

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CLARA FRANÇA CARNEIRO

MODELAGEM NÃO LINEAR DE SÓLIDOS BIDIMENSIONAIS CONTÍNUOS  
UTILIZANDO MODELOS MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

CURITIBA

2025

CLARA FRANÇA CARNEIRO

MODELAGEM NÃO LINEAR DE SÓLIDOS BIDIMENSIONAIS CONTÍNUOS  
UTILIZANDO MODELOS MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marco André Argenta

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Carneiro, Clara França

Modelagem não linear de sólidos bidimensionais contínuos  
utilizando modelos massa-mola-amortecedor. / Clara França Carneiro. –  
Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de  
Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marco André Argenta

1. Teoria dos reticulados (Métodos Lattice). 2. Dinâmica. 3. Sistemas  
não lineares. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Civil. III. Argenta, Marco André. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **CLARA FRANÇA CARNEIRO**, intitulada: **Modelagem não linear de sólidos bidimensionais contínuos utilizando modelos massa-mola-amortecedor**, sob orientação do Prof. Dr. MARCO ANDRE ARGENTA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 22 de Agosto de 2025.

Assinatura Eletrônica

22/08/2025 13:02:16.0

MARCO ANDRE ARGENTA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

22/08/2025 14:08:28.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

22/08/2025 15:34:43.0

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

Avaliador Externo (INSTITUTO DE TECNOLOGIA PARA O  
DESENVOLVIMENTO)

Assinatura Eletrônica

25/08/2025 13:57:15.0

HENRIQUE MACHADO KROETZ

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Cesar e Selma, que me encorajam a tentar, ir longe e buscar o melhor, e se não der certo: "a gente dá um jeito".

Às minhas irmãs mais velhas, Elisa e Raquel, por serem inspiração na engenharia e na vida, e aos meus cunhados, Richard e Augusto, pelo suporte.

Aos meus sobrinhos, Rosa e Alvaro, por serem alegria e graça em toda situação.

Ao meu namorado, Luis Felipe, pela amizade, apoio e amor a qualquer distância.

Aos meus amigos do mestrado, João e Léo, pela parceria durante todas as matérias e depois delas e aos meus amigos da graduação, em especial Bia, Douglas e Sérgio, que continuaram me apoiando.

Agradeço também meus colegas da Odebrecht, principalmente a Fernanda, por me aguentarem falar todo dia que precisava terminar o mestrado.

Ao meu orientador, Marco Argenta, pelo conhecimento compartilhado, disponibilidade e acompanhamento próximo durante todo o período.

Aos professores da banca de qualificação e de defesa, por aceitarem contribuir e me ajudar a desenvolver um trabalho melhor.

À toda a Universidade Federal do Paraná, pela estrutura e transmissão de conhecimento gratuito e de qualidade desde 2017.

À CAPES pelo auxílio financeiro durante o período do mestrado.

Por fim, agradeço a todos os outros que me ajudaram, de maneira direta ou indireta, a concluir esta dissertação.

## RESUMO

Os métodos Lattice representam corpos contínuos por meio da discretização em pontos de massa e elementos unidimensionais, como o método massa-mola-amortecedor baseado no modelo Kelvin-Voigt (mola e amortecedor em paralelo). Suas principais vantagens são a simplicidade de implementação, devido ao uso de sistemas dinâmicos simples de um grau de liberdade nas ligações, o potencial para paralelização e a aplicação em simulações em tempo real. A principal dificuldade reside na escolha de parâmetros representativos para a malha (DA SILVA, 2015). Neste trabalho, foram avaliadas duas formulações de equivalência de parâmetros, encontradas de forma analítica por Baudet (2006) e Lloyd, Székely e Harders (2007), com aplicação em diferentes tipos de esforços. A movimentação da malha é feita de maneira gradual e calcula a nova configuração deformada com base na configuração mais recente, o que permite considerar os efeitos de segunda ordem e aproxima o comportamento não linear geométrico do corpo. É utilizado o método das forças para a movimentação dos pontos de massa da malha. Apesar de Lloyd, Székely e Harders (2007) ter a vantagem de uma implementação computacional mais simples, sem a necessidade de forças de correção, a formulação deduzida por Baudet (2006) apresentou erros menores de deslocamento, quando comparado à solução analítica, para a maior parte dos testes e tem aplicação mais abrangente, uma vez que é válida para diferentes valores de coeficiente de Poisson. Para analisar o comportamento do método frente a descontinuidades, foram realizadas simulações para observação do padrão de danificação com diferentes critérios de rompimento das ligações. Além disso, realizou-se uma avaliação qualitativa em um modelo de impacto, demonstrando a aplicabilidade do método em cenários com não linearidades acentuadas, condições de contorno menos definidas e potencial para extensão a problemas dinâmicos.

**Palavras-chaves:** Métodos Lattice; Modelo massa-mola-amortecedor; Discretização do meio contínuo;

## ABSTRACT

Lattice methods represent continuous bodies through discretization into mass points and one-dimensional elements, such as the mass-spring-damper method based on the Kelvin-Voigt model (spring and damper in parallel). Their main advantages are implementation simplicity, due to the use of simple one-degree-of-freedom dynamic systems in the connections, the potential for parallelization and application in real-time simulations. The main difficulty lies in the choice of representative parameters for the mesh (DA SILVA, 2015). In this work, two parameter equivalence formulations, found analytically by Baudet (2006) and Lloyd, Székely e Harders (2007), were evaluated for application in different types of loads. The mesh movement is performed gradually, calculating the new deformed configuration based on the most recent configuration, which allows for the consideration of second-order effects and approximates the geometric nonlinear behavior of the body. The force method is used for moving the mesh mass points. Although Lloyd, Székely e Harders (2007) has the advantage of a simpler computational implementation, without the need for correction forces, the formulation derived by Baudet (2006) showed smaller displacement errors when compared to the analytical solution for most tests and has a broader application, as it is valid for different Poisson's ratio values. To analyze the method's behavior in the presence of discontinuities, simulations were performed to observe the damage pattern with different link rupture criteria. Furthermore, a qualitative evaluation was conducted on an impact model, demonstrating the method's applicability in scenarios with pronounced nonlinearities, less defined boundary conditions, and potential for extension to dynamic problems.

**Key-words:** Lattice methods; Mass-spring-damper model; Continuum Discretization;

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 1 – Heterogeneidades em vermelho incorporadas ao sistema - Adaptado de Brely, Bosia e Pugno (2015) . . . . .                                                                                                                                                             | 17 |
| FIGURA 2 – Movimento de uma partícula (ARGENTA, 2020). . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 21 |
| FIGURA 3 – Movimento entre duas partículas (ARGENTA, 2020). . . . .                                                                                                                                                                                                             | 23 |
| FIGURA 4 – Classificação de cargas dinâmicas: (a) Harmônica simples; (b) Complexa; (c) Impulso; (d) Longa duração - Adaptado de Clough e Penzien (2003). . . . .                                                                                                                | 29 |
| FIGURA 5 – Sistema dinâmico massa-mola-amortecedor. . . . .                                                                                                                                                                                                                     | 30 |
| FIGURA 6 – Comparação de sistemas: (a) não amortecido e (b) amortecido - Adaptado de House e Keyser (2017). . . . .                                                                                                                                                             | 31 |
| FIGURA 7 – Classificações de um sistema amortecido (SANTADE, 2013). . .                                                                                                                                                                                                         | 32 |
| FIGURA 8 – Modelos de amortecimento: (a) Maxwell e (b) Kelvin-Voigt. . . .                                                                                                                                                                                                      | 34 |
| FIGURA 9 – Elementos 2D estruturados: (a) triangulares; (b) quadrangular. .                                                                                                                                                                                                     | 38 |
| FIGURA 10 – Elementos 3D estruturados: (a) tetraedro; (b) hexaedro com diagonais nas faces; e (c) hexaedro com diagonais internas. . . . .                                                                                                                                      | 38 |
| FIGURA 11 – Mola normal e mola de cisalhamento (LI; ZHAO; LIAN, 2019) . .                                                                                                                                                                                                       | 40 |
| FIGURA 12 – Elemento finito e malha massa-mola correspondente (LLOYD; SZÉKELY; HARDERS, 2007). . . . .                                                                                                                                                                          | 42 |
| FIGURA 13 – (a) Uma força $F$ externa é aplicada a um ponto e é projetada nos eixos; (b e c) Cada componente tem uma força $F_{\perp}$ de correção correspondente; (d) A força de correção para força $F$ é a soma dos efeitos das componentes projetadas. (BAUDET, 2006) . . . | 45 |
| FIGURA 14 – Ligação entre dois pontos de massa (HOUSE; KEYSER, 2017). .                                                                                                                                                                                                         | 48 |
| FIGURA 15 – Detecção de colisão (HOUSE; KEYSER, 2017) . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 49 |
| FIGURA 16 – Gráfico da força incremental na simulação . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 57 |
| FIGURA 17 – Modelo do corpo submetido à tração: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal. . . .                                                                                                                                     | 61 |
| FIGURA 18 – Modelo do corpo submetido à compressão: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal. .                                                                                                                                     | 61 |

|                                                                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 19 – Modelo do corpo submetido à flexão: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal. . . .               | 62 |
| FIGURA 20 – Modelo do corpo submetido à cisalhamento: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal. .             | 63 |
| FIGURA 21 – Configuração inicial do modelo submetido ao impacto. . . . .                                                                                  | 65 |
| FIGURA 22 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Tração com formulação por Baudet (2006). . . . .                       | 70 |
| FIGURA 23 – Configuração final das malhas - Tração com formulação por Baudet (2006). . . . .                                                              | 71 |
| FIGURA 24 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Tração com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . .     | 72 |
| FIGURA 25 – Configuração final das malhas - Tração com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . .                                            | 73 |
| FIGURA 26 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Compressão com formulação por Baudet (2006). . . . .                   | 75 |
| FIGURA 27 – Configuração final das malhas - Compressão com formulação por Baudet (2006). . . . .                                                          | 76 |
| FIGURA 28 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Compressão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . . | 77 |
| FIGURA 29 – Configuração final das malhas - Compressão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . .                                        | 78 |
| FIGURA 30 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Flexão com formulação por Baudet (2006). . . . .                       | 80 |
| FIGURA 31 – Configuração final das malhas - Flexão com formulação por Baudet (2006). . . . .                                                              | 81 |
| FIGURA 32 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Flexão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . .     | 82 |
| FIGURA 33 – Configuração final das malhas - Flexão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . .                                            | 83 |

|                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 34 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Cisalhamento com formulação por Baudet (2006). . . .                     | 85  |
| FIGURA 35 – Configuração final das malhas - Cisalhamento com formulação por Baudet (2006). . . . .                                                          | 86  |
| FIGURA 36 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Cisalhamento com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . . | 87  |
| FIGURA 37 – Configuração final das malhas - Cisalhamento com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007). . . . .                                        | 88  |
| FIGURA 38 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para tração                                                                            | 90  |
| FIGURA 39 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para tração . .                                                                           | 91  |
| FIGURA 40 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para compressão . . . . .                                                              | 92  |
| FIGURA 41 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para compressão                                                                           | 93  |
| FIGURA 42 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para flexão                                                                            | 94  |
| FIGURA 43 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para flexão . .                                                                           | 95  |
| FIGURA 44 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para cisalhamento . . . . .                                                            | 96  |
| FIGURA 45 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para cisalhamento                                                                         | 97  |
| FIGURA 46 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para tração . . . . .                                                           | 98  |
| FIGURA 47 – Limite proporcional - Instante inicial e avançado de fissura para tração . . . . .                                                              | 99  |
| FIGURA 48 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para compressão . . . . .                                                       | 100 |
| FIGURA 49 – Limite proporcional - Instante inicial e avançado de fissura para compressão . . . . .                                                          | 101 |
| FIGURA 50 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para flexão . . . . .                                                           | 102 |
| FIGURA 51 – Limite proporcional - Instante inicial e avançado de fissura para flexão . . . . .                                                              | 103 |
| FIGURA 52 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para cisalhamento . . . . .                                                     | 104 |

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 53 – Limite proporcional Instante inicial e avançado de fissura para<br>cisalhamento . . . . .           | 105 |
| FIGURA 54 – Frames da trajetória dinâmica e impacto - formulação de Baudet<br>(2006). . . . .                   | 106 |
| FIGURA 55 – Frames da trajetória dinâmica e impacto - formulação de Lloyd,<br>Székely e Harders (2007). . . . . | 107 |



## LISTA DE SÍMBOLOS

|                          |                                      |
|--------------------------|--------------------------------------|
| $\mathbf{X}, \mathbf{x}$ | Vetores posição                      |
| $t$                      | Tempo                                |
| $\hat{\mathbf{e}}$       | Eixos do sistema                     |
| $\mathbf{u}$             | Vetor deslocamento                   |
| $\mathbf{v}$             | Vetor velocidade                     |
| $\mathbf{a}$             | Vetor aceleração                     |
| $D$                      | Gradiente de deformação material     |
| $\lambda$                | Razão de estiramento                 |
| $\varepsilon$            | Deformação unitária                  |
| $I_d$                    | Matriz identidade                    |
| $F$                      | Força                                |
| $k_1, k_2, k_3, k_4$     | Incrementos do método de Runge-Kutta |
| $f_i$                    | Força de inércia                     |
| $f_k$                    | Força de rigidez                     |
| $f_c$                    | Força de amortecimento               |
| $p(t)$                   | Carga dinâmica variável no tempo     |
| $\omega_0$               | Frequência natural de vibração       |
| $k$                      | Coeficiente de rigidez               |
| $c$                      | Coeficiente de amortecimento         |
| $\zeta$                  | Taxa de amortecimento                |
| $m$                      | Massa                                |

|           |                                                    |
|-----------|----------------------------------------------------|
| $\rho$    | Densidade do material                              |
| $V, V_0$  | Volume deformado e indeformado                     |
| $K$       | Energia cinética                                   |
| $N$       | Energia interna                                    |
| $P$       | Potência mecânica                                  |
| $H$       | Taxa de fluxo de energia cinética                  |
| $W$       | Trabalho mecânico                                  |
| $Q$       | Energia térmica                                    |
| $L_g$     | Lagrangiano                                        |
| $U$       | Energia potencial                                  |
| $S$       | Ação                                               |
| $E$       | Módulo de elasticidade                             |
| $b$       | Espessura do corpo                                 |
| $l^0, l$  | Comprimento inicial e atual da ligação             |
| $p^0$     | Posição inicial do ponto de massa                  |
| $h_0$     | Comprimento inicial de ligações verticais          |
| $l_0$     | Comprimento inicial de ligações horizontais        |
| $\nu$     | Coeficiente de Poisson                             |
| $\Lambda$ | Área ou volume do elemento                         |
| $n$       | Número de nós do elemento padrão                   |
| $\Omega$  | Conjunto de elementos que compartilham um mesmo nó |
| $c_r$     | Coeficiente de restituição                         |
| $c_f$     | Coeficiente de atrito                              |

|          |                                         |
|----------|-----------------------------------------|
| $\sigma$ | Tensão                                  |
| $\delta$ | Deslocamento                            |
| $G$      | Módulo de cisalhamento                  |
| $\alpha$ | Fator de forma                          |
| $I$      | Momento de inércia da seção transversal |
| $w$      | Carga distribuída                       |
| $L$      | Comprimento do corpo                    |
| $A$      | Área da seção transversal               |

## SUMÁRIO

|          |                                        |           |
|----------|----------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                      | <b>16</b> |
| 1.1      | OBJETIVOS                              | 18        |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>           | <b>20</b> |
| 2.1      | CINEMÁTICA                             | 20        |
| 2.1.1    | Gradiente de deformações               | 22        |
| 2.1.2    | Gradiente de deslocamentos             | 24        |
| 2.1.3    | Gradiente de velocidades               | 24        |
| 2.1.4    | Métodos de integração                  | 25        |
| 2.2      | DINÂMICA                               | 27        |
| 2.2.1    | Tipos de carga                         | 28        |
| 2.2.2    | Sistema dinâmico básico                | 29        |
| 2.2.3    | Conservação de massa                   | 34        |
| 2.2.4    | Conservação de energia e Lagrangiano   | 35        |
| 2.3      | MODELO MASSA-MOLA                      | 37        |
| 2.3.1    | Determinação dos parâmetros            | 41        |
| 2.3.2    | Amortecimento                          | 45        |
| 2.3.3    | Determinação de massas                 | 46        |
| 2.3.4    | Movimentação da malha                  | 47        |
| 2.3.4.1  | Método das forças                      | 47        |
| 2.3.4.2  | Colisão                                | 49        |
| 2.3.5    | Não linearidade                        | 50        |
| 2.4      | ESFORÇOS BÁSICOS E SOLUÇÕES ANALÍTICAS | 51        |
| 2.4.1    | Tração e compressão                    | 51        |
| 2.4.2    | Flexão e cisalhamento                  | 52        |
| <b>3</b> | <b>METODOLOGIA</b>                     | <b>54</b> |
| 3.1      | DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL                 | 54        |
| 3.2      | MODELO NÃO LINEAR GEOMÉTRICO           | 56        |
| 3.3      | ANÁLISE DO MODELO                      | 58        |

|          |                                    |            |
|----------|------------------------------------|------------|
| 3.4      | MODELOS SIMULADOS . . . . .        | 60         |
| 3.4.1    | Tração e compressão . . . . .      | 60         |
| 3.4.2    | Flexão . . . . .                   | 62         |
| 3.4.3    | Cisalhamento . . . . .             | 63         |
| 3.4.4    | Impacto . . . . .                  | 64         |
| 3.5      | ALGORITMO . . . . .                | 66         |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS . . . . .</b>        | <b>69</b>  |
| 4.1      | TRAÇÃO . . . . .                   | 69         |
| 4.2      | COMPRESSÃO . . . . .               | 74         |
| 4.3      | FLEXÃO . . . . .                   | 79         |
| 4.4      | CISALHAMENTO . . . . .             | 84         |
| 4.5      | PADRÃO DE FISSURAÇÃO . . . . .     | 89         |
| 4.5.1    | Limite igual . . . . .             | 89         |
| 4.5.2    | Limite proporcional . . . . .      | 97         |
| 4.6      | IMPACTO . . . . .                  | 105        |
| 4.7      | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS . . . . . | 108        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO . . . . .</b>         | <b>114</b> |
| <b>6</b> | <b>TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b> | <b>117</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>       | <b>118</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

As simulações e avaliações do comportamento dos corpos são essenciais em inúmeras áreas da ciências e engenharia, pois permitem prever eventos ou comportamentos específicos quando submetidos a diferentes esforços, deformações e ações.

Quando se trata do movimento de corpos contínuos, a descrição é complexa, já que um sistema contínuo tem infinitos graus de liberdade e envolve inúmeras equações. Para abordar o problema de forma simplificada, é vantajoso utilizar uma representação que tenha dimensão finita, mas que, ao mesmo tempo, possua a flexibilidade necessária para capturar o comportamento do sistema com a precisão exigida (DA SILVA; GIRALDI; APOLINÁRIO, 2015).

A separação da estruturas em elementos menores é uma técnica utilizada para representar o comportamento de uma estrutura complexa contínua de maneira idealizada, mas ainda representativa. Existem duas abordagens principais na discretização de estruturas. A primeira envolve a construção de equações diferenciais parciais para a estrutura contínua que são resolvidas por técnicas numéricas, como é o caso do método dos elementos finitos (MEF). A segunda abordagem, modela as respostas mecânicas da estrutura por meio de leis físicas, como a segunda lei de Newton, em pequenos elementos, tendo como exemplos a dinâmica molecular e o método dos elementos discretos (ZHAO, 2017).

Dentro do segundo grupo, encontram-se os modelos massa-mola ou massa-mola-amortecedor, também conhecidos como mass-spring models (MSMs). Esses modelos possuem uma implementação simples e podem ser mais rápidos do que os baseados na primeira abordagem, sendo adequados para aplicações em tempo real. Entre estas aplicações, destacam-se as animações, que exigem feedback rápido para o animador, ambientes virtuais, jogos e treinamento cirúrgico, onde os objetos e tecidos devem se deformar em tempo real em resposta a forças aplicadas ou à interação do usuário (DA SILVA; GIRALDI; APOLINÁRIO, 2015).

Os métodos baseados em discretização da estrutura em pontos de massa

e elementos unidimensionais, como os modelos massa-mola (MSM), apresentam a vantagem de incorporar descontinuidades sem a necessidade da geração de uma nova malha. Em problemas envolvendo dano ou fraturas, as descontinuidades podem ser representadas pela remoção ou perda progressiva de rigidez nos elementos de ligação (ZHAO; FANG; ZHAO, 2012). A utilização desses modelos permite também representar heterogeneidades no meio estudado de maneira idealizada, atribuindo diferentes propriedades mecânicas aos elementos, como ilustrado pela Figura 1. Essa característica é útil, por exemplo, na representação de materiais compósitos, onde uma peça pode ter regiões com diferentes propriedades mecânicas em sua estrutura, como em Braun, Iváñez e Ariza (2021), que distribui propriedades diferentes entre os elementos para simular dano progressivo nesses materiais.

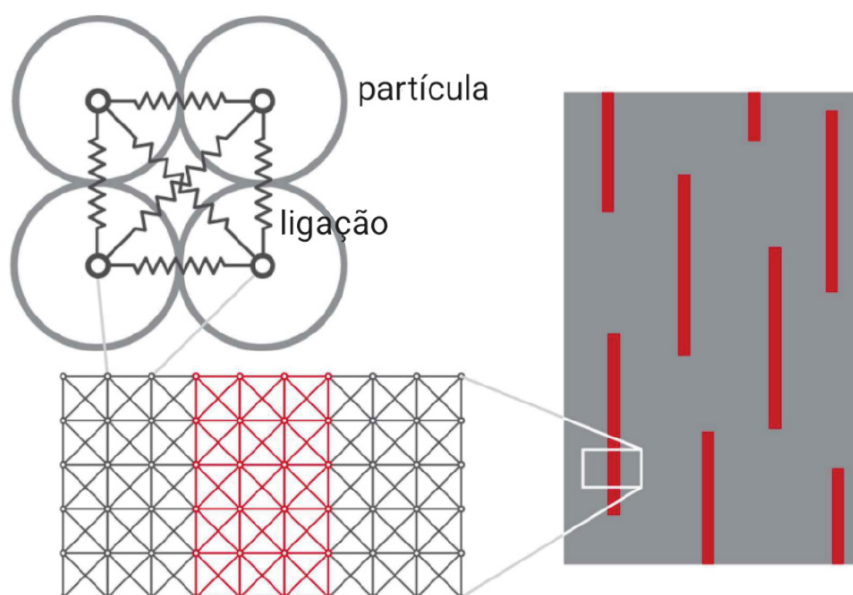


FIGURA 1 – Heterogeneidades em vermelho incorporadas ao sistema - Adaptado de Brely, Bosia e Pugno (2015)

Apesar das vantagens, a maior dificuldade para a ampla aplicação dos sistemas massa-mola em simulações está na determinação dos parâmetros de equivalência que relacionem adequadamente as propriedades do material aos parâmetros das ligações, de modo a garantir precisão do modelo (DA SILVA, 2015). A simplicidade das ligações e a dificuldade na determinação dos parâmetros causam baixa precisão, que é o principal obstáculo na aplicação do método, razão pela qual esses modelos são frequentemente ajustados por meio de experimentação ou para aplicações específicas. A utilização de uma formulação para equivalência de parâmetros por meio de soluções analíticas

abrangentes ainda representa um desafio.

Diante desses desafios na parametrização de sistemas massa-mola, este trabalho propõe uma avaliação comparativa de formulações analíticas para equivalência de rigidez, alternativas às abordagens baseadas em experimentação. Para isso, são avaliadas duas metodologias distintas para determinação dos parâmetros da malha, analisando seu desempenho quando submetidas a diferentes esforços.

## 1.1 OBJETIVOS

Este estudo tem como objetivo avaliar o desempenho de sistemas massa-mola na representação de deformação de um sistema regular contínuo. Para isso, emprega-se uma formulação cinemática, que descreve o movimento espacial de uma malha discreta, com a formulação de equilíbrio dinâmico para a análise da resposta da malha sob a ação de diferentes esforços.

Os objetivos específicos são:

- Realizar a discretização espacial e obtenção de parâmetros físicos equivalentes para as ligações, utilizando duas diferentes formulações de equivalência, desenvolvidas por Baudet (2006) e Lloyd, Székely e Harders (2007);
- Elaborar rotina computacional na linguagem *Python* para movimentação da malha e obtenção de valores de tensão e deformação nas ligações;
- Obter um comportamento global geométrico não linear do corpo estudado pela utilização da formulação proposta, tendo uma relação entre deformação e deslocamento linear no sistema local das ligações;
- Avaliar a eficácia da equivalência de parâmetros físicos adotados, avaliando os deslocamentos analíticos para esforços de tração, compressão, flexão e cisalhamento;
- Avaliar a eficácia do método massa-mola para situações em que as condições de apoio não estão presentes durante toda a simulação;
- Avaliar se a metodologia apresenta convergência de valores de deslocamento com refinamento da malha;



- Comparar padrões de danificação do modelo analisado empregando diferentes critérios de rompimento para as ligações.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são abordados os conceitos necessários para o entendimento do método massa-mola-amortecedor. Inicia-se pelos conceitos de cinemática, baseados em Nair (2009) e Argenta (2020), utilizados para descrição do movimento e métodos de solução de equações diferenciais. Em seguida, são apresentados conceitos de dinâmica, que incluem a análise de cargas variáveis e funcionamento de um sistema dinâmico simples com rigidez e amortecimento. É apresentada a fundamentação do sistema massa-mola, que inclui as formulações de equivalência de parâmetros físicos e as equações que regem a movimentação da malha. Por fim, são mostradas as soluções analíticas para as configurações de carga correspondentes aos esforços simulados (tração, compressão, cisalhamento e flexão), que servirão como referência para validação dos resultados.

### 2.1 CINEMÁTICA

A cinemática é o estudo das mudanças de posição, deslocamento, trajetória de um corpo ou ponto material, em um tempo  $t$  com configuração inicial  $t_0$ , sem a análise dos esforços que as causam.

A mudança de posição de um ponto é descrita pelo vetor posição, que contém as coordenadas de uma partícula em cada eixo de referência do sistema. O vetor posição do ponto  $P$  no tempo  $t = t_0$ , mostrado na Figura 2, tem o formato da Equação 2.1 e no tempo  $t = t_t$  tem o formato da Equação 2.2.

$$\mathbf{X} = X_1\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2\hat{\mathbf{e}}_2 + X_3\hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3\hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.2)$$

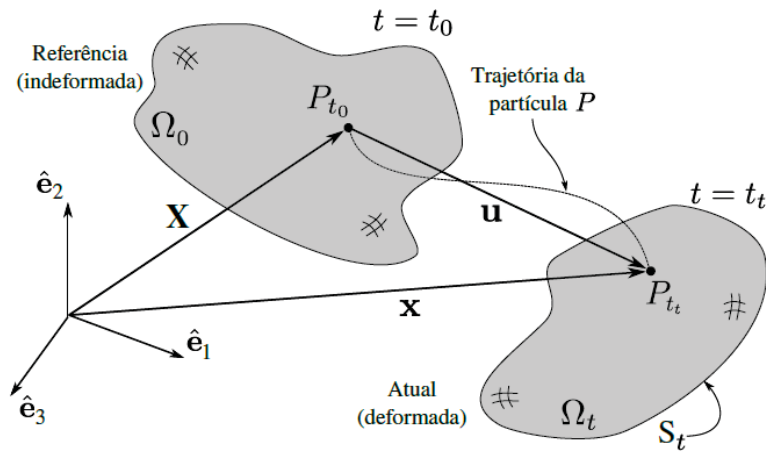


FIGURA 2 – Movimento de uma partícula (ARGENTA, 2020).

O deslocamento  $\mathbf{u}$  mostrado é definido pela diferença entre o vetor posição atual  $\mathbf{x}$  e o vetor posição anterior  $\mathbf{X}$ . É possível perceber que o deslocamento não representa a trajetória do ponto e sim a menor distância entre as configurações.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

A velocidade vetorial de um ponto indica a taxa de mudança de sua posição em relação ao tempo. A velocidade  $\mathbf{v}$  é obtida calculando o deslocamento em relação a um tempo  $t$ , como mostra a Equação 2.4.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} \quad (2.4)$$

A aceleração, por sua vez, é a taxa de variação da velocidade em um determinado período de tempo. A aceleração vetorial, pode ser determinada pela variação do vetor velocidade no tempo, sendo, portanto, a segunda derivada do deslocamento em relação ao tempo.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

A descrição do movimento, ou mudança de configuração de uma partícula ao longo de um período de tempo, na cinemática pode ser feita de duas maneiras, com a descrição Lagrangeana ou a descrição Euleriana do movimento.

Na descrição Euleriana, também chamada de espacial, a posição onde a partícula se encontrava em um tempo  $t$  anterior é descrita em função de onde ela se encontra no momento (Equação 2.6). Nesta, um ponto espacial é analisado e então são observadas quais partículas passam por ele. Já na descrição Lagrangeana, ou material, o comportamento é descrito em função das coordenadas no tempo  $t = 0$  e o movimento de uma mesma partícula é acompanhado conforme o tempo varia (Equação 2.7) (ARGENTA, 2020).

Levando em conta que  $X$  representa a posição inicial do ponto, como na Equação 2.1, e  $x$  a posição no tempo  $t$ , como na Equação 2.2, é possível compreender as duas descrições comparando as equações citadas e a Figura 2.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \text{ ou } \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \text{ ou } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (2.7)$$

Dependendo da aplicação, as diferentes descrições podem ter suas vantagens. Na análise de fluídos, onde as características do fluxo em um local específico é mais importante do que a posição de cada partícula na configuração inicial, a descrição Euleriana é mais vantajosa. Por outro lado, para o movimento de um sólido de geometria simples onde se deseja entender como o corpo se deforma e se desloca, a descrição Lagrangeana é preferida (NAIR, 2009).

### 2.1.1 Gradiente de deformações

No estudo da cinemática de corpos deformáveis, é preciso entender como a deformação influencia a relação entre os pontos internos de um corpo. Considerando duas partículas, P e Q, contidas dentro de um corpo que se deforma ao longo do tempo, é possível perceber que a relação inicial entre elas, representada pelo vetor  $d\mathbf{X}$ , é alterada e passa a ser representada pelo vetor  $d\mathbf{x}$ . Essa mudança é ilustrada na Figura 3.

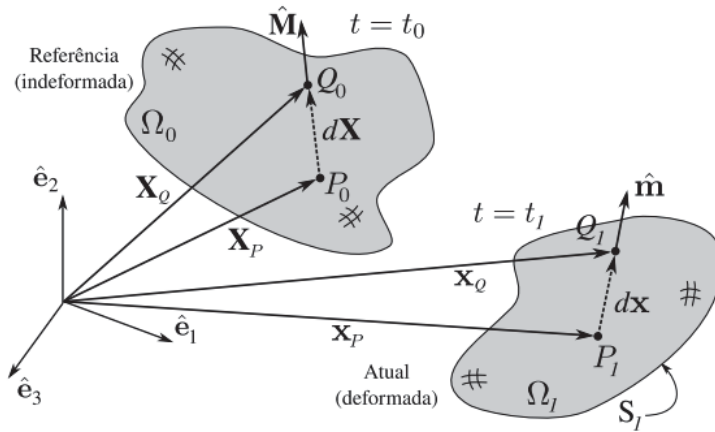


FIGURA 3 – Movimento entre duas partículas (ARGENTA, 2020).

A transformação da configuração inicial do corpo para a configuração atual é descrita pelo gradiente de deformação material ( $D$ ), que é a matriz jacobiana da função que descreve essa deformação. Onde:

$$\mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A operação que descreve a transformação do vetor inicial  $d\mathbf{X}$  para o vetor  $d\mathbf{x}$  é dada pela multiplicação deste pelo gradiente de deformação material:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.9)$$

Analogamente, o gradiente de deformação espacial faz a operação oposta, levando da configuração deformada em  $t$  para configuração original em  $t = 0$ :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

A distância entre os pontos P e Q é o módulo dos vetores que os ligam nas duas configurações,  $d\mathbf{X}$  e  $d\mathbf{x}$ . A relação entre essas duas distâncias é chamada de razão de estiramento ou *stretch*, mostrada na Equação 2.11.

$$\lambda = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = \frac{ds}{dS} \quad (2.11)$$

A deformação unitária é outro conceito fundamental na mecânica dos sólidos, utilizada para análise de tensões em estruturas. Esta é definida pela relação entre a variação da distância entre os dois pontos P e Q e a distância na configuração original.

$$\varepsilon = \frac{ds - dS}{dS} \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Gradiente de deslocamentos

O deslocamento de um ponto pode ser descrito pela Equação 2.3. Especificamente para a descrição lagrangeana, o deslocamento pode ser representado em função das coordenadas de referência por:

$$u_i(\mathbf{X}, t) = x_i(\mathbf{X}, t) - X_i \quad (2.13)$$

Aqui,  $u_i(\mathbf{X}, t)$  representa a componente do deslocamento na direção  $i$  em função das coordenadas materiais  $\mathbf{X}$  e do tempo  $t$ . A função  $x_i(\mathbf{X}, t)$  é a componente  $i$  do vetor posição atual do ponto, enquanto  $X_i$  é da posição inicial.

O gradiente de deslocamentos material é obtido pela derivada parcial dos deslocamentos em relação às coordenadas materiais. Esse gradiente descreve como os deslocamentos mudam no espaço em relação a configuração de referência.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} &= \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} &= D_{ij} - \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} = \mathbf{D} - \mathbf{I}_d$$

Na Equação 2.14,  $D_{ij}$  representa a matriz gradiente de deformação, que é a derivada parcial das posições atuais em relação às coordenadas materiais. O símbolo  $\delta$  representa o delta de Kronecker que tem valor 1 para  $i$  e  $j$  iguais e 0 para o restante, por isso pode ser representado pela matriz identidade.

### 2.1.3 Gradiente de velocidades

O gradiente de velocidades material representa a taxa de variação da velocidade na direção das coordenadas. Este gradiente é a derivada no tempo do gradiente

de deformações materiais  $D$ .

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(\mathbf{x}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial X_j} = \nabla_X \mathbf{v} \quad (2.15)$$

#### 2.1.4 Métodos de integração

No acompanhamento da trajetória de um ponto no espaço, a segunda lei de Newton (Equação 2.16) é utilizada para entender o movimento quando este sofre uma ação externa. A lei dita que a aceleração do objeto é proporcional a força total que atua nele e inversamente proporcional a massa.

$$F = m\ddot{\mathbf{u}} \quad (2.16)$$

A partir da aceleração é possível determinar a velocidade e a posição do corpo analisado. Levando em conta as Equações 2.4 e 2.5 é possível perceber que a velocidade pode ser obtida pela integração da aceleração e a posição pela integração da velocidade.

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt \quad (2.17)$$

$$\mathbf{x} = \int \mathbf{v} dt \quad (2.18)$$

Em problemas dinâmicos, a solução dessas equações analiticamente normalmente não é o suficiente, pois podem ser aplicadas múltiplas forças vetoriais com diferentes sentidos, valores e dependência do tempo. Para esses casos, onde a aceleração pode ser dependente de diversos fatores, como mostra a Equação 2.19, são necessárias técnicas de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) (HOUSE; KEYSER, 2017).

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (2.19)$$

O método de resolução de problemas de valor inicial (PVI) para equação de movimento mais simples e mais conhecido é o de Euler, mostrado na Equação 2.20. O

algoritmo de Euler tem precisão limitada e soluções não estáveis por ser assimétrico (GOULD; TOBOCHNIK; CHRISTIAN, 2016).

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= v_n + a_n \cdot \Delta t \\x_{n+1} &= x_n + v_n \cdot \Delta t\end{aligned}\tag{2.20}$$

Onde:

- $a_n$ ,  $v_n$  e  $x_n$ : Aceleração, velocidade e posição no início do passo de tempo;
- $v_{n+1}$  e  $x_{n+1}$ : Velocidade e posição no final do passo de tempo;
- $\Delta t$ : Passo de tempo.

Uma maneira de melhorar a precisão do algoritmo de Euler é a utilização da média das velocidades, do início e fim do intervalo, na obtenção da nova posição (Equação 2.21). Esse método é chamado de método do ponto médio ou Euler modificado/aprimorado.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \cdot \Delta t \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1}) \cdot \Delta t\end{aligned}\tag{2.21}$$

Por ser um método de primeira ordem, a precisão aumenta proporcionalmente à medida que o passo de tempo diminui. Em simulações computacionais, isso pode resultar em um custo computacional elevado, já que são necessários passos de tempo menores que os de métodos de maior ordem para alcançar uma mesma precisão. Em situações onde métodos de primeira ordem levam a custos computacionais excessivos, é possível utilizar métodos de ordem superior (GOULD; TOBOCHNIK; CHRISTIAN, 2016).

Um método de ordem superior para resolução de EDO's é o de Runge-Kutta (RK). Neste, a solução é aproximada por uma média ponderada de diversas avaliações da função derivada em diferentes pontos dentro de um intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ .

O algoritmo de Runge-Kutta tem diferentes ordens, onde o número da ordem representa quantos valores dentro do intervalo  $[t, t + \Delta t]$  são utilizados para obter a média ponderada. No Runge-Kutta de ordem quatro (RK4), a derivada é calculada



no início do intervalo, no fim e em dois pontos diferentes no meio. Esses pontos intermediários contribuem com peso dois na média ponderada, enquanto os valores iniciais e finais tem peso um.

O algoritmo é descrito de maneira generalizada na equação Equação 2.22, onde  $f(z, t)$  representa a função taxa de variação da grandeza  $z$ . O processo se repete tanto para encontrar a velocidade, utilizando a aceleração como função  $f(z, t)$ , como para a posição, utilizando velocidade como  $f(z, t)$  (GOULD; TOBOCHNIK; CHRISTIAN, 2016).

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(z_n, t_n) \\
 k_2 &= f\left(z_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
 k_3 &= f\left(z_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
 k_4 &= f(z_n + k_3, t_n + \Delta t)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6} \cdot \Delta t \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

O método envolve o cálculo de quatro incrementos ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ ) que são combinados para obter uma estimativa da variável de interesse no próximo passo de tempo. É então obtida uma média ponderada desses incrementos, para uma aproximação da solução.

O passo de tempo a ser utilizado deve ser suficientemente pequeno para que os erros residuais em cada iteração não se acumulem de maneira significativa, evitando assim diferenças consideráveis no resultado final.

## 2.2 DINÂMICA

A análise dinâmica de uma estrutura e a análise estática diferem em dois aspectos. Primeiro, na análise dinâmica pode haver variação de magnitude, direção ou posição de cargas e suas respostas ao longo do tempo, onde cada instante terá um resposta distinta. O segundo fator, considerado o mais importante, é que para problemas estáticos onde as respostas internas, como momentos e cisalhamento, são determinadas apenas em função da carga. Em contraste, para análises dinâmicas a

resposta não depende apenas da carga mas também das forças internas de inércia, que são as forças que resistem a acelerações da estrutura (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

### 2.2.1 Tipos de carga

As cargas dinâmicas aplicadas a estruturas podem ser classificadas em: harmônica simples, harmônica complexa, impulso ou longa duração. As cargas harmônicas são periódicas, ou seja, repetidas dentro de um intervalo de tempo, como a vibração de um motor enquanto ligado. As cargas de impulso e longa duração são não-periódicas. A carga de impulso se caracteriza por ter um pico de carregamento rápido e curto e a de longa duração por ser aplicada por um tempo maior, mas sem padrão de repetição (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

Exemplos de gráficos de histórico de carregamento para cada tipo de carga dinâmica são mostrados na Figura 4.

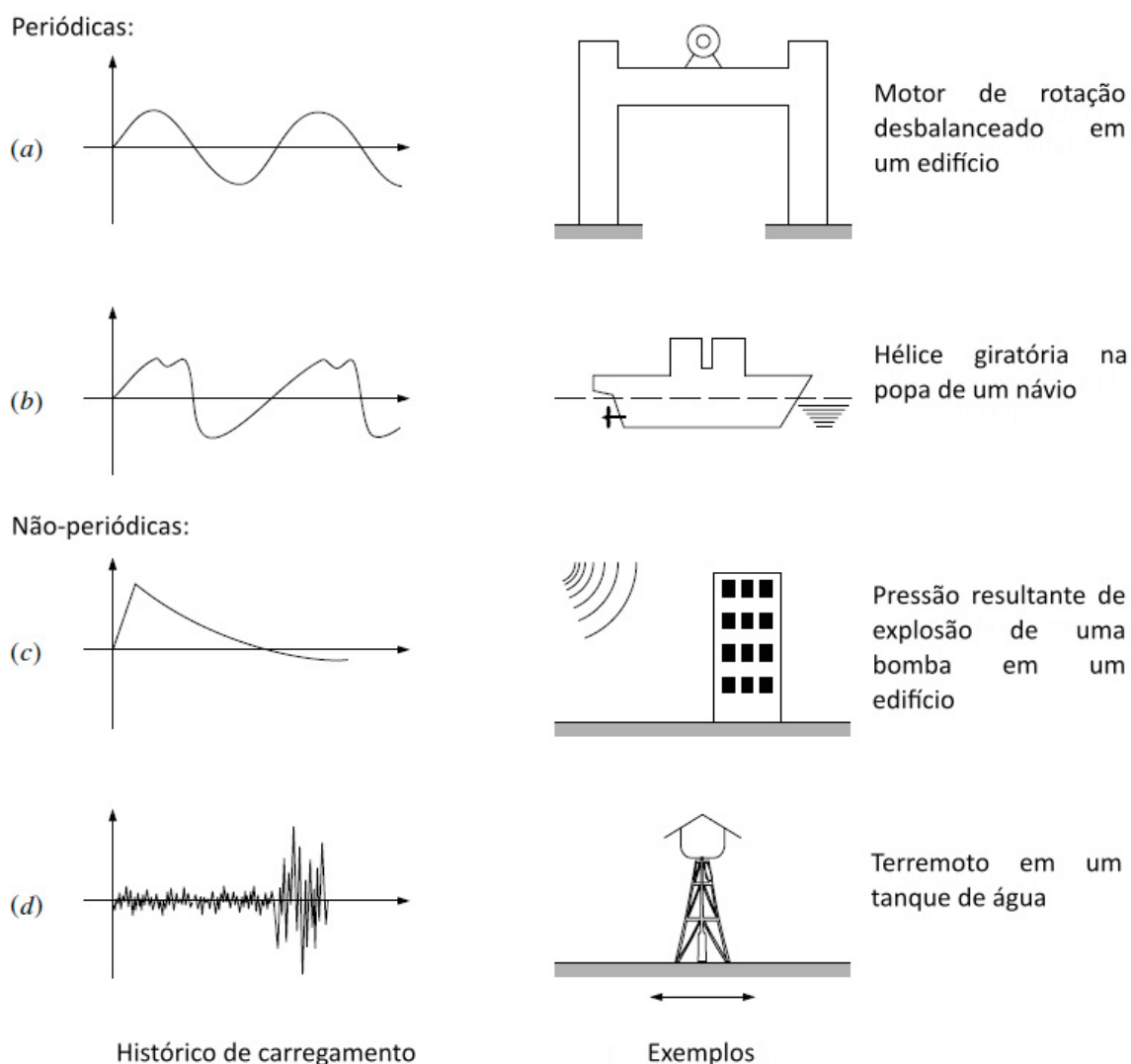


FIGURA 4 – Classificação de cargas dinâmicas: (a) Harmônica simples; (b) Complexa; (c) Impulso; (d) Longa duração - Adaptado de Clough e Penzien (2003).

### 2.2.2 Sistema dinâmico básico

Um sistema dinâmico é composto de propriedades físicas essenciais: massa, propriedades elásticas e mecanismos de dissipação de energia. Relacionando essas propriedades com um sistema de grau de liberdade único, como mostrado em (a) da Figura 5, cada uma destas pode ser representada por um elemento físico (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

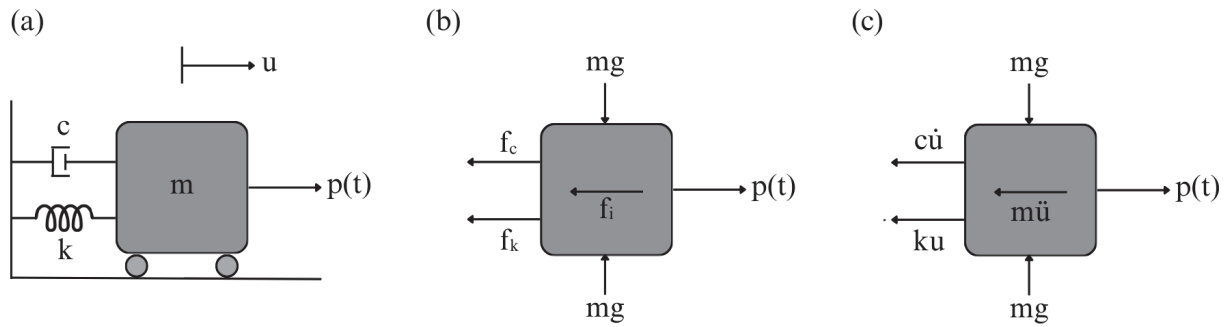


FIGURA 5 – Sistema dinâmico massa-mola-amortecedor.

No sistema, a massa é mostrada como um corpo rígido que tem seu único grau de liberdade sendo o deslocamento  $u$  no eixo horizontal. A propriedade elástica é representada como uma mola de rigidez  $k$  e a dissipação de energia é feita pelo amortecedor viscoso de coeficiente de amortecimento  $c$ .

Assumindo que o sistema é submetido a uma carga externa  $p$  que varia em função do tempo e levando em conta o princípio de d'Alembert, que diz que uma massa desenvolve uma força de inércia proporcional a sua aceleração, assim é descrita a Equação 2.23 de equilíbrio de forças.

$$f_i + f_c + f_k = p(t) \quad (2.23)$$

Onde:

- $f_i$ : Força de inércia;
- $f_k$ : Força de rigidez;
- $f_c$ : Força de amortecimento;
- $p(t)$ : Carga externa dinâmica aplicada;

Assim é possível visualizar a montagem da equação de movimento para o sistema linear elástico em Equação 2.24.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.24)$$

Onde:

- $m$ : Massa;
- $\ddot{u}$ : Aceleração;
- $c$ : Coeficiente de amortecimento;
- $\dot{u}$ : Velocidade;
- $k$ : Coeficiente de rigidez;
- $u$ : Deslocamento.

Um sistema não amortecido em movimento, sem a influência de forças externas, tende a manter um movimento oscilatório durante todo o período de tempo analisado (vibração livre). O amortecimento tem o propósito de dissipar a energia do sistema, tirando-o do movimento harmônico até a estabilidade (HOUSE; KEYSER, 2017).

A Figura 6 ilustra a diferença na posição ao longo do tempo entre um sistema massa-mola não amortecido e um sistema amortecido. Ambos tem mesma massa, rigidez e posição inicial.

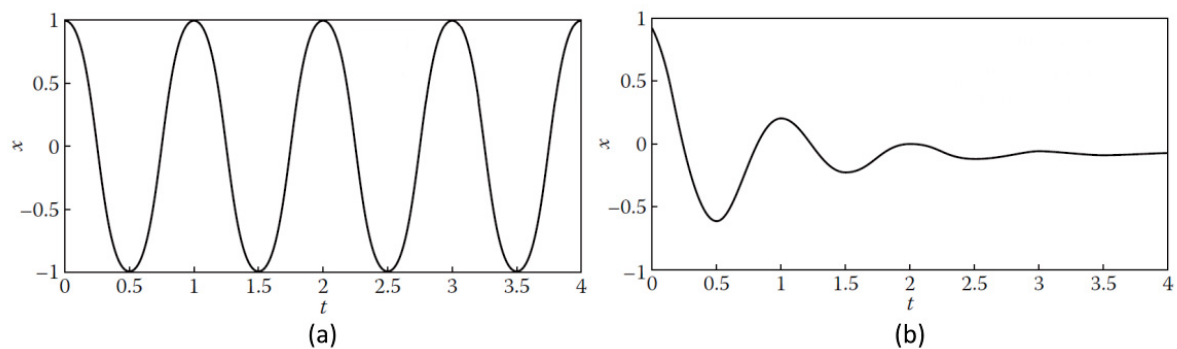


FIGURA 6 – Comparação de sistemas: (a) não amortecido e (b) amortecido - Adaptado de House e Keyser (2017).

Para um sistema de um grau de liberdade, como mostrado na Figura 5, sem forças externas aplicadas a frequência de vibração é chamada de frequência natural e é dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.25)$$

Um sistema amortecido pode ser classificado em superamortecido, criticamente amortecido ou sub-amortecido. Essa classificação é feita analisando a taxa de amortecimento  $\zeta$ , obtida por:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} \quad (2.26)$$

O sistema é considerado superamortecido quando o valor de  $\zeta$  é maior que 1. Quando  $\zeta$  é igual a 1, o sistema é criticamente amortecido. Já para valores de  $\zeta$  entre 0 e 1, o sistema é subamortecido. A Figura 7 ilustra as classificações.

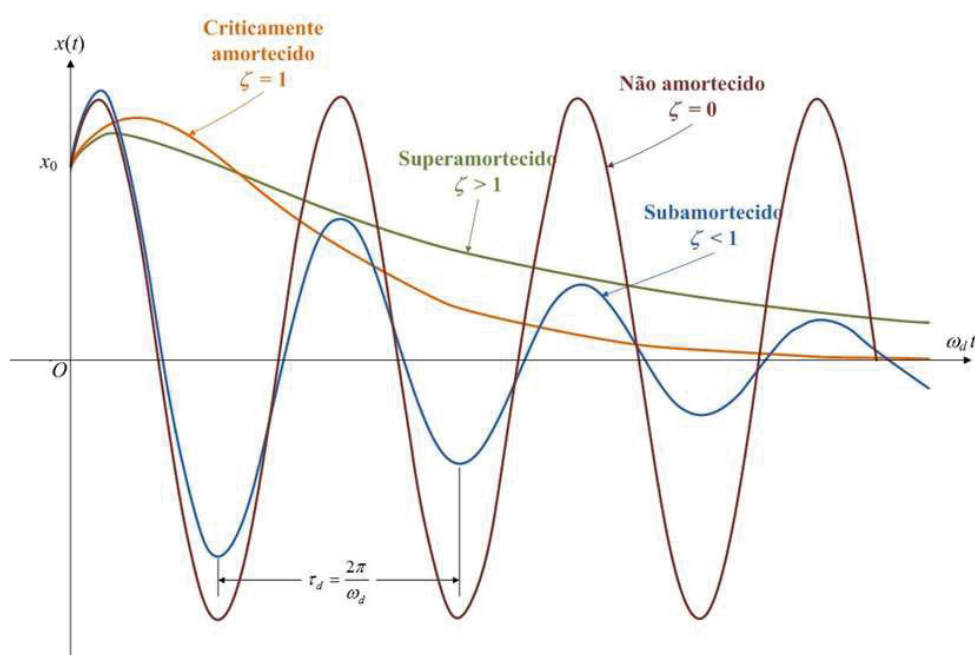


FIGURA 7 – Classificações de um sistema amortecido (SANTADE, 2013).

A dissipação de energia em uma estrutura inteira é a soma de diferentes fatores como: amortecimento da estrutura em si (pelo material e pelas articulações), amortecimento de elementos não-estruturais e dissipação de energia para o solo. Na maior parte dos casos o amortecimento do material é o predominante (BACHMANN et al., 1997).

A taxa de amortecimento de um material pode ser determinada experimentalmente. Alguns valores aproximados de taxa de amortecimento para diferentes materiais são mostrados na Equação 2.26

| <b>Sistema</b>                    | <b>Taxa de Amortecimento Viscoso <math>\zeta</math></b> |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Estruturas Metálicas Contínuas    | 0,02 a 0,04                                             |
| Estrutura Metálica com Juntas     | 0,03 a 0,07                                             |
| Borracha                          | $\approx 0,05$                                          |
| Estruturas de Concreto Protendido | 0,02 a 0,05                                             |
| Estruturas de Concreto Reforçado  | 0,04 a 0,07                                             |
| Aço                               | 0,001 a 0,002                                           |

TABELA 1 – Taxa de amortecimento viscoso para diferentes sistemas (BACHMANN et al., 1997)

Para descrever matematicamente o comportamento de amortecedores viscosos são utilizados modelos de amortecimento. Entre os modelos mais simples estão os modelos de Maxwell e de Kelvin-Voigt.

O modelo de Maxwell é composto por uma mola e um amortecedor conectados em série. Nesse arranjo, a tensão aplicada é igual em ambos os elementos e a deformação total corresponde à soma das deformações individuais da mola e do amortecedor. Esse modelo apresenta uma deformação instantânea quando submetido a uma tensão constante, seguido de uma deformação progressiva ao longo do tempo. Por outro lado, modelo de Kelvin-Voigt, que consiste em uma mola e um amortecedor associados em paralelo, apresenta a mesma deformação em ambos os componentes, com a tensão distribuída entre eles. Quando aplicada uma tensão constante no segundo modelo, a resposta de deformação é gradual e se aproxima lentamente de um valor máximo. Além disso, se a tensão for removida, o sistema retorna lentamente à sua configuração original, sem apresentar deformação residual (NAVARRO, 2017).

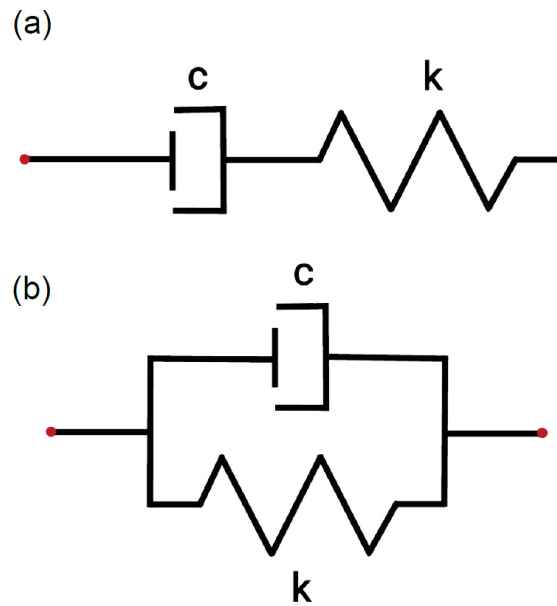


FIGURA 8 – Modelos de amortecimento: (a) Maxwell e (b) Kelvin-Voigt.

Quando necessário, para representar de forma mais precisa o comportamento de materiais reais, os modelos podem ser combinados. Isso ocorre, por exemplo, no modelo generalizado de Maxwell e no modelo generalizado de Kelvin-Voigt, nos quais múltiplos elementos dos modelos básicos são associados para descrever adequadamente fenômenos como relaxação e fluência. Além desses, existem também modelos híbridos, como o modelo de Burgers, que combina características dos dois modelos anteriores (NAVARRO, 2017).

### 2.2.3 Conservação de massa

A lei da conservação de massa afirma que a massa total do sistema não se altera em nenhuma configuração, seja deformada ou indeformada. Tendo que  $\rho$  é a densidade do material e  $V$  e  $V_0$  os volumes deformado e indeformado, respectivamente, é possível obter a Equação 2.27 e Equação 2.28 (ARGENTA, 2020).

$$m = \int_{V_0} \rho V_0 = \int_V \rho V \quad (2.27)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho V_0 = \frac{d}{dt} \int_V \rho V = 0 \quad (2.28)$$



### 2.2.4 Conservação de energia e Lagrangiano

O primeiro princípio da termodinâmica afirma que a variação no tempo da soma das energias cinética e interna de um sistema é igual a taxa do fluxo das energias que são adicionadas a ele. Dessas energias adicionadas ao sistema são citadas a entrada de potência mecânica e de taxa de fluxo de energia térmica (NAIR, 2009).

$$\frac{d}{dt}(K + N) = P + H \quad (2.29)$$

Onde:

- $K$ : Energia cinética;
- $N$ : Energia interna;
- $P$ : Potência mecânica;
- $H$ : Taxa de fluxo de energia térmica.

Como a potência é a variação de trabalho mecânico no tempo, podemos representar a equação toda em derivadas de tempo. Tendo trabalho mecânico como  $W$  e energia térmica como  $Q$ , é obtido:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dN}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (2.30)$$

Para sistemas conservativos, nos quais não há perdas por atrito, calor ou influências externas, a energia mecânica total permanece constante. Nesses casos, o movimento do sistema pode ser descrito pela mecânica lagrangiana, uma formulação alternativa à mecânica newtoniana, baseada em energia em vez de forças. O Lagrangiano  $L$  é definido como a diferença entre a energia cinética  $K$  e a energia potencial  $U$  do sistema (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2011).

$$L_g = K - U \quad (2.31)$$

Utilizando técnicas de cálculo variacional associadas ao princípio de Hamilton, também conhecido como princípio da mínima ação, é possível descrever o movimento

do sistema. Esse princípio estabelece que a trajetória real seguida por um sistema é aquela que torna a ação  $S$ , variação do lagrangiano no tempo, estacionária (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2011).

$$S = \int L_g dt \quad (2.32)$$

## 2.3 MODELO MASSA-MOLA

Os métodos Lattice (ou métodos de grade) são técnicas numéricas que discretizam corpos contínuos em partículas interconectadas organizadas em uma malha regular, como uma rede. Essa abordagem apresenta vantagens em comparação a outros métodos, especialmente pela facilidade em incorporar descontinuidades ou heterogeneidades do material estudado. No entanto, para que esses sistemas discretizados em partículas alcancem resultados precisos, é necessário que as leis físicas e constitutivas do material sejam bem definidas (NIKOLIĆ et al., 2018).

A modelagem de uma malha de partículas discretas ligadas por elementos deformáveis permite representar o comportamento de diferentes objetos como borracha, tecidos e qualquer outro corpo que possa ser discretizado em um modelo geométrico poligonal. A disposição das ligações na malha de pontos depende do objetivo do trabalho e influencia no resultado final da simulação (HOUSE; KEYSER, 2017).

Em análises de corpos deformáveis por métodos de grade, as malhas podem ser construídas de diferentes maneiras. A escolha da malha do modelo irá determinar como os esforços se propagam e o seu tamanho determina a precisão de uma simulação.

As malhas podem ser separadas em não estruturadas e estruturadas. As não estruturadas são malhas sem organização prévia, precisando de técnicas como triangulação de Delauney para estabelecer padrões regulares. Este método consiste em conectar os pontos garantindo que nenhum deles esteja dentro dos círculos que circunscrevem os triângulos da malha. Esse processo evita triângulos com ângulos muito pequenos, que podem causar dificuldades e instabilidades em simulações numéricas (BAUDET, 2006).

As malhas estruturadas são conectadas por eixos que conectam diversos pontos em padrões previsíveis. As malhas estruturadas para análises 2D mais comuns são as triangulares e quadrangulares. A Figura 9 ilustra elementos de malhas bidimensionais estruturadas.

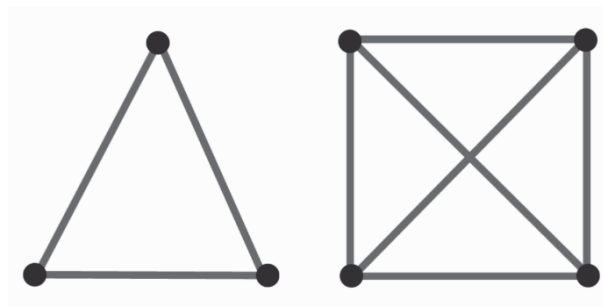


FIGURA 9 – Elementos 2D estruturados: (a) triangulares; (b) quadrangular.

Geralmente, não é possível simular corretamente comportamentos mecânicos somente com malhas quadrangulares sem a adição de conexões diagonais, pois a célula quadrangular apresenta instabilidade e colapsa. Conforme demonstrado por House e Keyser (2017), malhas quadrangulares com duas diagonais apresentam a vantagem de resistir tanto a esforços no plano quanto fora do plano da célula. Por outro lado, malhas triangulares destacam-se por sua adaptabilidade a geometrias complexas. A seleção do tipo de malha mais adequado deve considerar tanto os requisitos do modelo quanto o desempenho na aplicação pretendida.

As malhas tridimensionais utilizadas nos métodos de grade podem ser classificadas em tetraédricas ou hexaédricas, podendo incluir adaptações como conexões diagonais. No caso das malhas hexaédricas com elementos adicionais, essas conexões podem estar posicionadas tanto nas faces quanto no interior do poliedro.

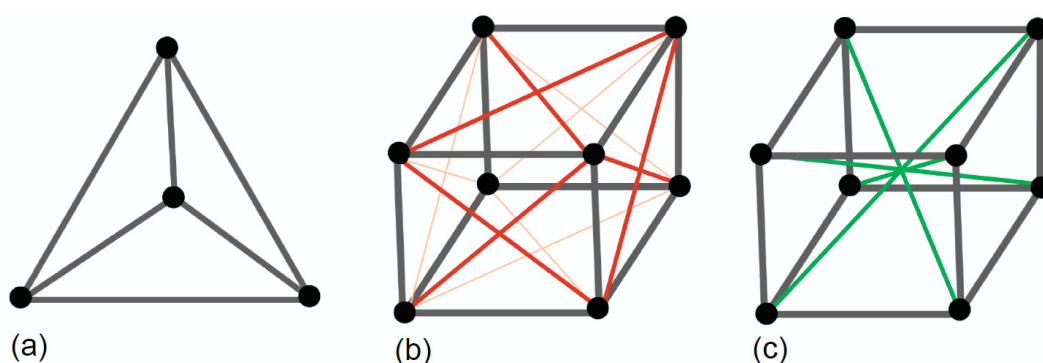


FIGURA 10 – Elementos 3D estruturados: (a) tetraedro; (b) hexaedro com diagonais nas faces; e (c) hexaedro com diagonais internas.

Entre os métodos de grade destacamos a modelagem de corpos contínuos por meio de sistemas massa-mola, que é empregada na simulação de tecidos e sólidos

deformáveis. Essa abordagem, denominada Lattice Spring Model (LSM) ou Mass-Spring Model (MSM), apresenta implementação computacional simples, baseando-se em leis físicas para atualizar as posições das partículas e as forças de interação entre elas.

O MSM se destaca como uma abordagem amplamente empregada em simulações que requerem visualização em tempo real da resposta mecânica de corpos sob ações externas, com aplicações que incluem desde o monitoramento do comportamento de tecidos em simuladores cirúrgicos e sistemas de treinamento médico até jogos e animações. Esta metodologia apresenta vantagens nestes cenários onde abordagens baseadas em meios contínuos, como o Método dos Elementos Finitos, tornam-se inviáveis computacionalmente para aplicações em tempo real (JARAMILLO; PRIETO; BOULANGER, 2013).

Outra vantagem é que a estrutura de simulação com uma malha de molas é propícia para a implementação de computação em paralelo, onde múltiplos processadores trabalham simultaneamente, acelerando a simulação ao dividir o processamento dos elementos de forma independente.

A principal limitação dessa abordagem, no entanto, está na dificuldade de reproduzir o comportamento mecânico dos materiais com precisão (DA SILVA, 2015).

Apesar da significativa quantidade de trabalhos envolvendo simulações de Mass-Spring Models (MSM), a otimização na seleção dos parâmetros do modelo, como rigidez das molas, distribuição de massa e coeficientes de amortecimento, recebe pouca atenção na literatura. Frequentemente, esses parâmetros são definidos para aplicações específicas, tendo foco apenas em uma representação visualmente próxima do esperado (LLOYD; SZÉKELY; HARDERS, 2007).

Ao passar dos anos, melhorias foram apresentadas e os autores avançaram no estudo da seleção de parâmetros com base em propriedades físicas do material, tais como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

Alguns autores modificam a estrutura básica da malha de molas buscando uma melhor precisão no modelo. Em Zhao, Fang e Zhao (2012) e Li, Zhao e Lian (2019) as massas são ligadas por dois tipos de molas: normais e de cisalhamento, mostradas na Figura 11. A rigidez dessas molas são encontradas de maneiras distintas nos dois

trabalhos. A inclusão da mola de cisalhamento permite considerar a rotação entre as duas partículas.

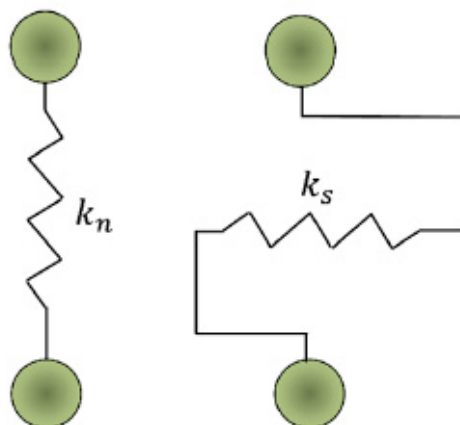


FIGURA 11 – Mola normal e mola de cisalhamento (LI; ZHAO; LIAN, 2019)

Em Zhao, Fang e Zhao (2012), a mola de cisalhamento é adicionada na conexão entre duas partículas e é descrito que a adição dessa permite a modelagem de materiais com diferentes coeficientes de Poisson. O modelo é validado por comparação com o método dos elementos finitos e mostra ser capaz de reproduzir soluções elásticas, enquanto o problema ainda não apresenta fraturas.

No trabalho de Li, Zhao e Lian (2019), a configuração com molas adicionais é utilizada para modelar a propagação de fissura no concreto. É proposto um modelo constitutivo para o rompimento das ligações e a validação é feita com resultados experimentais de flexão em três pontos. Em Li, Zhou et al. (2021) é utilizado um modelo tridimensional para análise de propagação de fratura dinâmica, por meio da definição de deformações críticas para as ligações. Os parâmetros da malha são calculados baseados no método dos elementos finitos e é adicionado grau de liberdade adicional de rotação nas ligações.

Brely, Bosia e Pugno (2015) utilizam um modelo chamado "hierárquico" para simular o comportamento de materiais compósitos, onde cada parte da malha tem uma propriedade mecânica diferente, para representar de maneira mais precisa o comportamento do sistema. Materiais compósitos também são modelados em Braun, Ivánñez e Ariza (2021), utilizando uma malha massa-mola bidimensional triangular. Em ambos, é observado o processo de propagação de dano, que é simulado de maneira

progressiva, utilizando diferentes leis de perda de rigidez.

O método é utilizado para resolução de problemas de interação fluido-estrutura em Afra et al. (2018) e Gerivani e Nazari (2019). No primeiro, a modelagem de malha de molas foi utilizada juntamente ao método Lattice-Boltzmann.

Nos trabalhos citados, a formulação de equivalência do comportamento do sólido para a malha discretizada é realizada de diversas maneiras, sendo adaptada a cada material e situação específica para obter uma resposta precisa do comportamento micromecânico.

### 2.3.1 Determinação dos parâmetros

Existem duas maneiras diferentes de transpor as propriedades do material para propriedades de um sistema discretizado. A primeira é pela validação com modelos experimentais e adaptação dos parâmetros. Nesta, as deformações são medidas e usadas de referência para estimar os parâmetros. A segunda abordagem é por soluções analíticas para os coeficientes das ligações usando um modelo físico (GOLEC, 2018).

A primeira abordagem apresenta a vantagem de representar o resultado esperado com mais precisão em comparação à segunda. No entanto, ela se limita às geometrias e materiais testados, pois qualquer alteração na malha exige o recálculo de todos os parâmetros. Por esse motivo, a obtenção de propriedades com base em dados experimentais não é compatível com simulações em tempo real (LLOYD; SZÉKELY; HARDERS, 2007).

Van Gelder (1998) desenvolveu seu trabalho sobre simulação de membranas elásticas utilizando malhas triangulares. O autor propôs uma formulação para calcular rigidez das molas baseada em parâmetros derivados do modelo de elementos finitos. O autor afirma que, embora uma simulação exata seja impossível e limitada pela geometria da malha, sua aproximação produz resultados satisfatórios para pequenas deformações e materiais isotrópicos.

Esta formulação continua sendo referência em trabalhos recentes, servindo como base para comparação e adaptação em novos modelos, como em Tudruj et al. (2023), que a utilizam o trabalho de Van Gelder (1998) como referência para desenvolver e validar um novo método de cálculo dos coeficientes de mola, no qual

parte dos parâmetros é fixa e outra parte é atualizada a cada passo da simulação.

Em Lloyd, Székely e Harders (2007), são encontradas expressões analíticas para os parâmetros das molas de malhas triangulares e retangulares de duas dimensões e tetraédricas de três dimensões. A abordagem para obter o coeficiente de rigidez da mola em todas as malhas foi o mesmo.

Primeiro, a matriz de rigidez de um elemento finito é determinada e uma malha de molas equivalente com a mesma forma é escolhida. Essas equivalências são ilustradas na Figura 12 para os casos de malhas triangulares, retangulares e tetraédricas. Para essa malha de molas escolhida é feita a linearização das equações de deslocamento — o que envolve calcular o Jacobiano do vetor de força ou o Hessiano da energia potencial do sistema em relação às posições — e assim derivada uma matriz de rigidez equivalente. Em um dimensão, o modelo de molas é linear no ponto, mas para dimensões maiores a linearidade é perdida. Ao igualar as duas matrizes de rigidez, transforma-se um problema não-linear em um sistema de equações lineares. Isso possibilita a solução explícita dos coeficientes de rigidez em função das propriedades do material, como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, garantindo que o MSM comporte-se como o modelo de referência para pequenas deformações.

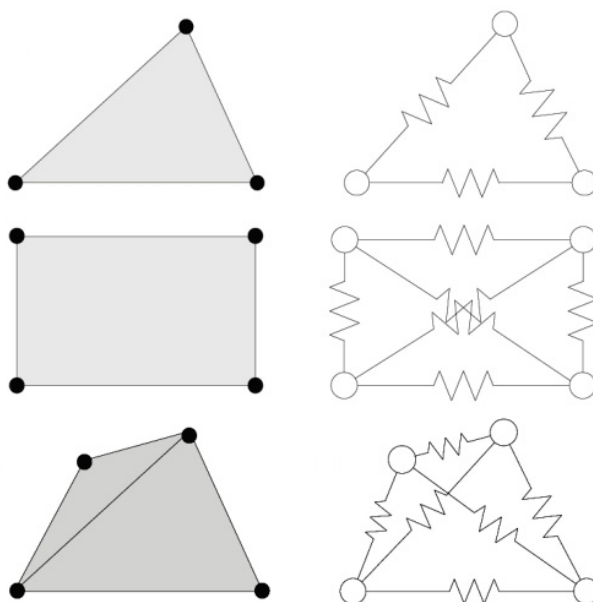


FIGURA 12 – Elemento finito e malha massa-mola correspondente (LLOYD; SZÉKELY; HARDERS, 2007).

No caso do elemento triangular, a solução do sistema só foi possível com um



coeficiente de Poisson de  $\nu = \frac{1}{3}$ . Esta restrição foi necessária para viabilizar a solução do sistema, pois simplifica a matriz de rigidez e elimina termos que dificultariam a resolução analítica. Como uma mola tem que representar a rigidez de dois elementos adjacentes em uma malha, o resultado encontrado para molas de elementos triangulares é apresentado na Equação 2.33. A equação depende somente do módulo de elasticidade ( $E$ ) da espessura  $b$  do corpo na direção do eixo fora do plano.

$$k_{tri} = \sum_e E b \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (2.33)$$

Para o elemento de seis molas retangular foram feitas mais restrições a fim de tornar o sistema de equações passível de resolução, evitando os zeros que eram presentes na matriz de rigidez. Além de considerar o coeficiente de Poisson igual a  $\frac{1}{3}$  foram testadas várias formas de aumentar o grau de liberdade do modelo para diminuir os elementos nulos. A solução utilizada consistiu na consideração de molas pré-tensionadas. Essas molas foram introduzidas para evitar singularidades na matriz de rigidez, aumentando os graus de liberdade do sistema. Isso é aplicado alterando o comprimento inicial da mola que é utilizado na Lei de Hooke; assim, quando a força de rigidez é calculada, esse comprimento alterado é o utilizado na equação.

Os valores de rigidez  $k$  e comprimentos iniciais  $l_0$  de cálculo para molas localizadas nas arestas e diagonais são mostradas nas Equações 2.34, 2.35, 2.36 e 2.37.

$$k_{aresta} = \sum_e \frac{5}{16} b E \quad (2.34)$$

$$k_{diagonal} = \frac{7}{16} b E \quad (2.35)$$

$$l_{aresta}^0 = \frac{6}{5} |p_i^0 - p_j^0| \quad (2.36)$$

$$l_{diagonal}^0 = \frac{6}{7} |p_i^0 - p_j^0| \quad (2.37)$$

Em Baudet (2006), é apresentada outra maneira de determinar a rigidez de ligação na malha de molas. Neste trabalho, o método de Van Gelder (1998) foi testado para diferentes modelos e materiais, e o autor concluiu que o método não era abrangente, sendo capaz de simular apenas materiais com coeficiente de Poisson nulo. O autor se baseia nessa motivação para encontrar uma formulação que também seja dependente das características físicas do material, como em Van Gelder, porém com aplicação para diferentes coeficientes de Poisson.

A malha utilizada é a quadrangular bidimensional, composta por quatro molas nas arestas e duas molas diagonais. A abordagem utilizada é a de parametrização por meio de análise de energia do sistema.

A primeira etapa consiste na definição do lagrangiano de cada experimento, um de cisalhamento e outro de alongamento, considerando a soma das energias potenciais das molas e das forças externas. Na mecânica clássica, o Lagrangiano é definido como a diferença entre as energias cinética e potencial do sistema. No contexto deste trabalho, como se trata de sistemas em equilíbrio estático, considera-se apenas a soma das energias potenciais elásticas das molas e do trabalho realizado pelas forças externas.

Em seguida, é aplicado o princípio de mínima ação ao sistema, que pra esse caso é quando o lagrangiano é igual a zero. Quando o sistema de equações resultante é relacionado com as propriedades do material, são obtidos os valores para rigidez.

No primeiro experimento, o cisalhamento provoca pequenas deformações, atuando somente sobre as molas diagonais, permitindo determinar sua rigidez. A expressão encontrada é mostrada em Equação 2.38.

$$k_{diagonal} = \frac{E(l_0^2 + h_0^2)}{4l_0h_0(1 + \nu)} \quad (2.38)$$

No experimento de alongamento, com os valores de rigidez das diagonais já definidas, calcula-se os parâmetros para molas das arestas. Em primeiro momento, o valor encontrado era representativo apenas para coeficiente de Poisson igual a  $\frac{1}{3}$ . Para generalizar a solução é introduzida a força de correção associada ao efeito de Poisson, para que seja possível representar diferentes valores desse coeficiente. A rigidez obtida para uma mola na aresta do elemento da malha é mostrada em Equação 2.39

$$k_{aresta,i} = \frac{E(j^2(3\nu + 2) - i^2)}{4l_0h_0(1 + \nu)}, \quad (i, j) \in \{l_0, h_0\}^2 \quad (2.39)$$

A força de correção  $F_{\perp i}$  é aplicada no modelo de maneira a representar o efeito de Poisson causado por uma forças externa  $F_i$ . Essa aplicação no elemento da malha é ilustrado na Figura 13.

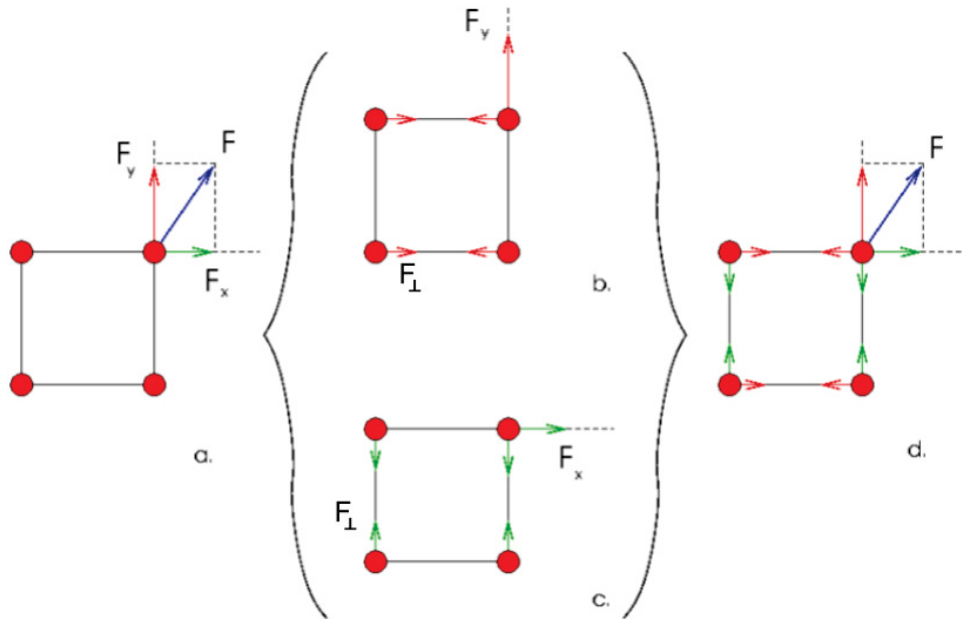


FIGURA 13 – (a) Uma força  $F$  externa é aplicada a um ponto e é projetada nos eixos; (b e c) Cada componente tem uma força  $F_{\perp}$  de correção correspondente; (d) A força de correção para força  $F$  é a soma dos efeitos das componentes projetadas. (BAUDET, 2006)

A força de correção  $F_{\perp}$  que é aplicada aos quatro pontos do elemento em que  $F$  é aplicada é encontrada pela Equação 2.40

$$F_{\perp i} = \frac{iF_i(1 - 3\nu)}{8j}, \quad \text{onde } (i, j) \in \{l_0, h_0\}^2 \quad (2.40)$$

### 2.3.2 Amortecimento

Para análises dinâmicas de modelos massa-mola-amortecedor, o amortecimento carece de estudos para determinação analítica de seus valores a partir das propriedades do material, como foi apresentado anteriormente para rigidez. Em Lloyd, Zurich et al. (2008), o trabalho de Lloyd, Székely e Harders (2007) é estendido para encontrar parâmetros dinâmicos também pela linearização das equações do sistema, mas

somente para malhas triangulares. Na prática, o amortecimento é frequentemente ajustado empiricamente conforme o comportamento esperado do corpo, com validações mediante modelos experimentais.

Considerando que os parâmetros de rigidez obtidos por soluções analíticas são, em sua maioria, empregados para análises estáticas, o amortecimento utilizado é um valor arbitrário para diminuir as oscilações ou o amortecimento crítico, que evita oscilações desnecessárias e amortece o sistema o mais rápido possível (GOLEC, 2018). O amortecimento crítico pode ser encontrado por:

$$c_{ij} = 2 \frac{\sqrt{k_{ij}(m_i + m_j)}}{l_{ij}^0} \quad (2.41)$$

onde  $k_{ij}$  representa a rigidez da mola de uma ligação dos pontos  $i$  e  $j$ ,  $m_i$  e  $m_j$  são as massas das partículas conectadas, e  $l_{ij}^0$  denota o comprimento inicial da mola em sua configuração não deformada.

### 2.3.3 Determinação de massas

Conforme descrito em Lloyd, Székely e Harders (2007), a massa total do corpo deve ser igualmente dividida pelo número de elementos  $e$ , em seguida, distribuída entre seus nós. Cada nó passa a acumular a soma das massas que representa em cada elemento adjacente. Em modelos tridimensionais, essa contribuição é medida em termos de volume, enquanto que, em modelos bidimensionais, ela é avaliada pela área de superfície adjacente de influência (DA SILVA, 2015). O processo de distribuição da massa pode ser descrito por:

1. Dividir a massa total do corpo pelo número de elementos padrão, sejam eles 2D ou 3D.
2. Dividir a massa de cada elemento igualmente entre seus respectivos nós.
3. Somar as massas em nós que pertençam a mais de um elemento.

Matematicamente, esse conceito pode ser representado da seguinte forma:

$$m_i = \sum_{e \in \Omega_e} \rho \frac{\Lambda_e}{n_n} \quad (2.42)$$

onde  $m_i$  representa a massa associada ao nó  $i$ ,  $\rho$  é a densidade do material,  $\Lambda_e$  corresponde à área (em 2D) ou volume (em 3D) do elemento  $e$ ,  $n_n$  indica o número de nós do elemento, e  $\Omega_e$  denota o conjunto de elementos que compartilham o nó  $i$ .

#### 2.3.4 Movimentação da malha

Para a simulação de sistemas massa-mola, existem 2 abordagens principais: o método de forças e o de dinâmica baseada em posição. O primeiro, baseado em forças, é o mais utilizado. Esse acumula forças internas e externas, transforma em acelerações pela segunda lei de Newton e atualiza a posição do corpo. O segundo, o método de dinâmica posicional, conhecido como PBD (*Position Based Dynamics*), impõe restrições de movimento. Quando essas restrições não são atendidas, as posições das partículas são ajustadas para se satisfazer-las, e então as velocidades são atualizadas. (MÜLLER et al., 2007). O método mais utilizado é o método das forças, esse será descrito na subseção 2.3.4.1.

A movimentação de uma malha de massas discretas nos métodos de grade, quando realizada de maneira gradual por ponto, sem a geração de matrizes de massa, rigidez e amortecimento para a malha completa, é feita com incrementos na aplicação da carga. Dessa maneira, o estado de equilíbrio atual é calculado com base na configuração deformada da malha.

##### 2.3.4.1 Método das forças

Na modelagem baseada em forças, a configuração deformada da malha após a aplicação de uma carga é obtida através da movimentação de todos os pontos de massa pela força resultante neles a cada passo de tempo. O método das forças utiliza da equação de equilíbrio para sistemas dinâmicos descrita na subseção 2.2.2.

A Figura 14 representa a ligação entre duas partículas  $i$  e  $j$  de um modelo discretizado que tem seus vetores posição  $x$ , massas  $m$  e velocidades  $v$ . Essa conexão tem comprimento inicial  $l_0$ , rigidez  $k_{ij}$  e amortecimento  $d_{ij}$ .

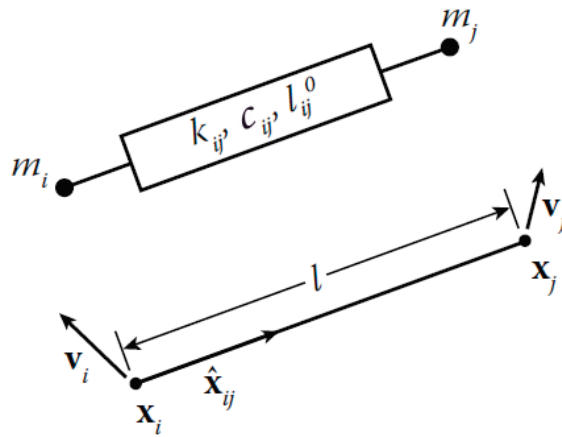


FIGURA 14 – Ligação entre dois pontos de massa (HOUSE; KEYSER, 2017).

A lógica de aplicação do método das forças consiste em percorrer primeiro todas as partículas definindo a força externa total aplicada em cada uma. Depois percorre por todas as ligações e adiciona as forças de rigidez e amortecimento nas duas partículas conectadas a elas (HOUSE; KEYSER, 2017).

O cálculo da força relativa a mola depende do coeficiente de rigidez e do deslocamento entre os dois pontos. A força da mola no ponto  $i$  da ligação mostrada pode ser calculada por:

$$\mathbf{f}_{mola,i} = (l_{ij} - l_{ij}^0)k_{ij}\mathbf{x}_{ij} \quad (2.43)$$

A força de amortecimento é proporcional a velocidade que o comprimento da barra muda e na direção oposta a essa velocidade. A força de amortecimento no ponto  $i$  é:

$$\mathbf{f}_{amortecedor,i} = [(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{x}_{ij}]c_{ij}\mathbf{x}_{ij} \quad (2.44)$$

As forças aplicadas na extremidade  $j$  tem a mesma magnitude mas sentido contrário que as da extremidade  $i$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mola,j} &= -\mathbf{f}_{mola,i} \\ \mathbf{f}_{amortecedor,j} &= -\mathbf{f}_{amortecedor,i} \end{aligned} \quad (2.45)$$

A resultante que atua na partícula é a soma das influências das molas e amortecedores de todas as suas conexões com partículas vizinhas, juntamente com

qualquer força externa aplicada, se houver.

$$\mathbf{f}_{resultante,i} = \mathbf{f}_{mola,i} + \mathbf{f}_{amortecedor,i} + \mathbf{f}_{externa,i} \quad (2.46)$$

Com a força resultante no ponto de massa sendo  $\mathbf{f}_{resultante,i}$  e a segunda lei de Newton (Equação 2.16), a aceleração responsável pelo movimento do ponto de massa é definida. Depois de obtida a aceleração, a velocidade e a posição do ponto são encontradas utilizando um método de solução, como os descritos na subseção 2.1.4.

### 2.3.4.2 Colisão

Durante o movimento da malha do corpo, outra consideração relevante é a interação com o espaço no qual está inserido, como a ocorrência de colisões com superfícies.

A colisão de um corpo representado por uma malha massa-mola é detectada quando a posição de alguma partícula ultrapassa os limites da superfície de contato. A Figura 15 ilustra o instante de tempo em que a partícula ultrapassa o limite da superfície.

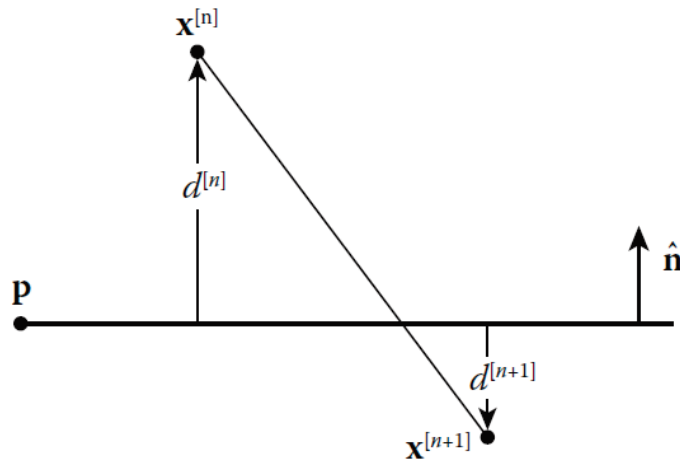


FIGURA 15 – Detecção de colisão (HOUSE; KEYSER, 2017)

Nesse processo, analisa-se a posição da partícula no instante  $n$  e no instante  $n + 1$ , após a integração numérica. Conforme ilustrado,  $d$  representa a distância entre os pontos e a superfície, nesses dois instantes de tempo. Quando os valores apresentam sinais opostos, constata-se a ocorrência da colisão.

A resposta à colisão consiste em primeiro reposicionar a partícula na superfície e depois aplicar novamente a distância  $d$  agora acima desta. Quando necessário dependendo das propriedades da superfície, é preciso aplicar um coeficiente de restituição  $c_r$ . A posição corrigida da partícula é determinada pela equação Equação 2.47 (HOUSE; KEYSER, 2017).

$$\mathbf{x}'_{[n+1]} = \mathbf{x}_{[n+1]} - (1 + c_r) d_{[n+1]} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.47)$$

A velocidade do ponto após a colisão deve incorporar os efeitos de reflexão, restituição e atrito, os quais dependem das propriedades da superfície. A velocidade final é dependente dos coeficientes de restituição  $c_r$  e atrito  $c_f$ . A Equação 2.48 descreve a velocidade final para a posição corrigida, onde  $v_y$  e  $v_x$  representam, respectivamente, as componentes normal e tangencial da velocidade calculada para o passo de tempo inicial  $n + 1$  (HOUSE; KEYSER, 2017).

$$\mathbf{v}'_{[n+1]} = -c_r \mathbf{v}_n + (1 - c_f) \mathbf{v}_t \quad (2.48)$$

### 2.3.5 Não linearidade

Uma das principais vantagens dos modelos massa-mola é sua capacidade de incorporar a não linearidade geométrica de forma simplificada. A não linearidade geométrica surge em situações onde deslocamentos relativamente grandes alteram significativamente a geometria original da estrutura, gerando esforços adicionais. Conforme apresentado nas subseções anteriores, o método opera de forma incremental no tempo, calculando cada novo estado de equilíbrio com base na configuração deformada do passo imediatamente anterior. Dessa forma, são naturalmente incluídos efeitos de segunda ordem, que levam em conta rotações e deslocamentos adicionais não presentes em modelos lineares convencionais. De acordo com Lloyd, Székely e Harders (2007) e Golec (2018), os Sistemas Massa-Mola (MSS - *Mass-Spring Systems*) possuem não linearidades intrínsecas em sua formulação.

A não linearidade física está associada a propriedades do material e como se comporta frente ao carregamento. Materiais de comportamento linear elástico



obedecem a Lei de Hooke (Equação 2.49), onde  $\sigma$  é a tensão atuante no corpo,  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $\varepsilon$  a deformação.

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.49)$$

As formulações de equivalência de parâmetros para o método de malha de molas apresentadas na subseção 2.3.1, propostas por Baudet (2006) e Lloyd, Székely e Harders (2007), são válidas apenas para materiais com comportamento linear.

## 2.4 ESFORÇOS BÁSICOS E SOLUÇÕES ANALÍTICAS

A mecânica dos sólidos é uma disciplina que estuda a resposta mecânica de materiais sólidos submetidos a carregamentos externos, analisando as forças internas de reação e as deformações resultantes.

No contexto de métodos numéricos, o estudo desses esforços pode ser usado para validar resultados computacionais, pois soluções analíticas conhecidas, da mecânica dos sólidos, servem como referência. Esta seção apresenta soluções analíticas, em alguns modelos, para cálculo de deslocamento em elementos bidimensionais submetidos a carregamentos específicos, com objetivo de analisar cada esforço - normal, cisalhante e fletor - de maneira individual. Os modelos abordados aqui possuem como condição de contorno um engaste, não permitindo deslocamento ou rotação no apoio.

### 2.4.1 Tração e compressão

Os esforços normais de tração e compressão podem ser analisados de maneira isolada considerando a configuração de uma barra prismática com extremidade engastada submetida a carregamento axial uniforme. Para um corpo de comportamento linear elástico, o deslocamento pode ser encontrado pela Equação 2.50. Nesta,  $F$  é a força aplicada,  $L$  corresponde ao comprimento inicial do corpo,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $A$  a área da seção transversal e  $\delta_L$  indica o deslocamento longitudinal resultante na extremidade livre (HIBBELER, 2010).

$$\delta_L = \frac{FL}{EA} \quad (2.50)$$

### 2.4.2 Flexão e cisalhamento

A aplicação de forças transversais à um corpo em balanço, gera momentos fletores resultando em flexão. De acordo com a teoria de Timoshenko, modelos submetidos a carregamentos transversais, além dos efeitos de flexão, também estão submetidos a deformações decorrentes da tensão de cisalhamento. Essas, provocam ação de deslizamento de uma seção da viga em relação a outra. Na Teoria de Timoshenko é adotada a hipótese de que as seções transversais permanecem planas, mas não necessariamente normais à linha neutra após a deformação (FLEISCHFRESSER, 2012).

O deslocamento causado pelo cisalhamento é comumente desconsiderado em alguns casos, como para vigas esbeltas, onde esse efeito acaba sendo desprezível em comparação ao de flexão. A flexão tende a ser uma parcela menor quando a relação Comprimento/Altura diminui, e então o cisalhamento passa a ter maior influência (ALVES FILHO, 2007).

Em situações de corpos em balanço e considerando efeitos de cisalhamento, os resultados numéricos são demonstrados por Timoshenko (1983) para diferentes tipos de carregamento.

Para uma carga distribuída  $w$  a deformação na extremidade livre, agora considerando o efeito do cisalhamento é descrita pela Equação 2.51

$$\delta_{F+C} = \underbrace{\frac{wL^4}{8EI}}_{\text{Flexão}} + \underbrace{\frac{\alpha wL^2}{2GA}}_{\text{Cisalhamento}} \quad (2.51)$$

Já para uma carga concentrada na extremidade, o deslocamento no mesmo ponto tem resultado analítico descrito pela Equação 2.52

$$\delta_{F+C} = \underbrace{\frac{FL^3}{3EI}}_{\text{Flexão}} + \underbrace{\frac{\alpha FL}{GA}}_{\text{Cisalhamento}} \quad (2.52)$$

Nas equações,  $G$  é o módulo de cisalhamento, que pode ser calculado com módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson pela Equação 2.53 e  $\alpha$  é o fator de forma, coeficiente de correção introduzido na teoria de vigas de Timoshenko, cuja função é compensar a variação das tensões de cisalhamento na seção transversal.

O valor para o fator de forma de uma seção transversal triangular é encontrado pela Equação 2.54 de Timoshenko (1983).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.53)$$

$$\alpha = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)} \quad (2.54)$$

### 3 METODOLOGIA

É proposta a utilização de um modelo bidimensional de malha retangular com massas discretas, concentradas nos vértices de elementos unidimensionais, com rigidez e amortecimento, para a simulação da peça escolhida. Foram adotadas as formulações propostas por Baudet (2006) e Lloyd, Székely e Harders (2007), que propõe parâmetros para malha simulando um material homogêneo e elástico linear. Serão feitas análises na formulação apresentada para que o comportamento da malha seja representativo do comportamento de um meio contínuo equivalente. Propõe-se a implementação do método das forças para o cálculo da contribuição dos coeficientes de rigidez e amortecimento. Após a movimentação da malha, é possível obter as deformações e tensões, considerando um comportamento linear físico.

As simulações foram executadas para em peças submetidas a tração, compressão, cisalhamento e flexão, a fim de avaliar o comportamento do método frente a diferentes combinações de esforços normais e cortantes. Ao fim, foi realizada uma simulação genérica dinâmica de impacto para avaliar a resposta do modelo a colisão e estabilidade para ações dinâmicas.

Devido à grande quantidade de barras e partículas e por ser uma análise dependente do tempo em várias iterações, todas as formulações são implementadas computacionalmente. O código foi desenvolvido na linguagem *Python* 3.10.

#### 3.1 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

O corpo contínuo em estudo é discretizado em um sistema bidimensional composto por ligações mola-amortecedor que conectam pontos de massa, transformando o comportamento originalmente complexo em um sistema descrito por equações diferenciais ordinárias (EDOs). Cada ligação da malha funciona como uma associação mola-amortecedor no arranjo de Kelvin-Voigt, que transfere esforços para as partículas conectadas somente em sua direção longitudinal.

Para avaliação das duas formulações, adotou-se uma malha quadrangular de duas dimensões com quadrados com lados de mesma medida, uma vez que as

duas formulações de equivalência de rigidez descritas utilizam esse tipo de malha. A configuração em que o elemento de 4 nós é inicialmente quadrado foi selecionada devido à limitação do método de Lloyd, Székely e Harders (2007).

O corpo contínuo é discretizado no espaço como pontos de massas discretas que são unidas por elementos unidimensionais sem massa. Os elementos unidimensionais representam as forças internas e transferência de esforços no corpo, enquanto os pontos de massa definem sua geometria e posição no espaço. Essa discretização permite a movimentação da malha nos pontos pela segunda lei de Newton e visa preservar o comportamento físico do contínuo com sistemas dinâmicos locais.

Cada célula dessa malha conecta quatro pontos de massa e conta com quatro ligações nas arestas e duas diagonais. Essas ligações carregam como informações os valores de rigidez, amortecimento, comprimento inicial e comprimento atual, quando deformadas.

Os valores de rigidez são encontrados pela Equação 2.39 para arestas e Equação 2.38 para diagonais, para análise utilizando o modelo de equivalência descrito por Baudet (2006). Em ligações de arestas pertencentes a mais de uma célula na malha, os valores de rigidez devem ser sobrepostos, como descreve o autor.

Quando utilizada a formulação proposta por Lloyd, Székely e Harders (2007), a rigidez de cada ligação é encontrada por Equação 2.34 para arestas e Equação 2.35 para diagonais. Assim como em Baudet (2006), a sobreposição de valores para ligações pertencentes a mais células deve ser realizada.

As formulações adotadas apresentam como limitação sua aplicabilidade apenas em materiais de comportamento linear elástico. Assim, como a não linearidade física não é considerada, o coeficiente de rigidez  $k$  se mantém constante durante todo o processo iterativo.

Quanto ao coeficiente de amortecimento, para análises estáticas, os valores não interferem no estado final de equilíbrio mas levam a ele mais rapidamente. Nestas onde o objetivo foi comparar o valor final de deslocamento de uma peça com uma força aplicada, foi utilizado um amortecimento arbitrário, escolhido abaixo do crítico, de modo a apenas melhorar a estabilidade da simulação e retornar um resultado de maneira mais rápida, mas ainda permitir que o corpo oscile. Optou-se por não utilizar o

amortecimento crítico, com o propósito de observar o comportamento do sistema sob pequenas oscilações e avaliar sua capacidade de manter a estabilidade mesmo na presença dessas flutuações.

A distribuição da massa entre todos os pontos é feita conforme descrito na subseção 2.3.3. Dessa maneira, a massa total do corpo é preservada e distribuída igualmente por cada célula quadrada. Em seguida, as massas são sobrepostas e acumuladas para células vizinhas que compartilhem um mesmo vértice.

A discretização permite a redistribuição da massa do contínuo em massas nodais, o que possibilita a movimentação da malha na composição de múltiplos sistemas dinâmicos simples.

Cada massa discreta da malha inicia a simulação com: vetor posição com coordenadas dos eixos, vetor velocidade nulo nas duas direções e vetor aceleração também nulo.

Os valores dos parâmetros para cada modelo simulado são mostrados na seção 3.4.

### 3.2 MODELO NÃO LINEAR GEOMÉTRICO

Depois do cálculo de todos os parâmetros iniciais da malha, é iniciada a análise com incrementos de tempo para esforços na estrutura.

O passo de tempo utilizado na simulação deve ser suficientemente pequeno para manter a estabilidade e precisão nos resultados, mas grande o suficiente de maneira a manter o custo computacional o menor possível. Para as simulações dos modelos estáticos foram testados os passos de tempo  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  segundo, nas menores e nas maiores malhas. O passo de tempo de  $10^{-3}$  segundo foi descartado, tendo em vista que não foi o suficiente para manter a estabilidade nas maiores malhas. Para os demais foi determinada uma tolerância de  $10^{-3}$  para convergência de valores da posição da malha ao final da simulação. Como as coordenadas nos dois últimos passos de tempo tiveram, no geral, diferenças somente a partir da quinta casa decimal, foi adotado o passo de tempo maior de  $10^{-4}$  segundo. Nessa etapa, também foi levada em conta a compatibilidade com o hardware disponível e tempo total de simulação que permitisse uma análise dentro do cronograma proposto.

A abordagem utilizada para o movimento da malha com a aplicação de esforços foi a do método das forças, baseada em House e Keyser (2017). Sendo assim, o primeiro passo da simulação consiste em avaliar se há forças externas aplicadas em algum ponto da estrutura. Caso as forças estejam distribuídas ao longo das ligações, estas devem ser aplicadas nos nós situados nas extremidades das respectivas ligações.

Para o primeiro passo de tempo, são apenas compatibilizadas forças externas e forças de correção, se presentes, pois ainda não há efeitos das interações entre partículas causadas por alongamento ou compressão. Esses efeitos são compatibilizados a partir do segundo passo de tempo, quando os primeiros pontos foram movimentados.

As forças externas são aplicadas ao modelo de forma incremental, mantendo um regime de carregamento linear progressivo até atingirem o valor final pré-estabelecido, para evitar instabilidades numéricas. Quando esse patamar de carga máxima é alcançado, o carregamento é mantido constante durante o restante da simulação. A Figura 16 ilustra a aplicação da força no tempo.

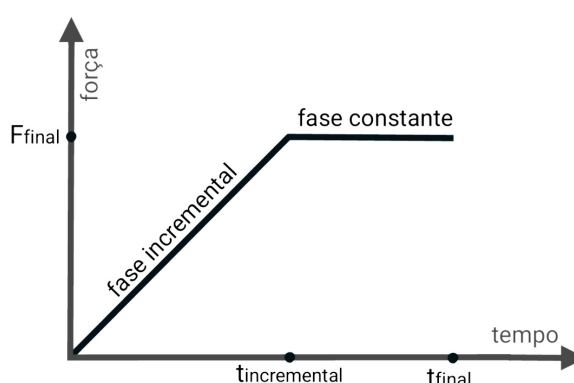


FIGURA 16 – Gráfico da força incremental na simulação

Então, além da verificação de forças externas e de correção, é necessário calcular as forças decorrentes de todas as interações de massa-mola-amortecedor entre as partículas conectadas, como descrito na subseção 2.3.4.1. As forças referentes à mola e ao amortecedor são calculadas pelas Equações 2.43 e 2.44, respectivamente. A resultante no ponto é a junção de todos os efeitos.

Para a aplicação de Lloyd, Székely e Harders (2007) é necessário, nesta etapa, utilizar a correção do comprimento em repouso para o cálculo da força da mola, como especificado para o método. Essa medida é calculada pela Equação 2.36 para ligações de arestas e pela Equação 2.37 para ligações diagonais.

As forças de correção fazem parte da metodologia de Baudet (2006). Nessa, as forças que corrigem o efeito do coeficiente de Poisson são aplicadas a todas as células adjacentes de um ponto que tenha uma força externa aplicada. A direção desse esforço é ilustrada pela figura Figura 13 e a sua magnitude é calculada pela Equação 2.40.

Com a força resultante de cada nó definida, calcula-se a aceleração da partícula pela segunda lei de Newton (Equação 2.16). Em seguida, implementando o algoritmo do método de integração de Runge-Kutta 4ª ordem, são encontrados os novos vetores velocidade e posição de todos os pontos da malha.

Para simulações com superfícies externas estabelecidas, neste estágio a colisão é computada conforme subseção 2.3.4.2.

A simulação é executada até um tempo total previamente determinado, mesmo na ausência de forças externas, pois o corpo continua em movimento até atingir o repouso, devido à aos efeitos da inclusão do amortecimento que atua dissipando a energia do corpo.

A configuração de equilíbrio é calculada com base na estrutura deformada do passo de tempo imediatamente anterior. Assim, é feita a consideração dos efeitos de segunda ordem e o modelo aproxima efeitos de não-linearidade geométrica na estrutura global, mesmo utilizando relações lineares entre deslocamento e deformação no sistema local da ligação.

### 3.3 ANÁLISE DO MODELO

Ao término de cada iteração de tempo, após a análise de todas as conexões entre os pontos de massa e a atualização dos vetores posição e velocidade, é possível obter a deformação em cada barra. A deformação é obtida calculando o deslocamento entre os pontos conectados em relação ao comprimento em repouso, como na Equação 2.12.

A tensão, considerando o comportamento elástico linear do material, é calculada pela lei de Hooke. Com a tensão de todas as barras ilustradas no modelo, deve ser possível observar a transferência de esforços entre as ligações internas ao corpo durante a simulação e descobrir pontos críticos de concentração de tensão, quando a geometria os causa.



Conforme mostrado na revisão de literatura, alguns estudos empregam métodos de redução progressiva de rigidez nas barras para simular padrões de fissuração quando atingem deformações ou tensões críticas. Neste, foi aplicado para uma das malhas o conceito de deformação crítica, onde ao alcançar o valor limite pré-definido de 0,01 a rigidez da ligação é reduzida a zero, uma vez que não adotamos leis de perda de rigidez, permitindo assim a observação dos padrões de fissuração. Este valor foi escolhido como um valor abaixo da deformação máxima das barras nos ensaios para garantir a quebra. Essa análise foi feita para a maior malha de todos os modelos estáticos simulados, com valores de geometria e material descritos na seção 3.4.

Foram aplicadas duas maneiras de encontrar a deformação crítica das ligações, a primeira mantendo o mesmo limite para todas, independente do posicionamento. A segunda, foi realizada encontrando uma tensão limite inversamente proporcional a rigidez, onde ligações menos rígidas tem um limite maior. A deformação limite é de 0,01 para as ligações horizontais e verticais internas, para as restantes o limite é inversamente proporcional. Por exemplo, se para as ligações internas de rigidez  $k_{int}$  a deformação limite é 0,01, para as ligações diagonais com rigidez  $k_{diag}$  a deformação limite será  $\frac{k_{int}}{k_{diag}} \times 0,01$ . Isso foi realizado para observar a distribuição do padrão de fissuração mais uniforme, sem que a primeira quebra estivesse sempre em uma ligação de canto, em situações onde há carga aplicada a estes.

A validação do modelo e avaliação da configuração deformada final para as simulações efetuadas é feita posteriormente com o deslocamento de um ponto na malha que tenha seu deslocamento definido por uma solução analítica de acordo com a geometria, condições de contorno e cargas aplicadas.

Para a análise de dados, são exportados arquivos .npy (*NumPy array format*) do algoritmo em *Python* nos passos de tempo. Esses arquivos contêm as matrizes de coordenadas dos pontos da malha e a incidência das ligações. A partir deles, podem ser calculadas tensões e deformações, e os resultados são visualizados com a biblioteca *matplotlib*.

### 3.4 MODELOS SIMULADOS

Os modelos simulados foram peças submetidas a quatro tipos de esforços básicos e compostos (tração, compressão, cisalhamento e flexão) e um teste de impacto. Os valores dos parâmetros e condições de contornos para estes são descritos nas subseções seguintes.

Para as simulações estáticas dos esforços fundamentais, que possuem equivalência analítica (conforme seção 2.4), foi analisada a convergência dos resultados ao refinamento da malha. Já a simulação de impacto foi realizada como uma simulação genérica de caráter qualitativo, com o objetivo de demonstrar a interação do corpo com uma superfície, sem a necessidade de condições de contorno pré-definidas, que é uma característica dos modelos massa-mola.

Como mencionado anteriormente para a escolha do passo de tempo, nesta metodologia foram consideradas as limitações de hardware e o custo computacional envolvido. Os mesmos critérios foram avaliados para os valores relativos ao material utilizado nas simulações. Foi avaliado que valores elevados de rigidez nas ligações exigem passos de tempo extremamente pequenos para manter a estabilidade do modelo. Por esse motivo, não foram utilizados valores como do concreto ou aço, usuais em simulações de engenharia, mas sim valores arbitrários que permitissem manter a estabilidade para passos de tempo maiores que  $10^{-6}$ . Passos de tempo menores implicariam em custos computacionais proibitivos as malhas de mais elementos, podendo resultar em tempos de simulação da ordem de semanas.

#### 3.4.1 Tração e compressão

Considerou-se um corpo em forma de barra retangular, para as simulações de tração e compressão, com extremidade engastada e extremidade livre, massa total de 10 kg e dimensões em metros conforme especificado nas Figuras 17 e 18. Esse modelo foi escolhido para garantir uma condição de contorno bem definida no engaste, sem necessidade de modelagem de rotação ou deslocamento em apoios. Essa configuração é bastante utilizada na literatura para a dedução da solução analítica para um corpo solicitado por uma carga axial e permite avaliar isoladamente os efeitos dessa carga, sem influência dos outros tipos de esforços.

O carregamento foi aplicado através de incrementos lineares de força até atingir o valor máximo de 50 N. Esta fase incremental corresponde à primeira metade dos 40 s totais de simulação definidos. O tempo restante foi utilizado para observação do comportamento com carregamento completo.

Nos ensaios, a força de tração foi aplicada seguindo o sentido positivo do eixo X em toda a extremidade livre, enquanto para os casos de compressão adotou-se a direção oposta. A Figura 17 apresenta o modelo com as dimensões e a direção de aplicação da força no ensaio de tração, enquanto a Figura 18 exibe a mesma configuração submetida à compressão.

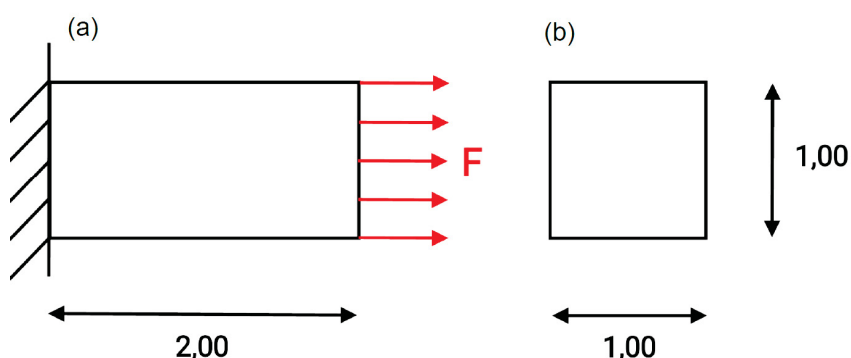


FIGURA 17 – Modelo do corpo submetido à tração: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal.

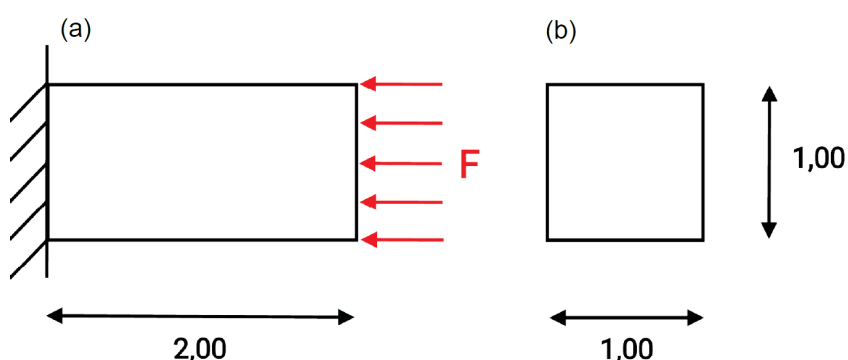


FIGURA 18 – Modelo do corpo submetido à compressão: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal.

A Tabela 2 mostra os valores das medidas do modelo e também referentes ao material adotado.

TABELA 2 – Valores adotados - Tração e Compressão

| L (m) | h (m) | b (m) | E (Pa) | $\nu$         | c (N s/m) |
|-------|-------|-------|--------|---------------|-----------|
| 2,00  | 1,00  | 1,00  | 1000   | $\frac{1}{3}$ | 1,00      |

Este modelo engastado e livre foi simulado com diferentes malhas, sempre mantendo a célula de 4 nós quadrada inicialmente. As malhas utilizadas são listadas na Tabela 3.

TABELA 3 – Configurações de malha - Tração e compressão

| Eixo | Quantidade de elementos |   |   |    |    |    |    |    |
|------|-------------------------|---|---|----|----|----|----|----|
| X    | 2                       | 4 | 8 | 12 | 20 | 24 | 32 | 40 |
| Y    | 1                       | 2 | 4 | 6  | 10 | 12 | 16 | 20 |

### 3.4.2 Flexão

Para análise do comportamento à flexão, simulou-se um modelo com mesma condição de contorno e geometria como os anteriores, conforme ilustrado na Figura 19. A simulação consistiu na aplicação de uma carga distribuída transversalmente em toda parte superior do corpo, com uma extremidade engastada, para avaliar a deformação por flexão.

O tempo total de simulação foi de 40 segundos, sendo os primeiros 20 segundos destinados ao carregamento incremental até atingir a força máxima de 5 N, distribuída uniformemente ao longo da face superior.

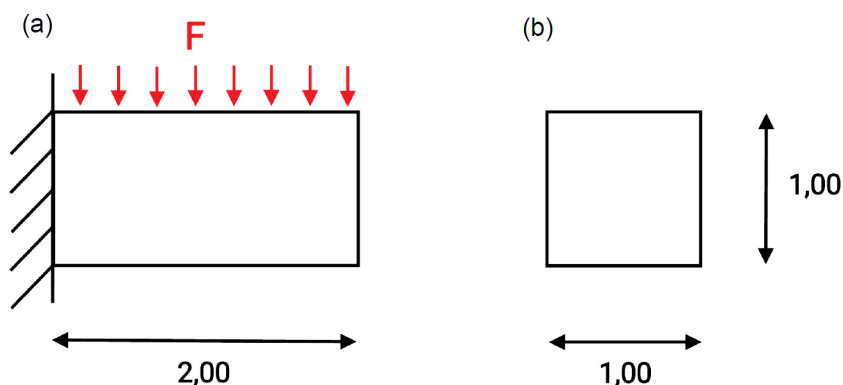


FIGURA 19 – Modelo do corpo submetido à flexão: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal.

Os valores das medidas do corpo e parâmetros ligados ao material arbitrado estão na tabela Tabela 4.

TABELA 4 – Valores adotados - Flexão

| L (m) | h (m) | b (m) | E (Pa) | $\nu$         | c (N s/m) |
|-------|-------|-------|--------|---------------|-----------|
| 2,00  | 1,00  | 1,00  | 1000   | $\frac{1}{3}$ | 1,00      |

As malhas utilizadas foram as mesmas dos modelos de tração e compressão, mantendo as células quadradas. A quantidade de elementos por eixo em cada malha é descrita na Tabela 5.

TABELA 5 – Configurações de malha - Flexão

| Eixo | Quantidade de elementos |   |   |    |    |    |    |    |
|------|-------------------------|---|---|----|----|----|----|----|
| X    | 2                       | 4 | 8 | 12 | 20 | 24 | 32 | 40 |
| Y    | 1                       | 2 | 4 | 6  | 10 | 12 | 16 | 20 |

### 3.4.3 Cisalhamento

Para a simulação de cisalhamento, utilizou-se um modelo com uma extremidade fixa e outra livre, como os anteriores. A geometria do corpo foi alterada nesta simulação, com o comprimento sendo dividido pela metade. Isso foi realizado com o objetivo de reduzir os efeitos de flexão em relação ao efeitos cisalhamento, conforme Alves Filho (2007), possibilitando uma análise mais focada no comportamento sob cisalhamento.

Os valores referentes ao material foram mantidos iguais aos modelos anteriores. O corpo quadrado, com massa de 10 kg, está submetido a uma força de cisalhamento, de valor máximo 5N, distribuída ao longo de toda a extremidade livre, atuando no sentido positivo do eixo horizontal. A força é aplicada pelos 40 segundos totais de simulação, com a primeira metade sendo a fase incremental.

A configuração e as dimensões do modelo são apresentadas na Figura 20.

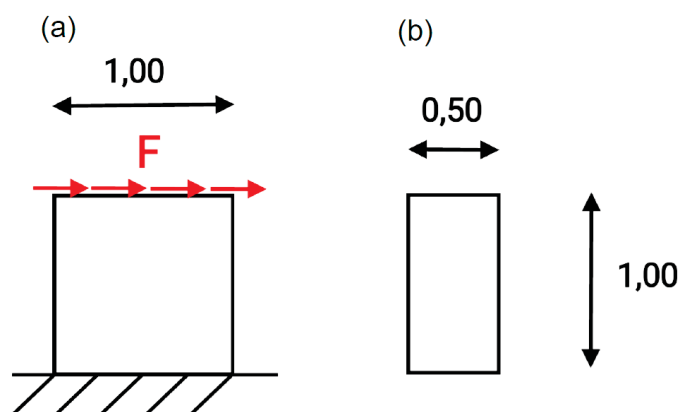


FIGURA 20 – Modelo do corpo submetido à cisalhamento: (a) vista bidimensional no plano de carregamento; (b) geometria da seção transversal.

A Tabela 6 apresenta as dimensões do modelo e os parâmetros materiais adotados na simulação.

TABELA 6 – Valores adotados - Cisalhamento

| L (m) | h (m) | b (m) | E (Pa) | $\nu$         | c (N s/m) |
|-------|-------|-------|--------|---------------|-----------|
| 1,00  | 1,00  | 0,50  | 1000   | $\frac{1}{3}$ | 1,00      |

As malhas utilizadas para o corpo quadrado tem a mesma quantidade de elementos no eixo X e Y, visando manter a célula de quatro nós quadrada. O número de elementos em cada malha é mostrado na Tabela 7.

TABELA 7 – Configurações de malha - Cisalhamento

| Eixo | Quantidade de elementos |   |   |   |    |    |    |    |    |  |
|------|-------------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|--|
| X    | 1                       | 2 | 4 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 | 24 |  |
| Y    | 1                       | 2 | 4 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 | 24 |  |

#### 3.4.4 Impacto

Embora as formulações de equivalência entre material e o sistema MSS, utilizadas nas simulações descritas anteriormente, sejam desenvolvidas para análises estáticas, realizou-se um estudo complementar para avaliar a resposta dinâmica do sistema. Especificamente, testou-se um modelo de queda livre, no qual o corpo é abandonado de determinada altura e sofre impacto contra uma superfície rígida. Apesar da ausência de métricas quantitativas de validação para o teste, a análise é qualitativa, focando em avaliar o comportamento do modelo frente o contato com a superfície e a resposta da formulação do método diante de condições de contorno menos rígidas, como os sistemas anteriores.

O corpo em estudo tem dimensões e altura de lançamento conforme mostrado na Figura 21, com massa de 2.5 kg e mesmos valores para material que as simulações anteriores. O modelo é movimentado inicialmente pela ação da gravidade, o que levou a escolha de um valor de massa menor que os modelos anteriores. Essa redução foi necessária para evitar velocidades muito altas quando ocorre o impacto causam instabilidade numérica, necessitando passos de tempo cada vez menores e inviáveis devido às limitações computacionais.

Para a simulação, o modelo foi posicionado a uma altura de 2 metros e submetido a uma pequena rotação de 5 graus no próprio eixo. Essa rotação foi implementada para observação de interações mais complexas com a superfície de impacto e distribui-

ção assimétrica de tensões que surgem com o contato não alinhado.

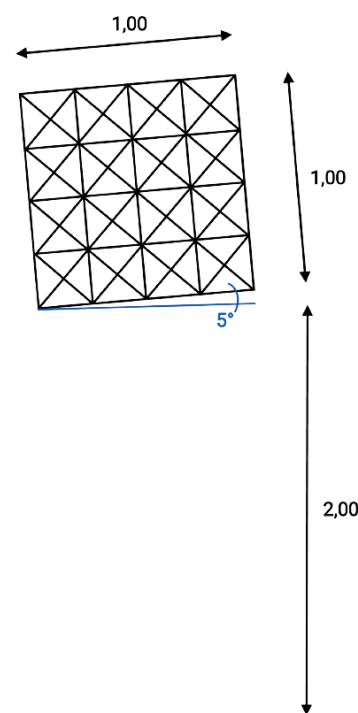


FIGURA 21 – Configuração inicial do modelo submetido ao impacto.

Modelos de impacto e dinâmicos apresentam não linearidades devido aos efeitos de contato e grandes deformações. Para garantir uma detecção precisa do momento da colisão, adotou-se o menor passo de tempo dentre os valores propostos inicialmente nesta metodologia ( $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  segundo). A redução do passo de tempo implica em um aumento no tempo computacional necessário para completar as simulações. Para compensar esse efeito e manter a viabilidade, optou-se por utilizar uma malha intermediária de 4x4 elementos. Essa malha mantém a eficiência computacional para um passo de tempo menor, enquanto apresenta resolução suficiente para capturar as ondas de deformações características do impacto (como a mudança de forma, alargamento ou estreitamento da seção transversal). Malhas menos refinadas, como 1x1 ou 2x2, não conseguem representar adequadamente essas deformações nas arestas do modelo.

A Tabela 8 apresenta as dimensões do modelo e os parâmetros do material adotado na simulação.

TABELA 8 – Valores adotados - Impacto

| <b>L (m)</b> | <b>h (m)</b> | <b>b (m)</b> | <b>E (Pa)</b> | <b><math>\nu</math></b> | <b>c (N s/m)</b> |
|--------------|--------------|--------------|---------------|-------------------------|------------------|
| 1,00         | 1,00         | 0,50         | 1000          | $\frac{1}{3}$           | 1,00             |

### 3.5 ALGORITMO

O algoritmo 1 mostrado abaixo apresenta uma estrutura de simulação para uma rede de massas ligadas por molas e amortecedores, sofrendo uma ação externa em função do tempo. Para o método de Baudet (2006), é preciso adicionar a esse algoritmo o cálculo de forças corretivas, enquanto para Lloyd, Székely e Harders (2007) deve ser incluído o cálculo do comprimento inicial corrigido.



---

**Algoritmo 1:** Simulação de rede massa-mola-amortecedor
 

---

**Dados:** Dimensões do modelo ( $L, b, h$ )

Propriedades do material ( $E, \nu$ , massa total,  $c$ )

Dados da força externa ( $F_{\text{externa}}$ , local, tempo incremental e total)

Condições de contorno

Tempo total ( $T_{\text{max}}$ ) e passo de tempo ( $\Delta t$ )

```

1  Calcular comprimento inicial dos elementos;
2  Distribuir a massa para os pontos;
3  Calcular rigidez das ligações ( $k$ );
4  Criar matriz de incidência das ligações;

5  Enquanto  $t \leq T_{\text{max}}$  fazer
6      Para ligação no modelo fazer
7          Calcular magnitude da força de rigidez e amortecimento;
8          Atribuir a magnitude a ligação;
9      fim
10     Para ponto no modelo fazer
11         Calcular força externa aplicada ( $F_{\text{ext}}$ );
12         Calcular força interna de todas as ligações vizinhas ( $F_{\text{int}}$ );
13         Calcular força resultante ( $F_{\text{resultante}} = F_{\text{ext}} + F_{\text{int}}$ );
14     fim
15     Para ponto no modelo fazer
16         Calcular aceleração ( $a = F_{\text{resultante}}/m$ );
17         Utilizar Runge-Kutta 4ª ordem;
18         Processar colisões;
19         Processar quebras;
20         Atualizar  $v$  e  $x$ ;
21     fim
22      $t \leftarrow t + \Delta t$ ;
23 fim
```

---

O código tem como valores de entrada as dimensões do modelo, propriedades do material, condições de contorno e valores de tempo para simulação. A simulação

no tempo é dividida em três partes. A primeira para cálculo das forças resultantes da movimentação da malha (rigidez e amortecimento), com um looping percorrendo todas as ligações. As outras duas partes são loopings nos pontos, uma para cálculo da força resultante, somando todas as forças externas com as das ligações e a outra para atualização da velocidade, aceleração e posição dos vértices dos elementos.

A lógica de implementação utiliza dois *loopings* sequenciais sobre os pontos da malha (linhas 10 e 15), cuja separação é necessária para manter posição dos pontos no passo de tempo atual no momento do cálculo do vetor normal, no método das forças. Se os *loopings* fossem combinados, a atualização antecipada das posições dos primeiros pontos afetaria o cálculo das forças internas da interação com seus vizinhos, causando assimetrias indesejadas no sistema.

## 4 RESULTADOS

Para análise e avaliação do método, foram realizadas simulações sob diferentes condições de carregamento, com os resultados comparados e discutidos nas subseções seguintes. Os testes abrangeram respostas à tração, compressão, cisalhamento, flexão e impacto (*drop test*). Estes foram aplicados em um corpo de mesmas propriedades físicas arbitradas de módulo de elasticidade 1000 Pa e coeficiente de Poisson  $\frac{1}{3}$ .

Primeiro, em todas as simulações foi garantido que o tempo de simulação foi o suficiente para que as oscilações no final, se ainda presentes, variassem dentro de um limite de precisão de  $10^{-5}$  m para compararmos as coordenadas do ponto monitorado com valores analíticos de deslocamento. Para malhas que não contém um ponto no local de monitoramento (ponto central da extremidade livre) foi utilizada a média das coordenadas dos pontos mais próximos.

Nas subseções seguintes são apresentados os resultados obtidos, os quais serão discutidos ao final deste capítulo.

### 4.1 TRAÇÃO

Para a avaliação do esforço de tração aplicado ao corpo em balanço, o valor de deslocamento analítico foi calculado pela Equação 2.50. O valor de deslocamento para a extremidade livre com uma força positiva no eixo X e com as condições e valores descritos em subseção 3.4.1, é:

$$\delta_L = \frac{FL}{EA} = \frac{50 \times 2}{1000 \times 1} = 0,10m \quad (4.1)$$

Para os valores de deslocamento de diferentes malhas utilizando a formulação de Baudet (2006) é apresentada a Figura 22. À esquerda, são comparados os valores de deslocamento do ponto monitorado para cada malha (identificada pelo número total de elementos), enquanto à direita é mostrado o erro relativo em relação ao valor de referência analítico para cada malha.

É importante notar que a menor malha testada (2 elementos na malha 2x1) apresenta um erro percentual significativamente menor que as malhas seguintes.

Somente a partir da segunda malha de 8 elementos (malha 4x2) os resultados passam a exibir uma redução progressiva do erro, seguindo o comportamento esperado de convergência para solução analítica com o refinamento da malha.

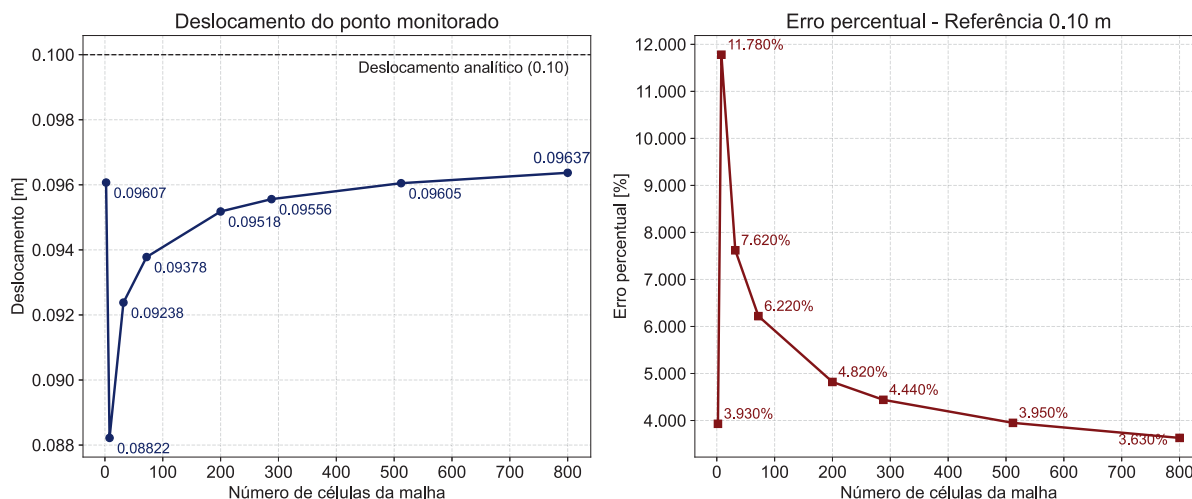


FIGURA 22 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Tração com formulação por Baudet (2006).

A Figura 23 apresenta a configuração final da simulação de cada malha. Nesta, é indicado como "Início" a posição inicial da extremidade livre, para comparação. As malhas são representadas em cores de mapa de calor nas barras para indicar as barras mais solicitadas à tração (vermelho) ou compressão (azul).

Observa-se que as barras localizadas nos vértices superior e inferior do corpo são as mais solicitadas, comportamento presente em todas as malhas maiores que 2 elementos.

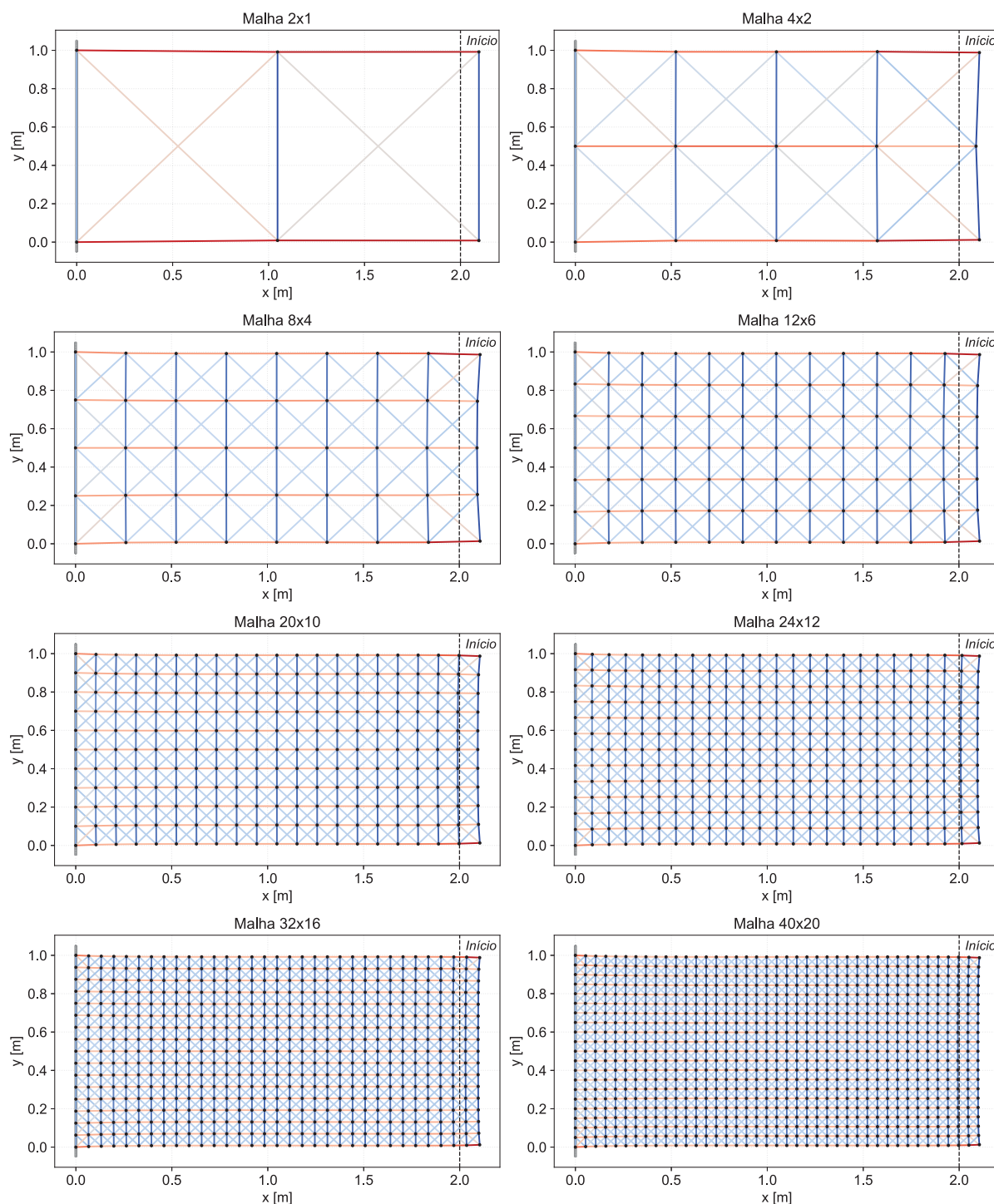


FIGURA 23 – Configuração final das malhas - Tração com formulação por Baudet (2006).

De forma análoga ao mostrado para a primeira formulação, a Figura 24 apresenta os valores de deslocamento no ponto central da extremidade livre para todas as malhas propostas, utilizando a formulação de Lloyd, Székely e Harders (2007). Assim como na formulação anterior, a menor malha ainda apresenta um erro menor que as seguintes. Entretanto, nesta formulação, o erro para a malha mais refinada é maior e os resultados convergem tendendo a uma linha reta, em contraste com o comportamento

observado na formulação anterior, que apresenta uma melhoria na última malha.

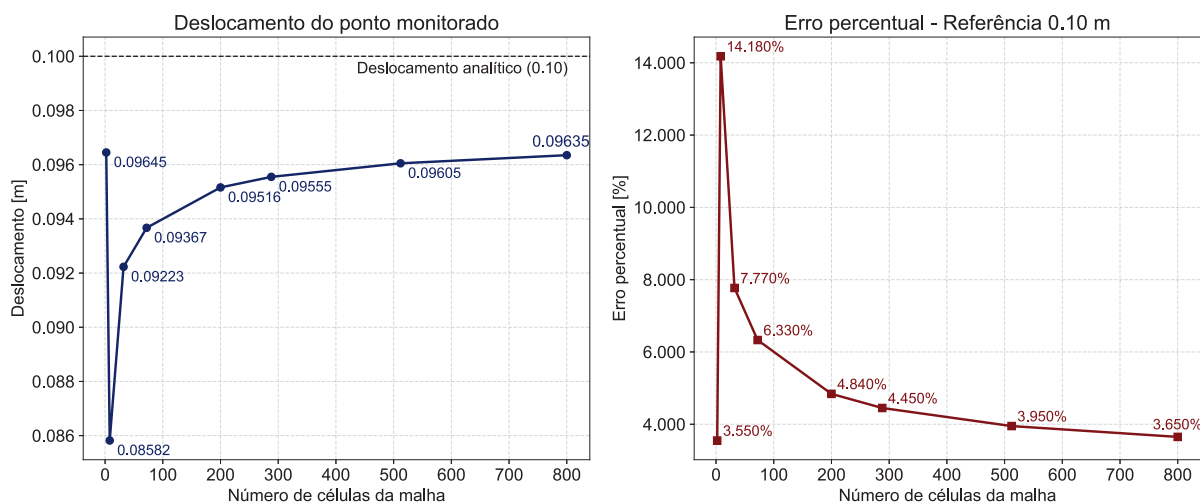


FIGURA 24 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Tração com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

A Figura 25 mostra a configuração de todas as malhas simuladas ao final do tempo de simulação.

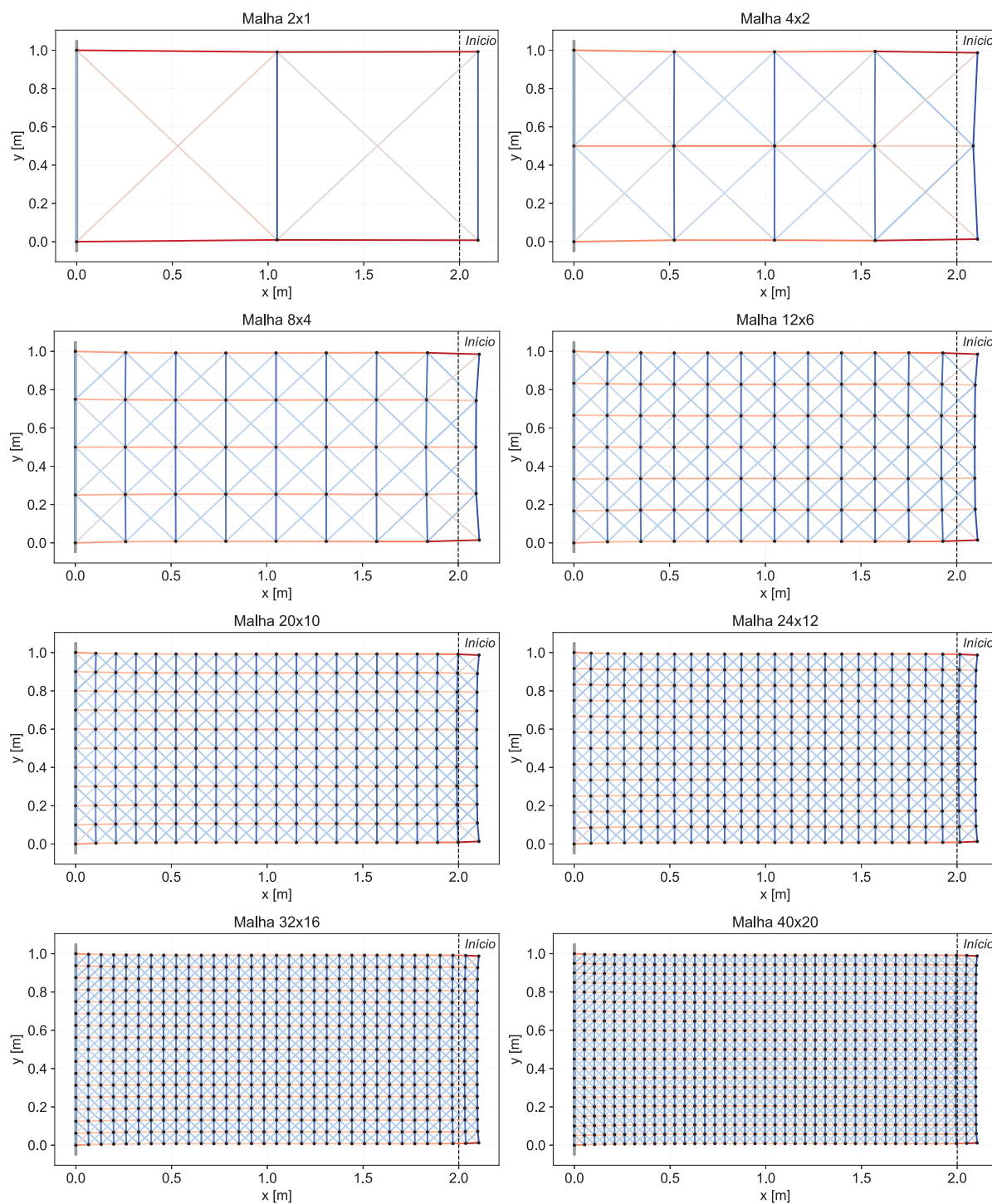


FIGURA 25 – Configuração final das malhas - Tração com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

Ambas as formulações de equivalência apresentam convergência de malha, exceto para o caso da malha menos refinada 2x1 (2 elementos).



TABELA 9 – Comparação dos métodos Baudet e Lloyd para tração

| <b>Malha</b> | <b>N.º células</b> | <b>Desloc. Baudet (m)</b> | <b>Desloc. Lloyd (m)</b> | <b>Erro Baudet (%)</b> | <b>Erro Lloyd (%)</b> |
|--------------|--------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------|
| 2x1          | 2                  | 0,09607                   | 0,09645                  | 3,930                  | 3,550                 |
| 4x2          | 8                  | 0,08822                   | 0,08582                  | 11,780                 | 14,180                |
| 8x4          | 32                 | 0,09238                   | 0,09223                  | 7,620                  | 7,770                 |
| 12x6         | 72                 | 0,09378                   | 0,09367                  | 6,220                  | 6,330                 |
| 20x10        | 200                | 0,09518                   | 0,09516                  | 4,820                  | 4,840                 |
| 24x12        | 288                | 0,09556                   | 0,09555                  | 4,440                  | 4,450                 |
| 32x16        | 512                | 0,09605                   | 0,09605                  | 3,950                  | 3,950                 |
| 40x20        | 800                | 0,09637                   | 0,09635                  | 3,630                  | 3,650                 |

A configuração final dos modelos demonstra que o método transfere os esforços conforme o esperado, mantendo todas as barras verticais tracionadas e as horizontais comprimidas.

## 4.2 COMPRESSÃO

De forma análoga ao caso de tração, a compressão apresenta deslocamento analítico calculado pela Equação 4.2, com mesmo valor absoluto porém sentido oposto.

$$\delta_L = \frac{FL}{EA} = \frac{-50 \times 2}{1000 \times 1} = -0,10m \quad (4.2)$$

A Figura 26 apresenta os deslocamentos do ponto monitorado e os respectivos erros relativos à solução analítica para a primeira formulação.

Repete-se aqui o comportamento observado anteriormente, onde a malha mais grossa (2 elementos) apresenta erro menor que as malhas subsequentes.



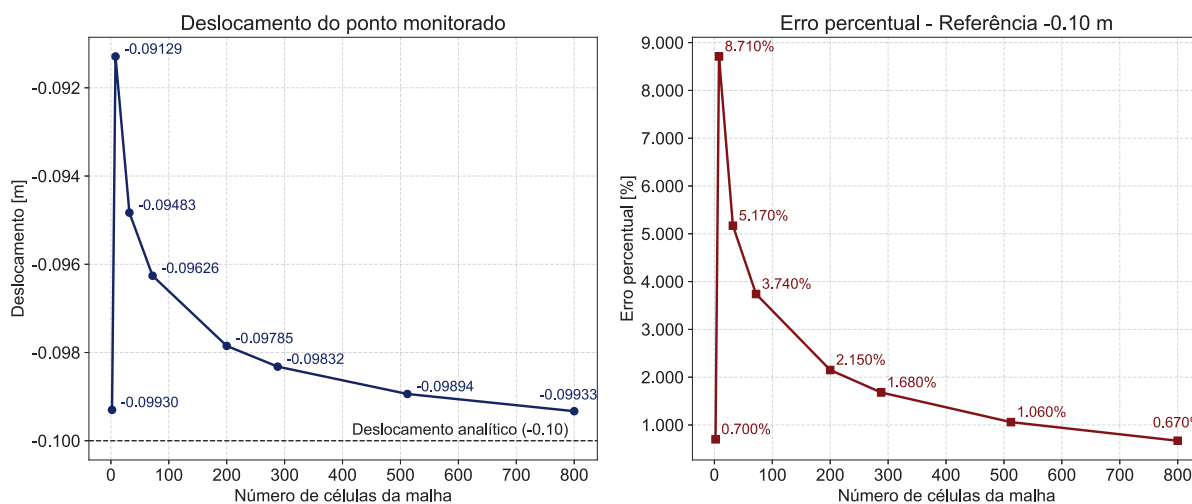


FIGURA 26 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Compressão com formulação por Baudet (2006).

Na Figura 27 são mostradas as configurações finais das malhas testadas, correspondentes aos resultados mostrados na figura anterior. Os modelos seguem as mesmas premissas adotadas para a representação da tração: as barras são representadas como mapa de calor de acordo com o esforço solicitante, e a posição inicial da extremidade livre é marcada pela linha vertical preta indicada como "Início".

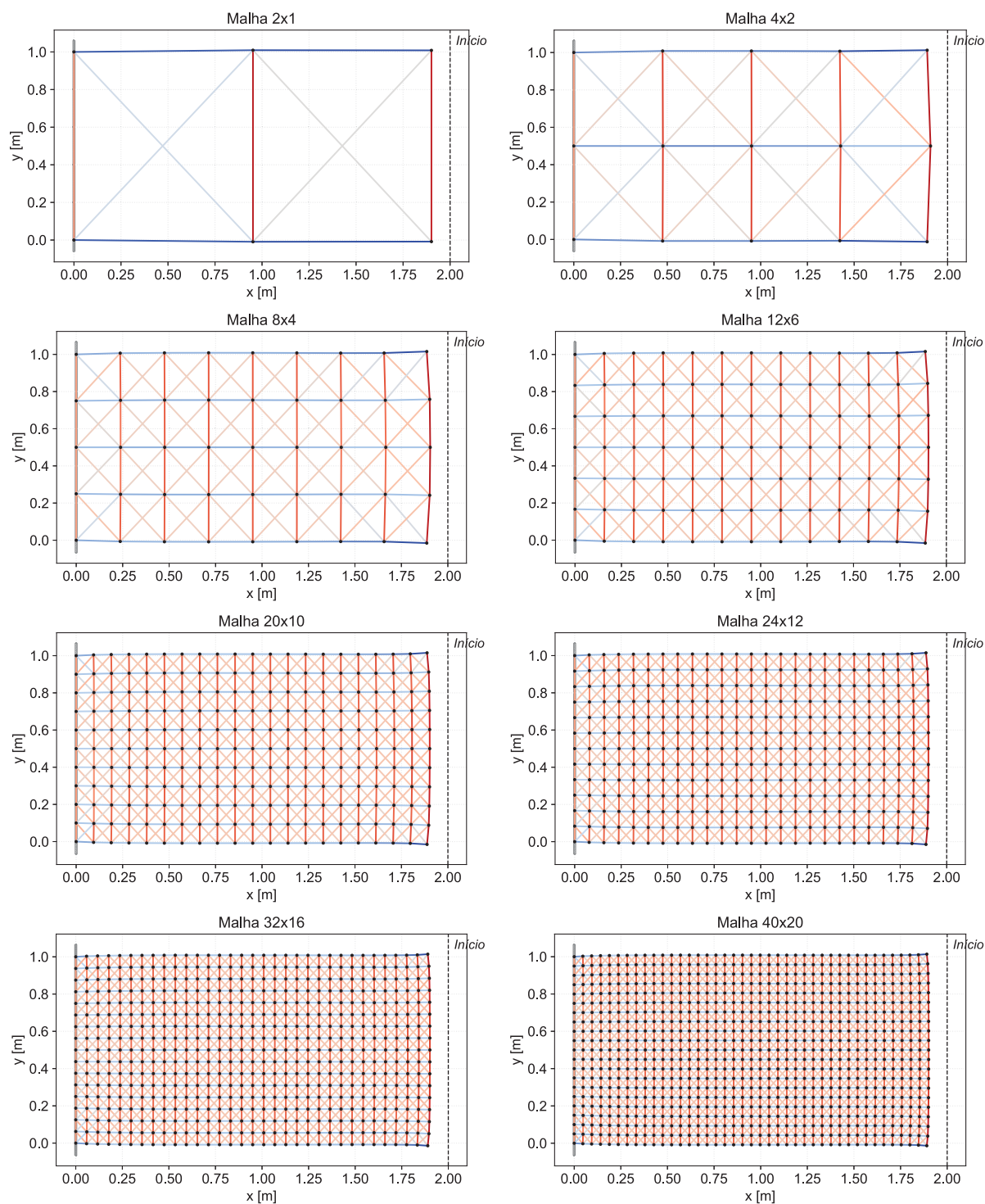


FIGURA 27 – Configuração final das malhas - Compressão com formulação por Baudet (2006).

Para a avaliação de compressão pela segunda formulação, o deslocamento do ponto monitorado e o respectivo erro percentual é mostrado na Figura 28.

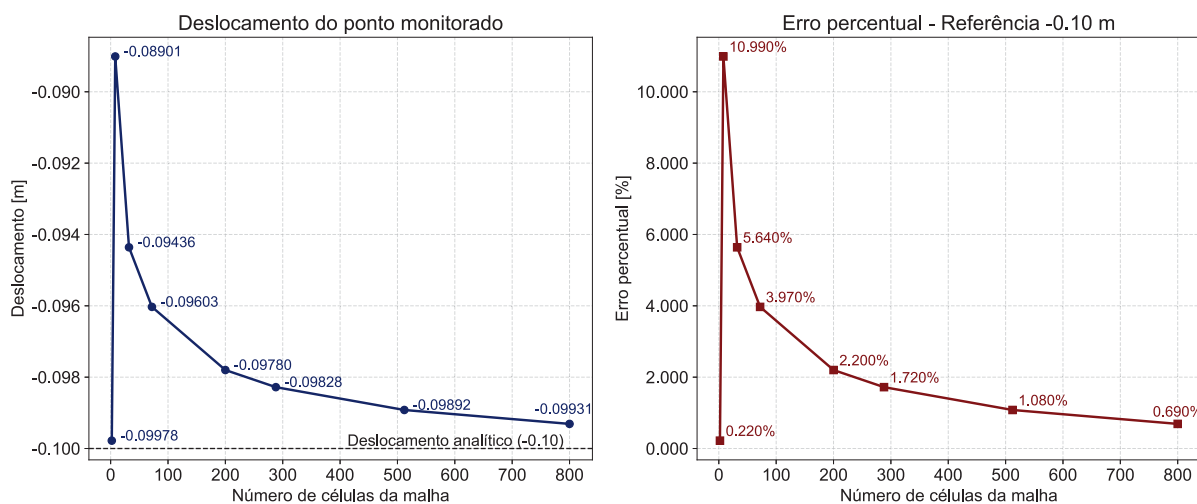


FIGURA 28 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Compressão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

A Figura 29 apresenta as configurações deformadas das malhas obtidas na simulação de compressão mediante a formulação proposta por Lloyd, Székely e Harders (2007).

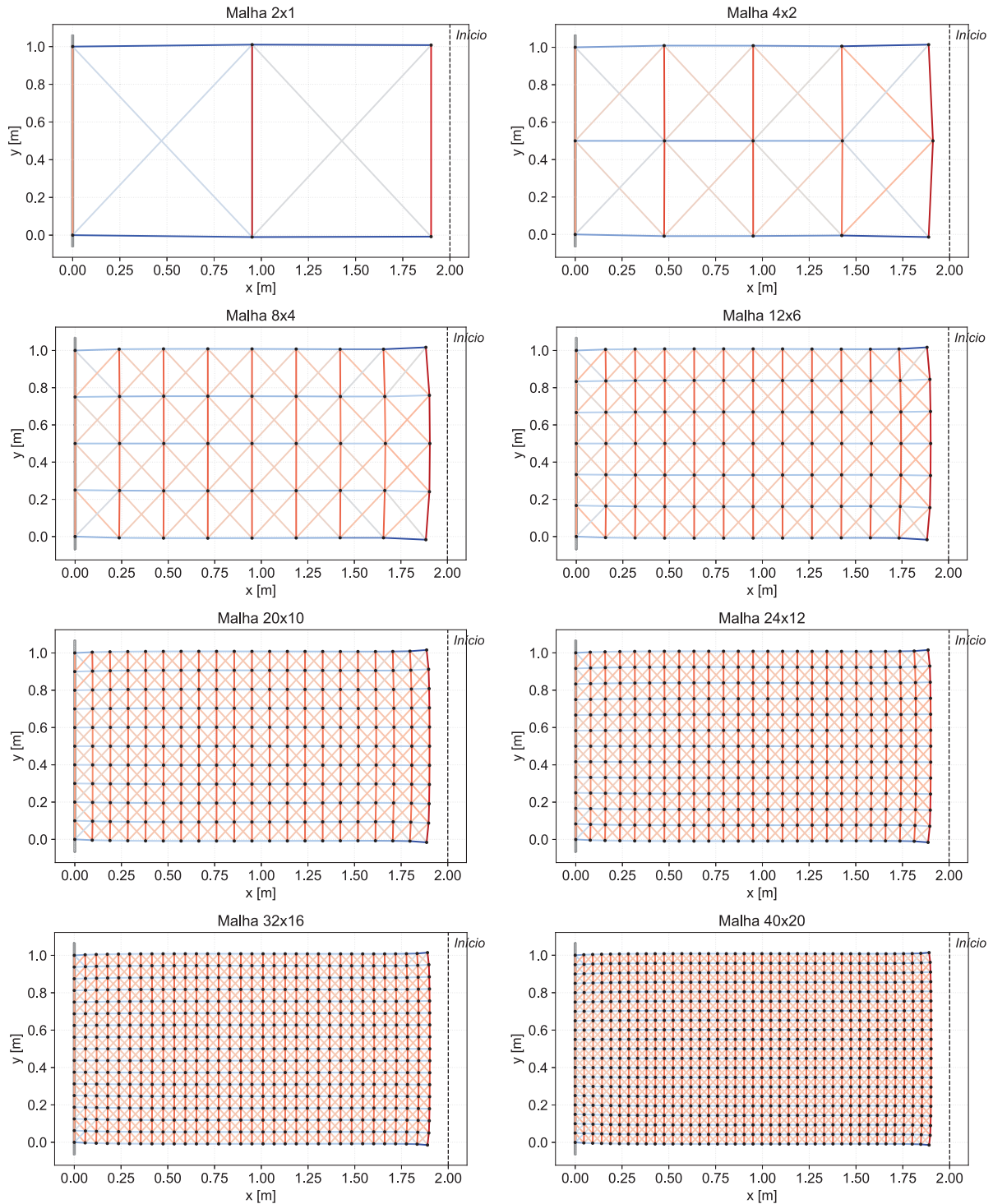


FIGURA 29 – Configuração final das malhas - Compressão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

Assim como na tração, para a primeira malha, a formulação de Baudet apresenta um erro maior, porém tem erros menores em todas as malhas subsequentes. As simulações para compressão apresentaram erros significativamente menores que as de tração, para as duas formulações, atingindo o erro da malha mais refinada da tração com uma malha de menos de 100 elementos.

TABELA 10 – Comparação dos métodos Baudet e Lloyd para compressão

| Malha | N.º células | Desloc. Baudet (m) | Desloc. Lloyd (m) | Erro Baudet (%) | Erro Lloyd (%) |
|-------|-------------|--------------------|-------------------|-----------------|----------------|
| 2x1   | 2           | -0,09930           | -0,09978          | 0,700           | 0,220          |
| 4x2   | 8           | -0,09129           | -0,08901          | 8,710           | 10,990         |
| 8x4   | 32          | -0,09483           | -0,09436          | 5,170           | 5,640          |
| 12x6  | 72          | -0,09626           | -0,09603          | 3,740           | 3,970          |
| 20x10 | 200         | -0,09785           | -0,09780          | 2,150           | 2,200          |
| 24x12 | 288         | -0,09832           | -0,09828          | 1,680           | 1,720          |
| 32x16 | 512         | -0,09894           | -0,09892          | 1,060           | 1,080          |
| 40x20 | 800         | -0,09933           | -0,09931          | 0,670           | 0,690          |

### 4.3 FLEXÃO

O resultado analítico para flexão considerando a configuração apresentada em subseção 3.4.2 é calculado pela Equação 2.51. Com os valores adotados na equação obtemos:

$$\delta_{F+C} = \underbrace{\frac{wL^4}{8EI}}_{\text{Flexão}} + \underbrace{\frac{\alpha wL^2}{2GA}}_{\text{Cisalhamento}} = \underbrace{\frac{2.5 \times 2^4}{8 \times 1000 \times \frac{1}{12}}}_{0.06} + \underbrace{\frac{1,175 \times 2.5 \times 2^2}{2 \times 375 \times 1}}_{0.0157} = 0.0757 \text{ m} \quad (4.3)$$

A Figura 30 apresenta ao lado esquerdo, para a primeira formulação, os valores de deslocamento do ponto central da seção na extremidade livre. Os valores estão associados a quantidade de elementos na malha no eixo X. O gráfico da direita compara os resultados obtidos com o deslocamento analítico para a configuração adotada. Os resultados apresentam convergência com o aumento da malha, mas se afastam do resultado analítico.

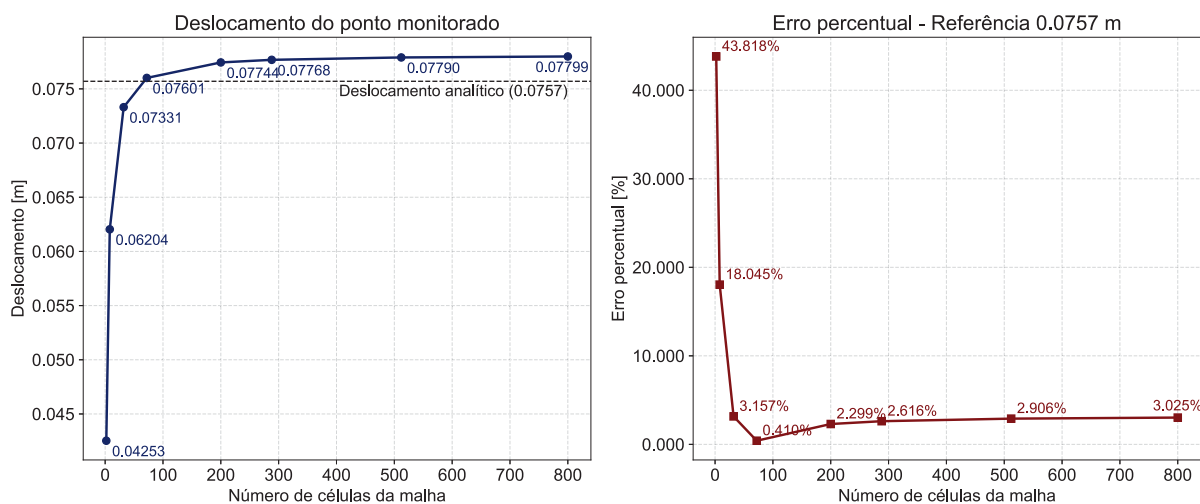


FIGURA 30 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Flexão com formulação por Baudet (2006).

A disposição da malha ao final da simulação é mostrada em Figura 31. Diferente dos modelos de tração e compressão, neste, as tensões estão concentradas nas ligações de bordo mais próximas do apoio.



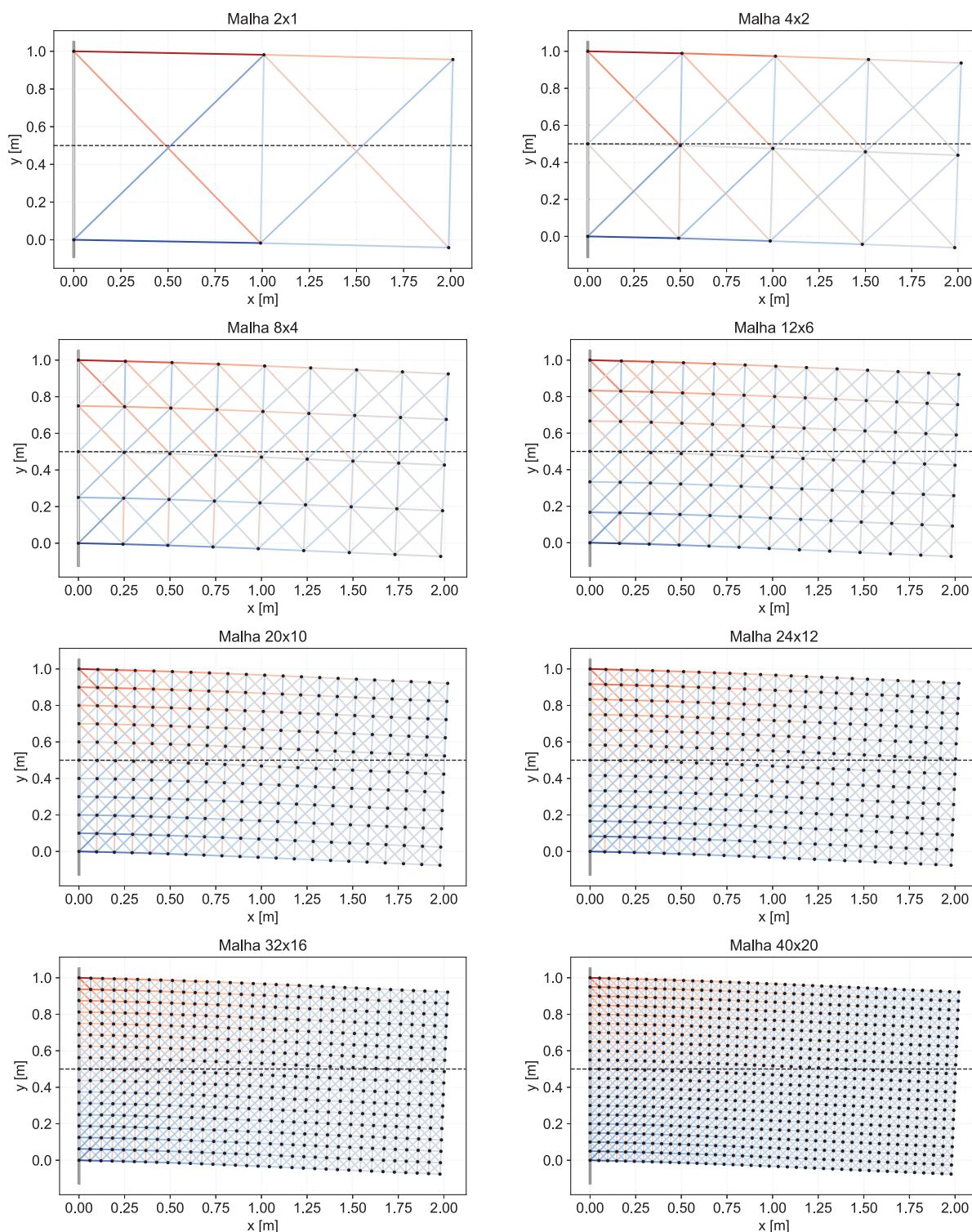


FIGURA 31 – Configuração final das malhas - Flexão com formulação por Baudet (2006).

De maneira análoga ao apresentado para formulação de Baudet (2006), a Figura 32 abaixo compara o resultado obtido com o analítico apresentado. Neste, os resultados também apresentam uma boa convergência, porém se afastam do deslocamento calculado.

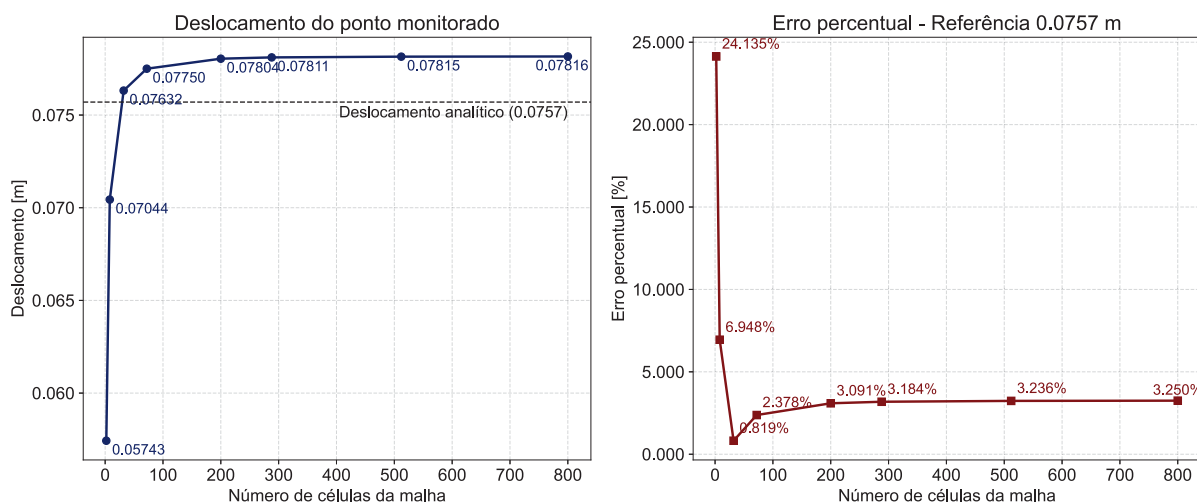


FIGURA 32 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Flexão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

A configuração do corpo testado utilizando a segunda formulação é apresentada na Figura 33. Conforme esperado, a distribuição de tensões no corpo tem o mesmo padrão do observado para a primeira.



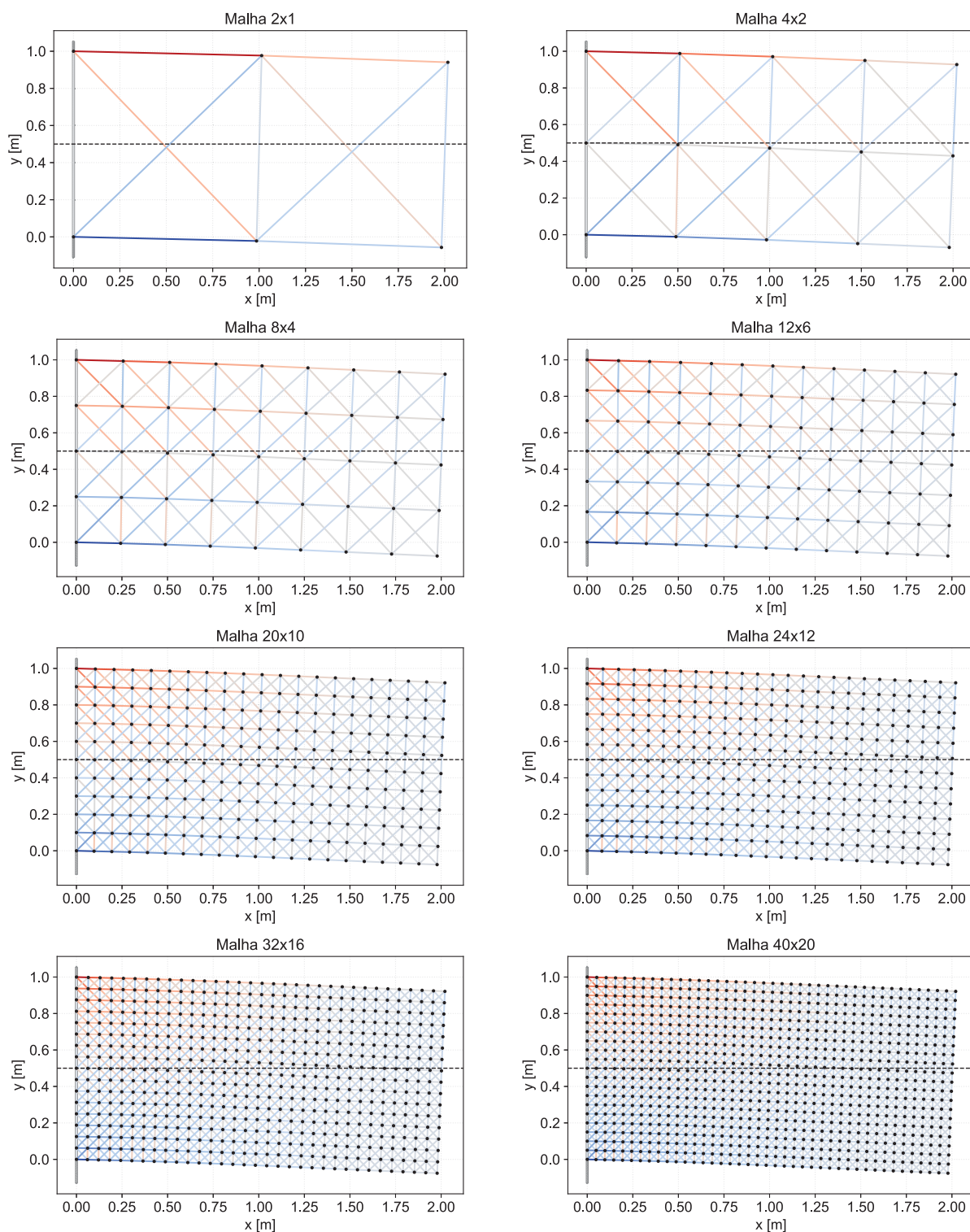


FIGURA 33 – Configuração final das malhas - Flexão com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

A Tabela 11 compara os valores mostrados nas figuras anteriores para as duas formulações. Ambas convergem para um valor próximo de 0,078 metro, dois milímetros maior que o analítico.

TABELA 11 – Comparação dos métodos Baudet e Lloyd para flexão

| Malha | N.º células | Desloc. Baudet (m) | Desloc. Lloyd (m) | Erro Baudet (%) | Erro Lloyd (%) |
|-------|-------------|--------------------|-------------------|-----------------|----------------|
| 2x1   | 2           | 0,04253            | 0,05743           | 43,818          | 24,135         |
| 4x2   | 8           | 0,06204            | 0,07044           | 18,045          | 6,948          |
| 8x4   | 32          | 0,07331            | 0,07632           | 3,157           | 0,819          |
| 12x6  | 72          | 0,07601            | 0,07750           | 0,410           | 2,378          |
| 20x10 | 200         | 0,07744            | 0,07804           | 2,299           | 3,091          |
| 24x12 | 288         | 0,07768            | 0,07811           | 2,616           | 3,184          |
| 32x16 | 512         | 0,07790            | 0,07815           | 2,906           | 3,236          |
| 40x20 | 800         | 0,07799            | 0,07816           | 3,025           | 3,250          |

#### 4.4 CISALHAMENTO

Na avaliação do esforço de cisalhamento, o deslocamento do ponto central da extremidade livre foi comparado com resultado analítico para esse tipo de esforço. Em caso de cargas aplicadas de transversalmente à extremidade livre, o deslocamento do ponto central da parte superior do quadrado, pode ser encontrado pela soma do efeito de flexão e cisalhamento. Diferente do calculado para o teste de flexão, a parcela de cisalhamento neste caso é mais significativa. Para os valores e configuração apresentada em subseção 3.4.3 o deslocamento é:

$$\delta_{F+C} = \underbrace{\frac{FL^3}{3EI}}_{\text{Flexão}} + \underbrace{\frac{\alpha FL}{GA}}_{\text{Cisalhamento}} = \underbrace{\frac{5 \times 1^3}{3 \times 1000 \times \frac{1}{24}}}_{0,04} + \underbrace{\frac{1,175 \times 5 \times 1}{375 \times 0,5}}_{0,0313} = 0,0713m \quad (4.4)$$

Para as simulações de cisalhamento utilizando a formulação de Baudet (2006), a Figura 34 apresenta os deslocamentos do ponto monitorado no eixo X e os respectivos erros relativos à solução analítica, para diferentes resoluções de malha.

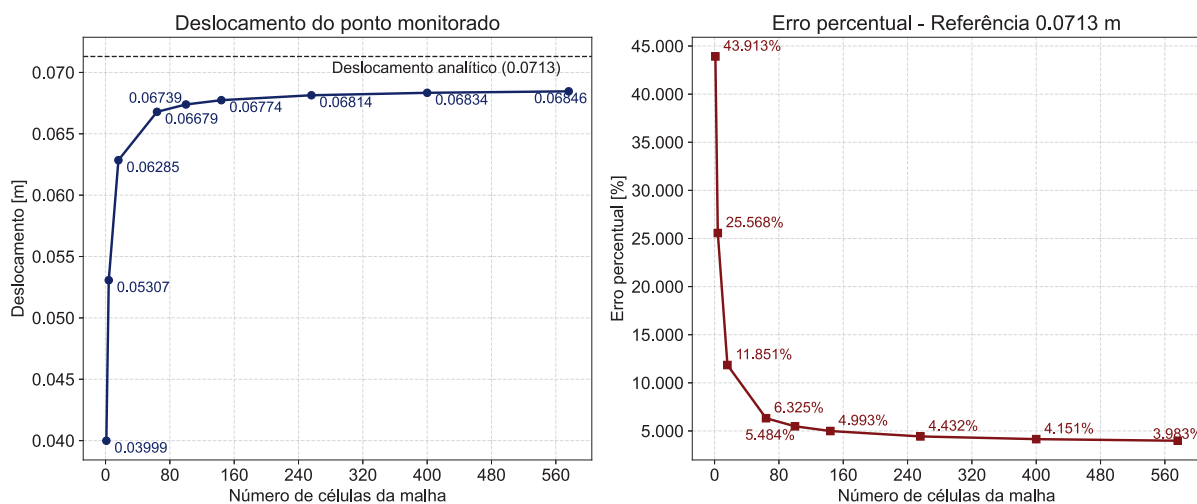


FIGURA 34 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Cisalhamento com formulação por Baudet (2006).

A configuração final das malhas obtida com esta formulação é apresentada na Figura 35. Nesta representação, observa-se que as barras próximas aos apoios (esquerda e direita) são as mais solicitadas.

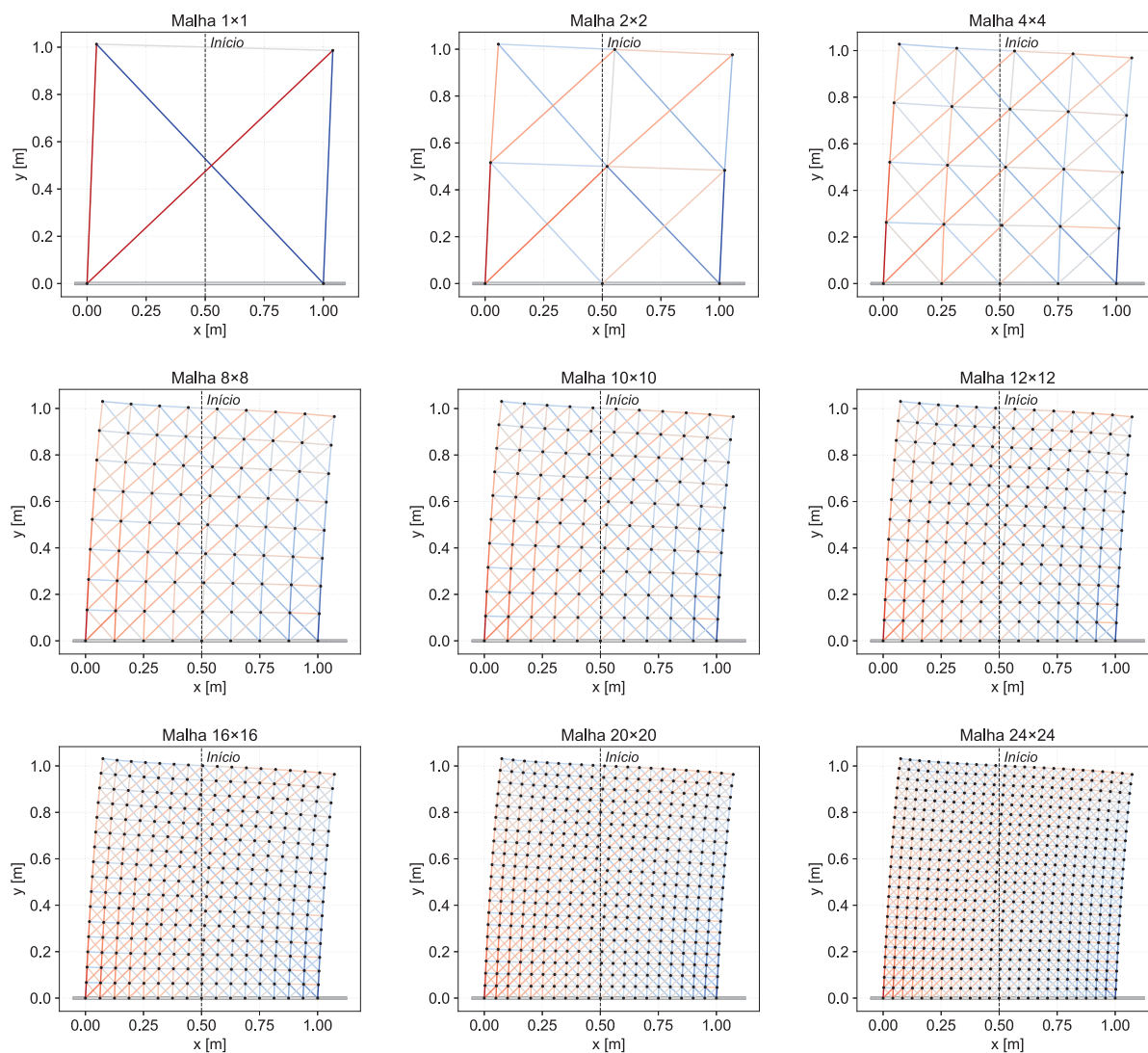


FIGURA 35 – Configuração final das malhas - Cisalhamento com formulação por Baudet (2006).

Utilizando a formulação de Lloyd, Székely e Harders (2007) para as malhas adotadas foram obtidos os resultados apresentados no gráfico da direita na Figura 36. Os resultados apresentam convergência para um erro próximo de 3,8%, como mostrado no gráfico da esquerda.

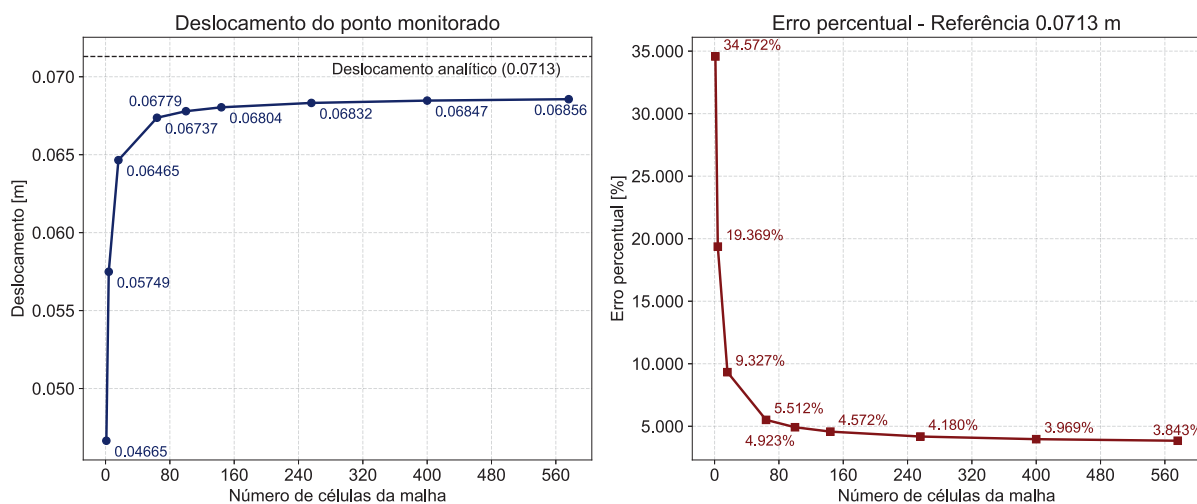


FIGURA 36 – Deslocamento do ponto monitorado para cada malha e seu erro relativo - Cisalhamento com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

A Figura 37 mostra a configuração final dos pontos de massa e a distribuição de tensões nas ligações para a segunda formulação em todas as malhas, com a linha preta 'Início' indicando a posição de referência ( $x=0,5$ ) do centro da peça na condição inicial.

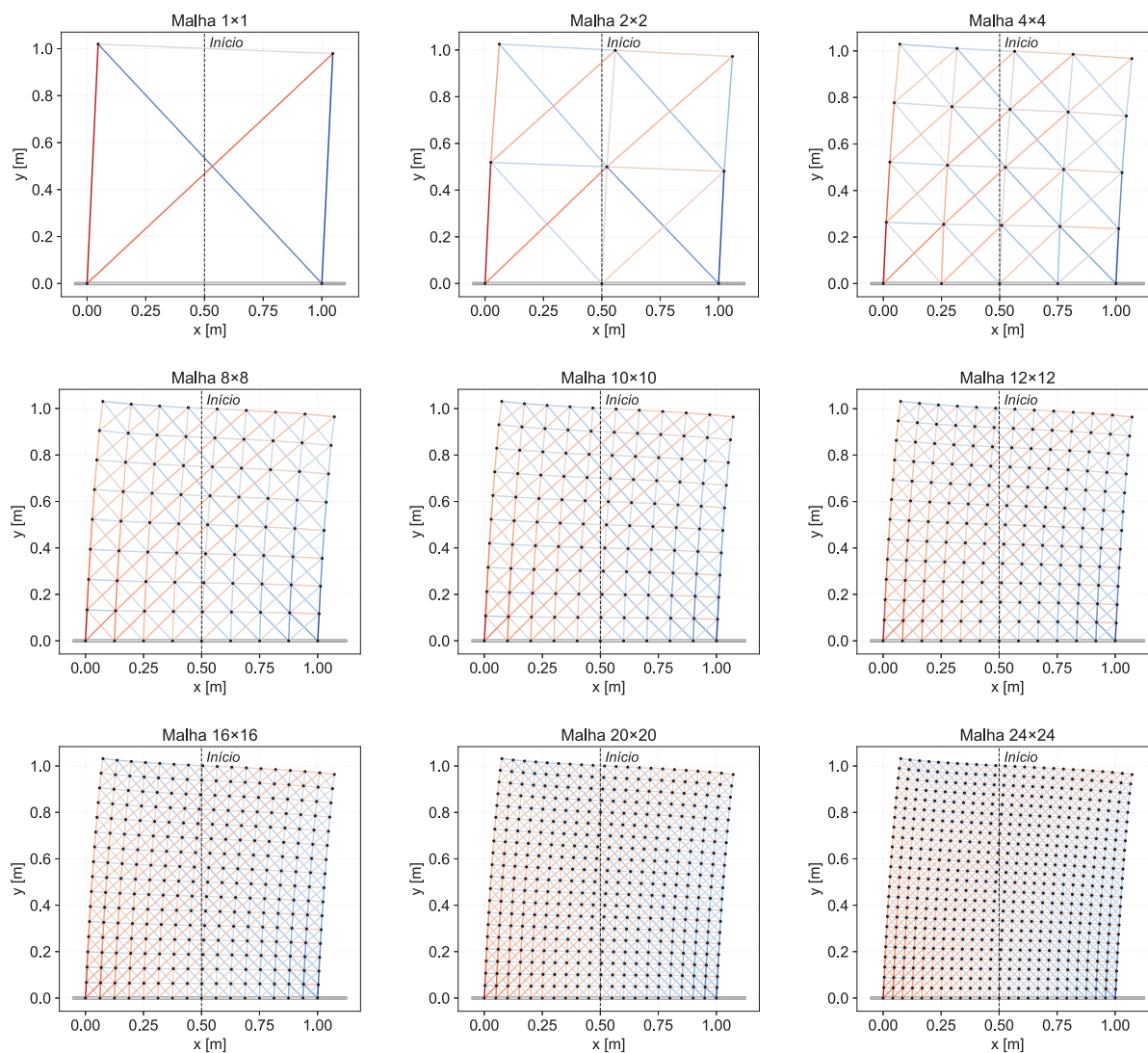


FIGURA 37 – Configuração final das malhas - Cisalhamento com formulação por Lloyd, Székely e Harders (2007).

A Tabela 12 mostra a comparação dos resultados para os dois métodos. O teste de cisalhamento é o único em que a formulação de Lloyd, Székely e Harders (2007), para a malha mais refinada, apresenta erro menor que a de Baudet (2006).



TABELA 12 – Comparação dos métodos Baudet e Lloyd para cisalhamento

| Malha | N. <sup>o</sup><br>células | Desloc.<br>Baudet<br>(m) | Desloc.<br>Lloyd<br>(m) | Erro<br>Baudet<br>(%) | Erro<br>Lloyd<br>(%) |
|-------|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------|----------------------|
| 1x1   | 1                          | 0,03999                  | 0,04665                 | 43,913                | 34,572               |
| 2x2   | 4                          | 0,05307                  | 0,05749                 | 25,568                | 19,369               |
| 4x4   | 16                         | 0,06285                  | 0,06465                 | 11,851                | 9,327                |
| 8x8   | 64                         | 0,06679                  | 0,06737                 | 6,325                 | 5,512                |
| 10x10 | 100                        | 0,06739                  | 0,06779                 | 5,484                 | 4,923                |
| 12x12 | 144                        | 0,06774                  | 0,06804                 | 4,993                 | 4,572                |
| 16x16 | 256                        | 0,06814                  | 0,06832                 | 4,432                 | 4,180                |
| 20x20 | 400                        | 0,06834                  | 0,06847                 | 4,151                 | 3,969                |
| 24x24 | 576                        | 0,06846                  | 0,06856                 | 3,983                 | 3,843                |

#### 4.5 PADRÃO DE FISSURAÇÃO

Nesta seção são mostrados os resultados para visualização de um padrão de fissuração para todas as simulações contendo valor limite de deformação das ligações nas malhas mais refinadas.

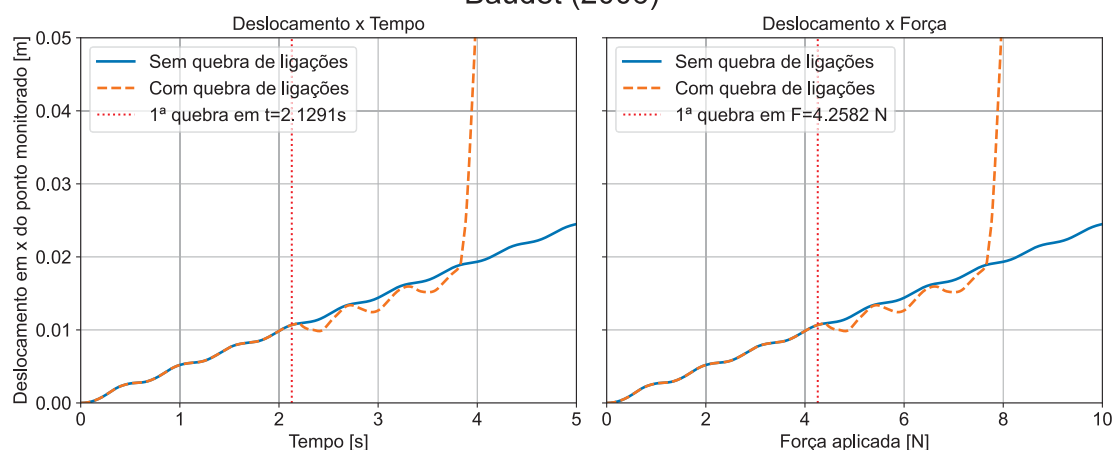
##### 4.5.1 Limite igual

Esta subseção apresenta os gráficos de deslocamento no tempo e deslocamento versus força para o ponto central da extremidade livre, considerando a aplicação de um mesmo limite de deformação em todas as ligações. Esse ponto de referência, posicionado no meio da extremidade livre, é o mesmo adotado para comparação com os resultados analíticos.

No caso da tração, a Figura 38 compara o comportamento das duas formulações estudadas, mostrando a evolução do deslocamento ao longo do tempo no eixo x e sua correspondência com a força aplicada. Acima estão os gráficos para a formulação de Baudet (2006) e abaixo para a de Lloyd, Székely e Harders (2007).

Para todos os gráficos, o primeiro passo de tempo em que acontece uma quebra está indicado com uma linha vermelha pontilhada.

## Baudet (2006)



## Lloyd, Székely e Harders (2007)

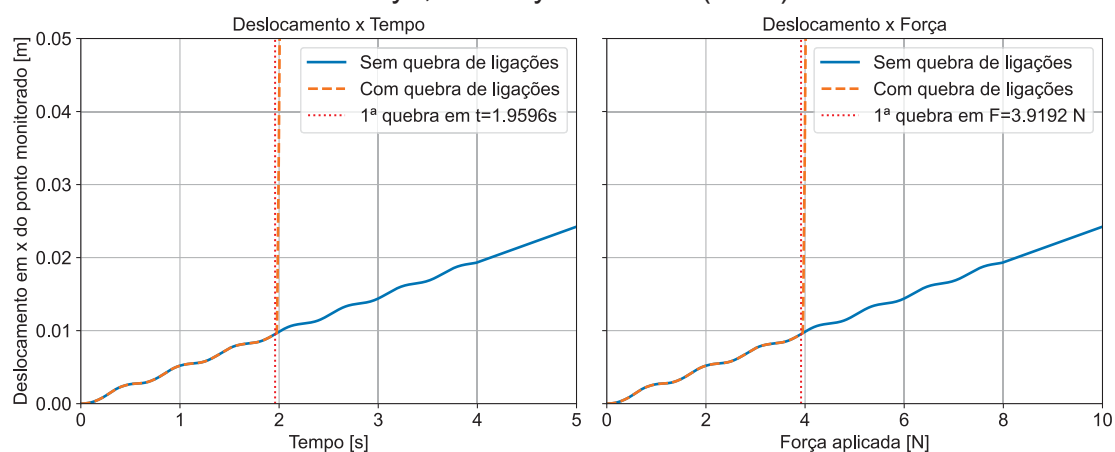


FIGURA 38 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para tração

A Figura 39 apresenta à esquerda o instante inicial de ruptura das ligações na simulação. À direita, mostra-se um estágio posterior do processo, selecionado quando 40 barras já haviam rompido, quantidade escolhida que permite visualizar o padrão de fissuração além de manter uniformidade na análise comparativa entre todas as simulações.



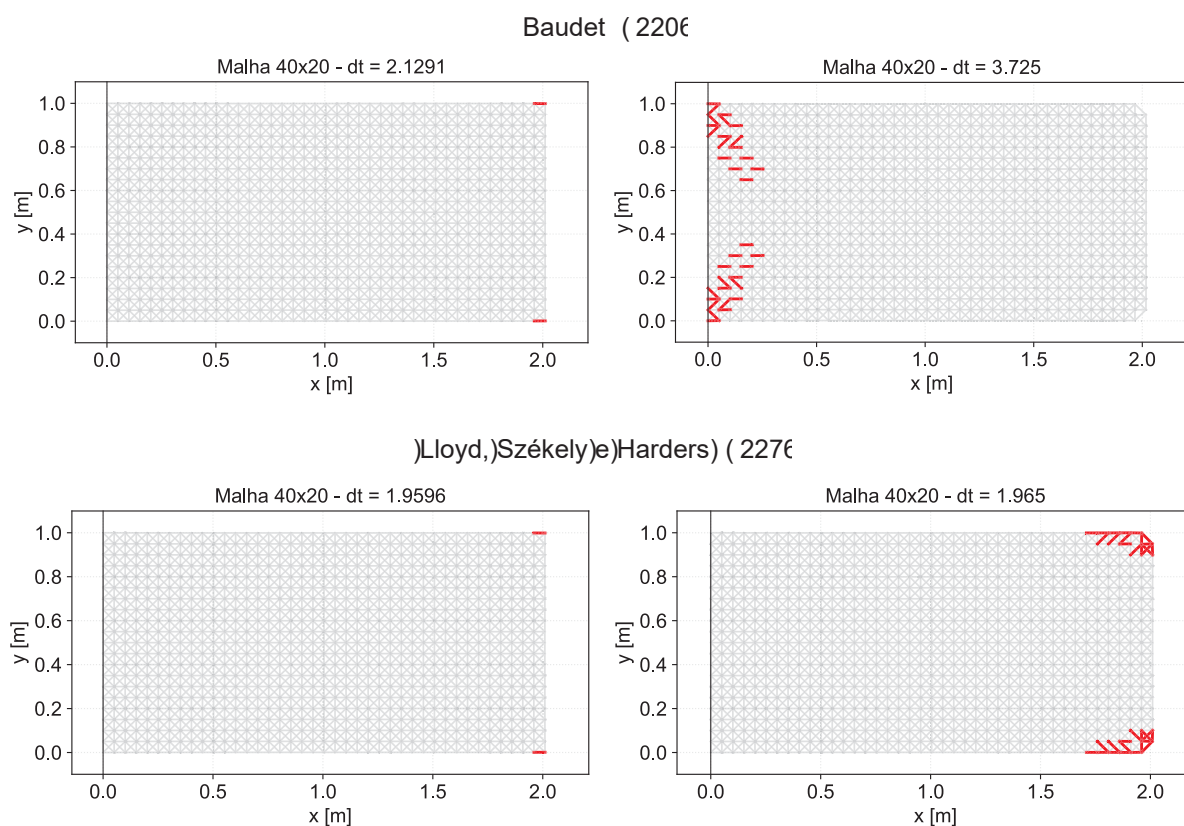
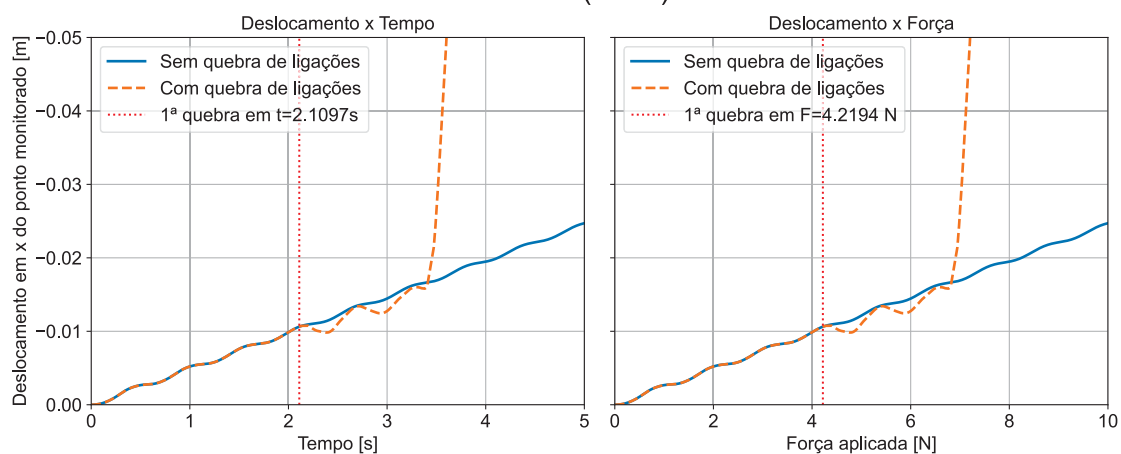


FIGURA 39 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para tração

Na primeira formulação, as fissuras se iniciam na parte externa do apoio, tanto acima quanto abaixo, propagando-se em direção ao centro da peça em duas diagonais. Já na segunda formulação, o rompimento ocorre ao redor da região onde se deu a primeira fissura, concentrando-se nos pontos externos da extremidade livre.

Os resultados para compressão seguem a mesma metodologia de apresentação utilizada para tração. A Figura 40 exibe os gráficos comparativos das formulações de Baudet (2006) e Lloyd, Székely e Harders (2007), mostrando a evolução do deslocamento e sua relação com a força aplicada, com o primeiro instante de ruptura marcado por linha vermelha pontilhada.

## Baudet (2006)



## Lloyd, Székely e Harders (2007)

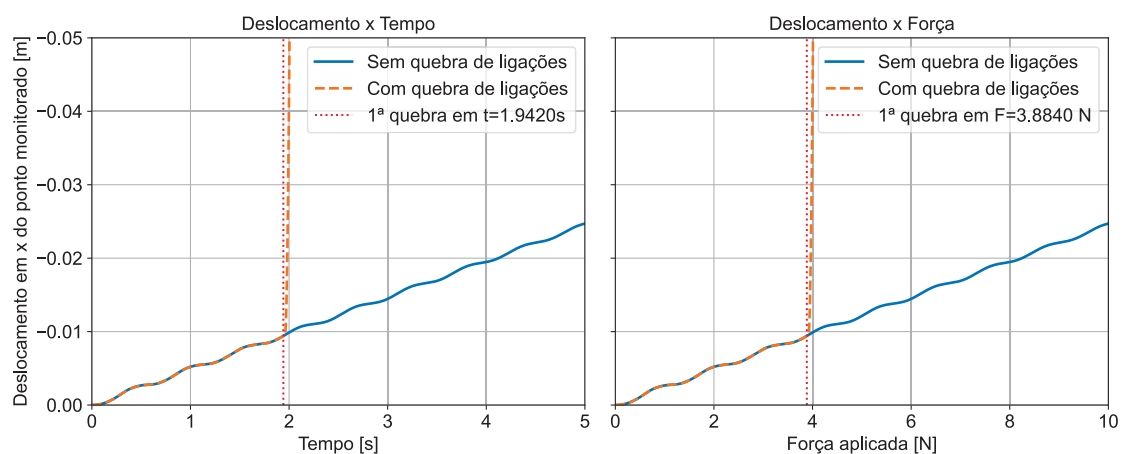


FIGURA 40 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para compressão

A Figura 41 apresenta à direita o momento inicial de fratura e à esquerda o estágio com 40 barras rompidas, padrão estabelecido para todas as análises.

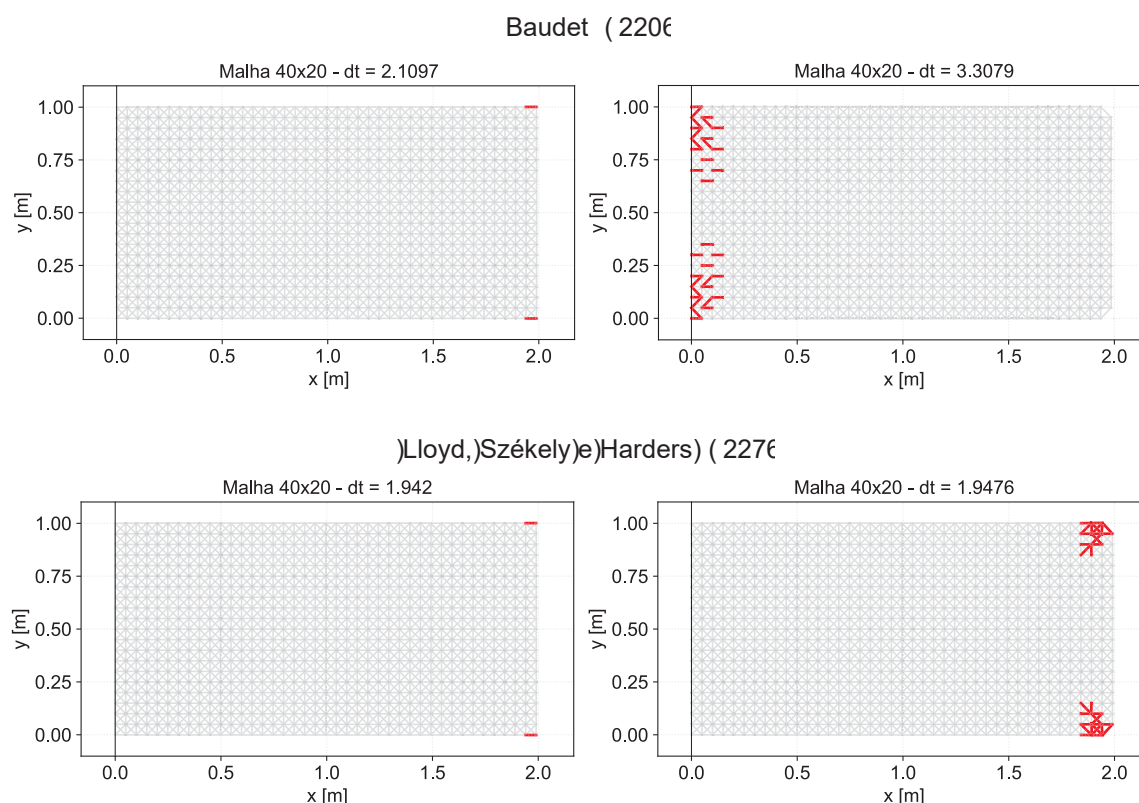
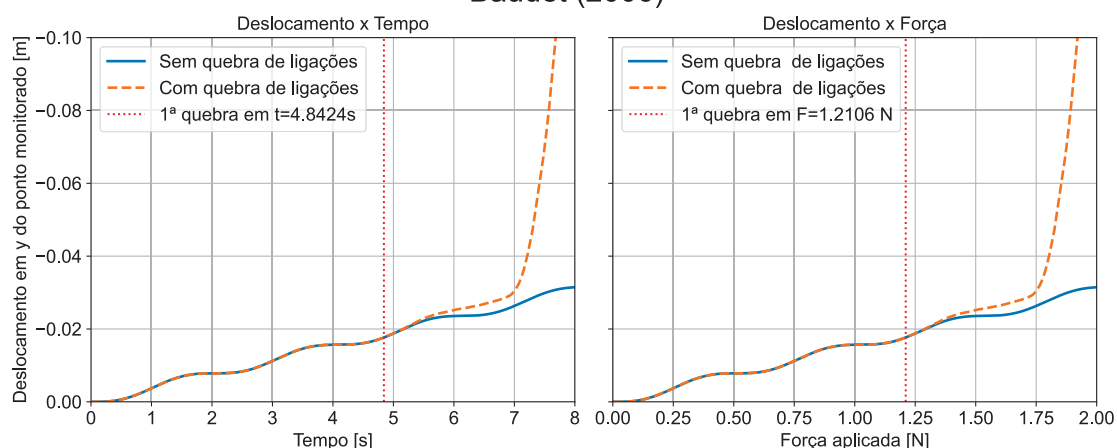


FIGURA 41 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para compressão

Na primeira formulação, as ligações que se rompem por compressão estão inicialmente localizadas nos pontos extremos da borda da extremidade livre. Após esse rompimento inicial, as demais falhas ocorrem próximas ao apoio, propagando-se em direção ao centro da peça de forma retilínea, diferentemente do padrão diagonal observado nos casos de tração. Utilizando o método de equivalência proposto por Lloyd, Székely e Harders (2007), observa-se que o comportamento de ruptura próximo à borda da extremidade livre se repete, de maneira semelhante ao observado sob tração.

Para o caso de flexão, os resultados são apresentados nas Figuras 42 e 43. A primeira figura contém os gráficos de deslocamento no eixo y do ponto monitorado pelo tempo e força-deslocamento para ambas as formulações, enquanto a segunda ilustra a malha no instante inicial de ruptura e no estágio de 40 barras quebradas.

## Baudet (2006)



## Lloyd, Székely e Harders (2007)

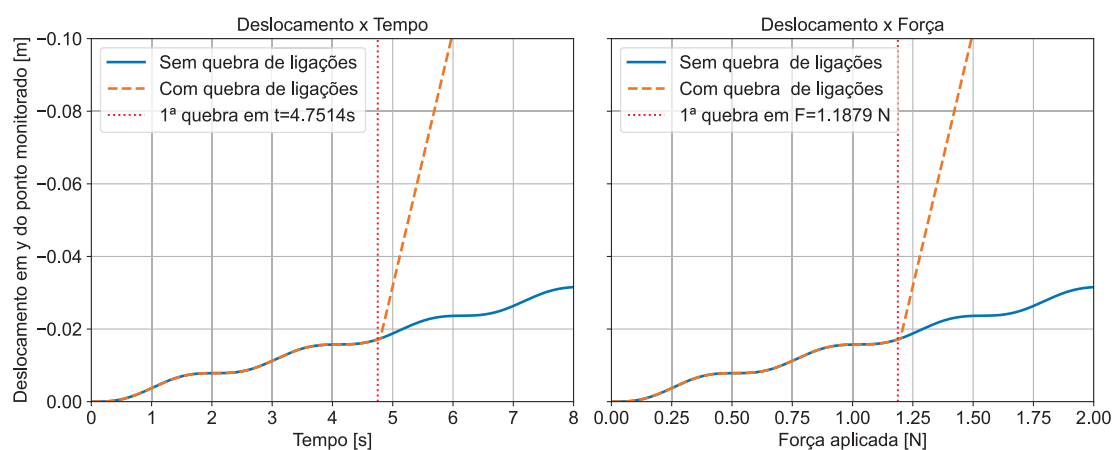


FIGURA 42 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para flexão

A Figura 43 mostra que para o modelo utilizando Baudet (2006) a maioria das quebras acontece na região mais comprimida, enquanto para Lloyd, Székely e Harders (2007) somente a região tracionada do corpo tem ligações rompidas.

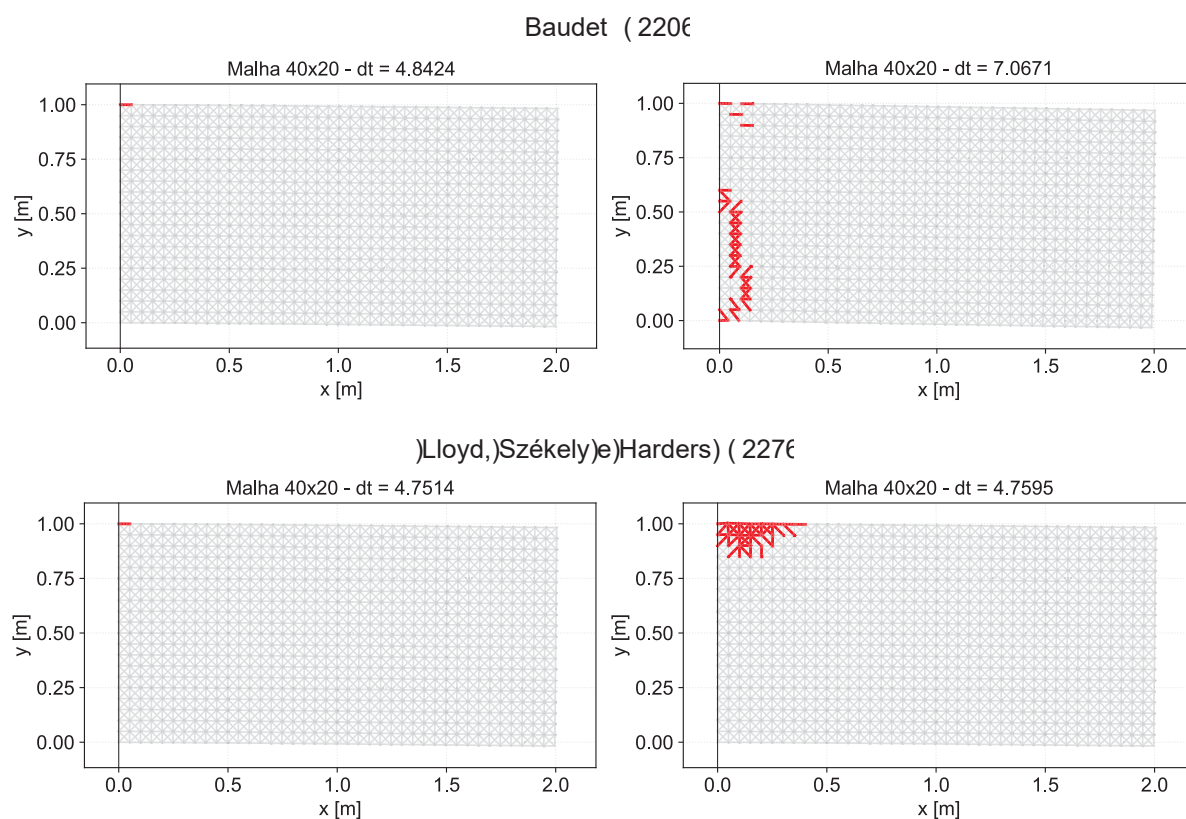
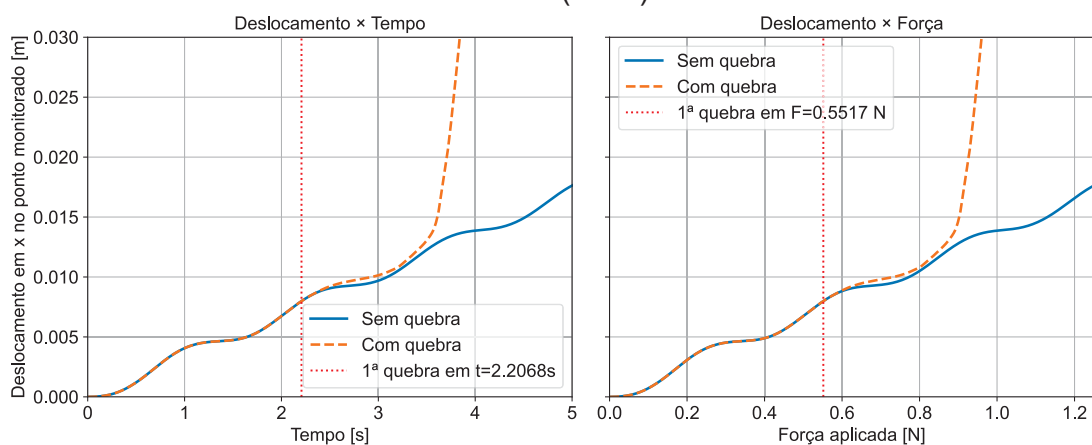


FIGURA 43 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para flexão

Finalmente, os resultados de cisalhamento são mostrados nas Figuras 44 e 45. Mantendo o padrão estabelecido, estas figuras apresentam respectivamente os gráficos comparativos das formulações e a evolução do padrão de fissuração nos mesmos estágios de análise adotados para os outros carregamentos.

## Baudet (2006)



## Lloyd, Székely e Harders (2007)

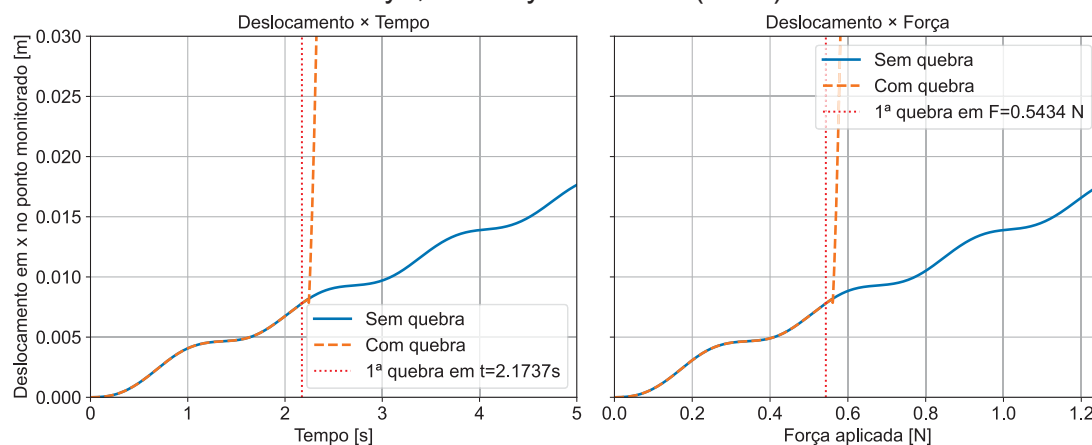


FIGURA 44 – Limite igual - Gráfico de deslocamento por tempo e força para cisalhamento

Na Figura 45, observa-se a configuração com múltiplas ligações rompidas na mesma região para ambas as formulações. Contudo, enquanto a primeira apresenta propagação do rompimento das ligações próxima ao apoio, avançando em direção ao centro, a segunda exibe uma progressão mais vertical, em direção à extremidade livre.



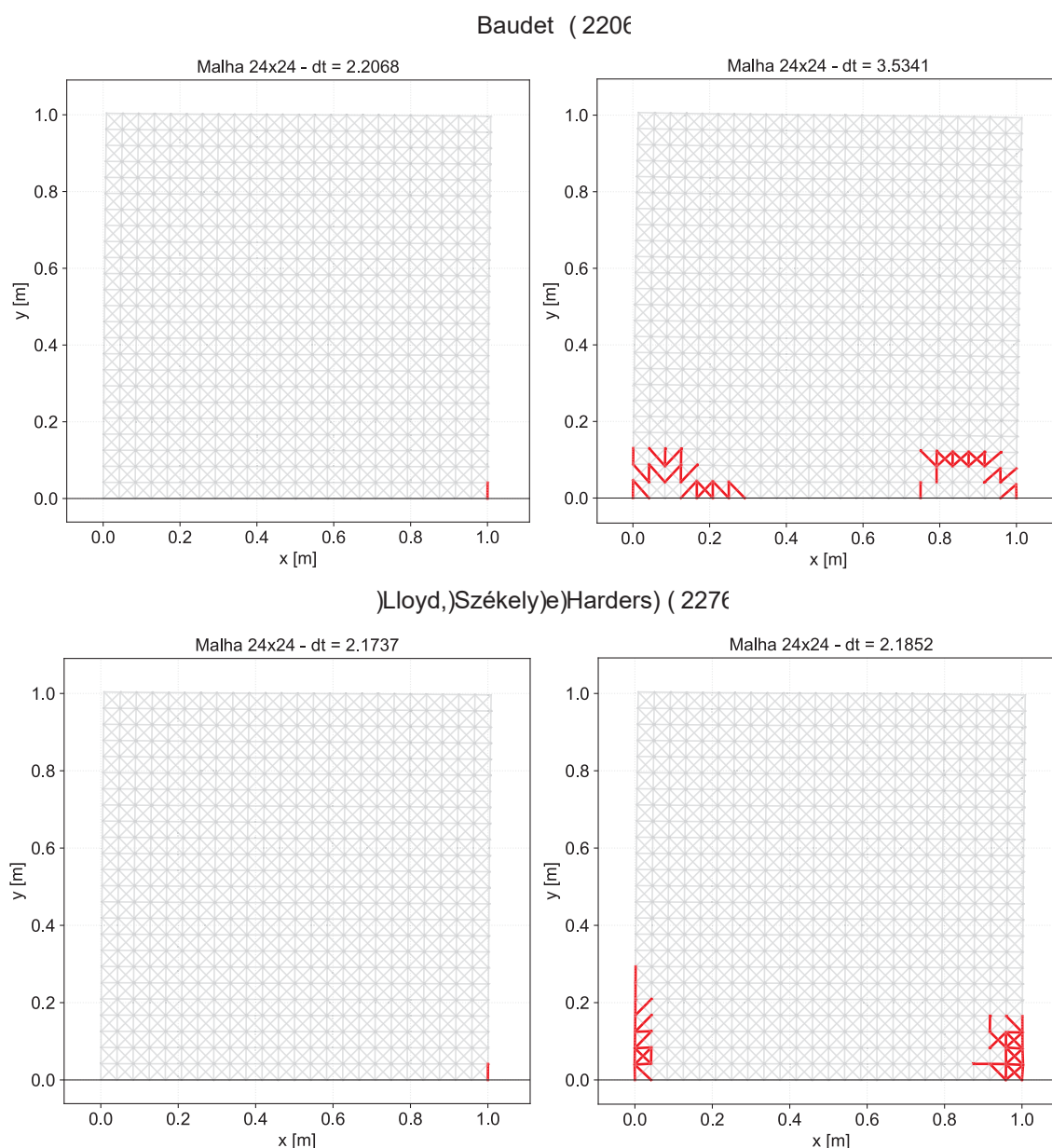


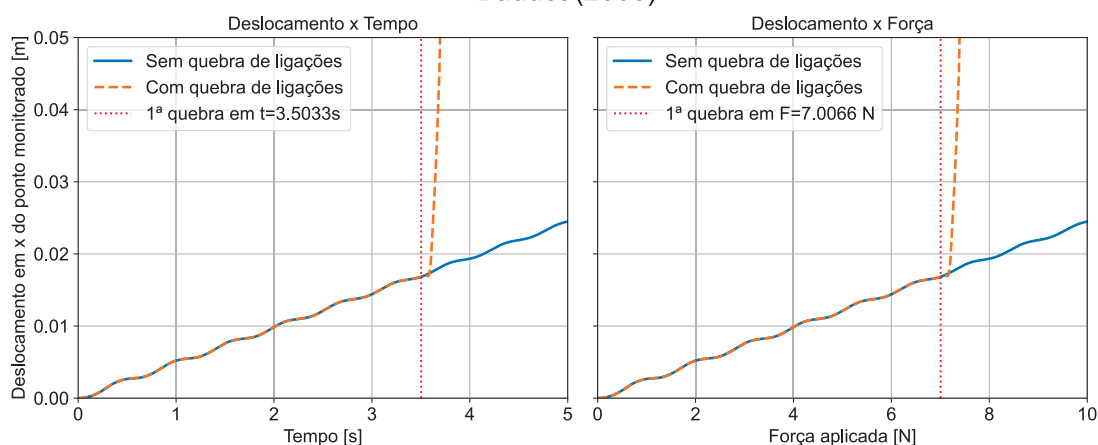
FIGURA 45 – Limite igual - Instante inicial e avançado de fissura para cisalhamento

#### 4.5.2 Limite proporcional

Esta subseção apresenta os resultados obtidos com a aplicação de um critério de deformação limite inversamente proporcional à rigidez das ligações, onde ligações mais rígidas tem limite menor mantendo a mesma estrutura de análise da subseção anterior.

Para o caso de tração, a Figura 46 compara o comportamento das duas formulações, exibindo os gráficos de deslocamento no tempo e força-deslocamento.

## Baudet (2006)



## Lloyd, Székely e Harders (2007)

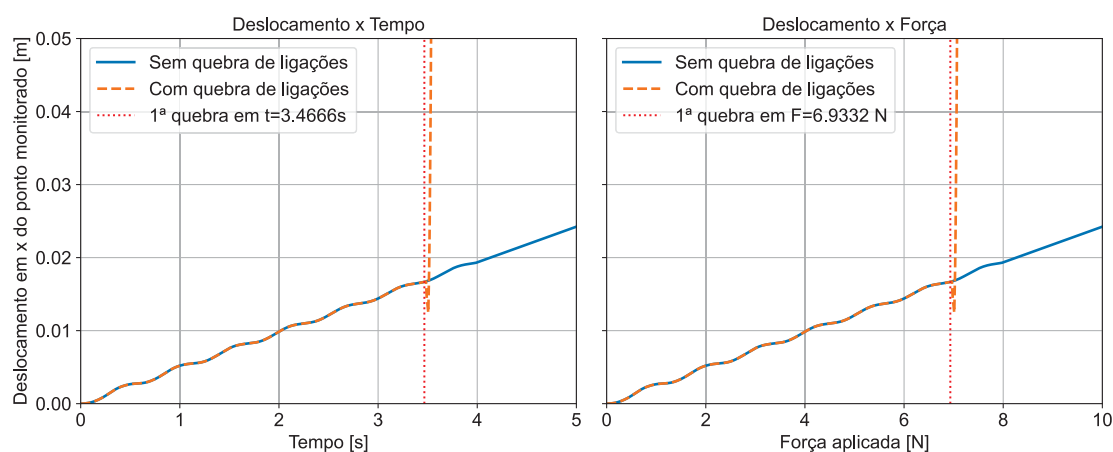


FIGURA 46 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para tração

A Figura 47 ilustra à direita o momento inicial de ruptura e à esquerda o estágio com 40 barras rompidas, seguindo o mesmo padrão de análise estabelecido. Para esta distribuição de limites nas ligações, a fissura inicia-se próxima à extremidade livre, propagando-se para o interior da estrutura em ambos os casos, porém com padrões distintos: enquanto a primeira formulação apresenta uma propagação diagonal em direção ao centro, a segunda mostra um avanço mais retilíneo.



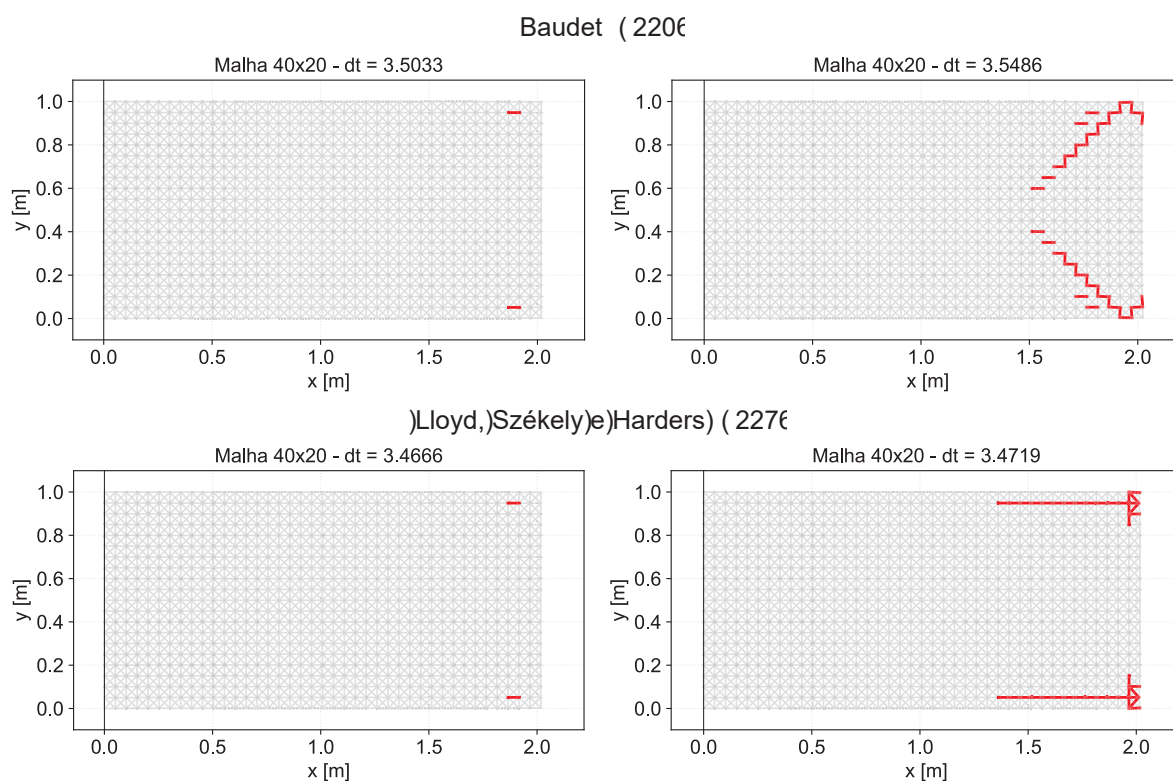


FIGURA 47 – Limite proporcional - Instante inicial e avançado de fissura para tração

Os resultados para compressão são apresentados nas Figuras 48 e 49. A primeira mostra os gráficos comparativos das formulações, enquanto a segunda exibe a evolução do padrão de fissuração nos mesmos estágios de análise.

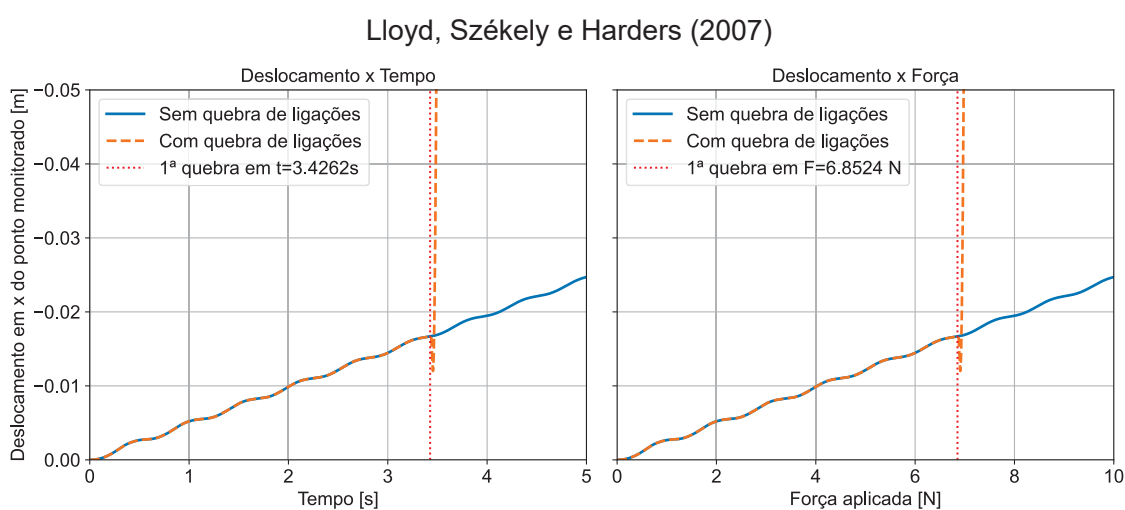
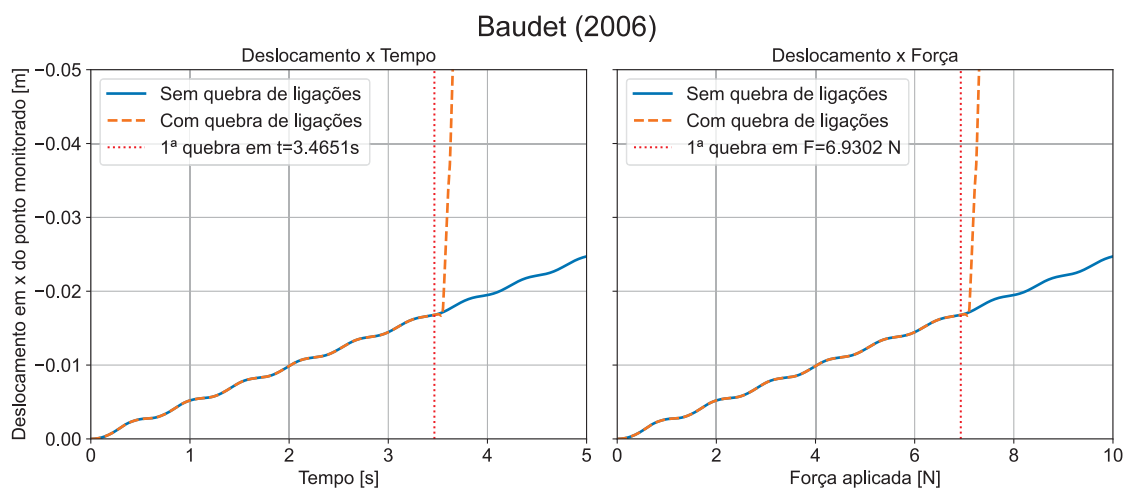


FIGURA 48 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para compressão

Para o caso de compressão, a primeira formulação apresentou um comportamento similar ao observado sob tração, com propagação de danos para o interior do corpo. Entretanto, na segunda formulação, as fissuras não se propagaram para o interior, concentrando-se nas regiões próximas aos bordos externos da extremidade livre.

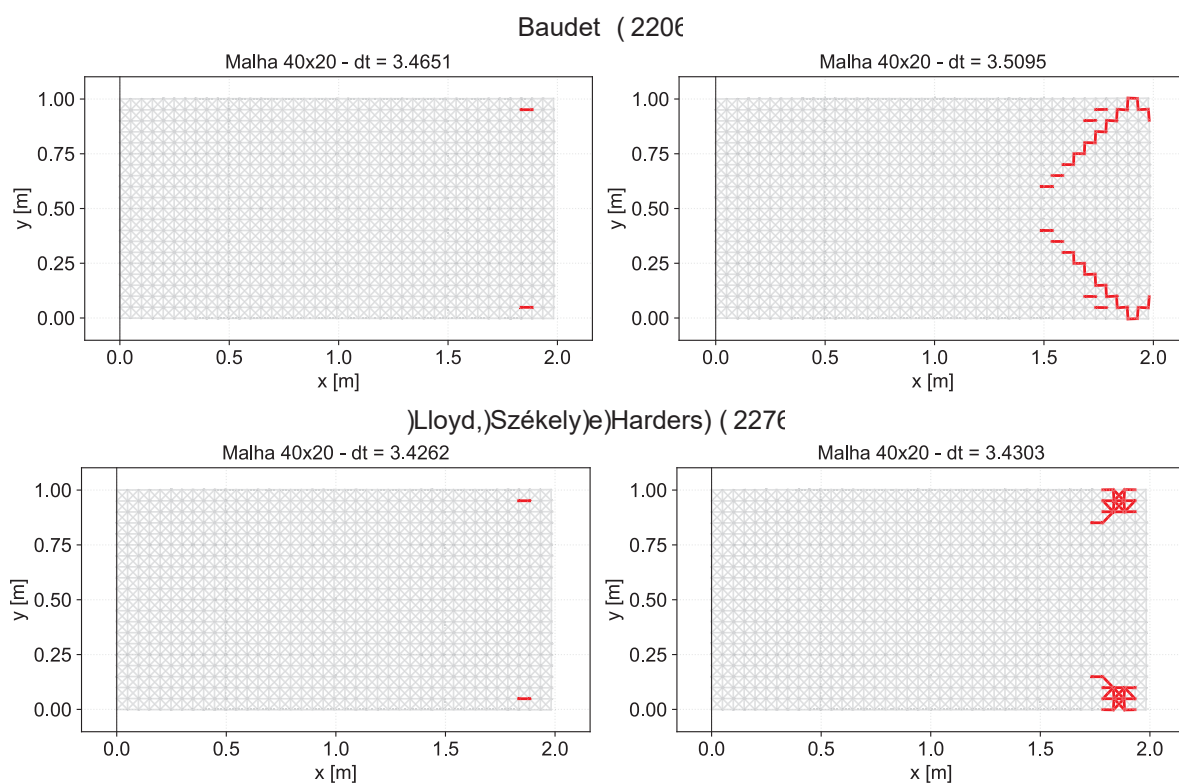
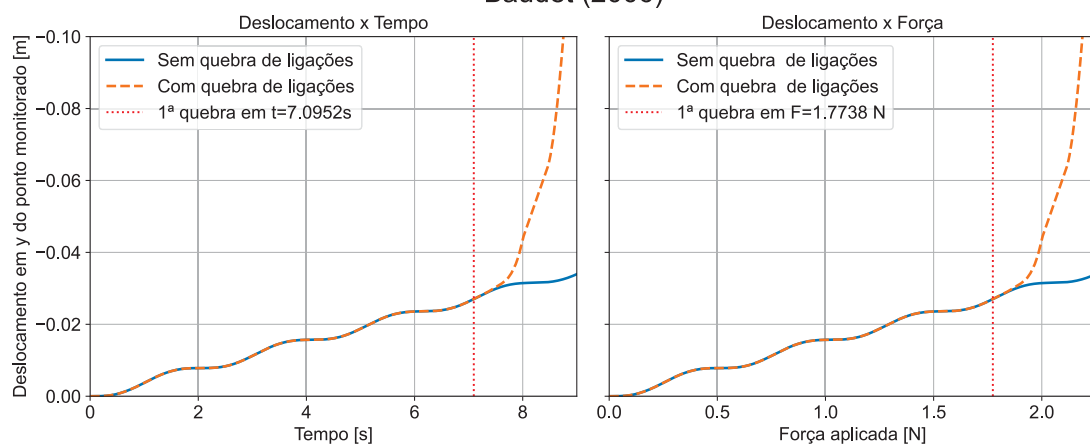


FIGURA 49 – Limite proporcional - Instante inicial e avançado de fissura para compressão

No caso de flexão, as Figuras 50 e 51 apresentam respectivamente os gráficos de deslocamento e os padrões de fissuração obtidos com o critério proporcional.

## Baudet (2006)



## Lloyd, Székely e Harders (2007)

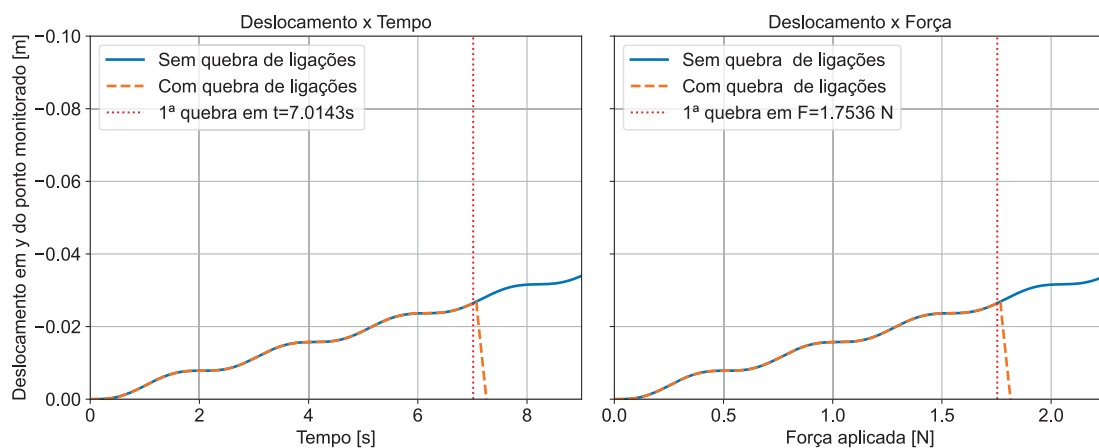


FIGURA 50 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para flexão

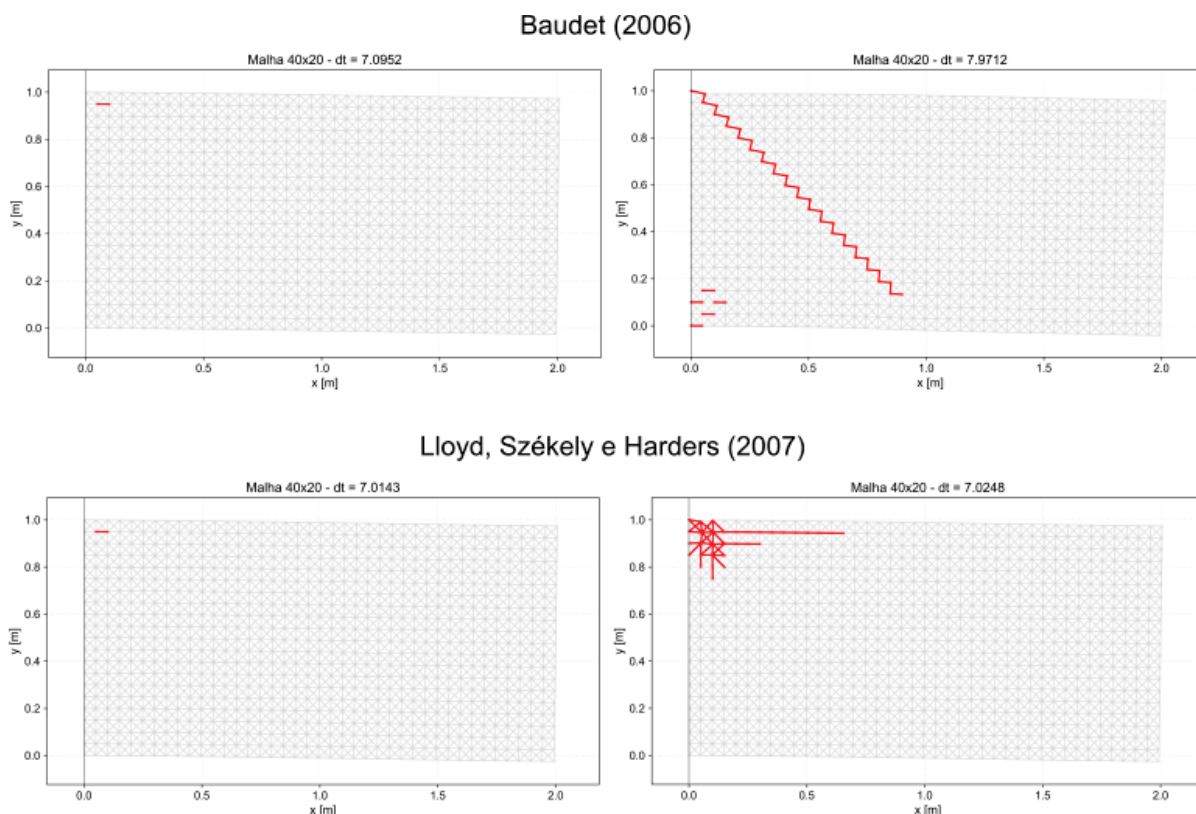


FIGURA 51 – Limite proporcional - Instante inicial e avançado de fissura para flexão

Nos testes de corpos submetidos à flexão, as duas formulações apresentam a fissura iniciando no mesmo local. No entanto, para Lloyd, Székely e Harders (2007), não ocorrem quebras na região comprimida, apenas na tracionada, espalhando-se em direção à extremidade livre e à parte inferior do engaste. Já para Baudet (2006), ocorrem quebras tanto nas regiões mais comprimidas quanto nas mais tracionadas. Após as primeiras fissuras, distribuídas nessas duas áreas, as seguintes surgem todas na diagonal superior, começando na região tracionada e avançando em direção ao centro do corpo.

Por fim, para cisalhamento, os resultados são mostrados nas Figuras 52 e 53, mantendo a mesma metodologia de apresentação adotada para os demais carregamentos.

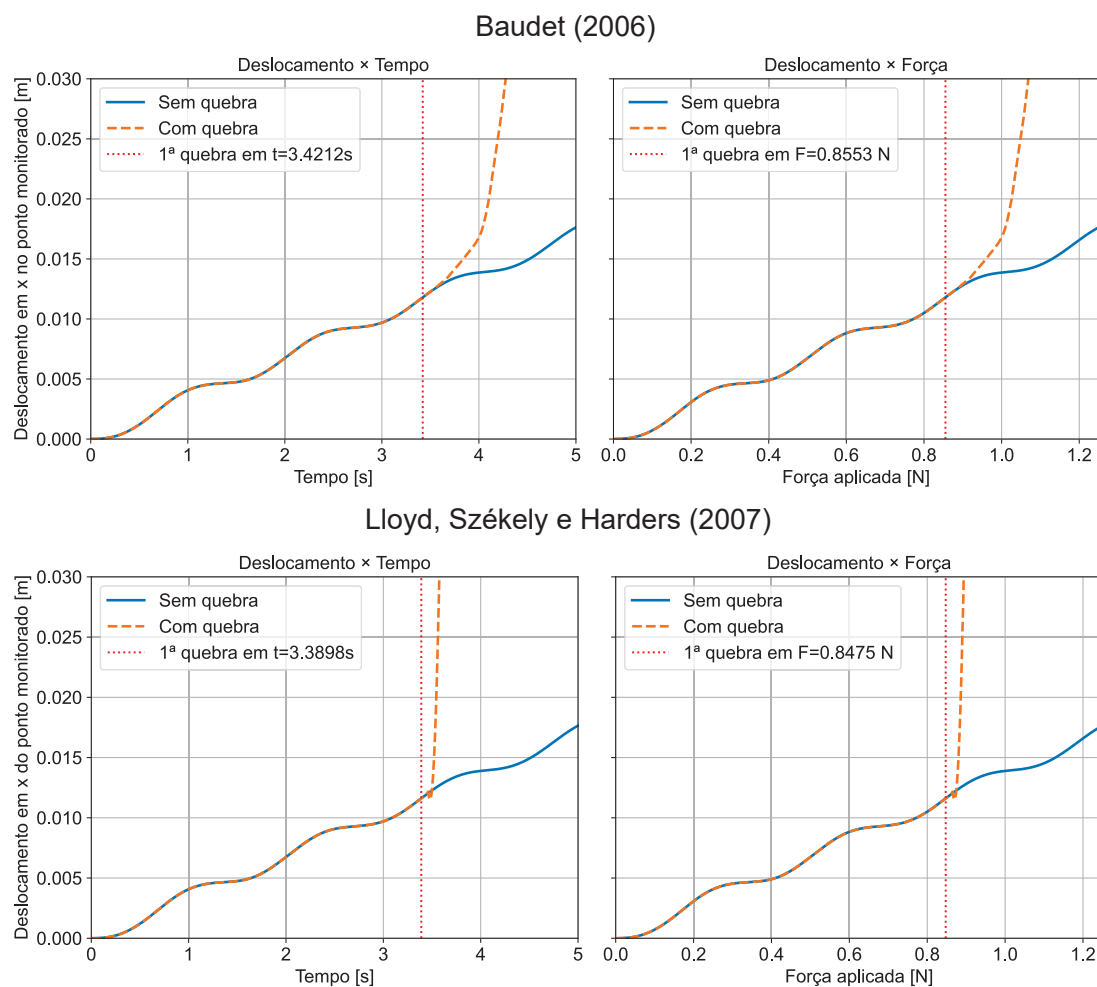
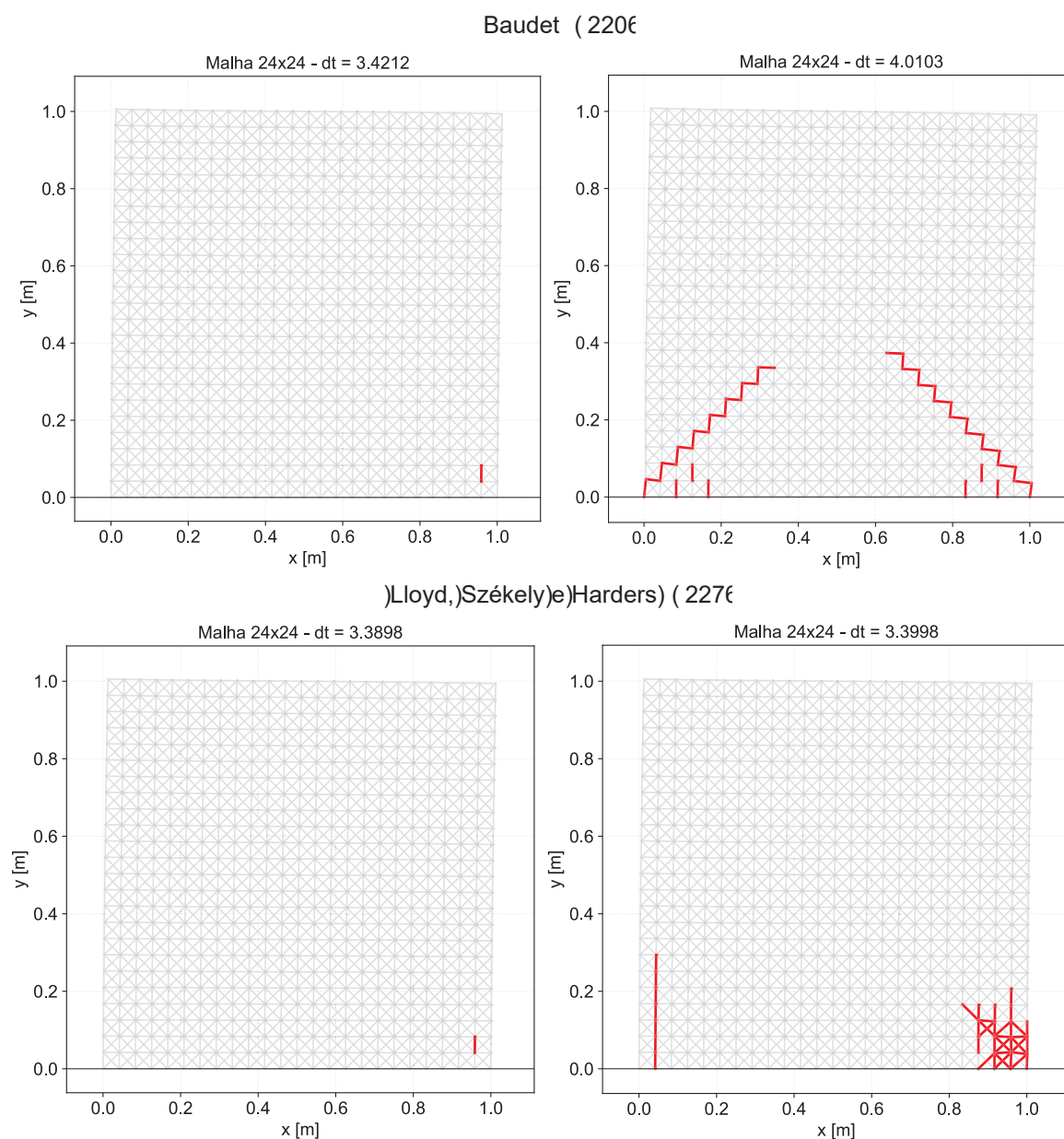


FIGURA 52 – Limite proporcional - Gráfico de deslocamento por tempo e força para cisalhamento

Na Figura 53, observa-se que, na primeira formulação, as fissuras se desenvolvem de forma quase simétrica. Já na segunda, a maioria está concentrada na região mais comprimida, embora ainda ocorram quebras na área tracionada, diferentemente do modelo retangular anterior.



#### 4.6 IMPACTO

O teste de impacto foi realizado conforme metodologia descrita na subseção 3.4.4. O corpo quadrado, rotacionado e elevado, foi simulado utilizando ambas as formulações de equivalência, cujos resultados são apresentados nas Figuras 54 e 55. As imagens ilustram a evolução temporal do fenômeno em oito instantes característicos.



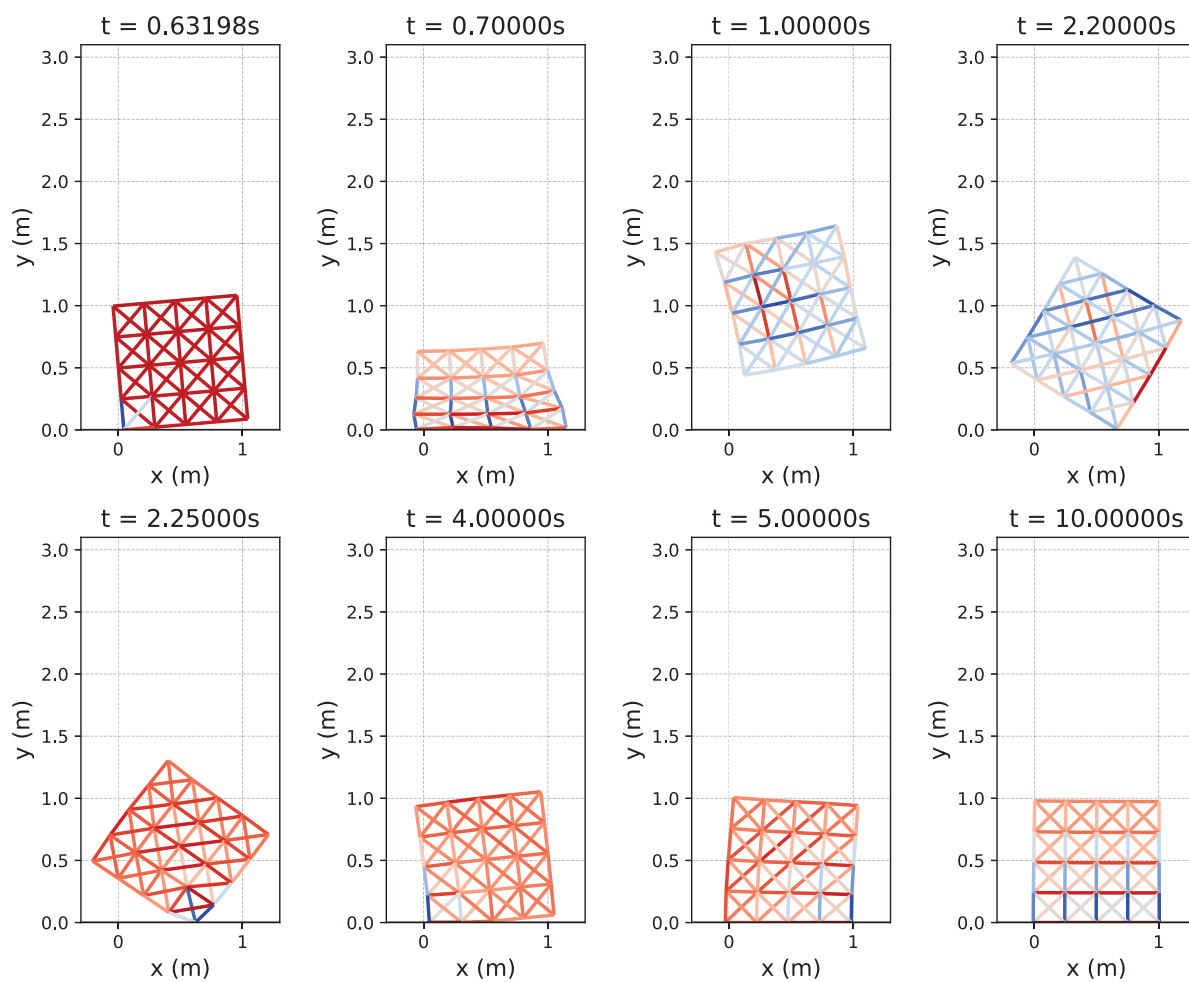


FIGURA 54 – Frames da trajetória dinâmica e impacto - formulação de Baudet (2006).



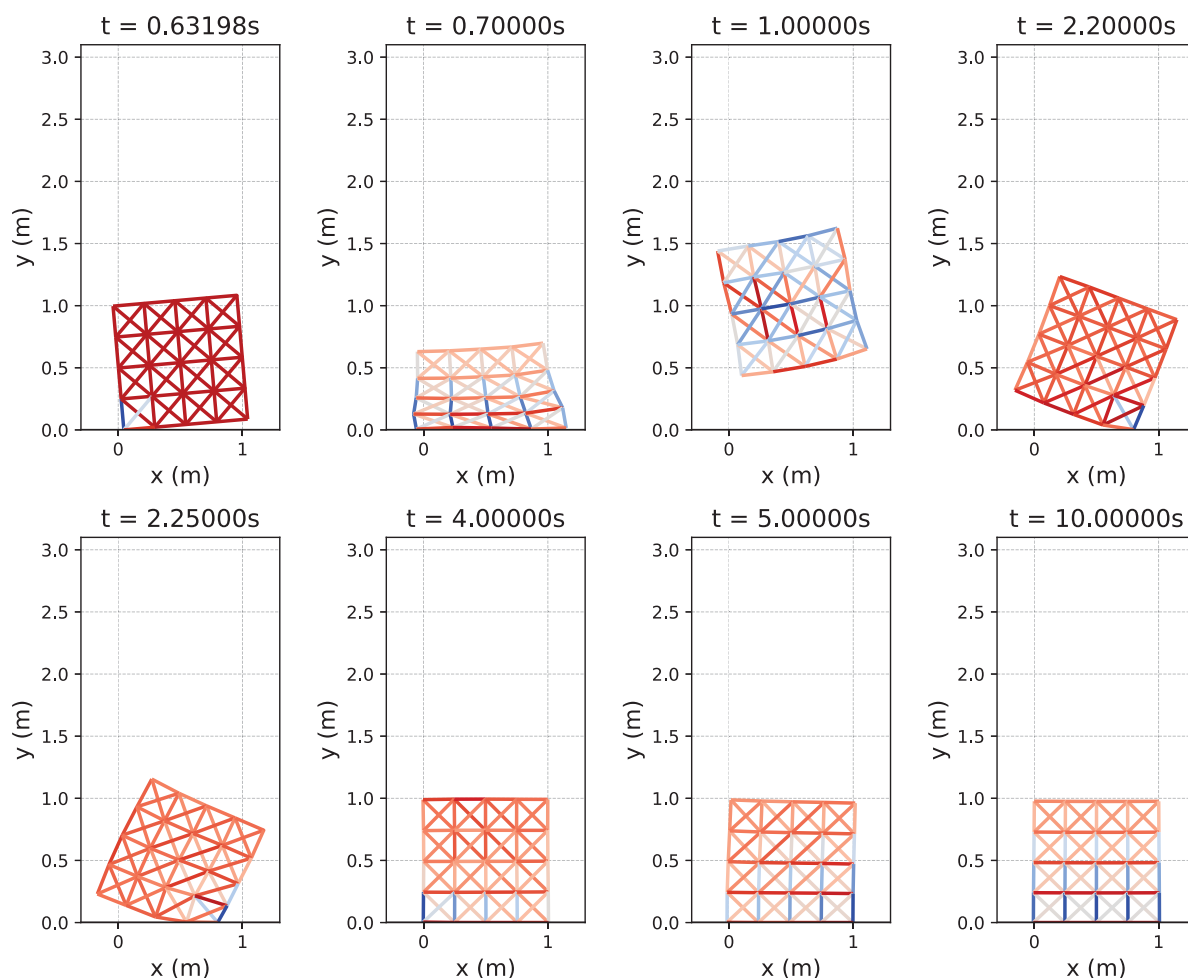


FIGURA 55 – Frames da trajetória dinâmica e impacto - formulação de Lloyd, Székely e Harders (2007).

O primeiro passo de tempo mostrado (0,63198 s) corresponde ao contato inicial com a superfície. O segundo momento captura um momento próximo do pico de deformação máxima antes do corpo iniciar o movimento de retorno, quando a energia elástica armazenada atinge um valor mais elevado. No terceiro *frame*, observa-se o corpo em movimento ascendente, exibindo oscilações dinâmicas características com propagação de ondas de deformação pelo material.

Os passos seguintes, 2,20s e 2,25s, foram incluídos para documentar a segunda interação com a superfície após o impacto inicial. Esta seleção temporal evidencia diferenças comportamentais entre as formulações durante o segundo contato, onde no modelo de Baudet (2006), o tempo 2,20s precede o impacto, enquanto na formulação de Lloyd, Székely e Harders (2007) o contato já está estabelecido neste mesmo instante.

Os intervalos em 4s e 5s representam a fase de oscilação final amortecida do corpo, que mantém contato contínuo com a superfície enquanto dissipa energia cinética até atingir o repouso. Nesta etapa, observam-se movimentos pendulares, da direita pra esquerda, com amplitude decrescente, representando o amortecimento do sistema.

No último *frame* correspondente a 10s, o corpo é exibido em estado de repouso ou muito próximo deste, apresentando uma distribuição simétrica de tensões residuais. Estas tensões persistem devido à ação contínua da gravidade, que comprime as barras verticais próximas à superfície de contato, traciona as barras horizontais inferiores e mantém pressão nos pontos de apoio mais baixos.

#### 4.7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esta seção apresenta a análise e interpretação dos resultados, apresentados anteriormente, obtidos nas simulações.

Nos testes de tração e compressão é possível observar que as barras horizontais ligadas aos pontos de bordo da extremidade livre são as mais solicitadas. Isso ocorre pela menor rigidez e massa nesses pontos, que estão sujeitos a mesma força que todos os outros pontos da extremidade livre.

Visualmente, nota-se que essa distribuição causa uma pequena distorção nessa extremidade, que podem causar erros numéricos. No entanto, para malha de dois elementos, isso não ocorre, uma vez que os únicos dois pontos da extremidade livre recebem a mesma força, tem a mesma massa e mesma rigidez nas ligações conectadas com esses.

Nos testes de tração, os resultados apresentam convergência, embora sugiram que o deslocamento continua aumentando com o refinamento da malha, comportamento comum às duas formulações. Na abordagem de Baudet (2006), os valores convergem para uma solução mais próxima do resultado analítico. Já a de Lloyd, Székely e Harders (2007) tem erro menor que Baudet (2006) na malha inicial (2 elementos), mas nas malhas mais refinadas seu erro fica maior - exceto na malha 32x16, onde os erros das duas se igualam.

Em comparação com o modelo de tração, na compressão é mostrada uma

curva de convergência com inclinação mais acentuada (menos horizontal), indicando que os resultados ainda podem variar com um refinamento adicional da malha, possivelmente aproximando-se ainda mais do valor analítico. Essa inclinação sugere que um maior refinamento da malha seria necessário para alcançar uma solução estável e garantir a convergência completa. No entanto, esse refinamento não foi realizado devido às limitações de tempo de processamento e ao elevado volume de cálculos envolvidos. Vale destacar que, para compressão, os erros foram significativamente inferiores aos observados em malhas equivalentes sob tração.

Os modelos demonstram que a distribuição de tensões na barra apresenta o comportamento teórico esperado onde em condições de tração, as barras horizontais estão submetidas exclusivamente a esforços de tração, enquanto as verticais encontram-se sob compressão. O padrão se inverte no caso de compressão.

Embora a malha menos refinada apresente valores de deslocamento satisfatórios na comparação com os analíticos - com proximidade dos valores obtidos para malha mais refinada -, sugerindo uma boa adequação para modelagem, ela não é capaz de capturar efeitos importantes como a contração ou alargamento da seção transversal (efeito de Poisson). Esse tipo de efeito só é adequadamente capturado com um maior número de elementos no corpo.

Os testes de flexão e cisalhamento avaliaram os deslocamentos obtidos pelo método massa-mola-amortecedor com a solução analítica baseada na teoria de Timoshenko. Para isso, utilizaram-se diferentes configurações do corpo, permitindo variar a contribuição relativa dos efeitos de flexão e cisalhamento no deslocamento total.

No modelo de flexão, ambas as formulações apresentam boa convergência numérica, com diferenças inferiores a 0,1 mm entre os deslocamentos obtidos nas duas malhas mais refinadas. Contudo, mesmo com os resultados convergidos os erros estão em torno de 3% em relação à solução analítica. Essa discrepância pode ser atribuída à magnitude dos deslocamentos, que podem exceder os contemplados pela solução analítica — a qual considera apenas pequenas deformações. Além disso, no modelo numérico, a configuração de equilíbrio é atualizada iterativamente com base na geometria deformada do passo anterior, o que permite considerar efeitos de segunda ordem, como grandes rotações e alterações na orientação dos elementos.

Analogamente, no caso do cisalhamento observa-se uma convergência mais significativa em comparação com os modelos iniciais de esforços axiais. No entanto, os valores de deslocamento obtidos com malhas menos refinadas que as utilizadas para a flexão, convergiram para valores com erros superiores. Destaca-se que, dentre todos os esforços investigados, o cisalhamento foi o único caso em que a formulação proposta por Lloyd, Székely e Harders (2007) apresentou erro final inferior ao do modelo de Baudet (2006).

A distribuição de tensões no cisalhamento apresenta características similares às da flexão, com as máximas trações concentradas nas barras superiores próximas ao engaste para o caso de flexão e nas barras do lado esquerdo para o cisalhamento. Analogamente, as máximas compressões ocorrem nas barras inferiores na flexão e nas barras do lado direito no cisalhamento, todas localizadas na região do engaste. A principal diferença ocorre na região próxima à extremidade livre. Enquanto na flexão as barras próximas à borda apresentam tensões com magnitudes similares, no cisalhamento observam-se valores distintos, comportamento evidenciado pela distribuição contrastante de cores na configuração final das malhas. Este comportamento distinto deve-se à aplicação direta do carregamento na extremidade livre, que resulta em compressão nas barras horizontais à esquerda do eixo central e tração à direita.

A Tabela 13 compara as diferenças nos deslocamentos obtidos entre as duas últimas malhas testadas, para todos os tipos de carregamento e ambas as formulações, e o quanto essa diferença representa percentualmente no valor analítico de referência.

TABELA 13 – Comparação das diferenças entre malhas e representatividade analítica

| Carregamento | Diferença entre últimas malhas (mm) |                     | Relação com o resultado analítico (%) |                     |
|--------------|-------------------------------------|---------------------|---------------------------------------|---------------------|
|              | Baudet (2006)                       | Lloyd et al. (2007) | Baudet (2006)                         | Lloyd et al. (2007) |
| Tração       | 0,320                               | 0,300               | 0,320                                 | 0,300               |
| Compressão   | 0,390                               | 0,390               | 0,390                                 | 0,390               |
| Flexão       | 0,090                               | 0,010               | 0,068                                 | 0,008               |
| Cisalhamento | 0,120                               | 0,090               | 0,086                                 | 0,065               |

Os modelos que apresentam menores valores de deslocamento, flexão e cisalhamento, demonstram melhor convergência, enquanto os demais requereriam um

refinamento adicional de malha para alcançar diferenças próximas a 0,1 mm. Embora se observe variações quanto ao erro final, ambas as formulações exibem padrões de convergência similares, tendendo a valores estacionários.

Para os testes de obtenção de um padrão de fissuração foi observado comportamento distinto entre as duas formulações para todos os esforços, tanto para o tempo da primeira quebra quanto o padrão e localização das ligações rompidas. A primeira ligação quebrada, no entanto, é sempre a mesma nas duas formulações.

Na aplicação de mesmo limite de deformação em todas as ligações, tanto para o teste de tração como para o de compressão, na formulação de Baudet (2006) o rompimento aconteceu próximo ao apoio enquanto que para Lloyd, Székely e Harders (2007) o rompimento foi no entorno das primeiras ligações rompidas. Na situação de limite inversamente proporcional nas ligações o padrão para formulação de Baudet (2006) muda e o rompimento agora é em formato de "V" perto da extremidade livre.

Esse comportamento de quebra próximo da primeira ligação rompida para a formulação de Lloyd, Székely e Harders (2007) está presente em todos os testes. Um dos motivos para esse padrão pode ser a utilização de ligações pré-tensionadas, condição que faz parte da formulação quando o calculo do comprimento inicial de cada ligação é ajustado.

Para os modelos de flexão e cisalhamento os rompimentos foram concentrados nas regiões de maior momento. Em ambas as distribuições de deformação limite, para a flexão, o modelo Baudet (2006) rompeu tanto nas regiões de tração como na de compressão, mas com proporções diferentes. O de Lloyd, Székely e Harders (2007), no entanto, apenas rompeu na região de tração, mesmo tendo mesma deformação limite para tração e compressão.

No corpo quadrado submetido ao esforço de cisalhamento, utilizando a formulação de Baudet (2006), observa-se uma distribuição relativamente uniforme das fissuras por tração e compressão, tendo um padrão quase simétrico quando os limites são distribuídos de forma inversamente proporcional. Utilizando o método de Lloyd, Székely e Harders (2007), em ambas as distribuições, as rupturas tendem a se concentrar nas proximidades da primeira ligação rompida por compressão. No entanto, algumas barras também se rompem na região de tração.

A formulação de Baudet (2006) apresenta um comportamento mais dúctil sob todos os tipos de carregamento quando se utiliza a distribuição uniforme do limite de deformação. No entanto, ao adotar a distribuição inversamente proporcional, esse comportamento dúctil se mantém apenas nos ensaios de flexão e cisalhamento. Por outro lado, o modelo de Lloyd, Székely e Harders (2007) mantém uma resposta semelhante à de um material frágil em todos os ensaios, independentemente da distribuição adotada para o limite de deformação.

Idealmente, a distribuição de limites e formulação que melhor prevê os padrões de fissuração devem ser selecionadas com base em validação experimental. Porém, como limitação deste trabalho foram utilizados limites de tração e compressão iguais, uma suposição feita para simplificar a análise; no entanto, na realidade, os materiais normalmente apresentam diferentes resistências à tração e à compressão, e essa assimetria tem um grande impacto no início e na propagação de falhas.

Os testes realizados também tiveram caráter demonstrativo, evidenciando que o método é capaz de incorporar descontinuidades e continuar operando sem a necessidade de refazer a malha quando essas descontinuidades surgem.

No modelo de queda e impacto com a superfície, não foi possível comparar os resultados com um modelo analítico, como nos casos estáticos anteriores, devido à ausência de formulações que relacionem os parâmetros de amortecimento das ligações com características do contínuo. As formulações adotadas, estabelecem equivalência apenas para a rigidez, mas não para o amortecimento das ligações em relação ao amortecimento real do material. Além disso, utilizam um amortecimento arbitrário, o que é viável em análises estáticas. No entanto, para simulações dinâmicas, a relação correta entre o amortecimento das ligações e o amortecimento do material é tão importante quanto a rigidez para representar adequadamente a resposta a carregamentos dinâmicos.

Durante a interação com a superfície, foram observadas pequenas instabilidades pontuais na atualização da posição dos pontos pós contato, evidenciando que a redução do passo temporal é parâmetro crítico para manter a estabilidade numérica em análises dinâmicas deste tipo, que envolvem acentuadas não-linearidades geométricas e de contato.

O método massa-mola-amortecedor apresenta características promissoras para aplicação em problemas dinâmicos devido à sua formulação baseada em sistemas dinâmicos locais nas ligações. A principal vantagem está na possibilidade de extensão para cenários dinâmicos mais complexos sem necessidade de modificações estruturais no algoritmo principal ou na sua implementação. O principal desafio está na calibração analítica dos parâmetros, que agora deve abranger não apenas a rigidez, mas também o amortecimento.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, compararam-se duas formulações de equivalência baseadas em soluções analíticas para a rigidez das ligações de um rede massa-mola-amortecedor. Um dos desafios para adoção mais ampla deste método é a dificuldade de obter tais parâmetros analiticamente e garantir que representem fielmente o comportamento de um corpo qualquer. A formulação de Baudet (2006) tem aplicação mais ampla que a de Lloyd, Székely e Harders (2007) em termos de variedade de propriedades do material, pois permite simular diferentes valores de coeficiente de Poisson.

O método é de implementação simples, já que utiliza apenas sistemas dinâmicos locais básicos e movimentação de pontos de massa pela lei de Newton. No entanto, a implementação de Baudet (2006) exige a inclusão de forças de correção para o efeito de Poisson, o que torna o processo um pouco menos direto. Já em Lloyd, Székely e Harders (2007), a adaptação da lógica geral da malha de molas resume-se ao cálculo do comprimento de repouso.

Ambas as formulações apresentaram distribuições de tensão equivalentes na peça, alinhadas com o esperado. Também demonstraram tendência de convergência nos resultados de deslocamento e posicionamento do corpo com o refinamento da malha. Para tração e compressão, porém, a convergência foi menos evidente do que em esforços combinados (flexão e cisalhamento), possivelmente devido à magnitude do deslocamento. Apesar da convergência incompleta, o ensaio de compressão registrou erros inferiores a 1%.

Todos os testes em ambas as formulações apresentaram erros menores que 4% em relação ao valor analítico. No entanto, esse não deve ser o único parâmetro para avaliar a validade completa do método, já que não contempla efeitos de Poisson ou deformações causadas por não linearidades geométricas. Para uma validação mais abrangente, o ideal seria a comparação com resultados experimentais, capazes de capturar de forma mais realista o comportamento mecânico.

A aplicação do método da forma como foi utilizado neste trabalho mostrou limitações quanto ao tempo de simulação e custo computacional, o que exigiu o uso



de um material arbitrário para sua avaliação. Para testar materiais reais comuns na engenharia civil, como concreto e aço, seria necessário adotar passos de tempo ainda menores - o que comprometeria o tempo de simulação. Além disso, a alta rigidez das ligações pode levar a instabilidades numéricas: passos de tempo grandes fazem com que pontos de massa se desloquem além dos limites físicos realistas, ultrapassando a posição de outros pontos. Essa sobreposição faz com que o corpo deformado perca sua forma original, invalidando os resultados.

Esses problemas poderiam ser mitigados por meio da paralelização do modelo ou da implementação de forças de repulsão entre as partículas, que evitariam o colapso da simulação. No entanto, essas forças não foram utilizadas por não fazerem parte de nenhuma das abordagens adotadas neste trabalho.

Nos testes para observar o padrão de fissuração, verificou-se que as formulações de Baudet (2006) e Lloyd, Székely e Harders (2007) produzem padrões de ruptura e localizações de falha distintos, influenciados tanto pela formulação quanto pela distribuição do limite de deformação. Enquanto a abordagem de Baudet (2006) apresentou comportamento mais dúctil, especialmente com limites uniformes, a abordagem de Lloyd, Székely e Harders (2007) mostrou resposta mais frágil, com rupturas concentradas próximas à primeira falha. Embora não tenha havido validação experimental, os testes demonstram que o método é capaz de incorporar e propagar descontinuidades durante a simulação, sem a necessidade de refazer a malha, o que reforça seu potencial para estudos exploratórios de padrões de fissuração.

O teste de impacto, ou *drop test*, foi realizado para demonstrar a aplicação do método em sistemas sem condições de contorno definidas. Embora não tenha sido avaliada a equivalência numérica, foi possível observar a interação do corpo com a superfície e a propagação do movimento em ondas através do corpo.

Apesar da ausência de uma formulação de equivalência de amortecimento para a malha quadrangular, a capacidade do método de funcionar com condições de contorno apenas em alguns momentos da simulação representa uma vantagem em relação a métodos mais consolidados, como o método dos elementos finitos que, por definição, resolve problemas de valor de contorno. O método consegue simular a movimentação da malha sem as condições de contorno pela associação do movimento

do corpo rígido associado à deformação. Essa característica justifica o uso atual do método em situações que demandam interação em tempo real com o modelo.

## 6 TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros têm-se:

- Implementação de programação em paralelo para distribuição do processamento computacional, permitindo a utilização de passos de tempo menores e consequentemente a modelagem de materiais reais mais rígidos;
- Desenvolvimento de métodos para determinação do amortecimento real do material em malhas quadrangulares, visando possibilitar a simulação e validação numérica de cenários dinâmicos;
- Extensão da metodologia para modelos tridimensionais, investigando padrões de fissuração nesta configuração.

## REFERÊNCIAS

- AFRA, B. et al. An immersed boundary-lattice Boltzmann method combined with a robust lattice spring model for solving flow–structure interaction problems. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier Inc., v. 55, p. 502–521, mar. 2018. ISSN 0307904X. DOI: 10.1016/j.apm.2017.10.014. Citado 1 vez na página 41.
- ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE**. [S.l.], 2007. ISBN 978-85-7194-741-2. Citado 2 vezes nas páginas 52, 63.
- ARGENTA, Marco André. **Mecânica do Contínuo - Notas de Aula**. [S.l.], 2020. Citado 3 vezes nas páginas 20–23, 34.
- BACHMANN, Hugo et al. **Vibration problems in structures: Practical guidelines**. [S.l.], 1997. Citado 1 vezes nas páginas 32, 33.
- BAUDET, Vincent. **Modélisation et simulation paramétrable d’objets déformables. Application aux traitements des cancers pulmonaires**. 2006. Tese (Doutorado). Disponível em: <<https://theses.hal.science/tel-00279986v1>>. Citado 34 vezes nas páginas 5, 6, 18, 37, 44, 45, 51, 54, 55, 58, 66, 69–71, 75, 76, 80, 81, 84–86, 88, 89, 91, 94, 103, 106–108, 110–112, 114, 115.
- BRAUN, M.; IVÁÑEZ, I.; ARIZA, M. P. A numerical study of progressive damage in unidirectional composite materials using a 2D lattice model. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier Ltd, v. 249, mai. 2021. ISSN 00137944. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107767. Citado 2 vezes nas páginas 17, 40.
- BRELY, Lucas; BOSIA, Federico; PUGNO, Nicola M. A hierarchical lattice spring model to simulate the mechanics of 2-D materials-based composites. **Frontiers in Materials**, Frontiers Media S.A., v. 2, jun. 2015. ISSN 22968016. DOI: 10.3389/fmats.2015.00051. Citado 1 vezes nas páginas 17, 40.
- CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29.
- DA SILVA, Josildo Pereira. **A Data-Driven Approach for Mass-Spring Model Parametrization Based on Continuous Models**. 2015. Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Citado 5 vezes nas páginas 5, 6, 17, 39, 46.

DA SILVA, Josildo Pereira; GIRALDI, Gilson A.; APOLINÁRIO, Antônio L. A new optimization approach for mass-spring models parameterization. **Graphical Models**, Elsevier Inc., v. 81, p. 1–17, set. 2015. ISSN 15240703. DOI: 10.1016/j.gmod.2015.07.001. Citado 2 vez na página 16.

FLEISCHFRESSER, Sergio Augusto. **Uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para a análise de vigas de Timoshenko**. 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná. Citado 1 vez na página 52.

GERIVANI, H.; NAZARI, M. Proposing a lattice spring damper model for simulation of interaction between elastic/ viscoelastic filaments and fluid flow in immersed boundary-lattice Boltzmann framework. **Journal of Molecular Liquids**, Elsevier B.V., v. 296, dez. 2019. ISSN 01677322. DOI: 10.1016/j.molliq.2019.111969. Citado 1 vez na página 41.

GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles P.; SAFKO, John. **Classical Mechanics**. [S.l.]: Pearson, 2011. ISBN 9788131758915. Citado 2 vezes nas páginas 35, 36.

GOLEC, Karolina. **Hybrid 3D Mass Spring System for Soft Tissue Simulation**. 2018. Tese (Doutorado) – Université de Lyon. Disponível em: <<https://theses.hal.science/tel-01761851v2>>. Citado 3 vezes nas páginas 41, 46, 50.

GOULD, Harvey; TOBOCHNIK, Jan; CHRISTIAN, Wolfgang. **An Introduction to Computer Simulation Methods Applications to Physical System**. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 978-85-7605-373-6. Citado 1 vez na página 51.

HOUSE, Donald H; KEYSER, John C. **Foundations of physically based modeling and animation**. [S.l.], 2017. Citado 8 vezes nas páginas 25, 31, 37, 38, 48–50, 57.

JARAMILLO, Andrés; PRIETO, Flavio; BOULANGER, Pierre. Deformable part inspection using a spring-mass system. **CAD Computer Aided Design**, v. 45, n. 8-9, p. 1128–1137, 2013. ISSN 00104485. DOI: 10.1016/j.cad.2013.02.005. Citado 1 vez na página 39.

LI, Qin; ZHAO, Gao Feng; LIAN, Jijian. Further development of the distinct lattice spring model for quasi-brittle crack propagation in concrete and its application in underground engineering. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 92, out. 2019. ISSN 08867798. DOI: 10.1016/j.tust.2019.103061. Citado 2 vezes nas páginas 39, 40.

LI, Yongqiang; ZHOU, Mao et al. A three dimension lattice-spring model with rotational degree of freedom and its application in dynamic crack propagation. **International Journal of Impact Engineering**, Elsevier Ltd, v. 147, jan. 2021. ISSN 0734743X. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2020.103729. Citado 1 vez na página 40.

LLOYD, Bryn A; ZURICH, Eth et al. **Identification of Dynamic Mass Spring Parameters for Deformable Body Simulation**. [S.l.], 2008. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/266296823>>. Citado 1 vez na página 45.

LLOYD, Bryn A.; SZÉKELY, Gábor; HARDERS, Matthias. Identification of spring parameters for deformable object simulation. In: 5. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. [S.l.: s.n.], set. 2007. v. 13, p. 1081–1093. DOI: 10.1109/TVCG.2007.1055. Citado 38 vezes nas páginas 5, 6, 18, 39, 41, 42, 45, 46, 50, 51, 54, 55, 57, 66, 71–73, 77, 78, 82, 83, 86–89, 91, 93, 94, 103, 107, 108, 110–112, 114, 115.

MÜLLER, Matthias et al. Position based dynamics. **Journal of Visual Communication and Image Representation**, v. 18, n. 2, p. 109–118, abr. 2007. ISSN 10473203. DOI: 10.1016/j.jvcir.2007.01.005. Citado 1 vez na página 47.

NAIR, Sudhakar. **Introduction to Continuum Mechanics**. [S.l.], 2009. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22, 35.

NAVARRO, R F. Modelos Viscoelásticos Aplicáveis a Materiais Reais: uma Revisão. v. 12, n. 1, p. 1–20, 2017. ISSN 1809-8797. Disponível em: <[www.ufcg.edu.br](http://www.ufcg.edu.br)>. Citado 2 vezes nas páginas 33, 34.

NIKOLIĆ, Mijo et al. Lattice Element Models and Their Peculiarities. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 25, n. 3, p. 753–784, 2018. DOI: 10.1007/s11831-017-9210-y{"i"}. Disponível em: <<https://hal.utc.fr/hal-01997368>>. Citado 1 vez na página 37.

SANTADE, Fransber. **Análise dinâmica do amortecimento em estruturas compostas com material viscoelástico**. 2013. Tese (Doutorado) – Bauru, São Paulo. Citado 0 vez na página 32.

TIMOSHENKO, Stephen P. **Mecânica dos Sólidos**. [S.l.: s.n.], 1983. Citado 2 vezes nas páginas 52, 53.

TUDRUJ, Sylwester et al. Mass-Spring System (MSS) 3D simulation of a thin flexible membrane with a new model of the elasticity parameters. **Archive of Mechanical Engineering**, Polska Akademia Nauk, v. 70, n. 2, p. 199–218, 2023. ISSN 23001895. DOI: 10.24425/ame.2023.144817. Citado 1 vez na página 41.

VAN GELDER, Allen. Approximate Simulation of Elastic Membranes by Triangulated Spring Meshes. **Journal of Graphics Tools**, Informa UK Limited, v. 3, n. 2, p. 21–41, jan. 1998. ISSN 1086-7651. DOI: 10.1080/10867651.1998.10487490. Citado 3 vezes nas páginas 41, 44.

ZHAO, Gao Feng. Developing a four-dimensional lattice spring model for mechanical responses of solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier B.V., v. 315, p. 881–895, mar. 2017. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2016.11.034. Citado 1 vez na página 16.

ZHAO, Gao Feng; FANG, Jiannong; ZHAO, Jian. A MLS-Based lattice spring model for simulating elasticity of materials. **International Journal of Computational Methods**, v. 9, n. 3, set. 2012. ISSN 02198762. DOI: 10.1142/S0219876212500375. Citado 3 vezes nas páginas 17, 39, 40.