

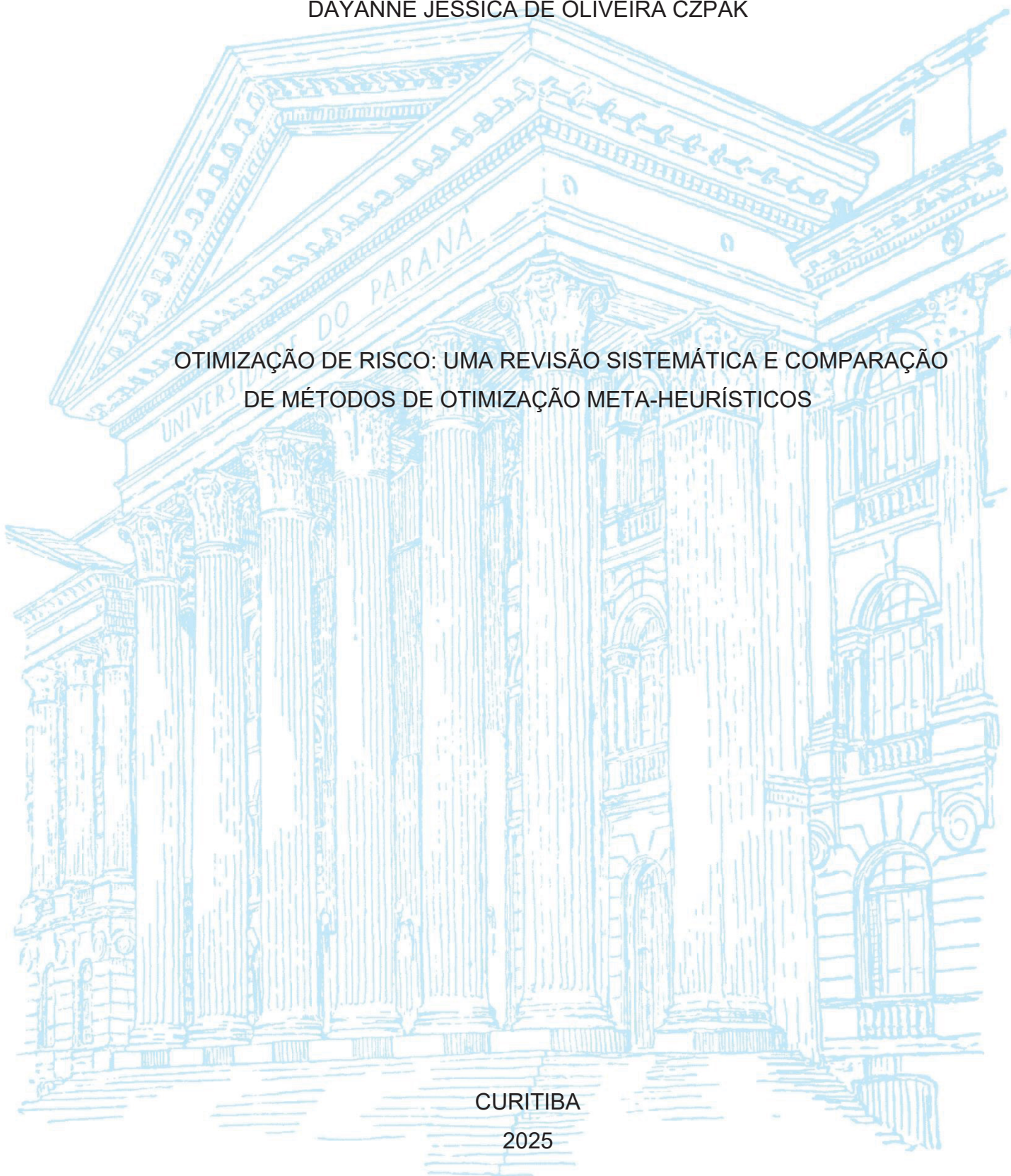
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DAYANNE JÉSSICA DE OLIVEIRA CZPAK

OTIMIZAÇÃO DE RISCO: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA E COMPARAÇÃO
DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO META-HEURÍSTICOS

CURITIBA

2025



DAYANNE JÉSSICA DE OLIVEIRA CZPAK

OTIMIZAÇÃO DE RISCO: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA E COMPARAÇÃO
DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO META-HEURÍSTICOS

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Setor de tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Machado Kroetz

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Czpak, Dayanne Jéssica de Oliveira

Otimização de risco: uma revisão sistemática e comparação de métodos de otimização meta-heurísticos. / Dayanne Jéssica De Oliveira Czpak. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Machado Kroetz

1. Otimização. 2. Meta-heurística. 3. Confiabilidade (Engenharia). I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Kroetz, Henrique Machado. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **DAYANNE JÉSSICA DE OLIVEIRA CZPAK**, intitulada: **Otimização de risco: Uma revisão sistemática e comparação de métodos de otimização meta-heurísticos**, sob orientação do Prof. Dr. HENRIQUE MACHADO KROETZ, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 18 de Agosto de 2025.

Assinatura Eletrônica

18/08/2025 13:26:09.0

HENRIQUE MACHADO KROETZ

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

19/08/2025 15:14:21.0

ROBERTO DALLEONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

19/08/2025 09:03:48.0

ANDRÉ JACOMEL TORII

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO AMERICANA)

Aos meus pais, Fátima e Milton.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná por ter me aceitado, acolhido e possibilitado a realização deste trabalho. Agradeço especialmente ao meu orientador, por ter aceitado me acompanhar nessa jornada. Desde que entrei na Federal, me pego frequentemente refletindo sobre como essa instituição representa uma experiência única, completa e diferente de tudo que vivi antes. São inúmeras as oportunidades que a universidade oferece, difíceis até de listar. E o fato de ser gratuita torna tudo ainda mais inacreditável.

Agradeço também aos amigos que fiz durante o mestrado — com quem pude compartilhar vivências, alegrias e frustrações. A experiência da vida acadêmica, quando já se é adulto e se carrega a rotina e os compromissos de uma vida adulta, traz consigo uma sensação inesperada de juventude, que tive a sorte de reviver. Sou grata aos meus amigos que me incentivaram e acreditaram em mim. O mestrado pode ser um período bastante solitário, mas não precisa ser.

E, por fim, agradeço à minha família: minha mãe, meu pai, Fer e Ebe. Foram eles que estiveram comigo de verdade, me incentivando, me consolando e oferecendo apoio incondicional. O mestrado foi, acima de tudo, uma prova de resiliência. Embora nunca tenha pensado em desistir, só fui capaz de concluir por tê-los ao meu lado.

Ainda que tudo tenha sido mais difícil do que eu imaginava, agradeço a oportunidade e vou guardar essa experiência como uma boa lembrança.

*Aprendendo a ter orgulho dos meus dentes amarelos,
que rangem quando falo, mas se calo, esfarelam.
Ainda servindo para devorar o mundo em pedaços que uma hora eu engulo.
E mesmo com sorrisos mais escassos,
vou digerindo vitórias e fracassos.
— **Dead Fish**, *Dentes Amarelos*, 2024.*

RESUMO

A Otimização de Risco, também chamada de Otimização de Custo sobre o Ciclo de Vida, é uma abordagem de otimização não determinística que difere da RBDO (Otimização Baseada em Confiabilidade) na formulação da função objetivo. Enquanto na RBDO a probabilidade de falha é tratada nas restrições do problema de otimização, na Otimização de Risco a probabilidade de falha é incorporada diretamente na função objetivo. O objetivo da Otimização de Risco é otimizar uma função de custos totais, incluindo o custo de construção, custo de manutenção, custo de descarte e custo esperado de falha, este último calculado como o produto do custo de falha pela probabilidade de falha. Dessa forma, ao otimizar a função objetivo do problema, busca-se uma solução que minimize os custos para um nível aceitável de falha determinado pelo projeto. Embora essa formulação seja robusta, ela enfrenta um desafio comum em simulações numéricas: dependendo do problema e dos métodos de otimização ou confiabilidade utilizados, os custos computacionais podem ser elevados. A partir de uma revisão sistemática da literatura, observou-se que métodos meta-heurísticos de otimização se mostraram bastante adequados para a Otimização de Risco devido à sua capacidade de explorar o espaço de projeto, evitando mínimos locais. Neste estudo, foram selecionados dez métodos de otimização meta-heurísticos para aplicação em problemas de Otimização de Risco: Otimização por Enxame de Partículas, Recozimento Simulado, Otimização por Colônia de Formigas, Algoritmo Genético, Algoritmo de Evolução Diferencial, Algoritmo de Competição Imperialista, Algoritmo dos Vagalumes, Otimização por Ervas Daninhas, Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado. Esses métodos foram aplicados a quatro problemas representativos de Otimização de Risco, com diferentes dimensões, ordens de grandeza da probabilidade de falha, índices de confiabilidade, além de modelos baseados em funções analíticas e elementos finitos, incluindo confiabilidade dependente do tempo. Os resultados obtidos demonstraram a eficácia relativa de cada método meta-heurístico, destacando seu desempenho em diferentes cenários.

Palavras-chave: Otimização de Risco; Otimização baseada em confiabilidade; Otimização de custo sobre o ciclo de vida; Confiabilidade estrutural; Otimização meta-heurística.

ABSTRACT

Risk Optimization, also known as Life-cycle Cost and Risk Optimization, is a nondeterministic optimization approach that differs from Reliability-Based Design Optimization (RBDO) in the formulation of the objective function. While RBDO treats the probability of failure as constraints in the optimization problem, Risk Optimization incorporates the probability of failure directly into the objective function. The goal is to minimize a total cost function related to construction, maintenance, disposal, and expected failure cost, the latter calculated as the product of failure cost by the probability of failure. Thus, in optimizing the objective function, the aim is to find a solution that minimizes costs to an acceptable level of failure as determined by the project. Although this formulation is robust, it faces a common challenge in numerical simulations: depending on the problem and the optimization or reliability methods used, computational costs can be high. From a systematic literature review, it was observed that metaheuristic optimization methods are particularly well-suited for Risk Optimization due to their ability to explore the design space effectively, avoiding local minima. In this study, ten metaheuristic optimization methods were selected for application to Risk Optimization problems: Particle Swarm Optimization, Simulated Annealing, Ant Colony Optimization, Genetic Algorithm, Differential Evolution Algorithm, Imperialist Competitive Algorithm, Firefly Algorithm, Invasive Weed Optimization, Artificial Bee Colony Optimization, and Teaching-Learning-Based Optimization. These methods were applied to four representative Risk Optimization problems, varying its dimensions, orders of magnitude of failure probability, reliability indices, as well as models based on analytical functions and finite elements, including time-dependent reliability. The results demonstrated the relative effectiveness of each metaheuristic method, highlighting their performance across diverse scenarios.

Keywords: Risk Optimization; Reliability-Based Design Optimization; Life-Cycle Cost Optimization; Structural Reliability; Metaheuristic Optimization.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – GRÁFICOS DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS R E S	30
FIGURA 2 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM MÉDIAS PONDERADAS (A) E SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO BRUTO (B) PARA O PROBLEMA R-S.....	31
FIGURA 3 – NÚMERO DE ARTIGOS SOBRE OTIMIZAÇÃO DE RISCO POR DÉCADA	38
FIGURA 4 – MODELO ESTRUTURAL ELÁSTICO	41
FIGURA 5 – CUSTO TOTAL, CUSTO DE FALHA E CUSTO INICIAL VS RISCO ...	44
FIGURA 6 – CUSTO POR LÂMINA DE TURBINA.....	46
FIGURA 7 – COLUNA VERTICAL TUBULAR EM AÇO.....	50
FIGURA 8 – ÁRVORE DE EVENTOS PARA UMA PONTE COM TRÊS INSPEÇÕES.	54
FIGURA 9 – EXEMPLO 1: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.....	119
FIGURA 10 – EXEMPLO 1: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> PARA A FUNÇÃO OBJETIVO.	121
FIGURA 11 – EXEMPLO 1: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.....	124
FIGURA 12 – COLUNA VERTICAL TUBULAR EM AÇO.....	125
FIGURA 13 – EXEMPLO 2: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.....	128
FIGURA 14 – EXEMPLO 2: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> PARA A FUNÇÃO OBJETIVO.	129
FIGURA 15 – EXEMPLO 2: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.....	132
FIGURA 16 – EXEMPLO 3: MODELO DA TRELIÇA.....	134
FIGURA 17 – EXEMPLO 3: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.....	136
FIGURA 18 – EXEMPLO 3: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> DA FUNÇÃO OBJETIVO.....	137
FIGURA 19 – EXEMPLO 3: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.....	140
FIGURA 20 – EXEMPLO 4: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.....	143
FIGURA 21 – EXEMPLO 4: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> PARA A FUNÇÃO OBJETIVO.	144
FIGURA 22 – EXEMPLO 4: GRÁFICO <i>BOXPLOT</i> PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.....	146
FIGURA 23 – POLÍGONOS DOS RESULTADOS.	149

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DO EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE WAMC	30
TABELA 2 – EXEMPLOS DE PERDAS ESTIMADAS DE A) A H) NORMALIZADAS PELO CUSTO INICIAL PARA OS TIPOS DE OCUPAÇÃO DE A) A G)	52
TABELA 3 – EXEMPLO 1: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	118
TABELA 4 – EXEMPLO 1: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO	120
TABELA 5 – EXEMPLO 1: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE.....	122
TABELA 6 – EXEMPLO 1: CUSTO COMPUTACIONAL.....	123
TABELA 7 – EXEMPLO 2: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	127
TABELA 8 – EXEMPLO 2: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO	129
TABELA 9 – EXEMPLO 2: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE.....	131
TABELA 10 – EXEMPLO 2: CUSTO COMPUTACIONAL.....	132
TABELA 11 – EXEMPLO 3: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	135
TABELA 12 – EXEMPLO 3: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO	137
TABELA 13 – EXEMPLO 3: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE.....	138
TABELA 14 – EXEMPLO 3: CUSTO COMPUTACIONAL.....	139
TABELA 15 – EXEMPLO 3: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	142
TABELA 16 – EXEMPLO 4: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO	144
TABELA 17 – EXEMPLO 4: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE.....	145
TABELA 18 – EXEMPLO 4: CUSTO COMPUTACIONAL.....	146
TABELA 19 – COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO ENTRE OS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO META-HEURÍSTICA ANALISADOS	148

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

ABC Abelhas	- Artificial Bee Colony Optimization - Otimização por Colônia Artificial de Abelhas
ACO	- Ant Colony Optimization (Otimização por Colônia de Formigas)
BFGS	- Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Method (Método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)
DDO	- Deterministic Design Optimization (Otimização determinística)
DE	- Differential Evolution (Algoritmo de Evolução Diferencial)
FA	- Firefly Algorithm (Algoritmo dos Vagalumes)
FORM	- First Order Reliability Method (Método de confiabilidade de primeira ordem)
FOSM	- First Order Second Moment (Método de primeira ordem e segundo momento)
GA	- Genetic Algorithm (Algoritmo Genético)
IBGE	- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICA	- Imperialist Competitive Algorithm (Algoritmo de Competição Imperialista)
IWO	- Invasive Weed Optimization (Otimização por Ervas Daninhas)
LCRO	- Life-cycle Cost and Risk Optimization (Otimização de custo sobre o ciclo de vida)

LRFD - Load and Resistance Factor Design (Formato de Projeto de Fator de Carga e Resistência)

NLPQL - Nonlinear Programming by Quadratic Lagrangian (Programação não linear por Lagrangiano quadrático)

PAIC - Pesquisa Anual da Indústria da Construção

PDF - Probability Density Function (Função Densidade de Probabilidades)

PIB - Produto Interno Bruto

PSO - Particle Swarm Optimization (Otimização por Enxame de Partículas)

RBDO - Reliability-Based Design Optimization (Otimização baseada em confiabilidade)

RO - Risk Optimization (Otimização de Risco)

SA - Simulated Annealing (Recozimento Simulado)

SORM - Second Order Reliability Method (Método de confiabilidade de segunda ordem)

SQP - Sequential Quadratic Programming (Programação Sequencial Quadrática)

TLBO - Teaching-Learning-Based Optimization (Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado)

WAMC - Monte Carlo com Médias Ponderadas (Weighted Average Monte Carlo)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 PROBLEMA	18
1.2 OBJETIVOS	19
1.2.1 Objetivo geral	19
1.2.2 Objetivos específicos.....	19
1.3 JUSTIFICATIVA	19
2 REVISÃO DE LITERATURA	23
2.1 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	23
2.1.1 Fontes de incertezas	23
2.1.1.1 Incerteza fenomenológica.....	23
2.1.1.2 Incerteza de decisão.....	23
2.1.1.3 Incerteza de modelo	24
2.1.1.4 Incerteza de previsão	24
2.1.1.5 Incerteza física	24
2.1.1.6 Incerteza estatística.....	24
2.1.1.7 Incerteza humana	25
2.1.2 Estados limites	25
2.1.3 Probabilidade de falha.....	25
2.1.4 Métodos de resolução de problemas de confiabilidade.....	27
2.1.4.1 Simulação de Monte Carlo	28
2.1.4.2 Monte Carlo com médias ponderadas (WAMC - <i>Weighted Average Monte Carlo</i>)	29
2.1.5 Confiabilidade de sistemas.....	31
2.1.6 Confiabilidade dependente do tempo.....	32
2.1.7 Análise de risco	33
2.2 OTIMIZAÇÃO:	34
2.3 OTIMIZAÇÃO DE RISCO (RO – RISK OPTIMIZATION)	35
2.3.1 Revisão Sistemática	37
2.3.1.1 Trabalhos clássicos	38
2.3.1.2 Estado da arte	78
3 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO META-HEURÍSTICOS.....	87

3.1 OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS (PSO – PARTICLE SWARM OPTIMIZATION).....	88
3.2 RECOZIMENTO SIMULADO (SIMULATED ANNEALING).....	90
3.3 OTIMIZAÇÃO POR COLÔNIA DE FORMIGAS (ANT COLONY OPTIMIZATION – ACO) 92	
3.4 ALGORITMO GENÉTICO (GENETIC ALGORITHM – GA).....	97
3.5 ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL (DIFFERENTIAL EVOLUTION – DE) 100	
3.6 ALGORITMO DE COMPETIÇÃO IMPERIALISTA (IMPERIALIST COMPETITIVE ALGORITHM – ICA).....	102
3.7 ALGORITMO DOS VAGALUMES (FIREFLY ALGORITHM – FA).....	104
3.8 OTIMIZAÇÃO POR ERVAS DANINHAS (INVASIVE WEED OPTIMIZATION – IWO) 107	
3.9 OTIMIZAÇÃO POR COLÔNIA ARTIFICIAL DE ABELHAS (ARTIFICIAL BEE COLONY OPTIMIZATION – ABC)	109
3.10 OTIMIZAÇÃO BASEADA NO ENSINO-APRENDIZADO (TEACHING-LEARNING-BASED OPTIMIZATION – TLBO).....	111
4 COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS	115
4.1 ESTRUTURA DE BENCHMARK PARA COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS	115
4.2 EXEMPLO 1: OTIMIZAÇÃO DE RISCO COM UMA FUNÇÃO OBJETIVO NÃO LINEAR, COM RESTRIÇÕES E UMA EQUAÇÃO DE ESTADO LIMITE	117
4.2.1 Formulação	117
4.2.2 Implementação do problema	118
4.2.3 Resultados e discussão.....	119
4.3 EXEMPLO 2: OTIMIZAÇÃO DE RISCO DE UMA COLUNA E CONFIABILIDADE DE SISTEMAS	124
4.3.1 Formulação	124
4.3.2 Implementação do problema	127
4.3.3 Resultados e discussão.....	128
4.4 EXEMPLO 3: OTIMIZAÇÃO DE RISCO DE UMA TRELIÇA MODELADA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS – CASO INDEPENDENTE DO TEMPO... 133	
4.4.1 Formulação	133
4.4.2 Implementação do problema	135
4.4.3 Resultados e discussão.....	136

4.5 EXEMPLO 4: OTIMIZAÇÃO DE RISCO DE UMA TRELIÇA MODELADA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS – CASO DEPENDENTE DO TEMPO	141
4.5.1 Formulação	141
4.5.2 Implementação do problema	142
4.5.3 Resultados e discussão.....	143
4.6 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS	147
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
REFERÊNCIAS.....	153

1 INTRODUÇÃO

A engenharia de estruturas tem como premissa o dimensionamento de estruturas seguras, que respeitem as normas de segurança e desempenho. Para chegar a este objetivo, pode-se recorrer a estruturas superdimensionadas, entretanto isto demanda um alto custo. É desejável, portanto, que se investiguem maneiras de obter estruturas seguras, e ao mesmo tempo otimizadas.

A otimização busca por soluções eficientes e confiáveis, considerando as incertezas existentes no ambiente em que as estruturas serão expostas ao longo de sua vida útil. Nos anos 1960, surgiram os primeiros artigos sobre o que viria a ser chamado de Otimização de Risco (RO – *Risk Optimization*), ou Otimização de Custo sobre o Ciclo de Vida (LCRO - *Life-cycle Cost and Risk Optimization*), um método de otimização de estruturas baseado em confiabilidade. Esse método destaca-se pela otimização de uma função de custos totais da estrutura, considerando não apenas os custos iniciais, mas também podendo considerar os custos de operação, manutenção e falhas durante a vida útil da estrutura.

Ao longo dos anos, pesquisadores e profissionais da área têm se dedicado ao estudo e avanço da Otimização de Risco. Muitos autores têm explorado a importância de considerar a propagação das incertezas ao longo do tempo, a interação dos modos de falha e a otimização das estruturas em função de seus custos, volume ou peso total. Todavia, apesar dos avanços, ainda há muito a ser explorado e aprimorado nesse campo, especialmente em termos de desenvolvimento de abordagens computacionais mais eficientes e ferramentas avançadas de análise.

Quanto à otimização propriamente dita, diversos métodos podem ser implementados. Métodos clássicos, como o método de Newton e o algoritmo Simplex, podem ser utilizados nesse contexto, porém, essas abordagens podem não serem ideais, por apresentarem muitas vezes dificuldades de implementação e risco de estagnação em mínimos locais. Nesse cenário, os métodos de otimização meta-heurística, que são métodos inspirados em fenômenos biológicos, processos evolutivos e comportamentais, fenômenos físicos, além de comportamentos geopolíticos e socioculturais, têm emergido como alternativas promissoras, destacando-se pela ampla exploração do espaço de projeto e pela facilidade de implementação, especialmente em problemas nos quais a determinação analítica das derivadas da função objetivo é complexa ou inviável.

No presente trabalho, será realizada uma revisão sistemática da literatura relacionada à Otimização de Risco, além da comparação de dez métodos de otimização meta-heurística aplicados a problemas de Otimização de Risco. A comparação será realizada por meio de quatro exemplos com diferentes níveis de complexidade, abrangendo problemas de confiabilidade de sistemas, equações de estado limite baseadas no método dos elementos finitos e funções analíticas, além de confiabilidade dependente e independente do tempo.

1.1 PROBLEMA

Existem poucos materiais no meio científico a respeito do tema específico da Otimização de Risco, uma vez que se trata de um método relativamente novo. Em contrapartida, observa-se uma maior tendência ao uso do método de Otimização Baseada em Confiabilidade (RBDO), embora essa abordagem tenha sido considerada muitas vezes menos completa que a Otimização de Risco. Na RBDO, a probabilidade de falha é incorporada como uma restrição do problema, requerendo níveis de segurança pré-definidos. Assim, o equilíbrio entre segurança e desempenho não é explicitamente considerado na formulação. A formulação de Otimização de Risco, por sua vez, considera a probabilidade de falha diretamente na função objetivo e aborda de forma mais abrangente os custos associados à estrutura. A inclusão de múltiplos termos de custo na formulação, especialmente o custo esperado de falha, aumenta consideravelmente o custo computacional do problema.

Diante disso, percebe-se a necessidade de um material de revisão abrangente sobre o tema da Otimização de Risco, acompanhado de uma análise detalhada dos diferentes métodos de otimização que podem ser implementados para tornar a aplicação da Otimização de Risco mais eficiente. Essa necessidade é reforçada pelas dificuldades inerentes ao tema, como o elevado custo computacional e a dificuldade de convergência para o ponto ótimo.

O problema de conhecimento identificado, portanto, é o seguinte: qual é a eficácia comparativa de diferentes métodos de otimização meta-heurística quando aplicados à Otimização de Risco em problemas estruturais?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é analisar e comparar a aplicabilidade de dez métodos de otimização meta-heurística em diferentes problemas de Otimização de Risco na engenharia de estruturas.

1.2.2 Objetivos específicos

- a) Selecionar dez métodos de otimização meta-heurística considerados promissores;
- b) Selecionar ou desenvolver diferentes exemplos de aplicação de Otimização de Risco com níveis variados de complexidade, incluindo:
 - a. Confiabilidade de sistemas,
 - b. Formulação da equação de estado limite baseada no método dos elementos finitos, e
 - c. Confiabilidade dependente do tempo;
- c) Estabelecer uma estrutura de benchmark para comparação dos métodos;
- d) Resolver os exemplos selecionados, aplicando cada método de otimização meta-heurística a cada exemplo desenvolvido;
- e) Realizar a análise dos resultados e concluir sobre a aplicabilidade dos métodos de otimização meta-heurística selecionados em problemas de Otimização de Risco.

1.3 JUSTIFICATIVA

A segurança de estruturas no Brasil é tratada de forma semi-probabilística, através de normas que adotam coeficientes para a elaboração de projetos seguros. Essa maneira de se elaborar um projeto estrutural utiliza esses coeficientes para obter um nível de segurança elevado, sempre que necessário, não abordando explicitamente as incertezas existentes. Com isso, o custo total de execução das estruturas das edificações tende a ser maior do que aquele que seria, de fato,

necessário para o atendimento de seus estados limites com níveis aceitáveis de segurança.

No Brasil, em 2020, as obras e/ou serviços da construção executados movimentaram um capital de 315 bilhões de reais, segundo dados da PAIC (Pesquisa Anual da Indústria da Construção), realizada pelo IBGE. Isto equivale a 4,23% do PIB daquele mesmo ano. De acordo com o artigo de Taranath (2009), o custo da estrutura de determinada edificação equivale a 20-30% do custo total de execução, sendo assim, estima-se que, em 2020, somente as estruturas tiveram um montante de em média 80 bilhões de reais, 1,0% do PIB.

É fácil perceber que a otimização de estruturas leva à economia de uma cadeia de elementos, gerando benefícios também do ponto de vista ambiental e econômico. Por exemplo, a estrutura de uma edificação qualquer em concreto armado, se otimizada, leva a uma economia de material, consequentemente leva à geração de menos resíduos, menos poluentes gerados no transporte desses materiais são emitidos, menos recursos são explorados da natureza, e assim por diante. Além disso, quanto menos robusta a estrutura, o valor gasto com material, transporte, mão-de-obra diminui, e pode até, eventualmente, diminuir o tempo de execução.

Por outra ótica, a Otimização Estrutural a partir do uso da Confiabilidade Estrutural tem sua importância pelo ponto de vista social. Em 29 de junho de 1995, a Coreia do Sul viveu uma tragédia sem precedentes: o desabamento da Loja de Departamentos Sampoong, em que 502 pessoas morreram dentre cerca de 1500 que foram soterradas sob os escombros. O então presidente da loja, Lee Joon, na ocasião da execução do edifício, ordenou que fosse construído um quinto pavimento num projeto que havia sido dimensionado originalmente para sustentar quatro pavimentos. Além disso, Lee ordenou que fossem retirados diversos pilares, visando a exibição de mais produtos, além de diminuir em cerca de 25% a espessura dos pilares restantes. Como resultado dessas alterações, foram observadas grandes rachaduras em toda a estrutura no dia do incidente. Em apenas 20 segundos, o prédio desabou completamente do quinto ao primeiro pavimento (Incheon Today, 2024; Opinion News, 2022). Este desastre é um exemplo claro de como a negligência em se executar estruturas seguras, somente visando o lucro, sem levar em consideração a confiabilidade da estrutura, pode causar danos irreversíveis. Mas não é preciso ir muito longe para se ter exemplos desse tipo de conduta. No Brasil, pode-se citar o exemplo do edifício Pallace II, onde 8 pessoas morreram vítimas de um desabamento

causado pelo mal dimensionamento das estruturas, além de uso de materiais de má qualidade na execução. Essas tragédias são exemplos de como negligenciar a segurança estrutural em prol do lucro pode ter consequências devastadoras. A conscientização sobre a importância da confiabilidade estrutural é fundamental para evitar desastres semelhantes e promover um ambiente construído seguro e confiável.

Nesse sentido, a otimização das estruturas oferece benefícios ambientais, econômicos e sociais, e associada à confiabilidade estrutural, oferece benefícios do ponto de vista da segurança das estruturas. Sendo assim, investir em estratégias modernas de otimização estrutural pode ser vantajoso tanto do ponto de vista da segurança quanto da sustentabilidade e economia na construção.

A Otimização de Risco oferece uma maneira mais precisa de tratar a segurança estrutural. Enquanto as normas tradicionais adotam coeficientes de ponderação para obter um nível aceitável de confiabilidade, podem resultar em projetos excessivamente conservadores e custos de construção mais altos. A Otimização de Risco, por sua vez, considera explicitamente as incertezas associadas às cargas e às resistências estruturais, levando em conta a variabilidade dos fatores envolvidos. Embora a Otimização Baseada em Confiabilidade também seja uma alternativa para lidar com as incertezas em otimização, a Otimização de Risco se mostra um método mais abrangente. A RBDO muitas vezes apenas reduz os custos iniciais, uma vez que não leva em consideração o custo ao longo da vida útil da estrutura. Uma estrutura com um custo inicial menor pode resultar em um custo esperado de falha maior, porém isso não é considerado na formulação de RBDO. Em contraste, a Otimização de Risco permite uma análise mais completa dos possíveis cenários de falha e de seus impactos econômicos e sociais. Com a inclusão do custo esperado de falha na formulação, é possível alcançar um custo ótimo para todo o ciclo de vida da estrutura.

Tratando-se, então, de uma abordagem de otimização estrutural promissora, percebe-se a necessidade de tornar esse tipo de análise mais prática em relação à obtenção da solução ótima e menos custosa computacionalmente. Para isso, são necessários trabalhos que desenvolvam pesquisas a respeito das limitações que o método enfrenta atualmente.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Projetos estruturais são fundamentados na ideia de que uma estrutura deve ser capaz de resistir às solicitações impostas, independentemente de sua natureza. Entretanto, quando o projeto é realizado de forma tradicional, pode não levar em consideração os fenômenos relacionados a incertezas existentes. Identificando essa lacuna, surgiram estudos que exploram o dimensionamento estrutural com base em conceitos de probabilidade, considerando as incertezas envolvidas. A esse campo de estudo, deu-se o nome de Confiabilidade Estrutural.

2.1.1 Fontes de incertezas

Independentemente dos cuidados tomados durante a execução de uma estrutura, é inevitável lidar com as incertezas inerentes ao processo. Essas incertezas podem ser de natureza humana, ambiental ou relacionadas aos materiais utilizados, e muitas delas podem ser controladas de maneira razoável para se obter uma estrutura final resistente e segura. Com a consideração das incertezas, é possível estabelecer modelos mais representativos da estrutura real. De acordo com Melchers e Beck (2018), as incertezas podem ser classificadas como intrínsecas e epistêmicas. As incertezas intrínsecas são aquelas inerentes ao sistema, e, portanto, não podem ser eliminadas, enquanto as incertezas epistêmicas podem ser reduzidas com mais informações ou por meio de uma modelagem mais adequada.

2.1.1.1 Incerteza fenomenológica

A incerteza fenomenológica está relacionada a fenômenos considerados inimagináveis, pois nunca ocorreram antes, tornando-se imprevisíveis para o projetista. Essa incerteza pode ser estimada somente de forma subjetiva, uma vez que só é descoberta após a sua ocorrência.

2.1.1.2 Incerteza de decisão

A incerteza de decisão está ligada à incerteza envolvida na tomada de decisões sobre a ocorrência ou não de um determinado evento. Envolve situações em que é difícil definir de forma clara se um evento ocorreu ou não, como nos estados limites de serviço.

2.1.1.3 Incerteza de modelo

A incerteza de modelo surge das simplificações realizadas ao definir um modelo de análise.

2.1.1.4 Incerteza de previsão

A incerteza de previsão refere-se à estimativa dos estados futuros da estrutura e depende intrinsecamente do conhecimento disponível no momento da análise. À medida que novas informações são obtidas, especialmente durante a fase de construção e quando as estruturas entram em operação, dados reais sobre materiais e desempenho podem ser utilizados para refinar a confiabilidade do sistema, reduzindo a incerteza inicial.

2.1.1.5 Incerteza física

A incerteza física está relacionada à aleatoriedade inerente dos fenômenos naturais que influenciam as variáveis básicas. Vento, chuvas, secas, terremotos, variações nos materiais utilizados e correntes elétricas, entre outros são exemplos desses fenômenos. Esse tipo de incerteza não pode ser completamente eliminado, apenas mitigada.

2.1.1.6 Incerteza estatística

A incerteza estatística abrange a incerteza relacionada à estimativa da distribuição de probabilidades, parâmetros e momentos com base em amostras, englobando a incerteza associada a testes de hipótese e à medição de variáveis, levando em consideração a confiabilidade e precisão dos instrumentos utilizados.

2.1.1.7 Incerteza humana

A incerteza humana, como o próprio nome sugere, está relacionada aos erros ou intervenções causadas pelo ser humano. Esse tipo de incerteza pode ser previsto por meio de métodos empíricos ou reduzida por meio da capacitação adequada dos profissionais envolvidos.

2.1.2 Estados limites

Quando um requisito de serviço ou segurança não é atendido, considera-se que a estrutura está em um estado indesejável, e cada maneira que pode levar a esse estado é chamada de modo de falha. Cada modo de falha dá origem a um estado limite. Os estados limites podem ser divididos em duas categorias principais, de acordo com a ABNT NBR 8681 (2004):

- a) **Estados limites últimos:** São estados que, quando atingidos, requerem a paralisação total do uso da estrutura. Esses estados representam a falha catastrófica da estrutura ou de seus componentes, tornando-a insegura ou inadequada para seu propósito. Como exemplos cita-se colapsos, rupturas e instabilidade estrutural;
- b) **Estados limites de serviço:** São estados que, com sua ocorrência, repetição ou duração, impedem que a estrutura desempenhe conforme o projetado. Esses estados podem causar degradação do desempenho a longo prazo da estrutura. Danos estéticos, como rachaduras ou manchas, e condições que afetam o conforto dos usuários, como vibrações excessivas são exemplos. Essas situações podem não comprometer imediatamente a segurança da estrutura, mas reduzem sua funcionalidade e eficácia ao longo do tempo.

2.1.3 Probabilidade de falha

Para cada estado limite da estrutura, uma equação de estado limite $g(.)$ é escrita em função das variáveis aleatórias X , como descrito na Equação (1):

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad (1)$$

que delimita os domínios de falha e não falha, determinados pelas Equações (2) e (3), respectivamente (Beck, 2019):

$$D_f = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (2)$$

$$D_s = \{x | g(x) > 0\}. \quad (3)$$

Essas equações podem ser expressas como funções do tempo, o que dá origem ao campo da análise de confiabilidade dependente do tempo.

Para o problema fundamental, que é independente do tempo e envolve apenas duas variáveis aleatórias, resistência (R) e solicitação (S), a equação correspondente pode ser expressa como em (4) (Ditlevsen e Madsen, 2007):

$$g(R, S) = R - S = 0. \quad (4)$$

A probabilidade de falha, por sua vez, é dada pela Equação (5):

$$P_f = P[\{\mathbf{X} \in D_f\}] = P[\{g(\mathbf{X}) \leq 0\}]. \quad (5)$$

Para o problema fundamental, essa equação pode ser escrita como em (6) (Melchers e Beck, 2018):

$$P_f = P[\{R - S \leq 0\}]. \quad (6)$$

Para qualquer ponto (r, s) , e para R e S estatisticamente independentes, a probabilidade de falha é dada pela Equação (7) (Melchers e Beck, 2018):

$$P_f = \int_D \int f_{RS}(r, s) dr ds, \quad (7)$$

onde $f_{RS}(r, s)$ é a função conjunta de densidade de probabilidades de R e S . A este problema é dado o nome de Problema fundamental da confiabilidade, também chamado de interferência entre populações.

A probabilidade de falha pode ser calculada através de (8) (Melchers e Beck, 2018):

$$P_f = \int \cdots \int_{g(\mathbf{X}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (8)$$

onde $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ é a função marginal densidade de probabilidades para o vetor $\mathbf{X}$ das variáveis aleatórias.

Quando R e S são variáveis aleatórias normais, de médias μ_R e μ_S e variâncias σ_R^2 e σ_S^2 , respectivamente, a função margem de segurança $M = R - S$ tem média e desvio padrão calculadas pelas Equações (9) e (10), respectivamente (Melchers e Beck, 2018):

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S, \quad (9)$$

$$\sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2. \quad (10)$$

Assim, a probabilidade de falha pode ser obtida pela Equação (11):

$$P_f = P[\{M \leq 0\}] = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta), \quad (11)$$

onde $\beta = \mu_M / \sigma_M$ é conhecido como índice de confiabilidade. Valores mínimos comuns para esse índice em problemas de confiabilidade variam entre 3 e 5.

2.1.4 Métodos de resolução de problemas de confiabilidade

Para solucionar problemas de confiabilidade estrutural, é necessário determinar a função conjunta de densidade de probabilidade $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, e realizar aproximações do domínio de integração. Essa determinação é feita por meio de métodos de transformação e simulação de Monte Carlo.

O método de primeira ordem e segundo momento (FOSM - First Order Second Moment) serve de base para os demais métodos de transformação. Nesse método, a

equação de estado limite é aproximada por uma função linear, e as informações estatísticas utilizadas para construir $f_X(x)$ são limitadas aos momentos de até a segunda ordem, como a média e o desvio padrão.

O método de confiabilidade de primeira ordem (FORM - First Order Reliability Method) também aproxima o domínio de integração por uma função linear. Entretanto, nesse método, todas as informações estatísticas relacionadas às variáveis do problema são consideradas, como as distribuições marginais não normais e os coeficientes de correlação entre pares de variáveis. Já o método de confiabilidade de segunda ordem (SORM - Second Order Reliability Method) segue o mesmo princípio do método de primeira ordem, mas a equação de estado limite é aproximada por uma equação de segundo grau.

Em problemas muito complexos, que envolvem várias variáveis e modos de falha, as soluções analíticas podem se tornar impraticáveis. Nesses casos, são aplicadas simulações numéricas, sendo uma das mais importantes a simulação de Monte Carlo. Essa técnica tem sido utilizada para prever o comportamento a longo prazo de sistemas complexos e é empregada quando nenhum dos outros métodos é capaz de resolver o problema. A limitação nesse caso é computacional, uma vez que problemas com muitas variáveis tendem a ter uma resposta precisa somente quando o número de simulações tende ao infinito.

2.1.4.1 Simulação de Monte Carlo

A Simulação de Monte Carlo é uma técnica utilizada em confiabilidade para determinar a probabilidade de falha, a partir da geração aleatória de um grande número de amostras das variáveis aleatórias no espaço de projeto. Utilizando as equações de estado limite, verifica-se quais dessas amostras estão no domínio de falha, permitindo a estimativa da probabilidade de falha do sistema ou componente analisado.

Para cada variável aleatória X_i , amostras aleatórias $\hat{x}_i$ são geradas, resultando em valores correspondentes para a equação de estado limite $g(\hat{x})$. À medida que o número de amostras tende ao infinito, constrói-se numericamente a distribuição de g . A probabilidade de falha através da simulação de Monte Carlo pode ser calculada usando a Equação (12) (Melchers e Beck, 2018):

$$P_f \approx \frac{n(g(\hat{x}_i) \leq 0)}{N}, \quad (12)$$

onde $n(g(\hat{x}_i) \leq 0)$ representa o número de amostras n que se encontram na região de falha e N corresponde ao número total de amostras geradas. Assim, quanto maior o número de amostras N geradas, maior a precisão no cálculo de P_f .

2.1.4.2 Monte Carlo com médias ponderadas (WAMC - *Weighted Average Monte Carlo*)

O método de Monte Carlo com médias ponderadas (WAMC) é um método para o cálculo da confiabilidade introduzido por Rashki, Miri e Azhdary Moghaddam (2012), baseado na simulação de Monte Carlo. Este método permite calcular a probabilidade de falha e determinar o que os autores chamaram de *Most Probable Point* (MPP), o ponto na equação de estado limite mais provável de falhar.

Os passos do método são (Rashki, Miri e Azhdary Moghaddam, 2012):

- 1) Selecionar um intervalo apropriado para geração de amostras para cada variável, baseado nas Funções Densidade de Probabilidades das Variáveis Aleatórias;
- 2) Gerar amostras aleatórias para cada variável, utilizando uma distribuição uniforme no intervalo selecionado;
- 3) Aplicar pesos nas amostras geradas, usando as PDF's de cada variável, através da Equação (13):

$$W_i = \prod_{j=1}^s f_j(i), \quad (13)$$

onde W_i é o peso da do ponto amostral i , s é o número de variáveis aleatórias total e f_j é a PDF da variável j .

- 4) Encontrar o ponto com o maior peso na região de falha. Este ponto é o *Most Probable Point*;
- 5) Calcular a probabilidade de falha através da Equação (14):

$$P_f = \frac{\sum_{i=1}^N I \cdot W_i}{\sum_{i=1}^N W_i}, \quad (14)$$

sendo I um índice que vale 1 para amostras localizadas dentro da região de falha e 0 para amostras localizadas fora da região de falha.

Considerando um problema simples do tipo $g = R - S$, onde as variáveis aleatórias são normais e dadas pelos momentos listados na TABELA 1:

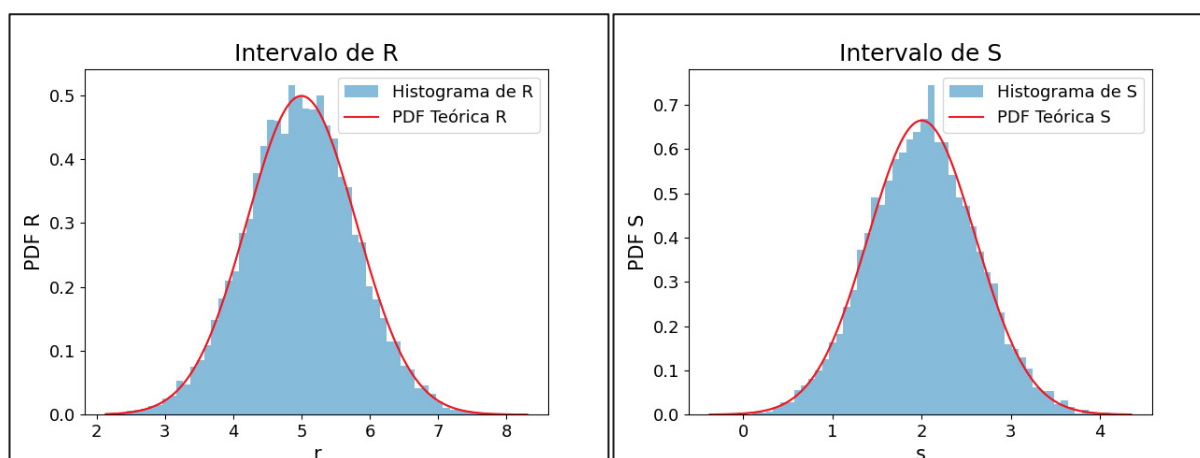
TABELA 1 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DO EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE WAMC

Variáveis aleatórias	Média	Desvio padrão
R	5,0	0,8
S	2,0	0,6

FONTE: A autora (2025).

A FIGURA 1 mostra os gráficos das Funções densidade de probabilidades das variáveis aleatórias R e S .

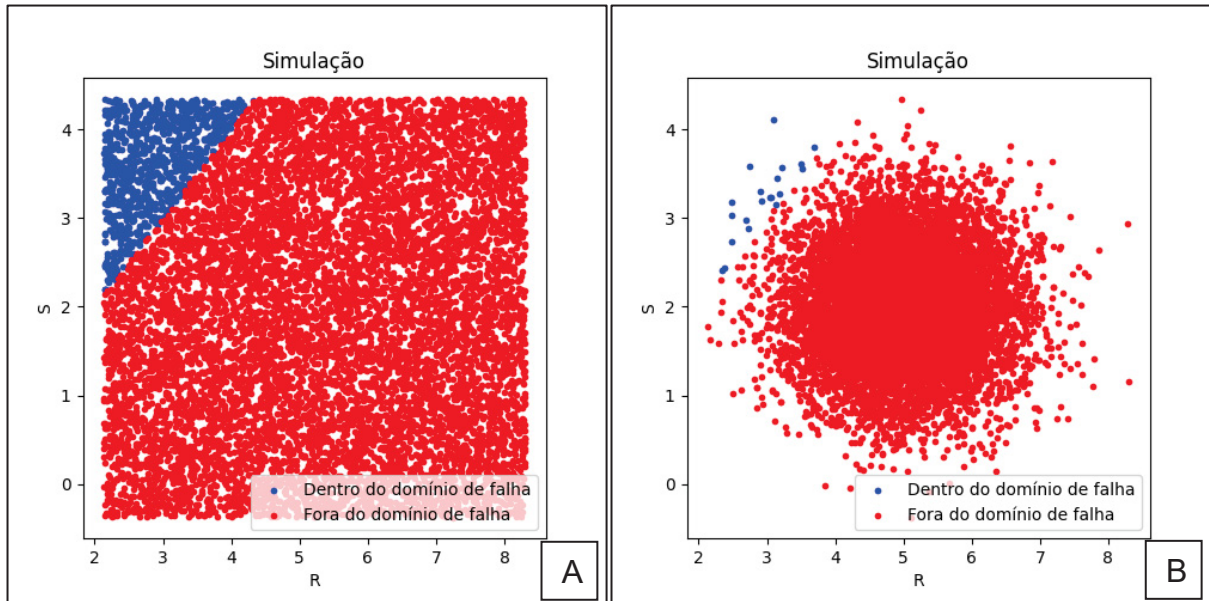
FIGURA 1 – GRÁFICOS DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADES DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS R E S



FONTE: A autora (2025).

A partir das PDF's das variáveis aleatórias, determinou-se que os valores máximo e mínimo de R são 8,31 e 2,13, respectivamente. Os valores máximo e mínimo de S são 4,35 e -0,38, respectivamente. Com esses dados, foi gerado o gráfico das distribuições das amostras de R e S de maneira uniforme, como orienta o método, utilizando 10.000 amostras, conforme FIGURA 2 (A). É mostrado também, na FIGURA 2 (B), o gráfico da simulação de Monte Carlo bruta, com o mesmo número de amostras.

FIGURA 2 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM MÉDIAS PONDERADAS (A) E SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO BRUTO (B) PARA O PROBLEMA R-S



FONTE: A autora (2025).

É possível verificar pela FIGURA 2 (A) que o método WAMC permite uma representação bastante precisa do domínio de falha com um número reduzido de amostras, quando comparado à simulação de Monte Carlo bruta apresentada na FIGURA 2 (B). Com o uso do WAMC, obteve-se uma probabilidade de falha de $P_f = 0,00127$, enquanto com a simulação de Monte Carlo bruta calculou-se um valor de $P_f = 0,00200$. Para atingir um nível de precisão equivalente ao do WAMC, a simulação de Monte Carlo convencional exigiu 30.000 amostras, resultando no mesmo valor de $P_f = 0,00127$.

2.1.5 Confiabilidade de sistemas

Quando sistemas estruturais apresentam múltiplos modos de falha ou são compostos por diversos componentes, a análise de confiabilidade passa a ser tratada como confiabilidade de sistemas. Seja $\mathbf{X}$ o vetor das variáveis aleatórias e $\mathbf{d}$ o vetor das variáveis de projeto, o domínio de falha do sistema pode ser escrito conforme Equação (15) (Beck, Tessari e Kroetz, 2019):

$$\Omega_f(\mathbf{d}) = \{\mathbf{x} \mid \cup_k \cap_{i \in C_k} g_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0\}, \quad (15)$$

sendo $\Omega_f(\mathbf{d})$ o domínio de falha do sistema, C_k conjunto de índices dos componentes pertencentes ao k -ésimo *cut-set* mínimo, isto é, subconjuntos de componentes cuja falha simultânea implica a falha do sistema e $g_i(\mathbf{d}, \mathbf{X})$ as equações de estado limite do sistema. Assim, a probabilidade de falha do sistema é expressa pela Equação (16) (Beck, Tessari e Kroetz, 2019):

$$P_{f,sis} = P[\mathbf{X} \in \Omega_f] = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (16)$$

onde $P_{f,sis}$ corresponde à probabilidade de falha do sistema e $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ à função densidade de probabilidades conjunta do vetor $\mathbf{X}$.

2.1.6 Confiabilidade dependente do tempo

Certos fenômenos em engenharia estrutural apresentam variação ao longo do tempo, como é o caso de cargas de vento, cargas móveis e espessura de materiais sujeitos à corrosão. Para representar matematicamente esse comportamento variável, utiliza-se o conceito de campo aleatório. Um campo aleatório é definido como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um ou mais parâmetros — tipicamente, o tempo, o espaço, ou ambos. Quando o campo aleatório é indexado apenas pelo tempo, denotado por $X(\omega, t)$, ele é chamado de processo estocástico, em que ω é um evento aleatório no espaço amostral e t é o tempo.

Dessa forma, em problemas estruturais sujeitos à variabilidade temporal de ações ou propriedades dos materiais, é fundamental avaliar a probabilidade de falha da estrutura em qualquer instante dentro de um intervalo de tempo, e não apenas em um momento específico. Para esse caso, adota-se uma função de estado limite dependente do tempo $g(\mathbf{d}, t, \mathbf{X}(t, \omega))$. O domínio de falha do sistema em função do tempo é expresso na Equação (17) (Kroetz et. al., 2020):

$$D_f(\mathbf{d}, t) = \{\mathbf{d}, \mathbf{X}(t, \omega) | g(\mathbf{d}, t, \mathbf{X}(t, \omega)) \leq 0\}. \quad (17)$$

Assim, é possível calcular a probabilidade de falha acumulada $P_{fi}(\mathbf{d}; t_1, t_2)$, ou seja, a probabilidade de que ocorra ao menos uma falha dentro do intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, dada pela Equação (18).

$$P_{fi}(\mathbf{d}; t_1, t_2) = P[\exists \tau \in [t_1, t_2] | g(\mathbf{d}, \tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) \leq 0], \quad (18)$$

Em que τ representa um instante específico dentro do intervalo considerado.

2.1.7 Análise de risco

O risco no estudo de confiabilidade é o produto da probabilidade de ocorrência de um evento E por uma medida da gravidade das consequências (Faber, 2006). Na análise de risco de estruturas, essas consequências podem ser representadas por meio de uma função de custo $C[E]$. Os eventos, por sua vez, estão associados a eventos indesejáveis, ou seja, eventos de falha.

De acordo com Drake e Thurston (1993), a gravidade do evento pode ser de três tipos:

- a) **Evento minoritário**: impacto inicialmente limitado à área do local do evento;
- b) **Evento sério**: pode causar lesões sérias e morte e/ou danos materiais;
- c) **Evento grave**: cinco ou dez vezes maior que um evento sério.

Já os tipos de probabilidade de ocorrência do evento são descritos conforme o seguinte:

- a) **Baixa**: 10^{-4} falhas por ano;
- b) **Moderada**: entre 10^{-4} e 10^{-2} falhas por ano;
- c) **Alta**: acima de 10^{-2} falhas por ano.

Quanto aos custos de um sistema que apresenta risco de falha, Gomes e Beck (2013) identificam cinco principais categorias: custo de construção, custo de operação, custo de inspeção e manutenção, custo de descarte e custo esperado de

falha. O custo esperado de falha é calculado pelo produto do custo de falha pela probabilidade de falha.

2.2 OTIMIZAÇÃO:

A otimização é o processo de alcançar o resultado mais favorável dentro de condições específicas. Em contextos práticos, onde o esforço exigido ou o benefício almejado podem ser representados como uma função de variáveis específicas, a otimização é definida como a busca pelas condições que resultam no valor máximo ou mínimo dessa função (Rao, 2009). Não existe somente um método disponível para resolução de problemas de otimização de forma eficiente, sendo que cada método pode ser aplicado na situação que mais convém.

Os primeiros desenvolvimentos dos métodos de otimização remontam ao século XVI, com as contribuições de Newton e Leibnitz para o cálculo diferencial. Lagrange desenvolveu o primeiro método de otimização para problemas considerando restrições, enquanto Bernoulli, Euler, Weiertrass e Cauchy também fizeram grandes contribuições nessa área (Rao, 2009). Entretanto, foi a partir do século XX, com o advento dos computadores modernos, que ocorreu um grande avanço na área de otimização, permitindo a implementação de métodos numéricos de otimização.

A formulação de um problema de otimização envolve a definição de uma função objetivo $f(\cdot)$, que representa aquilo que se deseja minimizar, por exemplo, o custo de uma estrutura ou o peso de uma peça. Além disso, podem existir restrições, que são condições que precisam ser obedecidas para que a solução encontrada seja considerada viável do ponto de vista técnico, econômico ou de segurança. A formulação matemática geral desse tipo de problema é apresentada na Equação (19):

$$\begin{aligned} \text{Encontre } \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} & \text{ que minimiza } f(\mathbf{d}) \\ \text{Sujeito a: } & h_j(\mathbf{d}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & l_j(\mathbf{d}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \tag{19}$$

onde $\mathbf{d}$ é o vetor n -dimensional chamado vetor de projeto, que contém as variáveis de projeto do problema de minimização e $h_j(\mathbf{d})$ e $l_j(\mathbf{d})$ são as restrições de desigualdade

e igualdade, respectivamente. É importante observar que nem todo problema de otimização apresenta restrições associadas. Em determinadas situações, o objetivo é unicamente determinar os melhores valores possíveis para as variáveis de projeto, sem a necessidade de atender a condições adicionais.

No campo de engenharia de estruturas, existe a Otimização Determinística (*Deterministic Design Optimization* - DDO), que visa formular problemas de otimização sem considerar diretamente as incertezas, mas sim incorporando coeficientes de ponderação para simular essas incertezas de forma indireta. Entretanto, de acordo com Kroetz (2019), essa abordagem pode acarretar vários problemas. Por exemplo, ao otimizar uma estrutura hiperestática, é difícil levar em consideração a redistribuição de esforços quando ocorre a perda do primeiro grau de hiperstaticidade. Isso pode resultar na negligência das dimensões de elementos estruturais que desempenham uma função secundária na estrutura íntegra, mas que são importantes para mitigar o colapso progressivo. Além disso, essa abordagem não considera a avaliação da probabilidade de falha da estrutura, presumindo-se que a consideração dos coeficientes parciais garante a segurança.

A Otimização de Risco é mais eficiente nesse aspecto, uma vez que leva em conta os diversos modos de falha da estrutura. Porém, mesmo sendo um tema de crescente interesse, resolver problemas de RO de forma eficiente ainda é uma tarefa desafiadora, principalmente devido à elevada complexidade computacional envolvida. Essa complexidade decorre do acoplamento entre a análise de confiabilidade e de otimização, o que resulta em elevados custos computacionais (Carlton et al., 2022). Assim, ainda há espaço para avanços que visem reduzir esse custo e tornar a abordagem mais viável.

2.3 OTIMIZAÇÃO DE RISCO (RO – RISK OPTIMIZATION)

A abordagem do custo total esperado de uma estrutura não pode ser simplista. Embora seja razoável pensar que estruturas menos robustas resultem em custos menores, isso só é válido em relação aos custos iniciais. Quando ampliamos essa análise para o longo prazo, é necessário levar em consideração os custos de operação, manutenção e falhas. Nesse contexto, a Otimização de Risco surge como uma abordagem que considera diferentes termos de custo, associados a diferentes

fases de vida da estrutura. A função objetivo do problema de RO é escrita conforme Equação (20):

$$C_T(\mathbf{d}) = C_C(\mathbf{d}) + C_O(\mathbf{d}) + C_{I\&M}(\mathbf{d}) + C_D(\mathbf{d}) + C_{EF}(\mathbf{d}), \quad (20)$$

onde C_I se refere aos custos iniciais, C_O aos custos de operação, $C_{I\&M}$ aos custos de inspeção e manutenção, C_D aos custos de descarte e C_{EF} aos custos esperados de falha. O último é dado por (21) (Kroetz, 2019):

$$C_{EF} = \sum_{j=1}^{nls} P_{f_j} C_{f_j}, \quad (21)$$

sendo $j = \{1, 2, \dots, nls\}$ o estado limite associado à probabilidade de falha P_{f_j} e ao custo de falha C_{f_j} .

O problema pode ser escrito em termos das restrições, tanto nas variáveis de projeto, quanto nas probabilidades de falha, de acordo com a Equação (22):

$$\mathbf{d}^* = \arg \min \left\{ C_T(\mathbf{d}) \mid P_{f_j} \leq \overline{P_{f_j}} \right\}, \quad j = \{1, 2, \dots, nls\}, \mathbf{d} \in \mathbb{D}. \quad (22)$$

Essa formulação permite concluir que uma diminuição no peso da estrutura tende a diminuir seus custos iniciais, porém pode aumentar os custos esperados de falha, e vice-versa. É importante que esses custos sejam trazidos para o valor presente, uma vez que o ciclo de vida de uma estrutura se estende por vários anos e a economia varia ao longo do tempo. Dessa maneira, uma formulação completa do problema de Otimização de Risco é dada pela Equação (23) (Kroetz, 2019):

$$\mathbf{d}^* = \arg \min \left\{ C_I(\mathbf{d}) + C_O(\mathbf{d}) + C_{I\&M}(\mathbf{d}) + \sum_{j=1}^{nls} \sum_{n=1}^T \frac{P_{fcjn}(\mathbf{d}) C_{fjn}(\mathbf{d})}{(1 + \eta)^n} \mid P_{f_j} \leq \overline{P_{f_j}} \right\}, \quad (23)$$

$$j = \{1, 2, \dots, nls\}, \mathbf{d} \in \mathbb{D},$$

em que P_{fcjn} corresponde à probabilidade de falha acumulada, C_{fjn} corresponde ao custo de falha do j -ésimo estado limite no período n , T é o número de períodos considerados e η é a taxa financeira.

2.3.1 Revisão Sistemática

Foi realizada uma revisão sistemática da literatura relacionada à Otimização de Risco, com base em uma simplificação do método *Methodi Ordinatio*, proposto por Pagani, Kovalski e Resende (2015). As etapas previstas no método são descritas a seguir:

- 1) Definição da intenção da pesquisa;
- 2) Pesquisa exploratória preliminar por meio de palavras-chave em bases de dados;
- 3) Definição e combinação de palavras-chave e bases de dados;
- 4) Realização da pesquisa definitiva nas bases selecionadas;
- 5) Aplicação de filtros para exclusão de artigos duplicados ou que não tratam diretamente do tema;
- 6) Identificação do fator de impacto, ano de publicação e número de citações dos artigos;
- 7) Ordenação dos artigos com base na equação *InOrdinatio*;
- 8) Obtenção dos artigos completos;
- 9) Leitura e análise final dos artigos selecionados.

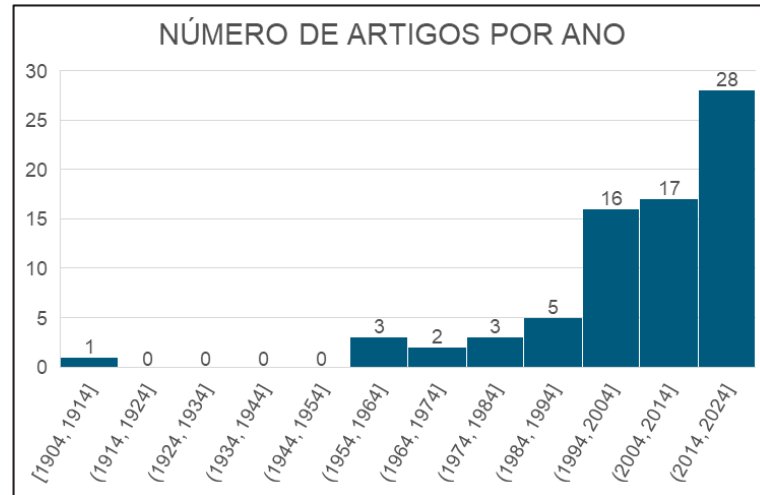
Neste trabalho, foram utilizados apenas os passos 1, 2, 3, 4, 5, 8 e 9. Optou-se por não aplicar a classificação por fator de impacto nem a ordenação pela equação *InOrdinatio*. Em vez disso, foi realizada a leitura e análise sistemática de todos os artigos selecionados nas etapas iniciais.

As bases de dados consultadas foram: Web of Science, Science Direct e SciELO. A busca inicial por palavras-chave nessas bases resultou em um total de 4.253 artigos. Após o processo de filtragem, com a seleção de apenas aqueles efetivamente relacionados à Otimização baseada em Confiabilidade, foram identificados 124 artigos para leitura.

A partir da leitura integral desses 124 artigos, verificou-se que 75 abordavam diretamente a Otimização de Risco. Alguns dos artigos, embora mantidos após a filtragem inicial, tratavam de temas correlatos, como a RBDO, mas não abordavam diretamente a Otimização de Risco.

A FIGURA 3 apresenta a distribuição dos artigos identificados por período de 10 anos.

FIGURA 3 – NÚMERO DE ARTIGOS SOBRE OTIMIZAÇÃO DE RISCO POR DÉCADA



FONTE: A autora (2025).

Observa-se que, dos 75 artigos identificados, 45 foram publicados nos últimos 21 anos (de 2004 a 2025), o que evidencia um crescimento significativo do interesse pela temática em comparação com décadas anteriores. Esse fato ressalta a necessidade de um material de revisão atualizado.

Na sequência, serão apresentados os principais conceitos e abordagens presentes nos artigos selecionados, tanto em publicações mais antigas quanto no estado da arte.

2.3.1.1 Trabalhos clássicos

As primeiras ideias sobre o tema de Otimização de Risco remontam ao início do século XX. Um dos pioneiros nesse campo foi Michell (1904), que desenvolveu equações para determinar a quantidade mínima de material necessário para que uma estrutura do tipo *wood-frame* resista às máximas tensões de tração e compressão impostas nos tirantes e montantes da estrutura. O menor volume de material necessário é dado pela Equação (24) (Michell, 1904):

$$\sum l_p \frac{T_p}{T_{t,max}} + \sum l_q \frac{E_q}{T_{c,max}} = V, \quad (24)$$

sendo T_p a tensão em um tirante de comprimento l_p , E_q o empuxo em um montante de comprimento l_q , $T_{t,max}$ a maior tensão de tração possível a que o material é sujeito e $T_{c,max}$ a maior tensão de compressão possível a que o material está sujeito.

O autor utiliza o princípio dos trabalhos virtuais para provar que, numa estrutura qualquer de *wood-frames* sujeitos às mesmas forças aplicadas em cada um deles, é possível se obter o volume mínimo quando todas as barras sofrem aumentos proporcionais nos valores de suas deformações, em relação às mudanças de comprimento de qualquer elemento no espaço. Se a deformação afetar o espaço infinitamente em todas as direções, o volume do quadro será mínimo em comparação com outros quadros; caso contrário, será mínimo apenas em relação aos quadros dentro do mesmo limite finito.

Hilton e Feigen (1960) fazem uma discussão sobre a aplicação da otimização na engenharia aeronáutica, amplamente utilizada na área para encontrar estruturas ideais em termos de relação peso-resistência, crucial para o setor. Eles também introduzem uma nova abordagem, o uso da confiabilidade, que estava se tornando relevante na época, especialmente na área de mísseis. Os autores propõem integrar esses dois conceitos e buscar uma solução otimizada para o peso e a segurança da aeronave, visando minimizar os custos, mantendo um nível de confiabilidade considerado adequado.

Eles desenvolvem equações para calcular a probabilidade de falha de uma estrutura composta por r elementos, cada um com diferentes cargas, materiais, geometrias e condições. Essas equações são utilizadas como restrições para determinar um peso mínimo apropriado para a estrutura, com otimização realizada através do Método dos Multiplicadores de Lagrange. Os carregamentos e as tensões de falha são considerados como variáveis aleatórias com distribuição normal e parâmetros previamente conhecidos.

Os autores também exploram a relação entre a margem de segurança, um método amplamente utilizado na época, e o uso da confiabilidade. As equações desenvolvidas são aplicadas em análises específicas para a engenharia aeronáutica.

Dois anos depois, Kalaba (1962) publica um artigo com o objetivo de aprimorar o procedimento computacional do método proposto por Hilton e Feigen (1960) e

generalizar o problema antes restrito a um caso particular. Além disso, o autor complementa a análise dos custos dos materiais.

O autor menciona o fato de que o uso do Método dos Multiplicadores de Lagrange pode não ser muito eficiente do ponto de vista computacional e, portanto, sugere o uso de programação dinâmica sequencial como alternativa. Kalaba propõe também a consideração do custo da estrutura no cálculo, no caso em que a escolha do material e da área da seção transversal das estruturas é de livre escolha do projetista. Ele desenvolve equações baseadas na área da seção transversal, densidade, e probabilidade de falha, restringindo os custos totais da estrutura a um limite pré-determinado.

Broding, Diederich e Parker (1964) publicaram um artigo voltado para a engenharia aeroespacial, no qual discutem o uso da confiabilidade e da otimização para projetar estruturas que fossem econômicas e, ao mesmo tempo, seguras. Os autores iniciam o artigo apresentando uma discussão sobre o uso de coeficientes de ponderação nos projetos da época, destacando como essa abordagem muitas vezes resultava em estruturas excessivamente conservadoras. Para mitigar esse conservadorismo, mencionam que a realização de experimentos reais era uma opção, apesar do alto custo envolvido.

Os autores propõem adotar o uso da confiabilidade na determinação dos fatores de segurança. Para isso, sugerem o uso do método da perturbação linear, reconhecendo que esse método poderia não ser muito preciso para funções altamente não lineares. Para contornar essa imprecisão, os autores propõem o uso da simulação de Monte Carlo para validar os resultados.

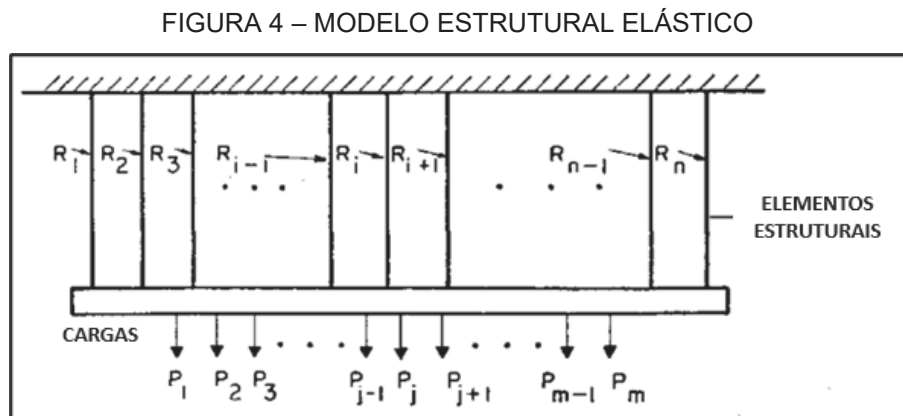
Eles observam que alguns critérios utilizados na época para ditar a confiabilidade de estruturas metálicas poderiam ser considerados plausíveis, mas ressaltam que, quando se tratava de compósitos, a penalidade no peso da estrutura poderia ser muito elevada. Destacam que o uso da confiabilidade era essencial para comparar materiais com diferentes propriedades e identificar aquele que proporcionasse o menor peso e as melhores condições estruturais. Para isso, enfatizam a necessidade de considerar diversas combinações possíveis para os diferentes modos de falha aos quais a estrutura estaria sujeita.

O objetivo, então, era otimizar uma função estocástica de pesos totais, sujeita a uma confiabilidade mínima pré-determinada para cada modo de falha da estrutura.

Foi utilizada a programação linear com o método Simplex para a solução do problema de otimização.

Moses e Kinser (1967) desenvolvem uma formulação para calcular a minimização do peso de uma estrutura, sujeita a vários carregamentos e composta por vários elementos, de modo que seja possível encontrar uma estrutura com peso minimizado e avaliar a probabilidade de falha correspondente. Os autores argumentam que esse tipo de análise é necessário, pois apenas com o mesmo nível de segurança, estruturas de diferentes configurações e materiais podem ser comparadas com base em seu peso.

O modelo avaliado é uma estrutura com n elementos sujeitos a m carregamentos, idealizada conforme FIGURA 4:



FONTE: Adaptado de Moses e Kinser (1967).

A estrutura apresentada na FIGURA 4 tem m carregamentos externos P_j e n valores de resistência R_i correspondentes a cada elemento. Os autores consideram no modelo a independência entre as variáveis e consideram a falha da estrutura total quando um elemento falha.

Para o cálculo da probabilidade de falha, os autores mencionam que, naquele momento, era impraticável utilizar Monte Carlo ou integração numérica devido ao alto requisito computacional. Portanto, a metodologia utilizada foi um método de ordenação que determina a probabilidade de que um elemento da estrutura falhe, mas os demais não. A probabilidade de falha desse método é dada pela Equação (25) (Moses e Kinser, 1967):

$$P_f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}, \quad (25)$$

onde $M_{ij} = P_r\{F_{ij}S_{1j}S_{2j} \dots S_{i-1j}S_{i1} \dots, S_{ij-1}\}$, sendo F_{ij} o evento de falha do elemento i sob o carregamento j e S_{ij} o modo de sobrevivência ij .

Os autores citam, inicialmente, o uso da Otimização de Risco como alternativa para minimizar o custo total da estrutura, afirmando que esse tipo de formulação não tem restrições explícitas, mas ocorre uma restrição implícita pelo fato de que quando o custo de falha é alto, a probabilidade de falha é baixa. Entretanto, os autores acabam utilizando no artigo a abordagem da minimização do peso da estrutura, sujeita a um valor máximo de P_f .

Vanmarcke (1973) apresenta em seu artigo uma formulação matricial para lidar com problemas de confiabilidade. Ele sugere que esse tipo de análise pode se tornar mais necessário à medida que os algoritmos computacionais avançam. O autor destaca que uma das principais dificuldades no cálculo da confiabilidade é a dependência estatística entre os modos de falha aos quais uma estrutura está sujeita. Na época, devido às limitações na representação estatística das cargas e resistências, o uso de métodos aproximados para calcular a confiabilidade era considerado mais viável. Vanmarcke emprega o método desenvolvido por Moses e Kinser (1967) para criar equações que estabelecem limites superior e inferior para o cálculo do peso mínimo. Quando esses limites se aproximam o suficiente, o processo é encerrado. Ele observou que as equações desenvolvidas foram altamente precisas em comparação com os resultados de outros estudos.

Além disso, o autor apresenta uma formulação para problemas de Otimização de Risco, empregando o método de decomposição dos modos de falha detalhado ao longo do artigo. Ele apresenta a função de Otimização de Risco a ser minimizada $f(\mathbf{d})$, em que $\mathbf{d}$ é o vetor das capacidades nominais de cada membro. Os limites superior e inferior podem ser determinados através da formulação apresentada por ele, que pode ser resolvida através de uma equação auxiliar. Sendo o valor ótimo de $f(\mathbf{d})$ chamado f^* , o problema é formulado de acordo com (26) (Vanmarcke, 1973):

$$\text{Minimizar } f_b(\mathbf{d}) = C_0(\mathbf{d}) + C_f P_b(\mathbf{d}). \quad (26)$$

Nessa formulação, $P_b(\mathbf{d})$ representa a a probabilidade de falha em pelo menos um dos modos de falha.

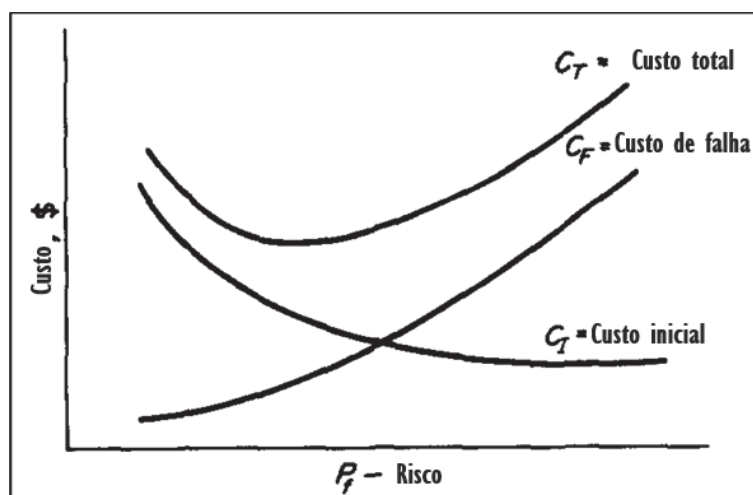
Moses (1977) estuda a integração dos conceitos de otimização e confiabilidade. O autor destaca a aplicação desses conceitos na otimização de sistemas estruturais, cuja complexidade decorrente do grande número de variáveis de projeto e possíveis modos de falha torna a busca pelo ponto ótimo complexa. O autor realiza uma revisão a respeito da otimização determinística em sua forma clássica e suas aplicações comuns. Ele observa que, na formulação clássica da otimização, onde um elemento específico está sujeito a várias restrições simultâneas, podem ocorrer negligências em interações, como falhas axiais e de torção. O autor expõe a otimização determinística de sistemas estruturais e discute como essa abordagem pode resultar em problemas com alto custo computacional.

Na sequência, o autor faz uma revisão sobre projetos baseados em confiabilidade, incluindo sua formulação, o uso da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade, e a utilização de variáveis aleatórias para definir carregamentos e propriedades dos materiais nas estruturas dimensionadas. O autor descreve a formulação de RBDO, onde o objetivo é minimizar uma função de custo total, sujeita a uma restrição na probabilidade de falha máxima. Em seguida, é apresentada uma formulação clássica de Otimização de Risco (27) (Moses, 1977):

$$C_T = C_I(X_1, X_2, \dots, X_n) + C_f P_f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (27)$$

onde C_T representa o custo presente total, C_I representa o custo inicial, C_f representa o custo esperado de falha e P_f a probabilidade de falha. Nessa formulação, é possível observar que um aumento no custo inicial reduz o risco, e consequentemente diminui o custo associado à probabilidade de falha. Dessa forma, ao otimizar a função, busca-se alcançar um resultado ótimo que equilibre os custos iniciais e os custos de falha. O autor ilustra essa característica por meio da FIGURA 5 (Moses, 1977):

FIGURA 5 – CUSTO TOTAL, CUSTO DE FALHA E CUSTO INICIAL VS RISCO



FONTE: Adaptado de Moses (1977).

Moses implementa um exemplo de aplicação da confiabilidade na resistência à flexão de uma viga de concreto reforçado, introduzindo termos para incorporar as incertezas associadas ao dimensionamento. Em seguida, ele demonstra um exemplo de aplicação da Otimização de Risco em projetos de vigas de pontes para resistência à fadiga.

Posteriormente, o autor aborda os conceitos relacionados à confiabilidade de sistemas, cuja formulação depende de o tipo de sistema ser em série, em paralelo ou misto. Ele destaca algumas dificuldades no estudo da otimização de sistemas que exigiam mais pesquisa:

- 1) Durante o processo de otimização, é possível que o caminho mais crítico de falha da estrutura se altere, o que deve ser considerado ao limitar o risco máximo;
- 2) O custo de falha é bastante subjetivo, tornando-se difícil de ser estimado;
- 3) Na época, havia escassez de dados para servir como parâmetros na estimativa da probabilidade de falha máxima ideal para cada tipo de estrutura, o que poderia representar uma dificuldade na determinação desse valor;
- 4) É crucial considerar o custo da estrutura ao longo de toda sua vida útil, e a análise dos custos futuros deve ser realizada em termos de valor presente.

Johnson (1978) desenvolve um método para determinar o nível de inspeção não destrutiva que minimiza o custo de produção, com a novidade de que além de considerar o erro de inspeção tipo um (aceitação de materiais defeituosos), considera o erro de inspeção tipo dois (rejeição de materiais em bom estado). Para isso, o autor propõe uma função que calcula a probabilidade de rejeição com base no tamanho do material e na magnitude da imperfeição. Johnson explica que, ao longo do tempo, os critérios de inspeção aceitáveis são determinados com base em experiências passadas ou comparando com tamanhos que tiveram poucas rejeições. Quando a taxa de falha é muito conservadora, o projeto do material pode ser ajustado para uma situação menos conservadora, porém esse tipo de dinâmica pode não ser aplicável a todos os projetos de engenharia, segundo o autor.

Assim, Johnson propõe uma nova abordagem para a inspeção que seja mais econômica e leve a um custo final ótimo do produto. O custo total de fabricação de uma unidade de material que pode ser vendido, considerando que será jogado fora se falhar na inspeção e não vale nada como sucata é dado pela Equação (28) (Johnson, 1978):

$$C_T(d) = (C_C + C_I)(1 - F_R(d))^{-1} + C_F F_F(d). \quad (28)$$

Nesta formulação típica de Otimização de Risco, C_C representa o custo de fabricação da unidade de material, C_I é o custo de inspeção, F_R é a fração das unidades de materiais rejeitadas no critério de qualidade, C_F é o custo de falha e F_F é a fração representativa das unidades de materiais que falharão. Se o material for reparado quando rejeitado, o custo total é dado pela Equação (29) (Johnson, 1978):

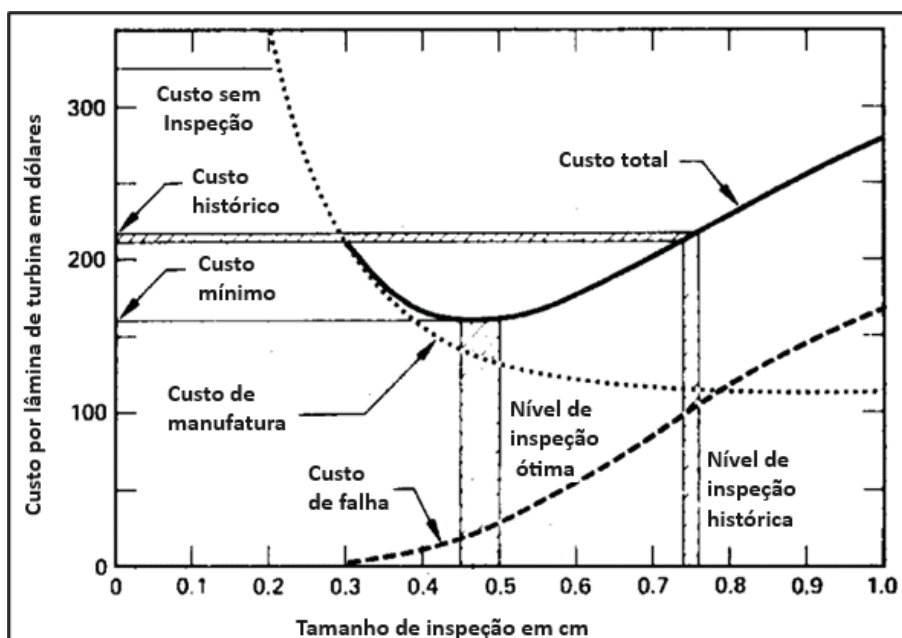
$$C_T(d) = C_C + C_I + (C_R + C_I)F_R(d)(1 - F_R(d))^{-1} + C_F F_F(d), \quad (29)$$

onde C_R é o custo de reparar o material rejeitado. Como não há um número infinito de amostras de materiais produzidos, os valores reais de $F_R(d)$ e $F_F(d)$ podem diferir das probabilidades de falha ($P_F(d)$) e de rejeição ($P_R(d)$), porém o autor considerou estas últimas no cálculo.

Os custos de fabricação, reparo e inspeção são conhecidos através da experiência de fábrica, porém o custo de falha é difícil de ser estimado, uma vez que depende de fatores complexos e pessoais. Dessa maneira, o autor considerou o custo de falha como uma constante que depende da taxa de falha.

Johnson (1978), por fim, faz um exemplo ilustrativo da aplicação da metodologia desenvolvida no artigo, usando como estudo de caso a fabricação de lâminas de turbinas. O autor utiliza dados reais de inspeção de lâminas de turbinas e aplica nas equações do método desenvolvido para chegar a uma função de custos totais, ilustrada na FIGURA 6.

FIGURA 6 – CUSTO POR LÂMINA DE TURBINA



FONTE: Adaptado de Johnson (1978).

O autor conclui que o custo total de uma unidade de material sem nenhuma inspeção é de \$328. Com as inspeções realizadas ao longo do período de medição, esse custo foi reduzido para \$215. Entretanto, utilizando a metodologia desenvolvida pelo autor, é possível alcançar um custo ainda mais baixo de \$159 por lâmina, mantendo um nível adequado de segurança de projeto. Extrapolando para um número elevado de fabricações de lâminas, por exemplo, 10 mil unidades, poderia resultar em uma economia potencial de cerca de 6 milhões de dólares.

Vanderplaats (1982) faz uma revisão do estado da arte na área de otimização estrutural da época. Ele menciona que o primeiro trabalho analítico na área de

otimização estrutural foi proposto por Maxwell em 1869, seguido pelo trabalho de Michell em 1904. Isso revela que o estudo otimização estrutural é uma ciência relativamente nova. Em relação à conexão entre otimização e confiabilidade estrutural, o autor observa que era uma área de crescente interesse na época, com muito espaço para desenvolvimento. Ele cita o artigo de Moses (1977) como exemplo dessa área de estudo em crescimento.

Frangopol (1985) revisa os conceitos relacionados à otimização estrutural baseada em confiabilidade na época. Ele argumenta que não era mais viável abordar os problemas estruturais de forma não determinística; a única maneira de encontrar soluções de projeto ótimas era integrando os conceitos de confiabilidade estrutural e otimização. O autor apresenta a formulação clássica de Otimização de Risco. A equação que define a função objetivo de Otimização de Risco a ser minimizada é dada pela Equação (30) (Frangopol, 1985):

$$C_T = C_T(\{d\}) = C_0 + C_f P_f, \quad (30)$$

sendo C_T o custo total da estrutura, C_0 os custos iniciais, C_f o custo de falha e P_f a probabilidade de falha, todos esses em função das variáveis de projeto $\{d\}$.

O autor destaca a grande dificuldade na Otimização de Risco: atribuir um valor monetário às consequências das falhas. Como exemplo, ele menciona o valor da vida humana. Por essa razão, ele sugere o uso da abordagem hoje conhecida como RBDO como uma alternativa, caso seja difícil determinar o custo de falha.

Schmit (1969) apud (Frangopol, 1985) elenca 4 categorias de variáveis de projeto possíveis:

- 1) Tamanho das seções transversais;
- 2) Configuração geométrica dos elementos estruturais;
- 3) Materiais utilizados;
- 4) Tipologia estrutural.

Entretanto, Frangopol argumenta que na área de otimização baseada em confiabilidade, ainda não existiam trabalhos que determinassem as configurações, materiais e tipologias ótimas, indicando que ainda havia muito a ser desenvolvido na área.

O autor também discute os métodos de otimização utilizados por diversos autores na área de otimização baseada em confiabilidade até o momento da publicação do artigo. Ele observa que a maioria dos problemas de otimização baseada em confiabilidade pode ser resolvida por métodos convencionais de otimização determinística. Alguns métodos citados que foram aplicados em problemas de otimização baseada em confiabilidade incluem o método das direções possíveis, métodos de busca aleatória simples, método do gradiente reduzido, programação linear sequencial, programa sequencial quadrático, programa sequencial geométrico, e métodos da penalidade interior e exterior.

Rosenblueth (1986) faz uma análise sobre o que é o conceito de projeto ótimo baseado em confiabilidade. Ele discute sobre o que é, de fato, uma estrutura ótima, defendendo que um projeto não é necessariamente ótimo somente porque atingiu um nível de confiabilidade que alguém definiu como sendo o melhor. A análise deve ser mais profunda que isso.

Kim e Wen (1990) conduzem um estudo sobre projetos de otimização baseados em confiabilidade, nos quais os carregamentos variam ao longo do tempo. Os autores adotam a formulação clássica de Otimização de Risco, restringindo a probabilidade de falha do sistema a um valor máximo. Eles consideram cargas vivas, cargas de vento e terremotos no estudo, utilizando o formato de projeto de fator de carga e resistência (LRFD), conforme recomendado na ANSI 58.1-1982, com adaptações. Essa abordagem é necessária para reduzir o custo computacional das múltiplas avaliações da análise de confiabilidade, devido ao formato da função objetivo de Otimização de Risco. Para calcular as probabilidades de falha individuais dos elementos do sistema modelo, os autores empregam o Método de Primeira Ordem. Para o problema de otimização, eles utilizam a Técnica de Minimização Sequencial sem Restrições em conjunto com o Método da Função de Penalidade Interior.

Os autores testam sua abordagem em exemplos ilustrativos e concluem que o método se mostrou viável e bastante eficaz para problemas dependentes do tempo. Eles observam que é mais fácil lidar com as restrições individuais de cada elemento do que as do sistema como um todo. A abordagem utilizando LRFD se revela útil para obter a confiabilidade nos elementos analisados.

Kanda e Ellingwood (1991) desenvolveram uma formulação para Otimização de Risco utilizando o FOSM. No artigo, eles utilizam a formulação de Otimização de Risco descrita nas Equações (31), (32) e (33) (Kanda e Ellingwood, 1991):

$$C_T = C_{In} + P_f C_f, \quad (31)$$

$$C_I = C_0 \left(1 + k \left(\frac{r_d}{s_0} - 1 \right) \right), \quad (32)$$

$$C_f = C_{f,norm} C_0. \quad (33)$$

Os autores basearam-se em trabalhos de diversos pesquisadores, como Johnson (1971), Rosenblueth (1976), Lind (1976), Hanai (1975) e Sugiyama et al. (1982), para compor a formulação utilizada. Na formulação apresentada, C_T representa a função de custos totais a ser otimizada, C_{In} representa os custos iniciais, P_f a probabilidade de falha e C_f os custos de falha. Na Equação (32), C_0 representa os custos iniciais quando $r_d = s_0$, sendo r_d a resistência de projeto e s_0 um efeito de carga de referência, podendo ser utilizada a média. O coeficiente k , por sua vez, representa um fator de razão de custo, que pode ser determinado experimentalmente. Na Equação (33), $C_{f,norm}$ representa o custo de falha normalizado, que na época ainda não havia uma forma precisa de estimar.

Diferentemente de muitos artigos anteriores, os autores apresentaram diferentes formulações para distribuições, além da normal, para representar os carregamentos e resistências de forma não-determinística, sendo elas log-normal e gumbel. Os resultados do índice de confiabilidade ótimo obtido para cada tipo de distribuição foram comparados, e foi confirmada a estabilidade dele frente às mudanças de distribuição de probabilidades. Eles observaram que a estimativa do custo de falha pode variar significativamente ao longo do tempo devido às flutuações nas variáveis econômicas. Portanto, propuseram que os custos sejam calculados em termos de valor presente, levando em conta uma taxa de desconto anual.

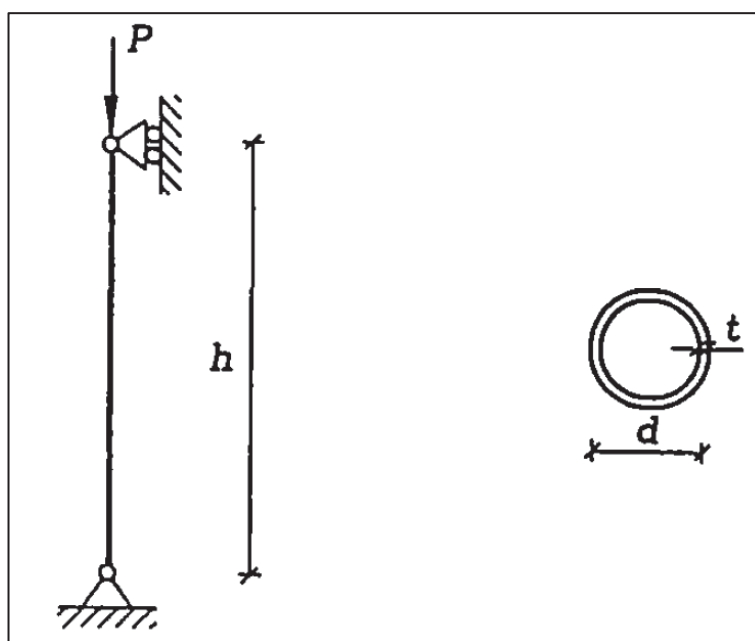
Enevoldsen e Sørensen (1994) apresentam diversas formulações de otimização baseada em confiabilidade: a formulação de Otimização de Risco, a de RBDO, diferentes formulações baseadas em planos de inspeção e experimentação. Cada uma dessas formulações é concebida como uma função de otimização de custo total, sujeita a restrições que dizem respeito à confiabilidade do sistema. Além disso, os autores detalham a formulação completa do FORM.

Os autores discutem métodos apropriados para resolver problemas de otimização, adaptados a cada caso específico, tanto para problemas de elementos

quanto para sistemas estruturais. Eles também explicam como realizar a análise de sensibilidade para cada caso. Uma estrutura é apresentada para formular problemas de otimização baseados em confiabilidade usando análise de elementos finitos.

Por fim, os autores ilustram a aplicação dos conceitos discutidos ao longo do artigo com um exemplo prático envolvendo uma coluna tubular de aço, conforme representado na FIGURA 7:

FIGURA 7 – COLUNA VERTICAL TUBULAR EM AÇO.



FONTE: Enevoldsen e Sørensen (1994)

Eles utilizam a formulação de Otimização de Risco para abordar o problema, empregam o método NLPQL para otimização e conduzem a análise de confiabilidade utilizando o FORM. Além disso, realizam uma análise de sensibilidade, como explicado em seções anteriores do artigo.

Vaurio (1995) descreve uma aplicação de Otimização de Risco adaptada para incluir o intervalo entre manutenções na formulação, visando alcançar um custo ótimo em manutenção em nível de planta, em contraste com a abordagem de considerar apenas componentes e sistemas individualmente. O objetivo é encontrar uma configuração ideal que equilibre a quantidade de testes realizados, os quais podem impactar a produção, e o risco associado. Anteriormente, a metodologia predominante para resolver esse tipo de problema era minimizar o tempo de inatividade do componente.

O autor valida essa abordagem por meio de exemplos e conclui que os intervalos de manutenção, quando otimizados para custo, tendem a ser mais longos do que quando otimizados para risco. Entretanto, ele sugere a imposição de uma restrição no risco para evitar intervalos entre manutenções excessivamente longos. Além disso, o autor observa que o "custo de um acidente" pode variar dependendo do projetista ou do proprietário da planta.

Elms (1997) apresenta uma formulação para otimizar o risco em uma variedade de projetos de engenharia, conforme mencionado pelo autor: gestão de riscos no transporte ferroviário, formulação de códigos, resposta a desastres naturais por autoridades locais, perfis de gastos da defesa civil e gestão de riscos em serviços de combate a incêndios. Essa formulação é baseada em métodos de Otimização de Risco aplicados para estruturas no passado.

O autor desenvolve uma formulação para otimizar o risco sob uma condição de confiabilidade mínima e a simplifica para casos específicos, tornando as equações mais acessíveis – o método pode ser implementado em planilhas do Excel. São apresentados dois exemplos de aplicação de sua formulação: um projeto de pontes de concreto, obtendo-se um balanço no risco por meio da formulação apresentada no artigo, e um projeto de sistema de prevenção de incêndios. Além disso, o autor realiza uma análise de sensibilidade.

Kanda e Shah (1997) fazem uma discussão a respeito da determinação do custo de falha, um tema que vinha sido uma grande dificuldade para vários autores até o momento. Os autores categorizam as perdas devido a falhas estruturais em 8 categorias, que são (Kanda e Shah, 1997):

- a) Danos à estrutura, exigindo reparo ou substituição;
- b) Danos aos conteúdos, exigindo reparo ou substituição;
- c) Danos aos componentes não estruturais, exigindo reparo ou substituição;
- d) Danos a equipamentos, exigindo reparo ou substituição;
- e) Perda de função;
- f) Ferimentos;
- g) Fatalidades;
- h) Danos psicológicos.

Esses danos, por sua vez, podem variar dependendo do tipo de ocupação da estrutura, conforme as seguintes categorias (Kanda e Shah, 1997):

- A) Residências particulares;
- B) Prédios de apartamentos para locação;
- C) Pequenos comércios;
- D) Arranha-céus de escritórios;
- E) Hospitais;
- F) Quartéis de bombeiros;
- G) Usinas nucleares.

Todas essas categorias podem ser normalizadas em relação ao custo inicial. Os autores constroem uma tabela com esses custos normalizados, conforme apresentado na TABELA 2 (Kanda e Shah, 1997):

TABELA 2 – EXEMPLOS DE PERDAS ESTIMADAS DE A) A H) NORMALIZADAS PELO CUSTO INICIAL PARA OS TIPOS DE OCUPAÇÃO DE A) A G)

Tipo de perda	A)	B)	C)	D)	E)	F)	G)
a)	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,3	0,2
b)	0,4	0,2	0,4	0,2	0,5	0,1	0,1
c)	0,2	0,2	0,1	0,3	0,3	0,2	0,2
d)	0,1	0,1	0,1	0,3	0,5	0,2	10,0
e)	0,1	0,1	0,2	0,2	10,0	10,0	2,0
f)	0,2	0,5	0,2	0,5	2,0	0,1	100,0
g)	0,1	0,2	0,1	5,0	20,0	5,0	2000,0
h)	1,0	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1

FONTE: Kanda e Shah (1997).

Apesar dos autores terem determinado valores para a TABELA 2, eles discutem sobre a subjetividade dos custos das categorias f), g) e h), principalmente esta última. Como esses valores dependem de fatores éticos e pessoais de cada indivíduo, podem variar dependendo do projetista. Outras discussões sobre a determinação do custo de falha apresentadas no artigo são de grande interesse para a Otimização de Risco. Recomenda-se a leitura completa do artigo para mais detalhes.

Moses (1997) aborda algumas das dificuldades presentes no campo da otimização baseada em confiabilidade. Ele observa que a maioria das aplicações

existentes se concentra na formulação de membros individuais, embora o ideal seja considerar a falha do sistema como um todo. Além disso, o autor destaca que os parâmetros essenciais para calcular a confiabilidade, como cargas, distribuições probabilísticas, propriedades dos materiais e resistências, ainda não estavam completamente desenvolvidos e podiam não ser totalmente confiáveis.

Para superar essas dificuldades, Moses propõe o uso de modelos de custo de ciclo de vida. Seu artigo oferece uma visão abrangente do estado atual da otimização baseada em confiabilidade. Em relação à Otimização de Risco, ele descreve a formulação clássica e destaca algumas aplicações e trabalhos relevantes, como em plataformas offshore e estruturas de aço. Moses também enfatiza que o custo ótimo é sensível tanto ao custo de falha quanto aos parâmetros das funções de densidade de probabilidade.

Frangopol, Lin e Estes (1997) desenvolvem um método para determinar o número de inspeções e reparos necessários ao longo do ciclo de vida de uma estrutura de concreto armado contra a corrosão, baseado na otimização do custo total de ciclo de vida esperado. Os autores mencionam que pontes de rodovias sofrem severa deterioração ao longo do tempo e requerem um programa de inspeção e reparo para prolongar sua vida útil. Eles afirmam que um programa eficiente de inspeção e reparo deve considerar os possíveis modos de falha das estruturas, as principais manutenções realizadas ao longo dos anos, e a frequência e intensidade das cargas aplicadas.

O objetivo do estudo é alcançar um equilíbrio entre alta confiabilidade e baixo custo durante a vida útil da estrutura. Os autores defendem que a estimativa do custo de manutenção deve levar em conta os efeitos do tempo, pois, a partir de um determinado momento, pode ser mais vantajoso construir uma nova ponte do que continuar gastando com manutenção. O custo de manutenção é assumido como uma função linear da forma proposta por McNeil e Hendrickson (1982) na Equação (34):

$$C_{MP,t} = C_{MP}t, \quad (34)$$

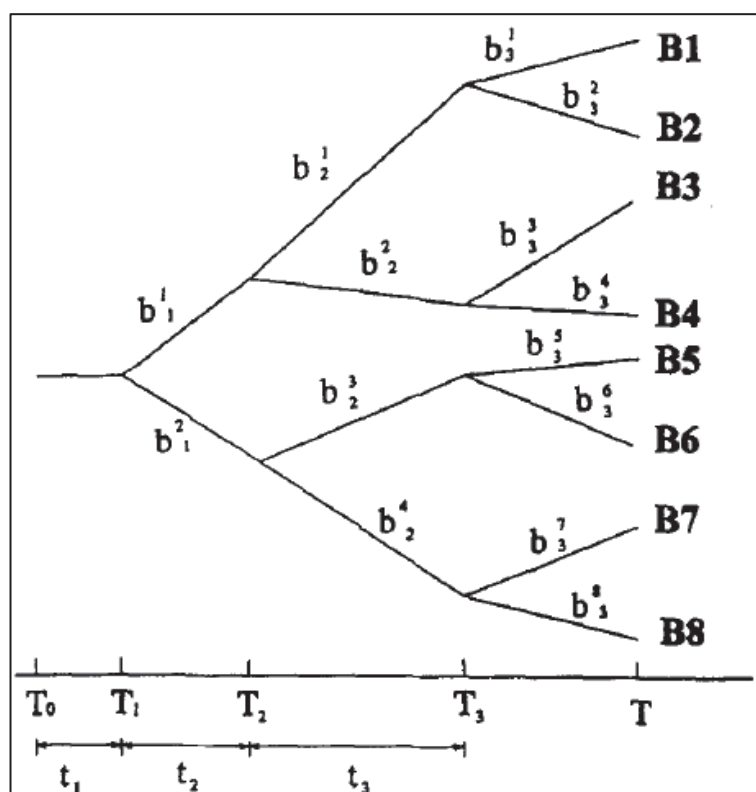
onde $C_{MP,t}$ é o custo de manutenção preventiva no ano t .

O estudo é baseado na inspeção de concreto armado sujeito à corrosão, utilizando inspeção não destrutiva. Embora a inspeção não afete diretamente a probabilidade de falha da estrutura, uma inspeção bem-feita permite detectar falhas

mais precisamente, resultando em manutenção de maior qualidade e maior confiabilidade estrutural. No entanto, uma estrutura reparada não é a mesma que uma original, devido ao uso de materiais híbridos, além de fatores como degradação interna, colisões acidentais e envelhecimento, que foram agrupados em um fator de envelhecimento único. O custo de reparo foi considerado como uma função do custo de substituição da ponte.

Para formular o método, os autores utilizaram uma árvore de eventos para representar todos os eventos possíveis ao decidir reparar ou não a estrutura. A decisão de reparo em cada inspeção é influenciada por decisões anteriores. A FIGURA 8 mostra um exemplo de árvore de eventos, onde são feitas 3 inspeções ($m = 3$) em tempos T_i uniformemente espaçados.

FIGURA 8 – ÁRVORE DE EVENTOS PARA UMA PONTE COM TRÊS INSPEÇÕES.



FONTE: Frangopol, Lin e Estes (1997)

Cada b_i^j representa um evento que forma um caminho de eventos B_i . Assumindo que os eventos são estatisticamente independentes, a probabilidade da ocorrência de cada caminho é dada pela Equação (35):

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= P(b_3^1)P(b_2^1)P(b_1^1) \\
P(B_2) &= P(b_3^2)P(b_2^1)P(b_1^1) \\
&\vdots \\
P(B_8) &= P(b_3^8)P(b_2^4)P(b_1^2).
\end{aligned} \tag{35}$$

Assim, a probabilidade de falha da estrutura é dada pela Equação (36):

$$P_f = \sum_{i=1}^8 P_{f,i} P(B_i), \tag{36}$$

onde

$$\begin{aligned}
P_{f,1} &= \max(P_{f,T_1-}, P_{f,T_2-}^1, P_{f,T_3-}^{11}, P_{f,T}^{111}) \\
P_{f,2} &= \max(P_{f,T_1-}, P_{f,T_2-}^1, P_{f,T_3-}^{11}, P_{f,T}^{110}) \\
&\vdots \\
P_{f,8} &= \max(P_{f,T_1-}, P_{f,T_2-}^0, P_{f,T_3-}^{00}, P_{f,T}^{000}).
\end{aligned} \tag{37}$$

O custo esperado de falha é dado pela Equação (38):

$$C_F = C_f P_f, \tag{38}$$

Por fim, o custo esperado total da estrutura é dado pela Equação (39):

$$C_{ET} = C_0 + C_{PM} + C_{INS} + C_{REP} + C_F, \tag{39}$$

onde C_0 é o custo inicial da estrutura, C_{PM} é o custo esperado de manutenção de rotina, C_{INS} é o custo esperado de inspeção e C_{REP} é o custo de reparo.

Assim, o problema é formulado conforme Equação (40):

$$\text{minimizar } C_{ET} \quad \text{sujeito a } P_f \leq P_f^*, \tag{40}$$

onde P_f^* é a probabilidade de falha máxima aceita durante a vida útil da estrutura.

Os autores aplicaram a metodologia a dois exemplos de manutenção de uma ponte de concreto armado com diferentes configurações: tempos de manutenção variando de maneira uniforme e não uniforme. A probabilidade de falha foi obtida através da simulação de Monte Carlo utilizando o software MCREL (Lin, 1995). O problema de otimização foi resolvido com o software "*Automated Design Synthesis*" (ADS) de Vanderplaats (1986).

A aplicação do método nos exemplos mostrou que a solução não uniforme é mais econômica e requer menos inspeções ao longo da vida útil da estrutura. Os autores concluíram que quanto maior o grau de corrosão, maior o custo esperado total e o número de inspeções necessárias. Além disso, a qualidade do método de inspeção afeta diretamente o número ótimo de inspeções. A análise de sensibilidade indicou que o custo de falha e a taxa de corrosão são os fatores mais influentes no custo esperado total, mas são subjetivos e difíceis de se obter.

Sexsmith (1998) faz uma análise da escolha do nível de confiabilidade necessário para montagem de pontes. Segundo o autor, o nível de confiabilidade necessário é dependente do tempo de exposição às cargas temporárias, dos custos de construção e das consequências do fracasso. Ele observa que, por ser uma fase de construção temporária, como a montagem da ponte e o içamento, é razoável admitir um nível de risco maior.

O autor aponta que, com as abordagens de projeto utilizadas até então, não era possível alcançar um nível ótimo de confiabilidade, já que este aspecto não era considerado. Ele sugere que a melhor maneira de abordar a confiabilidade na construção temporária de pontes é através do que hoje é conhecido como Otimização de Risco – na ocasião o autor chamou a abordagem de Otimização de custo esperado.

Sexsmith destaca que o custo associado a uma falha no processo de construção de uma ponte inclui os custos de reconstrução, os custos dos atrasos no contrato de licitação e os custos relacionados a mortes e lesões. Para ilustrar a aplicação dessa formulação em situações envolvendo a construção de pontes, o autor apresenta três exemplos práticos: projeto de escoramento com um tempo de exposição de 2 anos, projeto de uma estrutura permanente com um tempo de exposição de 50 anos e uma operação de montagem com um tempo de exposição curto.

Frangopol (1998) faz uma revisão geral dos diversos conceitos da Otimização Estrutural Probabilística. De acordo com o autor, as principais vantagens desse tipo

de abordagem são alcançar uma confiabilidade mais consistente do que outros métodos, uma vez que as fontes de incerteza e os riscos inerentes são levados em consideração. Outra vantagem significativa é a capacidade de obter um projeto ótimo, respeitando um nível de confiabilidade pré-determinado. Por último, uma grande vantagem é a capacidade de incorporar conceitos de confiabilidade na formulação da Otimização Estrutural Probabilística, tais como confiabilidade de sistemas, cenários de risco, métodos de manutenção baseados em confiabilidade e análise de custo ao longo do ciclo de vida.

Wen (2001) realiza um estudo centrado na minimização do custo total esperado ao longo do ciclo de vida de estruturas, considerando cargas e resistências como variáveis aleatórias. O estudo inclui uma análise de sensibilidade em relação à vida útil da estrutura, taxa de desconto e custos associados a mortes e lesões. O autor conclui que o projeto estrutural é altamente influenciado pelas consequências da falha.

Ele observa que, embora a confiabilidade uniforme tenha sido utilizada em projetos no passado, essa abordagem pode não ser eficaz em termos de custo. Wen propõe uma formulação para calcular o custo total esperado ao longo do ciclo de vida, englobando custos de construção, manutenção e operação, reparos, danos e consequências de falhas. A expressão para o custo total esperado é dada por (41):

$$E[C(t, \mathbf{d})] = C_0(d) + \left[E \sum_{i=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^k C_j e^{-\lambda t_j} P_{ij}(\mathbf{d}, t_i) \right] + \int_0^t C_m(\mathbf{d}) e^{-\lambda \tau} d\tau, \quad (41)$$

onde $E[\cdot]$ é o valor esperado, t é o período de tempo considerado, C_0 é o custo inicial, $\mathbf{d}$ é o vetor das variáveis de projeto, i é o número de ocorrências de cargas como vento, carga viva, e cargas sísmicas, t_i é o momento da ocorrência da carga, $N(t)$ é o número total de carregamentos em t , C_j é o custo em valor presente de dólares para o alcance do j -ésimo estado limite no momento da ocorrência da carga, incluindo os custos de danos, reparos, perda de serviço, mortes e lesões, $e^{-\lambda t_j}$ o fator de desconto no tempo t , sendo λ a constante da taxa de desconto por ano, P_{ij} a probabilidade do j -ésimo estado limite ser excedido dada a i -ésima ocorrência de um risco, k o número total de estados limites considerados e C_m o custo de operação e manutenção por ano.

O problema de otimização é formulado de forma a equilibrar a resistência estrutural e o custo esperado de falha, configurando-se como um problema de minimização sem restrições. Caso seja necessário, o projetista pode introduzir restrições, como limites nas variáveis de projeto ou uma confiabilidade mínima aceitável.

Wen desenvolve um exemplo numérico para avaliar a eficácia da formulação, considerando duas cargas variantes no tempo, tratadas como processos estocásticos. Ele aplica a metodologia no projeto estrutural de um conjunto de doze edifícios comerciais, sujeitos a cargas de vento e terremotos. O autor conclui que a solução ótima depende fortemente das consequências das falhas, sendo dominada principalmente por um risco específico.

Garbatov, Guedes e Soares (2001) propõem um método para minimizar os custos de reparo e manutenção de estruturas flutuantes sujeitas à fadiga. Eles desenvolvem uma formulação para determinar a probabilidade de falha por fadiga ao longo do tempo, considerando o tempo de início da falha como uma variável aleatória. A metodologia é aplicada em um exemplo numérico utilizando uma estrutura flutuante real.

Aktas, Moses e Ghosn (2001) propõem um método para a calibração de normas de projetos, com ênfase em pontes sob cargas de vento, cargas vivas e cargas não-vivas, utilizando uma abordagem de otimização de custos ao longo do ciclo de vida da estrutura, de forma não determinística. Os autores argumentam que é fundamental considerar não apenas o fator de segurança na calibração das normas, mas também o fator econômico, defendendo que a otimização dos custos totais é a melhor alternativa. Esses custos totais incluem o custo de construção e os custos futuros esperados associados aos riscos, que são funções da probabilidade de falha e do custo da falha. A função dos custos totais é dada pela Equação (42):

$$C_T = C_0 + C_f \sum_{i=1}^n \frac{P_{fi}}{e^{ij}}, \quad (42)$$

onde C_T é o custo total, C_0 é o custo inicial, baseado no custo de construção da estrutura em função das cargas a que estará submetida, e^{ij} é o fator de desconto, j é a taxa de desconto baseada na inflação, P_{fi} é a probabilidade de falha anual para o ano i , C_f é o custo de falha e n é o número total de anos de projeto da estrutura. Os

autores destacam que o custo de falha é extremamente complexo de estimar, uma vez que envolve vidas humanas, tornando-se uma questão mais política do que de engenharia. Por isso, em vez de estimar um valor para o custo de falha utilizando preços reais, eles optaram por estimar o valor do custo de falha baseados em normas anteriores.

A abordagem proposta considera tanto os custos para cargas aplicadas individualmente quanto para a combinação delas. A combinação das cargas é realizada utilizando dois métodos: a regra de Turkstra e o processo de Ferry-Borges.

Um diferencial do método proposto é que, ao contrário de aplicações anteriores, os autores não fixam um valor para o índice de confiabilidade (β) no projeto; ao invés disso, os índices de confiabilidade fazem parte do processo de otimização e variam para cada combinação de cargas. O beta é determinado através do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM).

Para validar o método, os autores aplicam um exemplo ilustrativo de uma ponte rodoviária. O *input* da otimização inclui a margem de variação das cargas do projeto, enquanto o *output* inclui os fatores de carga otimizados e os índices de confiabilidade correspondentes. Os resultados mostram que o beta diminui à medida que o fator de custo inicial da carga de vento aumenta. Devido à formulação, a probabilidade de falha deve ser calculada ano a ano, e a metodologia desenvolvida não inclui confiabilidade de sistemas.

Stewart (2001) realiza uma análise de ciclo de vida baseada em risco para pontes em função de seu envelhecimento. Embora o artigo não foque especificamente na otimização do ciclo de vida, o autor examina os custos ao longo do ciclo de vida para diferentes configurações das pontes analisadas. Para isso, ele aplica uma análise de confiabilidade, calculando a probabilidade de falha por meio de simulação de Monte Carlo. A formulação do ciclo de vida considera o custo esperado de falha, que é o somatório da probabilidade de falha multiplicada pelo custo de falha para cada estado limite, em valor presente. O autor argumenta que essa abordagem é essencial para evitar o dimensionamento convencional, que tende a ser excessivamente conservador ao considerar o "pior caso". Além disso, a análise de risco fornece uma métrica para comparar diferentes configurações, ou seja, o risco associado a cada uma.

Wen e Kang (2001) desenvolvem uma formulação para otimização do custo ao longo do ciclo de vida de edifícios sujeitos aos efeitos de terremotos e furacões. As

incertezas associadas a essas cargas incluem o momento da ocorrência do evento, a intensidade e a duração. A formulação utilizada é a mesma apresentada em (41), e leva em conta os custos de construção, manutenção e falha.

A análise é conduzida tanto para um tipo de risco isolado quanto para dois tipos de risco simultaneamente. O resultado da otimização para múltiplos riscos é predominantemente influenciado pelo estado limite com maior incerteza. Uma análise de sensibilidade demonstra que o ponto ótimo é principalmente dependente dos custos.

Na segunda parte do artigo, Wen e Kang (2001b) aplicam a formulação desenvolvida a um edifício de nove pavimentos sujeito a cargas de vento e terremotos em diferentes localidades dos Estados Unidos. Novamente, os riscos são considerados tanto individualmente quanto em conjunto, e os custos analisados incluem construção, danos e reparos, e perdas devidas a mortes, todos descontados para valor presente. Os autores concluem que a resistência ótima, tanto para cargas de vento quanto para terremotos, obtida através da análise de custo ao longo do ciclo de vida, é superior àquela obtida pelos métodos convencionais de dimensionamento da época. Eles concluem que o dimensionamento não é governado por uma única carga específica, mas sim pela combinação dessas cargas.

Rackwitz (2002) apresenta uma alternativa para otimização de custo baseada em confiabilidade, utilizando FORM/SORM de maneira a reduzir o problema a uma questão de otimização simples. Ele sugere uma otimização de nível único que integra as condições de Kuhn–Tucker do problema de confiabilidade estacionário local com a otimização de custo.

Uma discussão interessante é abordada em relação à determinação do custo associado à vida humana no artigo. Ao invés de atribuir um valor monetário à vida humana, o autor foca no custo necessário para salvar vidas, ou seja, o custo para reduzir o risco à vida humana. Para formalizar essa análise, Rackwitz propõe o uso do chamado Índice de Qualidade de Vida (Life Quality Index - LQI) como uma medida para determinar o nível de confiabilidade necessário para o projeto. O LQI é utilizado para avaliar o investimento ótimo em medidas de segurança que salvam vidas, levando em consideração a capacidade econômica da sociedade e o custo-benefício das intervenções. A abordagem sugere que os investimentos para salvar vidas em projetos estruturais, sistemas de proteção contra incêndios, segurança no trânsito,

entre outros, devem ser justificados não apenas pela eficácia técnica, mas também pelo impacto econômico-social, refletido pelo LQI.

Rackwitz conclui que a definição de confiabilidades-alvo em projetos estruturais, tradicionalmente baseada em fatores de segurança, pode não ser a mais econômica ou segura. Ele argumenta que métodos de otimização modernos, como o uso do LQI, permitem uma abordagem mais racional e eficiente para o dimensionamento de estruturas seguras e econômicas.

Frangopol e Maute (2003) apresentam uma revisão sobre Otimização Baseada em Confiabilidade, com foco em estruturas aeroespaciais e da construção civil. Após a revisão, concluem que é essencial considerar a propagação das incertezas ao longo do tempo nos projetos, a fim de obter soluções robustas, confiáveis e eficientes em termos de custos. Além disso, destacam a importância de integrar a confiabilidade na formulação, considerando a interação entre os possíveis modos de falha, bem como os estados últimos e de serviço, levando em conta sua dependência temporal.

Os autores também concluem que o critério de otimização do ciclo de vida para o projeto de novas estruturas é o custo mínimo total esperado. Já para estruturas existentes que requerem manutenção, o custo total da intervenção deve ser levado em consideração. Por fim, eles observam que as abordagens computacionais estavam em estágios iniciais de desenvolvimento devido às limitações das ferramentas disponíveis na época.

Liu, Wen e Burns (2004) desenvolveram uma formulação para otimização multiobjetivo do custo ao longo do ciclo de vida de estruturas tipo steel-frame resistentes a momentos causados por cargas sísmicas. Eles argumentam que a abordagem de projeto baseada na análise de custo do ciclo de vida deve ser adaptada ao caso específico de interesse, permitindo ao projetista controlar o equilíbrio entre risco e custo nas variáveis de projeto.

Os autores observam que o método de dimensionamento de projetos sujeitos a cargas sísmicas na época dava prioridade à garantia de alta segurança durante o ciclo de vida das estruturas e à prevenção de colapsos estruturais. No entanto, eles destacam que, ao longo dos anos, os custos associados a pequenas cargas sísmicas podem ser substancialmente elevados em comparação com os custos iniciais da estrutura. Por isso, propõem uma formulação de otimização, utilizando algoritmos genéticos, que permite avaliar três objetivos principais para o projetista: o custo inicial

de construção, a complexidade da estrutura em termos do número de seções de aço diferentes, e o custo do ciclo de vida devido aos danos causados pelas cargas sísmicas, considerando o nível aceitável de risco que o projetista deseja assumir. As variáveis estão sujeitas às especificações vigentes na época para esse tipo de projeto.

Para validar a formulação proposta, os autores desenvolvem dois exemplos numéricos de uma estrutura steel-frame padrão. No primeiro exemplo, combinam o custo inicial e o custo de ciclo de vida devido aos danos causados por cargas sísmicas em um único termo de custo, enquanto o número de seções de aço diferentes é tratado separadamente em uma otimização baseada em dois objetivos. No segundo exemplo, os três objetivos são separados e analisados individualmente.

Os autores concluem que as normas vigentes podem não ser adequadas para análises de custo ao longo do ciclo de vida, pois resultam em custos elevados devido aos danos sísmicos. Além disso, afirmam que a formulação multiobjetivo permite ao projetista escolher suas preferências em relação às variáveis de projeto. Por fim, destacam que a maneira como as equações de estado limite foram formuladas, quantificadas em termos de percentis, permite que o projetista escolha o nível de risco que está disposto a aceitar.

Lee, Cho e Cha (2006) desenvolveram uma formulação para otimizar o custo ao longo do ciclo de vida de pontes de aço. Na formulação, os autores consideram a degradação das pontes ao longo do tempo devido à corrosão e ao tráfego. A função objetivo do problema de otimização é expressa pela equação (43):

$$E[C_T(\bar{d}, T_{life})] = C_0(\bar{d}) + \sum_{t=1}^{T_{life}} \left[\frac{\sum_{j=1}^J E[C_{Mj}(\bar{d}, t)] + \sum_{k=1}^K E[C_{Fk}(\bar{d}, t)]}{(1+r)^t} \right], \quad (43)$$

onde $E[C_T(\bar{d}, T_{life})]$ é o custo total esperado sob o ciclo de vida, em função do vetor das variáveis de projeto $\bar{d}$ e do tempo de vida da estrutura T_{life} ; $C_0(\bar{d})$ é o custo inicial; $E[C_{Mj}(\bar{d}, t)]$ é o custo esperado de manutenção para o item j ; $E[C_{Fk}(\bar{d}, t)]$ é o custo esperado de reabilitação/falha para o estado limite k ; e r é a taxa de desconto.

A otimização é formulada como descrito em (44):

$$\text{Minimizar:} \quad E[C_T(\bar{d}, T_{life})] \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
\text{Sujeito a:} \quad & g_j(\bar{d}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\
& p_{Fk}(\bar{d}) \leq p_{Fk_{allow}} \quad k = 1, 2, \dots, K \\
& \bar{d}^L \leq \bar{d} \leq \bar{d}^U,
\end{aligned}$$

onde $g_j(\bar{d})$ é a j -ésima restrição, $p_{Fk}(\bar{d})$ é a probabilidade de falha para o k -ésimo estado limite, $p_{Fk_{allow}}$ é a probabilidade de falha aceitável para o k -ésimo estado limite, e $\bar{d}^L$ e $\bar{d}^U$ são os limites inferior e superior, respectivamente, para as variáveis de projeto.

O custo inicial inclui o custo de projeto, construção e testes da ponte. O custo esperado de manutenção é calculado como o produto do custo de manutenção pela probabilidade de manutenção no tempo t . O custo esperado de reabilitação/falha é o produto do custo anual de reabilitação/falha pela probabilidade anual de falha no tempo t . É interessante notar que, neste artigo, os autores não consideram a estimativa do custo de falha como uma dificuldade, utilizando bases de dados coreanas e dados de acidentes de trânsito da Coreia.

Os autores aplicam a formulação desenvolvida em um exemplo ilustrativo de uma ponte de aço. Através do exemplo, concluem que o dimensionamento baseado na análise de custo ao longo do ciclo de vida é significativamente diferente do dimensionamento convencional e do dimensionamento considerando apenas os custos iniciais. Além disso, eles verificam que a otimização proposta resulta em custos iniciais mais elevados em comparação ao dimensionamento baseado apenas no custo inicial, mas com custos totais esperados menores. Concluem também que o uso de aço de alta performance é mais vantajoso que o aço convencional, pois, apesar do custo inicial maior, a manutenção futura é quase inexistente, o que reduz significativamente o custo de manutenção e, conseqüentemente, o custo ao longo do ciclo de vida.

Streicher, Joanni e Rackwitz (2008) desenvolveram uma série de alternativas para a determinação de funções objetivo adaptáveis em componentes estruturais que estão sujeitos ao envelhecimento. A proposta deles considera cenários em que são realizadas manutenções periódicas e, em casos de falha, a estrutura é reconstruída. Uma das abordagens adotada pelos autores se baseia no custo sob o ciclo de vida, integrando tanto os custos associados à manutenção contínua quanto aqueles relacionados à reconstrução após falhas.

No mesmo ano, Joanni e Rackwitz (2008) expandiram este trabalho, desenvolvendo um modelo que tem a possibilidade de manutenções com ou sem inspeções prévias, considerando inicialmente eventos de falha independentes e posteriormente eventos dependentes. Essa extensão tornou as formulações mais realistas ao considerar que os eventos de falha e reparo estão interligados pelos mesmos processos de deterioração, exigindo cálculos numéricos mais complexos para otimizar a estratégia de manutenção e gerenciamento de riscos das estruturas envelhecidas.

Taflanidis e Beck (2009) propuseram uma estrutura para otimização estocástica do custo ao longo do ciclo de vida de estruturas, com foco no dimensionamento de dispositivos dissipativos passivos para mitigação de risco sísmico. Os autores destacam, porém, que a formulação pode ser aplicada a casos mais gerais. Eles utilizaram simulações estocásticas para estimar os parâmetros de projeto e propuseram uma abordagem de otimização em duas etapas que reduz o custo computacional. Na primeira etapa, é utilizada a chamada Otimização de Subconjuntos Estocásticos (SSO) para identificar iterativamente subconjuntos do espaço de projeto com maior probabilidade de conter os pontos ótimos. Na segunda etapa, uma otimização adicional é realizada para encontrar o ponto ótimo dentro do subconjunto identificado anteriormente.

Os autores justificam o uso de variáveis estocásticas, pois os dispositivos utilizados em aplicações sísmicas apresentam comportamento inerentemente não linear. Eles implementaram a metodologia proposta em um exemplo prático de um edifício de concreto armado de quatro pavimentos equipado com amortecedores. Os resultados mostraram uma grande redução do custo ao longo do ciclo de vida, além de uma diminuição do custo computacional, sem a necessidade de adotar modelos substitutos.

Möller et al. (2009) desenvolveram uma abordagem para a otimização do custo total de uma estrutura sujeita a cargas sísmicas, respeitando restrições de confiabilidade mínima ou desempenho mínimo. Através de uma análise dinâmica não linear, os autores avaliam o desempenho estrutural e representam essas respostas utilizando redes neurais artificiais. Eles justificam essa escolha pela complexidade da análise dinâmica não linear, que não permite a formulação explícita das respostas do sistema, tornando os dados discretos expressos por redes neurais a melhor alternativa.

Os autores reconhecem, entretanto, que a construção do banco de dados discreto tem um alto custo computacional. A utilização das redes neurais facilita a aplicação de simulação de Monte Carlo para a obtenção dos parâmetros de confiabilidade, e essas redes são também empregadas na etapa de otimização, que visa minimizar o custo total da estrutura. O esquema de otimização adotado é baseado em busca sem o uso de gradientes.

Para validar a proposta, os autores aplicaram o método em uma estrutura de concreto armado de múltiplos andares e vãos, sujeita a cargas sísmicas. Os parâmetros de projeto eram as profundidades de vigas e colunas, além do volume de aço. Assim como observado em outros estudos, eles destacaram que o custo associado à falha tem uma influência expressiva nos resultados. Os autores concluem também que o uso de redes neurais viabilizou a aplicação de simulação de Monte Carlo e aumentou a eficiência do algoritmo de otimização utilizado.

Rackwitz e Joanni (2009) aplicam um modelo de otimização de custos que incorpora três estratégias de manutenção distintas: manutenção baseada na idade, manutenção em bloco e manutenção com inspeção e reparo.

Valdebenito e Schuëller (2010a) propõem uma abordagem para a otimização baseada em confiabilidade, introduzindo o uso de aproximações sequenciais. Essa metodologia divide o problema original de otimização em uma série de subproblemas menores. A abordagem utiliza variáveis de projeto discretas e um metamodelo para aproximar o problema de confiabilidade, proporcionando uma diminuição do custo computacional.

O metamodelo de confiabilidade é construído em duas etapas: primeiro, realiza-se uma análise de confiabilidade padrão no ponto de projeto inicialmente considerado ótimo. Em seguida, são realizadas análises estruturais adicionais que não exigem novas análises de confiabilidade, o que é uma vantagem em termos de custo computacional. Os autores aplicam o método desenvolvido em exemplos numéricos e demonstram que, embora o algoritmo não garanta sempre a convergência, ele tende a convergir para uma solução ótima com poucas iterações.

Os autores evidenciam através dos exemplos a importância de se considerar os custos de falha no projeto, e não apenas os custos iniciais. Não obstante, os autores também reconhecem que, apesar dos avanços alcançados, ainda há a necessidade de mais desenvolvimento para reduzir o custo computacional em problemas mais complexos. O estudo sugere que futuras pesquisas devem se

concentrar em ampliar a aplicabilidade da abordagem proposta e em melhorar a eficiência em cenários com um maior número de variáveis de projeto.

Ainda no mesmo ano, Valdebenito; Schuëller (2010b) publicaram um artigo de revisão sobre o tema da Otimização Baseada em Confiabilidade, explorando não apenas a própria Otimização de Risco, mas também outros métodos de otimização baseados em confiabilidade propostos até aquele momento. A revisão concentra-se nos principais fundamentos teóricos de cada abordagem, oferecendo uma comparação qualitativa para avaliar a aplicabilidade de cada método. O foco dos autores é a fundamentação global das metodologias revisadas, ao invés de suas aplicações práticas.

Eles destacam o grande desenvolvimento do campo ao longo de quase 50 anos, observando a transição de abordagens simplificadas para modelos complexos e realistas, capazes de lidar com várias variáveis simultaneamente. Esse progresso é atribuído ao avanço da capacidade computacional e ao desenvolvimento de métodos mais eficientes de simulação e análise de confiabilidade.

Apesar dos avanços alcançados, os autores identificam que ainda há espaço para melhorias, especialmente na redução dos custos computacionais e na automatização dos métodos em softwares que facilitem sua aplicação. Essa automatização é vista como essencial para tornar a metodologia mais acessível e viável na prática de engenharia.

Beck e Gomes (2012) comparam três métodos de otimização estrutural: Otimização Determinística, Otimização Baseada em Confiabilidade e Otimização de Risco. Os autores argumentam que a Otimização de Risco é um método mais completo em comparação à Otimização Determinística e à Otimização Baseada em Confiabilidade. A Otimização Determinística permite encontrar uma solução ótima em termos mecânicos, mas não considera as incertezas inerentes ao modelo estrutural, o que pode comprometer a segurança da estrutura ao atingir os estados limites. A Otimização Baseada em Confiabilidade, por sua vez, considera as incertezas no modelo, mas não leva em conta as consequências financeiras de uma eventual falha. A Otimização de Risco surge, então, como a alternativa mais abrangente, pois, além de considerar a confiabilidade do sistema, também incorpora o custo esperado de falha na formulação, resultando em um ciclo de vida estrutural mais econômico sem comprometer a segurança.

Os autores desenvolveram cinco problemas numéricos para comparar as alternativas. Os resultados indicaram que a Otimização Determinística leva a soluções que respeitam as configurações de projeto e reduzem os custos iniciais, mas aumentam os custos esperados totais. Quando um coeficiente de segurança extra é adotado, o custo esperado total aumenta ainda mais, pois a redução nos custos de falha não compensa o aumento nos custos iniciais de construção. A RBDO, por sua vez, leva em consideração a probabilidade de falha, garantindo a segurança da estrutura, mas não necessariamente a economia em relação ao custo total. Os autores demonstraram que a formulação RBDO só se equipara à RO quando múltiplos limites de probabilidade de falha são considerados, um para cada modo de falha. Quando um limite global é adotado, o custo esperado ao longo do ciclo de vida aumenta.

Os autores defendem que apenas a Otimização de Risco é capaz de alcançar uma configuração ideal em termos de segurança e redução dos custos totais. Entretanto, eles reconhecem que a Otimização de Risco resulta em um problema numérico muito mais complexo, o que implica em um alto custo computacional. No artigo, foi desenvolvido um algoritmo de otimização híbrido de Enxame de Partículas, Simplex e Powell, que conseguiu convergir nos cinco exemplos apresentados, mas com um custo computacional elevado, o que requer mais pesquisas.

Beck, Gomes e Bazan (2012) aplicam o conceito de otimização robusta em problemas de Otimização de Risco. A otimização robusta é uma abordagem que visa minimizar a sensibilidade do resultado da otimização em função das incertezas, especialmente as incertezas epistêmicas. Assim, a otimização robusta não busca apenas o menor custo, mas também a solução cujas incertezas tenham menor impacto no desempenho do sistema. No artigo, as incertezas intrínsecas são incorporadas na análise de confiabilidade. As incertezas epistêmicas, que incluem incertezas nas variáveis aleatórias de carga e resistência, probabilidades nominais de falha e custos nominais de falhas, são tratadas no problema como variáveis difusas definidas subjetivamente.

Os autores aplicam o conceito em um exemplo prático de otimização de fatores de segurança parciais para o projeto de vigas de aço sujeitas à flexão. A partir do exemplo, os autores concluíram que a aplicação da otimização robusta levou a resultados mais conservadores do que a Otimização de Risco simples, porém, como esperado, as soluções são menos sensíveis às incertezas epistêmicas.

Taflanidis, Loukogeorgaki e Angelides (2013) desenvolveram um modelo para avaliação de risco de turbinas eólicas offshore sob a influência de vento e ondas. Esse modelo é baseado em uma análise probabilística que leva em consideração as incertezas associadas aos modelos de excitação, à turbina, e ao seu desempenho. No modelo, o risco é definido como o valor esperado da consequência de risco multiplicado pela probabilidade de ocorrência. O risco associado à turbina eólica é expresso como uma integral probabilística da resposta do modelo sobre o espaço de projeto. Para melhorar a eficiência computacional, os autores utilizam modelos substitutos (*surrogate models*) baseados em mínimos quadrados móveis para aproximar a superfície de resposta. A incerteza decorrente dessa aproximação é considerada explicitamente na análise de risco.

Eles conduzem um exemplo de aplicação do modelo, que inclui uma análise de sensibilidade. Neste exemplo, os riscos relacionados a deslocamentos e tensões na turbina, assim como os custos ao longo do ciclo de vida, são abordados. Os autores também desenvolveram uma ferramenta computacional que facilita a aplicação prática do modelo desenvolvido, permitindo aos usuários investigarem o impacto das condições ambientais no risco das turbinas eólicas em diferentes locais.

Gomes e Beck (2013) estudam a consideração das consequências esperadas de falha, da aplicação do método dos elementos finitos posicional, do uso de modelos substitutos através de redes neurais artificiais, e da otimização meta-heurística no projeto ideal de estruturas por meio de uma abordagem baseada na confiabilidade. Eles argumentam que essa configuração se aproxima bastante dos desafios reais enfrentados em problemas de engenharia estrutural.

O método dos elementos finitos posicional é utilizado para calcular respostas estruturais não lineares, onde a configuração deslocada é a principal incógnita, seguida pela determinação dos deslocamentos e rotações. Esse método permitiu a consideração das não linearidades geométricas e de material no modelo. Os autores defendem que a inclusão dos custos esperados de falha no problema de otimização estocástica é fundamental para alcançar uma configuração de menor custo total final. Dado que esse tipo de problema pode resultar em muitos mínimos locais, foi empregado o método meta-heurístico de Otimização por Enxame de Partículas para garantir a obtenção do mínimo global correto.

A utilização de redes neurais artificiais como modelos substitutos para a função objetivo foi necessária para reduzir o custo computacional envolvido na

otimização considerando os custos esperados de falha, resultando em uma diminuição de 23 a 48% no número de chamadas ao modelo mecânico. Os autores aplicam essa metodologia a um exemplo prático envolvendo uma torre de transmissão de aço sujeita a cargas de vento estocásticas, considerando diversas variáveis de projeto e os custos esperados de falha para alcançar a solução ótima global. Embora o número de graus de liberdade não tenha sido muito elevado, foi suficiente para se obter uma solução adequada dentro do escopo do estudo.

Gomes e Beck (2014) apresentam um estudo sobre a otimização de custos ao longo do ciclo de vida de dutos enterrados sujeitos à corrosão externa. O modelo desenvolvido pelos autores considera os custos de construção, inspeção, reparos, substituição e o custo esperado de falha. Eles destacam que processos de deterioração, como a corrosão, estão associados a grandes incertezas e, portanto, devem ser modelados como processos estocásticos.

Os autores argumentam que, embora seja comum modelar a corrosão de dutos assumindo um crescimento linear com base em modelos aproximados, essa abordagem pode ser excessivamente conservadora e, por isso, não é a ideal. Para superar essa limitação, eles desenvolveram um modelo de crescimento de corrosão baseado em polinômios do caos, utilizando dados reais de campo cuidadosamente coletados. Esta abordagem mostrou-se mais realista em comparação com outras metodologias e levou em consideração os tempos de início da corrosão, que muitas vezes são negligenciados em outros estudos.

As variáveis de projeto analisadas são a espessura ideal de corrosão, o tempo para a primeira inspeção e o intervalo entre inspeções subsequentes. Para resolver o problema de confiabilidade, o número esperado de falhas, reparos e substituições é determinado por meio de uma amostragem por hipercubo latino. Para resolver o problema de otimização, os autores utilizaram duas abordagens: um algoritmo simplex e uma busca exaustiva simples.

Os resultados indicaram que, ao considerar a espessura da corrosão como uma variável de projeto, pode ser financeiramente mais vantajoso utilizar uma parede mais fina com mais inspeções do que utilizar uma parede de tubo mais espessa com menos inspeções. Além disso, o algoritmo simplex se mostrou mais preciso e computacionalmente eficiente para avaliar a função objetivo global, exigindo aproximadamente nove vezes menos avaliações da função objetivo em comparação com a busca exaustiva.

Por fim, os autores observaram que o espaçamento entre inspeções é uma função não contínua, com os tempos de inspeção ótimos variando de acordo com diferentes cenários de custo.

Beaurepaire et al. (2013) desenvolvem um modelo para reduzir o esforço computacional em problemas de Otimização de Risco, denominado amostragem por importância de ponte. Nesse modelo, os dados gerados na iteração anterior do problema de otimização são reutilizados na iteração atual, aumentando a chance de gerar amostras dentro do domínio de falha. Os autores aplicaram a abordagem a problemas de Otimização de Risco e concluíram que o modelo foi capaz de reduzir o esforço computacional associado a esse tipo de problema. Entretanto, os autores reconhecem que as aplicações estavam em estágios iniciais e que mais pesquisas seriam necessárias para aplicar o modelo em problemas de maior dimensão.

Li e Hu (2014) estudam o uso do que eles chamaram de *Risk Design Optimization* (RDO) no projeto de estruturas submetidas a cargas de vento, com um foco especial em edifícios altos. Os elementos de PBWE (*Performance-Based Wind Engineering*), como análise aerodinâmica, análise estrutural e análise de risco, foram incorporados em uma formulação híbrida de RDO que combina controle de rigidez e vibração. Os autores argumentam que essa abordagem é fundamental devido à natureza estocástica dos fenômenos relacionados ao vento. Eles argumentam que a Otimização Baseada em Confiabilidade foi utilizada para problemas semelhantes por outros autores, porém essa abordagem não considera adequadamente as consequências futuras para a estrutura. Em contraste, a RDO oferece uma alternativa mais eficaz, ao incorporar potenciais danos futuros no modelo.

O problema foi formulado como uma abordagem multiobjetivo. Como outros estudos, os autores identificaram a presença de múltiplos mínimos globais no problema de otimização, o que os levou a empregar uma técnica de Otimização por Enxame de Partículas multiobjetivo, auxiliada por uma análise baseada em aprendizado de kernel.

Nielsen e Sørensen (2014) comparam diferentes modelos de tomada de decisão para a manutenção e reparo de turbinas eólicas offshore, focando em abordagens baseadas em risco. Os autores destacam que aproximadamente 25% dos custos de geração de energia eólica estão relacionados à manutenção, principalmente devido a falhas de componentes ao longo do ciclo de vida das turbinas. Dado esse impacto nos custos operacionais, os autores enfatizam a importância de incluir

estratégias de manutenção eficazes no planejamento e dimensionamento dessas estruturas. Eles analisam diversos métodos de decisão, como regras baseadas em variáveis observadas e processos de decisão de Markov parcialmente observáveis. Os autores argumentam que o uso de modelos que incorporam a probabilidade de falha e o desgaste dos componentes pode oferecer uma melhor previsão dos requisitos de manutenção, resultando em uma maior economia e maior confiabilidade do sistema ao longo do tempo.

Beck, Kougioumtzoglou e Dos Santos (2014) aplicam o conceito de Engenharia Baseada em Desempenho (*Performance-based Engineering* - PBE) em uma estrutura de Otimização de Risco, combinando técnicas de linearização estatística e análise de confiabilidade variante no tempo, voltadas para sistemas dinâmicos estocásticos não-lineares. Os autores implementam a estrutura em dois exemplos numéricos de edifícios de concreto armado sujeitos a cargas estacionárias de vento. A partir dos exemplos, os autores conseguem obter a rigidez ótima das colunas dos edifícios, considerando o custo ao longo do ciclo de vida da estrutura. Eles concluem que a rigidez ideal é maior para projetos em que a não-linearidade da estrutura é levada em consideração, em comparação com sistemas lineares equivalentes. Além disso, concluíram que a rigidez ideal também depende do valor da vida útil considerado. Por fim, observaram que há uma tendência entre as rigidezes de cada pavimento dos edifícios, o que permitiu simplificar a determinação de uma rigidez ideal para todo o edifício.

Beck et al. (2015) fazem uma análise comparativa entre a Otimização Robusta e a Otimização Baseada em Risco, verificando suas diferenças e semelhanças. A Otimização Robusta busca maximizar o desempenho médio dos sistemas, enquanto minimiza a variância desse desempenho. Os autores identificam uma equivalência entre os fatores alpha da Otimização Robusta e os custos esperados de falha na Otimização de Risco. Eles argumentam que a função objetivo da Otimização Robusta não é tão objetiva quanto a função objetivo da Otimização de Risco, pois depende de constantes de normalização arbitrárias. Assim, quando é possível definir objetivamente o custo esperado de falha, a formulação de Otimização de Risco tende a ser mais precisa do que a de Otimização Robusta. Além disso, os autores observam que a Otimização Robusta frequentemente leva a problemas não convexos, enquanto a Otimização de Risco tende a gerar problemas pelo menos parcialmente convexos.

Saad et al. (2016) desenvolveram um modelo para o projeto de pontes de concreto armado, levando em consideração a deterioração por fadiga e corrosão, baseado nos custos ao longo do ciclo de vida da estrutura e confiabilidade. O modelo avalia tanto os custos diretos quanto os indiretos associados à degradação e falha da estrutura. Entre os principais custos indiretos estão os custos de atraso do usuário, que representam os prejuízos financeiros e inconvenientes sofridos pelos usuários devido a obras, manutenções ou falhas na ponte. Esses custos refletem a interrupção do uso normal da ponte. A abordagem do estudo inclui a análise dos custos operacionais dos veículos e dos custos de atraso do usuário, considerando diferentes cenários, como a degradação de elementos da ponte, reabilitação, distribuição de tráfego e colapso. Além disso, o estudo realiza uma análise de sensibilidade dos custos ótimos e das variáveis de projeto. Os autores destacam que o custo de falha é o mais difícil de estimar e que a fadiga e a corrosão são os principais fatores de degradação para esse tipo de estrutura. O modelo foi validado por meio de duas aplicações que contemplam tanto a degradação mecânica quanto o custo de atraso do usuário.

Mitseas, Kougioumtzoglou e Beer (2016) desenvolveram um modelo para otimização multiobjetivo de estruturas, considerando o custo ao longo do ciclo de vida, baseado em desempenho, voltado para sistemas estruturais não lineares com múltiplos graus de liberdade sujeitos a excitações estocásticas evolucionárias. No lugar da simulação de Monte Carlo, os autores propuseram um modelo que determina as funções de densidade de probabilidade (PDFs) utilizando conceitos de linearização estatística e média estocástica. O problema de otimização multiobjetivo foi resolvido por meio de um Algoritmo Genético. Para validar a metodologia proposta, os autores apresentaram um exemplo numérico aplicado à estrutura de um edifício. Os resultados mostraram que a abordagem proposta foi altamente eficiente na redução dos custos computacionais em comparação com métodos que utilizam simulação de Monte Carlo.

Soliman, Frangopol e Mondoro (2016) desenvolveram um modelo para a otimização de inspeção, monitoramento e manutenção de estruturas de navios sujeitas a efeitos de fadiga, utilizando uma análise probabilística do custo ao longo do ciclo de vida. O modelo considera os custos de inspeção, monitoramento e manutenção, além do custo esperado de falha, que o produto da perda monetária devido à falha e a probabilidade de falha durante o período. O modelo utiliza a função

de densidade de probabilidade (PDF) da vida útil estendida devido às manutenções preventivas para o cálculo da probabilidade de falha associada. A otimização multiobjetivo proposta é utilizada para determinar o tempo ideal para inspeção, o tempo e a duração do monitoramento, e o tamanho crítico da fissura para manutenção. O objetivo da metodologia proposta é encontrar um plano de manutenção ótimo que minimize o tempo de manutenção, o custo esperado ao longo do ciclo de vida e maximize a vida útil esperada.

Os autores aplicaram o modelo a um detalhe do casco lateral de um navio de aço e concluíram que minimizar os atrasos na manutenção, maximizar a vida útil do navio e minimizar o custo ao longo do ciclo de vida são objetivos conflitantes. Entretanto, a abordagem multiobjetivo proposta pelos autores consegue equilibrar esses conflitos e chegar à solução mais adequada. Eles também destacam que o custo esperado de falha tem uma influência significativa nas soluções ótimas e enfatizam a importância de uma estimativa precisa dos custos de inspeção e da capacidade de detecção de danos, pois esses fatores afetam consideravelmente os resultados do modelo.

Gomes e Beck (2016) propõem um modelo para Otimização de Risco com o objetivo de reduzir os custos computacionais. O método desenvolvido, denominado *Design Space Root Finding method* (DSRF), é baseado na determinação das raízes das equações de estado limite no espaço de projeto para todas as amostras das variáveis aleatórias durante a simulação de Monte Carlo. Para resolver o problema de otimização, foi utilizada programação não linear, e as derivadas necessárias para a direção de busca foram calculadas por meio de diferenças finitas.

Os autores aplicam o DSRF a problemas tanto unidimensionais quanto multidimensionais, considerando diferentes graus de não linearidade nas equações de estado limite e nas funções de custo, além de considerar múltiplas variáveis de projeto. Os resultados demonstram que o método proposto é mais eficiente do que os métodos tradicionais, conseguindo reduzir o número de chamadas da função em até vinte vezes.

Abdollahzadeh e Atashgar (2017) propõem um modelo de otimização biobjetivo baseado em confiabilidade para desenvolver uma estratégia de manutenção de componentes que visa minimizar o custo do ciclo de vida e maximizar a disponibilidade do sistema em uma estrutura de sistema k-out-of-n ponderado. O modelo estocástico leva em consideração o custo inicial, as características de falha e

reparo dos componentes, a taxa de desempenho e o comportamento incerto dos fornecedores. Para ilustrar a eficácia do modelo, os autores aplicam-no ao projeto ideal de um parque eólico. A otimização é realizada utilizando um algoritmo de Otimização por Colônia de Formigas.

Ghasemi e Nowak (2017) desenvolvem um método para determinar a confiabilidade alvo de uma estrutura. Os autores argumentam que, embora o método tradicional se baseie na definição da confiabilidade alvo por meio de experiências passadas, uma abordagem baseada em otimização também pode ser utilizada. Esta abordagem envolve a minimização da função de custo-falha, que incorpora o custo de construção, custo de falha, custo de manutenção, vida útil da estrutura, taxa de desconto, dependência temporal da carga e resistência, além do fator de importância estrutural. O fator de importância estrutural é utilizado como um fator de ajuste para o custo de falha. A minimização do custo total da estrutura é realizada em relação ao índice de confiabilidade correspondente à vida útil projetada. Uma contribuição interessante do estudo é a definição do custo de falha com base no custo inicial.

Os autores aplicam a formulação desenvolvida a um exemplo de ponte de aço sujeita à corrosão, com o objetivo de determinar a confiabilidade alvo para diferentes vidas úteis e comprimentos de vão. A equação de estado limite utilizada está relacionada ao modo de falha por flexão da ponte. Eles concluíram que existe uma relação linear entre o índice de confiabilidade e o custo inicial, e concluíram que quanto maior a corrosão a que a ponte está sujeita, maior a confiabilidade alvo necessária.

Torii, Lopez e Miguel (2017) introduzem um modelo para a resolução de problemas de Otimização de Risco, combinando o uso de algoritmos de otimização baseados em gradientes com a determinação da probabilidade de falha e a análise de sensibilidade a partir da Expansão de Polinômios do Caos. Os autores aplicam a estrutura desenvolvida em exemplos numéricos para validar o modelo proposto. Eles concluem que a metodologia foi capaz de reduzir o esforço computacional, mas se limita a problemas com poucas variáveis aleatórias, já que a técnica da Expansão de Polinômios do Caos aumenta significativamente o esforço conforme cresce o número de variáveis aleatórias. Os autores argumentam que o uso de Expansão de Polinômios do Caos de terceira ordem é equivalente a utilizar uma simulação de Monte Carlo com 10^7 amostras. Eles concluem que essa abordagem é mais vantajosa do

que abordagens com uso de simulações para projetos com muitas variáveis de projeto.

Torii et al. (2019) criam uma abordagem de Otimização de Risco a partir de conceitos utilizados na Otimização Baseada em Confiabilidade. Os autores desenvolvem um modelo em que os problemas de RO podem ser resolvidos por meio de uma sequência de subproblemas de RBDO. Isso é feito considerando os índices de confiabilidade alvo como variáveis de projeto. Ou seja, o problema de Otimização de Risco busca os índices de confiabilidade ótimos que minimizem o custo total esperado. Eles aplicam o algoritmo SORA (Du e Chen, 2004), utilizado em problemas de RBDO, estendendo-o para aplicação em problemas de RO. Para a análise de confiabilidade, os autores utilizam o algoritmo de Valor Médio Avançado Modificado (AAMV) (Keshtegar e Hao, 2018). Concluem que o uso da abordagem proposta é mais estável do que a aplicação direta do FORM em uma formulação de Otimização de Risco, o que já havia sido observado em contextos de RBDO. O uso dessa abordagem permite a aplicação de qualquer método desenvolvido para RBDO em RO, o que é vantajoso, pois há mais materiais disponíveis na literatura sobre RBDO do que sobre RO.

Beck, Tessari e Kroetz (2019) aplicam a formulação de Otimização Baseada em Confiabilidade e Otimização de Risco em sistemas sujeitos ao colapso progressivo. Para o desenvolvimento do modelo, os autores utilizam o exemplo de uma treliça hiperestática sob falha progressiva, a fim de avaliar os efeitos de redistribuição de carga durante o colapso progressivo.

Eles concluíram que a formulação de Otimização Baseada em Confiabilidade de sistemas não gera soluções com membros redundantes, apenas estruturas isostáticas. Isso se deve à formulação de RBDO utilizada, que não representa adequadamente o efeito da hiperestaticidade no modelo. Por outro lado, a Otimização de Risco é capaz de gerar soluções em que um membro hiperestático atua como um aviso antes do colapso final, resultando em soluções ótimas compostas por um conjunto de membros isostáticos e hiperestáticos. Isso levou os autores a concluírem que o uso de um membro hiperestático como aviso antes do colapso final gera estruturas mais baratas, pois gera uma confiabilidade alvo mais baixa.

Zhao e Yun (2019) desenvolvem um modelo para otimizar os intervalos de inspeção de sistemas do tipo “one-shot”, como mísseis, extintores de incêndio e airbags, que desempenham suas funções apenas uma vez após um longo período de

armazenamento. No modelo, são considerados cenários onde as falhas podem ocorrer sem serem detectadas durante a inspeção, sendo identificadas apenas em inspeções subsequentes. O critério para a definição do intervalo de inspeção ótimo é a otimização do custo ao longo do ciclo de vida do sistema, equilibrando a necessidade de manutenção com a disponibilidade exigida.

Para determinar as probabilidades de falha os autores utilizam a simulação de Monte Carlo, considerando que as vidas úteis dos componentes de cada equipamento são independentes e seguem uma distribuição exponencial. O problema de otimização é resolvido por meio de um algoritmo computacional, que calcula os intervalos ótimos de inspeção que minimizam os custos e satisfazem os requisitos de disponibilidade.

Os autores validam o modelo proposto com exemplos numéricos, que demonstram que a disponibilidade de armazenamento do sistema diminui à medida que o número de inspeções aumenta. Além disso, os exemplos mostram que a precisão da inspeção, medida pela probabilidade de detectar falhas, impacta significativamente a disponibilidade do sistema e os intervalos ótimos de inspeção.

Luque e Straub (2019) desenvolveram uma metodologia para inspeção integral de sistemas estruturais por meio da otimização baseada em risco, utilizando um algoritmo meta-heurístico. O critério de otimização adotado é o custo total esperado ao longo do ciclo de vida da estrutura. Os autores destacam que, até então, não existiam modelos capazes de realizar a inspeção completa de um sistema estrutural de forma integrada; as abordagens existentes se limitavam à inspeção de componentes individuais, o que não é ideal e, em alguns casos, impraticável.

Na metodologia proposta, uma rede bayesiana dinâmica é combinada com simulações de Monte Carlo para otimizar o custo total esperado do sistema sujeito a inspeções periódicas. Esse método foi aplicado a um sistema estrutural sujeito à deterioração por fadiga, e os autores demonstraram que o método proposto consegue considerar os efeitos da deterioração conjunta de múltiplos componentes de maneira integrada. Isso possibilita a redução dos custos de manutenção, uma vez que a inspeção e o reparo podem ser realizados simultaneamente para vários componentes.

Além disso, a metodologia considera explicitamente a interação entre a confiabilidade dos componentes e a do sistema estrutural como um todo. Através do exemplo estudado, os autores concluíram que o custo computacional do método é

viável para esse tipo de problema, e que o cálculo preciso do custo total esperado permite a comparação eficaz entre diferentes estratégias de inspeção.

Yeter, Garbatov e Guedes Soares (2019) desenvolvem uma estrutura para avaliar o custo do ciclo de vida de estruturas de suporte em *monopile* para turbinas eólicas offshore, considerando diferentes mecanismos de falha integrados a uma avaliação completa de custos. O objetivo é alcançar um modelo ideal tanto para o projeto dessas estruturas, visando minimizar o custo esperado ao longo do ciclo de vida, incluindo o custo esperado de falhas, quanto para a definição de intervalos de inspeção ideais. Para isso, são feitas a minimização do custo nivelado de energia e a minimização do custo total esperado das ações de inspeção. Os custos considerados na formulação são as despesas de capital, despesas operacionais e despesas de descomissionamento. Os modelos estruturais são desenvolvidos através do método dos elementos finitos.

Os autores reconhecem que a estabilidade econômica, a política de energia pública e a fabricação de aço têm grande influência no risco associado a essas estruturas, por isso eles fazem uma análise de sensibilidade desses parâmetros. A análise mostrou que a taxa de desconto e a taxa de produção anual de eletricidade são os parâmetros que mais influenciam no custo total esperado. Os resultados indicaram que um índice de confiabilidade entre 3,4 e 3,6 é ideal para esse tipo de estrutura. Além disso, os autores concluíram que sistemas com inspeções frequentes levam a um custo de ciclo de vida menor, devido à redução nas taxas de juros pagas aos bancos.

Mishra, Keshavarzzadeh e Noshadravan (2019) propõem uma formulação para otimizar o custo ao longo do ciclo de vida de oleodutos enterrados sujeitos à corrosão. Eles argumentam que o processo de corrosão é intrinsicamente incerto, então precisa ser representado através de modelos probabilísticos que avaliem a confiabilidade ao longo do ciclo de vida de sistemas sujeitos a esse processo. Os autores desenvolvem um modelo estocástico para a evolução da profundidade da corrosão ao longo do tempo, utilizando polinômios do caos com base em medições de campo, e a partir dele desenvolvem as equações de estado limite necessárias na análise de confiabilidade. O problema de otimização é formulado com o auxílio de modelos substitutos, permitindo a minimização do custo ao longo do ciclo de vida de maneira precisa e eficiente. A implementação de modelos substitutos possibilita o uso de um algoritmo de otimização baseado em gradientes, uma vez que esse tipo de

estratégia não é adequada para funções objetivo descontínuas. Além disso, é possível obter uma estratégia de manutenção ótima.

Os autores ressaltam que a estrutura proposta pode ser adaptada para outros tipos de sistemas sujeitos a diferentes modos de deterioração. A formulação apresentada limita-se a considerar um defeito por metro de tubo, e os autores admitem que a estrutura desenvolvida deve ser ampliada para comportar a análise de sistemas completos. A eficácia do modelo é demonstrada por meio de um estudo de caso.

Torii, Lopez e Miguel (2019) aplicam uma abordagem que utiliza uma técnica de Programação Aproximada Sequencial (SAP) com inclusão de termos de segunda ordem, obtidos por meio da aproximação BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) para a matriz Hessiana, em problemas de Otimização de Risco e Otimização Baseada em Confiabilidade. Essa técnica é denominada SAP2nd. A probabilidade de falha é obtida através de Expansão de Polinômios do Caos no artigo, entretanto os autores destacam que tanto a análise de sensibilidade quanto a determinação da probabilidade de falha podem ser feitas utilizando qualquer método de análise de confiabilidade disponível.

Exemplos numéricos foram resolvidos para demonstrar a eficácia do método proposto. Em comparação com a técnica SAP de primeira ordem utilizada por Zou e Mahadevan (2006), a incorporação de termos de segunda ordem deixou o algoritmo mais eficiente, já que evitou muitos problemas de convergência e reduziu o esforço computacional de 50% a mais de 1000%, dependendo do problema. Os autores concluíram que o uso de Expansão de Polinômios do Caos gerou resultados muito mais precisos em comparação com o FORM, exigindo o mesmo esforço computacional, para problemas em que o FORM apresenta grandes desvantagens, como problemas com funções de estado limite altamente não-lineares. Entretanto, eles reconhecem que uma limitação do algoritmo é o aumento exponencial do esforço computacional com o número de variáveis aleatórias, devido ao uso da Expansão de Polinômios do Caos.

2.3.1.2 Estado da arte

Avanços têm sido observados na área de Otimização de Risco ao longo dos anos, entretanto, ainda hoje se encontram algumas dificuldades que estão sendo discutidas e melhoradas pelos pesquisadores. Algumas delas são:

- a) O esforço computacional exigido pelos algoritmos de análise de confiabilidade: a realização de análises de confiabilidade de forma computacional é um desafio, especialmente quando se lida com sistemas complexos ou grande número de variáveis de projeto e variáveis aleatórias. O tempo necessário para executar essas análises pode ser considerável, o que limita a eficiência geral do processo de otimização. Além disso, a necessidade de calcular a probabilidade de falha a cada iteração do problema de otimização torna o processo mais custoso computacionalmente do que outros métodos.;
- b) A determinação do custo esperado de falha: muitos autores argumentam que uma das principais dificuldades da Otimização de Risco é a determinação objetiva do custo esperado de falha. Eles argumentam que atribuir um valor monetário a itens como a perda de vidas humanas, impactos sociais e ambientais é muito difícil e subjetivo. Mesmo quando se trata de danos materiais ou financeiros, os custos podem variar para diferentes cenários, escalas de desastre, e percepções de risco;
- c) A precisão dos métodos de análise de confiabilidade utilizados: a confiabilidade de um sistema depende da precisão das estimativas de probabilidade de falha. Métodos imprecisos podem levar a resultados subestimados ou superestimados, comprometendo a confiabilidade do processo de otimização;
- d) A falta de algoritmos computacionalmente eficientes para problemas de Otimização de Risco: a Otimização de Risco apresenta desafios específicos que exigem algoritmos adequados. A busca pela solução ótima em problemas de RO pode ser complexa, especialmente quando se consideram múltiplos estados limites, com o risco da otimização se estagnar em pontos de ótimos locais.

Considerando as limitações discutidas anteriormente, nos últimos anos, diversos estudos vêm sendo propostos com o objetivo de contornar esses desafios, incorporando avanços metodológicos e estratégias computacionais mais eficientes. A seguir, são apresentados e discutidos alguns dos trabalhos mais relevantes e recentes

da literatura, que contribuem significativamente para o desenvolvimento e consolidação do tema.

Estruturas de aço soldado, como as de navios e estruturas offshore, estão sujeitas a cargas de fadiga elevadas, que geralmente não podem ser evitadas apenas com um bom projeto, mas sim, são necessárias intervenções periódicas. Zou et al. (2020) desenvolvem uma abordagem para o dimensionamento, inspeção e manutenção de sistemas estruturais soldados sujeitos à fadiga, a partir de uma abordagem de tomada de decisão holística. A metodologia é baseada em Otimização de Risco, visando obter as variáveis de decisão ótimas tanto para o projeto inicial, quanto para a manutenção e inspeção, de maneira conjunta. As variáveis de decisão consideradas no modelo são a espessura da chapa e os intervalos de inspeção. O modelo é desenvolvido a partir da Mecânica da Fratura Probabilística. O objetivo é a combinação entre um projeto confiável com manutenções preventivas e reduzir os custos ao longo do ciclo de vida. Dessa maneira, os autores chegam a um equilíbrio ideal entre custos iniciais (de projeto e construção) e custos de manutenção. É obtido também o nível de confiabilidade ótimo de componentes sujeitos à fadiga.

Um exemplo numérico de um detalhe estrutural sujeito à fadiga é utilizado para validar o método proposto, comparando-o com dois outros modelos. Os autores concluem através do exemplo que o modelo proposto gerou reduções de custos ao longo do ciclo de vida superiores às dos outros dois modelos testados. Através do modelo desenvolvido, é possível obter estratégias otimizadas, que variam desde maiores custos iniciais e menos manutenções até menores custos iniciais e mais manutenções, assim, o projetista pode escolher a alternativa mais adequada às suas necessidades.

Kroetz et al. (2020) propõem um modelo para a resolução de problemas de Otimização de Risco variante no tempo, com a implementação de modelos substitutos associados à simulação de Monte Carlo, baseados em Krigagem Adaptativa. Eles argumentam que problemas de Otimização de Risco variantes no tempo requerem o uso de Simulação de Monte Carlo, e dessa maneira se tornam muito onerosos computacionalmente. Para contornar esse desafio, são utilizados modelos substitutos para aproximar tanto a função objetivo quanto a equação de estado limite do problema. Segundo os autores, a Otimização de Risco é uma abordagem que permite alcançar o equilíbrio ideal entre segurança e economia em dimensionamentos estruturais.

O modelo proposto é validado por meio de três exemplos ilustrativos: dois relacionados a sistemas sujeitos a degradação com cargas e resistências estocásticas e um relacionado a falhas dependentes do caminho de carga. Os problemas utilizam estados limites analíticos e numéricos, através do Método dos Elementos Finitos. Os autores observam através dos exemplos que o modelo desenvolvido reduziu significativamente o número de chamadas da função objetivo e da equação de estado limite dos problemas estudados. Entretanto, eles reconhecem que o número de avaliações do modelo pode ser muito alto em problemas onde a probabilidade de falha é muito baixa e as séries temporais exigem um grande número de pontos de discretização.

Beck, Da Rosa Ribeiro e Valdebenito (2020) estudam o projeto de estruturas sujeitas a danos locais causados por cargas anormais de baixíssima probabilidade de ocorrência, como explosões de gás e bombas, incêndios severos, colisões de veículos, erros humanos graves e ataques terroristas. Eles desenvolvem uma formulação para o projeto ideal de estruturas capazes de suportar cargas mesmo após falhas de colunas, como estruturas em pórtico, a partir da análise de risco de colapso progressivo em cenários de remoção de colunas. A probabilidade de perda de colunas é considerada como um parâmetro independente. O modelo desenvolvido permite a análise das condições que tornam uma estrutura desse tipo economicamente viável por meio de uma análise do custo ao longo do ciclo de vida.

Os autores aplicam a formulação a exemplos de projetos de vigas contínuas, pisos de concreto armado e estruturas em pórtico. Eles concluem que, à medida que as colunas colapsam, as falhas por flexão e as falhas por colapso em paneleira competem entre si. Além disso, a probabilidade de perda de colunas tem um grande impacto no custo total esperado. Os autores definem um limite para essa probabilidade, de maneira que a estrutura apresente um maior custo-benefício em comparação com aquelas que não são projetadas para resistir ao colapso de colunas.

Beck (2020) desenvolve uma formulação para a aplicação da Otimização de Risco e da Otimização Baseada em Confiabilidade em sistemas redundantes (hiperestáticos) simples de duas barras sob tração, considerando tanto redundâncias ativas quanto passivas. O estudo aborda o colapso progressivo e são consideradas as incertezas físicas associadas às resistências dos materiais e às cargas aplicadas. Fatores não estruturais, como cargas não previstas, qualidade de fabricação, qualidade da mão de obra e erros humanos são incorporados ao problema por meio

da consideração de uma probabilidade de falha latente. Os resultados demonstraram que a probabilidade de falha latente é o parâmetro que mais tem impacto na determinação da solução ótima tanto no RO quanto no RBDO. O autor observa que, quando a probabilidade de falha latente é menor que a probabilidade de falha alvo, os projetos redundantes e não redundantes tornam-se equivalentes. Contudo, quando a confiabilidade latente é inferior à confiabilidade ótima, só é possível obter o projeto ótimo quando o sistema é redundante.

Pontes de aço estão sujeitas a intensos efeitos de corrosão, e diferentes estratégias de manutenção e projeto têm sido propostas ao longo dos anos para diminuir os riscos associados. Han, Yang e Frangopol (2021) desenvolveram uma estratégia de manutenção para determinar quais vigas de pontes de aço carbono devem ser substituídas por vigas de material resistente a corrosão, o aço A709-50CR, a partir de um modelo de otimização baseado em confiabilidade e risco. O modelo é biobjetivo: busca minimizar a probabilidade de falha ao longo do ciclo de vida e o custo ao longo do ciclo de vida da estrutura, que incluem os custos de construção e de manutenção. Essa estratégia é comparada com duas outras: a construção de uma ponte inteiramente em aço A709-50CR e a repintura frequente de pontes de aço carbono para evitar os efeitos da corrosão.

Os autores concluíram que pontes em que a correlação variável no tempo entre as resistências das vigas é alta, podem demandar um maior orçamento do que pontes com uma baixa correlação entre as vigas. Além disso, pontes com sistemas redundantes apresentam menos riscos e, portanto, necessitam de um orçamento de manutenção menor em comparação com pontes com sistemas em série. Eles também concluíram que o aço A709-50CR é geralmente mais custo-efetivo do que o aço carbono. Por fim, concluíram que é economicamente mais vantajoso aplicar repintura frequente para pontes de aço carbono e construir pontes de A709-50CR do que construir pontes inteiramente de aço carbono.

Ghorbani, Nourelfath e Gendreau (2022) desenvolvem um modelo de programação não linear estocástica para obter um plano de manutenção ótimo para sistemas baseados em manutenção seletiva. O objetivo é minimizar os custos de manutenção e os custos esperados de falha, além de maximizar a probabilidade de sucesso da próxima missão. A abordagem é realizada em duas etapas: a primeira trata das decisões de manutenção entre duas missões consecutivas, e a segunda, das decisões a respeito do nível mínimo de confiabilidade necessário e da

probabilidade de sucesso da próxima missão. Os autores mencionam que o problema da manutenção seletiva geralmente é abordado de forma determinística; entretanto, a consideração das incertezas no modelo resulta em uma estimativa mais precisa da confiabilidade do sistema. Eles argumentam que a consideração conjunta dos custos esperados de falha e dos custos de manutenção é uma ferramenta importante para gestores ao tomarem decisões sobre a manutenção de sistemas.

Carlton et al. (2022) desenvolveram um método para a resolução de problemas de Otimização de Risco, no qual a probabilidade de falha é aproximada por meio do uso dos Limites de Chernoff, e a otimização é realizada por um algoritmo de descida de gradiente estocástico (*Stochastic Gradient Descent* – SGD). Os autores justificam que o uso dos Limites de Chernoff para aproximar a probabilidade de falha é adequado para problemas em que o FORM não é preciso, ou quando modelos substitutos sofrem com a maldição da dimensionalidade. Além disso, eles afirmam que o uso dos Limites de Chernoff elimina a necessidade de calcular o gradiente das equações de estado-limite. Ainda sobre o uso dos Limites de Chernoff, os autores desenvolveram um método para ajustar os limites ideais a cada iteração, buscando uma maior precisão na estimativa. O método foi aplicado a três exemplos numéricos para validá-lo, e foi capaz de alcançar a solução ótima nos três casos.

Rodrigues da Silva, Torii e Beck (2023) abordam a otimização baseada em confiabilidade e a Otimização de Risco no projeto ótimo de treliças sujeitas a incertezas epistêmicas, por meio da consideração da probabilidade de falha latente na formulação, considerando o colapso progressivo. A probabilidade de falha latente é obtida de forma subjetiva, e está relacionada à probabilidade de falha devido às condições do ambiente em que o sistema estrutural se encontra, sendo dependente de fatores não estruturais relacionados às incertezas epistêmicas. As incertezas epistêmicas, segundo os autores, estão relacionadas a erros grosseiros no projeto e na construção, cargas não consideradas, erros humanos ou operação negligente. Os autores aplicam a formulação desenvolvida a dois estudos de caso, comparando os resultados com o uso da RBDO convencional, RBDO com incertezas epistêmicas, RO convencional e RO com incertezas epistêmicas.

Eles demonstram, por meio dos estudos de caso, que, quando se considera a probabilidade de falha latente na formulação, podem ocorrer três situações: o projeto ótimo não ser influenciado pelas incertezas epistêmicas, quando estas são pequenas em relação às demais incertezas do modelo, resultando em estruturas isostáticas; o

projeto ótimo ser fortemente influenciado pelas incertezas epistêmicas, quando estas são equivalentes às demais incertezas do modelo, resultando em estruturas hiperestáticas não redundantes; ou o projeto ótimo se tornar redundante, quando as incertezas epistêmicas são muito grandes, fazendo com que a estrutura precise se tornar redundante para que sua confiabilidade seja maior que a confiabilidade latente do sistema, visando reduzir os custos esperados de falha.

Seguindo essa linha de pesquisa, Beck, Rodrigues da Silva e Miguel (2023) formalizam a consideração das incertezas epistêmicas em projetos baseados em Otimização baseada em Confiabilidade e Otimização de Risco, por meio do uso da probabilidade de falha latente. Eles reconhecem que a probabilidade de falha latente deve ser estimada de forma subjetiva, com base em uma análise holística do sistema estrutural e do ambiente em que ele se encontra, o que pode não ser ideal. Entretanto, defendem que a não consideração desse parâmetro, ou seja, assumir que a probabilidade de falha latente é igual a zero, pode ser ainda mais prejudicial, conforme demonstrado na análise realizada no estudo. Por fim, os autores concluem que os sistemas estruturais devem ser redundantes para mitigar o impacto das incertezas epistêmicas e evitar o colapso progressivo ou a redução grave do desempenho estrutural.

Ainda dentro da linha de pesquisa sobre incertezas epistêmicas, Beck e Stewart (2023) fazem uma análise do custo ao longo do ciclo de vida de edifícios de concreto armado sujeitos a risco de explosão. As incertezas relacionadas às explosões são tratadas de forma independente de fatores externos. Os autores avaliam o ponto de equilíbrio entre reforçar a estrutura para mitigar os efeitos de colapso desproporcional, reduzindo o custo esperado de falha, ou diminuir o reforço, aumentando o custo esperado de falha. O reforço estrutural é considerado através do uso do Método do Caminho de falha Alternativo. Assim, é desenvolvida uma formulação de Otimização de Risco para buscar o projeto ideal em termos de custo ao longo do ciclo de vida da estrutura. O risco de explosão é considerado em três cenários: dois envolvendo veículos-bomba e um de menor escala, considerando a explosão de uma bomba em mala.

São analisados quatro edifícios diferentes em relação às dimensões globais, vãos e andares. Por meio da aplicação da formulação desenvolvida nos três cenários, os autores identificam o ponto de equilíbrio ideal, determinando a probabilidade anual de ameaça correspondente a um custo total esperado equivalente tanto para um

projeto convencional quanto para um projeto reforçado. Essa probabilidade anual de ameaça ótima pode ser utilizada como parâmetro para determinar em qual situação é mais benéfico, economicamente, reforçar a estrutura ou manter o projeto convencional. Os autores também analisam a possibilidade de reforçar um elemento estrutural específico do edifício, de modo que seja possível remover um ou dois pilares da estrutura, determinando um ponto de equilíbrio ideal para esse caso.

Dentro da linha de pesquisa sobre a aplicação de Otimização de Risco na determinação de um plano ideal de manutenções periódicas de componentes, Dui, Lu e Chen (2024) desenvolvem uma formulação completa para otimização do custo total esperado ao longo do ciclo de vida. Eles argumentam que a maioria dos estudos aborda os custos considerando apenas as etapas de manutenção e operação, sendo necessário adotar abordagens que levem em conta todos os custos aos quais o sistema está sujeito, inclusive os custos iniciais. As principais contribuições do artigo são: a determinação de um ponto de equilíbrio entre continuar realizando manutenções nos componentes do sistema ou encerrar a vida útil do sistema em caso de falha dos componentes; e uma análise do custo ao longo do ciclo de vida em projetos cujos recursos financeiros são limitados, considerando que alguns componentes são mais prioritários para manutenção do que outros.

O método desenvolvido é validado por meio de dois exemplos. Em um dos exemplos, que trata de uma aeronave, os autores determinam quais componentes geram uma redução de custos totais esperados. Em contrapartida, eles identificam que, se determinados componentes forem submetidos à manutenção antes do momento adequado, isso pode resultar em um aumento no custo esperado de falha, elevando o custo total esperado. Eles concluem que isso demonstra que é possível obter economia nos processos de inspeção e manutenção por meio de uma boa gestão de recursos e que a melhoria na qualidade da manutenção não necessariamente reduz o custo de falha.

Dos Santos, Beck e Lopez (2024) desenvolvem um modelo para a aplicação de Otimização de Risco em sistemas de engenharia modelados como osciladores não lineares sujeitos a excitação aleatória. O modelo envolve a aplicação de dinâmica estocástica e confiabilidade dependente do tempo. O custo esperado de falha é estimado por meio do uso de uma expansão arbitrária de polinômios do caos, uma variante técnica da expansão de polinômios do caos, com o objetivo de evitar a

utilização da simulação de Monte Carlo. Os autores argumentam que a simulação de Monte Carlo pode ser computacionalmente muito onerosa para esse tipo de problema.

Para o problema de minimização do custo ao longo do ciclo de vida, os autores utilizam um algoritmo meta-heurístico de Recozimento Simulado sequencial, uma abordagem que aplica o Recozimento Simulado convencional com uma melhoria sequencial, onde cada nova iteração utiliza as soluções ótimas anteriores como pontos iniciais. Três exemplos são desenvolvidos para validar o modelo proposto, e os autores concluem que o modelo foi bastante eficiente para esse caso em particular.

Pandey et al. (2024) fazem uma revisão dos avanços na segurança de vida das estruturas ao longo dos últimos 50 anos. Dentre outros temas relacionados à segurança de vida, a revisão aborda o desenvolvimento da análise de custo ao longo do ciclo de vida das estruturas, considerando os custos esperados de falha. Importantes discussões são feitas sobre a determinação desses custos esperados de falha. Além disso, o estudo apresenta recomendações para pesquisas futuras nessa área.

3 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO META-HEURÍSTICOS

Após a revisão sistemática da literatura sobre Otimização de Risco, identificou-se que essa abordagem enfrenta grandes desafios relacionados ao custo computacional e à convergência para soluções globalmente ótimas. Abordagens de otimização que utilizam gradientes, embora eficientes para problemas convencionais, frequentemente enfrentam dificuldades para evitar mínimos locais em problemas altamente não lineares, como os de Otimização de Risco. A estrutura da Otimização de Risco, em que a probabilidade de falha é calculada a cada chamada da função objetivo no processo de otimização, pode tornar o problema extremamente custoso em termos computacionais, especialmente com o uso de métodos como a Simulação de Monte Carlo, que, em determinados cenários, é a única alternativa viável.

Nesse contexto, os métodos de otimização meta-heurística mostram-se bastante aplicáveis. Eles baseiam-se em fenômenos biológicos, processos evolutivos e comportamentais, fenômenos físicos, além de comportamentos geopolíticos e socioculturais. Esses métodos têm ganhado crescente aceitação na comunidade acadêmica devido à sua abrangência e precisão na resolução de problemas complexos e à facilidade de implementação, especialmente quando comparados aos métodos tradicionais. Por possuírem uma característica de ampla diversificação dentro do espaço de projeto, esses métodos favorecem a convergência para pontos de ótimo global. Nos últimos anos, tem-se observado a eficácia dessas abordagens em diversos problemas, em detrimento de métodos clássicos, como o Simplex, a Programação Sequencial Quadrática e o Método de Newton, já que não exigem cálculos complexos, como as derivadas das funções objetivo.

Nesta seção, serão apresentados dez métodos de otimização meta-heurísticos selecionados com o objetivo de realizar uma análise comparativa de desempenho. A escolha dos algoritmos baseou-se em sua ampla utilização na literatura, visando avaliar seu potencial de aplicação em problemas de Otimização de Risco.

3.1 OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS (PSO – PARTICLE SWARM OPTIMIZATION)

O método de Otimização por Enxame de Partículas (PSO – *Particle Swarm Optimization*) é um método baseado no comportamento de colônias de animais, como formigas, abelhas, peixes e pássaros. Proposto inicialmente por Kennedy e Eberhart (1995), diferentemente dos algoritmos genéticos que se baseiam na evolução, este método se baseia em comportamento. Em uma colônia em busca de comida, cada indivíduo, ou “partícula”, tem dois componentes de comportamento: o comportamento de grupo e o individual. Os membros do grupo, ao mesmo tempo que permanecem relativamente próximos, buscam individualmente por comida. Quando um deles localiza o alvo, ele transmite a informação aos outros indivíduos, e o grupo altera sua posição.

O método considera que os indivíduos (partículas) possuem duas componentes principais: direção e velocidade. Quando uma partícula localiza um caminho promissor, essa informação é comunicada às demais partículas e elas ajustam suas posições e velocidades em função da informação recebida. A partir desse comportamento, é possível localizar o ponto ótimo. De acordo com Rao (2009), o comportamento da colônia é baseado em três fatores:

- a) Coesão: manter-se juntos;
- b) Separação: não se aproximar muito;
- c) Alinhamento: seguir a direção geral do bando.

De acordo com o autor, as partículas inicialmente são posicionadas em posições aleatórias no espaço de projeto e passam a se movimentar de acordo com esses três fatores. Quando um dos pontos localiza o máximo (ou mínimo) da função objetivo, ele transmite essa informação aos demais pontos, que ajustam suas posições e velocidades para perseguir o ponto ótimo, mas não imitando exatamente a primeira partícula, pois cada uma delas mantém sua componente de individualidade.

Segundo Rao (2009), assumindo um problema de maximização da forma descrita em (45):

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar:} && f(\mathbf{d}) \\
&\text{Sujeito a:} && \mathbf{d}^{(l)} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^{(u)},
\end{aligned} \tag{45}$$

onde $\mathbf{d}^{(l)}$ e $\mathbf{d}^{(u)}$ são os limites inferior e superior de $\mathbf{d}$, respectivamente, as seguintes etapas são necessárias no método da Otimização por Enxame de Partículas:

- 1) Adota-se um tamanho N para o enxame de partículas. Um tamanho razoável é entre 20 e 30 partículas;
- 2) Gera-se a população inicial de $\mathbf{d}$ aleatoriamente entre os limites inferior e superior na forma $\mathbf{d}_1(0), \mathbf{d}_2(0), \dots, \mathbf{d}_N(0)$;
- 3) Denomina-se a posição da partícula j na iteração i como $\mathbf{d}_j^{(i)}$ e sua velocidade como $\mathbf{V}_j^{(i)}$;
- 4) Encontra-se a velocidade das partículas. A velocidade inicial de todas as partículas é tomada como zero;
- 5) Define-se a iteração como $i = 1$;
- 6) A cada iteração i , calcula-se os seguintes parâmetros:
 - a. O melhor valor histórico (em todas as iterações até o momento) de $\mathbf{d}_j(i)$ (coordenadas da partícula j na iteração atual), que gera o maior valor de $f[\mathbf{d}_j(i)]$, e chama-se esse ponto de $\mathbf{P}_{b,j}$; ao melhor valor de $\mathbf{d}_j(i)$ de todas as partículas N em todas as iterações até o momento, que gera o maior valor de $f[\mathbf{d}_j(i)]$, dá-se o nome de $\mathbf{G}_b$;
 - b. A velocidade da partícula j na iteração atual, com a Equação (46):

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_j(i) = & \mathbf{V}_j(i-1) + k_1 a_1 [\mathbf{P}_{b,j} - \mathbf{d}_j(i-1)] \\
& + k_2 a_2 [\mathbf{G}_b - \mathbf{d}_j(i-1)]; j = 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{46}$$

sendo que k_1 e k_2 são as taxas de aprendizado cognitivo (individual) e social (grupo) e a_1 e a_2 são números aleatórios entre 0 e 1;

- c. A posição da partícula j na iteração atual, com a Equação (47):

$$\mathbf{d}_j(i) = \mathbf{d}_j(i - 1) + \mathbf{V}_j(i); j = 1, 2, \dots, N; \quad (47)$$

d. Os valores das funções objetivo de cada partícula;

7) Verifica-se se a convergência foi atingida. Caso o critério de convergência não seja atendido, retorna-se ao passo 6 com $i = i + 1$.

Shi e Eberhart (1999) introduziram um parâmetro de inércia θ ao cálculo da velocidade da partícula, pois notaram que a velocidade das partículas mudava muito rapidamente, de forma que muitas vezes ignoravam a solução ótima. Este parâmetro é adaptado a cada iteração e segue a Equação (48) (Rao, 2009):

$$\theta = \theta_{max} - \left(\frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{i_{max}} \right) i, \quad (48)$$

onde θ_{max} e θ_{min} são os valores inicial e final de θ , comumente tomados como 0,9 e 0,4, respectivamente. i_{max} , por sua vez, é o valor máximo de iterações do algoritmo. Este parâmetro é incorporado na Equação (46) de acordo com a Equação (49):

$$\mathbf{V}_j(i) = \theta \mathbf{V}_j(i - 1) + k_1 a_1 [\mathbf{P}_{b,j} - \mathbf{d}_j(i - 1)] + k_2 a_2 [\mathbf{G}_b - \mathbf{d}_j(i - 1)]; \quad (49)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

3.2 RECOZIMENTO SIMULADO (SIMULATED ANNEALING)

O método de Recozimento Simulado é uma abordagem meta-heurística de otimização, proposta por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983), que se baseia nas características do recozimento térmico de um sólido aquecido. Quando um sólido, como um metal, é aquecido até atingir um estado de fusão, os átomos se movem livremente. Contudo, durante o processo de resfriamento, esses átomos têm a tendência de se organizar, formando cristais com a menor energia interna possível. Esse resfriamento deve ser controlado de maneira gradual, permitindo que os cristais se formem de modo a minimizar a energia interna. Esse processo de diminuir a temperatura de maneira controlada é denominado recozimento.

O método de Recozimento Simulado em otimização simula esse processo de recozimento de um metal, visando encontrar o menor valor para a função objetivo. Para alcançar esse objetivo, é introduzido um parâmetro de temperatura controlado

pela distribuição probabilística de Boltzmann. Essa distribuição implica que a energia (E) de um sistema em equilíbrio térmico a uma temperatura T é distribuída probabilisticamente conforme a relação mostrada em (50) (Rao, 2009):

$$P(E) = e^{-E/kT}, \quad (50)$$

onde $P(E)$ é a probabilidade de atingir um nível de energia E e k é a constante de Boltzmann. Para uma variável de projeto $\mathbf{d}_i$, de função objetivo $f_i = f(\mathbf{d}_i)$, se escreve a Equação (51):

$$E_i = f_i = f(\mathbf{d}_i). \quad (51)$$

De acordo com o critério estabelecido por Metrópolis et al. (1953, apud Rao, 2009), a probabilidade de selecionar próximo ponto de projeto depende da diferença de energia, conforme (52):

$$\Delta E = \Delta f = f_{i+1} - f_i = f(\mathbf{d}_{i+1}) - f(\mathbf{d}_i). \quad (52)$$

O próximo ponto de projeto pode ser obtido por meio da Equação (53):

$$P[E_{i+1}] = \min\{1, e^{-\Delta E/kT}\}. \quad (53)$$

De acordo com Rao (2009), a constante de Boltzmann pode ser adotada como tendo valor unitário, por simplicidade. Em um método de minimização convencional, faz sentido assumir que, se $\Delta E \leq 0$, então f_{i+1} é menor que f_i , portanto, seria lógico utilizar esse ponto. Porém, o critério de Metropolis permite a aceitação de um ponto onde a energia é maior que a anterior, desde que $e^{-\Delta E/kT}$ seja menor que 1.

As seguintes etapas são necessárias no método do Recozimento Simulado (Rao, 2009):

- 1) Inicia-se com um ponto $\mathbf{d}_1$ ($i = 1$) e um alto valor de temperatura T ;
- 2) Gera-se um novo ponto de projeto aleatório na vizinhança do ponto atual, e calcula-se a diferença do valor das funções conforme (54):

$$\Delta E = \Delta f = f_{i+1} - f_i = f(\mathbf{d}_{i+1}) - f(\mathbf{d}_i). \quad (54)$$

- 3) Se f_{i+1} for menor que f_i ($\Delta f < 0$) aceita-se ponto $\mathbf{d}_{i+1}$ como o novo ponto de projeto;
- 4) Se $\Delta f > 0$, aceita-se o ponto $\mathbf{d}_{i+1}$ como o novo ponto de projeto somente se o valor de um número gerado aleatoriamente for menor que $e^{-\Delta E/kT}$;
- 5) Se o número gerado aleatoriamente for maior que $e^{-\Delta E/kT}$, rejeita-se o ponto $\mathbf{d}_{i+1}$;
- 6) Se o ponto $\mathbf{d}_{i+1}$ for rejeitado, o processo de gerar um novo ponto de projeto aleatoriamente na vizinhança do ponto de projeto atual, calcular f , e decidir aceitar esse ponto baseado no critério de Metropolis continua;
- 7) Para simular o equilíbrio térmico, um pré-determinado número (n) de novos pontos $\mathbf{d}_{i+1}$ é testado em um valor específico de temperatura T ;
- 8) Quando todos os pontos n em determinada temperatura T são testados, a temperatura T é diminuída em um valor fracional c ($0 < c < 1$) e o processo inteiro é repetido;
- 9) Caso a convergência tenha sido atingida, encerra-se o processo.

3.3 OTIMIZAÇÃO POR COLÔNIA DE FORMIGAS (ANT COLONY OPTIMIZATION – ACO)

Proposto por Colorni, Dorigo e Maniezzo (1991), o algoritmo de Otimização por Colônia de Formigas é inspirado no comportamento coletivo de formigas na determinação da rota mais curta entre sua colônia e a fonte de comida, mesmo sendo criaturas quase cegas. As formigas inicialmente seguem caminhos aleatórios para explorar a área ao redor do ninho em busca de comida. Na volta para o ninho, as formigas liberam feromônios para informar as demais sobre a quantidade e a qualidade do alimento encontrado. Quanto mais curta for a rota, mais as formigas tendem a utilizá-la e a liberar mais feromônio, o que faz com que a rota mais curta vá, aos poucos, se tornando o caminho preferencial de todas elas. Com isso, os autores criaram o modelo de colônias de formigas artificiais.

Segundo Rao (2009), o algoritmo para o ACO discreto é estabelecido da seguinte forma:

- 1) Define-se um número N de formigas da colônia;
- 2) Um número de valores discretos possíveis para cada variável de projeto d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) é estabelecido;
- 3) Adota-se o mesmo valor para a quantidade de feromônio τ_{ij} para cada valor discreto das variáveis de projeto. Na primeira iteração ($l = 1$), esse valor pode ser tomado como 1;
- 4) Calcula-se a probabilidade de selecionar o valor discreto x_{ij} usando a Equação (55):

$$p_{ij} = \frac{\tau_{ij}^{(l)}}{\sum_{m=1}^p \tau_{im}^{(l)}}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (55)$$

Dessa forma, a formiga k localizada no nó i utiliza a trilha de feromônios τ_{ij} para calcular a probabilidade de selecionar j como o próximo nó;

- 5) Os valores discretos utilizados (caminhos) são escolhidos através de uma seleção aleatória de números gerados entre 0 e 1, utilizando o intervalo de probabilidade cumulativa associada a cada caminho pela Equação (55);
- 6) Geram-se N números aleatórios $a_1, a_2, \dots, a_N$ entre 0 e 1 para cada formiga e seleciona-se o caminho cujo intervalo de probabilidade cumulativa contenha a_i ;
- 7) Repete-se o passo 6 para todas as variáveis de projeto $i = 1, 2, \dots, n$;
- 8) Calcula-se o valor da função objetivo para cada valor de d_i das formigas e determinam-se o pior e o melhor caminho selecionados pelas diferentes formigas;
- 9) A convergência é considerada atingida quando todas as formigas escolhem o mesmo caminho;
- 10) Caso ainda não se tenha atingido a convergência, considera-se que todas as formigas retornam ao ninho, e o processo é reiniciado com a iteração $l = l + 1$, onde os feromônios de cada valor discreto (caminho) devem ser atualizados usando a Equação (56):

$$\tau_{ij}^{(l)} = \tau_{ij}^{(o)} + \sum_k \Delta \tau_{ij}^{(k)}, \quad (56)$$

onde $\tau_{ij}^{(o)}$ é a quantidade de feromônio antes da evaporação, dada pela Equação (57):

$$\tau_{ij}^{(o)} = (1 - \rho)\tau_{ij}^{(l-1)}, \quad (57)$$

sendo ρ o fator de evaporação do feromônio, que varia de 0,5 a 0,8, e $\Delta\tau_{ij}^{(k)}$ é o feromônio depositado, dado pela Equação (58):

$$\Delta\tau_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\xi f_b}{f_w}; & \text{se } (i, j) \in \text{melhor caminho global} \\ 0; & \text{outros} \end{cases} \quad (58)$$

onde ξ é um parâmetro usado para controlar a atualização global de feromônio, f_b é o melhor valor da função objetivo e f_w é o pior valor da função objetivo.

11) Repetem-se os passos de 4 a 10 até a convergência.

Inicialmente, o modelo foi criado para a resolução de problemas discretos, o que dificultava a adaptação desse algoritmo para problemas com variáveis contínuas. Essa adaptação só era possível se o domínio fosse convertido em um conjunto de valores finitos. Na prática, isso torna o algoritmo pouco eficiente para problemas contínuos, o que pode reduzir a precisão dos resultados e demandar mais tempo computacional ou uma maior discretização do domínio ao longo das iterações.

Assim, Socha e Dorigo (2008) propuseram uma extensão da Otimização por Colônia de Formigas para domínios contínuos. O modelo do ACO para domínios contínuos, proposto por Socha e Dorigo, é estabelecido da seguinte maneira: o espaço de busca D é definido para um número finito de variáveis de decisão contínuas e um número n de restrições nas variáveis, enquanto uma função objetivo $f: D \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é minimizada. A solução ótima (d^*) é aquela que minimiza a função objetivo $f(d)$, respeitando as restrições estabelecidas.

No ACO tradicional, aplicado a problemas combinatórios, as formigas buscam a solução com base em probabilidades discretas. Já no ACO para domínios contínuos, os valores são amostrados a partir de uma função de densidade de probabilidade, tornando o espaço de busca contínuo.

Sabendo que o cálculo da função de distribuição cumulativa de probabilidades não é uma tarefa simples, os autores optam pelo uso da função gaussiana, que, entretanto, não é adequada para explorar o espaço de busca de forma eficaz, uma vez que ela possui somente uma moda. Assim, os autores sugerem o uso de um Kernel Gaussiano, que combina várias funções gaussianas em uma soma ponderada,

onde cada função tem um peso, uma média e um desvio padrão. A PDF associada à variável x é definida pela Equação (59):

$$G^i(x) = \sum_{l=1}^k \omega_l \frac{1}{\sigma_l^i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_l^i)^2}{2\sigma_l^{i2}}}, \quad (59)$$

onde k é o número de funções gaussianas que constituem o Kernel Gaussiano, ω é o peso associado a cada função gaussiana do Kernel, μ é a média e σ é o desvio padrão. O peso ω , por sua vez, é calculado como em (60):

$$\omega_l = \frac{1}{qk\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-1)^2}{2q^2-k^2}}, \quad (60)$$

onde q é um parâmetro utilizado no algoritmo para equilibrar as soluções entre focar nas melhores soluções, quanto menor for o valor de q , e distribuir mais uniformemente o peso entre as soluções, quanto maior for o valor de q .

As formigas selecionam valores para as variáveis com base na PDF, que, por sua vez, é influenciada por feromônios que representam as melhores soluções encontradas nas iterações anteriores. No ACO para domínios contínuos, os feromônios são representados a partir de um arquivo de soluções AR de tamanho k , que armazena os valores das variáveis e das funções objetivo. Essas soluções geram PDFs gaussianas centradas em torno das melhores soluções encontradas, que guiam as formigas na busca da melhor solução. As piores soluções são removidas do arquivo para manter o tamanho do arquivo constante.

A probabilidade de a formiga escolher uma das funções gaussianas do arquivo de soluções é dada pela Equação (61):

$$P_l = \frac{\omega_l}{\sum_{r=1}^k \omega_r}. \quad (61)$$

Após escolher a gaussiana, um valor para a variável d_i é amostrado dela. Neste trabalho, será usada a função de seleção por roleta.

O desvio padrão é calculado pela distância entre a solução escolhida s_l e as outras soluções no arquivo s_e , conforme Equação (62):

$$\sigma_l^i = \xi \sum_{e=1}^k \frac{|s_e^i - s_l^i|}{k-1}, \quad (62)$$

onde o parâmetro $\xi > 0$ equivale ao fator de evaporação do ACO discreto. Quanto maior o valor de ξ , menor a velocidade de convergência do algoritmo, e quanto menor, maior a exploração do espaço.

O algoritmo utilizado neste trabalho foi adaptado de Heris (2015a) para a linguagem Python. O pseudocódigo é apresentado a seguir:

- 1) Define-se a função objetivo e determinam-se o número de variáveis de projeto e seus limites inferiores e superiores;
- 2) Define-se o tamanho da população k (número de soluções a serem armazenadas), o tamanho da amostra (número de soluções geradas em cada iteração) e o valor dos parâmetros q e ξ ;
- 3) Gera-se a população inicial, ou seja, para cada formiga geram-se valores aleatórios dentro dos limites estabelecidos, e calcula-se o valor da função objetivo para cada valor;
- 4) Ordenam-se as soluções encontradas da melhor para a pior, e define-se o indivíduo com a melhor solução até o momento;
- 5) Calculam-se os pesos baseados na posição de cada formiga a partir da Equação (60);
- 6) Calcula-se a probabilidade de seleção através da Equação (61);
- 7) Calcula-se a média da população, para cada variável, e o desvio padrão a partir de (62);
- 8) Seleciona-se um indivíduo utilizando o método de seleção por roleta;
- 9) Gera-se um valor aleatório para cada variável, usando a média e o desvio padrão do indivíduo selecionado, restringindo-se aos limites superior e inferior, e calcula-se o custo da nova solução;
- 10) Combina-se a população atual com as novas soluções geradas, ordena-se da melhor para a pior solução e excluem-se as piores soluções, mantendo-se o tamanho original do arquivo;

- 11) Armazena-se o valor da melhor solução encontrada até o momento e avalia-se o critério de convergência;
- 12) Caso a convergência tenha sido atingida, encerra-se o algoritmo. Caso contrário, retorna-se ao passo 7 e repete-se o loop até a convergência.

3.4 ALGORITMO GENÉTICO (GENETIC ALGORITHM – GA)

O Algoritmo Genético, proposto inicialmente por Holland (1975), é um tipo de algoritmo de otimização baseado em genética e seleção natural. Nesse tipo de algoritmo, o valor da função objetivo assume o papel de aptidão genética, e, a cada nova geração, um novo conjunto de cadeias é gerado por meio dos operadores genéticos Reprodução, Crossover e Mutação, com base na aptidão dos indivíduos da geração anterior. As variáveis são representadas por meio de cadeias de números binários, 0 e 1.

Para cada variável d_i , $i = 1, 2, \dots, n$, seu vetor é representado por uma cadeia de comprimento total nq . Em termos gerais, se um número binário é dado por $b_q b_{q-1} \dots b_2 b_1 b_0$, onde $b_k = 0$ ou $1, k = 0, 1, 2, \dots, q$, o seu decimal equivalente y é dado pela Equação (63):

$$y = \sum_{k=0}^q 2^k b_k. \quad (63)$$

Para uma variável contínua d de limites inferior e superior $d^{(l)}$ e $d^{(u)}$, respectivamente, representada por uma cadeia de q números binários, seu decimal é dado pela Equação (64):

$$d = d^{(l)} + \frac{d^{(u)} - d^{(l)}}{2^q - 1} \sum_{k=0}^q 2^k b_k. \quad (64)$$

De maneira que o número q de dígitos binários necessário para representar uma variável contínua em acurácia Δd é dado por (65):

$$2^q \geq \frac{d^{(u)} - d^{(l)}}{\Delta d} + 1. \quad (65)$$

De acordo com Rao (2009), em GA, o objetivo é maximizar uma função de aptidão $F(\mathbf{d})$, Equação (66):

$$F(\mathbf{d}) = \frac{1}{1 + f(\mathbf{d})}, \quad (66)$$

onde $f(\mathbf{d})$ é a função objetivo a ser minimizada.

Existem três operadores genéticos principais nos quais se baseia o método: Reprodução, Crossover e Mutação. O processo se inicia com uma população fixa de n cadeias aleatórias de vetores de projeto. Os valores de aptidão $F(\mathbf{d})$ são determinados para cada cadeia, e a população passa pelos três operadores genéticos para produzir uma nova população.

Na reprodução, um operador é utilizado para selecionar cadeias com aptidão acima da média da população atual e inserir cópias dessas cadeias no grupo de acasalamento. A probabilidade de selecionar uma cadeia i de aptidão F_i , dentro de uma população de tamanho n , para o grupo de acasalamento é dada pela Equação (67):

$$p_i = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^n F_j}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (67)$$

A aptidão média da população é dada pela Equação (68):

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F_j. \quad (68)$$

A probabilidade acumulada de a i -ésima cadeia ser copiada para o grupo de acasalamento é dada pela Equação (69):

$$P_i = \sum_{j=1}^i p_j. \quad (69)$$

Segundo Rao (2009), esse processo simula o princípio da “sobrevivência do mais apto” da genética, uma vez que cadeias com maiores valores de aptidão são selecionadas com maior frequência. Assim, cadeias melhores sobrevivem e se reproduzem.

Após a reprodução, inicia-se o processo de Crossover, onde as informações entre pares de cadeias (pais) são trocadas para gerar novas cadeias (filhos). Nem todas as cadeias são selecionadas para passar pelo processo de crossover, sendo utilizada uma probabilidade p_c para selecionar cadeias para o processo. Isso é feito para que boas cadeias sejam mantidas para o próximo grupo de acasalamento.

Por fim, o processo de mutação ocorre da seguinte maneira: a partir de uma probabilidade p_m , os dígitos binários das cadeias são alterados de 1 para 0 e vice-versa. A mutação ajuda o algoritmo a não ficar estagnado em mínimos locais, pois aumenta a exploração do espaço.

O pseudocódigo para maximizar a função de aptidão $F(\mathbf{d})$ é apresentado a seguir (Rao, 2009):

- 1) Definem-se os parâmetros de entrada: comprimento l , tamanho da população m , probabilidade de crossover p_c , probabilidade de mutação p_m e número máximo de gerações (iterações);
- 2) Gera-se uma população aleatória de tamanho m , cada uma sendo uma cadeia de comprimento $l = nq$;
- 3) Calcula-se os valores de aptidão F_i , $i = 1, 2, \dots, m$;
- 4) Realiza-se o processo de reprodução;
- 5) Realiza-se o processo de crossover;
- 6) Realiza-se o processo de mutação;
- 7) Calculam-se os valores de F_i para as m cadeias da nova população;
- 8) Armazena-se a melhor solução encontrada e avalia-se o critério de convergência. Caso o critério seja atingido, encerra-se a operação. Caso contrário, retorna-se ao passo 4.

Neste trabalho, foi implementado o algoritmo utilizando a biblioteca DEAP em Python, com a definição dos seguintes métodos dentro do algoritmo: crossover de dois pontos, mutação gaussiana e reprodução por torneio.

No método de crossover de dois pontos, a partir da probabilidade selecionada, dois indivíduos (pais) são selecionados para trocar informações entre si. Nesse método, dois pontos de corte são escolhidos aleatoriamente ao longo dos genes que representam cada indivíduo. Os genes situados entre esses dois pontos são trocados entre os dois indivíduos, gerando novos descendentes (filhos) com combinações de características dos pais.

No método de mutação Gaussiana, os indivíduos são selecionados para mutação com uma probabilidade determinada. Cada indivíduo é composto por múltiplos genes que representam variáveis de projeto. Cada gene do indivíduo tem uma probabilidade de ser selecionado para mutação. Caso um gene seja selecionado, um valor aleatório é adicionado a ele, gerado a partir de uma distribuição gaussiana.

No método de reprodução por torneio utilizado, uma quantidade de indivíduos é selecionada para competir entre si. N indivíduos são escolhidos aleatoriamente dentro da população total. Dentre esses N indivíduos, é feita a avaliação para identificar qual possui o melhor valor da função de aptidão, ou seja, o que gera o menor valor da função objetivo entre eles. Esse indivíduo é então selecionado como um dos pais para gerar novos indivíduos nos processos de cruzamento e mutação.

3.5 ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL (DIFFERENTIAL EVOLUTION – DE)

O Algoritmo de Evolução Diferencial é um método de otimização baseado em população. Foi proposto por Storn e Price (1997) com o objetivo de desenvolver um método de otimização que atendesse a quatro requisitos principais:

- 1) Capacidade de ser aplicável a funções objetivo não diferenciais, não lineares e multimodais;
- 2) Paralelismo, de forma que pudesse lidar com funções de alto custo computacional;
- 3) Facilidade de implementação e escolha dos parâmetros;
- 4) Boa convergência.

Com esses requisitos em vista, os autores propuseram um método simples, mas bastante eficiente. Ele se inicia com a definição da população inicial de tamanho NP , composta por vetores de parâmetros $d_{i,G}$, selecionados aleatoriamente dentro dos limites de projeto. $d_{i,G}$ representa o vetor de parâmetros da i -ésima solução na G -ésima geração. A população inicial é gerada de forma a cobrir todo o espaço de projeto ou é criada a partir de uma solução preliminar conhecida, atribuindo desvios a ela.

Na sequência, novos vetores de parâmetros são gerados por meio de uma operação chamada mutação. Na mutação, para cada vetor-alvo $d_{i,G}$, um vetor mutante é gerado através da Equação (70):

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{d}_{r_1,G} + F(\mathbf{d}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G}), \quad (70)$$

sendo que os índices $r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, NP\}$ devem ser diferentes entre si e diferentes do índice atual i . F é um fator que controla a amplificação da diferença entre dois vetores e varia no intervalo $[0, 2]$.

Após a mutação, inicia-se o processo de crossover, que tem como objetivo aumentar a diversidade das soluções, combinando os parâmetros do vetor mutante $\mathbf{v}_{i,G+1}$ com o vetor alvo $\mathbf{d}_{i,G}$ para gerar o vetor de teste $\mathbf{u}_{i,G+1}$, Equação (71):

$$u_{ji,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1}, & \text{se } rand_j \leq CR \text{ ou } j = j_{rand} \\ d_{ji,G}, & \text{se } rand_j > CR \text{ e } j \neq j_{rand} \end{cases}, \quad (71)$$

onde $u_{ji,G+1}$ é o j -ésimo elemento do vetor de teste, $rand_j$ é um número aleatório gerado no intervalo $[0, 1]$, CR é a taxa de crossover, que varia entre $[0, 1]$, e j_{rand} é um índice aleatório escolhido para garantir que pelo menos um parâmetro venha de $\mathbf{v}_{i,G+1}$.

Por fim, no passo chamado seleção, o vetor de teste $\mathbf{u}_{i,G+1}$ é comparado ao vetor alvo $\mathbf{d}_{i,G}$, conforme descrito em (72):

$$\mathbf{d}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,G+1}, & \text{se } f(\mathbf{u}_{i,G+1}) \leq f(\mathbf{d}_{i,G}) \\ \mathbf{d}_{i,G}, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (72)$$

O pseudocódigo para o Algoritmo de Evolução Diferencial (DE) é apresentado a seguir:

- 1) Definem-se os parâmetros iniciais: tamanho da população NP , constante de mutação F , constante de crossover CR ;
- 2) Inicializa-se a população de NP vetores $\mathbf{d}_{i,0}$ no espaço de busca e avalia-se o valor da função objetivo para cada vetor;
- 3) Realiza-se a mutação;
- 4) Realiza-se o crossover;
- 5) Realiza-se a seleção;
- 6) Verifica-se a convergência. Caso esta tenha sido atingida, encerra-se a operação. Caso contrário, retorna-se ao passo 3.

3.6 ALGORITMO DE COMPETIÇÃO IMPERIALISTA (IMPERIALIST COMPETITIVE ALGORITHM – ICA)

Proposto por Atashpaz-Gargari e Lucas (2007), o Algoritmo de Competição Imperialista é um método de otimização baseado em evolução. Os indivíduos da população são chamados de países e são de dois tipos: colônias e imperialistas, que juntos formam um império. Os países imperialistas competem entre si para dominar as colônias uns dos outros. As colônias, por sua vez, movem-se em direção ao país imperialista que as comanda. Como outros algoritmos baseados em evolução, um dos parâmetros do algoritmo equivale à aptidão do Algoritmo Genético. No caso do ICA, o poder de um império equivale à aptidão, que é inversamente proporcional ao custo da função objetivo.

O algoritmo se inicia com a definição dos países do mundo (N_{pop}), sendo que alguns são selecionados para serem os países imperialistas (N_{imp}) e o restante as colônias (N_{col}). Cada conjunto formado por um país imperialista e suas colônias é chamado de império, cujo poder total é a soma do poder do país imperialista e uma porcentagem da média do poder das colônias. O número de colônias de cada império é proporcional ao poder do país imperialista, segundo a Equação (73):

$$NC_n = \lfloor p_n N_{col} \rfloor, \quad (73)$$

onde NC_n é o número inicial de colônias do n-ésimo império e p_n é o poder normalizado de cada país imperialista, dado pela Equação (74):

$$p_n = \left| \frac{C_n}{\sum_{i=1}^{N_{imp}} C_i} \right|, \quad (74)$$

onde C_n é o custo normalizado do n-ésimo país imperialista, dado pela Equação (75):

$$C_n = c_n - \max_i \{c_i\}, \quad (75)$$

sendo c_n o custo do n-ésimo país imperialista.

As colônias seguem em direção ao país imperialista em x unidades, sendo x uma variável aleatória de distribuição uniforme, dada pela Equação (76):

$$x \sim U(0, ab), \quad (76)$$

onde a é um número arbitrário maior que 1 e b é a distância entre a colônia e o país imperialista. Para que exista um fator de exploração do espaço, o movimento da colônia é desviado por um ângulo θ , sendo este um número de distribuição uniforme, dado pela Equação (77):

$$\theta \sim U(-\gamma, \gamma), \quad (77)$$

onde γ é um parâmetro arbitrário. Os autores recomendam o valor de 2 para a e $\pi/4$ para γ . Caso a colônia atinja uma posição de custo menor que o país imperialista, o país imperialista toma o lugar da colônia.

O custo total do império é calculado através da Equação (78):

$$TC_n = C_{imp,n} + \xi \text{média}\{C_{col,n}\}, \quad (78)$$

onde TC_n é o custo total do n -ésimo império, $C_{imp,n}$, é o custo do n -ésimo país imperialista, ξ é um número positivo menor que 1 e $\text{média}\{C_{col,n}\}$ é o custo médio das colônias do n -ésimo império.

O próximo passo é a competição imperialista, onde os países mais fracos têm seu poder reduzido e os países mais fortes têm seu poder aumentado. Isso é feito selecionando a colônia mais fraca dentre todas as colônias e fazendo com que os impérios disputem sua posse. Inicialmente, é necessário calcular o custo total normalizado do n -ésimo império, através de (79):

$$NTC_n = TC_n - \max_i \{TC_i\}. \quad (79)$$

Com isso, a probabilidade de posse da colônia para cada império é dada pela Equação (80):

$$p_{p_n} = \frac{NTC_n}{\sum_{i=1}^{N_{imp}} NTC_i}. \quad (80)$$

É criado um vetor P que contém todas as probabilidades de cada império e um vetor R que números aleatórios entre 0 e 1. A subtração de P e R gera o vetor A . O império que possuir o maior valor de A tomará posse da colônia.

Ao longo das iterações, os países imperialistas que perderem a competição com outros países e tiverem todas as suas colônias tomadas são eliminados, fazendo com que, ao final das iterações, somente um país reste. Este será o país com mais poder, ou seja, com o menor custo da função objetivo.

O algoritmo utilizado neste trabalho foi adaptado de Heris (2015b) para a linguagem Python. O pseudocódigo é apresentado a seguir:

- 1) Definem-se os parâmetros de entrada: tamanho da população inicial (países), número de impérios iniciais, coeficientes α e ξ ;
- 2) Geram-se países aleatórios dentro dos limites das variáveis de projeto e calcula-se o custo de cada país;
- 3) Ordenam-se os países por custo e definem-se os impérios;
- 4) Distribuem-se as colônias para os impérios com base em seu poder;
- 5) Movem-se as colônias em direção ao império através das equações (76) e (77);
- 6) Se existir uma colônia com custo menor que o império, troca-se a posição do império com a colônia, a partir de uma probabilidade de revolução e intensidade de revolução;
- 7) Calcula-se o custo total de cada império através da Equação (78);
- 8) Realiza-se a competição imperialista;
- 9) Elimina-se os impérios sem colônias;
- 10) Avalia-se o critério de convergência. Caso o problema tenha convergido, encerra-se a operação; caso contrário, retorna-se ao passo 5.

3.7 ALGORITMO DOS VAGALUMES (FIREFLY ALGORITHM – FA)

O Algoritmo dos Vagalumes é um método de otimização proposto inicialmente por Yang (2009) e é inspirado no comportamento dos vagalumes na natureza. O autor

explica que as luzes produzidas pelos vagalumes têm duas funções fundamentais: atrair parceiros para acasalamento e atrair presas potenciais, por meio do ritmo, da taxa e do tempo que a luz permanece acesa. A intensidade da luz emitida pelos vagalumes I diminui conforme a distância r aumenta, de acordo com a relação estabelecida em (81):

$$I \propto \frac{1}{r^2}. \quad (81)$$

Observando isso, o autor percebeu que a intensidade da luz pode ser associada à função objetivo a ser otimizada.

As principais premissas que o algoritmo segue são:

- 1) Todos os vagalumes são considerados como sendo do mesmo sexo, de modo que eles sejam atraídos uns pelos outros independentemente do sexo;
- 2) A atratividade dos vagalumes é proporcional à intensidade da luz que eles emitem, ou seja, vagalumes menos luminosos serão atraídos por vagalumes mais luminosos. Caso não haja vagalumes mais luminosos que um dado vagalume, este se move em uma direção aleatória no espaço de projeto;
- 3) Para um problema de maximização, a intensidade da luz emitida pelo vagalume é proporcional ao valor da função objetivo.

A intensidade da luz é dada pela Equação (82):

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (82)$$

que pode ser simplificada na forma apresentada na Equação (83):

$$I(r) = \frac{I_0}{1 + \gamma r^2}, \quad (83)$$

onde $I(r)$ é a intensidade da luz emitida pelos vagalumes, I_0 é a intensidade de luz original, γ é um coeficiente de absorção da luz e r é a distância entre os vagalumes.

A atratividade dos vagalumes é proporcional à intensidade da luz, sendo definida pela Equação (84):

$$\delta(r) = \delta_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (84)$$

e pode ser simplificada na forma apresentada em (85):

$$\delta(r) = \frac{\delta_0}{1 + \gamma r^2}. \quad (85)$$

O movimento de um vagalume i em direção ao outro j é dado pela Equação (86):

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i + \delta_0 e^{-\gamma r^2} (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_i) + \alpha \left(rand - \frac{1}{2} \right), \quad (86)$$

onde α é um parâmetro para deixar o movimento mais aleatório e $rand$ é um número aleatório gerado entre $[0,1]$. O autor recomenda os valores de δ_0 igual a 1, $\alpha \in [0,1]$ e γ variando entre 0,01 e 100.

O algoritmo utilizado neste trabalho foi adaptado de Heris (2015c) para a linguagem Python. O pseudocódigo é apresentado a seguir:

- 1) Define-se a função objetivo e o tamanho da população (número de vagalumes);
- 2) Definem-se os parâmetros iniciais do problema: γ , δ_0 , α ;
- 3) Calcula-se a intensidade de luz de cada vagalume;
- 4) Se a intensidade de luz do vagalume j for maior que a do vagalume i , calcula-se a distância relativa entre os dois, o coeficiente de atração e move-se o vagalume i em direção ao vagalume j ;
- 5) Calcula-se o custo da nova posição e, se o custo for melhor, atualiza-se a posição do vagalume;
- 6) Ordenam-se os vagalumes por ordem de custo e mantém-se apenas os melhores custos dentro do tamanho da população definido inicialmente;

- 7) Avalia-se o critério de convergência. Caso tenha sido atingido, encerra-se a operação. Caso contrário, retorna-se ao passo 4.

3.8 OTIMIZAÇÃO POR ERVAS DANINHAS (INVASIVE WEED OPTIMIZATION – IWO)

A Otimização por Ervas Daninhas (Invasive Weed Optimization – IWO) é um algoritmo de otimização evolutivo proposto por Mehrabian e Lucas (2006), baseado no comportamento de adaptação, aleatoriedade e resistência das ervas daninhas na natureza. Ervas daninhas são plantas que nascem e crescem onde não são desejadas, possuindo grande adaptabilidade e resistência a herbicidas, causando danos a cultivos.

A simulação do processo de colonização das ervas daninhas, segundo os autores, começa pela inicialização da população, em que uma população inicial de sementes é definida e propagada ao longo do espaço de projeto. Os autores definiram que uma população entre 10 e 20 plantas apresentou desempenho satisfatório. Na sequência, é iniciado o processo de reprodução, em que as sementes crescem e se tornam flores capazes de gerar novas sementes. Quanto maior for a aptidão da planta, mais sementes ela gerará, seguindo uma relação linear. Os autores concluíram que um número de sementes entre 0 e 2 por planta é muito satisfatório.

Uma diferença desse método para outros métodos baseados em evolução é que indivíduos inviáveis (que não respeitam as restrições do problema) não são eliminados do processo de reprodução imediatamente. Isso ocorre porque, apesar de inviáveis, eles podem apresentar aptidão melhor do que outros indivíduos. Assim, a técnica de reprodução proposta permite o cruzamento entre espécies inviáveis com boa aptidão.

Em seguida, inicia-se o processo de dispersão espacial, em que as novas sementes são propagadas aleatoriamente no espaço de projeto, através de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão variável, e crescem como novas plantas. Assim, as plantas tendem a permanecer próximas aos pais. A cada geração (iteração), o desvio padrão é reduzido de acordo com a seguinte Equação (87):

$$\sigma_{it} = \frac{(it_{max} - it)^n}{(it_{max})^n} (\sigma_i - \sigma_f) + \sigma_f, \quad (87)$$

onde σ_i é o desvio padrão definido inicialmente, σ_f é o desvio padrão final, it_{max} é o número máximo de iterações e n é um índice de modulação não linear, cujo valor ideal é 3. Dessa forma, a probabilidade de uma semente ser propagada mais distante diminui a cada iteração.

Esse processo continua até que o número máximo de plantas, definido inicialmente, seja atingido. A partir desse ponto, inicia-se o processo de exclusão competitiva, no qual novas sementes são geradas e espalhadas no espaço de projeto, sendo, em seguida, analisadas junto aos pais para selecionar aquelas com maior aptidão, respeitando o limite máximo de indivíduos determinado inicialmente. As soluções com menor aptidão são eliminadas.

O processo continua até que o número máximo de iterações ou o critério de convergência definido seja atingido.

O algoritmo IWO utilizado neste trabalho foi adaptado de Heris (2015d) para a linguagem Python. O pseudocódigo é apresentado a seguir:

- 1) Definem-se os parâmetros de entrada: número máximo de iterações (it_{max}), tamanho inicial da população, tamanho máximo da população, número mínimo e máximo de sementes por planta, índice n , σ_i e σ_f ;
- 2) Gera-se aleatoriamente a posição de cada indivíduo da população inicial, respeitando os intervalos mínimos e máximos das variáveis de projeto, e calcula-se o custo associado a cada indivíduo;
- 3) Calcula-se o desvio padrão da iteração atual para controlar a dispersão das sementes ao redor da planta, de acordo com a Equação (87) e calcula-se o custo de cada planta;
- 4) Determina-se o pior e o melhor custo gerado pelas plantas, e a aptidão de cada planta é definida através de uma relação baseada no custo relativo de cada planta em relação ao melhor e ao pior custo, pela Equação (88):

$$r = \frac{(C_c - C_w)}{(C_b - C_w)}, \quad (88)$$

onde C_c é o custo da planta avaliada no momento, C_w é o pior custo gerado pelas plantas e C_b é o melhor custo gerado pelas plantas;

- 5) O número de sementes gerado pela planta avaliada é dado pela relação apresentada em (89):

$$S = \lfloor S_{min} + (S_{max} - S_{min}) * r \rfloor, \quad (89)$$

onde S_{min} é o número mínimo de sementes e S_{max} é o número máximo de sementes por planta;

- 6) Para cada planta, gera-se um número S de sementes, com posições baseadas em uma distribuição normal de desvio padrão σ_{it} , e calcula-se o custo de cada semente;
- 7) Agrupam-se todas as soluções geradas até o momento, incluindo as plantas pais e as sementes, e eliminam-se as piores, mantendo-se o número máximo de plantas adotado inicialmente;
- 8) Armazena-se a melhor solução encontrada e avalia-se o critério de convergência. Caso o critério seja atingido, encerra-se a operação. Caso contrário, retorna-se ao passo 3.

3.9 OTIMIZAÇÃO POR COLÔNIA ARTIFICIAL DE ABELHAS (ARTIFICIAL BEE COLONY OPTIMIZATION – ABC)

O algoritmo de Otimização por Colônia Artificial de Abelhas foi proposto por Karaboga (2005) e, assim como o PSO, é baseado em comportamento, especificamente no comportamento de uma colônia de abelhas em busca de comida. Segundo o autor, em uma colônia do tipo enxame, como colônias de cupins, vespas, abelhas e formigas, dois conceitos fundamentais são necessários: divisão de tarefas e auto-organização.

A divisão de tarefas é o comportamento em que cada indivíduo tem uma função específica dentro da colônia. Na colônia de abelhas, existem os forrageadores empregados e desempregados. Os empregados são aqueles que estão ocupados com uma fonte de comida específica e guardam informações sobre essa fonte, compartilhando-as com o restante da colônia com uma probabilidade proporcional à qualidade da fonte de comida. Os desempregados podem ser de dois tipos: os exploradores, que vasculham ao redor do ninho em busca de novas fontes de alimento e os expectadores que aguardam no ninho a informação trazida pelos empregados.

A auto-organização se baseia em quatro propriedades fundamentais:

- a) Feedback positivo: comportamento que indica a boa qualidade da fonte de comida, dependendo da proximidade ao ninho, quantidade e

- facilidade de extração. Em colônias de abelhas, esse feedback ocorre por meio da quantidade de expectadores visitando a fonte de comida;
- b) Feedback negativo: comportamento oposto ao anterior, indicando que a fonte de comida é escassa, foi esgotada ou evitando que todas as abelhas sigam para uma única fonte;
 - c) Flutuações: comportamento em que um indivíduo percorre um caminho errado ou aleatório, ampliando o espaço de busca;
 - d) Interações múltiplas: comportamento em que os indivíduos confiam e seguem os resultados dos demais. As abelhas compartilham informações sobre boas fontes de comida por meio de uma dança.

No algoritmo de colônia artificial de abelhas, metade da colônia é composta por empregados, metade por expectadores, e há um indivíduo explorador. Para cada fonte de comida, existe apenas um empregado. Quando essa fonte é esgotada, o empregado torna-se um explorador.

O algoritmo utilizado neste trabalho foi adaptado de Heris (2015e) para a linguagem Python. O pseudocódigo é apresentado a seguir:

- 1) Definem-se os parâmetros de entrada: máximo de iterações, tamanho inicial da população, parâmetro de abandono e coeficiente de aceleração;
- 2) Gera-se aleatoriamente a posição de cada abelha da população inicial, respeitando os limites das variáveis de projeto;
- 3) Calcula-se o custo associado a cada posição das abelhas e armazena-se o melhor custo até o momento;
- 4) Inicializa-se o contador de abandono para todas as abelhas com o valor zero;
- 5) Fase das abelhas empregadas: para cada abelha da população, seleciona-se outra abelha aleatoriamente e gera-se uma nova posição para a abelha a partir da diferença entre sua posição e a posição da abelha selecionada, de acordo com a Equação (90):

$$Pos_n = Pos_{a1} + \varphi(Pos_{a1} - Pos_{a2}), \quad (90)$$

Onde Pos_n é a nova posição, Pos_{a1} é a posição atual, Pos_{a2} é a posição da abelha selecionada aleatoriamente e φ é um parâmetro de

- perturbação aleatória que seleciona um valor entre -1 e 1 e multiplica pelo coeficiente de aceleração;
- 6) Calcula-se o custo da nova posição. Caso esse custo seja melhor, atualizam-se a posição e o custo da abelha. Caso contrário, incrementa-se o contador de abandono;
 - 7) Calcula-se a aptidão de cada abelha com os custos normalizados em relação ao melhor e ao pior custo da população. A probabilidade de seleção é dada pelo valor da aptidão do indivíduo dividido pela soma das aptidões da população;
 - 8) Fase das abelhas expectadoras: Cada abelha expectadora seleciona uma abelha empregada proporcionalmente à probabilidade de seleção calculada anteriormente e realiza-se o mesmo procedimento descrito nos itens 5 e 6 para cada abelha selecionada;
 - 9) Fase das abelhas exploradoras: Identificam-se as abelhas cujo contador de abandono ultrapassou o limite de abandono estabelecido e gera-se uma nova posição aleatória para essas abelhas. O contador de abandono é reiniciado;
 - 10) Armazena-se a melhor solução encontrada e avalia-se o critério de convergência. Caso o critério tenha sido atingido, encerra-se a operação. Caso contrário, retorna-se ao passo 5 e repete-se o processo até a convergência.

3.10 OTIMIZAÇÃO BASEADA NO ENSINO-APRENDIZADO (TEACHING-LEARNING-BASED OPTIMIZATION – TLBO)

O método de Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado é uma técnica proposta por Rao, Savsani e Vakharia (2011). Trata-se de um método baseado em população, onde uma população definida inicialmente busca o mínimo global em conjunto. O método se fundamenta na ideia de um grupo de professores ensinando a um grupo de alunos determinado assunto (os assuntos equivalem às variáveis de projeto). O aprendizado dos alunos segue uma distribuição normal, com média definida, e o professor equivale ao maior valor assumido nessa distribuição. O resultado do aprendizado dos alunos é equivalente à aptidão no Algoritmo Genético,

ou seja, corresponde ao valor assumido pela função objetivo, no caso de um problema de maximização.

Os autores defendem que métodos baseados em evolução comumente enfrentam a dificuldade de determinar os parâmetros do problema. Assim, os criadores do método TLBO levaram essa dificuldade em consideração ao desenvolvê-lo.

Este método é dividido em duas etapas principais: a fase do professor e a fase do estudante. Na primeira etapa, a média de conhecimento dos alunos se move em direção ao conhecimento do professor, dependendo da capacidade da turma, o que é um processo aleatório. Sendo M_i a média de conhecimento da turma e T_i o conhecimento do professor na iteração i , o professor busca mover a média dos alunos em direção ao seu nível. Assim, a nova média dos alunos se torna M_{new} . A diferença média DM_i é dada pela Equação (91):

$$DM_i = r_i(M_{new} - T_F M_i), \quad (91)$$

onde T_F é o fator de ensino, que pode ter valor igual a 1 ou 2 e r_i é um número aleatório entre 0 e 1. A partir da Equação (91), a solução do problema de otimização é atualizada conforme (92):

$$d_{n,i} = d_{o,i} + DM_i. \quad (92)$$

Na fase do estudante, um determinado estudante adquire mais conhecimento a partir da interação com outros estudantes. Esse processo ocorre da seguinte forma: dois estudantes aleatórios, d_i e d_j , são selecionados dentro da população definida no problema. Caso $f(d_i)$ seja menor que $f(d_j)$, o novo valor de d_i é adaptado conforme (93):

$$d = d_{old,i} + r_i(d_i - d_j). \quad (93)$$

Caso $f(d_i)$ seja maior que $f(d_j)$, o novo valor de d_i é adaptado conforme (94):

$$d_{new,i} = d_{old,i} + r_i(d_j - d_i). \quad (94)$$

Se o valor gerado na fase do aluno for menor que o valor de $d_{new,i}$ gerado na fase do professor, aceita-se esse como o valor final.

O algoritmo utilizado neste trabalho foi adaptado de Heris (2015f) para a linguagem Python. O pseudocódigo é apresentado a seguir:

- 1) Define-se o problema de otimização e os parâmetros iniciais: tamanho da população P_n e número máximo de gerações G_n ;
- 2) Gera-se uma população aleatória conforme o tamanho P_n definido inicialmente;
- 3) Executa-se a fase do professor;
- 4) Executa-se a fase do aluno;
- 5) Armazena-se a melhor solução encontrada e avalia-se o critério de convergência. Caso o critério tenha sido atingido, encerra-se a operação. Caso contrário, retorna-se ao passo 3 e repete-se o processo até a convergência.

4 COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Neste capítulo, será apresentada uma estrutura de benchmark desenvolvida com o objetivo de avaliar o desempenho dos métodos de otimização selecionados. Para isso, serão propostos quatro exemplos representativos, escolhidos de modo a refletir diferentes níveis de complexidade. Cada exemplo será resolvido utilizando os dez métodos previamente selecionados, aplicando-se os critérios de implementação estabelecidos na estrutura de benchmark. A partir dos resultados obtidos, será feita uma análise comparativa do desempenho dos métodos, considerando métricas como qualidade da solução, robustez e tempo de execução.

4.1 ESTRUTURA DE BENCHMARK PARA COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Nesta seção, serão apresentadas comparações da eficiência computacional e a robustez de diferentes métodos de otimização meta-heurística aplicados a problemas de Otimização de Risco. Para garantir que a comparação seja justa, criteriosa e replicável, foi necessário estabelecer uma estrutura de benchmark que fosse capaz de demonstrar a eficácia desses métodos, apesar das diferenças inerentes a cada um deles, visando minimizar qualquer viés na escolha dos parâmetros e na execução dos algoritmos.

Para isso, foram adotados os seguintes critérios:

- a) Foram selecionados quatro problemas representativos de Otimização de Risco, distintos entre si quanto ao número de variáveis de projeto, ordem de grandeza das probabilidades de falha, valores de índice de confiabilidade, modelagem matemática (com uso de funções analíticas ou elementos finitos) e dependência temporal da confiabilidade;
- b) Para cada problema, foram realizadas 30 execuções independentes de cada algoritmo, utilizando diferentes sementes de inicialização. A média e o desvio padrão dos resultados foram calculados para avaliar a robustez do método numérico diante da aleatoriedade dos métodos de Monte Carlo e de otimização meta-heurística utilizados;
- c) Os parâmetros específicos de cada método de otimização foram determinados com base em valores recomendados na literatura,

evitando-se calibração específica para cada problema. Essa escolha objetivou garantir uma comparação justa e impedir a introdução de vieses que poderiam favorecer determinados algoritmos em detrimento de outros;

- d) Para todos os métodos, o critério de convergência adotado foi a estabilização da função objetivo, definida como uma variação inferior a 0,1% entre iterações consecutivas durante pelo menos dez iterações sucessivas;
- e) Os resultados foram comparados considerando os valores médios da função objetivo, das variáveis de projeto, probabilidade de falha e índice de confiabilidade;
- f) Foi avaliada a qualidade da solução, analisando quais métodos obtiveram os melhores valores médios da função objetivo (menor custo total esperado);
- g) A eficiência computacional de cada algoritmo foi analisada com base em dois indicadores principais: o tempo médio de execução e o número médio de chamadas à função objetivo;
- h) Os resultados foram organizados graficamente por meio de *boxplots*, de modo a evidenciar a distribuição das soluções obtidas, o desempenho médio, a robustez dos métodos (por meio da dispersão dos dados) e a ocorrência de outliers.

Os métodos de otimização utilizados foram:

Método 1:	Otimização por Enxame de Partículas (PSO – <i>Particle Swarm Optimization</i>);
Método 2:	Recozimento Simulado (<i>Simulated Annealing</i> – SA);
Método 3:	Otimização por Colônia de Formigas (<i>Ant Colony Optimization</i> – ACO);
Método 4:	Algoritmo Genético (<i>Genetic Algorithm</i> – GA) ;
Método 5:	Algoritmo de Evolução Diferencial (<i>Differential Evolution</i> – DE);
Método 6:	Algoritmo de Competição Imperialista (<i>Imperialist Competitive Algorithm</i> – ICA);
Método 7:	Algoritmo dos Vagalumes (<i>Firefly Algorithm</i> – FA);

- Método 8:** Otimização por Ervas Daninhas (*Invasive Weed Optimization – IWO*);
- Método 9:** Otimização por Colônia Artificial de Abelhas (*Artificial Bee Colony Optimization – ABC*);
- Método 10:** Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado (*Teaching-Learning-Based Optimization – TLBO*);

Para todos os exemplos, o computador utilizado para a execução dos códigos possui processador Intel(R) Core(TM) i5-10300H CPU @ 2.50GHz, 8,00 GB de RAM instalada (7,80 GB utilizáveis), sistema operacional Windows 11 *Home Single Language* e placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 1650.

4.2 EXEMPLO 1: OTIMIZAÇÃO DE RISCO COM UMA FUNÇÃO OBJETIVO NÃO LINEAR, COM RESTRIÇÕES E UMA EQUAÇÃO DE ESTADO LIMITE

4.2.1 Formulação

Foi resolvido um exemplo numérico, adaptado de Kroetz, Tessari e Beck (2017), cuja função objetivo $f(\mathbf{d})$ é composta por variáveis determinísticas e pela probabilidade de falha que é associada a uma equação de estado limite $g(\mathbf{X})$. A função objetivo leva em consideração os custos de construção $C_c = 100$, de manutenção $C_m = 100$ e de falha $C_f = 10^7$. Os custos estão relacionados à função objetivo da seguinte maneira: o custo de construção é associado às variáveis de projeto d_1 e d_2 , o custo de manutenção é associado à variável d_2 e o custo de falha está associado à probabilidade de falha P_f . O problema de otimização é formulado conforme descrito em (95):

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar:} \quad & f(\mathbf{d}) = d_1 d_2 C_c + d_2^2 C_m + P_f C_f \\
 \text{Sujeito a:} \quad & 100 \leq d_1 \leq 1000 \\
 & 100 \leq d_2 \leq 1000 \\
 & \beta \geq 3.
 \end{aligned} \tag{95}$$

A probabilidade de falha é associada à equação de estado limite mostrada em (96):

$$g(\mathbf{X}) = d_1X_1 + d_2X_2 - X_3X_4, \quad (96)$$

sendo que as variáveis aleatórias X_1 , X_2 , X_3 e X_4 são tomadas como normais, dadas pelos momentos listados na TABELA 3.

TABELA 3 – EXEMPLO 1: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Variáveis aleatórias	Média	Desvio Padrão
X_1	1,0	0,1
X_2	1,0	0,1
X_3	80,0	4,0
X_4	6,0	0,6

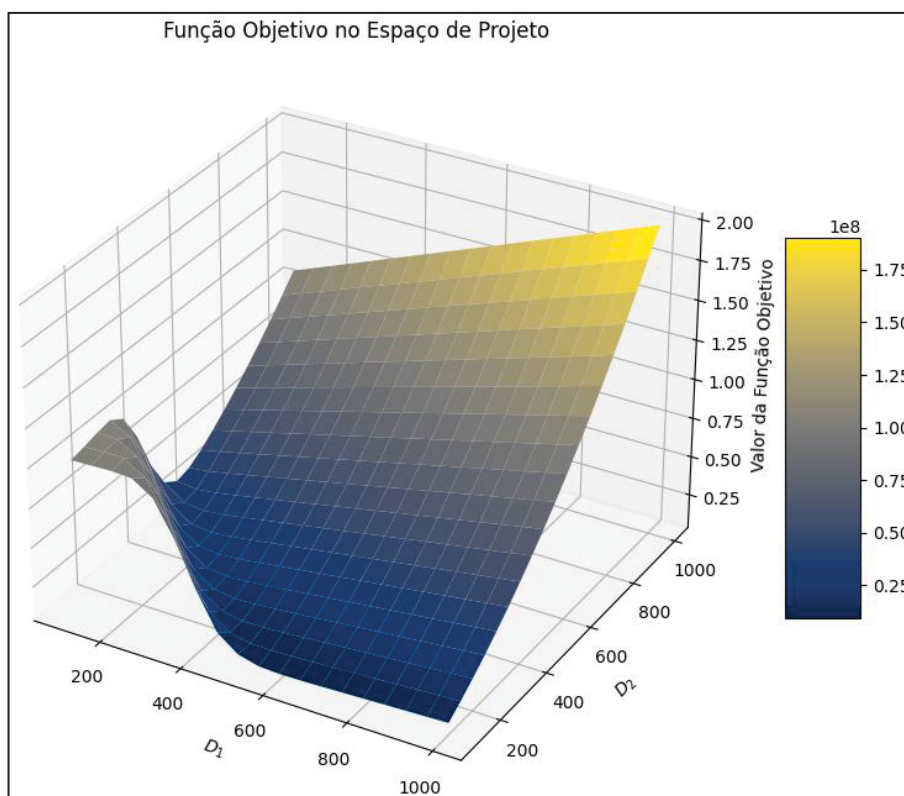
FONTE: Kroetz, Tessari e Beck (2017).

4.2.2 Implementação do problema

O problema foi implementado em Python, sendo a probabilidade de falha calculada através da Simulação de Monte Carlo com médias ponderadas, com 10^5 amostras, dentro do intervalo estabelecido para as variáveis aleatórias, entre os valores máximos e mínimos que essas variáveis assumem. A escolha 10^5 amostras foi estabelecida com base em simulações preliminares, que mostraram que mais amostras não melhoravam a precisão do cálculo da probabilidade de falha.

Para validar os resultados obtidos, a função objetivo do problema de otimização foi avaliada em todos os pontos de uma malha criada no espaço de projeto, considerando os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto e utilizando um passo de 50 unidades entre os pontos. A FIGURA 9 mostra a malha para uma semente de inicialização.

FIGURA 9 – EXEMPLO 1: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.



FONTE: A autora (2025)

Pela malha, identificou-se que o ponto de mínimo está próximo de $d_1 = 600$ e $d_2 = 100$.

4.2.3 Resultados e discussão

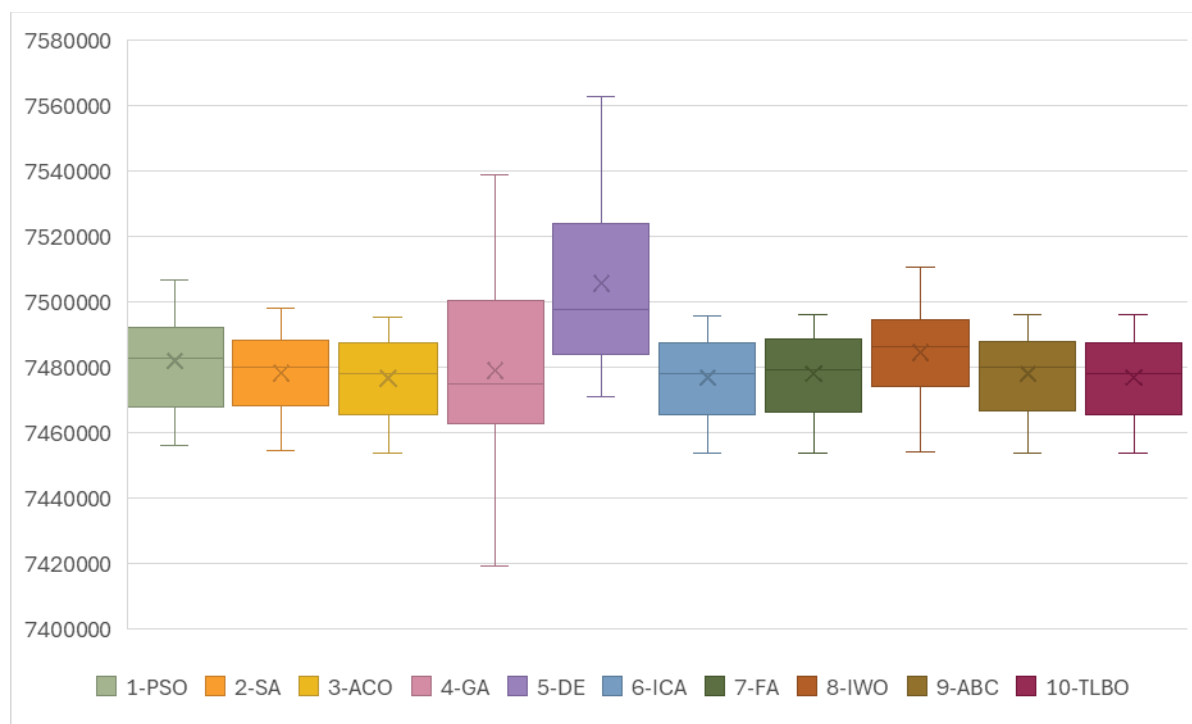
Após a obtenção das 30 soluções da função $f(\mathbf{d})$, Equação (95), para cada um dos dez métodos estudados, foram obtidos os valores médios e os desvios padrão das soluções. Esses resultados, correspondentes ao ponto ótimo $\mathbf{d}^*$, para cada configuração testada, estão apresentados na TABELA 4:

TABELA 4 – EXEMPLO 1: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO

Método	d_1^*		d_2^*		$f(d^*)$	
	Média	D.P.	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	635,16	1,79	100,00	0,00	7.482.498,67	15.784,90
SA	634,50	1,37	100,00	0,00	7.478.207,67	13.608,77
ACO	634,26	1,35	100,00	0,00	7.476.696,00	13.451,89
GA	635,00	3,32	100,00	0,00	7.479.046,67	32.749,54
DE	635,68	2,46	100,25	0,32	7.505.756,67	28.703,92
ICA	634,25	1,33	100,00	0,00	7.476.754,00	13.495,53
FA	634,39	1,38	100,00	0,00	7.477.916,33	13.785,77
IWO	635,47	1,56	100,00	0,00	7.484.550,33	13.801,28
ABC	634,42	1,33	100,00	0,00	7.477.929,67	13.555,14
TLBO	634,28	1,35	100,00	0,00	7.476.902,67	13.490,59

FONTE: A autora (2025).

A FIGURA 10 mostra os gráficos do tipo *boxplot* para cada configuração testada. O *boxplot* resume a distribuição de um conjunto de dados a partir de seus principais parâmetros estatísticos: o retângulo central, a caixa, representa o intervalo interquartil, que abrange 50% dos dados, do primeiro quartil, correspondente a 25% dos valores, ao terceiro quartil, correspondente a 75% dos valores. Dentro da caixa, uma linha indica a mediana, enquanto o “x” representa a média. Os bigodes se estendem até os valores mínimos e máximos dentro de um limite definido, enquanto os pontos fora desse intervalo são identificados como possíveis outliers.

FIGURA 10 – EXEMPLO 1: GRÁFICO *BOXPLOT* PARA A FUNÇÃO OBJETIVO.

FONTE: A autora (2025)

Neste exemplo, observa-se que a maioria dos métodos de otimização apresentou resultados consistentes e próximos entre si, com pouca variabilidade entre eles, sendo que, para a maior parte dos métodos, o valor da função objetivo manteve-se entre 7.475.000 e 7.485.000. A análise do *boxplot* (FIGURA 10) reforça essa conclusão, já que os desvios padrão das soluções, obtidos a partir de diferentes sementes de inicialização, foram relativamente baixos, ficando as caixas e bigodes próximos ao ponto médio. Todos os métodos convergiram para pontos próximos do ponto ótimo identificado na malha utilizada como referência (FIGURA 9).

Entretanto, destacam-se duas exceções em relação à variabilidade dos resultados: o Algoritmo Genético e o Algoritmo de Evolução Diferencial. Apesar de o Algoritmo Genético ter obtido uma média próxima dos demais métodos, a caixa e os bigodes ficaram extensos, indicando um desvio padrão elevado (32.749, conforme TABELA 4). Já o Algoritmo de Evolução Diferencial, além de ter obtido um desvio padrão relativamente alto (28.703, conforme TABELA 4) apresentou uma média superior às demais. No *boxplot*, nota-se que a caixa está posicionada acima das outras, evidenciando que as soluções obtidas por esse método tendem a ser maiores.

Por outro lado, os métodos que apresentaram os melhores desempenhos, tanto em termos de médias quanto de desvios padrão foram: Otimização por Colônia

de Formigas, Algoritmo de Competição Imperialista e Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado. Essa performance estável demonstra uma boa robustez dos métodos, frente à mudança das sementes de inicialização. Apesar disso, exceto os métodos do Algoritmo Genético e Algoritmo de Evolução Diferencial, todos os demais métodos apresentaram bons resultados, considerando a aleatoriedade inerente à simulação de Monte Carlo e aos métodos de otimização utilizados.

A solução ótima para todos os métodos é a solução em que d_2^* é igual a 100, que é o limite inferior imposto pelas restrições do problema. Isso indica que a solução ótima poderia ser melhor se a restrição fosse menos rigorosa, e que todos os métodos foram capazes de identificar a restrição corretamente.

Quanto à análise de confiabilidade, a TABELA 5 mostra a média e desvio padrão da probabilidade de falha e índice de confiabilidade para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização.

TABELA 5 – EXEMPLO 1: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE

Método	Probabilidade de falha		Índice de confiabilidade	
	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	0,0013	0,0000	3,01	0,01
SA	0,0013	0,0000	3,00	0,00
ACO	0,0013	0,0000	3,00	0,00
GA	0,0013	0,0000	3,01	0,01
DE	0,0013	0,0001	3,02	0,02
ICA	0,0013	0,0000	3,00	0,00
FA	0,0013	0,0000	3,00	0,00
IWO	0,0013	0,0000	3,01	0,01
ABC	0,0013	0,0000	3,00	0,00
TLBO	0,0013	0,0000	3,00	0,00

FONTE: A autora (2025).

Conforme observado na TABELA 5, todos os métodos de otimização convergiram para soluções que respeitam a restrição de um índice de confiabilidade (β) maior ou igual a 3. Este resultado evidencia que a solução ótima, desconsiderando um nível mínimo de confiabilidade, poderia ter um valor menor do que a obtida ao final da simulação, entretanto a probabilidade de falha dessa solução seria maior. Na teoria de Otimização de Risco, a inclusão do custo esperado de falha diretamente na função objetivo (como o produto entre o custo de falha e a probabilidade de falha) deveria guiar o processo de otimização para soluções que conciliem baixo custo e alta

confiabilidade. Soluções com alta probabilidade de falha resultariam automaticamente em valores elevados para a função objetivo, fazendo com que os métodos de otimização não convirjam para esses pontos.

Contudo, uma das grandes vantagens da Otimização de Risco é sua flexibilidade. Mesmo que os pesos iniciais não sejam ideais, é possível garantir um nível de confiabilidade adequado ao incluir restrições específicas no problema. Isso proporciona uma dupla verificação da confiabilidade durante o processo de otimização.

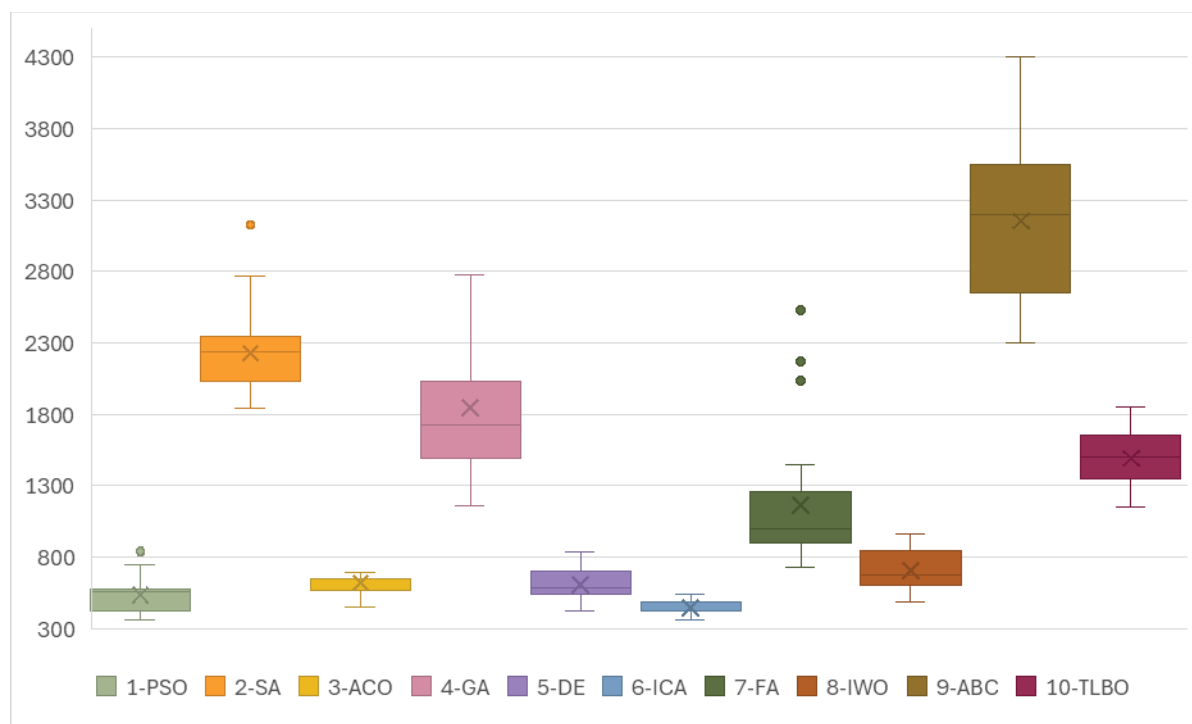
Quanto ao custo computacional, a TABELA 6 mostra a média e desvio padrão do tempo de execução do código e número de chamadas da função objetivo para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização. A FIGURA 11 mostra os gráficos do tipo *boxplot* do número de chamadas da função objetivo para cada configuração testada.

TABELA 6 – EXEMPLO 1: CUSTO COMPUTACIONAL

Método	Tempo (s)		Número de chamadas	
	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	0,52	0,12	533	132
SA	2,34	0,50	2230	279
ACO	0,71	0,18	618	58
GA	1,20	0,35	1848	466
DE	0,71	0,16	606	108
ICA	0,70	0,08	444	51
FA	1,15	0,42	1164	454
IWO	0,65	0,13	705	145
ABC	2,96	0,60	3153	594
TLBO	1,37	0,19	1493	210

FONTE: A autora (2025).

FIGURA 11 – EXEMPLO 1: GRÁFICO BOXPLOT PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.



FONTE: A autora (2025)

Verifica-se pela leitura da TABELA 6 e FIGURA 11 que todos os métodos convergiram para a solução ótima muito rapidamente, na ordem de segundos. Sendo assim, para esse problema específico, o custo computacional não foi um fator restritivo para selecionar qualquer um dos métodos de otimização meta-heurística como melhor ou pior. Para comparar a eficiência computacional dos métodos, pode ser mais adequado considerar o número de chamadas à função objetivo. Nesse sentido, os métodos que apresentaram o melhor desempenho foram os métodos da otimização por Enxame de Partículas e o Algoritmo de Competição Imperialista. Os métodos do Recozimento Simulado, Algoritmo Genético e o Algoritmo de Otimização por Colônia Artificial de Abelhas tiveram um número maior de chamadas da função objetivo.

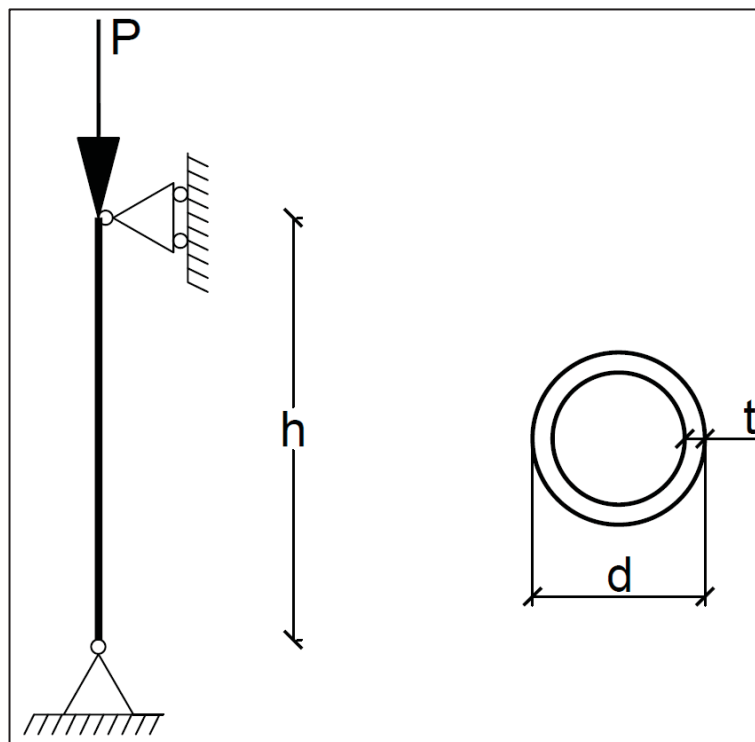
4.3 EXEMPLO 2: OTIMIZAÇÃO DE RISCO DE UMA COLUNA E CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

4.3.1 Formulação

O segundo exemplo trata da Otimização de Risco de uma coluna de aço, cuja probabilidade de falha é associada a um sistema de equações de estado limite em

série, conforme descrito por Enevoldsen e Sørensen, 1994. A FIGURA 12 mostra a coluna.

FIGURA 12 – COLUNA VERTICAL TUBULAR EM AÇO.



FONTE: Adaptado de Enevoldsen e Sørensen (1994)

A função objetivo do problema é associada ao custo C_1 , que corresponde ao custo inicial de $20.000 / m^3$, à altura da coluna $h = 25,0 m$, ao diâmetro e à espessura do tubo, de valores iniciais $d = 2,0 m$ e $t = 0,008 m$, ao custo de falha de valor $C_f = 10^9$ e à probabilidade de falha P_f . O problema de otimização é formulado conforme Equação (97):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar:} && C_T(d, t) = C_1 h \pi d t + C_f P_f \\
 &\text{Sujeito a:} && 1,0 m \leq d \leq 3,0 m \\
 & && 0,004 m \leq t \leq 0,015 m \\
 & && \beta_i \geq 4, \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{97}$$

A probabilidade de falha é associada a um sistema em série de três equações de estado limite. A primeira delas refere-se ao estado limite de escoamento do pilar, dado pelas Equações (98) e (99):

$$g_y = f_y - S, \quad (98)$$

$$S = \frac{P}{\pi d t}, \quad (99)$$

sendo f_y a tensão de escoamento e S a tensão axial normal na coluna.

A segunda equação de estado limite diz respeito ao estado limite de flambagem local, dado pelas Equações (100), (101), (102), (103) e (104):

$$g_{lb} = f_{lb} - S, \quad (100)$$

$$f_{lb} = \left(1,5 - \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_b\right) f_y, \quad (101)$$

$$\lambda_b = \sqrt{\frac{f_y}{\theta_b S_{el}}}, \quad \text{para } \sqrt{1/2} \leq \lambda_b \leq \sqrt{2}, \quad (102)$$

$$S_{el} = \frac{2Et}{d\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (103)$$

$$\theta_b = \frac{k_d}{\sqrt{1 + 0,005 d/t}}, \quad (104)$$

em que λ_b é o índice de esbeltez relativo, S_{el} é a tensão crítica teórica de acordo com a teoria da elasticidade e θ_b é um fator de correção que considera as imperfeições com o fator de redução k_d , E é o módulo de elasticidade e $\nu = 0,3$ é o coeficiente de Poisson.

A terceira equação de estado limite diz respeito ao estado limite de flambagem global, dado pelas Equações (105), (106) e (107):

$$f_{gb} = \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1/\lambda_e^2}\right) f_y, \quad (105)$$

$$\gamma = \frac{1}{2\lambda_e^2} (\lambda_e^2 + k_i(\lambda_e - 0,2) + 0,8), \quad (106)$$

$$\lambda_e = \frac{h}{0,35d\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}}, \quad (107)$$

onde γ e k_i são parâmetros que levam em conta as imperfeições do material. A carga P , a tensão de escoamento f_y , o módulo de elasticidade E , o fator de redução k_d e o parâmetro de imperfeição k_i são todos tomados como variáveis aleatórias, dadas pelos momentos listados na TABELA 7.

TABELA 7 – EXEMPLO 2: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Variáveis aleatórias	Distribuição	Média	CV
P	Normal	10,0 MN	20%
E	Lognormal	$2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$	5%
f_y	Lognormal	650 MN/m^2	5%
k_d	Normal	0,54	16%
k_i	Normal	0,49	10%

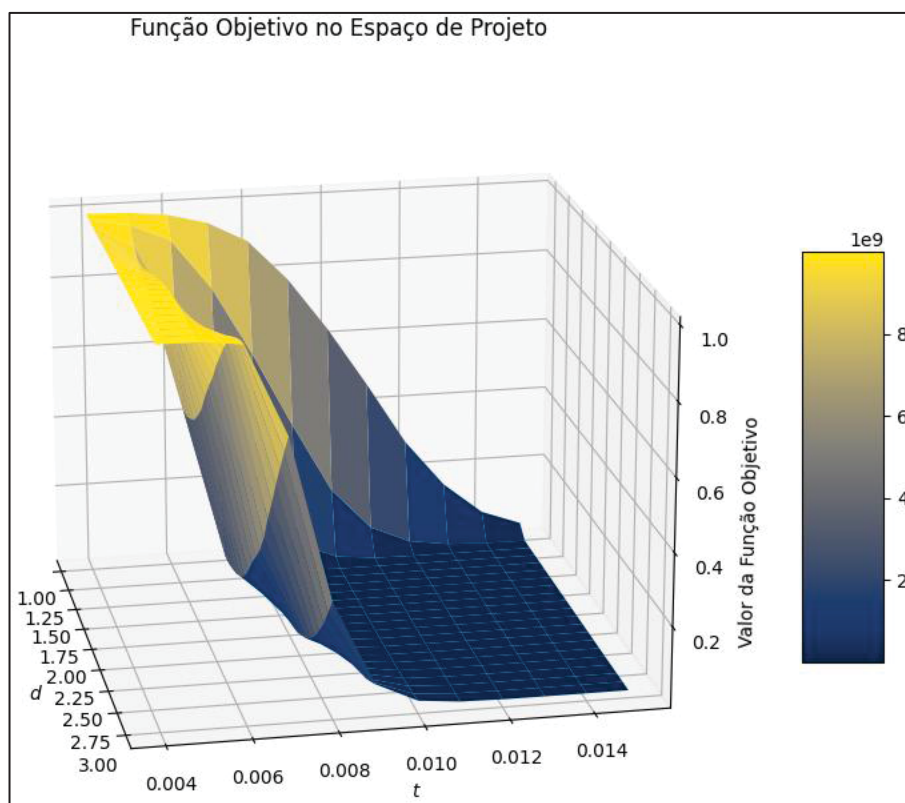
FONTE: Enevoldsen e Sørensen (1994).

4.3.2 Implementação do problema

O problema foi implementado em Python, sendo a probabilidade de falha calculada através da Simulação de Monte Carlo com médias ponderadas, com 10^5 amostras, dentro do intervalo estabelecido para as variáveis aleatórias, entre os valores máximos e mínimos que essas variáveis assumem. A escolha 10^5 amostras foi estabelecida com base em simulações preliminares, que mostraram que mais amostras não melhoravam a precisão do cálculo da probabilidade de falha.

Para validar os resultados obtidos, a função objetivo do problema de otimização foi avaliada em todos os pontos de uma malha criada no espaço de projeto, considerando os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto e utilizando um passo de 0,1 unidades para a variável d e 0,001 unidades para a variável t . A FIGURA 13 mostra a malha para uma semente de inicialização.

FIGURA 13 – EXEMPLO 2: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.



FONTE: A autora (2025)

Pela malha, identificou-se que o ponto de mínimo está próximo de $d = 1,30$ e $t = 0,013$.

4.3.3 Resultados e discussão

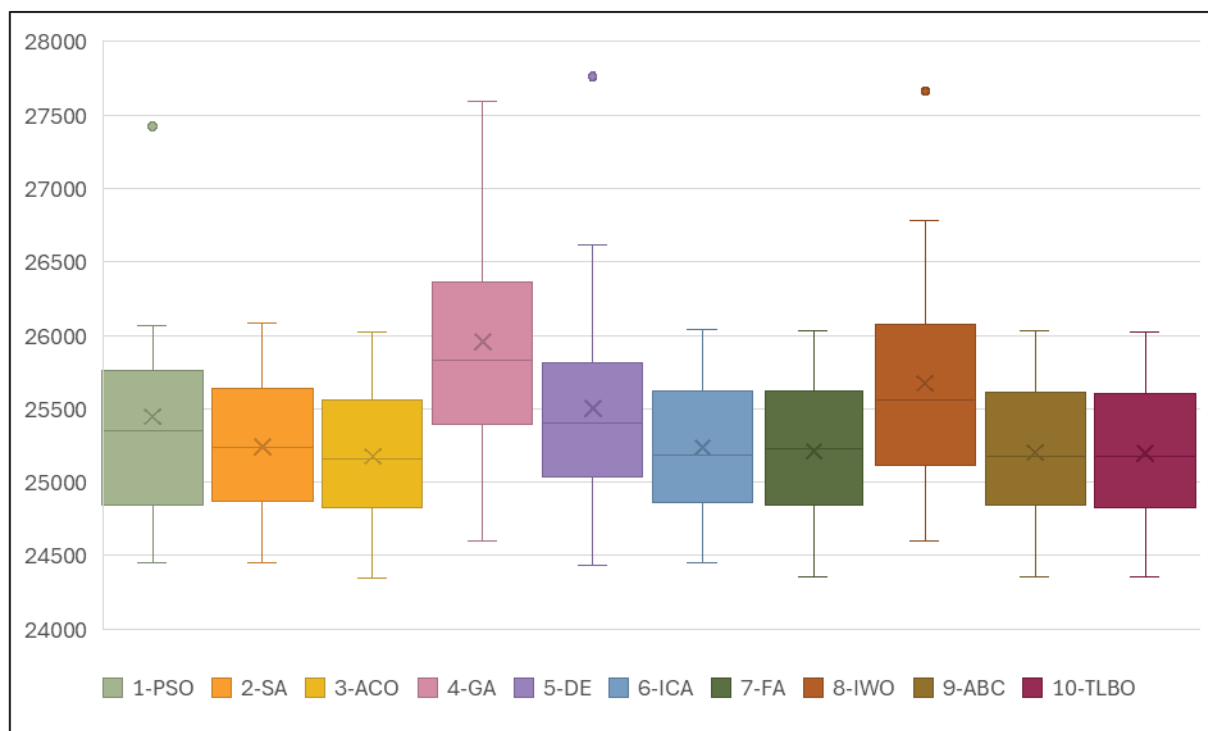
Após a obtenção das 30 soluções da função $C_T(d, t)$ (Equação (97)), para cada um dos dez métodos estudados, foram obtidos os valores médios e os desvios padrão das soluções. Esses resultados, correspondentes ao ponto ótimo, para cada configuração testada, estão apresentados na TABELA 8, além dos resultados obtidos por Enevoldsen e Sørensen em seu artigo:

TABELA 8 – EXEMPLO 2: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO

Método	d^*		t^*		$C_T(d^*, t^*)$	
	Média	D.P.	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	1,301	0,033	0,0123	0,0007	25.444,95	782,45
SA	1,309	0,019	0,0121	0,0004	25.267,08	447,00
ACO	1,310	0,018	0,0120	0,0004	25.195,81	443,56
GA	1,297	0,041	0,0125	0,0007	25.954,31	820,84
DE	1,310	0,022	0,0122	0,0004	25.515,93	680,04
ICA	1,307	0,018	0,0121	0,0004	25.237,24	425,24
FA	1,309	0,018	0,0121	0,0004	25.212,44	443,16
IWO	1,312	0,028	0,0123	0,0005	25.671,38	660,15
ABC	1,310	0,017	0,0120	0,0003	25.200,63	440,07
TLBO	1,311	0,018	0,0120	0,0004	25.195,47	441,82
Original	1,400	-	0,0103	-	23.000,00	-

FONTE: A autora (2025).

A FIGURA 14 mostra os gráficos do tipo *boxplot* para cada configuração testada.

FIGURA 14 – EXEMPLO 2: GRÁFICO *BOXPLOT* PARA A FUNÇÃO OBJETIVO.

FONTE: A autora (2025)

A partir da análise dos resultados apresentados na TABELA 8 e FIGURA 14, em geral, para este problema, observa-se que todos os métodos convergiram para soluções muito próximas e equivalentes, com a função objetivo variando dentro de um intervalo entre 25.100 e 25.500 para a maioria dos métodos. Em comparação com o

exemplo anterior, as caixas e os bigodes não ficaram tão compactos, demonstrando uma dispersão maior dos resultados. Isso era esperado, já que se trata de um problema de confiabilidade de sistemas regido por três equações de estado limite complexas. Alguns métodos obtiveram pontos de outlier.

Todos os métodos convergiram para pontos próximos do ponto ótimo identificado na malha (FIGURA 13). Além disso, todas as soluções convergiram para resultados próximos aos apresentados no artigo original. Os métodos que obtiveram o melhor desempenho em relação ao valor médio da função objetivo foram: o método do Recozimento Simulado, a Otimização por Colônia de Formigas, o Algoritmo de Competição Imperialista, o Algoritmo dos Vagalumes, a Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e a Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado. Esses métodos não apenas resultaram em soluções com médias menores, mas também apresentaram menor dispersão dos resultados, ou seja, menor desvio padrão.

Neste problema, as variáveis de projeto d e t não ficaram restritas exatamente aos limites inferior ou superior estabelecidos nas restrições do problema. A solução ótima convergiu para um resultado intermediário.

Diferentemente do problema anterior, o Algoritmo de Evolução Diferencial obteve médias equivalentes às médias dos outros métodos. Já o método do Algoritmo Genético, além de apresentar dados mais dispersos, com um desvio padrão elevado, obteve uma média maior do que os demais métodos, como evidenciado por sua posição acima dos outros no gráfico *boxplot*. O Algoritmo Genético foi o método que obteve o pior desempenho relativo. Entretanto, considera-se que o método convergiu para uma solução adequada, não tão distante das demais soluções obtidas. Não obstante, assim como no primeiro problema resolvido, a dispersão dos resultados foi consideravelmente maior do que a dos outros métodos.

Quanto aos métodos de Otimização por Enxame de Partículas, Algoritmo de Evolução Diferencial e Otimização por Ervas Daninhas, eles obtiveram soluções que resultaram em pontos de outlier. Ou seja, o problema não convergiu para uma solução ideal em uma das sementes de inicialização, o que fez com que a média dos resultados desses métodos ficasse mais alta.

A TABELA 9 mostra a média e desvio padrão da probabilidade de falha e índice de confiabilidade para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização.

TABELA 9 – EXEMPLO 2: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE

Método	Probabilidade de falha		Índice de confiabilidade	
	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	3,64E-08	1,38E-08	5,40	0,07
SA	4,02E-08	1,34E-08	5,38	0,06
ACO	4,26E-08	1,42E-08	5,37	0,07
GA	4,49E-08	4,39E-08	5,43	0,19
DE	3,36E-08	1,80E-08	5,50	0,39
ICA	3,92E-08	1,37E-08	5,38	0,08
FA	4,15E-08	1,28E-08	5,37	0,06
IWO	3,94E-08	3,17E-08	5,44	0,18
ABC	4,29E-08	1,28E-08	5,36	0,06
TLBO	4,40E-08	1,33E-08	5,36	0,06

FONTE: A autora (2025).

A formulação inicial do problema continha uma restrição no valor do índice de confiabilidade, que deveria ser maior ou igual a 4. Entretanto, a partir da análise da TABELA 9, observa-se que todas as soluções convergiram para resultados em que o índice de confiabilidade foi superior a 5. O coeficiente de variação obtido para as diferentes estimativas da probabilidade de falha apresentou valores elevados, indicando alta incerteza estatística. Esse comportamento está relacionado à ordem de grandeza extremamente pequena da probabilidade de falha do problema analisado. Para estimativas tão baixas, a Simulação de Monte Carlo convencional requer um número de amostras extremamente elevado, no caso desse exemplo, da ordem de 10 bilhões de amostras, para uma estimativa mais precisa da probabilidade de falha.

Neste exemplo, implementado com o método WAMC, verificou-se que mesmo com um aumento do número de amostras, não houve redução relevante no coeficiente de variação. Existem, na literatura, abordagens mais adequadas para o cálculo da probabilidade de falha, capazes de reduzir o custo computacional, com métodos de amostragem avançada ou de metamodelagem. Contudo, a implementação dessas técnicas não faz parte do escopo deste trabalho, cujo objetivo principal é avaliar e comparar o desempenho de diferentes algoritmos de otimização aplicados à otimização de risco. Cabe destacar que, mesmo com o coeficiente de variação elevado, os algoritmos de otimização apresentaram convergência consistente para soluções próximas e coerentes entre si, indicando que o comportamento da função objetivo foi adequadamente explorado e que o objetivo proposto pelo estudo foi alcançado.

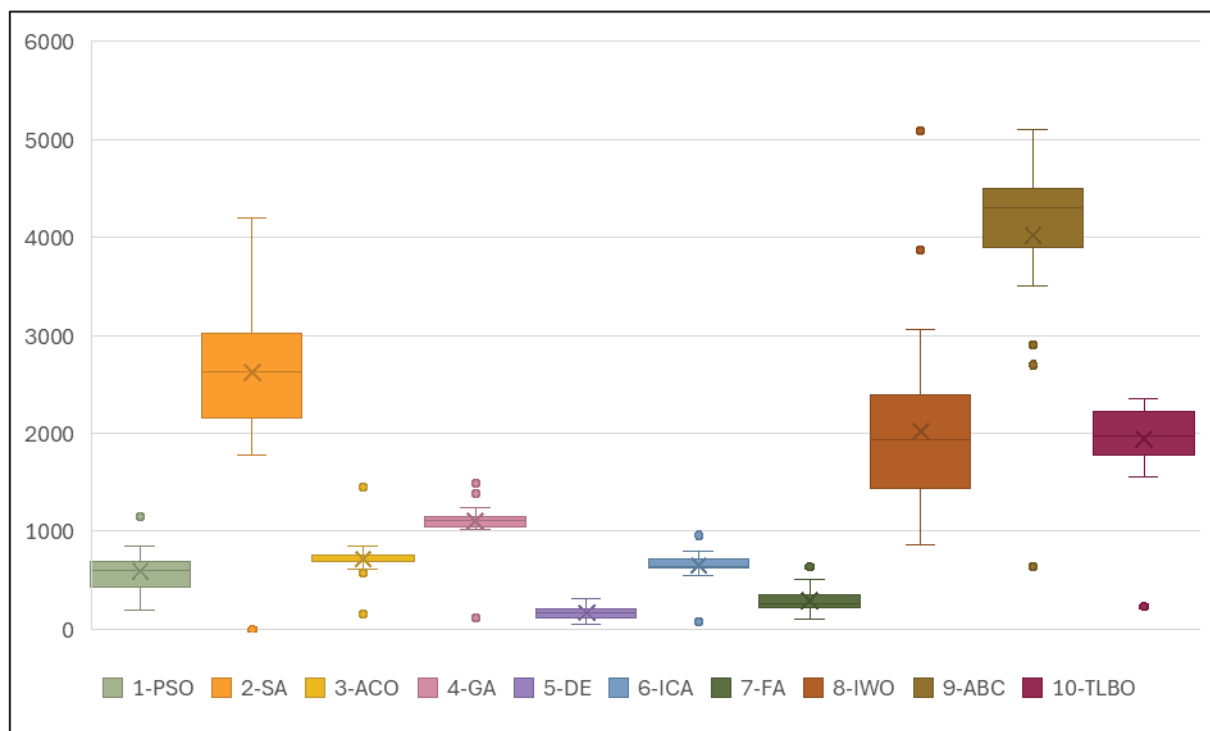
A TABELA 10 mostra a média e desvio padrão do tempo de execução do código e número de chamadas da função objetivo para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização. A FIGURA 15 mostra os gráficos do tipo *boxplot* do número de chamadas da função objetivo para cada configuração testada.

TABELA 10 – EXEMPLO 2: CUSTO COMPUTACIONAL

Método	Tempo (s)		Número de chamadas	
	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	2,15	0,67	602	190
SA	8,68	2,27	2703	685
ACO	2,82	0,63	737	150
GA	5,75	1,13	1134	115
DE	0,85	0,29	170	54
ICA	3,04	0,55	667	79
FA	1,43	0,54	299	107
IWO	10,31	4,10	2055	854
ABC	24,20	4,37	4133	637
TLBO	10,39	2,11	1997	229

FONTE: A autora (2025).

FIGURA 15 – EXEMPLO 2: GRÁFICO *BOXPLOT* PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.



FONTE: A autora (2025)

A análise da TABELA 10 e FIGURA 15 permite concluir que, para este problema, os tempos de execução não foram tão restritivos, estando na ordem de segundos. Sendo assim, o tempo de execução do código novamente não é um fator crucial para a decisão sobre qual método apresentou o melhor desempenho geral. Os métodos com o melhor desempenho foram o Algoritmo de Evolução Diferencial e o Algoritmo dos Vagalumes. Em especial, o Algoritmo de Evolução Diferencial obteve uma média de tempo de 0,85 segundos, bem abaixo dos demais.

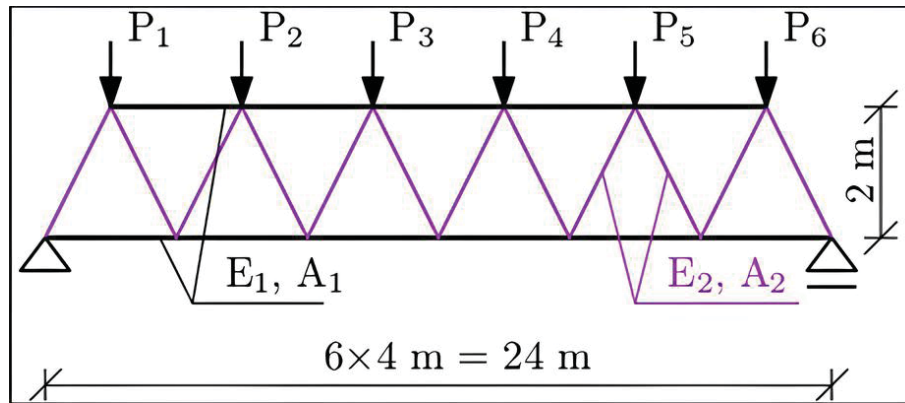
Entretanto, os métodos do Recozimento Simulado, da Otimização por Ervas Daninhas, da Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e da Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado apresentaram maiores números de chamadas da função objetivo do problema de Otimização de Risco. Isso refletiu em um maior tempo médio relativo de execução dos códigos. Os métodos de Recozimento Simulado e de Otimização por Colônia Artificial de Abelhas já haviam apresentado um elevado número de chamadas da função objetivo no exemplo anterior. Era, portanto, esperado que apresentassem o mesmo comportamento neste problema.

4.4 EXEMPLO 3: OTIMIZAÇÃO DE RISCO DE UMA TRELIÇA MODELADA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS – CASO INDEPENDENTE DO TEMPO

4.4.1 Formulação

O terceiro exemplo trata da Otimização de Risco de uma treliça biapojada, composta por 23 barras de mesmo material, sendo 11 horizontais de área A_1 e módulo de elasticidade E_1 e 12 diagonais de área A_2 e módulo de elasticidade E_2 . A treliça é submetida a seis cargas pontuais, P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 e P_6 , aplicadas verticalmente para baixo, localizadas em cada um dos nós superiores, conforme ilustrado na FIGURA 16. O modelo da treliça foi obtido do estudo de Hlobilová, Marelli e Sudret (2024).

FIGURA 16 – EXEMPLO 3: MODELO DA TRELIÇA.



FONTE: Hlobilová, Marelli e Sudret (2024).

A partir do modelo elaborado por Hlobilová, Marelli e Sudret (2024), desenvolveu-se um problema de Otimização de Risco, formulado conforme (108):

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar:} \quad & C_T(A_1, A_2) = 288.000(11A_1 + 12A_2) + \\
 & 86.400(11A_1 + 12A_2) + 416.800P_f \\
 \text{Sujeito a:} \quad & 0,001 \text{ m}^2 \leq A_1 \leq 0,01 \text{ m}^2 \\
 & 0,001 \text{ m}^2 \leq A_2 \leq 0,01 \text{ m}^2 \\
 & \beta \geq 4.
 \end{aligned} \tag{108}$$

A probabilidade de falha é associada à equação de estado limite (109):

$$g(x) = 0,05 - f(x), \tag{109}$$

sendo que $f(x)$ representa a deflexão vertical no centro da viga, obtida por meio de simulações numéricas via Método dos Elementos Finitos. O vetor de variáveis aleatórias é dado pela Equação (110):

$$x = \{E_1, E_2, A_1, A_2, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}, \tag{110}$$

Essas variáveis são consideradas independentes entre si e suas distribuições, médias e desvios padrão estão descritos na TABELA 11.

TABELA 11 – EXEMPLO 3: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Variáveis aleatórias	Distribuição	Média	Desvio Padrão
E_1	Lognormal	$2,10 \cdot 10^{11} Pa$	$2,10 \cdot 10^{10} Pa$
E_2	Lognormal	$2,10 \cdot 10^{11} Pa$	$2,10 \cdot 10^{10} Pa$
A_1	Lognormal	$A_1 m^2$	$0,1 \times A_1 m^2$
A_2	Lognormal	$A_2 m^2$	$0,1 \times A_2 m^2$
$P_1 - P_6$	Gumbel	$5,00 \cdot 10^4 N$	$7,50 \cdot 10^3 N$

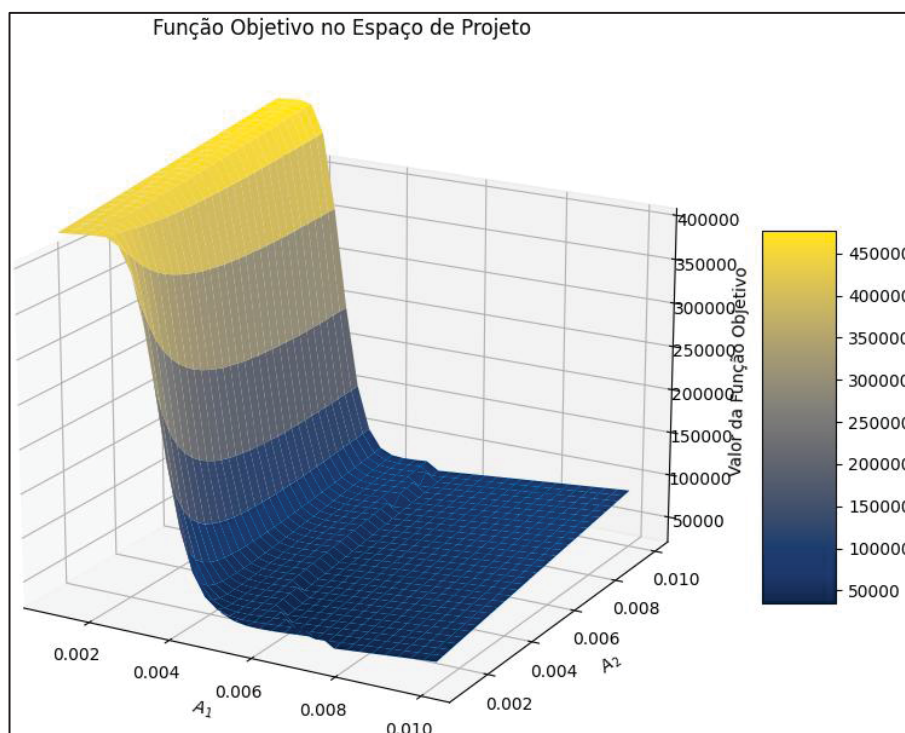
FONTE: Adaptado de Hlobilová, Marelli e Sudret (2024).

4.4.2 Implementação do problema

O problema foi implementado em Python, sendo a probabilidade de falha calculada através da Simulação de Monte Carlo com 10^6 amostras, estabelecida com base em simulações preliminares, que mostraram que mais amostras não melhoravam a precisão do cálculo da probabilidade de falha. Nesse problema, não foi possível implementar a Simulação de Monte Carlo com médias ponderadas, devido à inconsistência no modelo causada pelo tratamento das variáveis aleatórias como dependentes das variáveis de projeto na equação de estado limite. Isso resultou em um aumento considerável do custo computacional.

Para validar os resultados obtidos, a função objetivo do problema de otimização foi avaliada em todos os pontos de uma malha criada no espaço de projeto, considerando os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto e utilizando um passo de 0,0001 unidades entre os pontos. A FIGURA 17 mostra a malha para uma semente de inicialização.

FIGURA 17 – EXEMPLO 3: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.



FONTE: A autora (2025)

Pela malha, identificou-se que o ponto de mínimo está próximo de $A_1 = 0,0064$ e $A_2 = 0,0016$.

4.4.3 Resultados e discussão

Após a obtenção das 30 soluções da função $C_T(A_1, A_2)$ (Equação (108)), para cada um dos dez métodos estudados, foram obtidos os valores médios e os desvios padrão das soluções. Esses resultados, correspondentes ao ponto ótimo, para cada configuração testada, estão apresentados na TABELA 12:

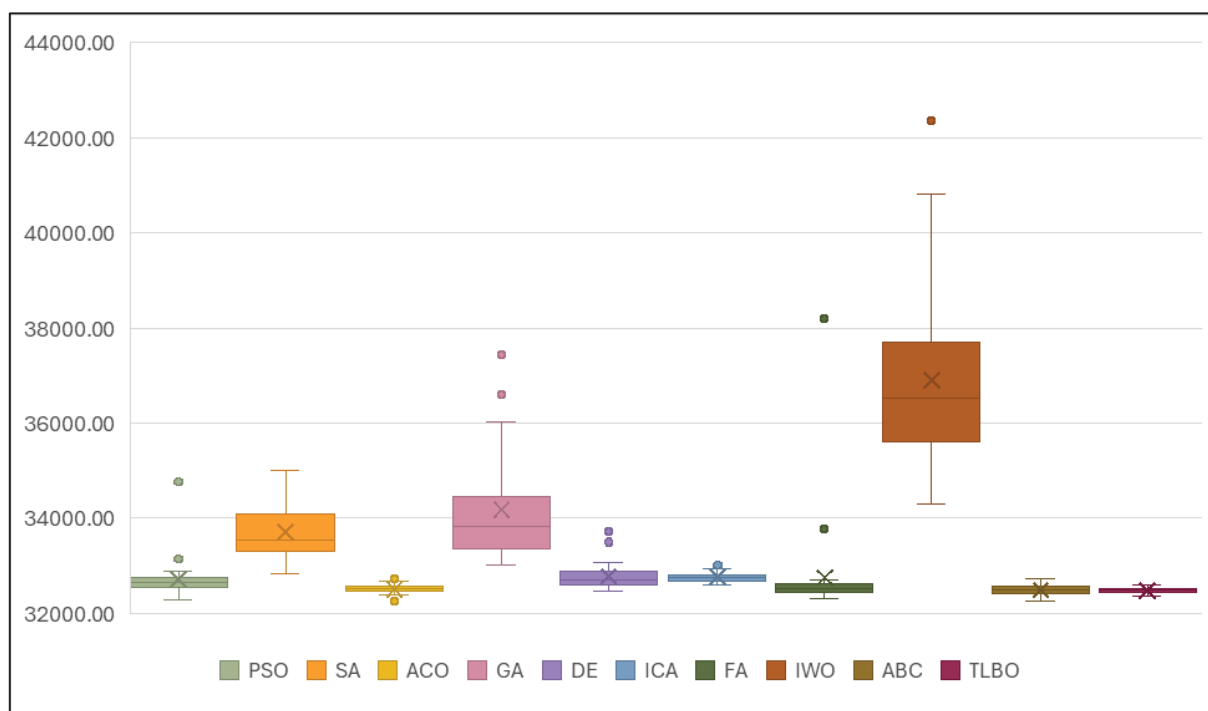
TABELA 12 – EXEMPLO 3: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO

Método	A_1^*		A_2^*		$C_T(A_1^*, A_2^*)$	
	Média	D.P.	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	0,00623	0,00024	0,00157	0,00016	32.712,56	421,11
SA	0,00634	0,00030	0,00169	0,00026	33.712,19	547,72
ACO	0,00622	0,00013	0,00153	0,00011	32.504,28	101,67
GA	0,00642	0,00056	0,00172	0,00050	34.181,88	1.116,01
DE	0,00619	0,00014	0,00161	0,00015	32.771,07	279,66
ICA	0,00618	0,00015	0,00159	0,00014	32.770,53	118,16
FA	0,00608	0,00023	0,00172	0,00044	32.745,34	1.059,28
IWO	0,00776	0,00058	0,00110	0,00026	36.906,68	1.787,83
ABC	0,00617	0,00012	0,00158	0,00010	32.493,40	94,70
TLBO	0,00621	0,00009	0,00154	0,00009	32.480,26	62,68

FONTE: A autora (2025).

A FIGURA 18 mostra os gráficos do tipo *boxplot* para cada configuração testada.

FIGURA 18 – EXEMPLO 3: GRÁFICO BOXPLOT DA FUNÇÃO OBJETIVO.



FONTE: A autora (2025)

A análise do *boxplot* permite constatar que, para este exemplo, o método com o pior desempenho relativo foi a Otimização por Ervas Daninhas, que obteve uma média de valores mais alta que os demais métodos, além de um desvio padrão também superior. O Algoritmo Genético também apresentou uma média um pouco acima das demais, e a extensão da caixa e dos bigodes indica que o método teve um

desvio padrão relativamente alto. O método do Recozimento Simulado não apresentou pontos de outlier, porém, tanto a média quanto o desvio padrão dos resultados ficaram levemente acima dos demais métodos.

Os demais métodos foram capazes de convergir para boas soluções, com médias próximas entre si e muito próximas da solução obtida por meio da malha (FIGURA 17). A maioria dos métodos apresentou pontos de outlier, exceto pelos métodos do Recozimento Simulado, Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado.

Os métodos com os melhores desempenhos apresentaram valores médios da função objetivo variando na faixa de 32.000 a 33.000. Destaca-se o método de Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado pelo melhor desempenho geral, apresentando a menor média e o menor desvio padrão dentre todos os métodos.

A TABELA 13 mostra a média e desvio padrão da probabilidade de falha e índice de confiabilidade para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização.

TABELA 13 – EXEMPLO 3: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE

Método	Probabilidade de falha		Índice de confiabilidade	
	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	2,92E-05	2,24E-06	4,02	0,02
SA	1,90E-05	8,08E-06	4,15	0,13
ACO	2,95E-05	1,33E-06	4,02	0,01
GA	2,04E-05	8,99E-06	4,13	0,11
DE	2,80E-05	3,46E-06	4,03	0,03
ICA	2,62E-05	4,22E-06	4,05	0,04
FA	2,91E-05	1,92E-06	4,02	0,02
IWO	1,37E-05	9,35E-06	4,27	0,22
ABC	2,98E-05	1,77E-06	4,02	0,02
TLBO	2,96E-05	1,30E-06	4,02	0,01

FONTE: A autora (2025).

Todos os métodos ficaram presos em soluções que respeitam a restrição no índice de confiabilidade imposta. Isso indica que esses métodos foram capazes de explorar adequadamente o espaço de projeto e encontrar resultados que atendem aos critérios de confiabilidade estabelecidos. Os métodos que apresentaram maior confiabilidade obtiveram, em geral, valores médios da função objetivo mais altos que

os demais, evidenciando que a solução mais otimizada ocorre quando o índice de confiabilidade está mais próximo da restrição estabelecida, de valor 4.

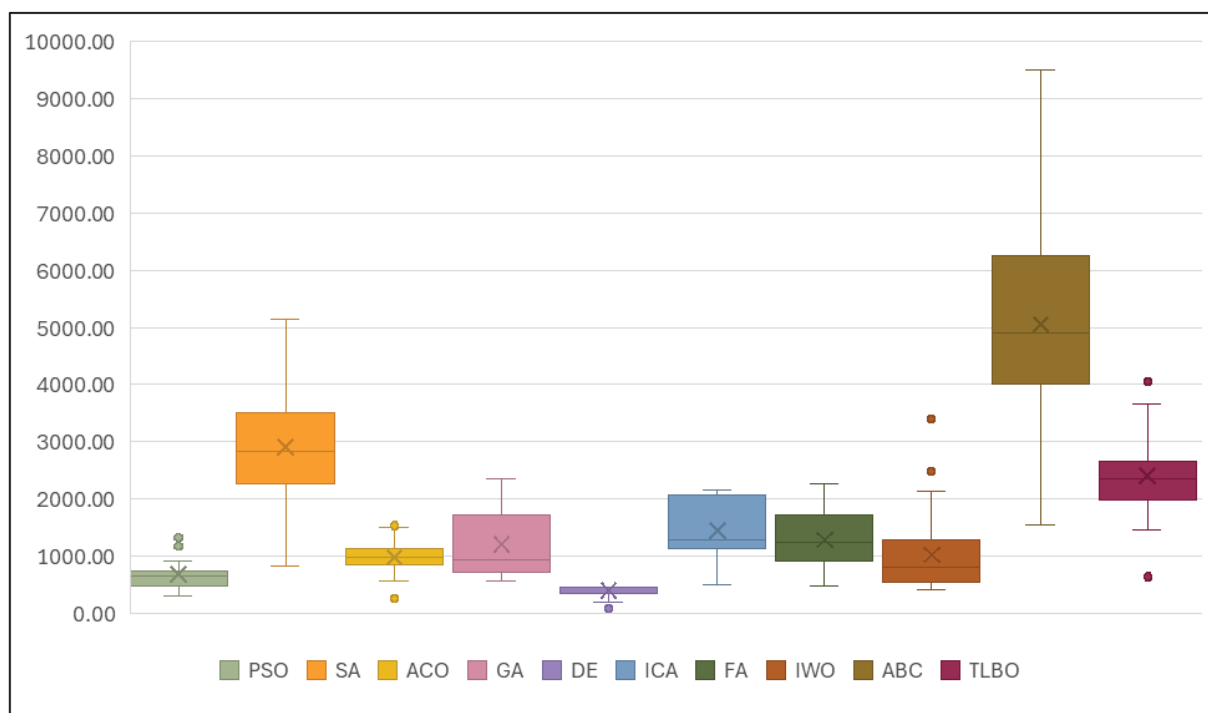
Neste exemplo, a restrição para um índice de confiabilidade elevado exige um número maior de amostras na simulação de Monte Carlo para se obter uma estimativa adequada da probabilidade de falha. Consequentemente, o custo computacional também foi elevado. A TABELA 14 mostra a média e desvio padrão do tempo de execução do código e número de chamadas da função objetivo para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização. A FIGURA 19 mostra os gráficos do tipo *boxplot* do número de chamadas da função objetivo para cada configuração testada.

TABELA 14 – EXEMPLO 3: CUSTO COMPUTACIONAL

Método	Tempo (s)		Número de chamadas	
	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	319,40	137,26	698	299
SA	1.334,02	370,36	2.975	829
ACO	626,60	848,68	994	247
GA	537,67	278,88	1.223	634
DE	195,74	44,54	405	87
ICA	667,65	220,23	1.474	486
FA	617,16	296,47	1.306	483
IWO	460,14	306,36	1.034	691
ABC	2.408,58	996,42	5.167	1536
TLBO	1.121,51	289,07	2.457	638

FONTE: A autora (2025).

FIGURA 19 – EXEMPLO 3: GRÁFICO BOXPLOT PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.



FONTE: A autora (2025)

Os métodos com maior número de chamadas à função objetivo e, consequentemente, com os maiores tempos de execução foram o Recozimento Simulado, a Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e a Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado. O método mais custoso foi o ABC, com um tempo total de execução, considerando as 30 rodadas realizadas com diferentes sementes de inicialização, de cerca de 20 horas, muito maior do que a realidade observada nos exemplos anteriores. Isso reflete diretamente a elevada demanda computacional imposta pela simulação de Monte Carlo necessária devido à construção da equação de estado limite. Nessa formulação, as variáveis aleatórias A_1 e A_2 têm suas médias definidas pelos valores das variáveis de projeto A_1 e A_2 , obtidas a cada iteração, enquanto seus desvios padrão correspondem a 10% desses valores. Essa dependência direta entre as variáveis aleatórias e as variáveis de projeto gera instabilidades no cálculo da probabilidade de falha, o que impossibilita o uso de métodos baseados em aproximações analíticas. Dessa forma, a utilização do MCS foi essencial para viabilizar a análise

Os métodos com o menor custo computacional foram os da Otimização por Enxame de Partículas, Algoritmo de Evolução Diferencial e Otimização por Ervas

Daninhas. Entre esses, destaca-se o Algoritmo de Evolução Diferencial, que combinou baixo custo computacional com soluções médias de boa qualidade.

4.5 EXEMPLO 4: OTIMIZAÇÃO DE RISCO DE UMA TRELIÇA MODELADA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS – CASO DEPENDENTE DO TEMPO

4.5.1 Formulação

O quarto exemplo trata da Otimização de Risco da mesma treliça biapoiada apresentada no exemplo anterior (FIGURA 16). A formulação do problema é bastante similar à do Exemplo 3, exceto pelo fato de que as cargas têm variação temporal. Os carregamentos P_1 a P_6 são descritos por um processo estocástico gaussiano de média $5,00 \cdot 10^4 N$, desvio padrão $7,50 \cdot 10^3 N$ e comprimento de correlação $\lambda = 1$ ano. O intervalo de tempo considerado na análise, correspondente ao campo aleatório, foi discretizado em 200 pontos equidistantes ao longo de 20 anos.

O problema de otimização é formulado conforme (111):

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar:} \quad & C_T(A_1, A_2) = 288.000(11A_1 + 12A_2) + \\
 & 86.400(11A_1 + 12A_2) + \\
 & \sum_{i=1}^{20} 416.800P_{fc_i} \\
 \text{Sujeito a:} \quad & 0,001 \, m^2 \leq A_1 \leq 0,01 \, m^2 \\
 & 0,001 \, m^2 \leq A_2 \leq 0,01 \, m^2 \\
 & P_{fc} \leq 0,0013.
 \end{aligned} \tag{111}$$

A probabilidade de falha é associada à equação de estado limite (112):

$$g(x) = 0,05 - f(x), \tag{112}$$

sendo $f(x)$ a deflexão vertical no centro da viga, obtida por meio de simulações numéricas via Método dos Elementos Finitos. O vetor de variáveis aleatórias é dado pela Equação (113):

$$\mathbf{x} = \{E_1, E_2, A_1, A_2, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}, \quad (113)$$

Essas variáveis são consideradas independentes entre si e suas distribuições, médias e desvios padrão estão descritos na TABELA 15.

TABELA 15 – EXEMPLO 3: MOMENTOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Variáveis aleatórias	Distribuição	Média	Desvio Padrão
E_1	Lognormal	$2,10 \cdot 10^{11} Pa$	$2,10 \cdot 10^{10} Pa$
E_2	Lognormal	$2,10 \cdot 10^{11} Pa$	$2,10 \cdot 10^{10} Pa$
A_1	Lognormal	$A_1 m^2$	$0,1 \times A_1 m^2$
A_2	Lognormal	$A_2 m^2$	$0,1 \times A_2 m^2$
$P_1 - P_6$	Gumbel	$5,00 \cdot 10^4 N$	$7,50 \cdot 10^3 N$

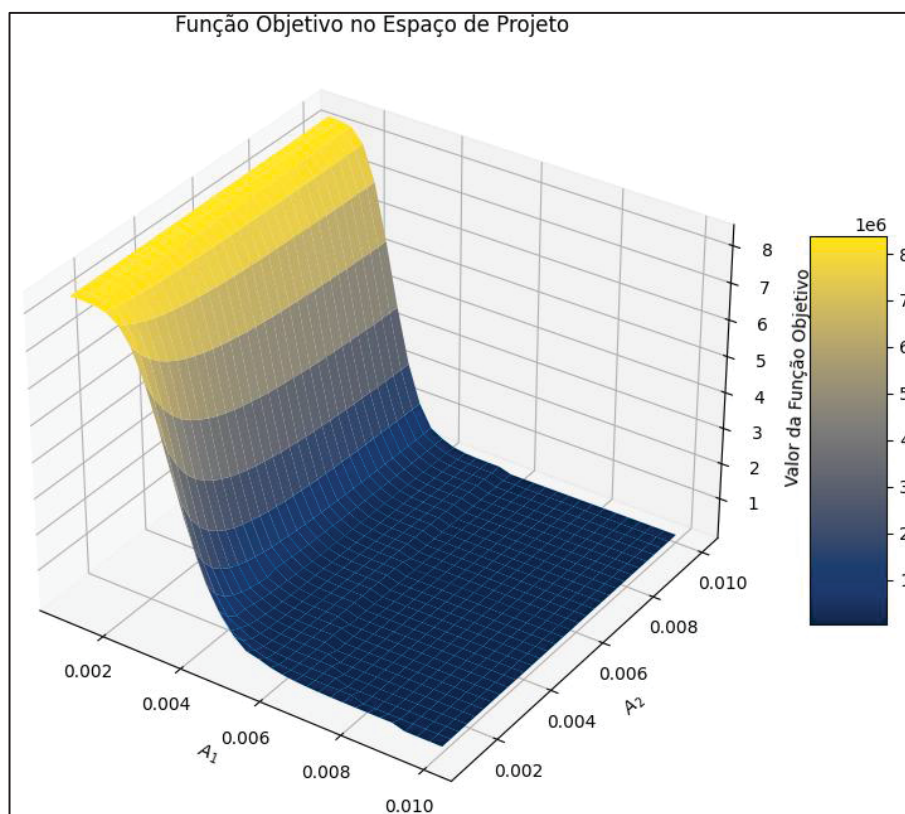
FONTE: Adaptado de Hlobilová, Marelli e Sudret (2024).

4.5.2 Implementação do problema

O problema de otimização foi implementado em Python, sendo a probabilidade de falha calculada através da Simulação de Monte Carlo com 10^6 amostras, estabelecida com base em simulações preliminares, que mostraram que mais amostras não melhoravam a precisão do cálculo da probabilidade de falha. Nesse problema, assim como no problema anterior (Exemplo 3), não foi possível implementar a Simulação de Monte Carlo com médias ponderadas, devido à inconsistência no modelo causada pelo tratamento das variáveis de projeto como variáveis aleatórias na equação de estado limite. A análise de confiabilidade dependente do tempo foi realizada utilizando a biblioteca UQLab (Marelli e Sudret, 2014) no MATLAB, com os dados posteriormente exportados para o Python.

Para validar os resultados obtidos, a função objetivo do problema de otimização foi avaliada em todos os pontos de uma malha criada no espaço de projeto, considerando os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto e utilizando um passo de 0,0003 unidades entre os pontos. A FIGURA 20 mostra a malha para uma semente de inicialização.

FIGURA 20 – EXEMPLO 4: MALHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.



FONTE: A autora (2025)

Pela malha, identificou-se que o ponto de mínimo está próximo de $A_1 = 0,0073$ e $A_2 = 0,0016$.

4.5.3 Resultados e discussão

Após a obtenção das 30 soluções da função $C_T(A_1, A_2)$ (Equação (108)), para cada um dos dez métodos estudados, foram obtidos os valores médios e os desvios padrão das soluções. Esses resultados, correspondentes ao ponto ótimo, para cada configuração testada, estão apresentados na TABELA 16:

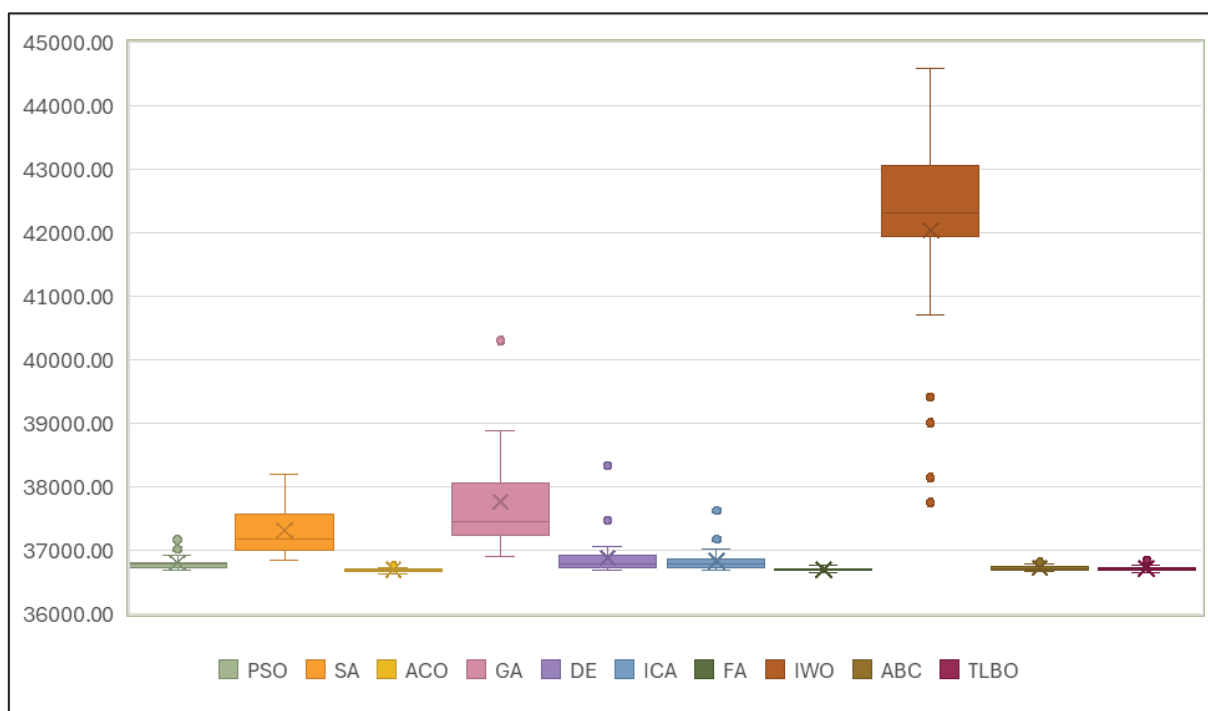
TABELA 16 – EXEMPLO 4: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO

Método	A_1^*		A_2^*		$C_T(A_1^*, A_2^*)$	
	Média	D.P.	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	0,00687	0,00011	0,00178	0,00012	36.800,70	111,89
SA	0,00691	0,00023	0,00188	0,00025	37.309,03	404,80
ACO	0,00689	0,00008	0,00173	0,00006	36.687,54	43,48
GA	0,00691	0,00041	0,00199	0,00040	37.758,70	857,42
DE	0,00687	0,00011	0,00180	0,00011	36.876,31	315,36
ICA	0,00688	0,00016	0,00176	0,00015	36.826,04	187,53
FA	0,00685	0,00005	0,00176	0,00004	36.691,23	29,96
IWO	0,00853	0,00105	0,00147	0,00080	42.039,11	1.808,20
ABC	0,00684	0,00006	0,00178	0,00005	36.716,73	39,45
TLBO	0,00688	0,00006	0,00174	0,00006	36.705,54	35,35

FONTE: A autora (2025).

A FIGURA 21 mostra os gráficos do tipo *boxplot* para cada configuração testada.

FIGURA 21 – EXEMPLO 4: GRÁFICO BOXPLOT PARA A FUNÇÃO OBJETIVO.



FONTE: A autora (2025)

Pela análise da e da FIGURA 21 e TABELA 16, observa-se que a maioria dos métodos convergiu para um ponto de média entre 36.000 e 38.000, exceto pelos métodos do Recozimento Simulado, o Algoritmo Genético e o método do Algoritmo de Otimização por Ervas Daninhas, que apresentou uma média em torno de 42.000 e obteve quatro pontos de outlier.

Desconsiderando esses três métodos, a maioria dos métodos obteve bons resultados, com pontos de mínimo muito próximos daqueles obtidos pela malha (FIGURA 20). O Algoritmo Genético apresentou um desvio padrão superior aos demais, indicando que a variabilidade dos resultados nesse método é relativamente alta.

Destaca-se o desempenho da Otimização por Colônia de Formigas, do Algoritmo dos Vagalumes, da Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e da Otimização Baseada no Ensino-aprendizado, que obtiveram as menores médias e os menores desvios padrão em comparação com todos os outros métodos, convergindo para um ponto de mínimo muito próximo do obtido na malha.

A TABELA 17 mostra a média e desvio padrão da probabilidade de falha acumulada para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização.

TABELA 17 – EXEMPLO 4: PARÂMETROS DE CONFIABILIDADE

Método	Probabilidade de falha acumulada	
	Média	D.P.
PSO	1,27E-03	8,34E-05
SA	9,42E-04	2,55E-04
ACO	1,32E-03	2,62E-05
GA	8,54E-04	3,10E-04
DE	1,20E-03	2,10E-04
ICA	1,29E-03	3,42E-05
FA	1,32E-03	1,94E-05
IWO	6,97E-04	4,01E-04
ABC	1,31E-03	3,85E-05
TLBO	1,32E-03	2,16E-05

FONTE: A autora (2025).

Observa-se, neste exemplo, que, exceto para os métodos que não convergiram para o menor valor possível — o Algoritmo de Recozimento Simulado, o Algoritmo Genético e a Otimização por Ervas Daninhas —, a maioria dos métodos convergiu para um ponto no limite da restrição da probabilidade de falha acumulada máxima de 0,0013. Os métodos que convergiram para pontos com uma probabilidade de falha acumulada média menor apresentaram maiores médias no valor da função objetivo.

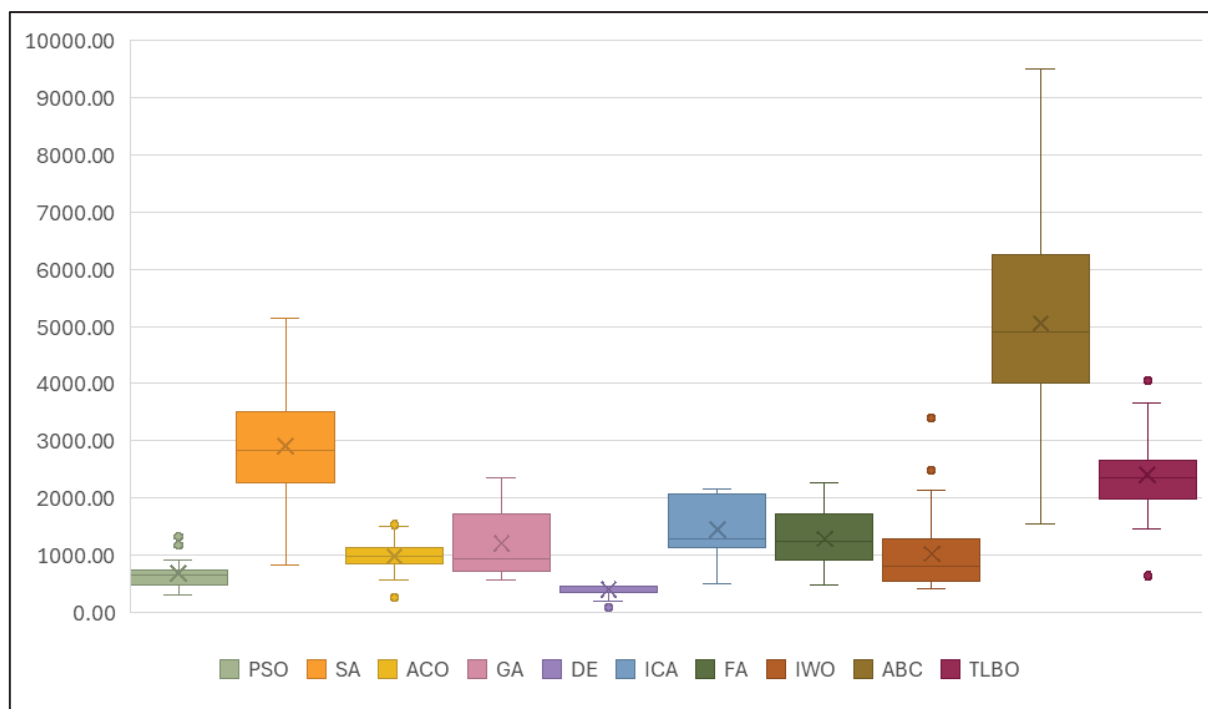
Em relação ao custo computacional deste exemplo, a TABELA 18 mostra a média e desvio padrão do tempo de execução do código e número de chamadas da função objetivo para as 30 execuções do algoritmo realizadas com diferentes sementes de inicialização. A FIGURA 22 mostra os gráficos do tipo *boxplot* do número de chamadas da função objetivo para cada configuração testada.

TABELA 18 – EXEMPLO 4: CUSTO COMPUTACIONAL

Método	Tempo (s)		Número de chamadas	
	Média	D.P.	Média	D.P.
PSO	2.724,19	786,52	11.033	3.203
SA	14.228,77	3.535,01	52.887	12.068
ACO	4.523,49	1.168,64	17.613	4.499
GA	4.041,74	3.142,93	15.523	12.647
DE	1.454,57	539,45	6.892	2.546
ICA	4.812,79	1.935,13	19.185	7.719
FA	7.213,51	3.328,61	27.860	12.844
IWO	3.940,18	1.392,30	17.484	6.024
ABC	22.532,74	6.229,59	85.333	23.349
TLBO	11.422,44	3.117,43	43.600	11.921

FONTE: A autora (2025).

FIGURA 22 – EXEMPLO 4: GRÁFICO *BOXPLOT* PARA O NÚMERO DE CHAMADAS.



FONTE: A autora (2025)

Observa-se na TABELA 18 e FIGURA 22 que o custo computacional deste exemplo, em comparação com os exemplos anteriores, foi um grande fator restritivo para esse tipo de problema. Nota-se que a média de tempo do algoritmo de Otimização por Colônia Artificial de Abelhas foi de 22.532 segundos para 30 execuções do algoritmo, o que equivale a aproximadamente 8 dias. O tempo de execução dos códigos está diretamente relacionado ao número de chamadas à função objetivo. Os algoritmos com o pior desempenho foram o Recozimento Simulado, a Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e a Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado. Já os métodos com melhor desempenho foram a Otimização por Enxame de Partículas, o Algoritmo de Evolução Diferencial e a Otimização por Ervas Daninhas.

Em comparação com os exemplos anteriores, à medida que a complexidade do problema aumenta, o custo computacional também cresce. No caso deste exemplo, foi necessário determinar o campo aleatório e calcular as probabilidades pelo método da Simulação de Monte Carlo, ambos realizados com um alto número de amostras, o que elevou consideravelmente o tempo de execução dos códigos. O foco deste trabalho não era a análise de confiabilidade, mas sim a comparação dos métodos de otimização. Por esse motivo, não foram estudados métodos de metamodelagem ou estratégias alternativas para reduzir o custo computacional relacionado ao problema de confiabilidade.

4.6 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

Para viabilizar uma comparação qualitativa de desempenho entre os métodos de otimização meta-heurística abordados neste trabalho, foi elaborada uma tabela contendo as características consideradas mais relevantes no contexto da Otimização de Risco. Os métodos foram avaliados de acordo com esses critérios, e foram destacados aqueles que melhor atenderam aos requisitos estabelecidos. A TABELA 19 mostra a comparação entre os métodos, considerando três categorias principais de avaliação, cada uma com pontuação máxima de 24 pontos. As categorias são: (1) Qualidade média das soluções, que contempla os métodos que obtiveram os menores valores médios da função objetivo; (2) Consistência das soluções, que abrange os métodos que apresentaram menor variabilidade entre as execuções, ou seja, menor desvio padrão e menor ocorrência de outliers; e (3) Custo computacional, que

considera os métodos que demandaram menor tempo ou número de chamadas para convergir. Na primeira categoria há um único critério, atribuindo-se peso 6 para o item atendido. A segunda categoria possui três critérios, cada um com peso 2, enquanto a terceira categoria conta com dois critérios, com peso 3 cada. Assim, cada categoria totaliza 24 pontos, resultando em uma pontuação máxima de 72 pontos na avaliação geral dos métodos.

TABELA 19 – COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO ENTRE OS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO META-HEURÍSTICA ANALISADOS

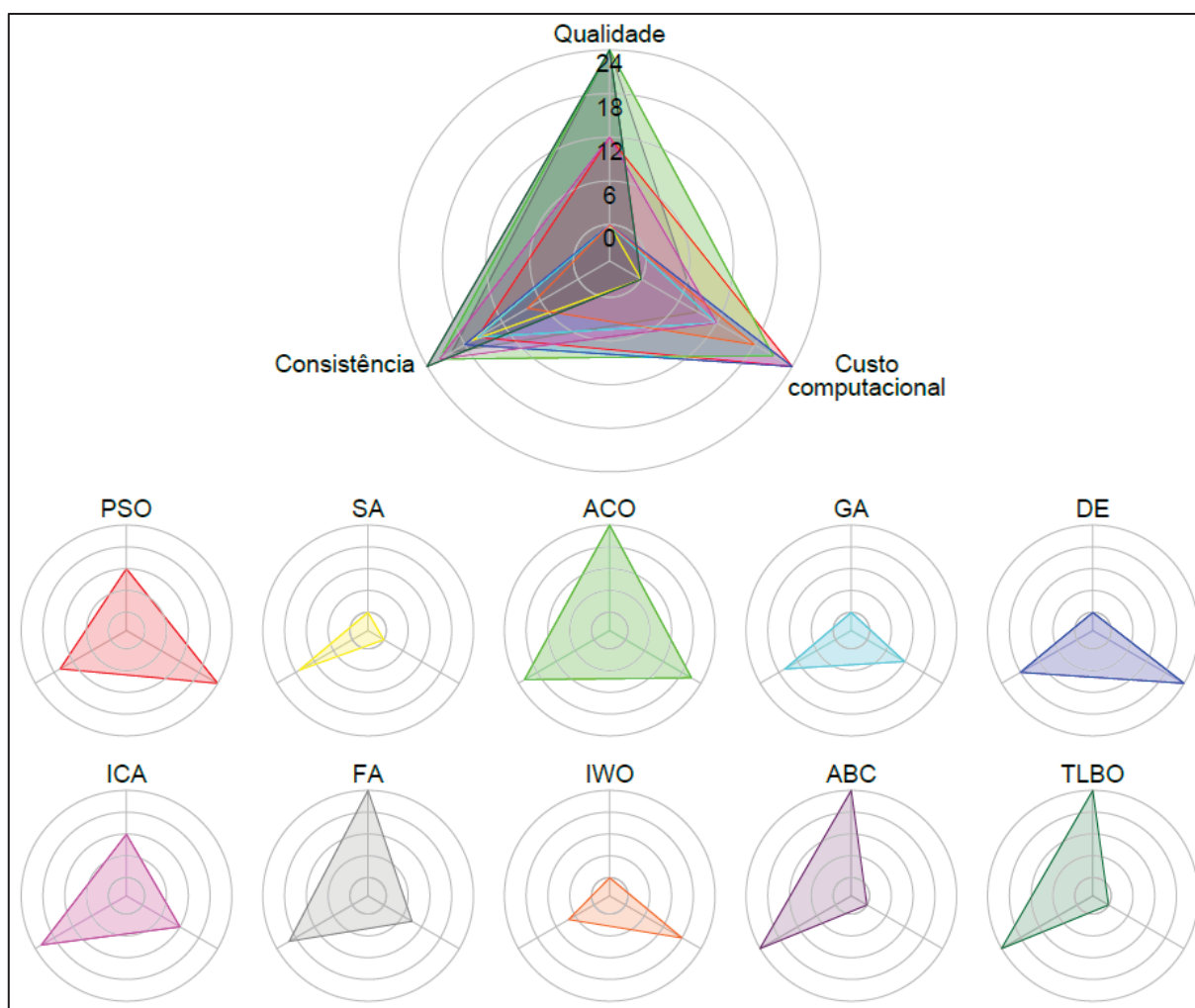
Critério	Exemplo	PSO	SA	ACO	GA	DE	ICA	FA	IWO	ABC	TLBO
1 - QUALIDADE MÉDIA DAS SOLUÇÕES											
Ficou entre as 5 menores médias da função objetivo	1			X			X	X		X	X
	2			X			X	X		X	X
	3	X		X				X		X	X
	4	X		X				X		X	X
Pontos		12	0	24	0	0	12	24	0	24	24
2 - CONSISTÊNCIA DAS SOLUÇÕES											
Obteve 2 ou menos pontos de outlier	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	3	X	X		X	X	X	X		X	X
	4		X	X	X	X	X	X		X	X
⁽¹⁾ Convergiu para um ponto de mínimo médio próximo ao resultado obtido na malha	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	3	X	X	X	X	X	X	X		X	X
	4	X	X	X	X	X	X	X		X	X
Ficou entre os 5 menores desvio padrão do valor da função objetivo	1		X	X			X			X	X
	2			X			X	X		X	X
	3			X		X	X			X	X
	4	X		X				X		X	X
Pontos		16	18	22	16	18	22	20	8	24	24
3 - CUSTO COMPUTACIONAL											
Ficou entre os 5 menores tempos de execução do código	1	X		X		X	X		X		
	2	X		X		X	X	X			
	3	X			X	X		X	X		
	4	X		X	X	X			X		
Ficou entre os 5 métodos com os menores números de chamadas à função objetivo	1	X		X		X	X		X		
	2	X		X		X	X	X			
	3	X		X	X	X			X		
	4	X		X	X	X			X		
Pontos		24	0	21	12	24	12	9	18	0	0
Total		52	18	67	28	42	46	53	26	48	48

FONTE: A autora (2025).

⁽¹⁾ Considerou-se que o método de otimização convergiu para um ponto de mínimo próximo ao resultado obtido na malha quando a diferença relativa entre o valor da função objetivo obtido e o valor mínimo identificado na malha foi inferior a 8%.

A FIGURA 23 apresenta a representação gráfica dos resultados por meio de polígonos, em que cada vértice corresponde a uma das categorias avaliadas. O gráfico superior mostra todos os métodos plotados em um mesmo diagrama, enquanto os gráficos inferiores apresentam, individualmente, o desempenho de cada método em relação às três categorias analisadas.

FIGURA 23 – POLÍGONOS DOS RESULTADOS.



FONTE: A autora (2025)

A análise da TABELA 19 e FIGURA 23 permite constatar que, para os critérios desse trabalho, a Otimização por Colônia de Formigas teve um desempenho superior aos demais métodos. Este método de otimização foi bastante consistente nos resultados, convergindo para valores da função objetivo notavelmente baixos, esteve entre os menores tempos de execução, e apresentou baixa variabilidade entre os resultados, indicando consistência e robustez. Respeitou adequadamente as

restrições do problema, mostrando-se, dos métodos de otimização meta-heurística comparados, aquele que tem o melhor desempenho quando aplicado à Otimização de Risco.

A Otimização por Enxame de partículas apresentou um desempenho competitivo em relação à Otimização por Colônia de Formigas. Destaca-se a PSO pelo tempo de execução do código e pelo número de chamadas à função objetivo, ligeiramente menores que a ACO.

O Algoritmo de Evolução Diferencial, o Algoritmo de Competição Imperialista e o Algoritmo dos Vagalumes ficaram em uma faixa intermediária, com um bom desempenho geral dependendo do critério específico selecionado, sendo, assim, alternativas viáveis para aplicação em problemas de Otimização de Risco.

Os métodos de Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado empataram nos critérios de comparação entre os métodos, tendo desempenhos ótimos na convergência do algoritmo para uma solução ideal, com uma das menores médias e desvios padrão do valor da função objetivo, respeitando as restrições e apresentando poucos pontos de outlier. Entretanto, esses dois métodos se mostraram não tão adequados quando o tempo de execução do código é uma variável de alta relevância.

O método de Otimização por Ervas Daninhas e o Algoritmo Genético obtiveram um desempenho intermediário em relação à convergência e ao custo computacional associado. Entretanto, seus resultados podem não ser os mais precisos, apresentando também uma alta variabilidade nos resultados obtidos. Por fim, o Recozimento Simulado se mostrou uma alternativa não muito viável para implementação em problemas de Otimização de Risco, apresentando alta variabilidade nos resultados, médias relativamente altas e tempos de execução do código elevados.

Destacam-se a Otimização por Enxame de Partículas e o Algoritmo de Evolução Diferencial como alternativas ideais para quando o custo computacional é um fator determinante, já que obtiveram bons desempenhos em tempos de execução e chamadas à função objetivo, sem comprometer a qualidade das soluções.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dos anos, foi notada uma carência de materiais que abordam a Otimização de Risco, com maior foco na otimização baseada em confiabilidade. Embora a Otimização de Risco seja considerada mais abrangente, a RBDO tem recebido mais atenção. Na Otimização de Risco, é possível obter uma solução ótima em relação aos custos totais com apenas uma restrição na probabilidade de falha global do sistema. Além disso, a RO considera o custo referente a todo o ciclo de vida da estrutura, não apenas os custos iniciais.

Uma revisão sistemática da bibliografia sobre o tema da Otimização de Risco identificou alguns avanços relevantes, como o desenvolvimento de métodos mais eficientes para a avaliação da confiabilidade estrutural e a aplicação de técnicas avançadas de análise de sensibilidade para identificar os parâmetros mais críticos que influenciam a falha. Além disso, houve um aumento na capacidade de processamento computacional, permitindo a realização de simulações mais complexas e detalhadas, e a incorporação de técnicas que melhoraram a precisão na estimativa dos custos totais ótimos. A partir da revisão sistemática da bibliografia, notou-se que os métodos de otimização meta-heurísticos apresentam alta aplicabilidade em problemas de Otimização de Risco. Isso se deve à sua característica de ampla diversificação dentro do espaço de projeto, o que favorece a convergência para pontos efetivamente ótimos, evitando a estagnação em ótimos locais. Em comparação com métodos clássicos, como o método de Newton, o algoritmo Simplex e a programação sequencial quadrática, os métodos meta-heurísticos destacam-se pela facilidade de implementação, não exigindo, por exemplo, o cálculo de derivadas da função objetivo.

Com o objetivo de demonstrar a eficiência dos métodos de otimização meta-heurística em problemas de Otimização de Risco, foram resolvidos quatro exemplos aplicando dez métodos meta-heurísticos encontrados na literatura. Cada exemplo apresentou diferentes níveis de complexidade, abrangendo problemas de confiabilidade de sistemas, equações de estado limite baseadas no método dos elementos finitos e confiabilidade dependente do tempo. A comparação entre os métodos foi realizada considerando critérios como valor médio da função objetivo, variabilidade dos resultados, convergência para o ponto ótimo ideal, custo computacional e atendimento às restrições previamente estabelecidas.

Com base nos critérios avaliados e nos exemplos resolvidos, destaca-se a Otimização por Colônia de Formigas como o método com melhor desempenho, seguida pela Otimização por Enxame de Partículas. Ambos os métodos apresentaram resultados consistentes, baixa variabilidade nas respostas e custo computacional reduzido. O Algoritmo de Evolução Diferencial, o Algoritmo de Competição Imperialista, o Algoritmo dos Vagalumes, a Otimização por Colônia Artificial de Abelhas e a Otimização Baseada no Ensino-Aprendizado mostraram-se alternativas viáveis, dependendo do problema, e não podem ser completamente descartadas para aplicações em Otimização de Risco. Por outro lado, o Recozimento Simulado, o Algoritmo Genético e a Otimização por Ervas Daninhas demonstraram baixa aplicabilidade para esse tipo de abordagem, apresentando alta variabilidade nos resultados e dificuldades de convergência da função objetivo para uma solução de fato otimizada.

Para trabalhos futuros, recomenda-se realizar uma análise de sensibilidade dos parâmetros de cada método de otimização meta-heurística implementado. Além disso, a otimização dos parâmetros específicos de cada algoritmo deve ser pesquisada, uma vez que este estudo utilizou apenas valores médios recomendados na literatura. Observa-se que alguns algoritmos que não tiveram um bom desempenho poderiam apresentar resultados melhores caso seus parâmetros fossem ajustados. Por outro lado, essa característica também ressalta uma qualidade de determinados algoritmos: mesmo sem a otimização dos parâmetros, foi possível obter respostas adequadas de forma consistente em problemas diversos, o que os diferencia de métodos que dependem fortemente de ajustes paramétricos para alcançar bons desempenhos.

É importante destacar que entre as principais limitações do presente estudo, destaca-se o fato de que os exemplos analisados não apresentam múltiplos mínimos locais, de maneira que não foi possível avaliar o desempenho relativo dos métodos de otimização meta-heurísticos em tais cenários. Certos métodos de otimização meta-heurísticos apresentam maior capacidade que outros de escapar de mínimos locais e encontrar soluções globais. Além disso, não foram considerados exemplos com variáveis discretas, o que constitui outra limitação das comparações realizadas.

REFERÊNCIAS

- ABDOLLAHZADEH, H.; ATASHGAR, K. Optimal design of a multi-state system with uncertainty in supplier selection. **Computers & Industrial Engineering**, v. 105, p. 411–424, 2017.
- AKTAS, E.; MOSES, F.; GHOSN, M. Cost and safety optimization of structural design specifications. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 73, n. 3, p. 205–212, 2001.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.
- ATASHPAZ-GARGARI, E.; LUCAS, C. Imperialist competitive algorithm: An algorithm for optimization inspired by imperialistic competition. In: **IEEE**, set. 2007.
- BEAUREPAIRE, P. et al. Reliability-based optimization using bridge importance sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 34, p. 48–57, out. 2013.
- BECK, A. **Curso de confiabilidade estrutural**: Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos, 2014.
- BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. Elsevier, 2019.
- BECK, A. T. et al. A comparison between robust and risk-based optimization under uncertainty. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 52, n. 3, p. 479–492, 2 set. 2015.
- BECK, A. T. Optimal design of redundant structural systems: fundamentals. **Engineering Structures**, v. 219, p. 110542, 2020.
- BECK, A. T.; DA ROSA RIBEIRO, L.; VALDEBENITO, M. Risk-based cost-benefit analysis of frame structures considering progressive collapse under column removal scenarios. **Engineering Structures**, v. 225, p. 111295, 2020.
- BECK, A. T.; DE SANTANA GOMES, W. J. A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 28, p. 18–29, 2012.
- BECK, A. T.; GOMES, W. J. S.; BAZAN, F. A. V. On the Robustness of Structural Risk Optimization With Respect to Epistemic Uncertainties. **International Journal for Uncertainty Quantification**, v. 2, n. 1, p. 1–20, 2012.
- BECK, A. T.; KOUGIOUMTZOGLU, I. A.; DOS SANTOS, K. R. M. Optimal performance-based design of non-linear stochastic dynamical RC structures subject to stationary wind excitation. **Engineering Structures**, v. 78, p. 145–153, 2014.
- BECK, A. T.; RODRIGUES DA SILVA, L. A.; MIGUEL, L. F. F. The latent failure probability: A conceptual basis for robust, reliability-based and risk-based design optimization. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 233, p. 109127, 2023.

BECK, A. T.; STEWART, M. G. Risk-based cost-benefit analysis of structural strengthening to mitigate disproportionate collapse of buildings under abnormal blast loading. **Structures**, v. 57, p. 105103, 2023.

BECK, A. T.; TESSARI, R. K.; KROETZ, H. M. System reliability-based design optimization and risk-based optimization: a benchmark example considering progressive collapse. **Engineering Optimization**, v. 51, n. 6, p. 1000–1012, 3 jun. 2019.

BRODING, W. C.; DIEDERICH, F. W.; PARKER, P. S. Structural optimization and design based on a reliability design criterion. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 1, n. 1, p. 56–61, jan. 1964.

CARLON, A. G. et al. Risk optimization using the Chernoff bound and stochastic gradient descent. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 223, p. 108512, 2022.

CHRISTENSEN, P. T.; BAKER, M. J. **Structural Reliability Theory and Its Applications**. 1. ed. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1982.

DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. O. **Structural Reliability Methods**. Edição internet 2.3.7. Denmark: Coastal, Maritime and Structural Engineering, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark, 2007.

DOS SANTOS, K. R. M.; BECK, A. T.; LOPEZ, R. H. Sequential simulated annealing for life-cycle optimization of nonlinear stochastic systems via arbitrary polynomial chaos expansion. **Engineering Structures**, v. 304, p. 117675, 2024.

DRAKE, E. M.; THURSTON, C. W. A safety evaluation framework for process hazards management in chemical facilities with PES-based controls. **Process Safety Progress**, v. 12, n. 2, p. 92–103, abr. 1993.

DUI, H.; LU, Y.; CHEN, L. Importance-based system cost management and failure risk analysis for different phases in life cycle. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 242, p. 109785, 2024.

ELMS, D. G. Risk balancing in structural problems. **Structural Safety**, v. 19, n. 1, p. 67–77, jan. 1997.

ENEVOLDSEN, I.; SØRENSEN, J. D. Reliability-based optimization in structural engineering. **Structural Safety**, v. 15, n. 3, p. 169–196, 1 set. 1994.

FABER, M. H. Risk and safety in Civil, Surveying and Environmental Engineering. 3 ed. Zurich: **Institute of Structural Engineering**, 2006.

FRANGOPOL, D. M. Probabilistic structural optimization. **Progress in Structural Engineering and Materials**, v. 1, n. 2, p. 223–230, jan. 1998.

FRANGOPOL, D. M. Structural Optimization Using Reliability Concepts. **Journal of Structural Engineering**, v. 111, n. 11, p. 2208–2301, nov. 1985.

FRANGOPOL, D. M.; LIN, K. Y.; ESTES, A. C. Life-Cycle Cost Design of Deteriorating Structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 10, p. 1390–1401, out. 1997.

FRANGOPOL, D. M.; MAUTE, K. Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. **Computers & Structures**, v. 81, n. 7, p. 397–410, abr. 2003.

GARBATOV, Y.; GUEDES SOARES, C. Cost and reliability based strategies for fatigue maintenance planning of floating structures. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 73, n. 3, p. 293–301, 2001.

GHASEMI, S. H.; NOWAK, A. S. Target reliability for bridges with consideration of ultimate limit state. **Engineering Structures**, v. 152, p. 226–237, 2017.

GHORBANI, M.; NOURELFATH, M.; GENDREAU, M. A two-stage stochastic programming model for selective maintenance optimization. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 223, p. 108480, jul. 2022.

GOMES, W. J. S.; BECK, A. T. Global structural optimization considering expected consequences of failure and using ANN surrogates. **Computers & Structures**, v. 126, p. 56–68, set. 2013.

GOMES, W. J. S.; BECK, A. T. Optimal inspection and design of onshore pipelines under external corrosion process. **Structural Safety**, v. 47, p. 48–58, 2014.

GOMES, W. J. S.; BECK, A. T. The Design Space Root Finding method for efficient risk optimization by simulation. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 44, p. 99–110, 2016.

HAN, X.; YANG, D. Y.; FRANGOPOL, D. M. Optimum maintenance of deteriorated steel bridges using corrosion resistant steel based on system reliability and life-cycle cost. **Engineering Structures**, v. 243, p. 112633, 2021.

HERIS, M. K. **ACO for Continuous Domains in MATLAB**. Disponível em: <https://yarpiz.com/67/ypea104-acor>. Acesso em: 23 jun. 2025. Yarpiz, 2015a.

HERIS, M. K. **Artificial Bee Colony in MATLAB**. Disponível em: <https://yarpiz.com/297/ypea114-artificial-bee-colony>. Acesso em: 23 jun. 2025. Yarpiz, 2015e.

HERIS, M. K. **Firefly Algorithm (FA) in MATLAB**. Disponível em: <https://yarpiz.com/259/ypea112-firefly-algorithm>. Acesso em: 23 jun. 2025. Yarpiz, 2015c.

HERIS, M. K. **Imperialist Competitive Algorithm (ICA) in MATLAB**. Disponível em: <https://yarpiz.com/247/ypea118-imperialist-competitive-algorithm>. Acesso em: 23 jun. 2025. Yarpiz, 2015b.

HERIS, M. K. **Invasive Weed Optimization (IWO) in MATLAB**. Disponível em: <https://yarpiz.com/251/ypea119-invasive-weed-optimization>. Acesso em: 23 jun. 2025. Yarpiz, 2015d.

HERIS, M. K. **Teaching-Learning-Based Optimization in MATLAB**. Disponível em: <https://yarpiz.com/83/ypea111-teaching-learning-based-optimization>. Acesso em: 23 jun. 2025. Yarpiz, 2015f.

HILTON, H. H.; FEIGEN, M. Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, n. 9, p. 641–652, set. 1960.

HLOBILOVÁ, A.; MARELLI, S.; SUDRET, B. Benchmark case datasets – **Truss model**. Zenodo, 2024.

HYUN DONG-MIN. 오늘의 역사] 서울 삼풍백화점 붕괴 사고가 발생하다. Incheon Today, 29 jun. 2024. Disponível em: <<https://www.incheontoday.com/news/articleView.html?idxno=249122>>. Acesso em: 29 jul. 2025.

JOANNI, A.; RACKWITZ, R. Cost–benefit optimization for maintained structures by a renewal model. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 93, n. 3, p. 489–499, 2008.

JOHNSON, D. P. Cost-risk optimization of nondestructive inspection level. **Nuclear Engineering and Design**, v. 45, n. 1, p. 207–223, jan. 1978.

KALABA, R. Design of Minimal-Weight Structures for Given Reliability and Cost. **Journal of the aerospace sciences/Journal of the aero/space sciences**, v. 29, n. 3, p. 355–356, 1 mar. 1962.

KANDA, J.; ELLINGWOOD, B. Formulation of load factors based on optimum reliability. **Structural Safety**, v. 9, n. 3, p. 197–210, fev. 1991.

KANDA, J.; SHAH, H. Engineering role in failure cost evaluation for buildings. **Structural Safety**, v. 19, n. 1, p. 79–90, jan. 1997.

KARABOGA, D. **An Idea Based on Honey Bee Swarm for Numerical Optimization**, Technical Report - TR06. Technical Report, Erciyes University, jun. 2005.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: **INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS (ICNN)**, 1995, Perth. *Proceedings...* Perth: IEEE, 1995. v. 4, p. 1942–1948.

KIM, S. H.; WEN, Y. K. Optimization of structures under stochastic loads. **Structural safety**, v. 7, n. 2-4, p. 177–190, 1 mar. 1990.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983.

KROETZ, H. M. et al. A Two-Level Kriging-Based Approach with Active Learning for Solving Time-Variant Risk Optimization Problems. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 203, p. 107033, nov. 2020.

KROETZ, H. M. **Otimização estrutural sob incertezas**: métodos e aplicações. São Carlos, 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2019.

KROETZ, H. M.; TESSARI, R. K.; BECK, A. T. Kriging Assisted Risk Optimization with Ranked Weighted Average Simulation. **Safety, Reliability, Risk, Resilience and**

Sustainability of Structures and Infrastructure. 12th Conf. On Structural Safety and Reliability, Vienna, Austria. Agosto, 2017.

LEE, K.; CHO, H.; CHA, C. Life-cycle cost-effective optimum design of steel bridges considering environmental stressors. **Engineering Structures**, v. 28, n. 9, p. 1252–1265, 2006.

LI, G.; HU, H. Risk design optimization using many-objective evolutionary algorithm with application to performance-based wind engineering of tall buildings. **Structural Safety**, v. 48, p. 1–14, 2014.

LIU, M.; WEN, Y. K.; BURNS, S. A. Life cycle cost oriented seismic design optimization of steel moment frame structures with risk-taking preference. **Engineering Structures**, v. 26, n. 10, p. 1407–1421, 2004.

LUQUE, J.; STRAUB, D. Risk-based optimal inspection strategies for structural systems using dynamic Bayesian networks. **Structural Safety**, v. 76, p. 68–80, 2019.

MARELLI, S.; SUDRET, B. UQLab: A framework for uncertainty quantification in Matlab. In: **International Conference on Vulnerability, Risk Analysis and Management (ICVRAM)**, 2., 2014, Liverpool. Anais. Liverpool: [s.n.], 2014. p. 2554–2563.

MEHRABIAN, A. R.; LUCAS, C. A novel numerical optimization algorithm inspired from weed colonization. **Ecological Informatics**, v. 1, n. 4, p. 355–366, dez. 2006.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. 3 ed. Chichester: John Wiley & Sons, Inc, 2018.

MICHELL, A. G. M. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 8, n. 47, p. 589–597, nov. 1904.

MISHRA, M.; KESHAVARZZADEH, V.; NOSHADRAVAN, A. Reliability-based lifecycle management for corroding pipelines. **Structural Safety**, v. 76, p. 1–14, 2019.

MITSEAS, I. P.; KOUGIOUMTZOGLU, I. A.; BEER, M. An approximate stochastic dynamics approach for nonlinear structural system performance-based multi-objective optimum design. **Structural Safety**, v. 60, p. 67–76, 2016.

MÖLLER, O. et al. Structural optimization for performance-based design in earthquake engineering: Applications of neural networks. **Structural Safety**, v. 31, n. 6, p. 490–499, 2009.

MOSES, F. Problems and prospects of reliability-based optimization. **Engineering Structures**, v. 19, n. 4, p. 293–301, abr. 1997.

MOSES, F. Structural system reliability and optimization. **Computers & Structures**, v. 7, n. 2, p. 283–290, abr. 1977.

MOSES, F.; KINSER, D. E. Optimum structural design with failure probability constraints. **AIAA Journal**, v. 5, n. 6, p. 1152–1158, jun. 1967.

NATAF, A. Determination des Distribution dont les Marges sont Donnees, **Comptes Rendus de l'Academie des Sciences**, Paris, 225,42-43, 1962.

NIELSEN, J.; SØRENSEN, J. Methods for Risk-Based Planning of O&M of Wind Turbines. **Energies**, v. 7, n. 10, p. 6645–6664, 16 out. 2014.

PAGANI, R. N.; KOVALESKI, J. L.; RESENDE, L. M. Methodi Ordinatio: a proposed methodology to select and rank relevant scientific papers encompassing the impact factor, number of citation, and year of publication. **Scientometrics**, v. 105, p. 2109–2135, 2015.

PANDEY, M. et al. **Life safety in the Reliability-Based design and assessment of structures**. Structural Safety, p. 102453, 2024.

RACKWITZ, R. Optimization and risk acceptability based on the Life Quality Index. **Structural Safety**, v. 24, n. 2, p. 297–331, 2002.

RACKWITZ, R.; JOANNI, A. Risk acceptance and maintenance optimization of aging civil engineering infrastructures. **Structural Safety**, v. 31, n. 3, p. 251–259, maio 2009.

RAO, R. V.; SAVSANI, V. J.; VAKHARIA, D. P. Teaching–learning-based optimization: A novel method for constrained mechanical design optimization problems. **Computer-Aided Design**, v. 43, n. 3, p. 303–315, mar. 2011.

RAO, S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. [s.l.]: John Wiley & Sons, 2009.

RASHKI, M.; MIRI, M.; AZHDARY MOGHADDAM, M. A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point. **Structural Safety**, v. 39, p. 22–29, nov. 2012.

RODRIGUES DA SILVA, L. A.; TORII, A. J.; BECK, A. T. Hyperstatic and redundancy thresholds in truss topology optimization considering progressive collapse due to aleatory and epistemic uncertainties. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 71, p. 103384, 2023.

ROSENBLUETH, E. Optimum reliabilities and optimum design. **Structural Safety**, v. 3, n. 2, p. 69–83, jan. 1986.

SAAD, L. et al. Reliability-based optimization of direct and indirect LCC of RC bridge elements under coupled fatigue-corrosion deterioration processes. **Engineering Failure Analysis**, v. 59, p. 570–587, jan. 2016.

SEXSMITH, R. G. Reliability during temporary erection phases. **Engineering Structures**, v. 20, n. 11, p. 999–1003, nov. 1998.

SOCHA, K.; DORIGO, M. Ant colony optimization for continuous domains. **European Journal of Operational Research**, v. 185, n. 3, p. 1155–1173, mar. 2008.

SOLIMAN, M.; FRANGOPOL, D. M.; MONDORO, A. A probabilistic approach for optimizing inspection, monitoring, and maintenance actions against fatigue of critical ship details. **Structural Safety**, v. 60, p. 91–101, 2016.

STEWART, M. G. Reliability-based assessment of ageing bridges using risk ranking and life cycle cost decision analyses. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 74, n. 3, p. 263–273, 2001.

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. **Journal of Global Optimization**, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997.

STREICHER, H.; JOANNI, A.; RACKWITZ, R. Cost-benefit optimization and risk acceptability for existing, aging but maintained structures. **Structural Safety**, v. 30, n. 5, p. 375–393, 2008.

SUDRET, B. **Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models**: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. 2007. 252 p. Relatório (Habilitação para dirigir pesquisas) – Universidade Blaise Pascal – Clermont II, 2007.

TAFLANIDIS, A. A.; BECK, J. L. Life-cycle cost optimal design of passive dissipative devices. **Structural Safety**, v. 31, n. 6, p. 508–522, 2009.

TAFLANIDIS, A. A.; LOUKOGEORGAKI, E.; ANGELIDES, D. C. Offshore wind turbine risk quantification/evaluation under extreme environmental conditions. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 115, p. 19–32, 2013.

TARANATH, **Bungale S. Reinforced Concrete Design of Tall Buildings**. Boca Raton: Crc Press, 2010. 907 p.

TECHNICAL UNIVERSITY OF MUNICH. **First-Order Reliability Method**. Disponível em: <<https://www.cee.ed.tum.de/en/era/software/reliability/first-order-reliability-method/>>. Acesso em: dez. 2023.

TORII, A. J. et al. A performance measure approach for risk optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 60, n. 3, p. 927–947, 12 set. 2019.

TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. A second order SAP algorithm for risk and reliability based design optimization. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 190, p. 106499, 2019.

TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Probability of failure sensitivity analysis using polynomial expansion. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 48, p. 76–84, 2017.

VALDEBENITO, M. A.; SCHUËLLER, G. I. A survey on approaches for reliability-based optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 42, n. 5, p. 645–663, 29 nov. 2010b.

VALDEBENITO, M. A.; SCHUËLLER, G. I. Reliability-based optimization considering design variables of discrete size. **Engineering Structures**, v. 32, n. 9, p. 2919–2930, 2010a.

VANDERPLAATS, G. N. Structural Optimization-Past, Present, and Future. **AIAA Journal**, v. 20, n. 7, p. 992–1000, jul. 1982.

VANMARCKE, E. H. Matrix formulation of reliability analysis and reliability-based design. **Computers & Structures**, v. 3, n. 4, p. 757–770, jul. 1973.

VAURIO, J. K. Optimization of test and maintenance intervals based on risk and cost. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 49, n. 1, p. 23–36, 1995.

WEN, Y. K. Minimum lifecycle cost design under multiple hazards. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 73, n. 3, p. 223–231, 2001.

WEN, Y. K.; KANG, Y. J. Minimum Building Life-Cycle Cost Design Criteria. I: Methodology. **Journal of Structural Engineering**, v. 127, n. 3, p. 330–337, mar. 2001a.

YANG, X. Firefly algorithms for multimodal optimization. WATANABE, O.; ZEUGMANN, T. (Eds.). SAGA 2009. Berlin: **Springer-Verlag**, 2009. v. 5792. p. 169–178.

YETER, B.; GARBATOV, Y.; GUEDES SOARES, C. Risk-based life-cycle assessment of offshore wind turbine support structures accounting for economic constraints. **Structural Safety**, v. 81, p. 101867, 2019.

YU TAE-YOUNG. [붕괴의 역사] ② '바뀌지 않는 사고원인'..27년전 삼풍백화점 붕괴원인도 '비용절감'. Opinion News, 31 jan. 2022. Disponível em: <<https://www.opinionnews.co.kr/news/articleView.html?idxno=61518>>. Acesso em: 29 jul. 2025.

ZHAO, Q. Q.; YUN, W. Y. Storage availability of one-shot system under periodic inspection considering inspection error. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 186, p. 120–133, jun. 2019.

ZOU, G. et al. A holistic approach to risk-based decision on inspection and design of fatigue-sensitive structures. **Engineering Structures**, v. 221, p. 110949, 2020.