do número de indivíduos de cada geração)

#### **Geração das populações**

Faça  $g = g + 1$

#### **Seleção probabilística da operação genética**

Gere aleatoriamente um número  $h \in [0, 1)$

Se  $h < p_{\text{rec}}$  então

### **Operador de recombinação**

Selecione dois indivíduos  $i$  e  $j$  (cromossomos  $r_i$  e  $r_j$ ) de acordo com a equação 39, com  $i \neq j$

Após serem selecionados os dois cromossomos aplica-se o operador de recombinação (PMX). Surgindo dois descendentes  $r_x$  e  $r_y$ , analisando a viabilidade dos cromossomos.

### **Operador de mutação**

Aplicar operador de mutação a cada gene dos cromossomos  $r_x$  e  $r_y$ , com probabilidade  $p_m$ .

### **Avaliação dos cromossomos**

Avalie  $r_x$  e  $r_y$  de acordo com a função aptidão, determinando  $C_x'$  e  $C_y'$

Se  $C_x' > C_y'$

Armazene  $r_x$  em  $r_t$  e  $C_x'$  em  $C_t'$

Senão

Armazene  $r_y$  em  $r_t$  e  $C_y'$  em  $C_t'$

Senão

Selecione um indivíduo  $i$ , da geração  $z - 1$ , de acordo com a equação (39) e copie-o para a geração atual ( $z$ )

Se  $g = m$  então

Volte ao **Teste de parada**

Senão

Volte à **Geração das populações**

### 3.7.2 Implementação do algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART

#### 3.7.2.1 Número de transmissão para o problema

O número de transmissão ( $\sigma(S)$ ) é o valor da função objetivo do problema cujos vértices-medianas (vértices-medianas são os vértices que são medianas do problema) pertencem ao conjunto S atual, assim:

$$\sigma(S) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot \{\min[d(v_k, v_j)]\} \quad (40)$$

onde,

S é o conjunto atual das p-medianas do problema;  $v_k \in S$  ( $v_k$  é um vértice-mediana).

#### 3.7.2.2 Descrição da implementação do algoritmo das p-medianas de TEITZ e BART

##### **Passo 0.** Inicialização

Gere p números naturais distintos entre si aleatoriamente variando de 1 a n (n é o número de vértices do problema) para formar a solução inicial  $S = \{v_1, \dots, v_p\}$  aproximada do problema.

##### **Passo 1.**

Armazene em J os elementos do conjunto  $V - S$  (V é o conjunto dos vértices do problema), ou seja,  $J = V - S$ .

##### **Passo 2.** (critério de parada)

Se  $J = \phi$  (conjunto vazio) então

Pare e apresente o conjunto S como solução do problema.

Senão

Vá ao **Passo 3**

**Passo 3.**

Selecione aleatoriamente  $v_i$  pertencente a  $J$

Calcule as  $p$  reduções  $A_{ij}$ , onde  $A_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\})$ , onde  $j$  varia de 1 a  $p$ .

Faça  $A_{io} = \max[A_{ij}]$  e  $v_o = v_j$

Se  $A_{io} > 0$  então

Faça  $S = S \cup \{v_i\} - \{v_o\}$

$J = V - S - \{v_o\}$

Volte ao início do **Passo 3**

Senão

Retire  $v_i$  do conjunto  $J$ , ou seja,  $J = J - \{v_i\}$

Volte ao **Passo 2**

### 3.7.3 Implementação da Busca Exaustiva

Dependendo do número de medianas do problema é possível encontrar a solução ótima através de uma busca exaustiva, ou melhor, se o tempo de execução da busca exaustiva for considerado pequeno, como alguns segundos ou minutos ou horas ou até mesmo alguns dias.

#### 3.7.3.1 Descrição da Implementação da Busca Exaustiva

**Passo 0.** Solução inicial

Faça  $z = 0$  ( $z$  é o contador do número de combinações)

Faça  $v_i = i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, p$  ( $p$  é o número de medianas)

### **Passo 1**

Faça  $s_1 = v_1$

Se  $s_1 = n - p + 1$  então

Pare e apresente o conjunto  $S_0$  como solução do problema

Senão

Faça  $v_2 = s_1 + 1$

Vá ao **Passo 2**

### **Passo 2**

Faça  $s_2 = v_2$

Se  $s_2 = n - (p - 1) + 1$  então

Faça  $v_1 = s_1 + 1$

Volte ao **Passo 1**

Senão

Faça  $v_3 = s_2 + 1$

Vá ao **Passo 3**

...

**Passo h** (o passo h é um passo genérico entre o passo 2 e o passo p-1)

Faça  $s_h = v_h$

Se  $s_h = n - (p - h) + 1$  então

Faça  $v_{h-1} = s_{h-1} + 1$

Faça  $v_h = s_{h-1} + 1$

Volte ao **Passo h - 1**

Senão

Faça  $v_{h+1} = s_h + 1$

Vá ao **Passo h + 1**

...

**Passo p – 1**

Faça  $s_{p-1} = v_{p-1}$

Se  $s_{p-1} = n - 1$  então

Faça  $v_{p-2} = s_{p-2} + 1$

Volte ao **Passo p – 2**

Senão

Faça  $v_p = s_{p-1} + 1$

Vá ao **Passo p**

**Passo p**

Faça  $s_p = v_p$

Se  $s_p = n$  então

Faça  $v_{p-1} = s_{p-1} + 1$

Volte ao **Passo p – 1**

Senão

Faça  $z = z + 1$

Se  $z = 1$  então

Calcule o valor da função objetivo ( $C_z$ ) para a solução inicial  $S_0 = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$

Armazene  $C_z$  em  $C_0$

Senão

Calcule o valor da função objetivo ( $C_z$ ) para ( $S = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ )

Se  $C_z < C_0$

Armazene  $C_z$  em  $C_0$  e  $S$  em  $S_0$

Senão

Conserve  $C_0$  e  $S_0$

Faça  $v_p = s_p + 1$

Volte ao início do **Passo p**

### 3.8 Áreas de Proximidade de Unidades de Saúde 24 Horas

Após serem determinados quais os locais para se implantar as Unidades de Saúde 24 Horas, é importante mostrar à população onde se localiza a unidade mais próxima de sua residência e para isso pode ser feito agrupamento de bairros. Cada bairro agrupa-se a um dos bairros onde se deve localizar uma Unidade de Saúde 24 Horas cuja distância entre os centros é mínima.

Neste momento surge a pergunta: “qual o raio de abrangência das Unidades de Saúde 24 Horas (considerando todas do mesmo porte)?”, ou melhor, “quais os locais mais próximos de tais Unidades?”

O diagrama de Voronoi, exposto na secção 2.5, pode responder a essa pergunta. Assim, serão determinadas as áreas de proximidade das unidades pelo diagrama de Voronoi.

### 3.9 Algoritmo para a determinação do diagrama de Voronoi

Este algoritmo foi baseado na análise de diagramas de Voronoi, utilizando-se conceitos de geometria analítica, como: determinação de mediatrizes, distância entre pontos, vetores e outros.

A seguir têm-se os passos (descrição) do algoritmo utilizado para a determinação da construção do diagrama de Voronoi.

**Passo 0.**

Determine o conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  dos  $n$  locais (pontos) do diagrama de Voronoi.

**Passo 1.**

Se  $n \geq 3$  então

Se os  $p_i$ 's (pontos do diagrama de Voronoi) são colineares então:

Trace as mediatrizes de cada par de pontos adjacentes (pontos em que não existe nenhum outro ponto entre eles). Finalizando o diagrama de Voronoi.

Senão

Determine os pontos de interseção ( $inter_j$ ) de todas as mediatrizes de cada trio de pontos  $p_i$ 's.

Dentre os pontos  $inter_j$ 's, determine os pontos que fazem parte dos vértices do diagrama de Voronoi ( $vert\_vor_k$ ).

Trace os segmentos de reta ( $seg\_vor$ ) entre os vértices do diagrama de Voronoi ( $vert\_vor_k$ ).

Trace as semi-retas do diagrama de Voronoi ( $sr\_vor$ ) que formam os polígonos abertos do diagrama de Voronoi. Finalizando o diagrama de Voronoi.

Senão

Se  $n = 2$  então

Trace a mediatriz destes dois pontos, definindo o diagrama de Voronoi.

Senão

Se  $n = 1$  então

O diagrama de Voronoi é formado apenas por este ponto.

Os processos de alguns eventos citados no algoritmo anterior serão definidos a seguir:

1 -  $vert\_vor_k$  (vértice do diagrama de Voronoi).

Um ponto  $inter_j$  será um  $vert\_vor_k$  se não houver nenhum ponto ( $p_i$ ) no interior da circunferência que contém o trio de pontos que determinaram o ponto  $inter_j$  (teorema 3 (i) da seção 2.5.3).

2 -  $seg\_vor$  (segmento de reta do diagrama de Voronoi).

Um segmento de reta do diagrama de Voronoi é determinado pelo segmento de reta cujos extremos são dois  $vert\_vor_k$ 's. Estes dois  $vert\_vor_k$ 's são determinados da seguinte forma: cada  $vert\_vor_k$  será associado a todo  $vert\_vor_g$  ( $k \neq g$ ) e cujos vértices  $vert\_vor_k$  e  $vert\_vor_g$  foram determinados por quatro pontos ( $p_i$ 's). Determinando desta forma, se existir, os polígonos fechados do diagrama de Voronoi.

3 -  $sr\_vor$  (semi-reta do diagrama de Voronoi)

Para cada dois pontos ( $p_i$ ) será determinada uma bissetriz que fará parte do diagrama de Voronoi, onde essa bissetriz é: uma semi-reta ou um segmento de reta (em alguns casos a origem e a extremidade de tal segmento de reta é o mesmo ponto, desta forma o segmento se resumiria a um ponto). Assim, para cada par de pontos ( $p_i$ ) que não foi determinado o segmento de reta, será determinada a semi-reta ( $sr\_vor$ ).

## CAPÍTULO IV

### 4 RESULTADOS

#### 4.1 Resultados encontrados

Para o desenvolvimento computacional dos algoritmos abordados neste trabalho foi utilizado um microcomputador Pentium III 500MHz com 128MB de RAM. Vale salientar que as implementações dos AGs, do algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart e da Busca Exaustiva foram feitas em linguagem Visual Basic, assim como o diagrama de Voronoi.

Para a proposta 1 foram determinadas 5, 6, 7, 8 e 28 medianas como solução do problema. Como o IPPUC pretendeu implantar 8 Unidades de Saúde 24 Horas e foi possível implantar apenas 5, desta forma, para a proposta 1 foram determinadas de 5 a 8 medianas como solução do problema, assim como, para serem feitos testes computacionais determinou-se 28 medianas, valor este que determina o número máximo de combinações.

O número de combinações necessárias para se determinar 5, 6, 7, 8 e 28 medianas pela busca exaustiva (BE) são  $C_{57}^5=4.187.106$ ,  $C_{57}^6=36.288.252$ ,  $C_{57}^7=264.385.836$ ,  $C_{57}^8=1.652.411.475$  e  $C_{57}^{28}=15.033.633.249.770.500$ , respectivamente. Para serem analisados os tempos de execução da busca exaustiva para aquelas quantidades de medianas (5, 6, 7, 8 e 28), considerou-se como critério de parada quando o número de combinações fosse igual a 200.000, chegando nos seguintes tempos de execução (em segundos), respectivamente: 102, 116, 127, 140 e 381. Fazendo-se uma regra de três simples, têm-se como

tempo de execução total, aproximadamente: 35min e 35seg, 5h 50min e 47seg, 1dia 22h e 38min, 13dias 9h e 18min, 908.139 anos, respectivamente.

Foram feitas execuções (completas) da busca exaustiva (proposta 1) para determinar 5 e 6 medianas.

Os resultados encontrados para a proposta 1, foram os mesmos encontrados pelo Algoritmo Genético Generacional (AGG), pelo Algoritmo Genético *steady-state* (AGSS) e pelo algoritmo das p-medianas de Teitz e Bart (APMTB), mostrados nas tabelas 8 e 9.

Número de medianas	Função objetivo	Deslocamento médio (km)	Tempo de execução			
			APMTB	AGG	AGSS	BE
5	5.385.734,90	4,096	00:00:01	00:00:10	00:00:21	00:36:29
6	4.859.505,00	3,695	00:00:01	00:00:11	00:00:23	05:51:40
7	4.450.354,59	3,384	00:00:01	00:00:12	00:00:26	1d 22h 24m
8	4.169.081,73	3,170	00:00:01	00:00:13	00:00:30	-
28	2.265.422,00	1,723	00:00:06	00:00:38	00:01:29	-

Tabela 8: Resultados encontrados para a proposta 1 (matriz de pesos P1)

Número de medianas	Função objetivo	Deslocamento médio (km)	Tempo de execução			
			APMTB	AGG	AGSS	BE
5	20.274,25	4,681	00:00:01	00:00:10	00:00:21	00:36:44
6	18.865,52	4,412	00:00:01	00:00:11	00:00:23	05:52:17
7	17.527,95	3,975	00:00:01	00:00:12	00:00:26	1d 22h 30m
8	16.542,24	3,921	00:00:01	00:00:13	00:00:30	-
28	9.398,72	1,882	00:00:06	00:00:37	00:01:30	-

Tabela 9: Resultados encontrados para a proposta 1 (matriz de pesos P2)

O número de combinações do problema da proposta 2 (determinar dois novos locais para implantação de Unidades de Saúde 24 Horas) é  $C_{52}^2 = 1.326$ , onde o número 52 equivale a exclusão dos 18 bairros que estão na AR Matriz e os 5 bairros onde já existem Unidade de Saúde 24 Horas. Desta forma, para a

proposta 2 foi usada apenas a busca exaustiva. O tempo de execução foi igual a 1 segundo.

Os resultados encontrados para a proposta 2 estão na tabela 10.

Bairros	Matriz usada			Proposta IPPUC (1996)	Proposta IPPUC (2000)
	P3	P4	P5		
	Uberaba	Capão Raso	Uberaba	Cajuru	Cajuru
Barreirinha	Capão da Imbuia	Barreirinha	Pinheirinho	Pinheirinho	
Deslocamento médio (km)	4,321	4,953	4,309	5,325	5,386

Tabela 10: Resultados encontrados para a proposta 2 junto com a proposta do IPPUC

## 4.2 Diagrama de Voronoi para os resultados encontrados

Todos os diagrama de Voronoi, a seguir, foram determinados pelos centros dos bairros que obtiveram melhor resultado para as propostas 1 e 2, assim, serão descritas cada uma das figuras.

Na figura 23 tem-se o diagrama de Voronoi (DV) para as atuais Unidades de Saúde 24 Horas, cujos bairros são: Fazendinha (42), Campo Comprido (44), Tingüi (54), Boqueirão (56), Sítio Cercado (65).

Nas figuras 24, 25, 26, 27 e 28 têm-se os DVs para a proposta 1, para 5, 6, 7, 8 e 28 medianas, respectivamente. Nas figuras 29, 30, 31, 32, 33 têm-se os DVs para a proposta 1, para 5, 6, 7, 8 e 28 medianas, respectivamente. Na figura 34 tem-se o DV para a proposta 2 utilizando as matrizes de pesos P3 e P5, pois obteve-se os mesmos bairros como resultado. A figura 35 traz o DV para a proposta 2, utilizando a matriz de peso P4. Na figura 36 tem-se o DV para a proposta do IPPUC.

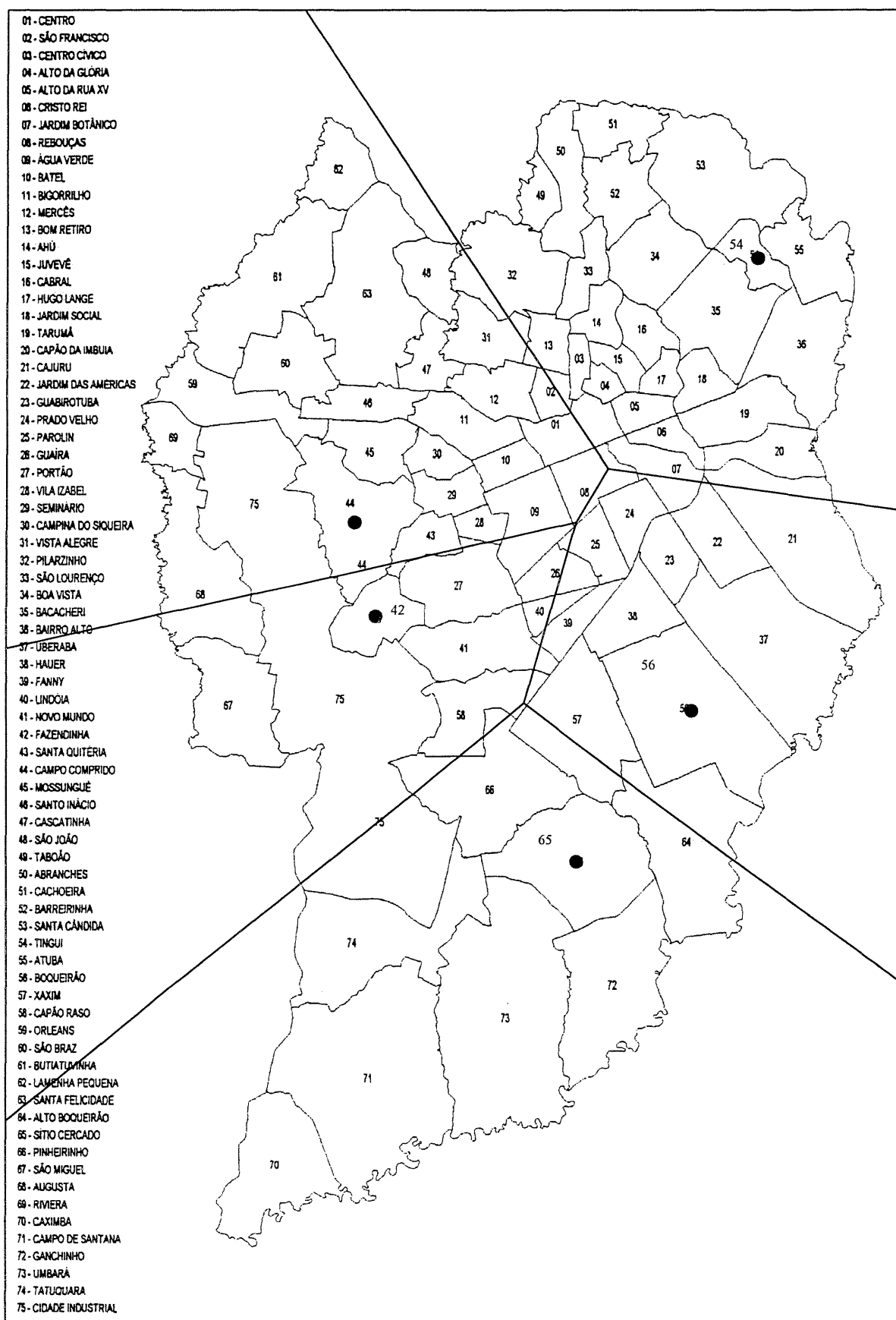


Figura 23: Diagrama de Voronoi para as Unidades de Saúde 24 Horas (2002)

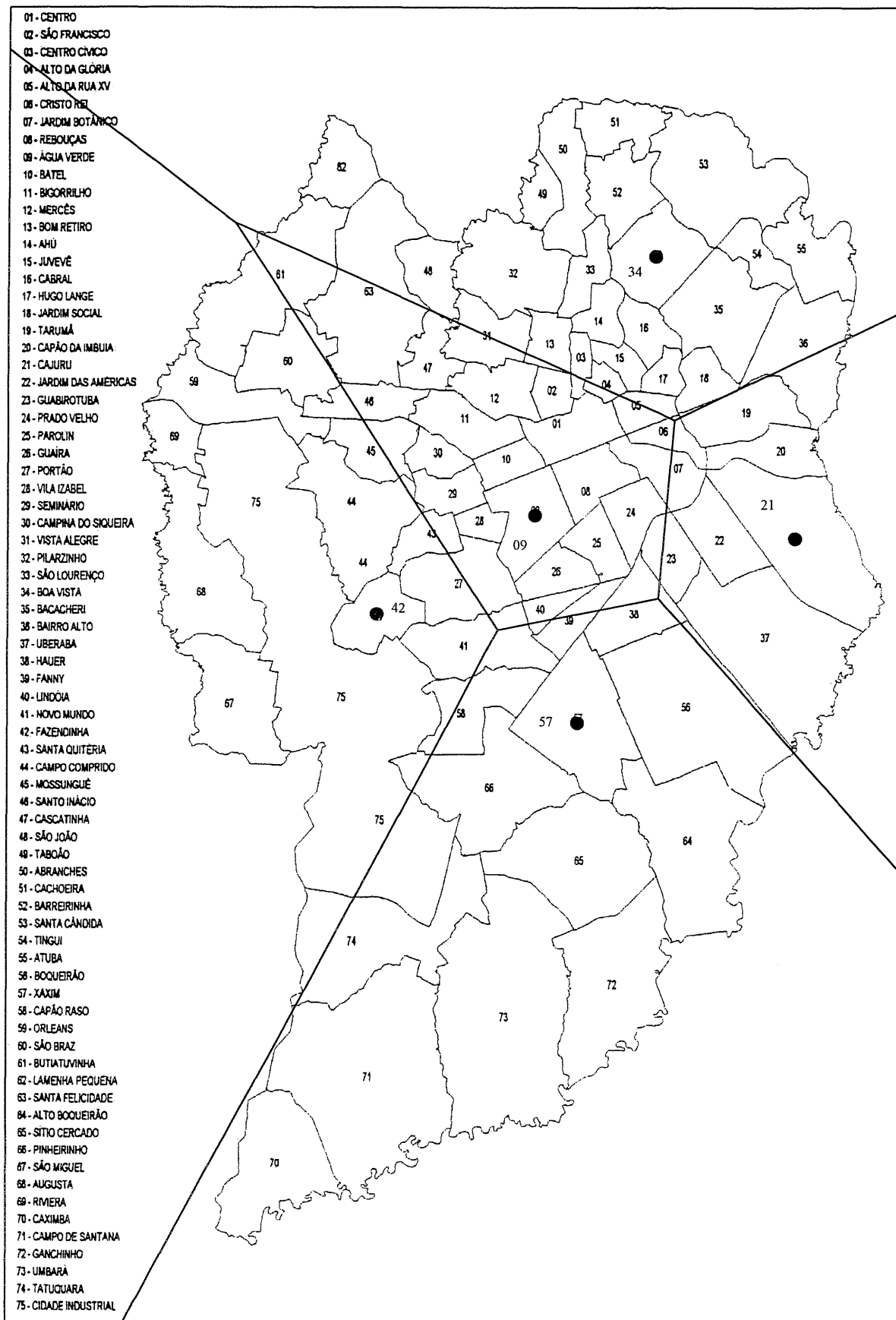


Figura 24: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (5 medianas – situação 1)

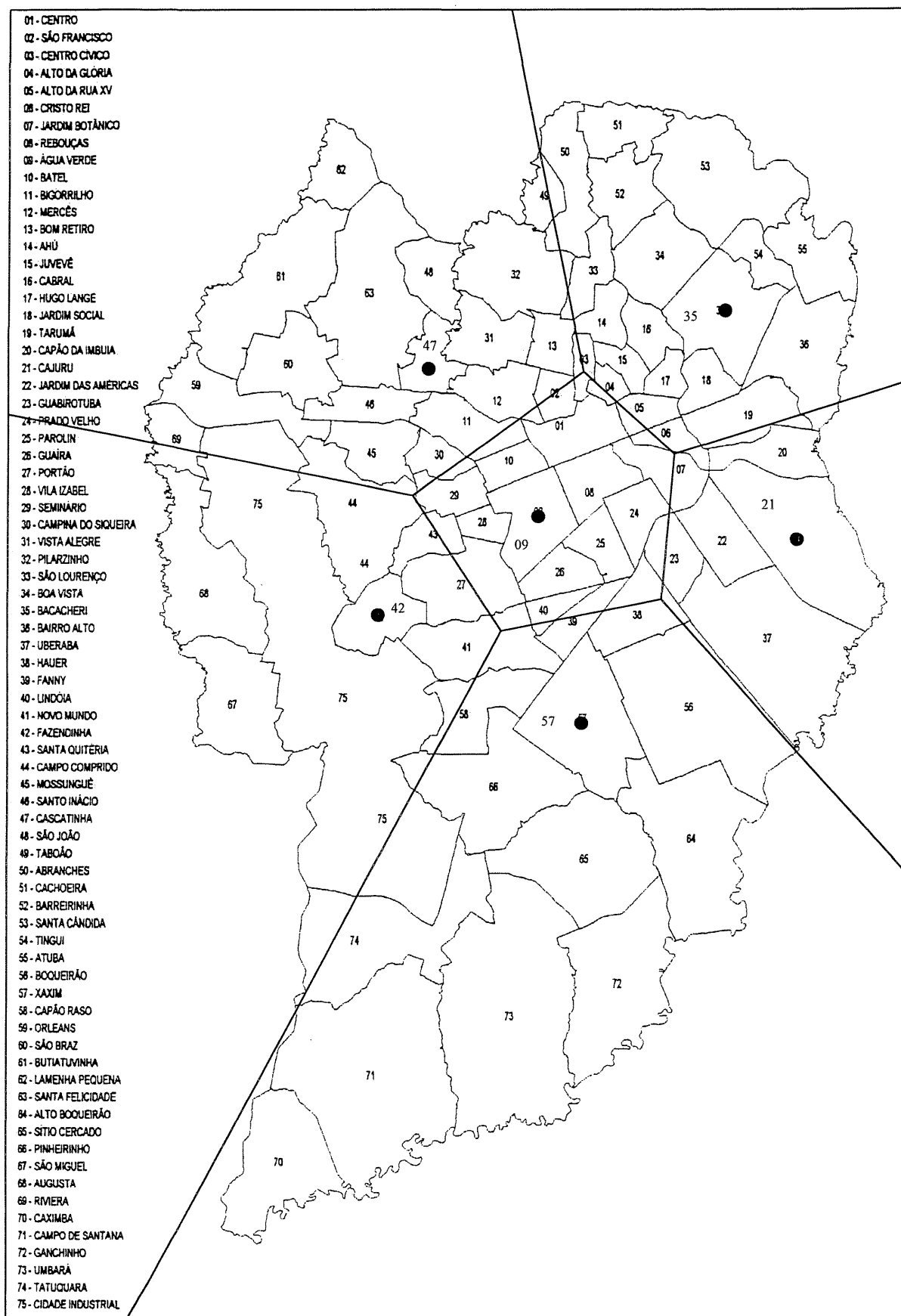


Figura 25: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (6 medianas – situação 1)

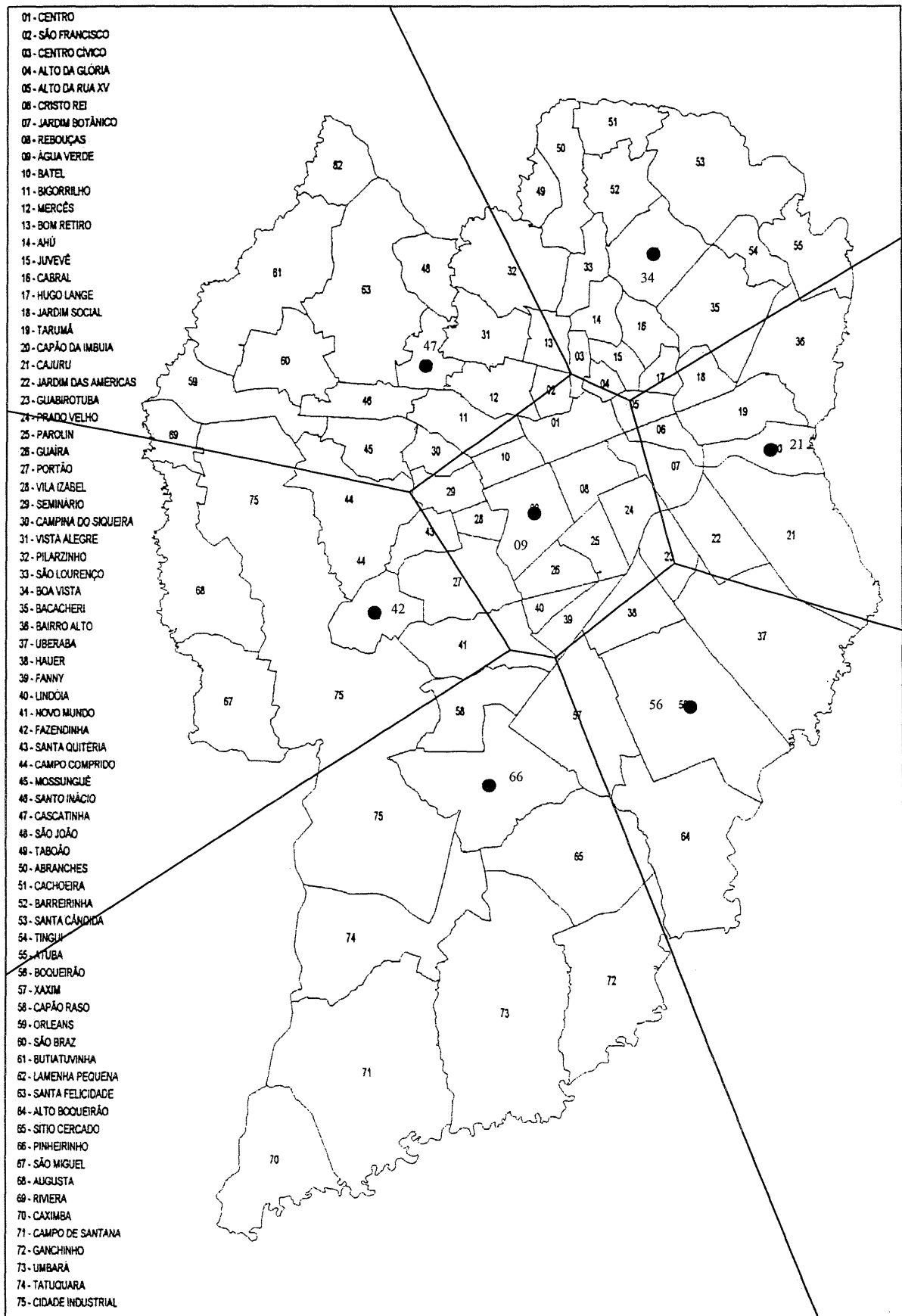


Figura 26: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (7 medians – situação 1)

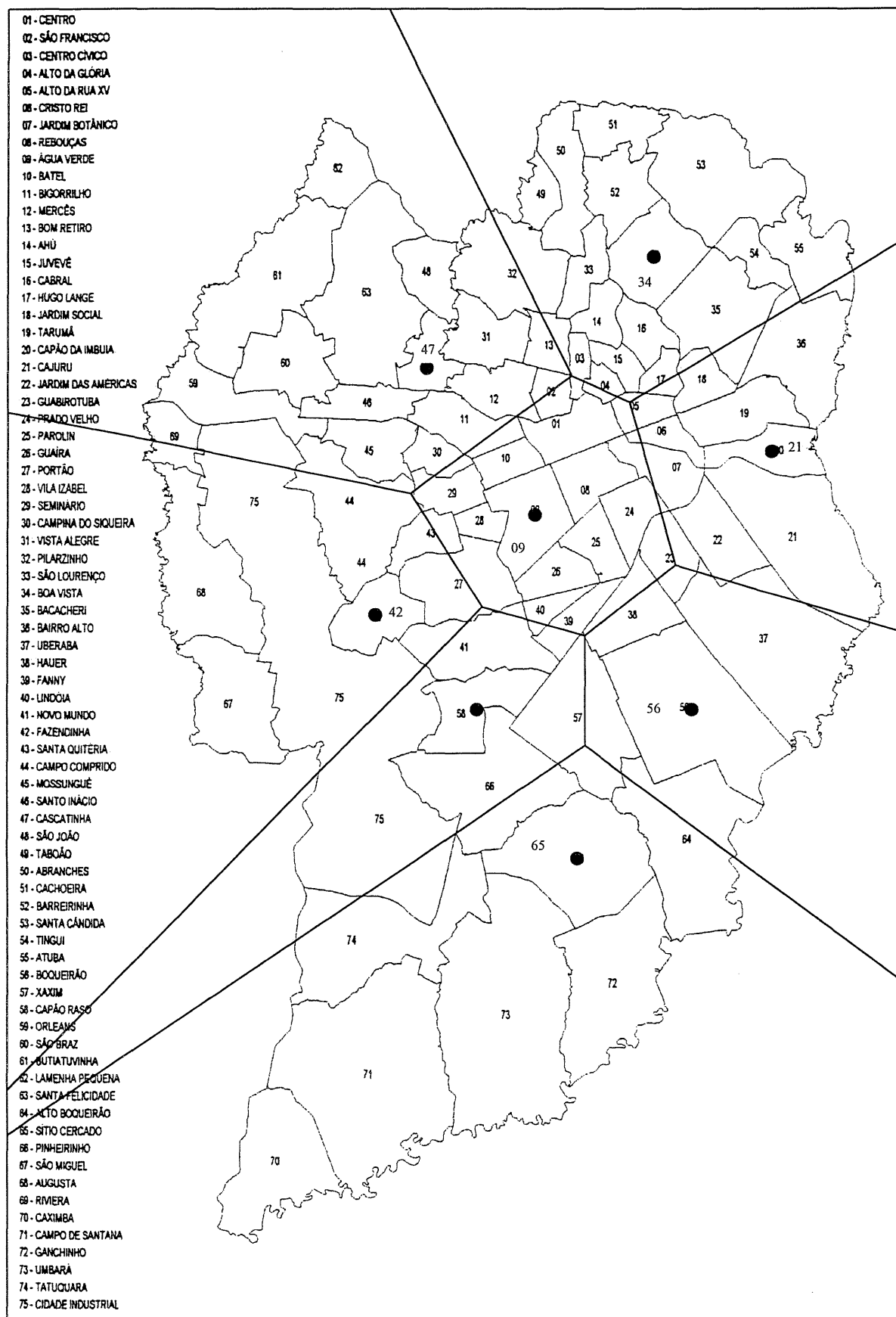


Figura 27: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (8 medianas – situação 1)

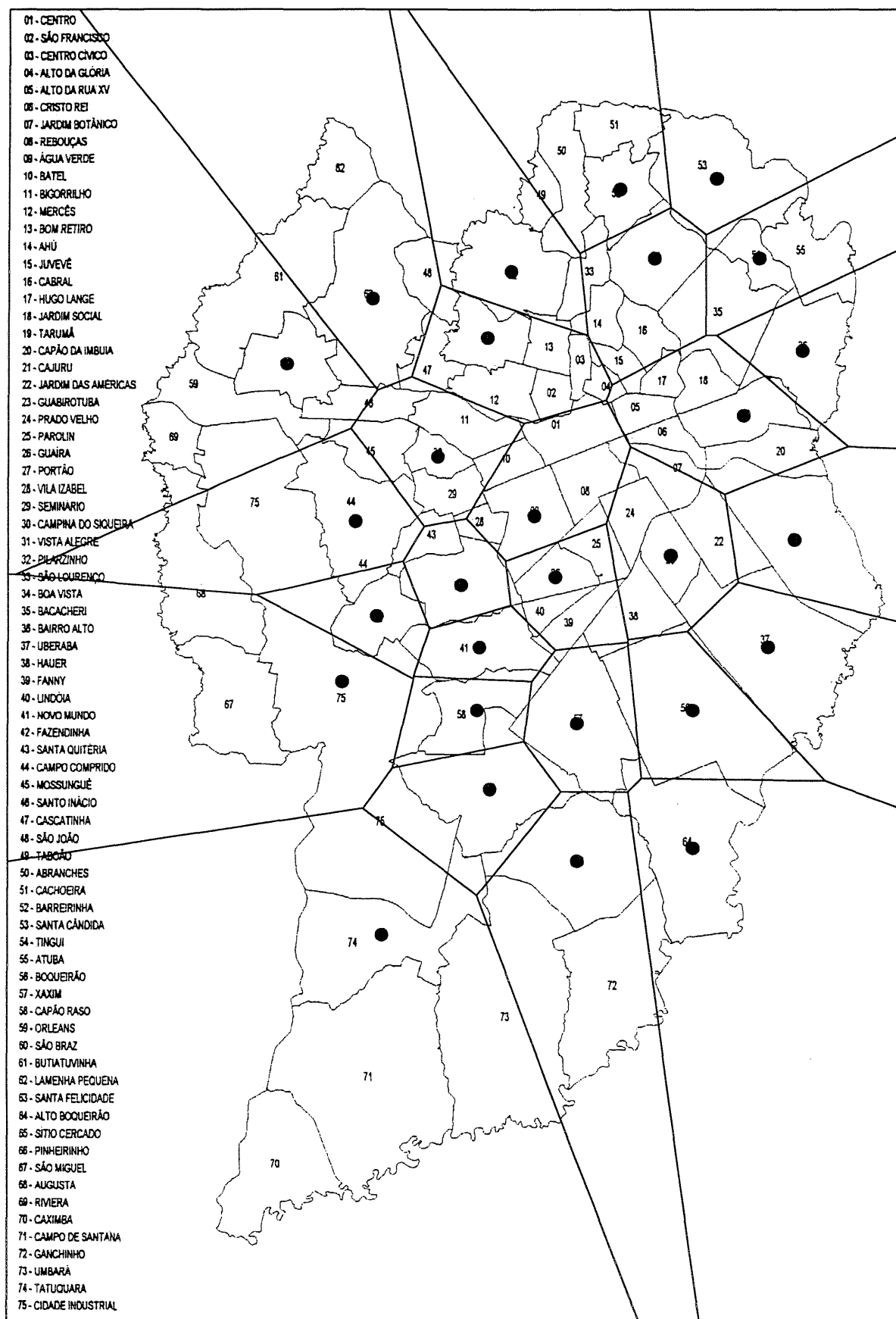


Figura 28: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (28 medianas – situação 1)

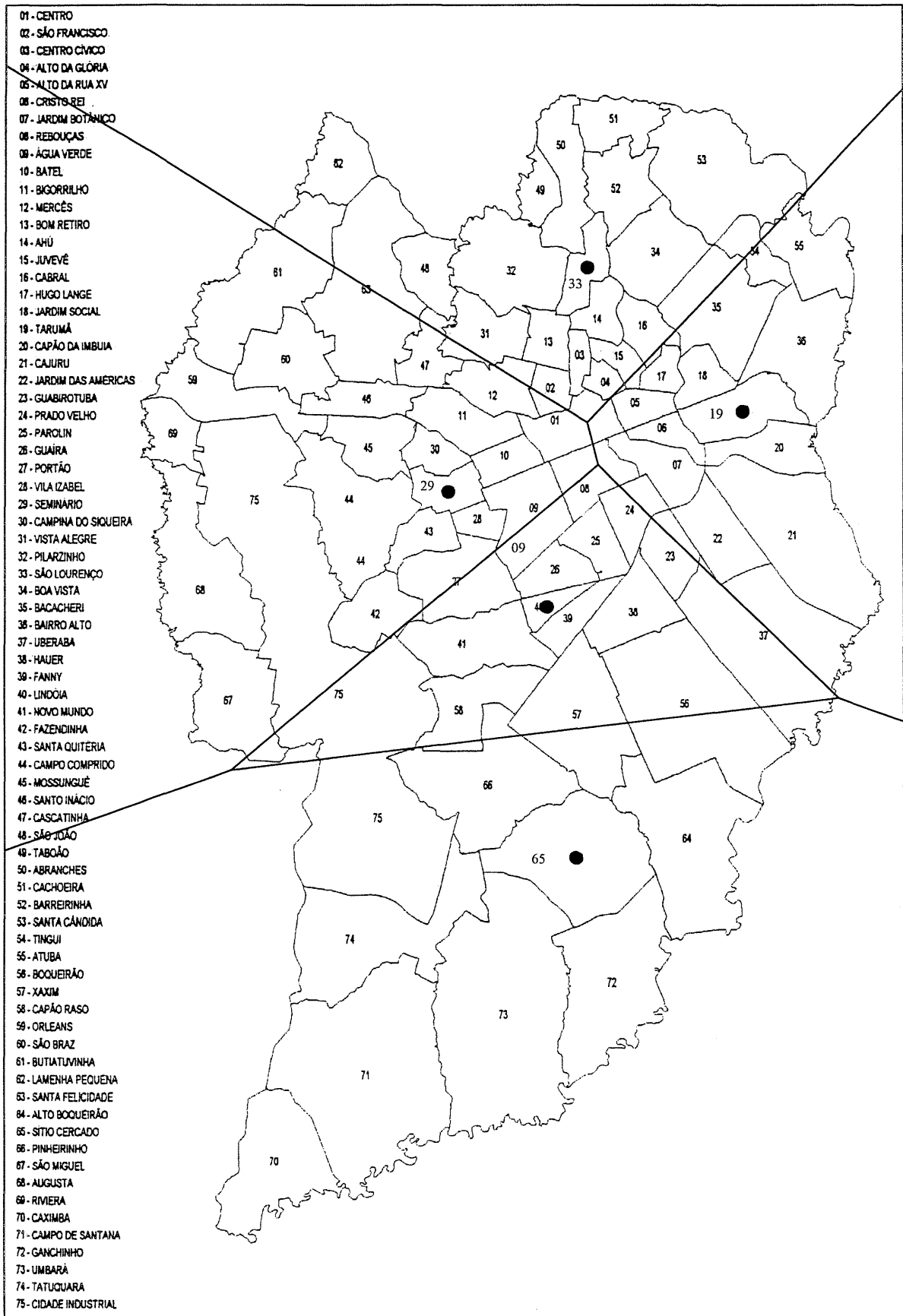


Figura 29: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (5 medianas – situação 2)

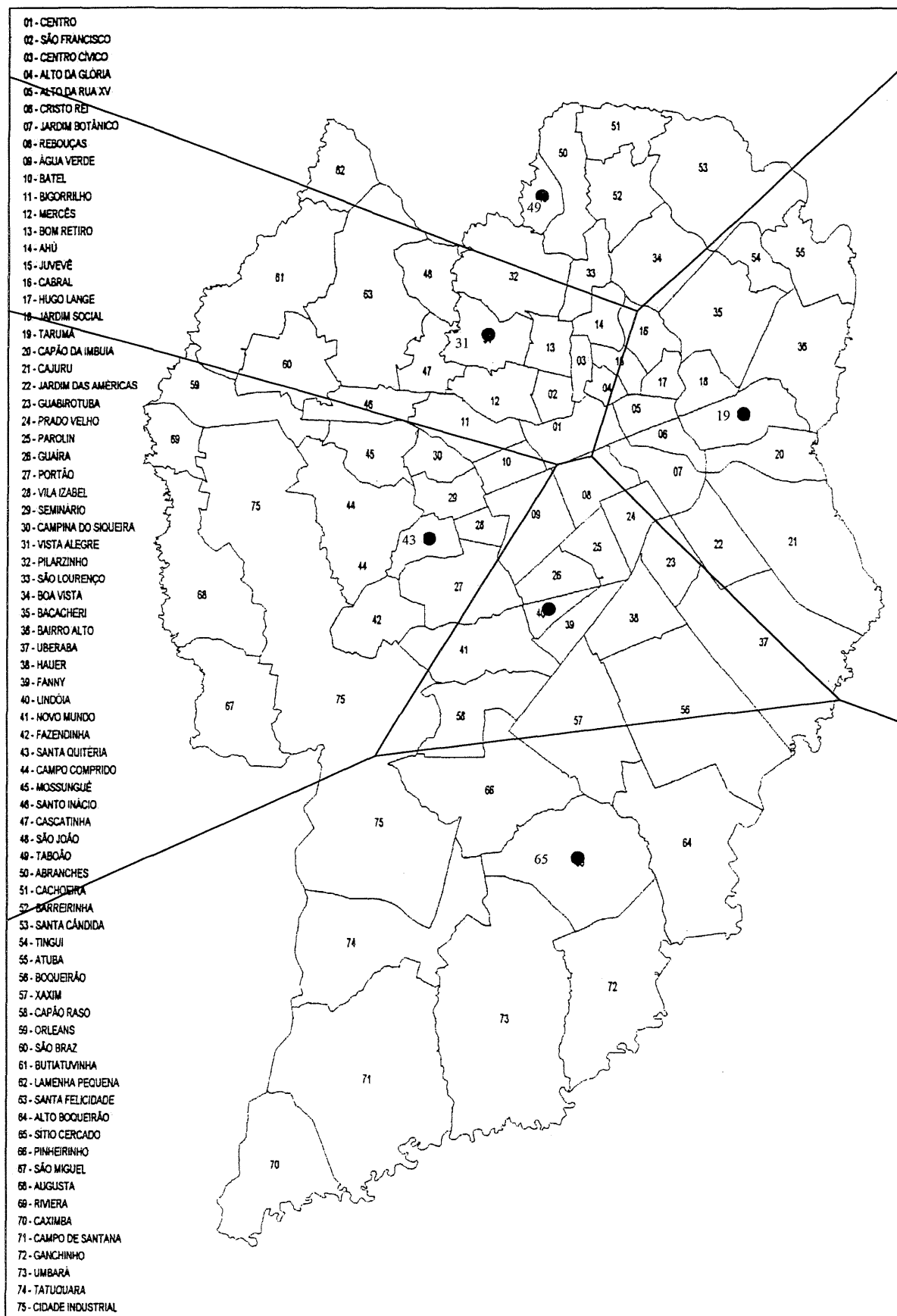


Figura 30: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (6 medianas – situação 2)

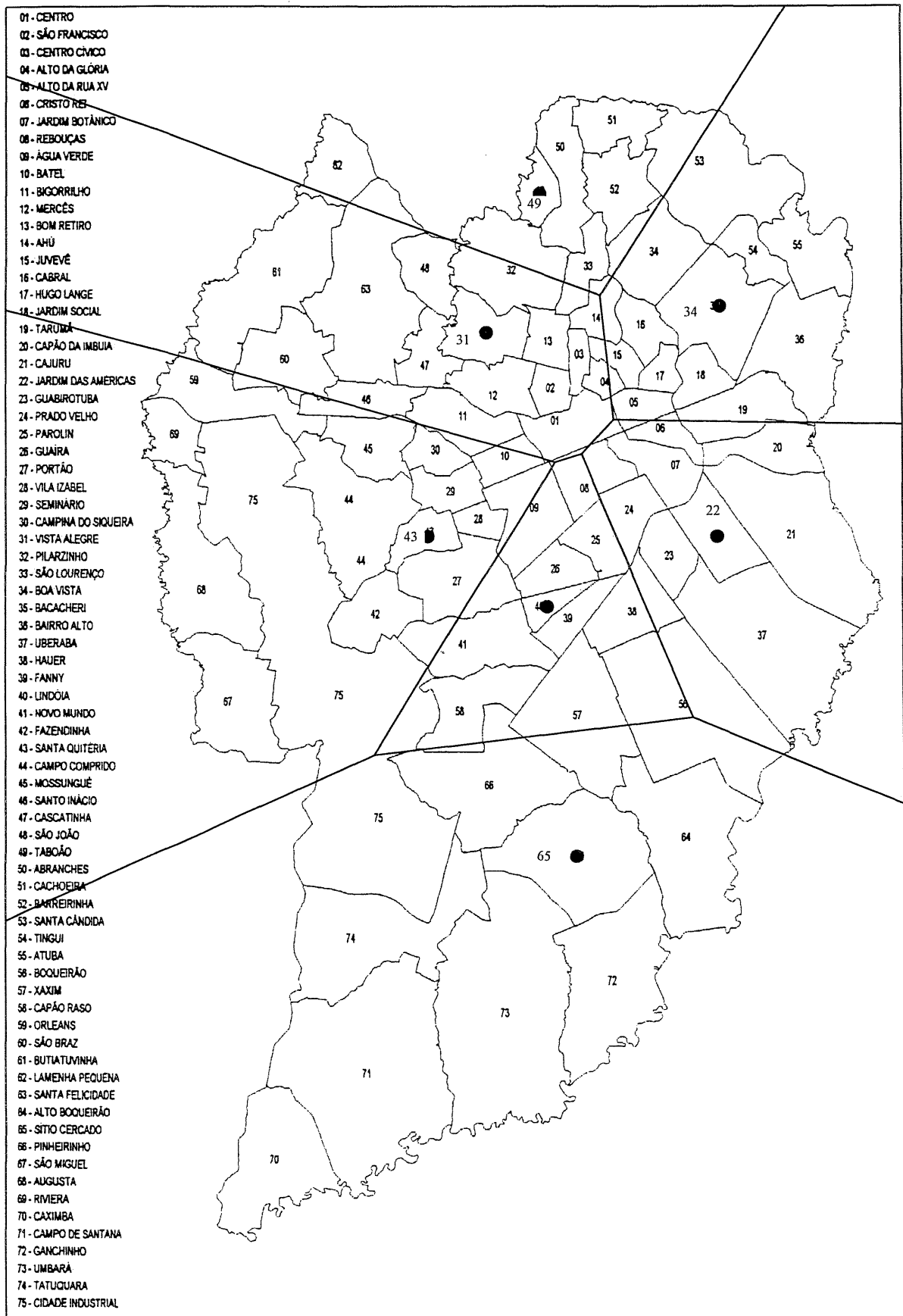


Figura 31: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (7 medianas – situação 2)

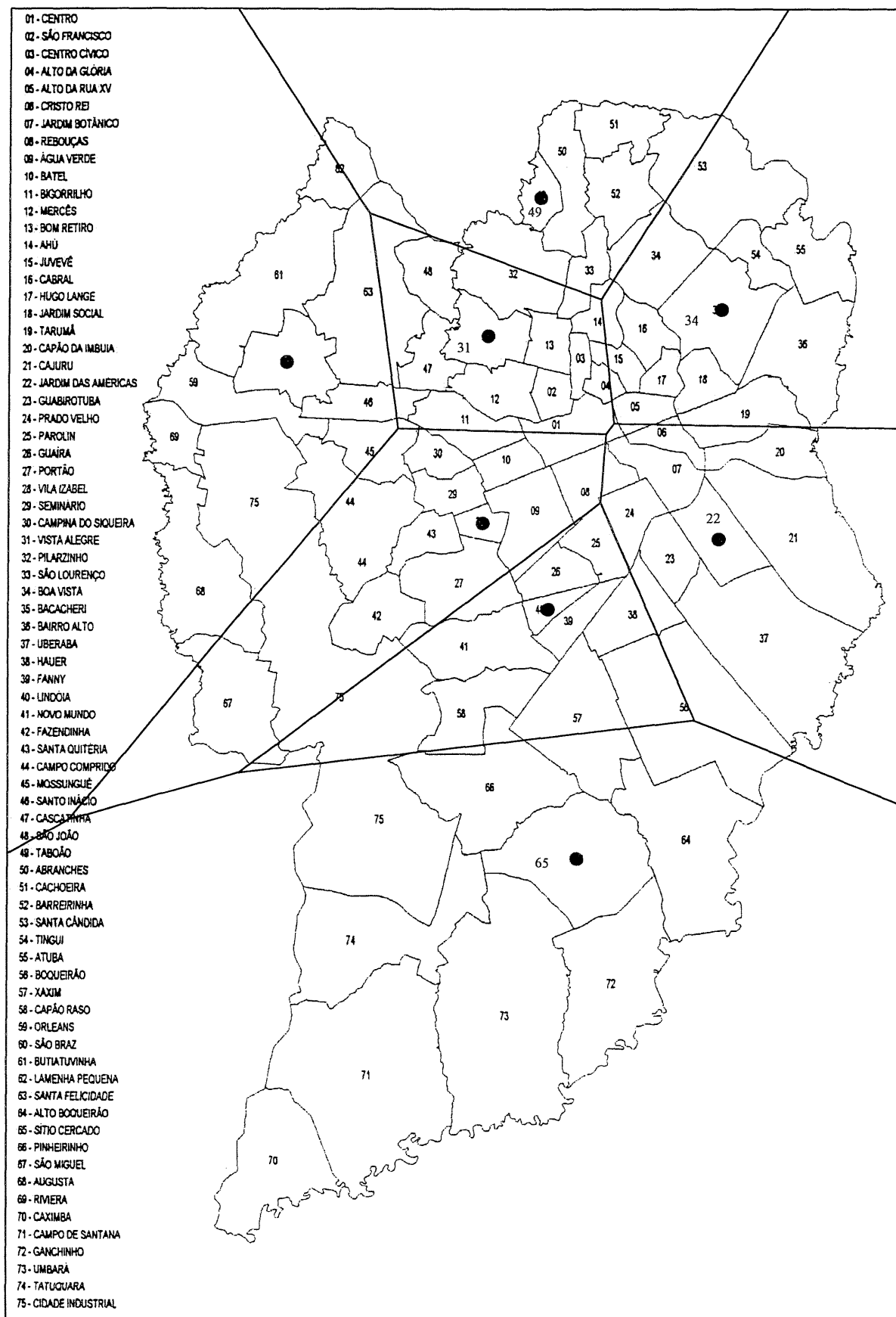


Figura 32: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (8 medianas – situação 2)

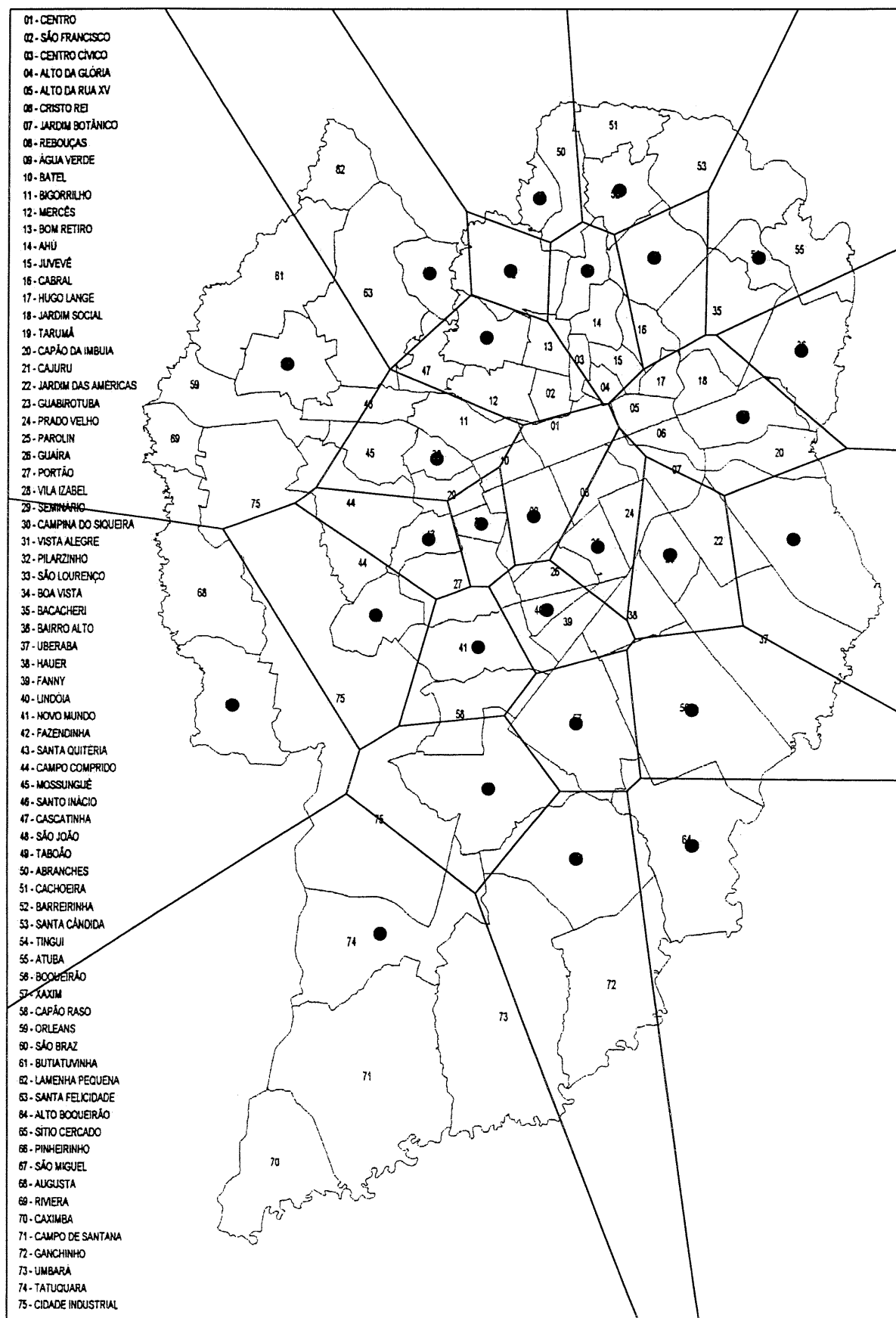


Figura 33: Diagrama de Voronoi para a proposta 1 (28 medianas – situação 2)

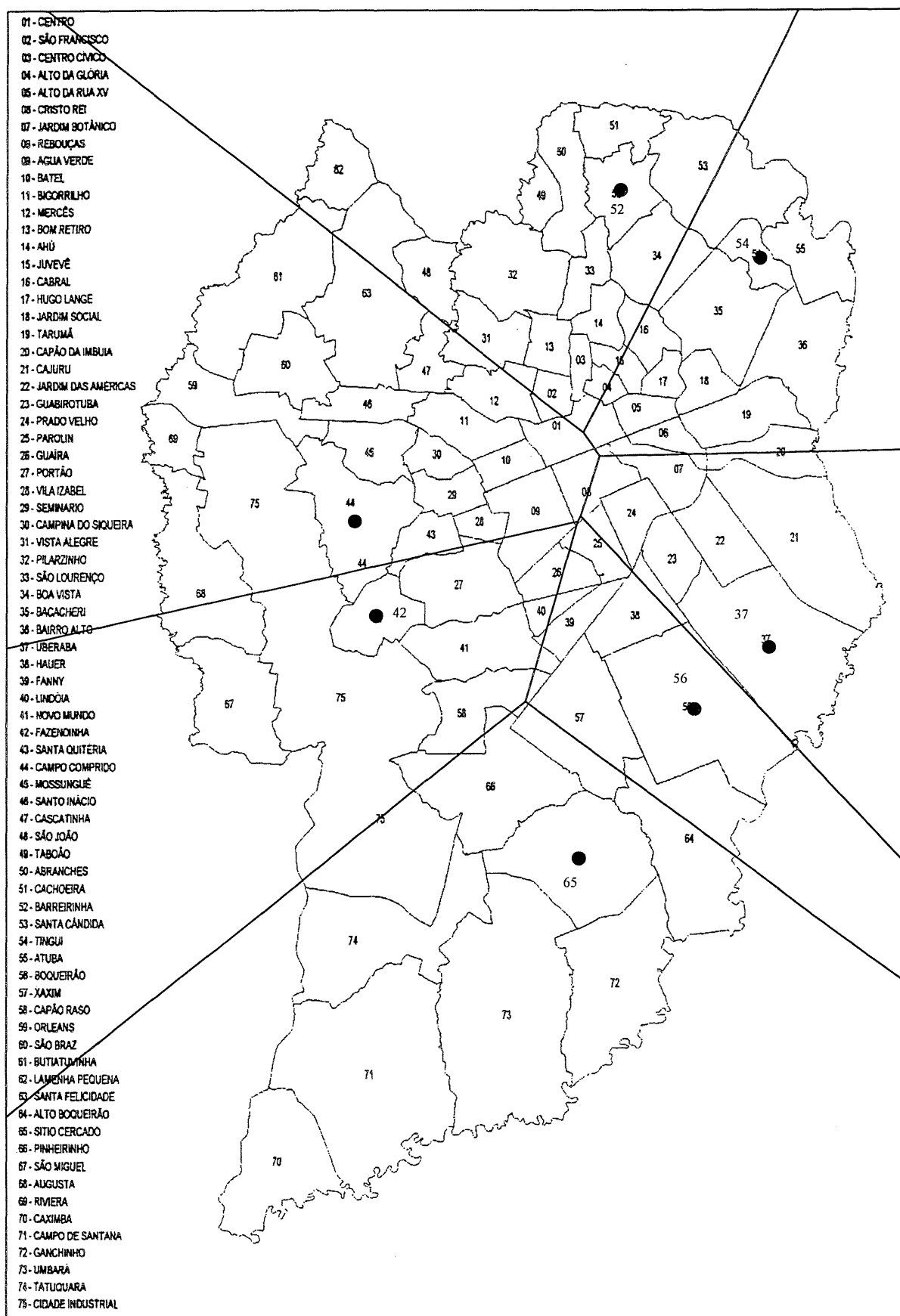


Figura 34: Diagrama de Voronoi para a proposta 2 (matrizes de pesos P3 e P5)

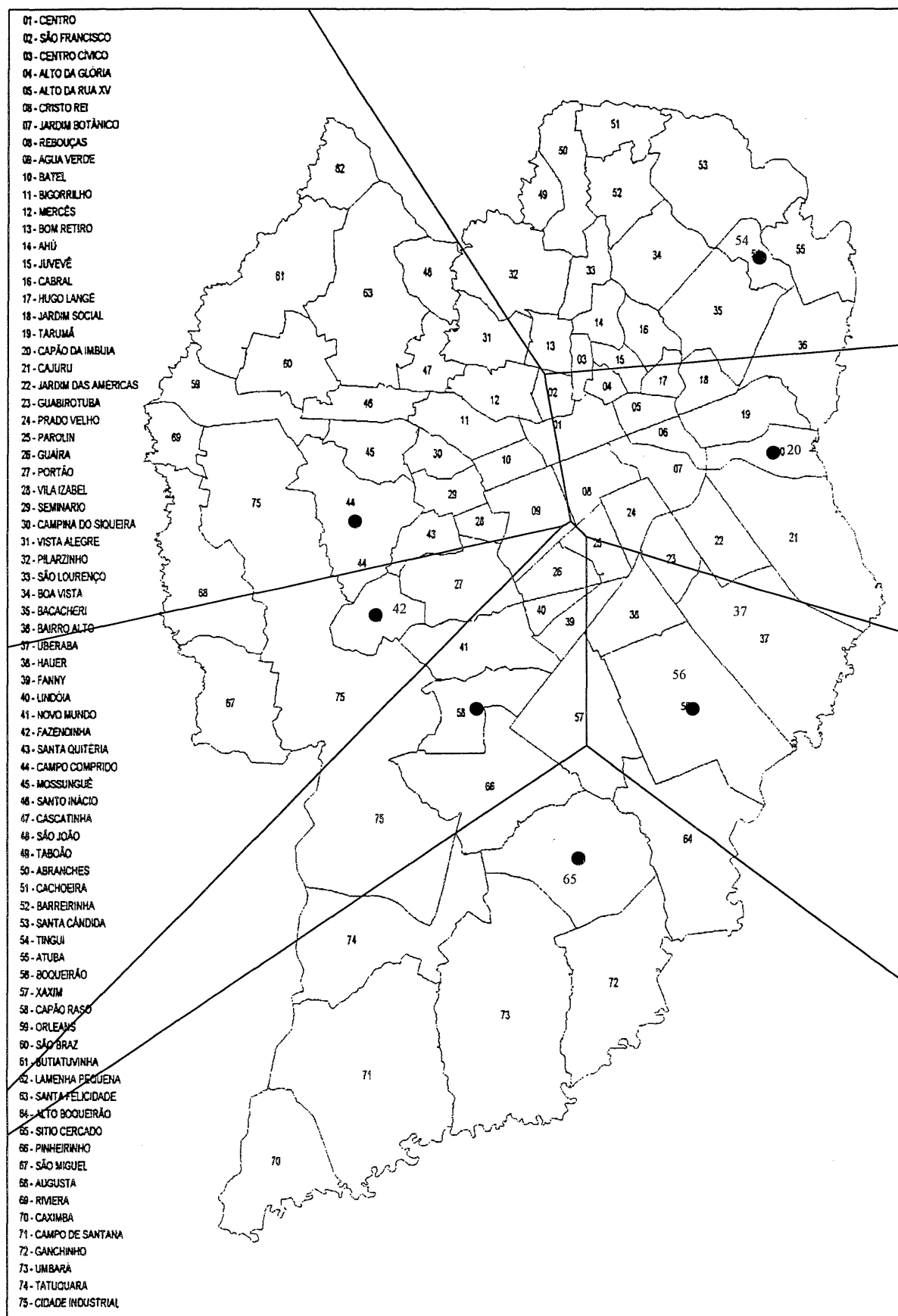


Figura 35: Diagrama de Voronoi para a proposta 2 (matriz de pesos P4)

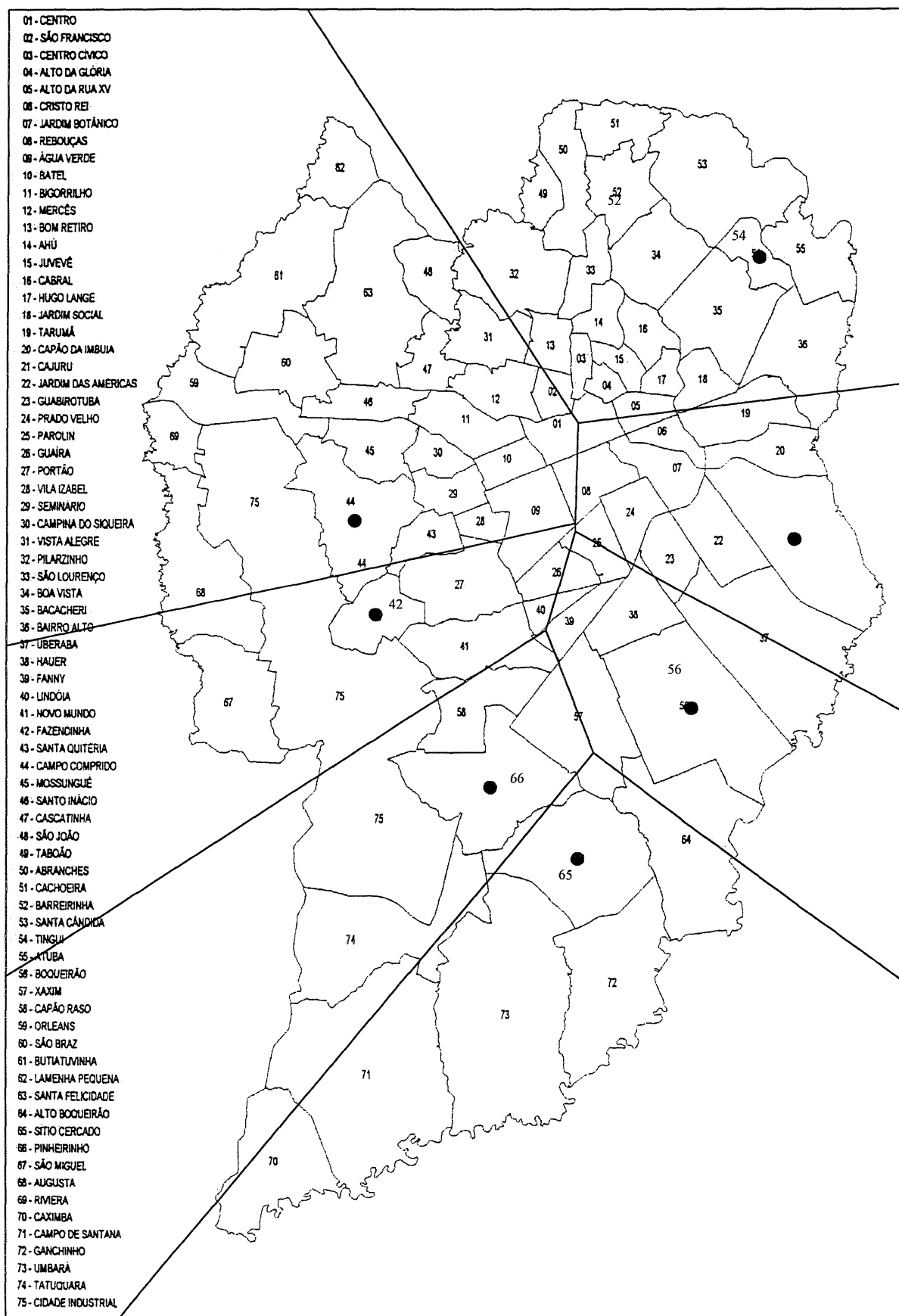


Figura 36: Diagrama de Voronoi para a proposta do IPPUC

## CAPÍTULO V

### 5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

#### 5.1 Discussão dos resultados

Os tempos computacionais da busca exaustiva para determinar 8 e 28 medianas (13dias 9h e 18min, 908.139 anos, respectivamente), justifica a utilização das heurísticas apresentadas neste trabalho.

O tempo de execução das heurísticas apresentadas é considerado satisfatório, ou melhor, o tempo de execução das heurísticas, apesar de diferentes entre si, é bem inferior ao tempo de execução da busca exaustiva.

Vale salientar que os resultados encontrados pelos AGs e pelo APMTB foram os mesmos, desta forma não sendo necessária a discussão de tais resultados entre as heurísticas para a proposta 1.

Como todos os resultados encontrados pelas heurísticas foram os mesmos, é provável que eles sejam as soluções ótimas do problema, exceto os da proposta 1 para determinar 5, 6 e 7 medianas e os da proposta 2 que são soluções exatas.

Como testes computacionais foram executados os AGs e o APMTB 100 vezes para determinar 5 medianas, obtendo-se as seguintes quantidades de solução ótima: 36 vezes para o AGG, 43 para o AGSS e 10 para o APMTB. Com estes resultados verifica-se que os AGs são mais eficientes que o APMTB, pois o critério de parada do APMTB é a determinação de um mínimo (local ou global), o

que não acontece facilmente com os AGs. Mesmo assim, verifica-se que, apesar da quantidade das respostas de solução ótima do APMTB ser inferior as dos AGs, as heurísticas são consideradas boas, referindo-se tanto ao tempo de resposta como os resultados propriamente ditos, visto que os resultados foram os mesmos.

Os deslocamentos médios da tabela 8 são inferiores aos da tabela 9, o que já era previsto, pois, para determinar os resultados encontrados na tabela 8 foi considerado apenas a distância de deslocamento dos usuários, enquanto que para os da tabela 9 foram considerados o aspecto saúde, o aspecto transporte e a densidade demográfica.

O IPPUC pretende implantar (2001-2004) duas novas Unidades de Saúde 24 horas, localizadas nos bairros Pinheirinho e Cajuru. Verificou-se que os melhores locais para a implantação de duas novas US 24 Horas procurando apenas minimizar as distâncias dos deslocamentos dos usuários seriam nos bairros Uberaba e Barreirinha, tanto usando dados de 1996 como os de 2000. Porém, considerando alguns aspectos (densidade demográfica, saúde e transporte) observados pelo IPPUC (dados de 1996) seriam nos bairros Capão Raso e Capão da Imbuia. Importante verificar que os locais propostos pelo IPPUC e os locais encontrados pela busca exaustiva atendem muito bem o processo de descentralização da atividade saúde.

Verificando-se, desta forma, que o resultado encontrado para a proposta 2, usando a matriz de pesos P4, é muito próximo a proposta feita pelo IPPUC, pois o bairro Capão da Imbuia é adjacente ao bairro Cajuru, assim como o bairro Capão Raso é adjacente ao bairro Pinheirinho.

## 5.2 Conclusões

As heurísticas apresentadas são consideradas de fácil implementação. Tais heurísticas trouxeram ótimos resultados para a determinação de soluções para o problema das  $p$ -medianas, indicando desta forma onde estão as melhores localizações para se implantar (ou deveriam ser implantadas) as Unidades de Saúde 24 Horas, em um tempo considerado satisfatório (alguns segundos, horas ou dias). Assim, verifica-se que as heurísticas apresentadas foram adequadas para resolver o problema em questão, assim como o uso da Busca Exaustiva.

Após determinar a quantidade de Unidades de Saúde 24 Horas a ser implantada, a primeira etapa a ser feita é fazer um estudo para saber onde estão localizadas as melhores regiões para a construção de tais unidades. Na segunda etapa é feito o estudo em campo, para se determinar o local onde será construída uma unidade dentro da região. Foi mostrado que o primeiro passo pode ser resolvido, através do algoritmo das  $p$ -medianas, reduzindo consideravelmente o trabalho feito pelo IPPUC, assim como, mostrando matematicamente em pouco tempo as melhores localizações para implantação de tais unidades.

As matrizes de pesos utilizadas não são as ideais para se determinar as localizações das medianas (Unidades de Saúde 24 Horas) pois, para determiná-las são necessários pesos que reflitam a atratividade real de cada local. Para isso são necessários estudos de vários outros aspectos além dos que foram abordados neste trabalho. Apesar disso foram determinadas medianas que refletem boas localizações relacionadas às distâncias médias de deslocamentos dos usuários desde o bairro onde residem ao bairro cujo centro é (seria) uma mediana.

O algoritmo para a determinação do diagrama de Voronoi resolveu analiticamente a determinação das áreas de proximidades das Unidades de Saúde 24 Horas.

Com o diagrama de Voronoi é possível saber onde se encontra a Unidade de Saúde 24 Horas mais próxima de qualquer ponto da cidade.

### 5.3 Sugestões para trabalhos futuros

É muito importante trabalhar com dados atualizados para que se possa Ter uma maior aplicabilidade do estudo. Portanto, serão dadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

a) Para que se possa ter a localização mais precisa do local para implantação das Unidades de Saúde 24 horas, seria interessante se trabalhar com regiões menores, com isso, sugere-se utilizar os setores censitários do censo 2000.

b) O IPPUC planejou para o ano de 2001 a construção de 10 unidades básicas de saúde. Sugere-se implementar, além dos algoritmos utilizados neste trabalho, outros algoritmos como *Simulated Annealing*, *Tabu Search* e outros e comparar com os locais previstos para a implantação dessas novas unidades (como regiões usar a sugestão "a").

c) Determinar para as sugestões "a" e "b" matrizes de pesos mais refinadas, ou seja, que reflita o quanto possível a atratividade de cada região em estudo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARBOSA, H, J, C. **Introdução aos Algoritmos Genéticos**. In: XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada: SBMAC, Gramado, setembro de 1997. 50p.
- BEASLEY, J. E. **A note on solving large p-median problems**. European Journal of Operations Research, v.21, p.270-273, 1985.
- BEASLEY, J. E. **Distributing test problems**. Journal of the Operations Research Society, v.41, p.1069-1072, 1990.
- BEASLEY, J. E; CHIYOSHI, F. **Lagrangian heuristic for location problems**. European Journal of Operations Research, v.65, p.383-399, 1993.
- BERG, M. K. **Computational Geometry Algorithms and Applications**. New York: Springer Publishing, 1997
- BEZERRA, O. B. **Localização de Postos de Coleta ao Escoamento de Produtos Extrativistas – Um Estudo de Caso Aplicado ao Babaçu**. Florianópolis, 1995. Dissertação no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, 1995.
- CHRISTOFIDES, N. **Graph Theory – An Algorithmic Approach**. New York: Academic Press, 1975.
- CORRÊA, E. S. **Algoritmos Genéticos e Busca Tabu Aplicados ao Problema das p-Mediana**s. Curitiba, 2000. Dissertação no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, 2000.
- DARWIN, C. **A origem das Espécies**. São Paulo: Melhoramentos, 1982.
- DASKIN, M. **Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications**. New York: Wiley Interscience, 1995
- DE JONG, K. A. **An Analysis of the Behavior of a Class Genetic Adaptive Systems**. Doctoral Thesis, University of Michigan, 1975.
- DE JONG, K. A. **Genetic algorithms are NOT function optimizers**. In FOGA-92, Foundations of Genetic Algorithms. Vail, Co, 24-29 July 1992. p.5-17
- DIAS, J. S; BARRETO, J. M. **Algoritmo Genético: inspiração biológica na solução de problemas – uma introdução**. Revista Marítima Brasileira, n.11, p.105-128, 1998.
- DREZNER, Z. **Facility Location: A Survey of Applications and Methods**. New York: Springer, 1995.

- FERRERAS, J. C. F. **Visualización interativa del algoritmo de Fortune en internet.** [on line]. Disponível na internet via URL: <http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/voronoi/voronoi/voronoi.html>. Arquivo consultado em 28 de novembro de 2001.
- FOGEL, L. J.; OWENS, A. J.; WALSH, M. J. **Artificial Intelligence Through Simulated Evolution.** New York: Wiley, 1966.
- FOLEY, J. D.; DAM, V. A.; FEINER, S. K.; HUGHES, J. F. **Computer graphics: principles and practice.** Reading, USA: Addison-Wesley, 1991.
- FREITAS, E. D. **Diagrama de Voronoi.** [on line] Disponível na internet via URL: <http://www.ime.usp.br/~freitas/gc/voronoi.html>. Arquivo capturado em 09 de julho de 2001.
- GALVÃO, R. D.; CHIYOSHI, F. **A statistical analysis of simulated annealing applied to the p-median problem.** Operations Research, v.96 p.61-74, 2000.
- GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.** Reading, USA: Addison-Wesley, 1989.
- HAKIMI, S. L. **Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph.** Operations Research, v.12, p.450-459, 1964.
- HAKIMI, S. L. **Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems.** Operations Research, v.13, p.462-475, 1965.
- HOFF, K. E.; CULVER, T.; KEYSER, M.; LIN, M.; MANOSHA, D. **Fast computation of generalized Voronoi diagram using graphics hardware.** [on line] Disponível na internet via URL: [http://www.cs.unc.edu/~geom/voronoi/siggraph\\_paper/voronoi.pdf](http://www.cs.unc.edu/~geom/voronoi/siggraph_paper/voronoi.pdf). Arquivo capturado em 09 de julho de 2001.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence.** Massachusetts: MIT Press, 1975.
- INSTITUTO DE PESQUISA E PLANEJAMENTO URBANO DE CURITIBA. **Curitiba Saúde 24 Horas: uma proposta para um novo modelo de atenção.** Curitiba: IPPUC, 1991.

- INSTITUTO DE PESQUISA E PLANEJAMENTO URBANO DE CURITIBA.  
**Curitiba em Dados.** Curitiba: IPPUC, 1996.
- INSTITUTO DE PESQUISA E PLANEJAMENTO URBANO DE CURITIBA.  
**Curitiba em Dados.** Curitiba: IPPUC, 1999a.
- INSTITUTO DE PESQUISA E PLANEJAMENTO URBANO DE CURITIBA.  
**Curitiba em Números.** Curitiba: IPPUC, 1999b.
- JARVINEN, P. J.; RAJALA, J. **A branch and bound algorithm for seeking the p-median.** Operations Research, v.20, p.173-178, 1972.
- KOZA, J. R. **Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection.** Cambridge: MIT Press, 1992.
- KRASNOGOR, N; MOSCATO, P; NORMAN, M. G. **A New hybrid heuristic for large geometric traveling salesman problems based on the Delaunay triangulation.** In: XXVII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 1995, Vitória – ES. p.772-776.
- LARSON, R, C; ODONI, A, R. **Urban Operations Research.** Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.
- LORENA, L. A. N.; SENNE, E. L. F.; PAIVA, J. A. C.; MARCONDES, S. P. B. **Integração de modelos de localização a sistemas de informações geográficas.** In: Revista do Departamento de Engenharia de Produção. São Paulo: Universidade Federal de São Carlos, v.8, n.2, agosto de 2001.
- MARANZANA, F. E. **On the location of supply points to minimize transport costs.** Operations Research Quarterly, v.15, p.261-267, 1964.
- MAYERLE, S. F. **Um algoritmo genético para solução do problema do caixeiro viajante.** Artigo de circulação interna do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas da UFSC. Florianópolis, 1994.
- MINIEKA, E. **The centers and medians of a graph.** Operations Research. vol.25, n.4, p. 641-650, 1977.
- NEEBE, A. W. **A branch and bound algorithm for the p-median transportation problem.** Journal of the Operations Research Society, v.29. p.989-995, 1978.
- NEHAB D.; ANDRADE D. V.; OLIVEIRA D. T.; WERNECK R. **Computação do Diagrama de Voronoi Generalizado com Hardware Gráfico.** [on line]. Disponível na internet via. URL: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/~diego/vor/>. Arquivo capturado em 09 de julho de 2001.

- NOVAES, A. G.; ALVARENGA, A. C. **Logística Aplicada – suprimento e distribuição física**. São Paulo: Pioneira. 1994.
- NUNES, L. F. **Algoritmos genéticos aplicados na abordagem de um problema real de roteirização de veículos**. Curitiba, 1998. Dissertação no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, 1998.
- O'ROURKE, J. **Computational Geometry in C**. Cambridge: Univ. Press, 1994
- PARKER, R. G.; RARDIN, R. L. **Discrete Optimization**. New York: Academic Press, 1988.
- PREPARATA, F. P.; SHAMOS, M. I. **Computational Geometry: an introduction**. New York: Springer-Verlag, 1985.
- ROSÁRIO, R. R. L. **Aplicação do problema das p-medianas para determinar a localização de Unidades de Saúde 24 Horas**. In: XXXIII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL – SBPO, 2001, Campos do Jordão - SP, p.1155-1166, 2001,.
- RESNICK, R; HALLIDAY, D. **Física**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.
- SAMPAIO, M. E. C. S. **Aplicação de Metaheurísticas ao Problema de Localização de Escolas de Ensino Fundamental**. Curitiba, 1999. Dissertação no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, 1999.
- SLIWANY, R. M. **Sociometria: como avaliar a qualidade de vida e projetos sociais**. Petrópolis: Vozes, 1997.
- TANOMARU, J. **Motivação, fundamentação e aplicações de algoritmos genéticos**. In: II CONGRESSO BRASILEIRO DE REDES NEURAIIS – CBRN, 1995, Curitiba. *Anais...* Curitiba, 1995, [s.p.].
- TEITZ, M. B.; BART, P. **Heuristics methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph**. Operations Research, v.16, p.955-961, 1968.
- YANG, C. **Voronoi Diagram**. [on line]. Disponível na internet via. URL: <http://msci.memphis.edu/~giri/7713/f98/cyang.html>. Arquivo consultado em 21 de agosto de 2001.

## ANEXO 1

Tabela 11: Áreas e centros dos bairros do município de Curitiba.

Bairros	Centro		Área (km <sup>2</sup> )	Bairros	Centro		Área (km <sup>2</sup> )
	x(km)	y(km)			x(km)	y(km)	
Abranches	15,90	4,97	4,318	Jardim Botânico	18,60	13,20	2,772
Água Verde	14,85	14,40	4,764	Jardim das Américas	20,01	15,09	3,874
Ahú	16,73	8,78	1,844	Jardim Social	19,64	10,50	1,885
Alto Boqueirão	19,26	23,82	12,112	Juvevê	17,28	10,05	1,227
Alto da Glória	16,80	10,65	0,882	Lamenha Pequena	9,30	4,58	3,396
Alto da Rua XV	17,93	11,40	1,504	Lindóia	15,23	17,10	1,180
Atuba	22,62	7,04	4,269	Mercês	13,80	10,95	3,276
Augusta	5,40	16,38	8,841	Mossunguê	10,35	12,47	3,381
Bacacheri	20,09	8,58	6,981	Novo Mundo	13,26	18,17	5,992
Bairro Alto	22,35	9,69	7,018	Orleans	6,15	11,10	5,121
Barreirinha	17,27	5,13	3,733	Parolin	16,65	15,30	2,253
Batel	14,10	12,90	1,760	Pilarzinho	14,16	7,40	7,131
Bigorrião	12,90	11,78	3,503	Pinheirinho	13,61	22,20	10,734
Boa Vista	18,21	7,04	5,136	Portão	12,75	16,37	5,695
Bom Retiro	15,30	9,45	1,944	Prado Velho	17,67	14,30	2,430
Boqueirão	19,31	19,98	14,802	Rebouças	16,50	13,35	2,982
Butiatuvinha	7,20	7,94	10,583	Riviera	4,65	12,18	2,360
Cabral	18,00	9,18	2,040	Santa Cândida	19,95	4,83	10,325
Cachoeira	17,10	3,41	3,069	Santa Felicidade	10,20	8,19	12,274
Cajuru	22,11	15,08	11,552	Santa Quitéria	11,88	15,05	2,088
Campina do Siqueira	12,11	12,74	1,693	Santo Inácio	9,96	11,30	2,716
Campo Comprido	9,77	14,55	8,549	São Braz	7,80	10,05	5,006
Campo de Santana	10,07	30,45	21,574	São Francisco	15,38	10,91	1,363
Capão da Imbuia	21,54	12,60	3,163	São João	11,85	7,49	3,029
Capão Raso	13,17	19,98	5,063	São Lourenço	16,37	7,43	2,255
Cascatinha	11,81	10,22	2,567	São Miguel	6,30	19,83	7,002
Caximba	7,62	32,78	8,167	Seminário	12,44	13,80	2,128
Centro	16,05	12,00	3,297	Sítio Cercado	16,08	24,24	11,123
Centro Cívico	16,20	10,13	0,965	Taboão	15,00	5,31	1,715
Cidade Industrial	9,38	19,13	43,378	Tarumã	20,73	11,55	4,167
Cristo Rei	18,75	12,15	1,464	Tatuquara	10,47	26,33	11,229
Fanny	15,93	17,48	1,996	Tingui	21,12	7,08	2,107
Fazendinha	10,38	17,28	3,717	Uberaba	21,35	18,14	14,086
Ganchinho	17,10	27,77	11,196	Umbará	14,10	28,58	22,474
Guabirota	18,71	15,53	2,631	Vila Isabel	13,38	14,66	1,211
Guaira	15,47	16,10	2,322	Vista Alegre	13,50	9,30	3,691
Hauer	17,60	17,28	4,021	Xaxim	16,08	20,33	8,924
Hugo Lange	18,45	10,50	1,150				

## ANEXO 2

Tabela 12: tabela 3 completa (continua)

nº do bairro	Bairros	População	Densidade Demográfica (pessoas/km <sup>2</sup> )	Índice de satisfação saúde (%)	Índice de satisfação transporte (%)
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
50	Abranches	8.639	2.000,69	70	50
9	Água Verde	45.438	9.537,78	90	70
14	Ahú	10.492	5.689,80	90	50
64	Alto Boqueirão	43.280	3.573,32	90	90
4	Alto da Glória	5.653	6.409,30	90	70
5	Alto da Rua XV	9.770	6.496,01	90	50
55	Atuba	9.068	2.124,15	50	70
68	Augusta	2.741	310,03	70	50
35	Bacacheri	23.612	3.382,32	90	90
36	Bairro Alto	36.581	5.212,45	70	50
52	Barreirinha	16.493	4.418,16	70	50
10	Batel	12.119	6.885,80	90	70
11	Bigorriho	19.684	5.619,18	90	70
34	Boa Vista	29.642	5.771,42	70	70
13	Bom Retiro	6.558	3.373,46	50	50
56	Boqueirão	64.086	4.329,55	50	90
61	Butiatuvinha	7.630	720,97	90	70
16	Cabral	8.467	4.150,49	90	90
51	Cachoeira	6.436	2.097,10	70	50
21	Cajuru	76.384	6.612,19	70	90
30	Campina do Siqueira	7.018	4.145,30	70	90
44	Campo Comprido	16.935	1.980,93	50	70
71	Campo de Santana	4.142	191,99	90	50
20	Capão da Imbuia	18.272	5.776,79	90	70
58	Capão Raso	33.391	6.595,10	70	90
47	Cascatinha	1.877	731,20	50	50
70	Caximba	818	100,16	90	50
1	Centro	37.003	11.223,23	50	90
3	Centro Cívico	5.517	5.717,10	90	50
75	Cidade Industrial	116.001	2.674,19	50	90
6	Cristo Rei	10.506	7.176,23	90	70
39	Fanny	8.601	4.309,12	70	50
42	Fazendinha	23.395	6.294,05	70	70
72	Ganchinho	2.651	236,78	90	50
23	Guabirotuba	10.748	4.085,14	90	50

Fonte: IBGE/IPPUC

Tabela 12: tabela 3 completa (continuação)

nº do bairro	Bairros	População	Densidade Demográfica (pessoas/km2)	Índice de satisfação saúde (%)	Índice de satisfação transporte (%)
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
26	Guaira	13.242	5.702,84	70	50
38	Hauer	14.207	3.533,20	70	90
17	Hugo Lange	3.930	3.417,39	10	70
7	Jardim Botânico	6.524	2.353,54	70	70
22	Jardim das Américas	12.393	3.199,02	10	50
18	Jardim Social	6.851	3.634,48	90	70
15	Juvevê	10.711	8.729,42	90	70
62	Lamenha Pequena	704	207,30	90	50
40	Lindóia	8.508	7.210,17	70	10
12	Mercês	16.169	4.935,59	70	70
45	Mossunguê	4.088	1.209,11	70	70
41	Novo Mundo	38.188	6.373,16	90	90
59	Orleans	5.456	1.065,42	50	90
25	Parolin	11.751	5.215,71	50	70
32	Pilarzinho	24.308	3.408,78	70	30
66	Pinheirinho	44.070	4.105,65	30	90
27	Portão	36.573	6.421,95	70	70
24	Prado Velho	7.558	3.110,29	90	70
8	Rebouças	16.392	5.496,98	90	70
69	Riviera	230	97,46	90	10
53	Santa Cândida	21.344	2.067,22	70	50
63	Santa Felicidade	21.382	1.742,06	50	70
43	Santa Quitéria	11.766	5.635,06	50	70
46	Santo Inácio	5.545	2.041,61	70	50
60	São Braz	20.335	4.062,13	50	70
2	São Francisco	7.538	5.530,45	90	50
48	São João	2.493	823,04	70	10
33	São Lourenço	5.744	2.547,23	90	50
67	São Miguel	1.000	142,82	90	90
29	Seminário	8.355	3.926,22	90	70
65	Sítio Cercado	52.498	4.719,77	70	90
49	Taboão	2.048	1.194,17	70	10
19	Tarumã	5.997	1.439,16	30	70
74	Tatuquara	8.168	727,40	70	70
54	Tingui	11.022	5.231,13	70	90
37	Uberaba	35.897	2.548,42	70	50
73	Umbará	6.202	275,96	70	50
28	Vila Isabel	9.319	7.695,29	10	70
31	Vista Alegre	10.127	2.743,70	90	50
57	Xaxim	46.754	5.239,13	70	70

Fonte: IBGE/IPPUC

## ANEXO 3

Tabela 13: tabela 4 completa (continua)

Nº do bairro	Bairros	População	Densidade demográfica (pessoas/km2)	Índice de satisfação Habit.(%)	Índice de satisfação saúde (%)	Índice de satisfação Educ.(%)	Índice de satisfação Transp.(%)
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
50	Abranches	9.494	2.198,70	38,64	62,15	53,13	47,39
9	Água Verde	49.863	10.466,62	97,49	90,45	91,98	66,00
14	Ahú	10.194	5.528,20	94,84	84,59	68,64	55,55
64	Alto Boqueirão	47.619	3.931,56	59,04	85,86	68,66	87,11
4	Alto da Glória	5.788	6.562,36	99,07	93,29	60,76	68,50
5	Alto da Rua XV	8.683	5.773,27	96,66	98,67	24,42	50,34
55	Atuba	11.230	2.630,59	37,09	54,31	37,68	76,79
68	Augusta	3.151	356,41	6,44	60,47	27,48	50,00
35	Bacacheri	23.080	3.306,12	91,66	86,90	61,37	89,50
36	Bairro Alto	38.034	5.419,49	68,68	67,73	52,56	55,28
52	Barreirinha	16.167	4.330,83	76,96	73,55	58,05	58,65
10	Batel	11.665	6.627,84	99,57	89,74	85,45	66,50
11	Bigorrião	25.331	7.231,23	97,06	88,13	49,22	68,11
34	Boa Vista	29.288	5.702,49	87,36	77,50	61,49	77,50
13	Bom Retiro	5.890	3.029,84	86,90	50,59	88,62	42,79
56	Boqueirão	66.462	4.490,07	75,37	57,29	60,69	96,11
61	Butiatuvinha	8.997	850,14	63,66	94,06	18,03	73,66
16	Cabral	8.987	4.405,39	93,71	91,19	97,02	80,00
51	Cachoeira	6.615	2.155,43	41,11	70,31	64,35	50,00
21	Cajuru	84.286	7.296,23	32,66	64,29	50,45	90,84
30	Campina do Siqueira	7.177	4.239,22	80,51	76,58	62,66	81,00
44	Campo Comprido	20.134	2.355,13	54,51	49,61	57,34	67,77
71	Campo de Santana	6.895	319,60	5,20	86,33	36,13	50,00
20	Capão da Imbuia	19.639	6.208,98	84,19	88,27	45,55	75,49
58	Capão Raso	33.424	6.601,62	71,16	77,51	72,55	97,50
47	Cascatinha	1.651	643,16	80,56	57,70	72,81	45,37
70	Caximba	1.790	219,17	23,50	82,41	27,36	50,00
1	Centro	35.845	10.872,00	99,15	56,83	84,38	100,00
3	Centro Cívico	5.167	5.354,40	99,30	85,82	25,00	53,86
75	Cidade Industrial	150.985	2.209,44	39,38	59,37	45,10	85,71
6	Cristo Rei	12.291	8.395,49	98,40	95,70	93,94	68,89
39	Fanny	8.346	4.181,36	86,27	72,79	43,03	51,82
42	Fazendinha	25.364	6.823,78	53,88	73,57	48,25	78,69
72	Ganchinho	5.847	522,24	12,77	83,33	92,76	50,00
23	Guabirota	10.379	3.944,89	80,51	85,05	68,92	53,35

Fonte: IBGE/IPPUC

Tabela 13: tabela 4 completa (continuação)

nº do bairro	Bairros	População	Densidade demográfica (pessoas/km <sup>2</sup> )	índice de satisfação Habit.(%)	índice de satisfação saúde (%)	índice de satisfação Educ.(%)	Índice de satisfação Transp.(%)
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
26	Guaira	13.988	6.024,12	65,59	61,33	35,96	52,77
38	Hauer	12.936	3.217,11	89,06	66,46	74,12	93,64
17	Hugo Lange	3.406	2.961,74	94,48	84,5	87,69	61,47
7	Jardim Botânico	6.670	2.406,20	72,91	28,61	20,78	64,52
22	Jardim das Américas	12.906	3.331,44	89,98	95,50	84,75	50,73
18	Jardim Social	6.055	3.212,20	99,67	86,79	77,01	69,52
15	Juvevê	11.223	9.146,70	98,99	92,96	92,99	67,97
62	Lamenha Pequena	648	190,81	20,00	99,54	12,27	45,85
40	Lindóia	8.213	6.960,17	66,35	62,14	51,69	14,00
12	Mercês	14.613	4.460,62	95,62	79,81	90,29	67,24
45	Mossunguê	4.436	1.312,04	39,38	63,93	41,81	71,83
41	Novo Mundo	40.770	6.804,07	50,52	83,86	59,39	84,50
59	Orleans	6.126	1.196,25	32,82	48,96	60,37	86,59
25	Parolin	11.880	5.272,97	47,91	44,46	44,68	69,00
32	Pilarzinho	25.497	3.575,52	57,84	63,89	36,24	32,66
66	Pinheirinho	48.036	4.475,13	30,88	33,90	35,66	88,76
27	Portão	40.581	7.125,72	87,44	77,77	77,73	72,50
24	Prado Velho	7.822	3.218,93	35,45	83,63	70,87	68,08
8	Rebouças	15.166	5.085,85	97,51	91,09	89,27	64,75
69	Riviera	217	91,95	27,12	99,88	10,44	1,00
53	Santa Cândida	24.003	2.324,75	55,93	64,98	57,08	86,50
63	Santa Felicidade	23.154	1.886,43	70,77	51,16	53,11	76,05
43	Santa Quitéria	11.248	5.386,97	60,29	46,85	85,44	69,00
46	Santo Inácio	5.727	2.108,62	76,64	79,61	75,78	53,08
60	São Braz	21.944	4.383,54	66,95	51,97	61,24	77,32
2	São Francisco	7.470	5.480,56	98,10	88,02	97,14	42,89
48	São João	2.624	866,29	65,07	66,61	16,99	12,50
33	São Lourenço	5.726	2.539,25	85,02	81,41	96,20	51,22
67	São Miguel	2.895	413,45	9,27	90,39	12,39	95,70
29	Seminário	7.650	3.594,92	94,49	90,04	58,40	61,65
65	Sítio Cercado	89.034	8.004,50	27,78	62,92	54,73	92,90
49	Taboão	2.326	1.356,27	41,02	64,79	59,23	1,00
19	Tarumã	6.838	1.640,99	88,55	30,66	73,64	79,78
74	Tatuquara	19.469	1.733,81	10,94	64,26	34,94	67,88
54	Tingui	11.123	5.279,07	78,84	76,39	62,65	100,00
37	Uberaba	45.676	3.242,65	72,14	70,46	42,62	56,21
73	Umbará	12.003	534,08	7,89	60,64	45,85	50,00
28	Vila Isabel	10.408	8.594,55	96,35	92,21	54,63	72,50
31	Vista Alegre	9.751	2.641,83	66,81	84,22	52,32	48,48
57	Xaxim	50.237	5.629,43	61,56	65,49	56,62	77,61

Fonte: IBGE/IPPUC

## ANEXO 4

Tabela 14: tabela 5 completa

nº do bairro	Bairros	População	Densid. Demogr. (pes/km <sup>2</sup> )	nº do bairro	Bairros	População	Densid. Demogr. (pes/km <sup>2</sup> )
[1]	[2]	[3]	[4]	[1]	[2]	[3]	[4]
50	Abranches	11.165	2.585,69	7	Jardim Botânico	6.153	2.219,70
9	Água Verde	49.866	10.467,25	22	Jardim das Américas	13.966	3.605,06
14	Ahú	11.148	6.045,55	18	Jardim Social	6.085	3.228,12
64	Alto Boqueirão	51.155	4.223,50	15	Juvevê	11.281	9.193,97
4	Alto da Glória	5.588	6.335,60	62	Lamenha Pequena	701	206,42
5	Alto da Rua XV	8.683	5.773,27	40	Lindóia	8.343	7.070,34
55	Atuba	12.632	2.959,01	12	Mercês	14.089	4.300,67
68	Augusta	3.617	409,12	45	Mossunguê	5.628	1.664,60
35	Bacacheri	23.106	3.309,84	41	Novo Mundo	42.999	7.176,07
36	Bairro Alto	42.033	5.989,31	59	Orleans	7.260	1.417,69
52	Barreirinha	17.021	4.559,60	25	Parolin	11.982	5.318,24
10	Batel	11.778	6.692,05	32	Pilarzinho	27.907	3.913,48
11	Bigorriho	27.127	7.743,93	66	Pinheirinho	49.689	4.629,12
34	Boa Vista	29.391	5.722,55	27	Portão	40.735	7.152,77
13	Bom Retiro	5.633	2.897,63	24	Prado Velho	7.084	2.915,23
56	Boqueirão	68.495	4.627,42	8	Rebouças	15.618	5.237,42
61	Butiatuvinha	10.759	1.016,63	69	Riviera	203	86,02
16	Cabral	11.720	5.745,10	53	Santa Cândida	27.870	2.699,27
51	Cachoeira	7.738	2.521,34	63	Santa Felicidade	25.209	2.053,85
21	Cajuru	89.784	7.772,16	43	Santa Quitéria	11.720	5.613,03
30	Campina do Siqueira	7.108	4.198,46	46	Santo Inácio	6.037	2.222,75
44	Campo Comprido	21.638	2.531,06	60	São Braz	23.119	4.618,26
71	Campo de Santana	7.335	339,99	2	São Francisco	6.435	4.721,20
20	Capão da Imbuia	20.976	6.631,68	48	São João	2.950	973,92
58	Capão Raso	34.376	6.789,65	33	São Lourenço	5.556	2.463,86
47	Cascatinha	2.061	802,88	67	São Miguel	4.911	701,37
70	Caximba	2.475	303,05	29	Seminário	7.395	3.475,09
1	Centro	32.623	9.894,75	65	Sítio Cercado	102.410	9.207,05
3	Centro Cívico	4.767	4.939,90	49	Taboão	2.668	1.555,69
75	Cidade Industrial	157.461	3.629,97	19	Tarumã	7.045	1.690,66
6	Cristo Rei	13.325	9.101,78	74	Tatuquara	36.339	3.236,17
39	Fanny	7.866	3.940,88	54	Tingui	11.564	5.488,37
42	Fazendinha	26.122	7.027,71	37	Uberaba	60.338	4.283,54
72	Ganchinho	7.325	654,25	73	Umbará	14.595	649,42
23	Guabirota	10.678	4.058,53	28	Vila Isabel	10.949	9.041,29
26	Guaira	14.268	6.144,70	31	Vista Alegre	9.930	2.690,33
38	Hauer	13.851	3.444,67	57	Xaxim	54.691	6.128,53
17	Hugo Lange	3.167	2.753,91				

Fonte: IBGE/IPPUC

## ANEXO 5

Tabela 15: tabela 6 completa (continua)

Bairros	Peso 1	Índice sintético	Peso 2
[1]	[2]	[3]	[4]
Abranches	8.639	58,33	34,30
Água Verde	45.438	78,75	121,11
Ahú	10.492	64,29	88,51
Alto Boqueirão	43.280	90,00	39,70
Alto da Glória	5.653	78,75	81,39
Alto da Rua XV	9.770	64,29	101,05
Atuba	9.068	58,33	36,41
Augusta	2.741	58,33	5,31
Bacacheri	23.612	90,00	37,58
Bairro Alto	36.581	58,33	89,36
Barreirinha	16.493	58,33	75,74
Batel	12.119	78,75	87,44
Bigorriho	19.684	78,75	71,35
Boa Vista	29.642	70,00	82,45
Bom Retiro	6.558	50,00	67,47
Boqueirão	64.086	64,29	67,35
Butiatuvinha	7.630	78,75	9,16
Cabral	8.467	90,00	46,12
Cachoeira	6.436	58,33	35,95
Cajuru	76.384	78,75	83,96
Campina do Siqueira	7.018	78,75	52,64
Campo Comprido	16.935	58,33	33,96
Campo de Santana	4.142	64,29	2,99
Capão da Imbuia	18.272	78,75	73,36
Capão Raso	33.391	78,75	83,75
Cascatinha	1.877	50,00	14,62
Caximba	818	64,29	1,56
Centro	37.003	64,29	174,58
Centro Cívico	5.517	64,29	88,93
Cidade Industrial	116.001	64,29	41,60
Cristo Rei	10.506	78,75	91,13
Fanny	8.601	58,33	73,87
Fazendinha	23.395	70,00	89,92
Ganchinho	2.651	64,29	3,68
Guabirota	10.748	64,29	63,55

Tabela 15: tabela 6 completa (continuação)

Bairros	Peso 1	Índice sintético	Peso 2
[1]	[2]	[3]	[4]
Guaira	13.242	58,33	97,76
Hauer	14.207	78,75	44,87
Hugo Lange	3.930	17,50	195,28
Jardim Botânico	6.524	70,00	33,62
Jardim das Américas	12.393	16,67	191,94
Jardim Social	6.851	78,75	46,15
Juvevê	10.711	78,75	110,85
Lamenha Pequena	704	64,29	3,22
Lindóia	8.508	17,50	412,01
Mercês	16.169	70,00	70,51
Mossunguê	4.088	70,00	17,27
Novo Mundo	38.188	90,00	70,81
Orleans	5.456	64,29	16,57
Parolin	11.751	58,33	89,41
Pilarzinho	24.308	42,00	81,16
Pinheirinho	44.070	45,00	91,24
Portão	36.573	70,00	91,74
Prado Velho	7.558	78,75	39,50
Rebouças	16.392	78,75	69,80
Riviera	230	18,00	5,41
Santa Cândida	21.344	58,33	35,44
Santa Felicidade	21.382	58,33	29,86
Santa Quitéria	11.766	58,33	96,60
Santo Inácio	5.545	58,33	35,00
São Braz	20.335	58,33	69,64
São Francisco	7.538	64,29	86,03
São João	2.493	17,50	47,03
São Lourenço	5.744	64,29	39,62
São Miguel	1.000	90,00	1,59
Seminário	8.355	78,75	49,86
Sítio Cercado	52.498	78,75	59,93
Taboão	2.048	17,50	68,24
Tarumã	5.997	42,00	34,27
Tatuquara	8.168	70,00	10,39
Tingui	11.022	78,75	66,43
Uberaba	35.897	58,33	43,69
Umbará	6.202	58,33	4,73
Vila Isabel	9.319	17,50	439,73
Vista Alegre	10.127	64,29	42,68
Xaxim	46.754	70,00	74,84

## ANEXO 6

Tabela 16: tabela 7 completa (continua)

<b>Bairros</b>	<b>Peso 3</b>	<b>Índice sintético</b>	<b>Peso 4</b>
[1]	[2]	[3]	[4]
Abranches	9.494	48,84	45,01
Água Verde	49.863	84,50	123,86
Ahú	10.194	72,81	75,92
Alto Boqueirão	47.619	73,22	53,69
Alto da Glória	5.788	77,12	85,10
Alto da Rua XV	8.683	49,20	117,33
Atuba	11.230	47,09	55,86
Augusta	3.151	17,53	20,33
Bacacheri	23.080	80,18	41,23
Bairro Alto	38.034	60,20	90,02
Barreirinha	16.167	65,72	65,90
Batel	11.665	83,46	79,41
Bigorriho	25.331	70,61	102,41
Boa Vista	29.288	74,74	76,29
Bom Retiro	5.890	60,67	49,94
Boqueirão	66.462	69,44	64,66
Butiatuvinha	8.997	41,94	20,27
Cabral	8.987	90,00	48,95
Cachoeira	6.615	53,99	39,92
Cajuru	84.286	51,95	140,46
Campina do Siqueira	7.177	74,37	57,00
Campo Comprido	20.134	56,58	41,63
Campo de Santana	6.895	15,90	20,10
Capão da Imbuia	19.639	68,48	90,66
Capão Raso	33.424	78,44	84,16
Cascatinha	1.651	61,05	10,53
Caximba	1.790	35,96	6,10
Centro	35.845	80,75	134,63
Centro Cívico	5.167	49,82	107,48
Cidade Industrial	95.841	52,58	66,20
Cristo Rei	12.291	87,39	96,07
Fanny	8.346	58,94	70,94
Fazendinha	25.364	60,99	111,89
Ganchinho	5.847	33,03	15,81
Guabirota	10.379	69,65	56,64

Tabela 16: tabela 7 completa (continuação)

<b>Bairros</b>	<b>Peso 3</b>	<b>Índice sintético</b>	<b>Peso 4</b>
[1]	[2]	[3]	[4]
Guaira	13.988	51,08	117,94
Hauer	12.936	79,29	40,57
Hugo Lange	3.406	79,86	37,09
Jardim Botânico	6.670	35,62	67,55
Jardim das Américas	12.906	75,33	44,22
Jardim Social	6.055	81,76	39,29
Juvevê	11.223	86,35	105,93
Lamenha Pequena	648	24,49	7,79
Lindóia	8.213	32,80	212,18
Mercês	14.613	81,74	54,57
Mossungué	4.436	50,71	25,87
Novo Mundo	40.770	66,24	102,73
Orleans	6.126	50,63	23,63
Parolin	11.880	49,85	105,77
Pilarzinho	25.497	43,88	81,48
Pinheirinho	48.036	39,53	113,21
Portão	40.581	78,50	90,77
Prado Velho	7.822	58,00	55,50
Rebouças	15.166	83,54	60,88
Riviera	217	3,50	26,27
Santa Cândida	24.003	64,16	36,24
Santa Felicidade	23.154	60,92	30,96
Santa Quitéria	11.248	62,38	86,36
Santo Inácio	5.727	69,39	30,39
São Braz	21.944	63,05	69,52
São Francisco	7.470	72,51	75,58
São João	2.624	23,64	36,65
São Lourenço	5.726	74,12	34,26
São Miguel	2.895	19,04	21,72
Seminário	7.650	72,68	49,46
Sítio Cercado	89.034	49,43	161,94
Taboão	2.326	3,79	358,29
Tarumã	6.838	57,12	28,73
Tatuquara	19.469	26,61	65,16
Tingui	11.123	77,32	68,28
Uberaba	45.676	57,71	56,19
Umbará	12.003	21,62	24,71
Vila Isabel	10.408	75,02	114,57
Vista Alegre	9.751	60,08	43,97
Xaxim	50.237	64,45	87,34

**ANEXO 7**

Relação dos bairros pertencentes à Administração Regional Matriz:

AR MATRIZ
Ahú
Alto da Glória
Alto da Rua XV
Batel
Bigorriho
Bom Retiro
Cabral
Centro
Centro Cívico
Cristo Rei
Hugo Lange
Jardim Botânico
Jardim Social
Juvevê
Mercês
Prado Velho
Rebouças
São Francisco