

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GUSTAVO HENRIQUE SILVA SARTURI

PROPOSIÇÃO DE MODELO MATEMÁTICO DE OTIMIZAÇÃO DE FLUXO DE
CAIXA: APLICAÇÕES DE PESQUISA OPERACIONAL NA ÁREA DE FINANÇAS



CURITIBA

2025

GUSTAVO HENRIQUE SILVA SARTURI

PROPOSIÇÃO DE MODELO MATEMÁTICO DE OTIMIZAÇÃO DE FLUXO DE CAIXA: APLICAÇÕES DE PESQUISA OPERACIONAL NA ÁREA DE FINANÇAS

Projeto Interdisciplinar apresentado ao curso de Especialização/MBA em Contabilidade e Finanças Corporativas, Setor de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Contabilidade e Finanças Corporativas.

Orientador(a): Prof. Dr. Alison Martins Meurer

CURITIBA

2025

RESUMO

A gestão financeira nas Pequenas e Médias Empresas (PMEs) brasileiras enfrenta desafios significativos, especialmente no fluxo de caixa, com alta taxa de mortalidade nos primeiros anos de operação. Para contornar esse cenário, propõe-se um modelo matemático de otimização linear, visando maximizar o retorno dos recursos financeiros, equilibrando a necessidade de liquidez imediata e investimentos de longo prazo. O modelo considera duas opções de alocação de recursos: manter parte do caixa em aplicações de curto prazo ou investir em alternativas de maior rentabilidade e menor liquidez. Ao contrário dos modelos tradicionais de Baumol e Miller & Orr, que se concentram na minimização de custos, o modelo proposto foca na maximização de rentabilidade. A implementação do modelo inclui o desenvolvimento, integração ao sistema financeiro da empresa, treinamento dos gestores e monitoramento dos resultados. Espera-se que a solução melhore o controle do fluxo de caixa, aumente a rentabilidade e reduza riscos operacionais, contribuindo para a competitividade e sustentabilidade das PMEs. A análise SWOT identifica forças, fraquezas, oportunidades e ameaças, destacando a importância da precisão dos dados e da adaptação tecnológica para o sucesso da implementação.

Palavras-chave: Otimização Linear. Fluxo de Caixa. Pequenas e Médias Empresas (PMEs).

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO	6
2 DIAGNÓSTICO PARA A CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA.....	7
3 PROPOSTA TÉCNICA PARA A SOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA	9
REFERÊNCIAS.....	17

1 APRESENTAÇÃO

Pequenas e Médias empresas (PME) representam a maior parte das organizações do Brasil e apresentam desafios constantes quanto a gestão financeira do negócio, em especial, no fluxo de caixa. Segundo o SEBRAE (2023), ainda é grande o número de empresas que não consegue sobreviver, trazendo em números:

Os MEIs (Micro Empreendedores Individuais) têm a maior taxa de mortalidade entre os Pequenos Negócios, 29% fecham após 5 anos de atividade. Já as MEs (Micro Empreendimentos) têm taxa de mortalidade intermediária entre os Pequenos Negócios, 21,6% fecham após 5 anos de atividade. As EPPs (Empresa de Pequeno Porte) têm a menor taxa de mortalidade entre os Pequenos Negócios, 17% fecham após 5 anos de atividade. (SEBRAE, 2023).

Dado esse contexto, o objetivo central desse projeto é desenvolver um modelo matemático de otimização linear que otimize a alocação de recursos para equilibrar a necessidade de liquidez imediata com investimentos de longo prazo com maior rentabilidade. Com isso, os gestores poderão ter subsídios analíticos para tomar decisões estratégicas mais assertivas, reduzindo riscos operacionais e aprimorando a gestão financeira da empresa.

O modelo matemático proposto busca otimizar o fluxo de caixa de modo a maximizar o retorno ao final de um horizonte de planejamento. O modelo baseia-se em recursos de otimização linear e considera duas possibilidades: manter parte ou a totalidade do caixa em uma aplicação de liquidez imediata, ou investir em alternativas de longo prazo, com menor liquidez e maior rentabilidade. Sendo assim, a otimização de alocação de recursos, equilibrando segurança e rentabilidade será apresentada por meio de uma integração de modelos matemáticos no planejamento financeiro.

Diferentemente dos modelos de Baumol e Miller & Orr, ambos conhecidos na área de contábeis para análise de fluxo de caixa, a dinâmica aqui é otimizar a rentabilidade dos recursos disponíveis de caixa ao longo de um horizonte de planejamento.

A aplicação visa contribuir para uma gestão financeira mais estruturada, auxiliando a organização a tomar decisões estratégicas que aumentem a eficiência no uso de recursos próprios, mitigue o risco de insuficiência de caixa e melhore a capacidade de investimento a longo prazo.

2 DIAGNÓSTICO PARA A CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA

A gestão financeira das Pequenas e Médias Empresas (PMEs) é um dos principais desafios enfrentados no ambiente de negócios, especialmente no que diz respeito à administração do fluxo de caixa. Essa realidade aponta para a necessidade de uma abordagem estruturada que possibilite a tomada de decisões estratégicas para mitigar riscos e melhorar a rentabilidade dos recursos disponíveis.

A dependência de controles manuais ou sistemas desconectados impede uma visão integrada das entradas e saídas, dificultando a identificação de períodos críticos. A ausência de um modelo que permita decidir estrategicamente a opção de manter o dinheiro em liquidez imediata ou investir em alternativas a longo prazo expõe as empresas ao risco de insuficiência de caixa e decisões subótimas nas alocações de recursos.

Para isso, supondo que a empresa possua previsões adequadas dos fluxos de contas a receber e contas a pagar, torna-se necessário como *input* (entrada de dados) o conhecimento das entradas e saídas planejadas no fluxo de caixa.

A cada período a empresa tem a opção de:

- a) Manter uma parte ou a totalidade das disponibilidades no próprio caixa, com uma determinada taxa de juros (aplicações financeiras de curto prazo e com liquidez imediata); ou,
- b) utilizar parte ou totalidade do dinheiro para realizar investimentos a longo prazo com menor liquidez, cujo resgate é restrito e taxa de juros diferenciada da opção a, de tal forma que os juros da opção (b) seja maior que os da opção (a) (fundo de ações, tesouro direto, fundos imobiliários e etc...).

Para aprofundar a compreensão desse cenário e orientar a construção da proposta foi elaborada uma análise SWOT que examina os fatores internos e externos que podem influenciar na implementação desse modelo de otimização linear em uma empresa, identificando as principais forças, fraquezas, oportunidades e ameaças. No Quadro 1 é apresentado a análise SWOT.

QUADRO 1 – ANÁLISE SWOT DO MODELO PROPOSTO

Forças <ul style="list-style-type: none"> • Abordagem integrada • Ferramenta de decisão • Flexibilidade • Maximização de retorno 	Fraquezas <ul style="list-style-type: none"> • Dependência de dados precisos • Complexidade na implementação • Integração de sistemas • Custos de conversão • Necessidade de conhecimento prévio na área de finanças e otimização linear
Oportunidades <ul style="list-style-type: none"> • Melhoria na gestão financeira • Aumento de competitividade • Adaptação e inovação • Incentivo à modernização 	Ameaças <ul style="list-style-type: none"> • Instabilidade econômica • Resistência à mudança • Riscos tecnológicos • Custos operacionais

FONTE: O autor (2025).

FORÇAS

O modelo proposto oferece uma visão global do fluxo de caixa, trazendo uma abordagem integrada que consolida previsões de entradas e saídas, utiliza ferramentas de otimização linear para auxílio na tomada de decisão, permitindo simulações de cenários. Além disso, o modelo proposto tem como objetivo a maximização de retorno ao final do horizonte de planejamento, o que permite uma decisão equilibrada entre segurança e rentabilidade. É possível também ter flexibilidade no modelo quanto aos inputs de taxas de juros e de conversão de investimentos.

FRAQUEZAS

A eficácia do modelo depende fortemente da precisão dos dados de fluxo de caixa que são informados como input, o que pode tornar o modelo vulnerável a inconsistências nas previsões. Nesse contexto, a coerência dos dados de input é crucial, assim como a compreensão adequada do modelo por parte do usuário.

A não formação específica por parte dos usuários em finanças quantitativa pode ser um desafio para a adoção do modelo, exigindo conhecimentos técnicos avançados pois a sua implementação pode ser um pouco complexa dependendo do nível de conhecimento da equipe.

OPORTUNIDADES

A principal oportunidade do modelo é a redução do risco de insuficiência de caixa, o que garante maior segurança operacional. Uma gestão financeira robusta permite decisões estratégicas mais assertivas, o que aumenta a competitividade e contribui para o crescimento da empresa. Além disto, há uma adaptabilidade que pode ser incorporada ao modelo, permitindo a expansão de variáveis adicionais que adaptem aos diferentes contextos e promove a modernização dos processos financeiros por meio da integração dos dados.

AMEAÇAS

Os dados como taxas de juros e taxas de conversão dependem do cenário macroeconômico que geralmente é instável, isso pode comprometer a eficácia das previsões e do modelo. Barreiras culturais e organizacionais podem levar à resistência de adoção a novas metodologias, e os desafios tecnológicos podem gerar inconsistências nos dados. Por fim, a manutenção dos sistemas e os custos relacionados as taxas de conversão podem afetar a relação custo-benefício e adesão dos gestores.

DIAGNÓSTICO GERAL

Diante da análise SWOT apresentada, evidencia-se a importância de um modelo de otimização linear que integre de forma estratégica as variáveis do fluxo de caixa, considerando os pontos fortes, fragilidades, oportunidades e ameaças identificadas. Fica claro que a adoção de uma abordagem estruturada pode mitigar riscos e potencializar a rentabilidade dos recursos disponíveis. No próximo tópico, serão detalhados os componentes metodológicos e a proposta de implementação do modelo, destacando como essa ferramenta pode apoiar os gestores na tomada de decisões mais assertivas e eficientes.

3 PROPOSTA TÉCNICA PARA A SOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

O modelo proposto envolve a alocação eficiente de recursos entre investimentos de curto e longo prazo, com foco na maximização da rentabilidade e segurança financeira, equilibrando o horizonte de planejamento entre liquidez imediata e investimentos de longo prazo.

Conforme apresentado por Arenales (2007), a gestão do fluxo de caixa deve ser considerada de forma estratégica, integrando previsões de entradas e saídas com decisões de investimento em curto e longo prazo. O modelo proposto leva em consideração diferentes opções de alocação de recursos, considerando a taxa de juros e os custos de conversão entre as opções de investimento.

Esse modelo de otimização linear permite decidir estrategicamente entre manter o dinheiro em caixa ou investir em alternativas de longo prazo, maximizando o retorno do fluxo de caixa ao final do horizonte de planejamento.

O modelo de otimização linear é descrito pela seguinte formulação matemática, com base nas fórmulas apresentadas por Arenales (2007):

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } (1 + \alpha)f_{n,Z} + (1 + \beta)f_{\bar{n},Z} \\
 (I) \quad & e_1 + (1 - c_{2,1})f_{\bar{1},1} = f_{1,2} + f_{1,\bar{1}} + s_1 \\
 (II) \quad & y_0 + (1 - c_{1,2})f_{1,\bar{1}} = f_{\bar{1},2} + f_{\bar{1},1} \\
 (III) \quad & e_2 + (1 + \alpha)f_{1,2} + (1 - c_{2,1})f_{\bar{2},2} = f_{2,3} + f_{2,\bar{2}} + s_2 \\
 (IV) \quad & (1 + \beta)f_{\bar{1},2} + (1 - c_{1,2})f_{2,\bar{2}} = f_{\bar{2},3} + f_{\bar{2},2} \\
 & \dots \\
 (V) \quad & e_n + (1 + \alpha)f_{n-1,n} + (1 - c_{2,1})f_{\bar{n},n} = f_{n,Z} + f_{n,\bar{n}} + s_n \\
 (VI) \quad & (1 + \beta)f_{\bar{n}-1,\bar{n}} + (1 - c_{1,2})f_{n,\bar{n}} = f_{\bar{n},Z} + f_{\bar{n},n} \\
 (VII) \quad & f_{i,j} \geq 0, \forall i, j
 \end{aligned}$$

Supondo novamente que a empresa tem boas previsões de entradas e saídas do fluxo de caixa no início de cada período, os seguintes dados são conhecidos:

- e_t entrada de caixa no início do período $t, t = 1, 2, \dots, n,$
- s_t saída de caixa no início do período $t, t = 1, 2, \dots, n,$

Apenas duas opções de investimentos estão disponíveis para o dinheiro do caixa, no início de cada período:

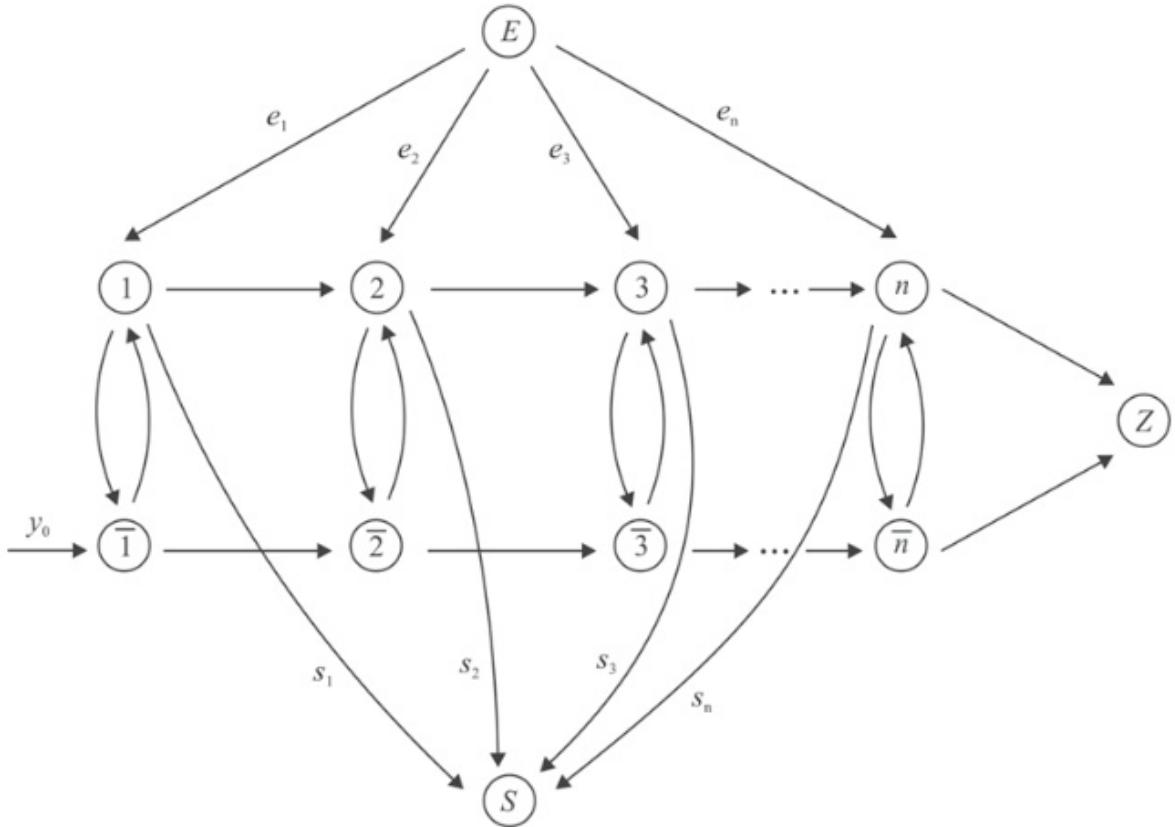
1. Deixar parte ou todo dinheiro no próprio caixa durante o período, com taxa de juros $\alpha;$

2. Utilizar parte ou todo dinheiro em uma aplicação financeira com menor liquidez do que a opção anterior, porém com taxa de juros no período β , geralmente $\beta > \alpha$.

As aplicações e resgates entre as opções descritas podem ser realizadas apenas no início de cada período. Há um custo unitário de conversão $c_{1,2}$ da opção 1 para a opção 2 e um custo unitário de conversão $c_{2,1}$ da opção 2 para a opção 1. No início do horizonte de planejamento, a empresa dispõe de y_0 unidades monetárias investidas na opção 2 (decorrente de aplicações anteriores). Esses custos de conversão podem ser taxas de administração, impostos, encargos por antecipação e etc.

O problema é apresentado em uma rede de fluxos de dinheiro conforme a figura a seguir, o nó E simboliza a entrada de caixa e o nó S a saída de caixa. Os nós enumerados $1, 2, 3, \dots, n$ e $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n}$ representam os inícios dos períodos para as opções de investimento 1 e 2 respectivamente e, por fim, o nó Z o final do planejamento. O objetivo é maximizar a soma dos fluxos de dinheiro de n para Z e de \bar{n} para Z . Definimos $f_{i,j}$ (fluxo de dinheiro do nó i para o nó j) como variável de decisão.

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO EM GRAFO DO FLUXO DE CAIXA



FONTE: Adaptado de Arenales (2007).

Esse modelo de otimização linear pode ser “estendido para tratar mais de duas opções de investimento por período, considerar taxas de juros e custos unitários de conversão variando com cada período e incorporar a possibilidade de empréstimos ao longo do horizonte de planejamento” (Arenales, 2007, p. 37).

Observe que o fluxo aplicação ou resgate ocorre entre nós específicos: de i para $i + 1$, de i para \bar{i} , e de \bar{i} para i (dinheiro mantido em caixa no período i com α de rendimentos, dinheiro aplicado no período i com taxas de administração de $c_{1,2}$ e dinheiro resgatado no período i com taxas de administração de $c_{2,1}$, respectivamente).

Explicando cada equação, temos que:

(I) Descreve a entrada de caixa e_1 no período 1. O termo $(1 - c_{2,1})f_{1,1}$ representa o fluxo de caixa que foi convertido de uma opção para outra (devido ao custo de conversão $c_{2,1}$). O fluxo resultante $f_{1,2}$ é o valor transferido para o período seguinte. O $f_{1,1}$ reflete o valor mantido no próprio caixa do período e s_1 é a saída de caixa no período 1.

(II) O valor de y_0 é o caixa inicial decorrente de aplicações anteriores de longo prazo. A equação mostra o fluxo de entrada de caixa y_0 mais a conversão de recursos $(1 - c_{1,2})f_{1,1}$ que leva ao fluxo de caixa $f_{1,2}$ com o $f_{1,1}$ mantido no caixa do período e s_1 como saída.

Em (III) e (IV) a entrada de caixa do período seguinte é ajustada pelo rendimento de uma opção de investimento e pelo valor transferido de outra opção. Isso resulta no fluxo de caixa do período seguinte, com a parte mantida no caixa e a saída de caixa para esse período.

O modelo continua ajustando o fluxo de caixa de cada período com base na entrada de caixa inicial, considerando os rendimentos das opções de investimento e os custos de conversão. O valor resultante de cada período é somado ao fluxo do próximo, levando em conta a parte do caixa que é mantida e a saída de caixa daquele período.

É garantido que todos os fluxos de caixa sejam não-negativos, ou seja, não é possível ter valores negativos no modelo, o que assegura que a empresa não terá fluxos de caixa inválidos.

É possível fazer a modelagem deste modelo em Excel resolvendo por meio do Solver, no entanto, dependendo da quantidade de períodos, pode-se tornar mais viável e menos trabalhoso utilizar linguagens de programação, como por exemplo, Python que inclui alguns pacotes de utilização como o PuLP. A seguir, é apresentado o código vinculado a modelagem utilizando o pacote PuLP a ser utilizado em Python:

```
from pulp import LpMaximize, LpProblem, LpVariable, lpSum

n = 3
e = [12, 8, 5]
s = [4, 10, 10]
alpha = 0.05
beta = 0.08
c1_2 = 0.02
c2_1 = 0.02
y0 = 1

model = LpProblem("Maximize_Cash_Return", LpMaximize)
```

```

x = [LpVariable(f"x_{t}", lowBound=0) for t in range(n)] # Valor aplicado
em títulos públicos
r = [LpVariable(f"r_{t}", lowBound=0) for t in range(n)] # Valor resgatado
de títulos públicos
c = [LpVariable(f"c_{t}", lowBound=0) for t in range(n)] # Caixa disponível
no final de cada período
y = [LpVariable(f"y_{t}", lowBound=0) for t in range(n)] # Valor mantido em
títulos públicos no final de cada período

model += y[0] == y0 + x[0] * (1 - c1_2) - r[0] * (1 + c2_1) # Saldo inicial
de títulos públicos
model += c[0] == e[0] - s[0] + r[0] - x[0] # Saldo inicial de caixa

for t in range(1, n):
    model += c[t] == c[t - 1] * (1 + alpha) + e[t] - s[t] + r[t] - x[t] # Saldo de caixa
    model += y[t] == y[t - 1] * (1 + beta) + x[t] * (1 - c1_2) - r[t] * (1 +
c2_1) # Saldo de títulos públicos

# Maximizar o retorno final
model += c[n - 1] * (1 + alpha) + y[n - 1] * (1 + beta), "Maximize_Final_Cash"

# Resolver o modelo
model.solve()

# Resultados
print("Status:", model.status)
print("Maximized Return:", model.objective.value())

for t in range(n):
    print(f"Período {t + 1}:")
    print(f"  Caixa disponível: {c[t].value():.2f}")
    print(f"  Aplicação em títulos: {x[t].value():.2f}")
    print(f"  Resgate de títulos: {r[t].value():.2f}")
    print(f"  Títulos mantidos: {y[t].value():.2f}")

```

O modelo de otimização linear, desenvolvido e apresentado anteriormente, proporciona uma gestão eficiente dos fluxos de caixa, permitindo a alocação estratégica entre liquidez imediata e investimentos de longo prazo. Para a implementação bem-sucedida do modelo, a execução poderá ser realizada em

etapas, começando pela definição detalhada do modelo matemático, seguida pela integração ao sistema de gestão financeira da empresa e treinamento da equipe. A expectativa é que o modelo possa ser completamente implementado em até seis meses, com um período de monitoramento adicional de três meses para ajustes e garantia de resultados.

A implementação exigirá recursos para o desenvolvimento do modelo, treinamento da equipe e, possivelmente, licenciamento de software, dependendo da ferramenta escolhida. Espera-se que a solução traga maior controle sobre os fluxos de caixa da empresa, melhorando a rentabilidade e minimizando riscos financeiros.

O acompanhamento será contínuo, com revisões mensais para avaliar os resultados obtidos. Ajustes no modelo serão realizados conforme necessário, a fim de garantir a adaptação contínua às necessidades da empresa e a otimização do fluxo de caixa ao final do horizonte de planejamento.

O código apresentado acima foi programado em Python, para deixar essa experiência mais interativa, foi construído uma interface onde o usuário pode anexar os *inputs* para realizar os cálculos, disponível em <https://finance-flow-optimizer-gui.lovable.app/>. No entanto, nesta interface devido a algumas limitações técnicas de APIs, está sendo utilizado o que chamamos de algoritmo guloso para solucionar o modelo matemático, sendo assim, diferentemente do solver exato, pode haver uma pequena diferença no valor total do “Retorno Total Otimizado” em relação a um solver exato. Na captura de tela abaixo, temos um exemplo dos resultados para um fluxo de caixa com entradas, saídas, taxas, custos e saldos informados pelo usuário. Na Figura 2 é apresentada a tela da aplicação.

FIGURA 2 - INTERFACE DO APLICATIVO FINANCE FLOW OPTIMIZER

Otimizador de Fluxo de Caixa

Parâmetros do Modelo

Taxa de Juros Curto Prazo (α)
0,05

Taxa de Juros Longo Prazo (β)
0,08

Custo de Aplicação (c_{12})
0,02

Custo de Resgate (c_{21})
0,02

Saldo Inicial (y_0)
1

Fluxos por Período

Período	Entrada (e)	Saída (s)
1	12	4
2	8	10
3	5	10

Resultados da Otimização

Retorno Total Otimizado
R\$ 3.25

Período	Caixa (c)	Aplicação (x)	Resgate (r)	Títulos (y)
1	R\$ 0,00	R\$ 8,00	R\$ 0,00	R\$ 8,84
2	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 2,00	R\$ 7,51
3	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 5,00	R\$ 3,01

FONTE: Finance Flow Optimizer (<https://finance-flow-optimizer-gui.lovable.app>) (2025).

Por fim, o projeto demonstra a aplicabilidade de modelos matemáticos de otimização linear para a gestão eficiente do fluxo de caixa de forma a otimizar a rentabilidade do dinheiro parado em caixa. Diante dos elevados índices de mortalidade empresarial nos primeiros anos de operação, a utilização de ferramentas

quantitativas revela-se uma estratégia essencial para fortalecer a liquidez e maximizar o retorno financeiro.

A formulação apresentada, fundamentada em princípios de programação linear e adaptada à realidade operacional, propõe uma alternativa prática e de fácil implementação, distinta dos modelos clássicos de Baumol e Miller-Orr. Ao considerar explicitamente as decisões de investimento e resgate de recursos financeiros em múltiplos períodos, o modelo permite um balanceamento mais dinâmico entre liquidez imediata e rentabilidade de longo prazo.

Os resultados obtidos mostram que, mesmo em contextos de alta volatilidade de entradas e saídas de caixa, a aplicação de modelos matemáticos contribui para uma tomada de decisão mais fundamentada e eficiente, possibilitando a maximização do valor econômico da empresa.

Futuras propostas podem aprofundar o modelo, incorporando aspectos de incerteza nas entradas de caixa, custos de transação variáveis, e integração com modelos de previsão financeira, ampliando ainda mais a robustez e a aplicabilidade da proposta apresentada.

REFERÊNCIAS

ARENALES, M. et al. **Pesquisa operacional: para cursos de engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

SEBRAE. A taxa de sobrevivência das empresas no Brasil. Portal Sebrae. Disponível em: <https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/a-taxa-de-sobrevivencia-das-empresas-no-brasil,d5147a3a415f5810VgnVCM1000001b00320aRCRD>. Acesso em: 20 dez. 2024.

TREASY. Administração de caixa: saiba como fazer e a importância para o seu negócio. Treasy, 12 set. 2017. Disponível em: <https://www.treasy.com.br/blog/administracao-de-caixa/>. Acesso em: 20 dez. 2024.