

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FLÁVIA FASOLO

AVALIAÇÃO DE MODELOS CAPAZES DE PREVER O COMPORTAMENTO À
FLEXÃO SIMPLES DE ELEMENTOS UNIDIRECIONAIS DE CONCRETO
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Curitiba

2023

FLÁVIA FASOLO

AVALIAÇÃO DE MODELOS CAPAZES DE PREVER O COMPORTAMENTO À
FLEXÃO SIMPLES DE ELEMENTOS UNIDIRECIONAIS DE CONCRETO
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil, no Setor de Tecnologia, na
Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial
à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, Área
de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Pieralisi

Curitiba

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Fasolo, Flávia

Avaliação de modelos capazes de prever o comportamento à flexão simples de elementos unidirecionais de concreto reforçado com fibras de aço. / Flávia Fasolo. – Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Pieralisi.

1. Concreto. 2. Fibras de metal (Aço). 3. Modelos matemáticos. I. Pieralisi, Ricardo. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **FLÁVIA FASOLO** intitulada: **Avaliação de modelos capazes de prever o comportamento à flexão simples de elementos unidirecionais de concreto reforçado com fibras de aço**, sob orientação do Prof. Dr. RICARDO PIERALISI, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 04 de Julho de 2023.

Assinatura Eletrônica

04/07/2023 11:40:39.0

RICARDO PIERALISI

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

04/07/2023 13:16:18.0

ANA BLANCO ALVAREZ

Avaliador Externo (UNIVERSITY OF LOUGHBOROUGH)

Assinatura Eletrônica

04/07/2023 16:40:53.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

À Deus, por transmitir sabedoria, guiando-me em cada etapa da minha vida, inclusive neste projeto acadêmico. Sua presença silenciosa me fortalece e me encoraja.

Aos meus pais, Flávio e Mariza, que, por meio do exemplo, me motivaram a seguir na carreira acadêmica. Por me propiciarem excelentes oportunidades, visando a criação de um referencial consistente para que eu pudesse fazer escolhas acertadas. Ao Rodrigo, que tenho a felicidade e gratidão de tê-lo em minha vida, pela sua presença constante e apoio incondicional aos meus sonhos.

À minha irmã gêmea Laura, por ser literalmente minha cara metade, por participar, incentivar e celebrar minhas conquistas. À minha irmã mais velha, Nathalia, pela companhia durante as trajetórias da vida e, sobretudo, durante esses anos de mestrado.

Ao meu orientador, professor Dr. Ricardo, pelo tempo e esforço dedicados à minha formação e a este projeto, bem como, pela paciência e incentivo em períodos desafiadores. À Gabriela e à Letícia, por me mostrarem que esse caminho era possível.

À Nicolle, por acreditar que eu posso tudo o que sonho e por me lembrar disso sempre. À Maria Cecília e à Fernanda, por terem sido minha válvula de escape e por sempre me proporcionarem momentos de qualidade. Ao Matheus, pela fiel amizade e pela compreensão da minha limitada disponibilidade de horários para trabalhar em projetos que idealizamos juntos.

Aos meus colegas de Mestrado, Junior, Natalia, Ana Cláudia e Flávia, por dividirem comigo os momentos de estudo e tornarem o processo mais fácil, mesmo nos momentos de desesperança. Agradeço por irmos além das fronteiras da Universidade.

À minha supervisora no Tribunal de Justiça, Daniele, pela compreensão com meus horários e por ter confiado no meu trabalho. Aos meus colegas de trabalho, agradeço pela receptividade e companheirismo.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) e à Universidade Federal do Paraná (UFPR) pela oportunidade de cursar o mestrado em uma instituição pública e de alta qualidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

O segredo do sucesso é a constância de propósito.

Benjamin Disraeli

RESUMO

O Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA) tem se destacado como uma alternativa promissora ao concreto armado para fins de aplicações estruturais, devido ao seu desempenho satisfatório em determinados elementos, somado a maior durabilidade e simplificação dos processos executivos. Essas características têm despertado um interesse crescente em sua utilização para situações de elevada responsabilidade estrutural. Diante desse contexto, a existência de modelos capazes de prever com segurança o seu comportamento assume importância. Nessa perspectiva, o presente trabalho tem como objetivo desenvolver e avaliar modelos capazes de prever a resposta à flexão simples de elementos unidirecionais de CRFA. Para alcançar tal objetivo, a pesquisa foi dividida em duas partes. Na primeira, o foco foi direcionado para um modelo de análise de seções transversais, o qual permitiu a avaliação do comportamento de elementos de viga padrão de ensaio em relação à $F - CMOD$, considerando diferentes leis constitutivas. Além disso, foram analisados possíveis parâmetros capazes de influenciar os resultados previstos pelos modelos, tais como resistência à compressão da matriz e volume de fibras. Na segunda parte, abordou-se um modelo baseado em elementos finitos associado ao modelo de rigidez equivalente. Nesse caso, foram obtidas respostas em termos de $F - \delta$ e gráficos de estimativa da configuração de dano para elementos unidirecionais planos até a carga última. No primeiro estudo, no qual não há influência do efeito escala, as equações constitutivas avaliadas reproduziram adequadamente os dados experimentais, especialmente a proposta pelo MC2010. Dentre os parâmetros analisados, a resistência à tração das fibras foi o que mais influenciou as previsões realizadas. Na segunda parte, na qual o efeito da escala pôde ser avaliado, constatou-se novamente que, com base nos dois exemplos estudados, o modelo MC2010 se mostrou o mais adequado para obter estimativas de $F - \delta$. O referido modelo forneceu previsões que, além de assegurar resultados favoráveis a segurança ao evitar superestimação, apresentaram uma boa proximidade com os valores médios experimentais, considerando devidamente o efeito de escala quando necessário. No que se refere à reprodução do dano, o modelo de elementos finitos possibilita a obtenção de uma estimativa das regiões mais suscetíveis a danos e, portanto, com maior probabilidade de ocorrerem fissuras, embora não seja capaz de determinar precisamente a localização exata dessas fissuras. Além disso, foi observado o potencial de influência da quantidade de camadas utilizadas para discretizar a seção nos resultados obtidos. Por fim, uma comparação das previsões fornecidas por ambos os modelos foi realizada em termos de $F - \varepsilon$, revelando uma proximidade significativa e confirmando a validade das previsões. Com base nas informações apresentadas, conclui-se que é viável obter estimativas confiáveis do comportamento de elementos unidirecionais de CRFA em relação à flexão simples por meio de modelos numéricos baseados em leis constitutivas. No entanto, é importante considerar adequadamente o efeito de escala ao estimar o comportamento de elementos com diferentes dimensões, a fim de evitar respostas que não sejam representativas da realidade.

Palavras-chave: concreto reforçado com fibras de aço; modelos numéricos; flexão simples; elementos unidirecionais.

ABSTRACT

Steel Fiber Reinforced Concrete (SFRC) has emerged as a promising alternative to reinforced concrete for structural applications. It has demonstrated satisfactory performance in certain elements, greater durability, and simplified executive processes. As a result, there is a growing interest in utilizing SFRC for highly demanding structural applications. Therefore, the development and evaluation of accurate models capable of predicting SFRC's behavior become crucial. This paper aims to address this need by developing and evaluating models for predicting the response of unidirectional SFRC elements under simple bending. The research was divided into two parts to achieve the aforementioned goal. In the first part, the focus was on analyzing the cross-section of standard test beam elements, evaluating their behavior concerning $F - CMOD$ considering different constitutive laws. Additionally, the study analyzed potential parameters that could influence the predicted results, such as matrix compressive strength and fiber volume. The second part involved the development of a finite element-based model coupled with the equivalent stiffness model. This approach enabled obtaining responses in terms of $F - \delta$ and damage configuration plots for unidirectional plane elements until they reached the ultimate load. In the first part of the study, where the scale effect was not considered, the evaluated constitutive equations effectively reproduced the experimental data, particularly the model proposed by MC2010. Among the analyzed parameters, the fiber tensile strength exerted the most significant influence on the predictions. In the second part, where the scale effect was taken into account, the MC2010 model again proved to be the most suitable for estimating $F - \delta$ values based on the two examples studied. This model provided predictions that ensured safety by avoiding overestimation while closely aligning with the experimental mean values and considering the scale effect when necessary. In terms of damage reproduction, the finite element model enabled the estimation of regions prone to damage and more likely to develop cracks, although it could not precisely determine the exact crack locations. Moreover, the study observed the potential influence of the number of layers used to discretize the section on the obtained results. Finally, a comparison of the predictions offered by both models was conducted in terms of $F - \varepsilon$, revealing significant proximity and confirming the validity of their predictions. Based on the information presented, it can be concluded that numerical models based on constitutive laws can provide reliable estimates of the behavior of unidirectional SFRC elements under simple bending. However, it is crucial to appropriately consider the scale effect when estimating the behavior of elements with different dimensions to ensure accurate representation of reality.

Key-words: steel fiber reinforced concrete; numerical models; simple bending; unidirectional elements.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Aplicações tradicionais do CRFA: a) pavimentos industriais, b) estradas e outros pavimentos, c) concreto projetado, d) segmentos pré-moldados.....	20
FIGURA 2 - Organização da dissertação	24
FIGURA 3 - Principais características das fibras em compósitos cimentícios reforçados com fibras	27
FIGURA 4 – Diagrama de “tensão versus deformação elástica” de matriz e fibras de alto e baixo módulo de elasticidade trabalhando em conjunto.....	28
FIGURA 5 - Modelo compósito considerado como um sistema com dois componentes (fibras e matriz).....	29
FIGURA 6 - Mecanismo de ação das fibras de aço	31
FIGURA 7 – Conceitos para classificação do comportamento do CRF a) <i>hardening</i> , b) <i>softening</i>	31
FIGURA 8 – Ilustração da importância da orientação das fibras.....	33
FIGURA 9 - Distribuição das deformações e tensões na seção de um elemento fletido reforçado com CRFA.....	35
FIGURA 10 – Coeficiente de variação em ensaio à flexão e ensaio com placas.....	39
FIGURA 11 – Mecanismo de falha de um ensaio de 3 pontos considerando a abordagem a) FCO, b) ECO	40
FIGURA 12 – Distribuição tensão-deformação na seção transversal	46
FIGURA 13 – Fator tamanho proposto pelo RILEM.....	47
FIGURA 14 – Diagrama elástico-linear e rígido-plástico propostos pela CNR-DT 204 em termos de a) tensão-abertura de fissura, b) tensão-deformação.....	48
FIGURA 15 - Diagramas de distribuição de tensões axiais e deformações da seção reforçada somente com fibras	52
FIGURA 16 – Casos de formulação definido pelo <i>Código Estructural</i> a) caso I, b) caso II, c) caso III	53
FIGURA 17 - Desenvolvimento do CRF ilustrando dois períodos de tempo distintos	55
FIGURA 18 - Exemplos de aplicações reais de CRFA para uso estrutural a) estabilização de solo, b) pavimentos, c) tubos, d) parede pré-moldada.....	56
FIGURA 19 – Aplicações mais recentes e de maior responsabilidade estrutural a) shopping na Letônia, b) edifício comercial na Estônia, c) prédio da LKS na Espanha.....	58
FIGURA 20 - Distribuição das propriedades dos concretos e das fibras	63

FIGURA 21 - Viga submetida a esforços à flexão por 3 pontos a) seção transversal, b) esquema do ensaio	65
FIGURA 22 - Representação esquemática a) da seção, b) da distribuição das deformações, c) da distribuição das tensões	67
FIGURA 23 - Fluxograma do modelo analítico de seção transversal	69
FIGURA 24 – Esquematização do método proposto para o capítulo 3.....	72
FIGURA 25 - Curvas de carga por abertura de fissura obtidas com base no trabalho de Salvador (2012) utilizando fibras de aço nas seguintes variações: (a) 0,19%, (b) 0,32% e (c) 0,45% ...	73
FIGURA 26 - Curvas de carga por abertura de fissura obtidas com base no trabalho de Trindade <i>et al.</i> (2020) utilizando fibras de aço nas seguintes variações: (a) 0,19%, (b) 0,38% e (c) 0,58%	74
FIGURA 27 - <i>Box-plot</i> dos erros percentuais, considerando diferentes resistências à compressão média da matriz, para os valores de carga correspondentes aos seguintes <i>CMODs</i> : a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm	79
FIGURA 28 - <i>Box-plot</i> dos erros percentuais, considerando diferentes volumes de fibras, para os valores de carga correspondentes aos seguintes <i>CMODs</i> : a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm	80
FIGURA 29 - <i>Box-plot</i> dos erros percentuais, considerando diferentes fatores de forma, para os valores de carga correspondentes aos seguintes <i>CMODs</i> : a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm.....	82
FIGURA 30 - <i>Box-plot</i> dos erros percentuais, considerando diferentes resistências à tração das fibras, para os valores de carga correspondentes aos seguintes <i>CMODs</i> : a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm	83
FIGURA 31 – a) Modelo da estrutura, b) elemento finito de viga.....	90
FIGURA 32 – Seção transversal de um elemento de viga <i>Euler-Bernoulli</i> laminado	91
FIGURA 33 – Exemplo de um modelo que descreve o comportamento à tração do CRFA ...	93
FIGURA 34 - Relação entre força e deslocamento do método de <i>Newton-Raphson</i>	98
FIGURA 35 - Fluxograma do código computacional desenvolvido	99
FIGURA 36 – Esquematização do método proposto para o capítulo 4.....	101
FIGURA 37 – Ilustração do exemplo 3.4.1 a) vista lateral, b) seção transversal.....	103
FIGURA 38 - a) MC2010 e b) Hipóteses assumidas para a simulação do elemento do exemplo 3.4.1	105
FIGURA 39 – Diagramas trilineares considerando a abordagem a) FCO, b) ECO	106
FIGURA 40 – Força <i>versus</i> deslocamento	108

FIGURA 41 – Força acumulada <i>versus</i> deslocamento.....	109
FIGURA 42 - Configuração final de dano segundo o modelo MC2010 considerando a abordagem a) FCO, b) ECO	110
FIGURA 43 - Configuração final de dano segundo o modelo CE2021 considerando a abordagem a) FCO, b) ECO	112
FIGURA 44 – Configuração final de dano segundo o modelo RILEM considerando a abordagem a) FCO, b) ECO	113
FIGURA 45 - Deformação <i>versus</i> carga segundo o modelo do RILEM, para a abordagem FCO a) até a deformação última, b) até a deformação de 0,8‰	114
FIGURA 46 - Registros fotográficos da condição final do elemento a) antes, b e c) depois do ensaio.....	115
FIGURA 47 – Deslocamento <i>versus</i> carga máxima considerando a abordagem ECO para um modelo com 10 e 30 camadas.....	117
FIGURA 48 – Configuração final de dano para um modelo com 10 e 30 camadas, respectivamente, segundo a abordagem ECO, considerando a) MC2010 – 10 camadas, b) MC2010 – 30 camadas, c) CE2021 – 10 camadas, d) CE2021 – 30 camadas	118
FIGURA 49 – Deformação <i>versus</i> carga máxima considerando a abordagem a) abordagem FCO, b) abordagem ECO	120
FIGURA 50 – Ilustração do exemplo 3.5.2 a) vista lateral, b) seção transversal.....	121
FIGURA 51 – a) MC2010 e b) Hipóteses assumidas para a simulação do elemento do exemplo 3.4.1	123
FIGURA 52 – Diagramas trilineares considerando a abordagem a) FCO, b) ECO	123
FIGURA 53 – Força <i>versus</i> deslocamento	125
FIGURA 54 – Força acumulada <i>versus</i> deslocamento.....	126
FIGURA 55 – Configuração final de dano considerando a) RILEM – FCO, b) RILEM – ECO, c) MC2010 – FCO, d) MC2010 – ECO, e) CE2021 – FCO, f) CE2021 – ECO.....	127
FIGURA 56 - Registros fotográficos da condição final do elemento a) antes, b e c) depois do ensaio	130
FIGURA 57 - Deformação <i>versus</i> carga máxima considerando a abordagem a) abordagem FCO, b) abordagem ECO	131

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Objetivos específicos.....	22
TABELA 2 - Principais métodos de ensaio para a caracterização do comportamento pós-fissuração do CRF	38
TABELA 3 – Modelos constitutivos de diferentes normativas.....	43
TABELA 4 - Resumo das características dos modelos constitutivos	44
TABELA 5 – Dados de entrada no modelo.....	72
TABELA 6 – Parâmetros dos modelos constitutivos.....	74
TABELA 7 – Classificação da base de dados	77
TABELA 8 - Erro percentual médio e desvio padrão de cada modelo constitutivo para os principais pontos do gráfico $F - CMOD$, considerando as diferentes classificações realizadas	77
TABELA 9 – Dados de entrada e parâmetros do material	103
TABELA 10 – Parâmetros dos modelos constitutivos considerando a abordagem FCO e ECO	105
TABELA 11 – Máxima diferença das cargas acumuladas previstas por cada modelo em relação à média experimental.....	109
TABELA 12 – Dados de entrada e parâmetros do material	121
TABELA 13 – Parâmetros dos modelos constitutivos considerando a abordagem FCO e ECO	122
TABELA 14 – Máxima diferença das cargas acumuladas previstas por cada modelo em relação à média experimental.....	126

LISTA DE ABREVIATURAS

BCN	Ensaio Barcelona
CAR	Concreto de Alta Resistência
CE2021	Código Estructural
CMOD	Medida da abertura do entalhe
CN	Concreto Normal
CNR-DT 204	National Research Council – Guide for Design and Construction of Fiber-Reinforced Concrete Structures (Conselho Nacional de Pesquisa - Guia para Projeto e Construção de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibra)
CRF	Concreto Reforçado com Fibras
CRFA	Concreto Reforçado com Fibras de Aço
DAfStb	Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (Comitê Alemão para Concreto Armado)
DEWS	Ensaio Double-Edge Wedge Splitting
EAE	Instrucción de Acero Estructural (Instrução de Aço Estrutural)
EC	Equação Contínua
ECO	Equivalent Crack Opening (Abertura de Fissura Equivalente)
ED	Equação Descontínua
EFNARC	Ensaio com painel EFNARC
EHE	Instrucción de Hormigón Estructural (Instrução de Concreto Estrutural)
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
EMA	Erro Médio Absoluto
FCO	Full Crack Opening (Abertura de Fissura Total)
MC2010	fib Model Code
MEF	Métodos dos Elementos Finitos
MVD	Ensaio Montevideo
NBR 16935	Normativa Brasileira 16935
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
RILEM	Recomendação RILEM TC 162-TDF
RLT	Referencial Lagrangiano Total
RLA	Referencial Lagrangiano Atualizado

ROUND	Ensaio com painel redondo
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UNIAX	Ensaio de tração uniaxial
WST	Ensaio Wedge-Splitting
3PBT	Ensaio à flexão de 3 pontos
4PBT	Ensaio à flexão de 4 pontos

LISTA DE SÍMBOLOS

F	Força
$CMOD_i$	Valor da abertura do entalhe, $i = 1, 2, 3$ ou 4 , sendo $CMOD_1 = 0,5$ mm, $CMOD_2 = 1,5$ mm, $CMOD_3 = 2,5$ mm e $CMOD_4 = 3,5$ mm
δ	Deslocamento
ε	Deformação / Deformação no ponto nodal de interesse
σ	Tensão
E e E_c	Módulo de elasticidade do CRF
F_{cr}	Força de formação da fissuração
$F_{m\acute{a}x}$	Força máxima
σ_{pc}	Tensão máxima na região pós-fissuração
Λ	Produto de diversos coeficientes associados ao comprimento da fibra que foi arrancado, orientação e distribuição da fibra, número de fibras sendo arrancadas por unidade de área, dentre outros
τ	Energia de ligação na interface fibra-matriz
V_f	Volume de fibras
$\frac{L}{d}$	Fator de forma
ε_{topo}	Deformação à compressão do CRFA no topo seção
ε_{base}	Deformação à tração do CRFA na base da seção
w	Abertura de fissura
F_c	Força resultante de compressão na seção flexionada
F_t	Força resultante de tração na seção flexionada
θ	Rotação do eixo longitudinal da fibra
θ_1	Rotação do eixo longitudinal da fibra em um corpo de prova padrão
θ_2	Rotação do eixo longitudinal da fibra em um corpo de prova adaptado para considerar o efeito escala
h_1	Altura de um corpo de prova padrão
h_2	Altura de um corpo de prova adaptado para considerar o efeito escala
h_{sp1}	Altura de um corpo de prova padrão descontado o entalhe
h_{sp2}	Altura de um corpo de prova adaptado para considerar o efeito escala descontado o entalhe

l	Vão livre de ensaio / Comprimento total do elemento finito de viga delimitado entre os nós inicial e final
ε_1	Deformação de um corpo de prova padrão
ε_2	Deformação de um corpo de prova adaptado para considerar o efeito escala
f_{Ftu}	Resistência à tração direta do CRF, valor último de acordo com CNR-DT 204, MC2010 e NBR16935
f_{eq2}	Resistência equivalente pós-fissuração do CRF para o estado limite último de acordo com CNR-DT 204
ε_u	Deformação última
$f_{R,i}$	Tensão residual à tração na flexão correspondente ao $CMOD = CMOD_i$
$f_{ctd,u}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF no ELU de acordo com DAfStb
α_c^f	Coefficiente para o comportamento da resistência a longo prazo de acordo com DAfStb
$f_{ctR,u}^f$	Resistência à tração do CRF de acordo com DAfStb no ELU
γ_{ct}^f	Fator de segurança de acordo com DAfStb
$f_{ctd,s}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF no ELS de acordo com DAfStb
$f_{ctR,s}^f$	Resistência à tração do CRF de acordo com DAfStb no ELS
w_u	Abertura de fissura última
$f_{ctR,d}$	Resistência de projeto à tração residual do CRF de acordo com CE2021
f_{Fts}	Resistência à tração direta do CRF, valor de serviço de acordo com CNR-DT 204, MC2010 e NBR16935
f_{eq1}	Resistência equivalente pós-fissuração do CRF para o estado limite de serviço de acordo com CNR-DT 204
k	Coefficiente para o tipo de tensão na seção transversal de acordo com CNR-DT 204 e MC2010
w_{i2}	Abertura média de fissura no ponto final do intervalo em que f_{eq2} é avaliado de acordo com CNR-DT 204
$f_{ctm,fl}$	Resistência média à tração na flexão do CRF de acordo com RILEM
d	Profundidade efetiva da seção; Diâmetro da fibra

K_H	Fator tamanho de acordo com RILEM
$f_{ctd,L1}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF com fibra de aço na classe de desempenho 1 de acordo com DAfStb
$f_{ctR,L1}^f$	Resistência à tração do CRF de acordo com DAfStb na classe de desempenho 1 de acordo com DAfStb
$f_{ctd,L2}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF com fibra de aço na classe de desempenho 2 de acordo com DAfStb
$f_{ctR,L2}^f$	Resistência à tração do CRF de acordo com DAfStb na classe de desempenho 2 de acordo com DAfStb
f_{ctm}	Resistência média do CRF à tração
f_{ck}	Resistência característica à compressão do CRF
ε_{SLs}	Deformação de serviço do CRF de acordo com MC2010 e CE2021
l_{cs}	Comprimento característico
ε_{SLU}	Deformação última do CRF de acordo com MC2010 e CE2021
y	Altura da linha neutra
ε_{Fu}	Deformação última do CRF de acordo com CNR-DT 204 e MC2010
$f_{ct,d}$	Resistência de projeto à tração do CRF
$f_{ct,fl,d}$	Resistência de projeto à flexo-tração do CRF de acordo com CE2021
k_1	Coeficiente para o tipo de tensão na seção transversal de acordo com CE2021
h	Altura da seção transversal
ε_{max}	Deformação última à tração do CRF de acordo com RILEM
ε_{cu}	Deformação última à compressão do CRF de acordo com RILEM
f_{cd}	Resistência de projeto à compressão do CRF
σ_{r1}	Resistência à tração direta na linha neutra de acordo com NBR 16935
σ_{r4}	Resistência à tração direta na face mais tracionada de acordo com NBR 16935
h_{ux}	Posição da linha neutra de acordo com NBR 16935
f_{ct}	Resistência à tração axial do CRF
F_i	Força concentrada aplicada medida no meio do vão do corpo de prova correspondente ao $CMOD = CMOD_i$ / Força interna
b	Largura da seção transversal do corpo de prova

h_{sp}	Altura de um corpo de prova padrão descontado o entalhe
f_L	Tensão de limite de proporcionalidade
F_L	Maior força aplicada no meio do vão do corpo de prova entre $0 \leq CMOD \leq 0,05$ mm
X	Curvatura da seção
$\varepsilon(y)$	Deformação ao longo da seção
y	Altura da linha neutra
A_c	Área da seção comprimida
A_t	Área da seção tracionada
M	Momento fletor externo aplicado na seção transversal
z	Braço de alavanca
N	Força normal externa aplicada na seção transversal
F_{exp}	Força proveniente de ensaios experimentais extraídos da literatura
σ_y e σ_z	Tensões normais
σ_x	Tensão axial
u	Deslocamento transversal
u_1 e u_3	Deslocamento transversal do nó inicial e do final do elemento finito, respectivamente
u_2 e u_4	Rotação do nó inicial e do final do elemento finito, respectivamente
x	Valor da coordenada no eixo x ao longo do elemento finito
y	Valores das coordenadas no eixo y ao longo do elemento finito
I	Momento de inércia da seção transversal
i	Índice para indicar o número de camadas
n	Número de camadas
y_i	Valores das coordenadas no eixo y da divisão de pontos das i-ésimas camadas consecutivas, as quais subtraídas resultam na altura da camada
y_0	Altura do topo da seção transversal até a linha neutra
y_n	Altura da base da seção transversal até a linha neutra
El_{eqv}	Rigidez à flexão equivalente
B	Matriz de deformação
$u^{(e)}$	Campo de deslocamento transversal elementar
ε_{camada}	Tensor de primeira ordem com as deformações de cada camada analisada

y_{camada}	Tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada
σ_1	Tensão de fissuração do CRFA segundo o modelo constitutivo adotado
ε_1	Deformação de fissuração do CRFA segundo o modelo constitutivo adotado
$E_{INICIAL}$	Módulo de deformação inicial do CRFA
E_{CRF}	Módulo de deformação do CRFA após fissuração
E_{camada}	Tensor de primeira ordem dos módulos de deformação de cada camada analisada
σ_{camada}	Tensor de primeira ordem com as tensões de cada camada analisada
y_{LN}	Nova posição da linha neutra
A_{camada}	Tensor de primeira ordem das áreas de cada camada analisada
y_{camada_novo}	Tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada atualizados conforme a nova posição da linha neutra
y_{camada_zero}	Tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y considerando a linha neutra passando no meio da seção
$M_{seção}$	Momento fletor atuante na seção
M_{camada}	Tensor de primeira ordem com os momentos de cada camada analisada
I_{camada}	Tensor de primeira ordem com os momentos de inércia de cada camada analisada
g	Tensor de primeira ordem que calcula a força residual entre a força externa e a força interna
j	Índice para indicar o número de iterações
F_{ext}	Força externa
ξ	Critério de convergência
K_{eqv}	Matriz de rigidez atualizada resultante da aplicação do modelo de rigidez equivalente
Δu	Tensor de primeira ordem com os deslocamentos a serem incrementados para que a força interna convirja com a força externa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	OBJETIVOS.....	22
1.2	JUSTIFICATIVA.....	22
1.3	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	23
2	REVISÃO DA LITERATURA	26
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	26
2.2	CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO (CRFA)	26
2.3	CARACTERÍSTICAS DAS FIBRAS	26
2.3.1	Comportamento mecânico do CRF.....	29
2.3.2	Fatores de influência	32
2.4	MÉTODOS PARA CARACTERIZAR A RESISTÊNCIA À TRAÇÃO	37
2.5	MODELOS CONSTITUTIVOS	42
2.5.1	Recomendação RILEM TC 162-TDF (2003).....	46
2.5.2	Norma italiana: CNR-DT 204 (2006).....	47
2.5.3	<i>fib</i> Model Code (2010).....	48
2.5.4	Diretriz alemã: DAfStb-Richtlinie Stahlfaserbeton (2010)	50
2.5.5	Norma brasileira: NBR 16935 (2021)	50
2.5.6	Norma espanhola: <i>Código Estructural</i> (2021).....	52
2.6	APLICAÇÕES ESTRUTURAIS	54
3	ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS CONSTITUTIVOS DE CRFA E AVALIAÇÃO DE PARÂMETROS DE INFLUÊNCIA.....	60
3.1	INTRODUÇÃO.....	60
3.1.1	Objetivos.....	61
3.1.2	Resumo do capítulo	62
3.2	COLETA DE DADOS	62
3.2.1	Materiais	62
3.2.2	Configuração do ensaio e corpos de prova	64
3.2.3	Parâmetros pós-fissuração	65
3.3	PROCEDIMENTO ANALÍTICO	66
3.3.1	Hipóteses básicas	66
3.3.2	Seção idealizada.....	66
3.3.3	Cálculo da abertura de fissura.....	67

3.3.4	Equilíbrio e compatibilidade.....	68
3.3.5	Estratégia adotada para resolver o problema seccional	68
3.3.6	Validação dos resultados	70
3.4	METODOLOGIA	70
3.5	RESULTADOS	72
3.5.1	Análise comparativa dos modelos constitutivos	72
3.5.2	Avaliação da influência de diferentes parâmetros nas previsões dos modelos constitutivos.....	76
3.6	CONCLUSÕES FINAIS	85
4	COMPORTAMENTO À FLEXÃO SIMPLES DE ELEMENTOS UNIDIRECIONAIS DE CRFA ATÉ A CARGA ÚLTIMA.....	87
4.1	INTRODUÇÃO.....	87
4.1.1	Objetivos.....	88
4.1.2	Resumo do capítulo	88
4.2	PROCEDIMENTO ANALÍTICO.....	89
4.2.1	Hipóteses básicas	89
4.2.2	Definição do elemento	89
4.2.3	Referenciais Lagrangianos.....	90
4.2.4	Método de solução de equações não lineares	90
4.3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	98
4.4	METODOLOGIA	100
4.5	RESULTADOS.....	103
4.5.1	Comparação com elemento de dimensões 1,20x2,50x0,0265 m.....	103
4.5.2	Comparação com o elemento de dimensões 0,30x1,00x0,10 m.....	121
4.6	CONCLUSÕES FINAIS	132
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	137
5.1	CONCLUSÕES GERAIS	137
5.2	PUBLICAÇÕES.....	139
5.3	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	139
	REFERÊNCIAS	141

1 INTRODUÇÃO

Para aplicações estruturais submetidas a tensões de tração, o concreto simples não é adequado como elemento resistente devido à sua capacidade limitada de resistir à este tipo de solicitação. Essa limitação é especialmente relevante nas estruturas de construções usuais, onde tais solicitações são frequentes, principalmente em elementos fletidos. A flexão atuante nas peças pode resultar na formação de fissuras, comprometendo assim a capacidade de resistência ao momento fletor e, conseqüentemente, reduzindo a resistência estrutural. Dessa forma, para aumentar a resistência desses elementos, é essencial associar o concreto a um material que apresente tanto boa resistência à tração quanto maior capacidade de deformação (CARVALHO; FIGUEIREDO, 2014).

Tradicionalmente, o concreto é complementado com barras de aço. No entanto, pesquisas recentes têm evidenciado o potencial das fibras como uma alternativa parcial ou total ao reforço tradicional, como demonstrado nos trabalhos de Álvarez *et al.* (2016) e Buttignol *et al.* (2018). Isso se deve ao fato de que a incorporação de fibras curtas e descontínuas na mistura de concreto tem mostrado melhorias significativas em suas propriedades mecânicas, especialmente em relação à resistência pós-fissuração. Isso resulta em maior capacidade de abertura de fissuras, o que aprimora a durabilidade e a resistência do concreto. Nesse contexto, entende-se que o Concreto Reforçado com Fibras (CRF) pode ser bastante apropriado para diversos tipos de elementos estruturais (FIGUEIREDO, 2011; IKUMI *et al.*, 2021).

Apesar das vantagens mencionadas, é relevante destacar que uma pesquisa conduzida por Figueiredo (2011) no ano de 2009, identificou os pavimentos como o mercado mais comum no que diz respeito a utilização de fibras de aço no Brasil, juntamente com o concreto projetado e os pré-moldados, conforme ilustrado na FIGURA 1. Porém, ressalta-se que, na época do levantamento, a falta de um código nacional de projeto pode ter dificultado a ampla adoção do Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA) como uma solução estrutural competitiva. Por consequência, identificou-se o seu uso em aplicações destinadas predominantemente para o controle de fissuras, sem levar em consideração a contribuição das fibras para a capacidade de carga.

FIGURA 1 - Aplicações tradicionais do CRFA: a) pavimentos industriais, b) estradas e outros pavimentos, c) concreto projetado, d) segmentos pré-moldados



Fonte: Adaptado de Álvarez (2013).

No entanto, as informações apresentadas no levantamento realizado por Figueiredo (2011) são datadas e podem não refletir a realidade atual. Desde 2009 até os dias de hoje, têm sido observados avanços significativos no que diz respeito à consolidação do CRF no Brasil. Um exemplo disso é a publicação da NBR 16935 (ABNT, 2021), que estabelece o procedimento nacional para o projeto de estruturas de CRF. Ademais, nos últimos anos, diversas outras normas relacionadas ao uso estrutural de fibras também foram publicadas no país. Diante desses avanços normativos, espera-se que haja um maior interesse nacional quanto a sua utilização para fins de aplicação estrutural, seguindo a tendência observada em outros países. Como ilustração, cita-se os países do continente europeu, onde a incorporação das fibras de aço como material de reforço teve um ponto de virada com a publicação de códigos e recomendações de projeto, impulsionando o uso de fibras com capacidade de carga e estimulando pesquisas mais sofisticadas (DI PRISCO, PLIZZARI, VANDEWALLE, 2009).

Apesar dos notáveis avanços na tecnologia de reforço de fibras de aço e sua crescente utilização, persistem questões relativas ao desempenho do material. Uma dessas questões diz respeito à identificação do modelo constitutivo mais adequado para reproduzir o comportamento do material à tração. Apesar das propostas existentes na literatura e nos códigos regulatórios, ainda não há um consenso estabelecido sobre o modelo mais preciso para prever a resposta do CRF. Essa situação evidencia a necessidade de prosseguir com estudos que colaborem com tal finalidade (ÁLVAREZ, 2013).

Além disso, a caracterização do material por meio de métodos de ensaio assume uma importância significativa no contexto do projeto. Atualmente, os procedimentos de projeto se baseiam principalmente em testes de flexão de pequenas vigas, os quais podem não representar de forma adequada a geometria de outras estruturas. Contudo, muitos códigos e normas ainda consideram que as capacidades de resistência do CRF não são afetadas pelo tamanho da estrutura. Porém, estudos, conforme o realizado por Galeote *et al.* (2020), demonstram que a aplicação direta de modelos constitutivos em elementos de escala real, sem considerar o efeito do tamanho, pode resultar em projetos inseguros devido às variações geométricas e de distribuição de fibras e orientação.

Diante desse panorama, torna-se evidente a necessidade de desenvolver modelos que representem de forma segura o comportamento das estruturas, levando em consideração efeitos como a não linearidade dos materiais e a influência do tamanho dos elementos estruturais. Nesse contexto, o uso de métodos computacionais na engenharia desempenha um papel cada vez mais relevante, uma vez que permite a realização de estudos mais realistas e, por consequência, obtenção de análises precisas, além de possibilitar a simulação e verificação das premissas necessárias para garantir a confiabilidade dos parâmetros de projeto (VON PARASKI, 2012).

Com base no exposto, o presente trabalho tem como objetivo contribuir para uma determinação mais precisa do comportamento de elementos unidirecionais de CRFA, especialmente aqueles sujeitos a esforços de flexão. É relevante mencionar que esta pesquisa está vinculada ao projeto "Evaluación Teórica y Experimental de Losas de Hormigón Reforzado con Fibras" realizado pela Universidad de la República (UdelaR), localizada no Uruguai. Cujo objetivo consiste em realizar um estudo teórico e experimental de lajes de CRFA, abordando diferentes aspectos, como modelagem, construção, caracterização e monitoramento de lajes em escala real, a fim de demonstrar sua viabilidade técnica e econômica. A pesquisa em questão visa contribuir especificamente para a parte teórica desse estudo, concentrando-se

no desenvolvimento de modelos computacionais para elementos unidirecionais. É importante destacar que este trabalho representa o ponto de partida para pesquisas posteriores, nas quais outros pesquisadores se dedicarão a abordar elementos mais complexos.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho consiste em desenvolver e avaliar modelos capazes de prever o comportamento de elementos unidirecionais de CRFA submetidos à flexão simples. Para atingir esse objetivo, a presente dissertação foi dividida em duas partes, que consistem no desenvolvimento e análise de dois modelos distintos. Cada um desses modelos tem objetivos específicos, os quais se encontram detalhados na TABELA 1:

TABELA 1 - Objetivos específicos

Modelo	Objetivo específico
Análise de seções	a) Desenvolver um algoritmo que reproduza o comportamento à flexão simples de vigas padrões de ensaio de CRFA, em termos de $F - CMOD$, utilizando o método de análise de seções; b) Verificar a precisão do modelo em prever a força de formação da fissuração e as forças correspondentes aos $CMOD_1$, $CMOD_2$, $CMOD_3$ e $CMOD_4$ em relação a ensaios experimentais realizados por terceiros; c) Identificar a lei constitutiva, dentre as estudadas, que melhor prevê o comportamento à flexão simples de vigas padrões de ensaio de CRFA, em termos de $F - CMOD$, utilizando o método de análise de seções; e d) Analisar estatisticamente a influência de um conjunto de parâmetros, composto pela resistência à compressão média da matriz, volume de fibras, fator de forma e resistência à tração última das fibras, na previsão da resposta $F - CMOD$ fornecida por cada um dos modelos constitutivos avaliados.
Métodos dos Elementos Finitos (MEF)	a) Desenvolver um algoritmo que reproduza o comportamento à flexão simples até a carga última de elementos unidirecionais de CRFA, em termos de $F - \delta$ e configuração de uma estimativa dano, utilizando um método incremental e iterativo para resolver o MEF associado ao modelo de rigidez equivalente; b) Comparar as respostas do modelo, em termos de $F - \delta$, com resultados de ensaios experimentais realizados por terceiros; c) Identificar a lei constitutiva com os parâmetros mais adequados para atualizar o módulo de deformação do material e, consequentemente, a matriz de rigidez; d) Avaliar a capacidade do modelo em prever uma estimativa do dano estrutural, comparando os gráficos referentes as configurações de dano finais dos elementos com o padrão de fissuração observados no respectivo ensaio experimental; e) Avaliar a relevância da discretização em camadas da seção transversal dos elementos no grau de precisão quanto aos resultados gerados pelo modelo; e Comparar as respostas obtidas pelo modelo MEF, em termos de $F - \varepsilon$, com as obtidas pelo modelo de análise de seção transversal.

Fonte: A autora (2023).

1.2 JUSTIFICATIVA

De acordo com Buttilgnol *et al.* (2018), a crescente adoção do CRFA encontra justificativa em seu desempenho estrutural adequado para diversas aplicações, bem como na

maior durabilidade. Além disso, esse compósito também facilita os processos executivos, uma vez que elimina a necessidade de cortes, dobras e posicionamento das barras de aço, resultando em um ganho na velocidade na execução. Em função das características mencionadas e da incorporação do CRFA em diversos regulamentos de cálculo, suas aplicações têm sido direcionadas para situações de maior responsabilidade estrutural (DI PRISCO; PLIZZARI; VANDEWALLE, 2009).

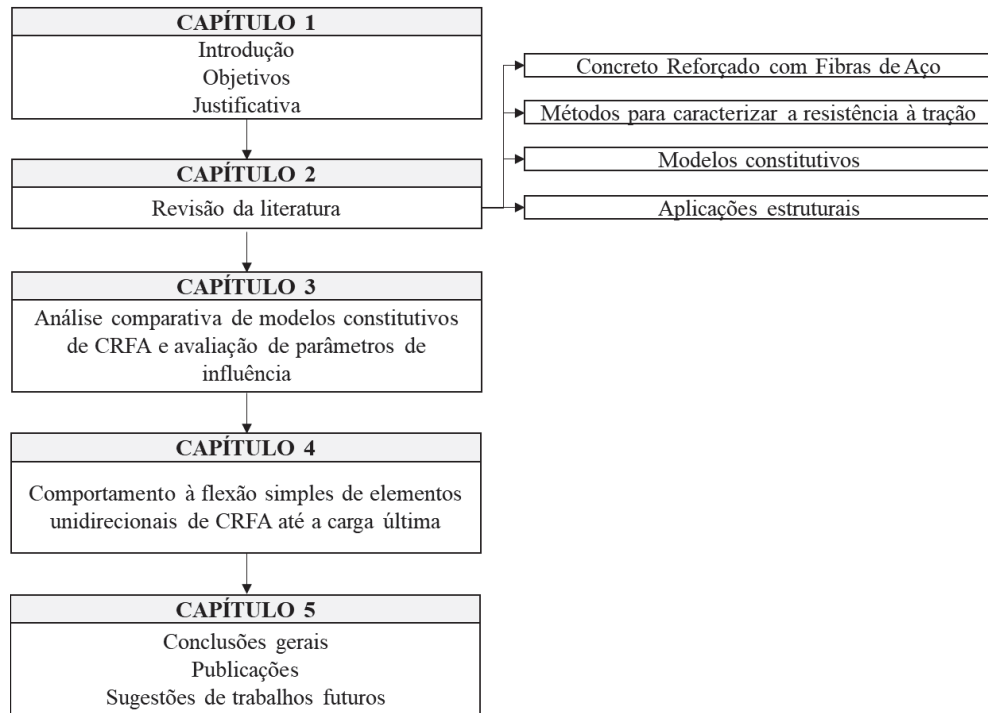
Considerando o contexto em questão, é importante que sejam estabelecidos modelos de cálculo apropriados. As mais recentes diretrizes e códigos compilam experiências anteriores, resultando em melhorias na resposta mecânica, modo de produção, controle de qualidade, ensaios e métodos de cálculo. Apesar disso, a adequação do CRFA para certas aplicações continua a ser um problema. Para modificar essa situação, é necessário continuar estudos e pesquisas que investiguem meios de prever o comportamento desse compósito considerando diferentes tipos de elementos (DE LA FUENTE, 2011; ÁLVAREZ, 2013).

Entre os principais desafios relacionados a essa temática, destaca-se a necessidade de identificar o modelo constitutivo mais apropriado. Apesar das várias propostas encontradas na literatura e nos códigos de projeto, ainda não há consenso em relação a qual delas seja mais amplamente aceita. Nesse contexto, é interessante avaliar a precisão desses modelos propostos quanto a resposta prevista, considerando elementos distintos. Além disso, a falta de representatividade dos ensaios realizados em vigas, em relação ao comportamento de elementos mais planos, por exemplo, conforme relatado por Álvarez (2013), levanta dúvidas sobre a influência das dimensões da estrutura no comportamento estrutural previsto. Ao examinar essas questões, com o auxílio de abordagens numéricas, busca-se uma compreensão mais aprofundada das melhorias necessárias, visando aprimorar os métodos e modelos de cálculo existentes.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em cinco partes, conforme apresentado na FIGURA 2.

FIGURA 2 - Organização da dissertação



Fonte: A autora (2023).

No primeiro capítulo, é feita a introdução da temática a ser discutida, além de serem apontados os objetivos e motivações do estudo. No segundo capítulo, serão abordados conceitos e definições importantes baseados na literatura e em pesquisas recentes, relacionados à área de pesquisa, conforme indicado pelos tópicos listados na FIGURA 2.

No capítulo 3, é realizada uma avaliação das equações constitutivas presentes em alguns dos principais códigos europeus para simulação do comportamento pós-fissuração do CRFA, investigando suas diferenças e adequação. Para isso, as equações correspondentes são implementadas em um modelo de análise de seções, e os resultados obtidos são comparados com dados experimentais encontrados na literatura. Além disso, são estudadas as influências de determinados parâmetros do compósito nas respostas previstas pelos modelos constitutivos.

No capítulo 4, é desenvolvido um modelo de elementos finitos com o propósito de prever, de maneira não linear física, o comportamento de elementos unidirecionais submetidos à flexão simples até a carga última. Em seguida, são realizadas simulações em dois elementos para validar a eficiência da implementação do programa, por meio de gráficos $F - \delta$ e diagramas que mostram a configuração final de dano do elemento simulado. Além disso, é feita uma comparação entre as estimativas fornecidas pelo modelo de elementos finitos, em termos

de $F - \varepsilon$, e aquelas obtidas pelo modelo de análise de seções transversais, detalhado com mais profundidade no terceiro capítulo.

Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões gerais alcançadas neste estudo, bem como uma atualização sobre as publicações já realizadas. Além disso, são fornecidas sugestões para trabalhos futuros, visando dar continuidade ou aprimorar a pesquisa em questão.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O CRFA vem se provando uma alternativa atraente ao concreto armado tradicional para diferentes tipologias estruturais, dada principalmente a sua capacidade de resistência aos esforços de tração e de controle de fissuras. Em vista disso, tem sido estudado experimentalmente e numericamente por diferentes autores. Como consequência, vários códigos regulatórios incluíram as fibras como material de reforço para o concreto, fazendo com que as suas propriedades se tornem cada vez mais conhecidas e firmadas na literatura (DI PRISCO, 2009; SILVA *et al.*, 2015; ALFERES FILHO *et al.*, 2017).

O crescimento na utilização do CRFA trouxe um desafio aos pesquisadores, uma vez que, apesar dos avanços supracitados, várias questões relacionadas a reprodução do seu comportamento estrutural para diferentes aplicações permanecem em aberto. Considerando essas lacunas, o presente capítulo aborda diversos tópicos que fundamentaram a presente pesquisa, apresentando uma sucessão de estudos que abrangem métodos e modelos para previsão do comportamento estrutural do CRFA, dentre outros assuntos relevantes.

2.2 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO (CRFA)

O concreto e outros materiais cimentícios são amplamente empregados na construção civil devido à possibilidade de moldá-los em praticamente qualquer forma e geometria. No entanto, apesar de ser muito adequado para uma extensa gama de aplicações, o concreto apresenta, segundo Ravikumar *et al.* (2015), algumas limitações, como: baixa resistência à tração, ao impacto e à fadiga; baixa ductilidade e incapacidade de acomodar grandes deformações. Diante disso, salienta-se que a maneira mais tradicional de superar essas falhas inerentes ao concreto consiste na utilização de barras de aço como reforço. Todavia, tal prática além de exigir uma boa quantidade de mão de obra e custos de materiais, limita estruturas com geometrias mais complexas. Em função disso, novas possibilidades de reforço do concreto, como a utilização de fibras, vêm sendo estudadas.

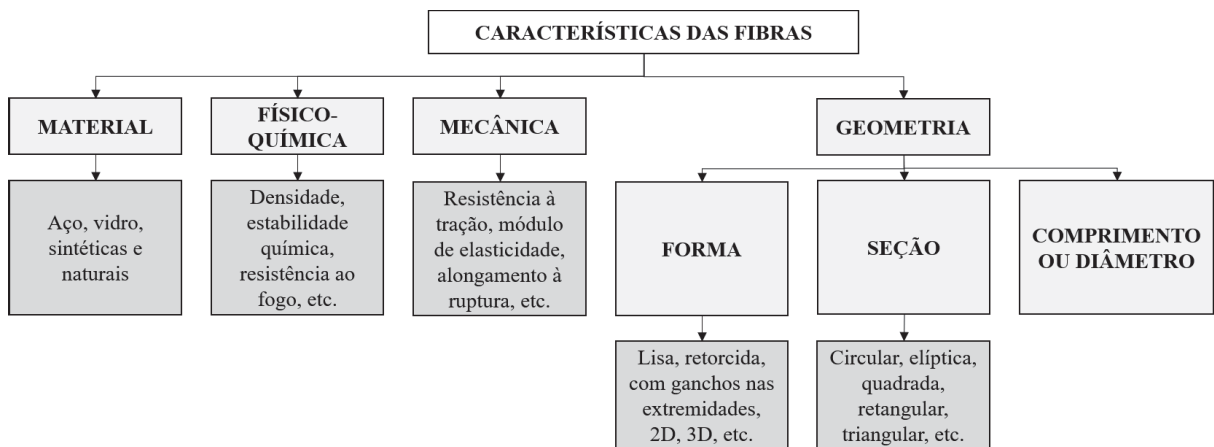
2.3 CARACTERÍSTICAS DAS FIBRAS

Segundo Morrison e Boyd (2010), as fibras são elementos descontínuos, longos e finos, caracterizados por alta resistência à tração em sua direção longitudinal, podendo ser

classificadas como micro ou macrofibras. As microfibras possuem diâmetro na ordem de 10 a $30\mu\text{m}$ e comprimento de 3 a 18 mm. A sua utilização não visa o reforço da estrutura de concreto, sendo especialmente interessantes em aplicações que visem controlar a retração e fissuração da matriz cimentícia. Já as macrofibras possuem diâmetro superior a 0,30 mm e comprimento entre 30 e 60 mm, sendo o principal motivo do seu emprego a melhora da resistência residual à tração do concreto.

As fibras utilizadas no concreto podem ser categorizadas de acordo com seu material (metálicas, de vidro, sintéticas e naturais), propriedades físico-químicas (densidade, rugosidade superficial, estabilidade química, resistência ao fogo, etc.), propriedades mecânicas (resistência à tração, módulo de elasticidade, rigidez, ductilidade, alongamento até a falha, adesão à superfície, etc.) e propriedades geométricas (comprimento, diâmetro, forma da seção e perfil longitudinal). As principais características das fibras utilizadas como reforço em compósitos cimentícios estão representadas no esquema da FIGURA 3 (NAAMAN, 2008).

FIGURA 3 - Principais características das fibras em compósitos cimentícios reforçados com fibras



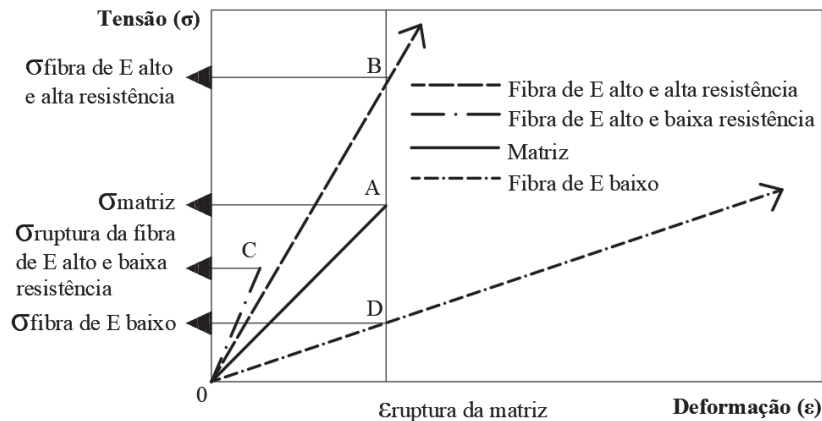
Fonte: Adaptado de Naaman (2008).

Dentre as propriedades apresentadas, as que mais influenciam na capacidade de reforço que a fibra pode proporcionar ao concreto são a resistência mecânica e seu módulo de elasticidade. As fibras são caracterizadas como sendo de alto ou baixo módulo, a depender se o seu módulo de elasticidade é superior ou inferior ao do concreto endurecido, respectivamente. De modo geral, as fibras inorgânicas (aço e vidro) possuem alto módulo, enquanto que as poliméricas têm baixo módulo (SALVADOR, 2012).

Para ilustrar a importância da resistência mecânica e do módulo de elasticidade, apresenta-se o esquema da FIGURA 4. Nessa representação é possível verificar as curvas

tensão-deformação de uma matriz reforçado com três diferentes tipos de fibra, sendo uma de baixo módulo de elasticidade e as outras duas com fibras de elevado módulo e baixa e alta resistência.

FIGURA 4 – Diagrama de “tensão versus deformação elástica” de matriz e fibras de alto e baixo módulo de elasticidade trabalhando em conjunto



Fonte: Adaptado de Figueiredo (2011).

Supondo que, inicialmente, as fibras estão perfeitamente embutidas na matriz e que há uma aderência perfeita, o compósito apresentará diferentes deformações perante esforços de tração, a depender do tipo de fibra utilizada. Nota-se, na FIGURA 4, que o nível de tensão que uma fibra de baixo módulo é capaz de suportar é inferior à tensão de ruptura da matriz. Desse modo, para que haja uma boa capacidade de reforço e controle de fissura por tais fibras, os seus teores devem ser muito elevados, dada a baixa capacidade de reforço pós-fissuração. Caso contrário, a tensão por fibra pode vir a exceder a sua tensão de ruptura (FIGUEIREDO, 2011).

No que diz respeito as fibras com alto módulo e baixa resistência mecânica, verifica-se uma capacidade de reforço pós-fissuração reduzida ou até mesmo inexistente. Assim, fica claro que a combinação dessas propriedades gera um material frágil e de baixa capacidade de deformação elástica. Em função disso, as fibras com essas características terão inviabilizadas as suas capacidades de apresentar condições de reforçar a matriz após a fissuração. Uma vez que, quando a matriz se romper, as fibras já terão sido rompidas e não conferirão nenhum tipo de reforço (FIGUEIREDO, 2011).

Por esses motivos, reitera-se que, para uma fibra ser considerada com capacidade de reforço das matrizes cimentícias, é preciso que essa apresente capacidade de deformação na ruptura e resistência à tração maiores que a matriz de concreto. Isto posto, cabe destacar as fibras de alto módulo e alta resistência mecânica, dado o seu elevado nível de tensão

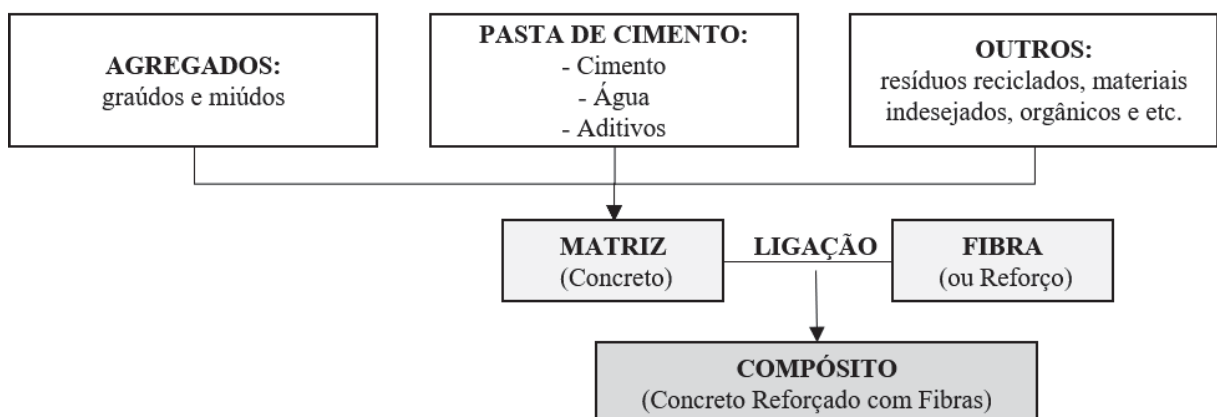
apresentado no momento em que a matriz atinge sua deformação crítica. Dessa forma, tais fibras são capazes de proporcionar alto nível de reforço quando a matriz rompe, mesmo quando utilizada em baixos teores, caso sua resistência não seja superada (FARIA, 2017).

Nesse sentido, vale frisar o desempenho das fibras de aço, uma vez que são classificadas como fibras de alto módulo e alta resistência. Logo, podem ser destinadas ao reforço primário do concreto, ou seja, não se destinam ao mero controle da fissuração. Assim, em razão das suas características, são consideradas uma excelente opção para substituir (parcial ou totalmente) o reforço convencional.

2.3.1 Comportamento mecânico do CRF

O CRF, para fins práticos, pode ser definido como um compósito com dois componentes principais, a fibra e a matriz, conforme esquematizado na FIGURA 5. A matriz é composta por diferentes materiais, em função disso, pode ser considerada um compósito com vários componentes. Todavia, para análise em questão, será tratada como o primeiro constituinte principal do compósito CRF. A fibra representa o segundo constituinte principal, sendo considerada descontínua e, salvo em indicações contrárias, distribuída de forma aleatória na matriz cimentícia. Ambos componentes (fibra e a matriz) trabalham juntos por meio da ligação existente entre os materiais, proporcionando, dessa forma, o sinergismo necessário para gerar um compósito eficaz. Assim sendo, averigua-se que a ligação entre os materiais é um elemento primordial para o sucesso desse compósito (QASRAWI; SHALABI; ASI, 2007).

FIGURA 5 - Modelo compósito considerado como um sistema com dois componentes (fibras e matriz)



Fonte: Adaptado de Qasrawi, Shalabi, Asi (2007).

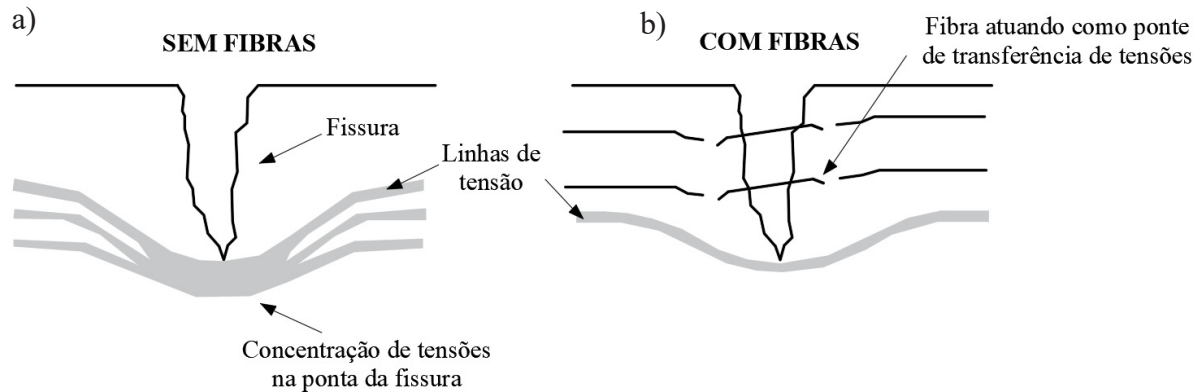
Sob uma perspectiva mais ampla, de acordo com Naaman (2018), o CRF pode ser definido como um concreto que adiciona em sua composição fibras curtas e discretas com a

finalidade de alcançar um dado nível de desempenho em uma propriedade (ou propriedades) específica. Logo, evidencia-se que o intuito da combinação entre materiais com diferentes propriedades é produzir um material com características mais adequadas à determinadas aplicações, uma vez que o comportamento resultante será a combinação das distintas capacidades dos materiais que lhe deram origem, obtendo assim, um desempenho superior.

Para compreender melhor o comportamento do CRF, é importante lembrar que o concreto, sendo um material frágil, é suscetível a concentrações de tensão de tração quando ocorre o surgimento e propagação de uma fissura. Isso acontece porque, nos concretos simples, as fissuras atuam como uma barreira à propagação dessas tensões. Como resultado, as linhas de tensão, como mostrado na FIGURA 6a, desviam-se, resultando em uma concentração de tensão de tração na extremidade da fissura. Essa condição pode se tornar problemática quando a tensão resultante dessa concentração excede a resistência da matriz do concreto. Em tais casos, o concreto sofrerá uma ruptura abrupta, exibindo um comportamento tipicamente frágil. Em outras palavras, não se pode contar com nenhuma capacidade resistente à tração do concreto quando ele está fissurado.

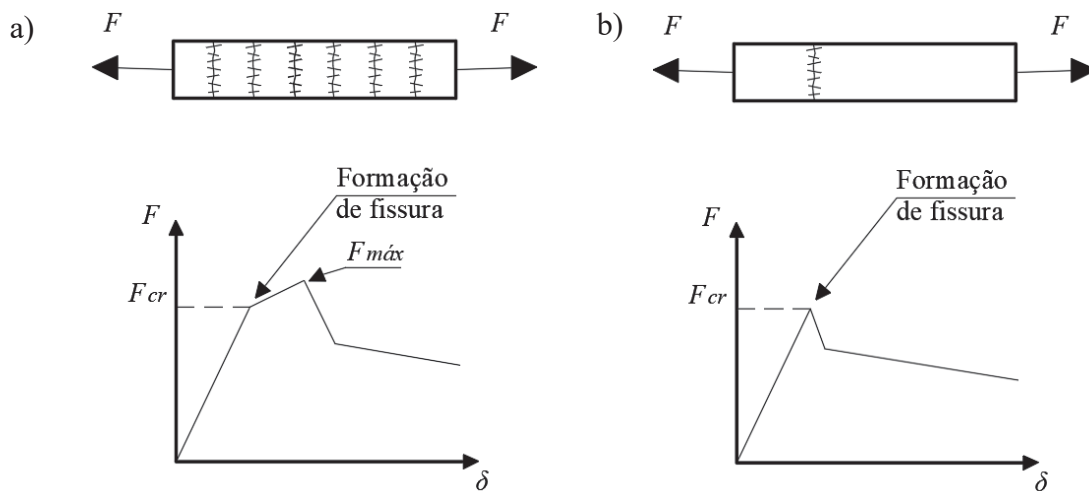
A FIGURA 6b ilustra os benefícios proporcionados pela adição de fibras na matriz de concreto, as quais são capazes de aumentar a ductilidade do material e permitir um progresso no comportamento do concreto no regime pós-fissuração. Isso é consequência do efeito de ponte de transferência de tensões ocasionado pelas fibras, que se opõem à tendência de alargamento das fissuras em razão da sua aderência com a matriz. Dessa forma, tem-se um aumento na tenacidade do material, uma vez que é preciso mais energia para que ocorra a abertura das fissuras. Diante disso, a ruína do concreto se torna menos frágil (BUTTIGNOL *et al.*, 2018).

FIGURA 6 - Mecanismo de ação das fibras de aço



Fonte: Ferrari; Ferreira; de Hanai (2008).

Uma abordagem para definir o comportamento do compósito é baseada na forma de sua curva tensão-deformação em tração direta, a qual pode ser identificada como *strain-softening* ou *strain-hardening*, conforme ilustrado na FIGURA 7. No comportamento *strain-hardening*, ilustrado na FIGURA 7a, a carga necessária para romper a matriz é menor que a carga resistida pelo compósito. Dessa forma, tem-se, até a obtenção da tensão máxima pós-fissuração múltiplas fissuras, uma vez que o compósito apresenta um ganho de capacidade resistente após fissuração da matriz. Depois de atingir a tensão máxima, o CRF passa a apresentar um comportamento *strain-softening*. Nesse último comportamento, representado na FIGURA 7b, a carga de ruptura da matriz é maior que a carga residual resistida pelo compósito e há uma perda progressiva da capacidade resistente após a fissuração da matriz, permitindo, portanto, a ocorrência de uma única fissura (ABID; FRANZÉN, 2011).

FIGURA 7 – Conceitos para classificação do comportamento do CRF a) *hardening*, b) *softening*

Fonte: ABNT NBR 16935 (2021).

As classificações discutidas estão intimamente associadas ao conceito de volume crítico de fibras. Segundo Figueiredo (2011), o volume crítico de fibras consiste no teor de fibras que mantém a mesma capacidade resistente para o compósito a partir da ruptura da matriz. Dessa forma, destaca-se que o comportamento *softening* é caracterizado por um volume de fibras abaixo do volume crítico, enquanto que, um comportamento *hardening* consiste em um volume de fibras superior ao volume crítico.

2.3.2 Fatores de influência

As propriedades físicas e mecânicas do CRF dependem da dosagem e das propriedades dos seus componentes constituintes (matriz cimentícia e fibras). Isto posto, fica evidente que uma definição apropriada de tais aspectos refletirá em benefícios primordiais para a obtenção de um compósito com bons resultados. Nessa perspectiva, a EQUAÇÃO 1 visa representar os principais parâmetros que influenciam a resistência pós-fissuração do CRF. Tal formulação é referente as fibras que são arrancadas da superfície e não rompidas (NAAMAN, 2000).

$$\sigma_{pc} = \Lambda \cdot \tau \cdot V_f \cdot \frac{L}{d} \quad (1)$$

onde:

σ_{pc} = tensão máxima na região pós-fissuração;

Λ = produto de diversos coeficientes associados ao comprimento da fibra que foi arrancado, orientação e distribuição da fibra, número de fibras sendo arrancadas por unidade de área, etc.;

τ = energia de ligação na interface fibra-matriz;

V_f = volume de fibras;

L = comprimento da fibra;

d = diâmetro da fibra; e

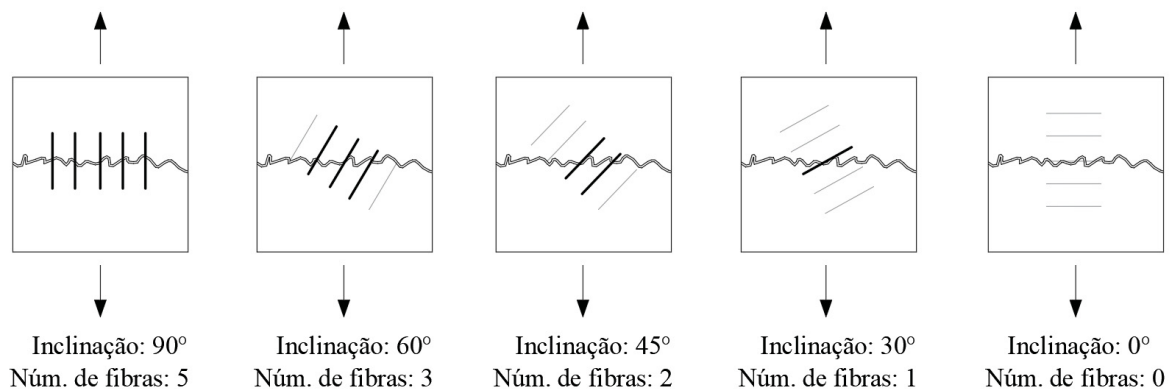
L/d = fator de forma.

Para simplificar a apresentação das informações, Namaan (2000) combinou alguns coeficientes, relacionados ao arrancamento e posicionamento das fibras, no produto Λ . Na sequência, com o objetivo de evidenciar como os parâmetros indicados na EQUAÇÃO 1 afetam as propriedades mecânicas do CRF, apresentam-se discussões acerca de suas influências.

Orientação das fibras

As fibras que atravessam as superfícies de fratura governam o desempenho dos elementos de CRF, exercendo, portanto, um papel importante na avaliação da competência estrutural desse compósito. Em função disso, tem-se que o comportamento pós-fissuração do CRF está relacionado não só ao número de fibras que atuam na superfície de fratura, mas também ao seu respectivo ângulo, conforme esquematizado na FIGURA 8. Assim sendo, uma forma econômica de otimizar o CRF consiste na aplicação de processos produtivos que propiciem orientações preferenciais das fibras nas localizações e direções do elemento estrutural submetido a maiores tensões. Isto é, a orientação da fibra deve ser tão previsível quanto possível para que o CRF possa satisfazer as restrições técnicas e econômicas de forma mais eficaz (LARANJEIRA *et al.*, 2012).

FIGURA 8 – Ilustração da importância da orientação das fibras



Fonte: DTI (2013).

Na FIGURA 8, as fibras representadas em preto colaboram com o comportamento pós-fissuração do concreto, enquanto que as fibras em cinza, por não cruzarem o plano de fratura, não apresentam nenhum tipo de contribuição. Assim sendo, tem-se que, quando as fibras são orientadas paralelamente à direção de tração (fibra orientada a 90°), sua eficiência estrutural e, por consequência, a sua resistência residual são maiores. Ao contrário, se as fibras estiverem orientadas perpendicularmente à direção de tração (fibra orientada a 0°), sua influência é nula e, portanto, o material se comporta como se não tivesse fibras (TIBERTI *et al.*, 2017).

Em face do exposto, fica claro que uma orientação e distribuição desfavoráveis das fibras, em relação ao plano de fissuração esperado, pode resultar em um comportamento pós-fissuração semelhante ao exibido por um CRF de menores propriedades mecânicas e dosagem.

Nessa perspectiva, surgem propostas de equações constitutivas que incluem um fator de correção, a fim de levar em consideração a orientação das fibras. Esse fator pode aumentar ou diminuir a resistência à tração residual da matriz de concreto quando submetido a flexão. Além disso, pesquisadores têm investigado esse efeito em diversos elementos estruturais, dada à relevante influência da orientação das fibras em suas capacidades resistentes (ALGARRA; CABRERA, 2019).

Energia de ligação com a matriz

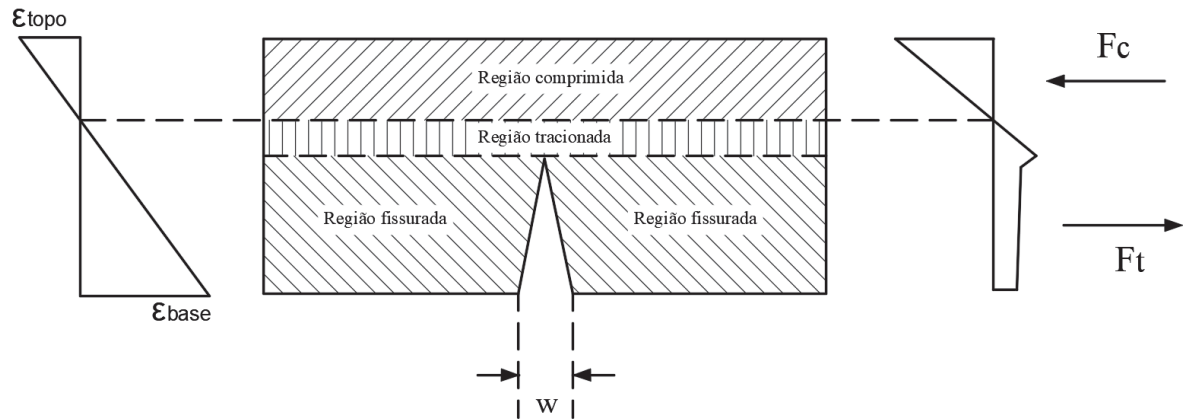
De acordo com Figueiredo (2011), a ancoragem das fibras na matriz é um fator que pode impactar significativamente o comportamento pós-fissuração do CRFA, devido à melhora na energia de ligação. O trabalho de Zanjani *et al.* (2016) sugere que a presença de ganchos nas extremidades das fibras de aço pode contribuir para melhorar a resistência residual do CRFA. Isso se deve ao fato de que a presença de ganchos aprimora a ancoragem mecânica e, conseqüentemente, a energia de ligação com a matriz, resultando em uma melhoria na resistência residual do CRFA.

Cabe destacar que, no caso de fibras poliméricas, outras estratégias podem ser empregadas para melhorar a aderência entre as fibras e a matriz, como a utilização de tratamentos químicos na superfície das fibras, adoção de conformações específicas, fibrilação, entre outras técnicas (SALVADOR, 2012).

Volume de fibras

Em um estudo conduzido por Tiberti *et al.* (2017) foi concluído que a resistência residual do CRFA está relacionada à quantidade de fibras adicionada, uma vez que a adição de maiores volumes de fibras resulta em um aumento no número de fibras cruzando as fissuras. Como resultado, observou-se que a distribuição das forças de tração acontece de forma mais uniforme, levando a um aumento na capacidade portante pós-fissuração do CRFA. Com o intuito de elucidar esse fenômeno, apresenta-se, na FIGURA 9, a distribuição de deformações e tensões em uma viga de CRFA submetida à flexão, seguindo as recomendações do RILEM TC-162 (2003).

FIGURA 9 - Distribuição das deformações e tensões na seção de um elemento fletido reforçado com CRFA



Fonte: Adaptado de Figueiredo (2011).

A seção em questão apresenta três partes principais: a zona de compressão acima da linha neutra, a zona de tração entre a linha neutra e a ponta da fissura e a zona fissurada entre o topo da fissura e a parte inferior do corpo-de-prova. Nas zonas de compressão e tração, as tensões são de natureza elástica, enquanto que na zona fissurada há diversas formas de modelagem, dependentes da soma das cargas suportadas por cada fibra presente nessa região. Assim, entende-se que a relação entre a quantidade de fibras e a capacidade resistente é diretamente proporcional, ou seja, quanto maior o teor de fibras, maior a resistência à tração (BENTUR; MINDESS, 2007).

Geometria das fibras

Um conceito relacionado à eficiência das fibras e ao seu comprimento é o comprimento crítico. Esse parâmetro é definido como o comprimento em que a carga aplicada à fibra causa sua ruptura, em vez de seu arrancamento da matriz. Fibras com comprimentos inferiores ao valor crítico são suscetíveis a serem arrancadas da matriz, uma vez que a carga por elas suportada não supera sua resistência à tração. Por outro lado, fibras com comprimentos superiores ao valor crítico têm sua ruptura favorecida, devido ao seu embutimento mais profundo na matriz, o que torna a resistência para arrancamento da fibra superior à sua resistência à tração (BENTUR, MINDESS, 2007).

Apesar de o comprimento favorecer o desempenho da fibra, é importante assegurar a existência de uma compatibilidade dimensional adequada entre as fibras e os agregados, a fim de que as fibras proporcionem reforço ao concreto e não somente à argamassa presente na matriz. Isso implica que o comprimento da fibra deve ser, no mínimo, duas vezes maior que a

dimensão máxima do agregado. No entanto, é importante ressaltar que fibras com comprimentos excessivamente grandes podem prejudicar o desempenho do compósito, devido à maior dificuldade de mobilidade do concreto no estado fresco, comprometendo as operações de lançamento e adensamento do concreto reforçado (FARIA, 2017).

Além disso, para um determinado comprimento, quanto maior for o diâmetro da fibra, maior será a área de contato com a matriz, permitindo que a fibra suporte uma carga maior durante o processo de arrancamento. No entanto, fibras com menor diâmetro possuem um número maior de filamentos por unidade de massa. Como a dosagem das fibras é realizada por massa ou volume por volume de concreto, fibras com menor diâmetro são encontradas em maior número na seção de ruptura, resultando em uma maior resistência residual. Essa constatação foi observada por constatada por Figueiredo (1997) em um estudo sobre concreto projetado reforçado com fibras de aço.

Por fim, vale mencionar que a seção transversal da fibra também influencia significativamente o desempenho do CRFA após a ocorrência de fissuras. Isso ocorre porque a forma geométrica da seção transversal determina a área lateral de contato com a matriz. Fibras com seções cilíndricas têm uma área de contato menor, resultando em uma energia de ligação inferior com a matriz. Por outro lado, fibras com seções quadradas, triangulares ou com modificações dessas geometrias podem aumentar a área de contato, melhorando o desempenho da fibra em termos de interação com a matriz e, conseqüentemente, a resistência do compósito (NAAMAN, 2003).

Resistência das fibras

Conforme já visto, ao ocorrer a formação da fissura, há transferência de tensões da matriz para as fibras, cuja resistência é acionada, resultando em uma maior capacidade resistente quanto maior for a resistência das fibras. Nesse sentido, vale mencionar que a resistência e o volume de fibras são variáveis interdependentes, visto que o aumento do número de fibras na seção de ruptura diminui a carga que cada fibra deve resistir individualmente, reduzindo a probabilidade de sua ruptura. Portanto, teores elevados podem compensar a baixa resistência da fibra no comportamento do compósito. Além disso, para garantir o mecanismo de arrancamento das fibras em vez de sua ruptura, é necessário que a resistência da fibra seja proporcional ao seu comprimento, ou seja, quanto maior o comprimento da fibra, maior deve ser sua resistência (SALVADOR, 2012).

Resistência da matriz

A resistência mecânica da matriz de um compósito pode desempenhar dois efeitos distintos no seu comportamento pós-fissuração, dependendo da resistência das fibras. Quando a matriz tem alta resistência, a transferência de tensões para as fibras ocorre de maneira abrupta no momento da fissuração. Nesse caso, se as fibras tem baixa resistência, é maior a probabilidade de sua ruptura em vez de seu arrancamento, o que resulta em menor capacidade resistente pós-fissuração. Por outro lado, se as fibras tem alta resistência, a aderência da fibra na matriz de maior resistência é melhor, permitindo que cada fibra resista a uma carga maior durante seu arrancamento. Assim, para esses casos, o aumento da resistência da matriz promove um aumento da resistência residual do compósito (FIGUEIREDO *et al.*, 2000).

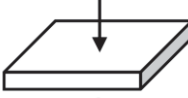
Em resumo, é evidente que existem vários fatores que podem influenciar significativamente o comportamento do concreto após a fissuração, e apenas alguns principais foram apresentados acima. Assim, fica evidente a importância de se ter conhecimento desses fatores para considerá-los adequadamente nas etapas de projeto, visando a concepção de estruturas que sejam além de seguras, eficientes e econômicas.

2.4 MÉTODOS PARA CARACTERIZAR A RESISTÊNCIA À TRAÇÃO

O comportamento pós-fissuração é uma das propriedades mais importantes a serem consideradas nos projetos de estruturas reforçadas com fibras. Assim, tem-se que a caracterização do CRFA deve ser baseada em propriedades que o descrevam. Visto que, com tais informações, é possível melhor compreender as relações constitutivas do material, para então, elaborar projetos estruturais mais seguros (SOLTANZADEH; CUNHA; BARROS, 2019).

Atualmente, existem vários métodos para identificar, direta ou indiretamente, a resposta mecânica do CRF. A TABELA 2 fornece um resumo das configurações de carregamentos e tamanhos de corpos de prova recomendados por algumas das principais normas e referências. Convém destacar que o ensaio com painel EFNARC e painel redondo foram concebidos para caracterizar concretos projetados reforçados com fibras.

TABELA 2 - Principais métodos de ensaio para a caracterização do comportamento pós-fissuração do CRF

Teste	Norma / Referência	Configuração	Dimensões (mm)
Ensaio de tração uniaxial (UNIAX)	RILEM TC 162-TDF (2003)		$\Phi 150 \times 150$
Ensaio <i>Wedge-Splitting</i> (WST) ¹	Tschegg and Linsbauer (1986)		150 x 150 x 150
Ensaio <i>Barcelona</i> (BCN) ¹	UNE 83515:2010		$\Phi 150 \times 150$
Ensaio <i>Double-Edge Wedge Splitting</i> (DEWS) ¹	Di Prisco <i>et al.</i> (2013)		150 x 150 x 150
Ensaio <i>Montevideo</i> (MVD) ¹	Segura <i>et al.</i> (2017)		$\Phi 150 \times 150$ ou 150 x 150 x 150
Ensaio com painel EFNARC (EFNARC) ¹	EFNARC European Specification for Sprayed Concrete (1996)		600 x 600 x 10
Ensaio com painel redondo (ROUND) ¹	ASTM C1550 – 10a:2010		$\Phi 800 \times 75$
Ensaio à flexão de 3 pontos (3PBT) ¹	EN 14651:2007 ABNT NBR 16940:2021		600 x 150 x 150 550 x 150 x 150
Ensaio à flexão de 4 pontos (4PBT) ¹	NBN B 15-238:1992 DIN EN 12390:2009		600 x 150 x 150

Fonte: Adaptado de Álvarez (2013).

Dos métodos apresentados na TABELA 2, o ensaio de tração uniaxial é considerado a forma mais precisa para avaliar diretamente as propriedades à tração do CRFA. Todavia, esse ensaio pode ser bastante complexo, dada a necessidade de equipamentos específicos, bem como, de uma preparação cuidadosa na montagem dos corpos de prova e do ensaio. Devido a tais desvantagens, foram propostos, ao longo dos anos, alguns métodos alternativos (indicados na TABELA 2) para aferir o comportamento à tração residual dos CRF (SOLTANZADEH; CUNHA; BARROS, 2019).

A maioria dos pesquisadores preferem realizar ensaios à flexão para caracterizar a resposta pós-fissuração do CRFA e outros parâmetros-chave necessários para definir os modelos constitutivos. Por conseguinte, os testes à flexão de 3 ou 4 pontos são prescritos por grande parte das diretrizes. Isso se deve principalmente a facilidade de fabricação dos corpos

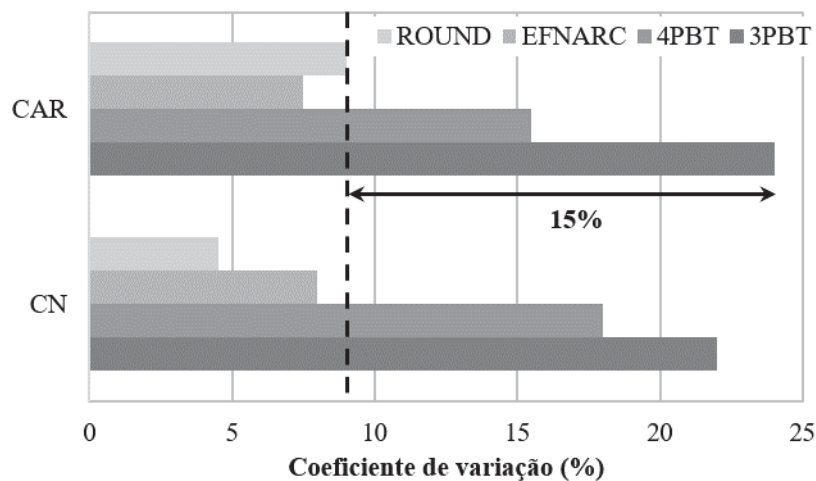
¹ O ensaio/sigla é conhecido nessa grafia internacionalmente, por essa razão, não foi objeto de tradução.

de prova prismáticos e de realização do ensaio (ÁLVAREZ, 2013; SOLTANZADEH; CUNHA; BARROS, 2019; SINGH, 2017).

Contudo, de acordo com Álvarez (2013), o uso de ensaios à flexão para caracterizar a resposta pós-fissuração do CRF pode ser questionado, tendo em vista algumas limitações. Como exemplo, cita-se a possibilidade de ensaiar o corpo de prova em apenas uma única direção e o elevado coeficiente de variação nos resultados provenientes desses ensaios. Além disso, de acordo com a mesma autora, embora em termos de execução os ensaios de vigas possam ser mais simples de realizar do que os ensaios uniaxiais e os ensaios em painel, eles são mais complexos do que, por exemplo, o ensaio de Barcelona, o WST e DEWS.

Visando validar o que foi anteriormente dito, na FIGURA 10 é possível perceber que os ensaios à flexão exibiram, no estudo realizado por Parmentier *et al.* (2008), uma variação nos resultados em torno de 15%, sendo esse valor duas a três vezes superior que o coeficiente de variação exibido para os ensaios com placas. O estudo foi feito para dois tipos de concreto, um concreto normal (CN) e um concreto de alta resistência (CAR) e, para ambos os casos, se observou dispersões significativas nos resultados dos ensaios à flexão.

FIGURA 10 – Coeficiente de variação em ensaio à flexão e ensaio com placas



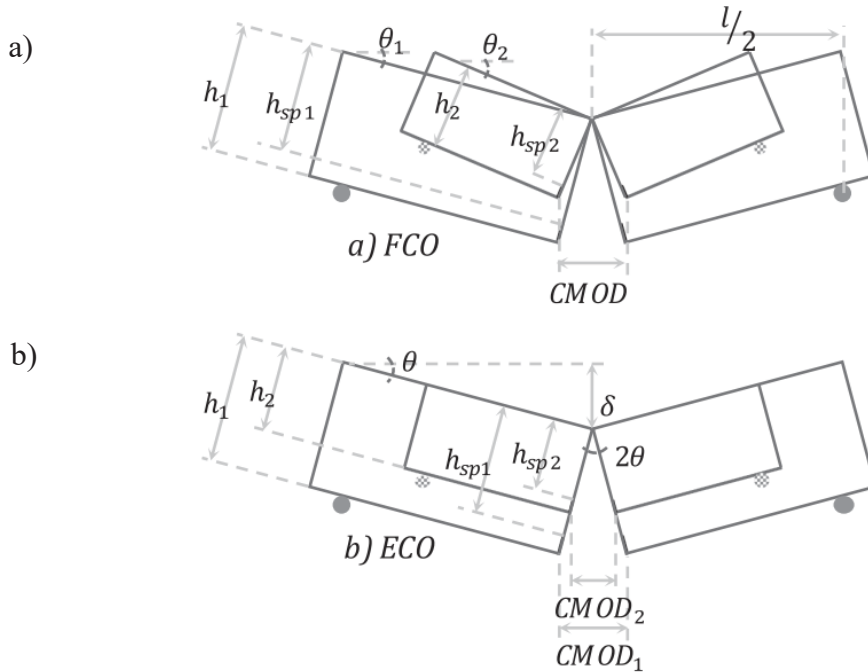
Fonte: Parmentier *et al.* (2008).

As dispersões nos resultados provenientes dos ensaios de vigas podem ser atribuídas, de acordo com Singh (2017), à quantidade e distribuição das fibras na seção fissurada, ao tamanho da viga, a forma de concretagem e as condições de suporte. Tendo em vista os fatos mencionados, salienta-se a necessidade de considerar abordagens de projeto que levem em consideração as diferenças nas respostas dos ensaios de caracterização em relação a estrutura

em escala real, ou ainda, propor testes adaptados a cada aplicação estrutural. Dessa forma, será possível obter resultados com menores variações (ÁLVAREZ, 2013; GIACCIO; TOBES; ZERBINO, 2008).

Considerando o exposto, destaca-se a necessidade de compreender a influência do efeito de tamanho nas respostas das peças de CRFA quando submetidas a esforços de flexão. Uma vez que essa compreensão desempenha um papel importante na garantia da segurança dos projetos. Embora grande parte das normas de projeto atuais não considerem esse efeito na capacidade de resistência do CRFA, a aplicação direta de modelos constitutivos em elementos em escala real sem sua devida consideração pode resultar em variações na distribuição de fibras e orientação, especialmente em elementos de maior tamanho. Segundo Galeote *et al.* (2020), uma solução para essa questão é avaliar duas abordagens por meio do teste à flexão por 3 pontos de uma viga com a rótula no ponto médio superior, conforme ilustrado na FIGURA 11.

FIGURA 11 – Mecanismo de falha de um ensaio de 3 pontos considerando a abordagem a) FCO, b) ECO



Fonte: Galeote *et al.* (2020).

A primeira estratégia, denominada *Full Crack Opening* (FCO), ilustrada na FIGURA 11a, pressupõe o uso de um único valor de $CMOD$ para corpos de prova de diferentes tamanhos. Como resultado, corpos de prova menores apresentam rotações mais elevadas do que aqueles com dimensões maiores. A segunda abordagem, representada na FIGURA 11b e chamada de *Equivalent Crack Opening* (ECO), baseia-se no estabelecimento de aberturas de fissuras

proporcionais à altura da viga. Nesse caso, o CMOD equivalente de qualquer corpo de prova pode ser calculado utilizando uma relação entre rotação, abertura de fissura e altura do corpo de prova.

A partir da notação descrita na FIGURA 11a, que usa a equação $w = CMOD$ e estabelece que $l_{cs} = h_{sp}$, é possível inferir a relação entre as deformações de corpos de prova de diferentes dimensões na abordagem FCO. Visto que as aberturas de fissuras nas duas vigas têm o mesmo valor absoluto, o CMOD de um corpo de prova menor é proporcionalmente maior do que o CMOD de um espécime maior, resultando em deformações maiores para corpos de prova menores, conforme indicado na EQUAÇÃO 2.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{CMOD}{h_{sp1}} ; \varepsilon_2 = \frac{CMOD}{h_{sp2}} \\ \varepsilon_1 h_{sp1} &= \varepsilon_2 h_{sp2} \\ h_{sp1} &> h_{sp2} \\ \varepsilon_1 &< \varepsilon_2\end{aligned}\tag{2}$$

onde:

ε_1 = deformação de um corpo de prova padrão;

ε_2 = deformação de um corpo de prova adaptado para considerar o efeito escala;

$CMOD$ = valor da abertura do entalhe;

h_{sp1} = altura de um corpo de prova padrão descontado o entalhe; e

h_{sp2} = altura de um corpo de prova adaptado para considerar o efeito escala descontado o entalhe.

Já a abordagem ECO assume uma rotação constante para qualquer tamanho de corpo de prova, levando assim a menores CMODs em corpos de provas de dimensões inferiores. Essa abordagem resulta em CMODs proporcionais à altura do corpo de prova, levando a deformações idênticas para as vigas de diferentes tamanhos. As resistências residuais calculadas pelo ECO são, portanto, aquelas associadas a aberturas de fissuras de tamanho equivalente, assim como demonstra a EQUAÇÃO 3.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{CMOD_1}{h_{sp1}} ; \varepsilon_2 = \frac{CMOD_2}{h_{sp2}} \\
\theta &= \frac{CMOD_1}{2h_{sp1}} = \frac{CMOD_2}{2h_{sp2}} \\
\varepsilon_1 &= 2\theta ; \varepsilon_2 = 2\theta \\
\varepsilon_1 &= \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{3}$$

onde:

θ = rotação do eixo longitudinal da fibra.

Em suma, na estratégia FCO a abertura da fissura permanece constante para diferentes dimensões de corpo de prova, resultando em uma diminuição das deformações conforme o aumento do tamanho do espécime. Na abordagem ECO, no entanto, as deformações apresentam valores idênticos para diferentes dimensões do corpo de prova, uma vez que são utilizadas aberturas de fissuras proporcionais à altura do corpo de prova. Assim sendo, a proposta de Galeote *et al.* (2020) é empregar a estratégia ECO, a fim de contemplar o efeito do tamanho na definição do comportamento estrutural do CRFA, quando se utilizam modelos constitutivos que não levam em conta esse fenômeno. Dessa forma, segundo o mesmo autor, acredita-se ser possível obter resultados mais representativos para elementos mais finos de CRFA, que são mais comumente afetados pela orientação preferencial das fibras.

2.5 MODELOS CONSTITUTIVOS

Os modelos constitutivos, em conformidade com Singh (2015), representam um conjunto de expressões responsáveis por descrever a resposta de um material quando tensionado externa ou internamente. Tais expressões, segundo o mesmo autor, são primordiais para prever o comportamento de elementos estruturais. Nessa perspectiva, evidencia-se que a identificação de um modelo constitutivo representa uma etapa fundamental do projeto estrutural. Em vista disso, durante os últimos anos, inúmeras recomendações técnicas foram desenvolvidas com objetivo de oportunizar e expandir a utilização de estruturas de CRF (ÁLVAREZ *et al.*, 2010).

Dentre as diferentes abordagens existentes, discute-se, no presente capítulo, os seguintes códigos e diretrizes para o projeto de estruturas de CRF, de acordo com a ordem cronológica de publicação: a recomendação RILEM (VANDEWALLE *et al.*, 2003); o CNR-DT 204 (CNR, 2006); o Model Code (FIB, 2010); a DAfStb-Richtlinie Stahlfaserbeton

(DAfStb, 2010); a NBR 16935 (ABNT, 2021) e o Código Estrutural (BOE, 2021). Doravante, eles serão referidos como RILEM, CNR-DT 204, MC2010, DAfStb, NBR 16935 e CE2021, respectivamente.

A TABELA 3 apresenta os modelos constitutivos supracitados e também indica seus respectivos parâmetros. Os modelos foram elencados segundo o formato de seus diagramas (retangular, bilinear, trilinear ou multilinear). Do mesmo modo, foram listados os ensaios de caracterização necessários para obtenção dos parâmetros indicados.

TABELA 3 – Modelos constitutivos de diferentes normativas

(continua)

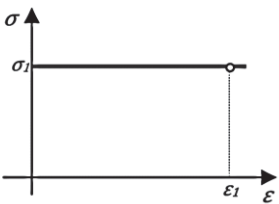
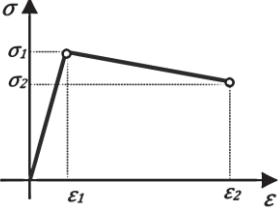
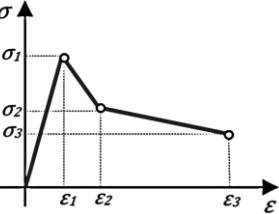
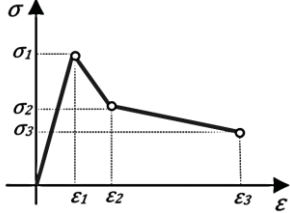
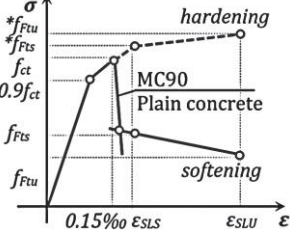
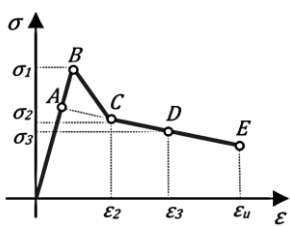
Diagrama	Parâmetros	Ensaio de caracterização	Norma
	$\sigma_1 = f_{Ftu} = f_{eq2}/3$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_u$ $= (20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening})$	Ensaio à flexão de 4 pontos (UNI 11039)	CNR-DT 204
	$\sigma_1 = f_{Ftu} = f_{R3}/3$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_u$ $= (20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening})$	Ensaio à flexão de 3 pontos (EN 14651)	MC2010
	$\sigma_1 = f_{ctd,u}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,u}^f / \gamma_{ct}^f$ ou $\sigma_1 = f_{ctd,s}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,s}^f / \gamma_{ct}^f$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 4 pontos (DIN EN 12390)	DAfStb
	$\sigma_1 = f_{Ftu} = f_{R3}/3$ $\varepsilon_1 = w_u = CMOD_3 = 2,5 \text{ mm}$	Ensaio à flexão de 3 pontos (NBR 16940)	NBR 16935
	$\sigma_1 = f_{ctR,d} = f_{R,3,d}/3$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_u = (20\text{‰ flexão}; 10\text{‰ tração})$	Ensaio à flexão de 3 pontos (EN 14651)	CE2021
	$\sigma_1 = f_{Fts} = 0,45 \cdot f_{eq1}$ $\sigma_2 = f_{Ftu} = k \cdot (f_{Fts} - (w_u/w_{i2}) \cdot (f_{Fts} - 0,5 \cdot f_{eq2} + 0,2 \cdot f_{eq1}))$ $k = (0,7 \text{ tração pura}, 1 \text{ outros casos})$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_u$ $= (20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening})$	Ensaio à flexão de 4 pontos (UNI 11039)	CNR-DT 204
	$\sigma_1 = f_{Fts} = 0,45 \cdot f_{R1}$ $\sigma_2 = f_{Ftu} = f_{Fts} - \left(\frac{w_u}{CMOD_3} \right) \cdot (f_{Fts} - 0,5 \cdot f_{R3} + 0,2 \cdot f_{R1}) \geq 0$ $\varepsilon_1 = CMOD_2 = 1,5 \text{ mm}$ $\varepsilon_2 = w_u = CMOD_3 = 2,5 \text{ mm}$ $\sigma_2 = f_{Ftu} = 0,5 \cdot f_{R3} - 0,2 \cdot f_{R1}$	Ensaio à flexão de 3 pontos (NBR 16940)	NBR 16935
	$\sigma_1 = 0,7 \cdot f_{ctm,fl} \cdot (1,6 - d)$ $\sigma_2 = 0,45 \cdot K_H \cdot f_{R,1}$ $\sigma_3 = 0,37 \cdot K_H \cdot f_{R,4}$ $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E_c$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 0,1\text{‰}$ $\varepsilon_3 = \varepsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 3 pontos (RILEM TEST)	RILEM

TABELA 3 – Modelos constitutivos de diferentes normativas

(conclusão)

Diagrama	Parâmetros	Ensaio de caracterização	Norma
	$\sigma_1 = \sigma_2 = f_{ctd,L1}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,L1}^f / \gamma_{ct}^f$ $\sigma_3 = f_{ctd,L2}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,L2}^f / \gamma_{ct}^f$ $\varepsilon_1 = 0,1\text{‰}$ $\varepsilon_2 = 3,5\text{‰}$ $\varepsilon_3 = \varepsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 4 pontos (DIN EN 12390)	DfStb
	$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$ $f_{Fts} = 0,45 \cdot f_{R1}$ $f_{Ftu} = k \cdot [f_{Fts} - (w_u / CMOD_3) \cdot (f_{Fts} - 0,5 \cdot f_{R3} + 0,2 \cdot f_{R1})]$ $\varepsilon_{SLs} = CMOD_1 / l_{cs}$ $\varepsilon_{SLU} = \frac{w_u}{l_{cs}} = \min \left(\varepsilon_{Ftu}, \frac{2,5}{y} \right)$ $\varepsilon_{Fu} = (20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening})$	Ensaio à flexão de 3 pontos (EN 14651)	MC2010
	$\sigma_1 = f_{ctm}$ $\sigma_2 = \sigma_3 = f_{ctd,L1}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,L1}^f / \gamma_{ct}^f$ $\sigma_4 = f_{ctd,L2}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,L2}^f / \gamma_{ct}^f$ $\varepsilon_2 = 0,3\text{‰}$ $\varepsilon_3 = 3,5\text{‰}$ $\varepsilon_4 = \varepsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 4 pontos (DIN EN 12390)	DfStb
	$\sigma_1 = f_{ct,d} = 0,6 \cdot f_{ct,f1,d}$ $\sigma_2 = f_{ctR1,d} = 0,45 \cdot f_{R,1,d}$ $\sigma_3 = f_{ctR3,d} = k_1 \cdot (0,5 \cdot f_{R,3,d} - 0,2 \cdot f_{R,1,d})$ $\varepsilon_2 = 0,1 + 1000 \cdot f_{ct,d} / E_c$ $\varepsilon_3 = 2,5 / l_{cs} (l_{cs}: \text{comp. característico})$ $\varepsilon_u = (20\text{‰ flexão}; 10\text{‰ tração})$	Ensaio à flexão de 3 pontos (EN 14651)	CE2021

Dada a quantidade de variáveis apresentada na tabela, elas não serão descritas em sequência, mas sim em ordem de seu aparecimento na lista de símbolos.

Fonte: Adaptado de Álvarez (2013); de la Fuente (2011).

Uma vez apresentados os modelos constitutivos, é retratado, na TABELA 4, uma análise das principais similitudes e distinções entre eles, avaliando os pontos a favor e contra as suposições feitas.

TABELA 4 - Resumo das características dos modelos constitutivos

(continua)

Suposições	RILEM	CNR-DT 204	MC2010	DfStb	NBR 16935 ²	CE2021
Tensão-deformação (σ - ε) / Tensão-abertura de fissura (σ - w)	σ - ε	σ - w / σ - ε	σ - w / σ - ε	σ - ε	σ - w	σ - ε

² A NBR 16935 também apresenta diagramas tensão-deformação específicos para elementos de placa com interface com meio elástico. Porém, na tabela em questão foram analisados apenas as leis constitutivas propostas para definir o comportamento pós-fissuração de elementos de CRF cujas seções são normalmente solicitadas à tração.

TABELA 4 - Resumo das características dos modelos constitutivos

(conclusão)

Suposições	RILEM	CNR-DT 204	MC2010	DAfStb	NBR 16935 ³	CE2021
Equação contínua (EC) / Equação descontínua (ED)	ED	ED	ED	ED	ED	ED
Trabalha com forças residuais	•		•	•	•	•
Trabalha com forças equivalentes		•				
Diferencia a tensão última		•	•		•	•
Deformação última (%)	25	20/10	20/10	25	-	20/10
Comprimento característico para obter deformações		•	•			•
Norma específica para fibras de aço	•			•		
Adota terminologia “fibra estrutural”		•	•		•	•
Considera efeito do tamanho	•			•		
Considera efeito da fluência				•		•
Considera o efeito da orientação das fibras			•	•		•

Fonte: Adaptado de Álvarez (2013); de la Fuente (2011).

Constata-se que há uma tendência das normativas proporem diagramas tensão-deformação para definir o comportamento à tração do concreto com fibras. Apesar disso, nota-se também que tanto a CNR-DT 204 quanto o MC2010 e a NBR 16935 sugerem diagramas tensão-abertura de fissura. Do mesmo modo, fica evidente que os modelos indicados são baseados unicamente em equações descontínuas, visto que para determinar de forma confiável o comportamento de tração uniaxial do CRF, mais pontos são necessários.

Além disso, verifica-se uma propensão a utilização de forças residuais em vez de forças equivalentes, ainda que alguns autores, como Barros *et al.* (2005), tenham relatado que a utilização de forças residuais acarrete em uma maior suscetibilidade a irregularidades na curva carga-deslocamento. Um outro ponto relevante que diferencia as publicações mais antigas das mais recentes, se deve ao fato de que, outrora, eram publicados documentos voltados apenas as fibras de aço, caso das normativas DAfStb e RILEM. Já as referências mais recentes adotam a terminologia “fibra estrutural”, o que amplia a gama de fibras que podem ser utilizadas para fins de reforço.

Cabe lembrar, por fim, que são diversos os efeitos capazes de afetar o comportamento do CRF. Em vista disso, observa-se que algumas normas, de modo inovador, já apresentam fatores capazes de prever o efeito do tamanho (RILEM e DAfStb), da fluência

³ A NBR 16935 também apresenta diagramas tensão-deformação específicos para elementos de placa com interface com meio elástico. Porém, na tabela em questão foram analisados apenas as leis constitutivas propostas para definir o comportamento pós-fissuração de elementos de CRF cujas seções são normalmente solicitadas à tração.

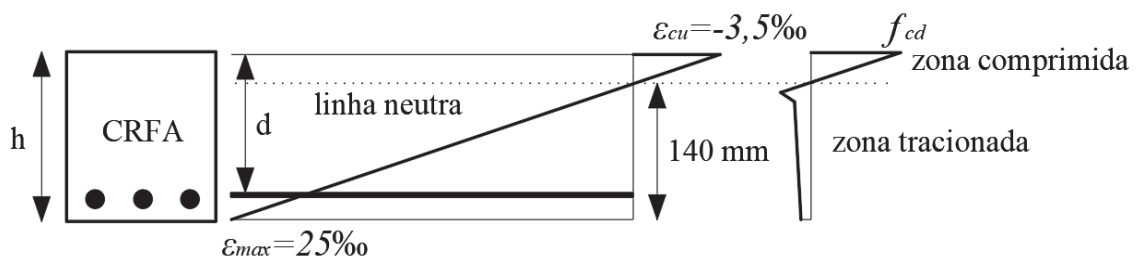
(DAfStb e CE2021) e da orientação das fibras (MC2010, DAfStb e CE2021). A fim de melhor discutir as suposições propostas por cada norma, uma breve análise e descrição dos modelos constitutivos apresentados na TABELA 3 será realizada nos tópicos seguintes.

2.5.1 Recomendação RILEM TC 162-TDF (2003)

A primeira recomendação proposta pela RILEM em 2000 estabeleceu um modelo de tensão-deformação baseado em resistências equivalentes à flexão. Essas resistências eram obtidas por meio de ensaios de flexão de 3 pontos, sem levar em conta o efeito do tamanho. Em 2003, o RILEM publicou um novo diagrama trilinear de tensão-deformação para CRF, após investigações realizadas pelo *Brite Euram Project* em 2002 (ver TABELA 3). Essa última proposta considera resistências residuais em vez de resistências equivalentes. Segundo Álvarez *et al.* (2010), o modelo atual do RILEM resulta em valores de tensão de pico elevados quando comparado com outras normas vigentes.

A deformação última, nesse novo modelo, foi atualizada para 25‰ (em relação aos 10‰ considerados tanto na versão RILEM de 2000). O aumento no valor da deformação se justifica pela consideração da altura da linha neutra 140 mm acima do ponto onde o CMOD é medido (FIGURA 12) e assumindo o comprimento característico equivalente a essa distância. Por consequência, para um CMOD de 3,5 mm, equivalente a abertura de fissura última, obtém-se uma deformação de $3,5 \text{ mm}/140 \text{ mm} = 25\text{‰}$.

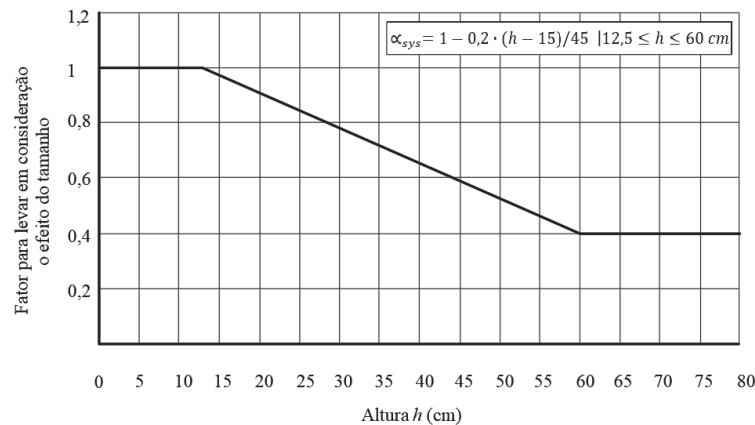
FIGURA 12 – Distribuição tensão-deformação na seção transversal



Fonte: Adaptado de Vandewalle *et al.*, (2003); Álvarez (2013).

Por fim, salienta-se que, com objetivo de considerar diferenças geométricas existente entre os corpos de prova e a estrutura real, as tensões $f_{R,1}$ e $f_{R,4}$ são afetadas, na publicação mais recente, por um fator de tamanho (K_H). Na FIGURA 13 é possível verificar os valores de K_H adotados pelo RILEM.

FIGURA 13 – Fator tamanho proposto pelo RILEM



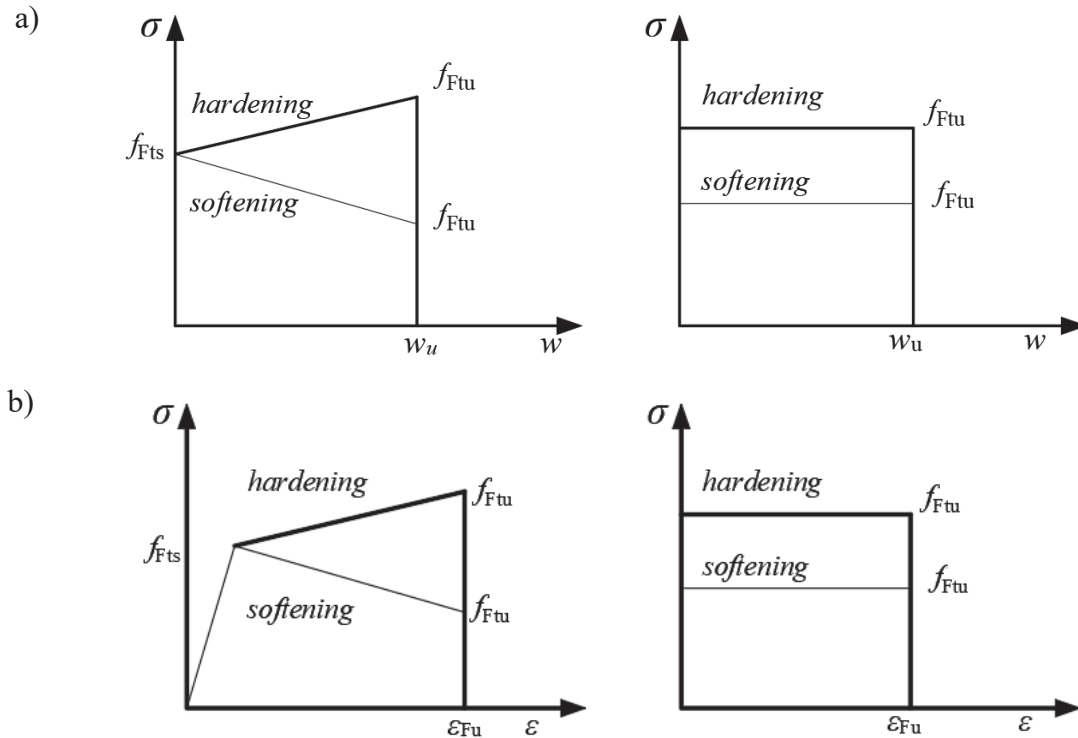
Fonte: Adaptado de la Fuente (2011).

2.5.2 Norma italiana: CNR-DT 204 (2006)

O Comitê Nacional de Investigação Italiano publicou, em 2006, uma recomendação para o desenho, execução e controle de estruturas de CRF, o CNR-DT 204 (2006). Esse documento propõe dois modelos para descrever o comportamento à tração do CRF: um elástico-linear e outro rígido-plástico. Ambas propostas foram apresentadas com relação tensão-deformação e tensão-abertura de fissura. O modelo rígido-plástico é mais aplicado em verificações de serviço, enquanto que o elástico linear é utilizado tanto para situações de ruptura quanto de serviço.

Os modelos do CNR-DT 204 empregam o conceito de resistência à flexão equivalente para caracterizar os diagramas e são obtidos por meio de ensaio à flexão de 4 pontos ou por meio de testes uniaxiais. As leis constitutivas simplificadas, tanto de tensão-abertura de fissura quanto de tensão-deformação, propostas pela diretriz italiana estão esquematizados na FIGURA 14.

FIGURA 14 – Diagrama elástico-linear e rígido-plástico propostos pela CNR-DT 204 em termos de a) tensão-abertura de fissura, b) tensão-deformação



Fonte: CNR-DT 204 (2006).

Verifica-se que o modelo linear diferencia o comportamento *strain-hardening* do comportamento *strain-softening* dos materiais. No primeiro caso ocorrem múltiplas fissuras e a deformação é calculada pelo valor médio da abertura das fissuras, o qual pode ser obtido diretamente de ensaios experimentais, não podendo ultrapassar o valor máximo de 10‰. Já para o comportamento *strain-softening*, caracterizado pelo aparecimento de uma única fissura, a deformação última está relacionada com a abertura última da fissura sendo a equivalência entre ambas variáveis realizada por meio do conceito de comprimento característico. O comprimento característico, para normativa em questão, é definido como sendo o menor valor entre o valor médio da distância entre fissuras e a altura da linha neutra. A deformação máxima para elementos com comportamento *strain-softening* é de 20‰ e a abertura última deve respeitar a condição: $w_u = \epsilon_{Fu} \times l_{cs} \leq 3 \text{ mm}$, onde ϵ_{Fu} é a deformação última do CRF e l_{cs} é o comprimento característico.

2.5.3 *fib* Model Code (2010)

O MC2010 propõe dois modelos tensão-abertura de fissura para prever o comportamento à tração dos CRF, os quais tem seus parâmetros definidos em termos de forças

residuais, obtidas por meio de ensaios à flexão de 3 pontos. Os diagramas sugeridos seguem a mesma abordagem do CNR-DT 204 (FIGURA 14a), sendo, portanto, um rígido-plástico e outro descrevendo um comportamento linear pós-fissuração. No modelo rígido-plástico o valor da abertura última da fissura é de 2,5 mm, já no elástico-linear esse parâmetro depende da ductilidade requirida, todavia, também não excede os 2,5 mm.

No código em questão, também são apresentados modelos definidos em termos de tensão-deformação (ver TABELA 3). Para tanto, é necessário diferenciar o comportamento *strain-softening* do comportamento *strain-hardening*. O CRF pode ser classificado como sendo *strain-hardening* quando ele demonstrar um comportamento *hardening* em tração para uma deformação última de até 1%. Caso contrário, o material é considerado *strain-softening*.

Para materiais de comportamento *strain-softening*, o diagrama tensão-deformação pode ser determinado por meio da definição da abertura da fissura e do comprimento característico do elemento estrutural. Assim, calcula-se o valor de deformação como $\varepsilon = w/l_{cs}$, sendo o valor de l_{cs} determinado da mesma forma que a normativa italiana. Em casos de materiais com comportamento *strain-hardening*, o valor de l_{cs} não é necessário. Isso porque o diagrama tensão-deformação pode ser definido assumindo o valor da deformação última igual a 2%, para deformações variáveis ao longo da seção transversal, e 1% para deformações de tração uniformemente distribuídas ao longo da seção transversal.

Além disso, cabe destacar que o segundo ramo sugerido no estágio pré-fissuração do diagrama tensão-deformação do CRF corresponde ao diagrama para concreto simples (indicado como “MC90 *Plain concrete*”). No entanto, a partir da ocorrência de um comportamento residual pós-fissuração juntamente com a propagação instável das fissuras, verifica-se a definição do comportamento de materiais *strain-softening*. Já para os materiais *strain-hardening*, outro ramo é proposto, conforme apontado no diagrama.

Por fim, salienta-se que o MC2010 afirma que os reforços com fibras podem substituir parcial ou totalmente reforços convencionais no estado limite último, desde que certos critérios sejam atendidos. Ademais, diferentemente dos outros modelos, o MC2010 também propõe não só um fator de orientação para projeto, como também sugere ensaios específicos para determinar o efeito da orientação das fibras utilizando corpos de prova capazes de reproduzir o material em escala real.

2.5.4 Diretriz alemã: DAfStb-Richtlinie Stahlfaserbeton (2010)

Em 1992, a *German Concrete Society* propôs a primeira normativa com um diagrama tensão-deformação para o projeto de estruturas de CRFA. Inicialmente, esse documento era direcionado especificamente para fibras de aço e tinha como objetivo principal o projeto estrutural de túneis. No ano de 2001, tal normativa passou por uma revisão, resultando em um modelo trilinear para o Estado Limite de Serviço (ELS) e um diagrama bilinear para o Estado Limite Último (ELU). Mais recentemente, em 2010, as recomendações de 2001 foram substituídas por uma nova diretriz, que apresenta um diagrama multilinear para o ELU e um diagrama trilinear para o ELS, conforme indicado na TABELA 3. Essa diretriz mais recente ainda se aplica exclusivamente a fibras de aço.

Ambos os diagramas definidos pela DAfStb podem ser obtidos por meio de ensaios de caracterização à flexão de 4 pontos, conforme especificado pela norma DIN EN 12390 (2009). É relevante ressaltar que, nessa última publicação, a diretriz alemã substituiu as forças equivalentes por forças residuais. Além disso, foram estabelecidas classes de desempenho com base nos resultados obtidos no ensaio de caracterização, os quais influenciam a forma de cálculo das resistências à tração pós-fissuração utilizadas para determinar a curva tensão-deformação do CRFA.

Entre os principais diferenciais do modelo alemão, é importante destacar a consideração dos coeficientes de fluência, do efeito do tamanho e, um aspecto inovador presente na última publicação, a consideração da orientação das fibras. Além disso, na versão de 2001, a deformação última aumentou de 5‰ para 10‰. Na atual versão, houve uma nova atualização, aumentando a deformação última para 25‰. Essa modificação é considerada positiva, uma vez que, de acordo com de la Fuente (2011), o valor de 10‰ continuava sendo questionável devido às deformações que elementos de CRF sujeitos à flexão podem alcançar.

2.5.5 Norma brasileira: NBR 16935 (2021)

Em 2021, a ABNT proporcionou um grande avanço para a utilização do CRF no país por meio da publicação da NBR 16935. Essa norma possui o objetivo de estabelecer um procedimento de projeto nacional para estruturas de CRF. Assim, definiu-se, nesse documento, requisitos de desempenho mecânico do CRF, atuando isoladamente ou em conjunto com as armaduras convencionais (ativas ou passivas), sejam elementos lineares ou de placas. Na leitura

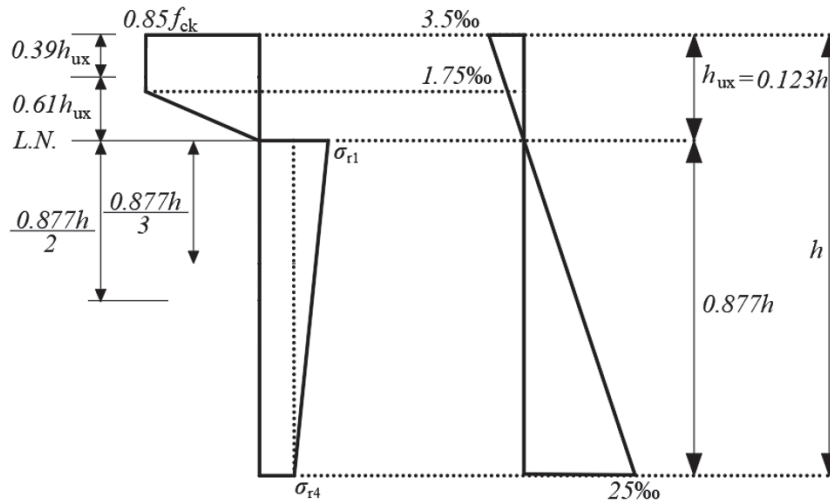
da normativa, fica evidente as diversas semelhanças com os procedimentos apresentados pelo MC2010.

Do mesmo modo que o MC2010 e o CNR-DT 204, a NBR 16935 propõe duas leis constitutivas definidas em termos de tensão-abertura de fissura, o modelo rígido-plástico e o modelo linear (FIGURA 14a). Tais modelos devem ser aplicados em seções solicitadas à tração como forma de obter as resistências à tração direta de serviço e última. Os diagramas podem ser definidos com auxílio do ensaio de flexão à 3 pontos, segundo procedimento estabelecido na NBR 16940 (ABNT, 2021).

As linhas tracejadas e contínuas do diagrama (FIGURA 14a) se referem ao comportamento pós-fissuração de *hardening* e *softening*, respectivamente. O modelo rígido-plástico utiliza como valor de referência único o f_{Ftu} , enquanto o modelo linear utiliza dois valores de referência, o f_{Ftu} e o f_{Fts} . No que diz respeito aos valores-limite de $CMOD$, tem-se que, no modelo linear, os valores de abertura de fissura última correspondentes ao f_{Ftu} e f_{Fts} são respectivamente 2,5 mm e 1,5 mm, já para o modelo rígido-plástico o valor de w_u é equivalente a 2,5 mm.

Além do modelo em termos de tensão-abertura de fissura, a NBR 16935 também propõe diagramas tensão-deformação específicos para elementos de placa com interface com o meio elástico. Para esses casos, pode-se assumir os mesmos diagramas simplificados já apresentados. Todavia, deve-se considerar que a resistência à tração direta na linha neutra é σ_{r1} e na face mais tracionada é σ_{r4} , com distribuição trapezoidal entre os dois pontos. Os parâmetros podem ser definidos como sendo $\sigma_{r1} = 0,45 \times f_{R,1}$ e $\sigma_{r4} = 0,37 \times f_{R,4}$. Uma ilustração do diagrama de distribuição de tensões axiais e deformações da seção reforçada somente com fibras está apresentado na FIGURA 15.

FIGURA 15 - Diagramas de distribuição de tensões axiais e deformações da seção reforçada somente com fibras



Fonte: ABNT (2021).

Como pontos de destaque da NBR 16935, tem-se a indicação da possibilidade de substituição parcial e total da armadura convencional por fibras, conforme também mencionado no MC2010. Todavia, apesar disso, não foi observado nenhuma sugestão de fatores de correção, em função de possíveis influências no comportamento pós-fissuração do CRF decorrentes do efeito do tamanho, da orientação e da fluência.

2.5.6 Norma espanhola: *Código Estructural* (2021)

Em meados de 2021, foi aprovado o Real Decreto 470/2021, que efetiva o *Código Estructural*, um documento que regulamenta as estruturas de concreto, aço e concreto-aço misto, tanto para edifícios como para obras civis, e que substitui a anterior *Instrucción de Hormigón Estructural* (EHE) e a *Instrucción de Acero Estructural* (EAE). A nova norma, assim como a antiga, faz distinção de fibras com finalidade estrutural ou não estrutural. Sendo que, os comportamentos descritos ao longo dessa recente normativa visam refletir as especificações básicas que são exigidas quando as fibras têm um propósito estrutural.

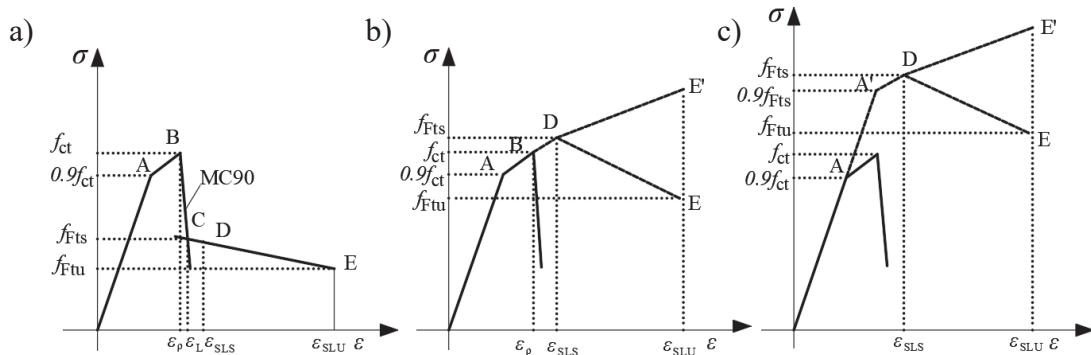
Em relação a definição comportamento à tração do CRF, o novo código manteve a apresentação de dois diagramas de tensão-deformação: um diagrama retangular e um diagrama multilinear, cuja aplicação dependerá da situação em questão. O diagrama retangular tem sua aplicação indicada para cálculo no ELU. Já em casos particulares, que exigem um nível de precisão maior, o modelo bilinear simplificado (definido pelos pontos A-C-D-E do diagrama multilinear, ver TABELA 3) é sugerido. Para verificações no ELS, o diagrama multilinear é preferível (definido por A-B-C-D-E, ver TABELA 3), uma vez que a força adicional fornecida

pelo pico A-B-C permite uma melhor aproximação e uma maior precisão. Para obtenção dos parâmetros necessários para definição dos diagramas, a norma recomenda a realização do ensaio proposto pela EN 14651 (CEN, 2007).

No que diz respeito aos valores de deformação, é possível verificar que a normativa espanhola utiliza do conceito de comprimento característico para determinar a deformação última associada a uma abertura de fissura de 2,5 mm. A partir disso, é possível verificar a diferenciação de dois valores a depender da solicitação presente na seção: sendo 20% para esforços de flexão e de 10% para esforços de tração.

As descrições mencionadas não apresentam nenhuma novidade em relação a recomendação antiga. Assim sendo, como diferencial dessa nova publicação, tem-se a especificação de 3 casos que visam adaptar os coeficientes parciais de segurança dos materiais ao estado limite que se pretende abordar. Dentre os casos apresentados, tem-se que um deles descreve o material em comportamento *softening* e os outros dois retratam o comportamento em *hardening*, conforme pode ser visto na FIGURA 16.

FIGURA 16 – Casos de formulação definido pelo *Código Estructural* a) caso I, b) caso II, c) caso III



Fonte: BOE (2021).

Convém destacar que o modelo retangular proposto pela presente normativa segue a mesma filosofia do recomendado pelo CNR-DT 204. O mesmo se verifica para o modelo trilinear em relação ao RILEM. Como pontos de destaque dessa nova versão, em relação a publicação anterior (EHE), ressalta-se a especificação de um fator de orientação, o qual tem a intenção de prever as possíveis influências decorrentes do efeito da distribuição e orientação das fibras. Além desse fator, também se verificou a recomendação da utilização de um coeficiente de fluência do concreto no caso de utilização de fibras sintéticas para fins estruturais. Dessa forma, fica evidente que, além de reunir o conhecimento e os principais conceitos das recomendações anteriores, o novo código espanhol introduziu avanços

significativos por meio da proposta de coeficientes de correção relacionados a prováveis fatores de influência no comportamento pós-fissuração do CRF.

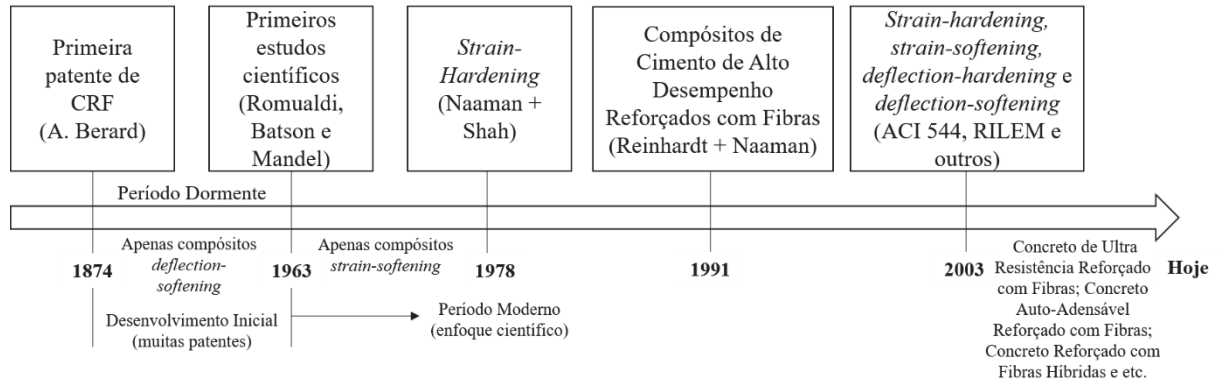
A partir das discussões realizadas, é possível perceber que, atualmente, há uma relevante base normativa que visa fundamentar e promover a utilização do CRF. Embora tenha sido discorrido acerca de diferentes abordagens que visam descrever o comportamento à tração do CRF, vale frisar o esforço realizado pelas normativas em assimilar a experiência adquirida ao longo das publicações. Isso fica ainda mais evidentes nas normativas mais recentes, as quais além de apresentar leis constitutivas bastante similares as previstas pelas diretrizes e códigos anteriores, propõem também novos coeficientes de correção com o intuito de ajustar os valores obtidos aos efeitos inerentes a presença das fibras no concreto.

2.6 APLICAÇÕES ESTRUTURAIS

A adição de fibras para aprimorar o comportamento de materiais de construção é uma prática antiga e intuitiva. Os antigos egípcios já usavam elementos fibrosos como palhas ou crinas de cavalo para reforçar tijolos de barro. Em vista disso, não é de se admirar que tentativas foram feitas para adicionar fibras ao cimento Portland com principal intuito de aprimorar seu comportamento. Adicionar reforço na forma de fibras ao concreto para criar um material estrutural homogêneo, resistente, durável e moldável consiste em um estudo que começou no final do século XIX e está em andamento até os dias de hoje (SINGH, 2016; NAAMAN, 2018).

Dois períodos de tempo marcam a história do CRF, conforme exibido na FIGURA 17. O primeiro período, anterior a década de 1960, pode ser considerado um período adormecido. Visto que, apesar das diversas patentes apresentadas, apenas o comportamento de *deflection-softening* foi observado, não sendo tecnicamente convincente. O segundo período, conhecido também como período moderno, propiciou consciência do aumento da resistência à fissuração do compósito. Em razão disso, notou-se um interesse crescente nos métodos científicos para compreender os mecanismos de reforço das fibras. Dessa forma, os pesquisadores foram capazes de desenvolver compósitos com boas resistências à tração e flexão, satisfazendo o que as primeiras patentes reivindicaram, mas não puderam alcançar devido à falta de pesquisa (NAAMAN, 2018).

FIGURA 17 - Desenvolvimento do CRF ilustrando dois períodos de tempo distintos



Fonte: Adaptado de Naaman (2018).

Conforme visto, as primeiras pesquisas significativas acerca do CRF foram realizadas a partir da década de 1960. Desde então, em virtude da melhora nas propriedades mecânicas e físicas dos elementos estruturais, o CRF encontrou inúmeras aplicações em uma escala mais ampla. Como consequência, o uso de tal compósito de concreto vem aumentando de forma constante. Algumas das suas principais aplicações estão listadas abaixo, todas baseadas no fato de que a incorporação de fibras melhora a ductilidade e energia de fratura do concreto, o que prolonga a vida útil das estruturas (KATZER, 2006; SALCEDO, 2012).

a) Concreto projetado

O concreto projetado com fibras é usado principalmente na estabilização de encostas rochosas e revestimento de túneis. A aplicação de CRFA para fins de estabilização se desenvolveu extensivamente e é amplamente utilizada hoje em dia, conforme ilustrado na FIGURA 18a. A experiência em túneis demonstrou que a aplicação CRFA tem vantagens em termos de desempenho no local. Visto que tal compósito atinge altas resistências mesmo em poucas horas de colocação e elimina a necessidade de instalar malha de aço soldada, um processo que retarda a execução dos trabalhos (BEHBAHANI, 2011; SALCEDO, 2012; BACHA, 2019).

b) Pavimentos de rodovias e aeródromos

Dada a resistência à flexão proporcionada, o CRFA pode ser usado na construção de novos ou para o reparo de pavimentos (FIGURA 18b), reduzindo a espessura de pavimento necessária. Além disso, a resistência ao impacto e ao carregamento repetido também são aprimorados com o uso de fibras. Do mesmo modo, a maior capacidade de deformação à tração resulta em uma redução nas aberturas de fissuras quando comparadas ao concreto simples.

Assim sendo, nota-se que o CRFA atende a resistência à flexão e fadiga, trabalhabilidade e retração necessárias para a construção de pavimentos. Por isso, sua aplicação nesse campo tem sido tão bem sucedida (SALCEDO, 2012).

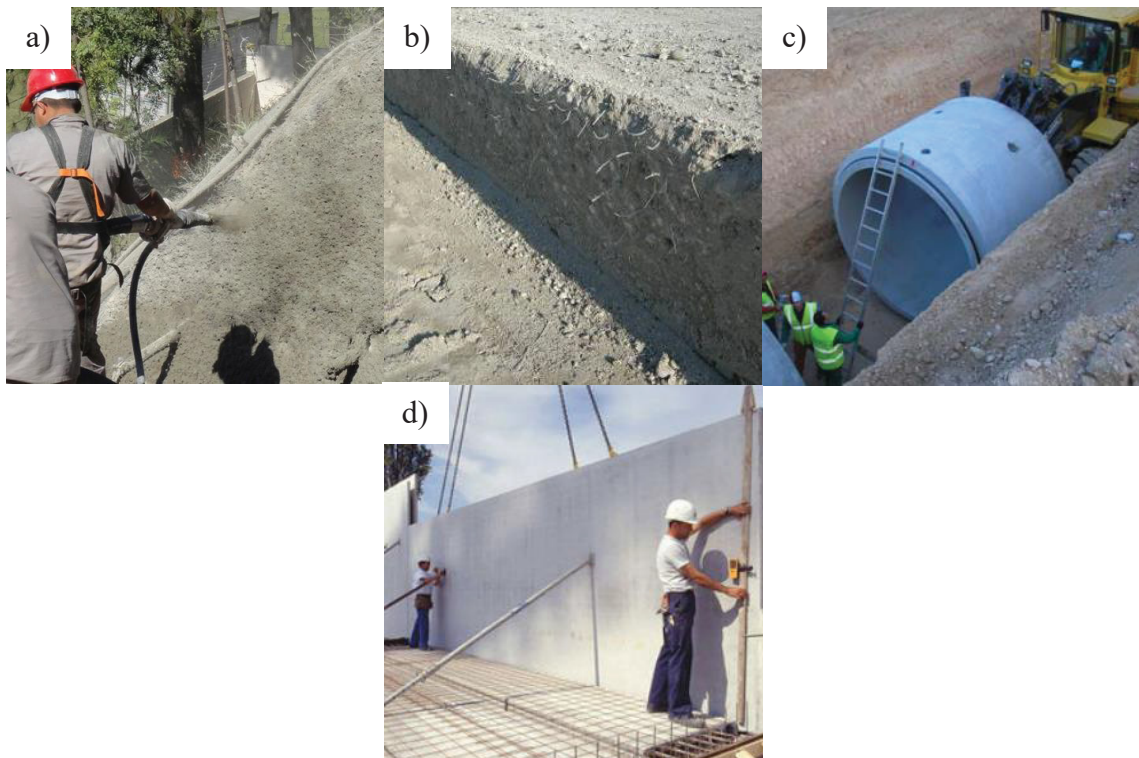
c) Estruturas hidráulicas

O reforço com fibras de aço confere as estruturas hidráulicas (FIGURA 18c) boa resistência ao impacto, à abrasão e à cavitação. As fibras permitem uma redução na espessura, assim como, melhoram a impermeabilização. Ademais, o CRFA também tem sido usado para reparar danos graves de cavitação e erosão que ocorreram em concretos convencionais (BEHBAHANI, 2011).

d) Pré-moldados

O CRFA também pode ser usado na construção de produtos pré-moldados (FIGURA 18d), como tampas de bueiros, tubos de concreto, bases, armações de máquinas, dentre outros possíveis usos. A melhor resistência à flexão e ao impacto do CRFA pode permitir a utilização desse material em situações de manuseio difícil (BEHBAHANI, 2011).

FIGURA 18 - Exemplos de aplicações reais de CRFA para uso estrutural a) estabilização de solo, b) pavimentos, c) tubos, d) parede pré-moldada



Fonte: de la Fuente (2011); Salcedo (2012); KFK Engenharia (2017); Bacha (2019); Neo Matex (2022).

Assim sendo, evidencia-se que o CRFA é amplamente utilizado em aplicações como pisos, pré-moldados e concreto projetado. Bacha (2019) relata que a falta de padrões e o desempenho limitado das fibras de aço típicas foram as principais barreiras para sua utilização em aplicações estruturais. No entanto, devido à experiência adquirida, viabilidade econômica comprovada e validação em termos de códigos e normas, novas aplicações de maior responsabilidade estrutural surgiram, especialmente em peças predominantemente submetidas a esforços de flexão. Vários autores têm estudado, tanto experimentalmente como numericamente, e, em geral, observaram boas respostas.

Como exemplo desses resultados positivos, Yoo *et al.* (2015) realizaram um estudo sobre o comportamento à flexão de vigas de CRFA com diferentes volumes de fibras. Os autores observaram que o aumento do volume das fibras resultou em melhorias significativas na resistência à flexão, ductilidade e tenacidade dos elementos. De maneira semelhante, Shewalul (2021) também notou, ao ensaiar vigas de CRFA, que o aumento do volume de fibras resultou em maior resistência à flexão e ductilidade. Assim como, Accornero *et al.* (2022) que observaram melhorias na capacidade de deformação, tenacidade e comportamento pós-fissuração com a adição de fibras de aço em peças de concreto submetidas à flexão com volumes de fibras acima de 1%.

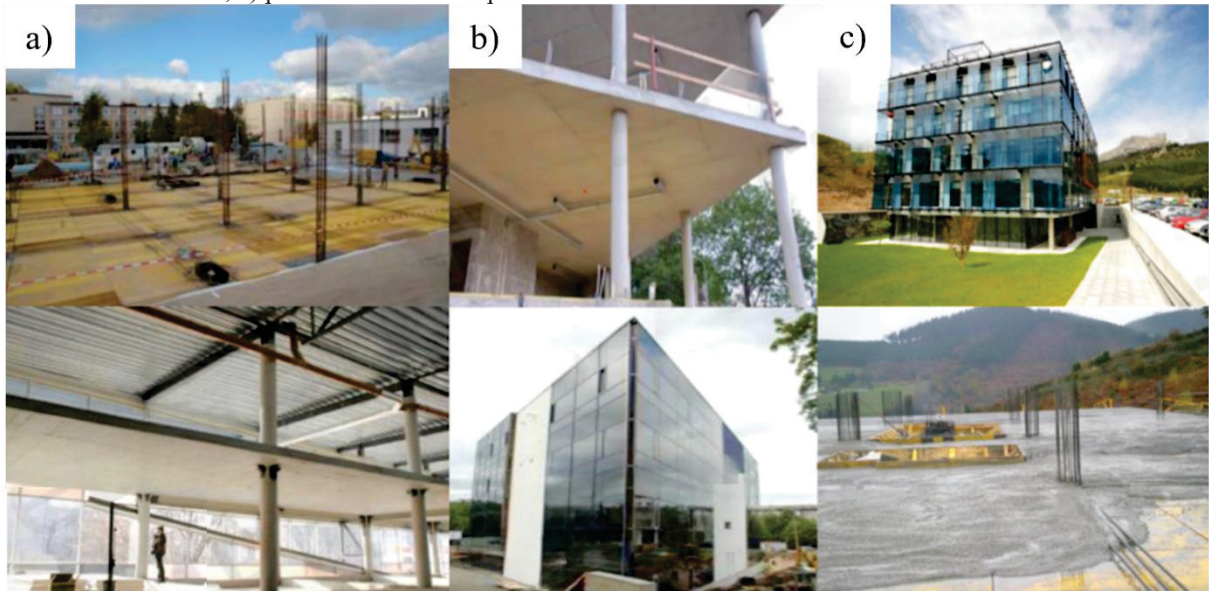
Em outro estudo realizado por Yoo *et al.* (2015), foram executados ensaios à flexão de 4 pontos em elementos de CRFA para avaliar o efeito de tipo, volume e fator de forma das fibras no concreto. Diferentes terminações de fibras, volumes e fatores de forma foram avaliados, e os resultados mostraram que todos os formatos de fibras melhoraram o comportamento à flexão. As fibras com terminação em gancho apresentaram os melhores resultados, aumentando em até 165% as forças de flexão resistidas pelos corpos de prova. Já o aumento do volume de fibras e do fator de forma resultaram em uma melhoria no desempenho à flexão, ou seja, na sua resistência, capacidade de deformação e tenacidade. Os autores concluíram, por fim, que o aumento do volume de fibras leva a fissuras de cisalhamento, em substituição as fissuras de tração, como a principal causa de falha do CRFA.

No que diz respeito ao comportamento à flexão de lajes, Álvarez (2013) realizou uma avaliação em escala real, analisando os diagramas de carga-flecha e carga-rotação. A autora concluiu que as fibras de aço, como único reforço, foram capazes de suportar tensões e proporcionar ductilidade para os níveis de carga atingidos no ensaio. Além disso, também verificou que o comportamento das lajes variou de acordo com a geometria, sendo que a laje menor apresentou a maior capacidade de carga. No entanto, as forças residuais e a ductilidade

proporcionada pelas fibras permitiram que as lajes maiores alcançassem níveis de carga próximos aos da laje menor. Observou-se também que a capacidade de redistribuição de tensões da laje menor foi inferior, devido à sua geometria que tende a trabalhar predominantemente na menor direção, enquanto as lajes maiores apresentaram uma redistribuição de tensão mais eficiente.

Em conclusão, os estudos brevemente apresentados ilustram o potencial do uso de fibras de aço como reforço em aplicações estruturais tais como as ilustradas na FIGURA 19. Embora a falta de padrões e desempenho limitado das fibras de aço típicas tenham sido barreiras no passado, a experiência adquirida permitiu o surgimento de novas aplicações de maior responsabilidade estrutural. Os resultados dos trabalhos que vem sendo publicados indicam que a adição de fibras de aço melhora a resistência à flexão, ductilidade e tenacidade dos elementos estruturais, especialmente frente a elevados volumes de fibras. Além disso, observa-se que as fibras de aço proporcionam tensões residuais, o que possibilita que elementos estruturais suportem níveis de carga mais elevados. Portanto, torna-se evidente, mais uma vez, que o uso de fibras de aço pode ser uma alternativa viável para o reforço de estruturas, oferecendo melhorias significativas em termos de desempenho e segurança estrutural.

FIGURA 19 – Aplicações mais recentes e de maior responsabilidade estrutural a) shopping na Letônia, b) edifício comercial na Estônia, c) prédio da LKS na Espanha



Fonte: Destrée; Mandl (2008).

Os exemplos retratados na FIGURA 19 tratam de utilizações onde o CRFA foi empregue para reforço de lajes suspensas. A FIGURA 19a apresenta o centro comercial *Ditton*

Nams localizado em Daugavspils, Letônia. Suas lajes planas medem 42,5 m x 24 m, com vãos de até 7 m. A carga máxima de serviço aplicada foi de 7 kN/m², comum em grandes lojas onde há transporte de paletes com produtos alimentícios e não alimentícios. A deflexão máxima registrada foi de 1,9 mm, abaixo do previsto pelo *software* de elementos finitos. Na FIGURA 19b, tem-se o edifício comercial *Rocca Tower* em Tallin, Estônia. Cada andar mede cerca de 550 m² com formato triangular, as lajes de 210 mm de espessura são reforçadas com 100 kg/m³ de fibras de aço com até 7 m de vão. Já na FIGURA 19c, está o edifício comercial LKS em Mondragon, Espanha. Com cinco pisos e mais de 4000 m² de escritórios para uma empresa de engenharia de estruturas, suas lajes têm 280 mm de espessura e também foram reforçadas com 100 kg/m³ de fibras de aço (DESTREÉ; MANDL, 2008).

3 ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS CONSTITUTIVOS DE CRFA E AVALIAÇÃO DE PARÂMETROS DE INFLUÊNCIA

3.1 INTRODUÇÃO

Para disseminar o uso e aumentar a margem de confiança do CRFA como solução estrutural, é fundamental a existência de modelos que reflitam de forma segura o seu comportamento. Uma vez que, diferentemente do que ocorre na compressão, o comportamento à tração do CRFA difere da resposta do concreto armado convencional. Todavia, dada a sua complexidade, o desenvolvimento de um modelo de equações constitutivas que permita caracterizar adequadamente o comportamento à tração do referido material consiste em um desafio (DE LA FUENTE, 2011).

Tendo em vista tal problemática, a publicação de normas específicas para a utilização do CRF tem sido uma ferramenta importante, já que são responsáveis por conferir ao projetista uma maior segurança nas soluções adotadas para este tipo de estrutura. Durante as últimas décadas, foram desenvolvidos vários códigos e diretrizes que definem a base de cálculo do CRF. No entanto, dentre as diferentes equações constitutivas existentes, atualmente não existe uma única que caracterize adequadamente o comportamento do CRF. Isso se deve, principalmente, às diferenças nos modelos constitutivos propostos em cada documento (ÁLVAREZ *et al.*, 2010).

Apesar de não existir um procedimento mais preciso e adequado, nota-se, no capítulo 2 da presente dissertação, que os modelos constitutivos apresentam uma abordagem semelhante. Visto que a maioria das propostas são baseadas em diagramas constitutivos cujos parâmetros são identificados usando procedimentos de análise inversa calibrados com os resultados de ensaios à flexão. Contudo, ainda que semelhantes sob certos aspectos, apresentam diferenças no formato do diagrama e na definição dos parâmetros que podem levar a variações em suas previsões. Nessa perspectiva, um estudo comparativo sobre a capacidade dos modelos constitutivos em prever o comportamento de elementos de CRFA pode ser de grande interesse para identificar o procedimento mais adequado para simular o seu comportamento à tração pós-fissuração (ÁLVAREZ, 2013).

Também vale salientar que, atualmente, tem-se uma elevada variedade tanto de fibras disponíveis comercialmente quanto de concretos. Tal fato permite que, para um dado desempenho mecânico requerido, haja uma vasta possibilidade de CRF que pode ser utilizado. Em vista disso, destaca-se que tais materiais têm propriedades que além de serem capazes de

interferir notavelmente no desempenho mecânico do compósito, também se influenciam mutuamente. Nessa perspectiva, entende-se que compreender a relação desses fatores com a previsão dos comportamentos pelos modelos também representa uma importante questão em termos de projeto e controle de qualidade do CRF (GALEOTE *et al.*, 2020).

Diante do exposto, articulou-se este capítulo que se centra na simulação da resposta à flexão de vigas padrões de ensaio de CRFA usando os principais modelos regulatórios a nível europeu (RILEM, MC2010 e CE2021). Para tanto, resultados experimentais de ensaios de vigas à flexão de 3 pontos, compostas por diferentes tipos de concretos e fibras, normatizados pela EN 14651 e disponíveis na literatura, foram estimados por meio de um modelo baseado na análise de seções transversais.

Dessa forma, foi possível realizar uma comparação entre os modelos constitutivos analisados e verificar sua precisão na previsão da resposta à flexão de vigas de ensaio de CRFA em cada caso de estudo. Além disso, foram avaliados possíveis fatores que influenciam no comportamento à flexão do CRFA estimado pelos modelos constitutivos. Com isso, tem-se a intenção de fornecer informações úteis aos projetistas para que possam selecionar, não apenas a lei constitutiva, mas também características de concretos e fibras mais apropriadas para atender aos requisitos mecânicos desejados para o CRFA em questão.

3.1.1 Objetivos

O objetivo deste capítulo é analisar a adequação de alguns modelos constitutivos presentes nos principais códigos e diretrizes de projeto europeus (RILEM, MC2010 e CE2021) quanto à previsão do comportamento à flexão simples de vigas padrões de ensaio de CRFA. Além disso, também se tem a intenção de avaliar possíveis parâmetros que podem influenciar as previsões feitas por esses modelos em relação a esse comportamento. Para atingir esse objetivo, serão recordados a seguir os objetivos específicos definidos para este capítulo:

- a) Desenvolver um algoritmo que reproduza o comportamento à flexão simples de vigas padrões de ensaio de CRFA, em termos de $F - CMOD$, utilizando o método de análise de seções;
- b) Verificar a precisão do modelo em prever a força de formação da fissuração e as forças correspondentes aos $CMOD_1$, $CMOD_2$, $CMOD_3$ e $CMOD_4$ em relação a ensaios experimentais realizados por terceiros;

- c) Identificar a lei constitutiva, dentre as estudadas, que melhor prevê o comportamento à flexão simples de vigas padrões de ensaio de CRFA, em termos de $F - CMOD$, utilizando o método de análise de seções; e
- d) Analisar estatisticamente a influência de um conjunto de parâmetros, composto pela resistência à compressão média da matriz, volume de fibras, razão de aspecto e resistência à tração última das fibras, na previsão da resposta $F - CMOD$ fornecida por cada um dos modelos constitutivos avaliados.

3.1.2 Resumo do capítulo

A seção 3.2 descreve a coleta de dados experimentais na literatura. Além disso, ilustra a configuração do elemento e do ensaio que foram utilizados como referência para o estudo, bem como, a relação para determinação das resistências à tração por meio dos valores de forças obtidos no ensaio. Na seção 3.3, é apresentado o desenvolvimento do modelo de análise de seções, incluindo as hipóteses, equações e estratégias empregadas para sua resolução. A seção 3.4 apresenta um panorama geral da metodologia aplicada na elaboração deste capítulo. Na seção 3.5, são expostos os resultados obtidos, incluindo a comparação entre os gráficos $F - CMOD$ obtidos pelo modelo e experimentalmente para diferentes volumes de fibras. Adicionalmente, é realizada uma análise detalhada de alguns parâmetros do CRF, a fim de avaliar suas respectivas influências no comportamento pós-fissuração previsto pelos modelos constitutivos. Por fim, na seção 3.6, são apresentadas as principais conclusões do estudo.

3.2 COLETA DE DADOS

3.2.1 Materiais

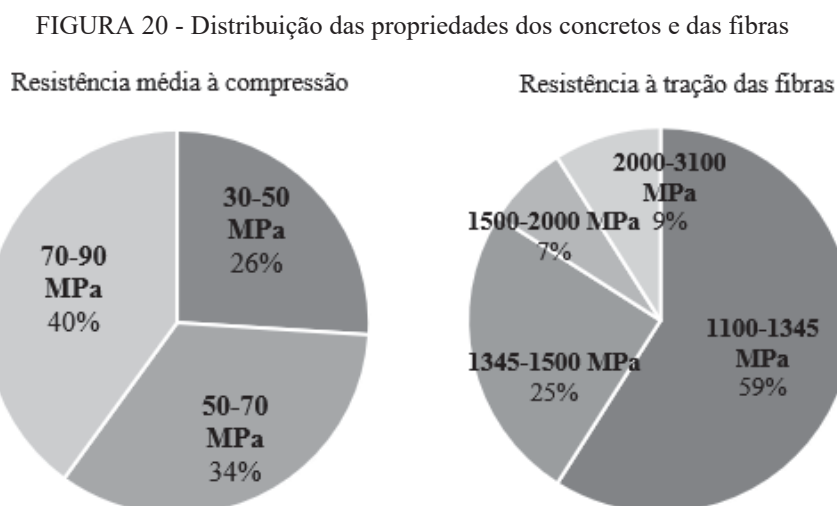
Foi utilizado um banco de dados abrangente, disponibilizado pela Universidade de Brescia e descrito por Tiberti *et al.* (2018), contendo informações sobre resistências pós-fissuração obtidas por meio de ensaios de viga à flexão por 3 pontos. Essa base de dados incluiu 81 séries de ensaios que totalizaram 528 vigas de CRFA. Além disso, foram incorporadas outras duas referências, conforme os trabalhos de Salvador (2012) e Trindade *et al.* (2020), cada uma contendo três séries de resultados, com o objetivo de aumentar a representatividade dos resultados. É importante destacar que, devido à maior disponibilidade de dados experimentais na literatura, as referências utilizadas se limitaram a vigas reforçadas apenas com fibras de aço.

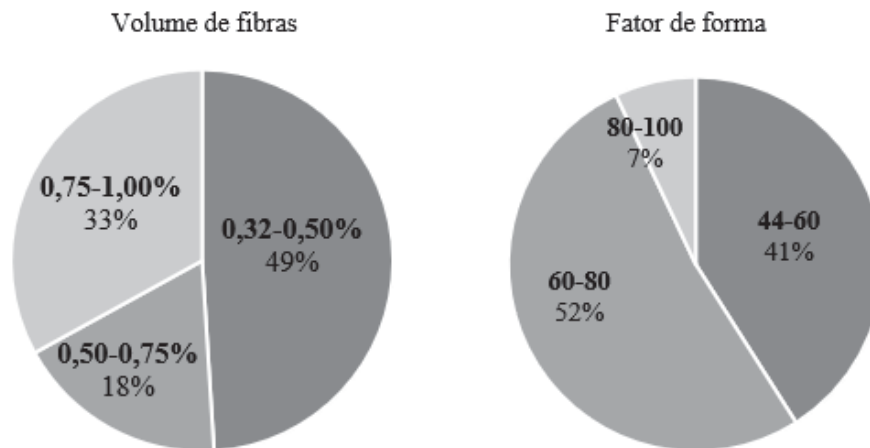
Foram coletados dados que abrangem uma ampla variedade de concretos, incluindo diferentes faixas de resistência à compressão do CRF, bem como frações de volume, fatores de forma e resistências à tração das fibras. Para uma melhor compreensão das características dos materiais utilizados neste estudo, apresenta-se a seguir um panorama geral dos dados coletados:

- a) Resistência à compressão média variando entre 30 a 90 MPa;
- b) Fração de volume das fibras entre 0,32% a 1%;
- c) Comprimento das fibras variando entre 30 e 80 mm;
- d) Diâmetro das fibras variando entre 0,3 mm a 1,0 mm;
- e) Relação de aspecto das fibras variando entre 44 e 100; e
- f) Resistência à tração da fibra variando entre 1100 a 3100 MPa.

Vale destacar que aproximadamente 74% dos concretos analisados apresentaram resistência média à compressão entre 50 e 90 MPa, enquanto apenas 26% exibiram comportamento de compressão entre 30 e 50 MPa. Com relação às fibras utilizadas, 59% possuíam resistência à tração de até ou equivalente a 1345 MPa, enquanto 41% apresentavam resistência variando entre 1345 e 3100 MPa. Quanto ao volume de fibras, 49% dos CRF possuíam volume inferior ou igual a 0,5%, enquanto os outros 51% possuíam volume entre 0,5% e 1%. No tocante ao fator forma, 41% dos concretos estavam na faixa de 44 a 60, enquanto os demais 59% apresentavam relação entre 60 e 100.

Para uma melhor visualização das informações descritas, a FIGURA 20 ilustra a distribuição das características do concreto e das fibras presente na base de dados utilizada nas análises.





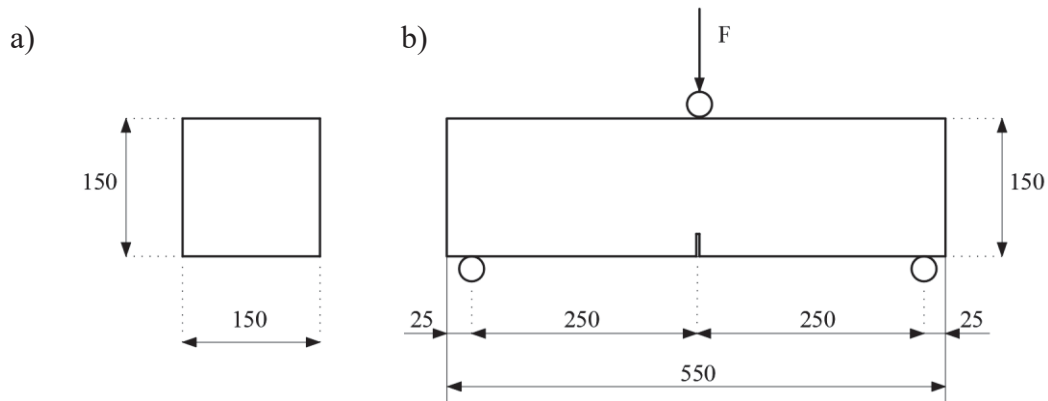
Fonte: A autora (2023).

A partir dos dados apresentados, analisou-se, além dos principais modelos constitutivos europeus, a resistência à compressão da matriz de concreto, assim como, o volume, o fator de forma e a resistência à tração das fibras, tendo em vista suas possíveis influências na resistência residual do CRFA.

3.2.2 Configuração do ensaio e corpos de prova

Os resultados dos ensaios, realizados pelos autores já citados, foram conduzidos sob uma configuração de flexão à 3 pontos de acordo com a norma EN 14651 (CEF, 2007). De modo geral, foram utilizadas vigas prismáticas de 450 mm e 500 mm de vão, comprimento total de 500 mm e 550 mm, respectivamente, seção transversal de 150 x 150 mm e um entalhe de 25 mm de profundidade localizado no meio vão da viga. A FIGURA 21 ilustra um exemplo da principal configuração utilizada. Nesse método de ensaio podem ser adotadas duas configurações de controle: por meio da medida da abertura do entalhe (*CMOD*) ou por meio da medida do deslocamento vertical do corpo de prova (δ). No presente estudo, optou-se por fazer a comparação com base na configuração de controle por meio da medida da abertura do entalhe.

FIGURA 21 - Viga submetida a esforços à flexão por 3 pontos a) seção transversal, b) esquema do ensaio



Fonte: Adaptado de EN 14651 (CEF, 2007).

A decisão de simular vigas padrão de ensaio foi motivada pela vasta quantidade de dados disponíveis na literatura, o que possibilita uma abordagem mais abrangente e precisa. Esse aspecto se torna ainda mais relevante ao conduzir uma análise estatística, a qual foi aplicada no presente capítulo com objetivo de identificar possíveis parâmetros que possam influenciar o comportamento previsto pelos modelos constitutivos.

3.2.3 Parâmetros pós-fissuração

O comportamento à tração do CRFA é expresso em termos de resistência à tração residual, conforme indicado na EQUAÇÃO 4.

$$f_{R,i} = \frac{3 \cdot F_i \cdot l}{2 \cdot b \cdot h_{sp}^2} \quad (4)$$

onde:

$f_{R,i}$ = tensão residual à tração na flexão correspondente ao $CMOD = CMOD_i$;

F_i = força aplicada medida no meio do vão do corpo de prova correspondente ao $CMOD = CMOD_i$;

l = vão livre de ensaio;

b = largura da seção transversal do corpo de prova; e

h_{sp} = altura de um corpo de prova padrão descontado o entalhe.

O limite de proporcionalidade é outro parâmetro importante usado no projeto de CRFA e pode ser determinado aplicando a EQUAÇÃO 5.

$$f_L = \frac{3 \cdot F_L \cdot l}{2 \cdot b \cdot h_{sp}^2} \quad (5)$$

onde:

f_L = tensão de limite de proporcionalidade; e

F_L = maior força aplicada no meio do vão do corpo de prova entre $0 \leq CMOD \leq 0,05$ mm.

3.3 PROCEDIMENTO ANALÍTICO

Neste capítulo, utilizou-se o método de análise de seções para prever o comportamento à flexão de vigas padrões de ensaio de CRFA. Para isso, elaborou-se um algoritmo em *Python* baseado em procedimentos semelhantes ao descritos por outros autores, dada a simplicidade e precisão fornecidas (GALEOTE *et al.*, 2020). Como resultado, foram gerados os diagramas $F - CMOD$ das seções críticas dos elementos analisados. Assim, torna-se possível prever a resposta não linear e compreender os comportamentos de fissuração e pós-fissuração de seções de CRFA.

Nos itens subsequentes, serão elucidados os princípios básicos e as premissas adotadas no método empregado, com o propósito de conferir uma perspectiva geral da sua implementação.

3.3.1 Hipóteses básicas

As seguintes hipóteses foram assumidas:

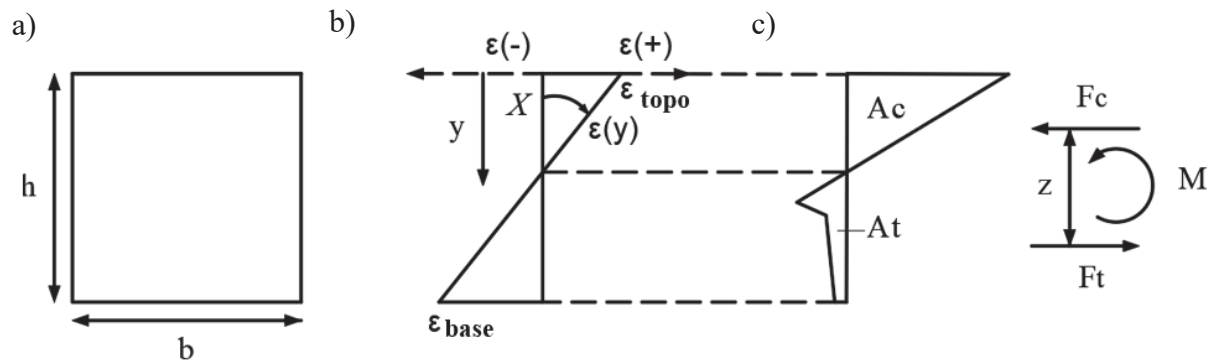
- a) As seções permanecem planas após o carregamento ou deformações impostas (hipótese de Navier-Bernoulli);
- b) Compatibilidade de deformações: presume-se uma ligação perfeita entre o concreto e as fibras;
- c) As tensões e distorções de cisalhamento são desprezíveis e não foram consideradas (hipótese de Euler-Bernoulli); e
- d) As forças internas são aplicadas no eixo simétrico da seção.

3.3.2 Seção idealizada

A FIGURA 22 apresenta uma representação esquemática da seção transversal do elemento em estudo (FIGURA 22a), da distribuição das deformações (FIGURA 22b) e das

tensões na seção (FIGURA 22c). Na análise, presumiu-se que as tensões localizadas na parte superior da seção se referem a tensões de compressão, enquanto as tensões localizadas na parte inferior dizem respeito a tensões de tração.

FIGURA 22 - Representação esquemática a) da seção, b) da distribuição das deformações, c) da distribuição das tensões



Fonte: A autora (2022).

Os modelos constitutivos RILEM, MC2010 e CE2021 foram utilizados para a simulação da resposta tensão-deformação das seções estudadas. Os diagramas das leis constitutivas e seus respectivos parâmetros podem ser encontrados na TABELA 3, apresentada no capítulo 2. A resposta do CRFA sob compressão bem como a resposta até a carga de pico da região tracionada da seção, são de natureza elástica e foram simuladas com o trecho linear que antecede a carga de fissuração dos modelos constitutivos. Para a simulação do comportamento pós-fissuração, foram utilizados os trechos não lineares dos modelos constitutivos considerados após a carga de pico.

3.3.3 Cálculo da abertura de fissura

Para elaborar o gráfico $F - CMOD$, a abertura de fissura foi obtida utilizando a deformação na camada inferior da seção e o comprimento característico, conforme formulação proposta pelo MC2010 que se encontra descrita na EQUAÇÃO 6.

$$w = l_{cs} \cdot \epsilon_{base} \quad (6)$$

onde:

w = abertura do entalhe;

l_{cs} = comprimento característico; e

ϵ_{base} = deformação à tração do CRFA na base seção.

Vale ressaltar que o comprimento característico é um indicador do espaçamento entre as fissuras, sendo seu valor influenciado por diversos fatores, como: tipo e volume das fibras, resistência da matriz, geometria da seção transversal, nível de carga (serviço, última), etc. Estudos na literatura revelam que não há um consenso claro para especificar o l_{cs} e pesquisadores utilizam diferentes critérios para determinar o seu valor (GALEOTE *et al.*, 2020; DE MONTAIGNAC *et al.*, 2012).

Neste estudo, foi considerada a recomendação do código do MC2010 ($l_{cs} = h_{sp}$), sendo h_{sp} a altura do corpo de prova descontado o entalhe. Para a viga padrão de ensaio, objeto de estudo deste trabalho, h_{sp} é de 125 mm $\pm$ 1 mm considerando amostras com 150 mm de altura.

3.3.4 Equilíbrio e compatibilidade

O equilíbrio entre as forças externas e internas é satisfeito por meio da imposição da EQUAÇÃO 7 e EQUAÇÃO 8. Além disso, conforme visto anteriormente, a hipótese de *Navier* e a condição de compatibilidade entre os diferentes materiais que compõem a seção foi considerada, por essa razão, também se utilizou da EQUAÇÃO 9 para resolução do problema.

$$N = F_t \cdot A_t = F_c \cdot A_c \quad (7)$$

$$M = F_t \cdot A_t \cdot z = F_c \cdot A_c \cdot z \quad (8)$$

$$\varepsilon_{(y)} = \varepsilon_{topo} - y \cdot \chi \quad (9)$$

onde:

N = força normal externa aplicada na seção transversal;

F_t = força resultante de tração na seção flexionada;

A_t = área da seção tracionada;

F_c = força resultante de compressão na seção flexionada;

A_c = área da seção comprimida;

z = braço de alavanca;

$\varepsilon_{(y)}$ = deformação ao longo da seção;

ε_{topo} = deformação à compressão do CRFA no topo seção;

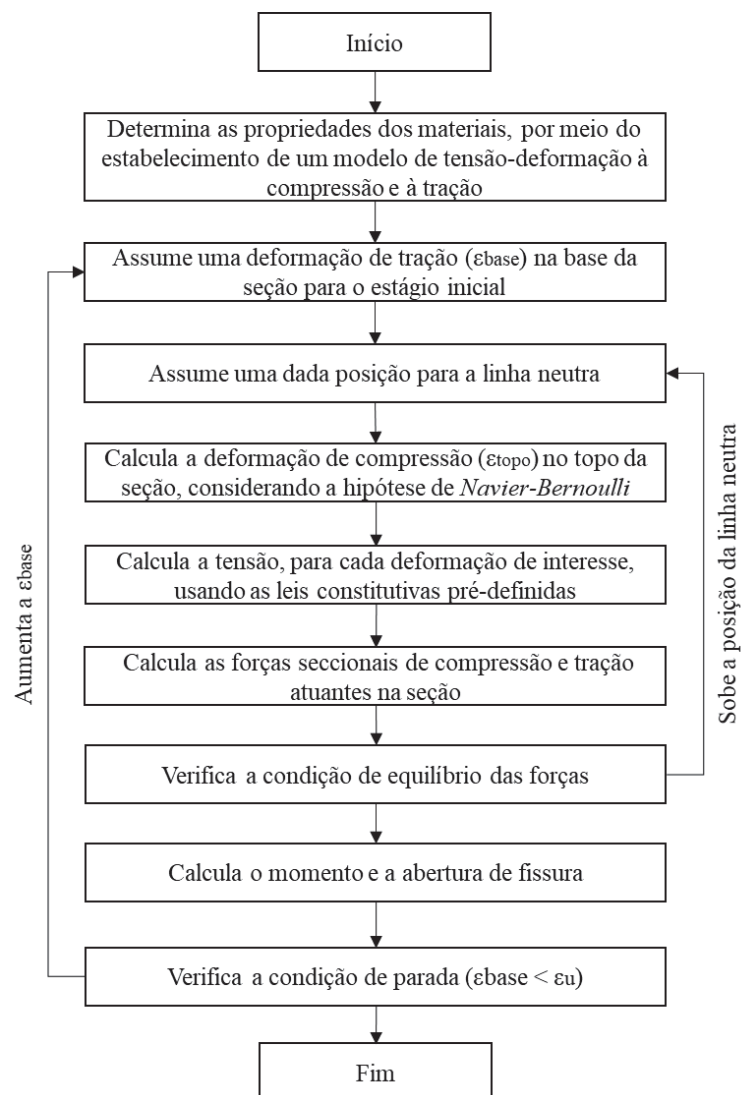
y = altura da linha neutra; e

χ = curvatura da seção.

3.3.5 Estratégia adotada para resolver o problema seccional

Com base em todas as informações apresentadas, é possível descrever o procedimento implementado para analisar a seção transversal dos elementos estudados, utilizando modelos constitutivos que descrevem o comportamento à tração do CRFA. Para facilitar a compreensão da sequência de etapas, a FIGURA 23 apresenta um fluxograma.

FIGURA 23 - Fluxograma do modelo analítico de seção transversal



Fonte: A autora (2023).

O modelo começa definindo as propriedades do CRFA à compressão e à tração por meio do estabelecimento de uma lei constitutiva pré-definida. Em seguida, a seção é analisada a partir de sua base, onde uma deformação de tração é assumida. Além da deformação na base,

presume-se, inicialmente, que a linha neutra está localizada no meio da seção. À medida que a deformação de tração na base aumenta, a linha neutra se move em direção ao topo, indicando que a seção se encontra mais tracionada que comprimida. Por fim, é calculada a deformação de compressão no topo da seção, utilizando as hipóteses de *Navier-Bernoulli* e de compatibilidade de deformações.

Logo após, calculam-se as tensões correspondentes às deformações de interesse com auxílio da equação constitutiva predefinida. Então, as forças são calculadas por meio da multiplicação das tensões encontradas pela área da seção correspondente e são consideradas aplicadas no centro de gravidade da área comprimida/tracionada. Então, verifica-se a condição de equilíbrio entre as forças resultante de compressão e tração. Se essa não for satisfeita, uma nova posição da linha neutra é assumida e iterada até que o equilíbrio seja verificado. Após o sucesso dessa etapa, pode-se calcular o momento fletor, multiplicando a resultante das forças pelo seu respectivo braço de alavanca, e a abertura de fissura na seção. Quando um resultado é alcançado, a deformação de tração é aumentada e o processo iterativo é reiniciado. Esse processo é repetido até que a seção perca o seu equilíbrio ao atingir a deformação última de tração estabelecida pela lei constitutiva em questão. Assim, é possível obter um gráfico $F - CMOD$ que descreva o comportamento à flexão de elementos de CRFA.

3.3.6 Validação dos resultados

Por fim, resultados de campanhas experimentais, extraídos da literatura, serão utilizados para validação do gráfico $F - CMOD$ obtido por meio do método de análise de seções. Para tanto, será realizado o cálculo do erro percentual, conforme EQUAÇÃO 10, para os cinco principais pontos resultantes do ensaio à flexão de 3 pontos (F_L , F_1 , F_2 , F_3 e F_4). Os erros foram previstos, portanto, para as cargas correspondentes aos $CMODs$ de 0.05 mm, 0.5 mm, 1.5 mm, 2.5 mm e 3.5 mm. O contraste dos valores de força obtidos experimentalmente com os fornecidos pelo modelo possibilitará avaliar as correlações obtidas e a viabilidade da utilização da metodologia estudada para fins de projeto. Além disso, o valor erro também será utilizado para avaliar a capacidade de alguns parâmetros predeterminados em influenciar o comportamento à flexão de vigas padrão de ensaio de CRFA, segundo cada um dos modelos constitutivos estudados.

$$Erro\ percentual = \frac{F_i - F_{exp}}{F_{exp}} \cdot 100 \quad (10)$$

onde:

F_i = força concentrada aplicada medida no meio do vão do corpo de prova correspondente ao $CMOD = CMOD_i$; e

F_{exp} = força proveniente de ensaios experimentais extraídos da literatura.

3.4 METODOLOGIA

O presente capítulo tem início com a coleta de dados de ensaios de vigas à flexão por 3 pontos de diferentes trabalhos disponíveis na literatura, a saber: Salvador (2012), Tiberti *et al.* (2018) e Trindade *et al.* (2020). Com base nesses dados, foi possível simular três equações constitutivas (RILEM, MC2010 e CE2021) utilizando o modelo de análise de seções desenvolvido conforme as hipóteses, equações e estratégias apresentadas no item 3.3. A seleção dos modelos para comparação foi realizada levando em consideração as principais propostas de leis constitutivas, em termos de $\sigma - \varepsilon$, que fossem baseadas no ensaio à flexão por três pontos, cuja configuração foi utilizada para implementar o modelo de análise das seções transversais.

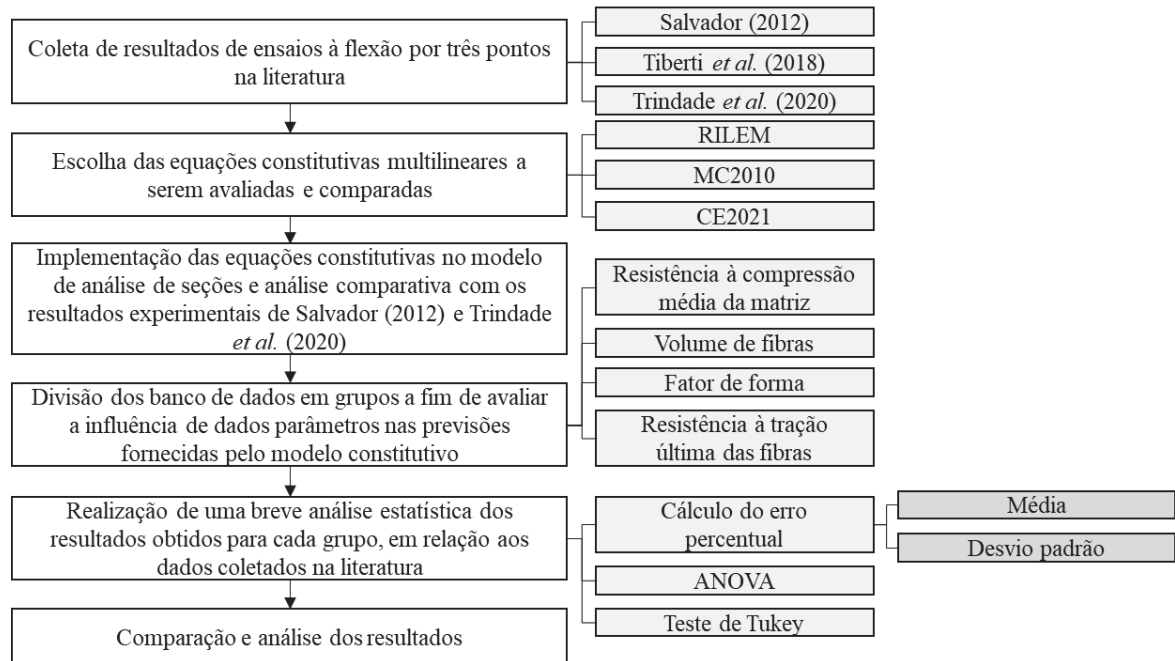
Após as simulações, realizou-se uma comparação dos resultados obtidos para cada equação com os resultados experimentais de Salvador (2012) e Trindade *et al.* (2020) para os três volumes de fibra estudados em cada trabalho. Tal análise permitiu avaliar a eficácia de cada lei constitutiva na reprodução dos dados experimentais.

Posteriormente, todo o banco de dados selecionado foi dividido em grupos de acordo com os seguintes parâmetros: resistência à compressão média da matriz, volume de fibras, fator de forma e resistência à tração última das fibras. O modelo foi rodado para todos os dados existentes e para cada uma das leis constitutivas em estudo. Com isso, foi possível conduzir uma breve análise estatística, por meio do cálculo da média, do desvio padrão e do erro percentual obtido para cada grupo em relação aos dados experimentais.

Adicionalmente, foi realizada uma análise estatística por ANOVA e teste de *Tukey*, que gerou gráficos estilo *box-plot* para avaliar a influência de cada parâmetro estudado na precisão obtida por cada equação constitutiva. Com essa abordagem, foi possível avaliar não só a eficácia dos modelos quanto à reprodução dos resultados experimentais, mas também a influência da variação dos parâmetros em suas previsões.

A FIGURA 24 apresenta um esquema que visa representar as etapas acima descritas, as quais serão concretizadas ao longo deste capítulo.

FIGURA 24 – Esquematisação do método proposto para o capítulo 3



Fonte: A autora (2022).

3.5 RESULTADOS

3.5.1 Análise comparativa dos modelos constitutivos

A TABELA 5 apresenta os dados de entrada utilizados no modelo de análise de seções transversais. Esses dados correspondem às informações relativas às características geométricas e aos resultados do ensaio de caracterização do elemento cujo comportamento será estimado, sendo apresentados para cada volume de fibra e referência estudada. Com essas informações, torna-se possível obter estimativas do comportamento $F - CMOD$ da peça de acordo com cada lei constitutiva.

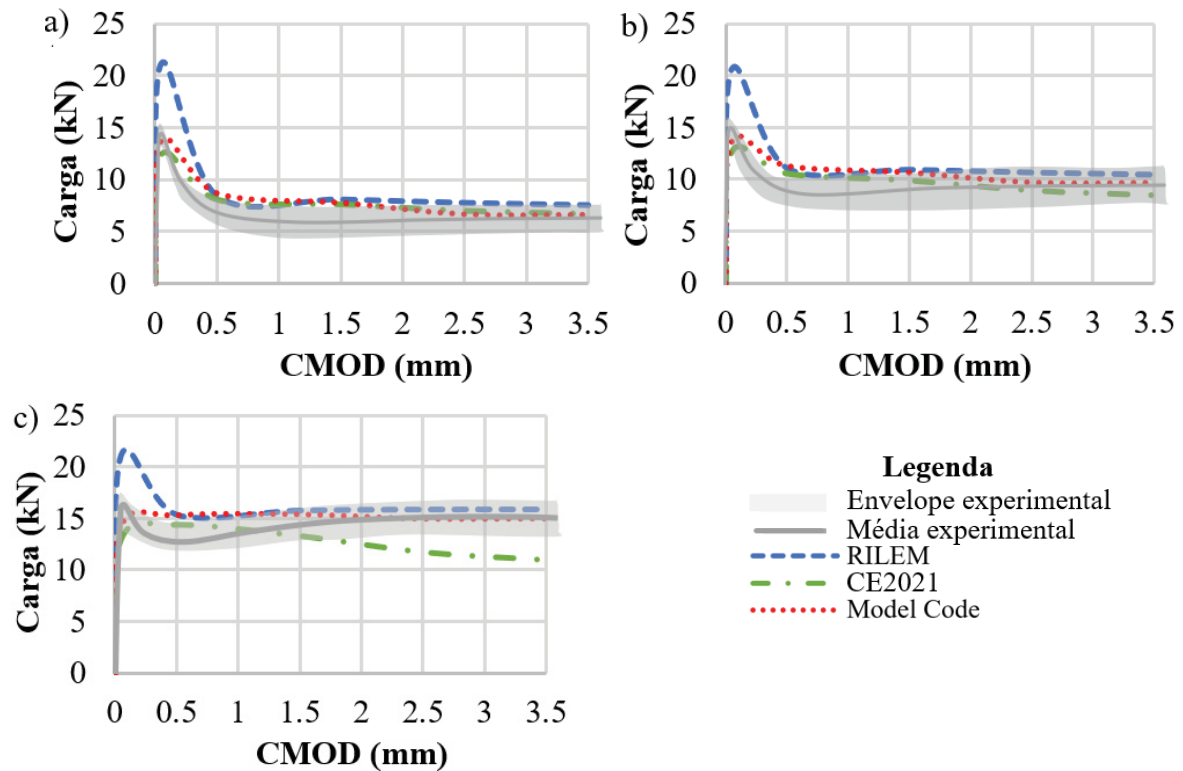
TABELA 5 – Dados de entrada no modelo

Referência	Salvador (2012)			Trindade et al. (2020)		
Volume de fibras (%)	0,19	0,32	0,45	0,19	0,38	0,58
b (cm)	15			15		
h (cm)	15			15		
h_{sp} (cm)	12,5			12,5		
l (cm)	45			50		
l_{cs} (cm)	12,5			12,5		
f_{ck} (MPa)	35,17	31,28	32,41	35		
f_{cm} (MPa)	35,5	32,1	32,9	43		
f_{R1} (MPa)	1,92	2,58	3,60	1,69	3,00	5,43
f_{R2} (MPa)	1,75	2,59	4,11	1,66	3,07	5,23
f_{R3} (MPa)	1,78	2,69	4,28	1,50	2,76	4,65
f_{R4} (MPa)	1,85	2,65	4,25	1,38	2,54	4,24

Fonte: A autora (2023).

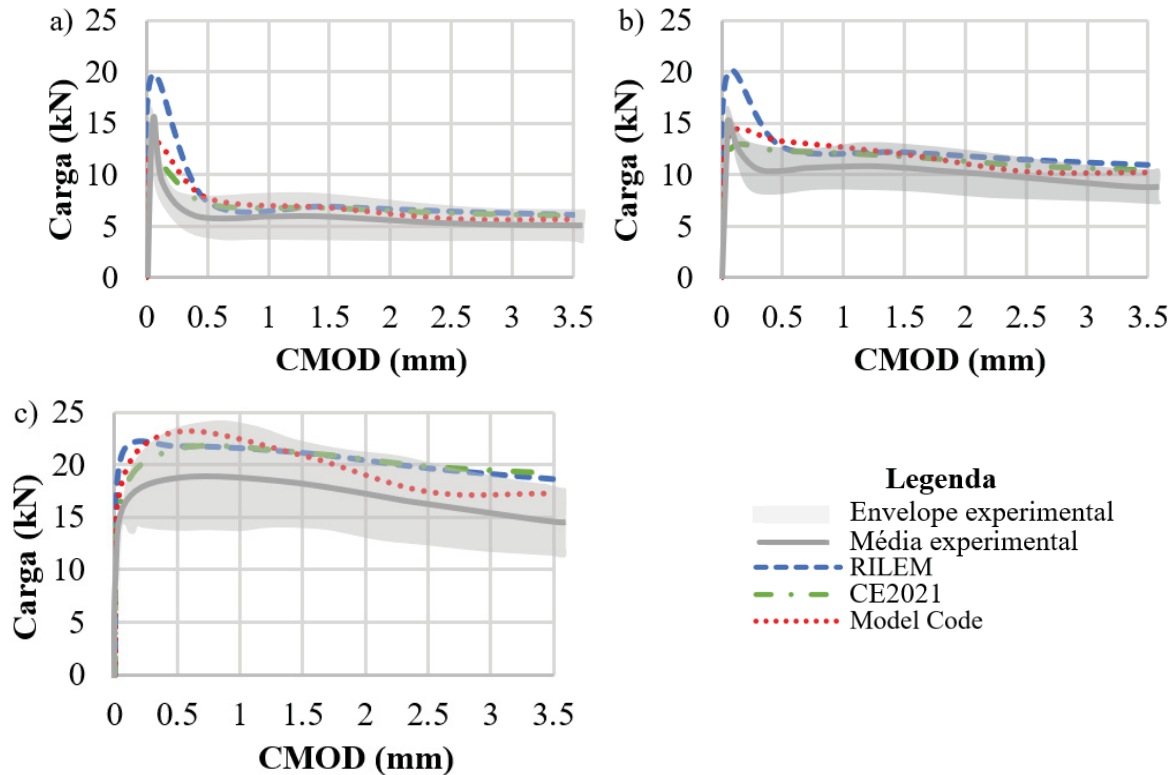
Com base nos dados fornecidos pela TABELA 5 foram gerados gráficos $F - CMOD$, que ilustram o comportamento de concretos reforçados com diferentes volumes de fibras de aço, tanto por meio de experimentos quanto por meio do modelo de análise de seções. A FIGURA 25 apresenta os resultados experimentais conduzidos por Salvador (2012), enquanto a FIGURA 26 se refere aos resultados obtidos por Trindade *et al.* (2020). Para cada um desses resultados, foram plotadas as curvas correspondentes aos diagramas multilíneares propostos pelas normativas RILEM, MC2010 e CE2021, com o objetivo de permitir uma melhor análise comparativa dos dados obtidos.

FIGURA 25 - Curvas de carga por abertura de fissura obtidas com base no trabalho de Salvador (2012) utilizando fibras de aço nas seguintes variações: (a) 0,19%, (b) 0,32% e (c) 0,45%



Fonte: A autora (2022).

FIGURA 26 - Curvas de carga por abertura de fissura obtidas com base no trabalho de Trindade *et al.* (2020) utilizando fibras de aço nas seguintes variações: (a) 0,19%, (b) 0,38% e (c) 0,58%



Fonte: A autora (2022).

Os valores dos parâmetros que definem cada um dos modelos constitutivos estudados são apresentados na TABELA 6. A notação utilizada corresponde à da TABELA 3. Cabe observar que a resistência de pico é σ_1 para todos os modelos, exceto o MC2010, no qual é representada por σ^* . Adicionalmente, deve-se ressaltar que não foram utilizados coeficientes parciais de segurança para obtenção de quaisquer valores de tensão e deformação.

TABELA 6 – Parâmetros dos modelos constitutivos

(continua)

Volume de fibras (%) / Referência	Modelos	σ_1 (MPa)	ε_1 (‰)	σ^* (MPa)	ε^* (‰)	σ_2 (MPa)	ε_2 (‰)	σ_u (MPa)	ε_u (‰)
0,19 (Salvador, 2012)	RILEM	5,67	0,18	-	-	0,86	0,28	0,68	25
	MC2010	2,91	0,10	3,23	0,15	0,95	0,15	0,50	20
	CE2021	3,03	0,10	-	-	0,86	0,20	0,60	20
0,32 (Salvador, 2012)	RILEM	5,24	0,17	-	-	1,16	0,27	0,98	25
	MC2010	2,69	0,10	2,99	0,15	1,24	0,15	0,82	20
	CE2021	2,80	0,10	-	-	1,16	0,20	0,75	20
0,45 (Salvador, 2013)	RILEM	5,37	0,17	-	-	1,62	0,27	1,57	25
	MC2010	2,75	0,10	3,06	0,15	1,66	0,15	1,42	20
	CE2021	2,87	0,10	-	-	1,62	0,20	0,94	20
0,19 (Trindade <i>et al.</i> , 2020.)	RILEM	5,65	0,17	-	-	0,76	0,27	0,51	25
	MC2010	2,90	0,09	3,22	0,15	0,84	0,15	0,41	20

TABELA 6 – Parâmetros dos modelos constitutivos

(conclusão)

Volume de fibras (%) / Referência	Modelos	σ_1 (MPa)	ε_1 (‰)	σ^* (MPa)	ε^* (‰)	σ_2 (MPa)	ε_2 (‰)	σ_u (MPa)	ε_u (‰)
0,19 (Trindade <i>et al.</i> , 2020.)	CE2021	3,02	0,1	-	-	0,76	0,20	0,54	20
0,32 (Trindade <i>et al.</i> , 2020)	RILEM	5,65	0,17	-	-	1,35	0,27	0,94	25
	MC2010	2,90	0,09	3,22	0,15	1,48	0,15	0,78	20
	CE2021	3,02	0,10	-	-	1,35	0,20	0,94	20
0,45 (Trindade <i>et al.</i> , 2020)	RILEM	5,65	0,17	-	-	2,44	0,27	1,59	25
	MC2010	2,90	0,098	3,22	0,15	2,73	0,15	1,24	20
	CE2021	3,02	0,10	-	-	2,44	0,20	1,78	20

Fonte: A autora (2023).

É possível perceber, por meio dos dados apresentados, que o modelo proposto pelo RILEM prevê valores de carga de fissuração (F_L) significativamente maiores em comparação com os demais modelos representados, conforme já havia sido observado por Álvarez *et al.* (2010). Essa diferença revela uma superestimação da resposta estrutural do elemento, para essa região do gráfico, por tal lei constitutiva. O CE2021, em contrapartida, apresenta valores de carga de fissuração menores que o RILEM e o MC2010, resultando em um comportamento mais conservador na fase de falha. Já o modelo proposto pelo MC2010 apresentou resultados para a carga de pico que, apesar de um pouco subestimados, foram os que mais se aproximaram dos valores encontrados pelas curvas médias experimentais em ambos os trabalhos utilizados com referência.

A equação que melhor prevê a carga resistida para uma abertura de fissura de 0.5 mm (F_1) foi a proposta pelo CE2021. De forma oposta, percebe-se que o modelo que pior prevê essa queda na capacidade resistente é o MC2010, dado os maiores valores apresentados pela equação nesse ponto do diagrama. Já o modelo RILEM se mostrou com resultados intermediários, se aproximando bastante da curva do CE2021. Embora os modelos CE2021 e RILEM se mostrem mais próximos da curva média, eles ainda preveem de forma insegura tal ponto do gráfico, visto que consideram que o material irá resistir a valores superiores aos que ele de fato suporta na prática.

No que diz respeito as cargas residuais (F_2 , F_3 e F_4), tem-se que a equação do MC2010 apresenta previsões que melhor se ajustam a resposta experimental. Visto que, para a maioria dos concretos analisados, o seu diagrama se mostrou, além de dentro dos limites do envelope experimental, próximo da curva média. O modelo do RILEM exibiu valores que, ainda que dentro do envelope experimental, são superiores aos valores médios. Já o modelo CE2021, na

FIGURA 25 apresenta estimativas menores que os demais modelos. Enquanto que, na FIGURA 26, seus valores se aproximam dos encontrados pelo modelo do RILEM, observando um comportamento que, contrariamente ao da FIGURA 25 se situa ligeiramente ao lado da insegurança. Assim, fica evidente que, a partir da análise desses dois trabalhos não foi possível identificar um padrão no comportamento das cargas residuais previstas pelo modelo CE2021.

Na FIGURA 26c, tem-se um concreto reforçado com um volume de fibras (0,58%) superior aos demais casos analisando, gerando, por consequência, uma curva força-abertura de fissura indicativa de comportamento *deflection-hardening*. Para esse caso, ficou claro que, no que tange a carga de pico, o modelo CE2021 apresentou as melhores previsões, considerando a maior proximidade com a curva média experimental. Em contrapartida, o modelo MC2010 exibiu valores de cargas residuais menores que o valor dos demais modelos, mostrando assim, uma previsão de comportamento mais assertiva para essa região do diagrama. Apesar de haverem modelos que se aproximam mais das médias encontradas experimentalmente em dados pontos do gráfico, cabe ressaltar que, para casos de comportamento *hardening*, todas as equações apresentaram comportamentos que tendem ao lado da insegurança.

3.5.2 Avaliação da influência de diferentes parâmetros nas previsões dos modelos constitutivos

A fim de melhor compreender as diferenças entre as campanhas experimentais coletadas na literatura e os resultados provenientes do modelo de análise de seções, realizou-se uma análise estatística. Para tanto, retirou-se do trabalho de Tiberti *et al.* (2018) valores de resistências residuais de 528 vigas padrões de CRFA com características de concreto e de fibras variáveis entre si. Em sequência, transformou-se os valores de resistência coletados em valores de carga (conforme EQUAÇÃO 4 e EQUAÇÃO 5) e, então, acrescentou a esse conjunto de dados os resultados experimentais obtidos por Salvador (2012) e Trindade *et al.* (2020).

Em seguida, os resultados dos ensaios de vigas padrões de CRFA obtidos nos trabalhos citados foram divididos em grupos com base na resistência média à compressão da matriz de concreto, volume de fibras, fator de forma e resistência última à tração das fibras. Os parâmetros selecionados são os mesmos discutidos por Tiberti *et al.* (2018). No entanto, esses autores examinaram a influência desses parâmetros no comportamento experimental do CRFA, enquanto, neste trabalho, o objetivo é analisar a influência de tais parâmetros nas previsões decorrentes das leis constitutivas estudadas. Para tanto, cada parâmetro foi dividido em dois grupos com quantidades de dados semelhantes, exceto pela resistência à compressão da matriz,

que foi dividida em concreto de baixo e alto desempenho. Os detalhes da segmentação dos dados podem ser encontrados na TABELA 7.

TABELA 7 – Classificação da base de dados

Parâmetro	Grupo 1	Grupo 2
Resistência à compressão média da matriz (MPa)	≤ 50	> 50
Volume de fibras (%)	≤ 0.5	> 0.5
Fator de forma	≤ 60	> 60
Resistência à tração última das fibras (MPa)	≤ 1345	> 1345

Fonte: A autora (2023).

Tal partição tem a intenção de propiciar uma discussão organizada da influência de tais parâmetros na previsão dos modelos quanto às cargas resistidas pelo CRFA. Essa análise será conduzida examinando as discrepâncias entre as previsões das leis constitutivas e os dados experimentais, o que será realizado para para ambos os grupos de cada parâmetro. Para tanto, realizou-se, primeiramente, para cada uma das classificações, o cálculo do erro percentual conforme EQUAÇÃO 10, para os cinco principais pontos resultantes dos ensaios à flexão de 3 pontos (F_L , F_1 , F_2 , F_3 e F_4).

A TABELA 8 apresenta as médias e desvios padrões (entre parênteses ao lado da média) dos erros percentuais calculados, para os principais pontos do gráfico, de todos os grupos de parâmetros (TABELA 7).

TABELA 8 - Erro percentual médio e desvio padrão de cada modelo constitutivo para os principais pontos do gráfico $F - CMOD$, considerando as diferentes classificações realizadas

(continua)

Identificação		F_{lop}	F_1	F_2	F_3	F_4
≤ 50 MPa	RILEM	0,40 (0,14)	0,20 (0,05)	0,16 (0,08)	0,18 (0,1)	0,24 (0,1)
	MC2010	-0,01 (0,14)	0,17 (0,04)	0,13 (0,15)	0,15 (0,25)	0,21 (0,29)
	CE2021	0,09 (0,14)	0,25 (0,04)	0,15 (0,07)	0,07 (0,04)	0,18 (0,08)
> 50 MPa	RILEM	0,56 (0,15)	0,19 (0,04)	0,1 (0,06)	0,1 (0,06)	0,18 (0,07)
	MC2010	0,04 (0,14)	0,15 (0,03)	0,02 (0,10)	-0,03 (0,16)	0,02 (0,20)
	CE2021	0,08 (0,16)	0,22 (0,04)	0,09 (0,06)	0,03 (0,03)	0,13 (0,06)
$\leq 0.5\%$	RILEM	0,54 (0,16)	0,23 (0,04)	0,12 (0,08)	0,12 (0,08)	0,20 (0,12)
	CE2021	-0,02 (0,13)	0,18 (0,03)	0,05 (0,14)	-0,01 (0,19)	0,04 (0,24)
	MC2010	0,03 (0,15)	0,26 (0,04)	0,11 (0,08)	0,04 (0,04)	0,14 (0,08)
$> 0.5\%$	RILEM	0,47 (0,15)	0,17 (0,03)	0,11 (0,05)	0,13 (0,07)	0,20 (0,08)
	CE2021	0,05 (0,11)	0,13 (0,02)	0,05 (0,10)	0,04 (0,18)	0,10 (0,24)
	MC2010	0,12 (0,15)	0,21 (0,03)	0,10 (0,05)	0,04 (0,03)	0,15 (0,07)

TABELA 8 - Erro percentual médio e desvio padrão de cada modelo constitutivo para os principais pontos do gráfico $F-CMOD$, considerando as diferentes classificações realizadas

(conclusão)

Identificação		F_{lop}	F_1	F_2	F_3	F_4
≤ 60	RILEM	0,47 (0,14)	0,20 (0,04)	0,13 (0,06)	0,14 (0,08)	0,23 (0,09)
	CE2021	-0,04 (0,09)	0,16 (0,03)	0,09 (0,13)	0,06 (0,18)	0,16 (0,27)
	MC2010	0,02 (0,13)	0,25 (0,04)	0,13 (0,06)	0,06 (0,04)	0,17 (0,08)
> 60	RILEM	0,55 (0,19)	0,19 (0,05)	0,1 (0,07)	0,11 (0,08)	0,17 (0,08)
	CE2021	0,06 (0,13)	0,15 (0,04)	0,02 (0,12)	-0,02 (0,19)	0,03 (0,23)
≤ 1345 MPa	RILEM	0,49 (0,18)	0,21 (0,04)	0,16 (0,08)	0,16 (0,09)	0,23 (0,09)
	CE2021	-0,04 (0,11)	0,17 (0,03)	0,11 (0,14)	0,10 (0,23)	0,15 (0,26)
	MC2010	0,02 (0,11)	0,26 (0,04)	0,15 (0,07)	0,06 (0,04)	0,17 (0,08)
> 1345 MPa	RILEM	0,55 (0,16)	0,19 (0,03)	0,08 (0,05)	0,08 (0,05)	0,15 (0,06)
	CE2021	0,04 (0,13)	0,14 (0,03)	-0,02 (0,09)	-0,1 (0,14)	-0,06 (0,18)
	MC2010	0,08 (0,17)	0,21 (0,03)	0,07 (0,05)	0,02 (0,03)	0,11 (0,07)

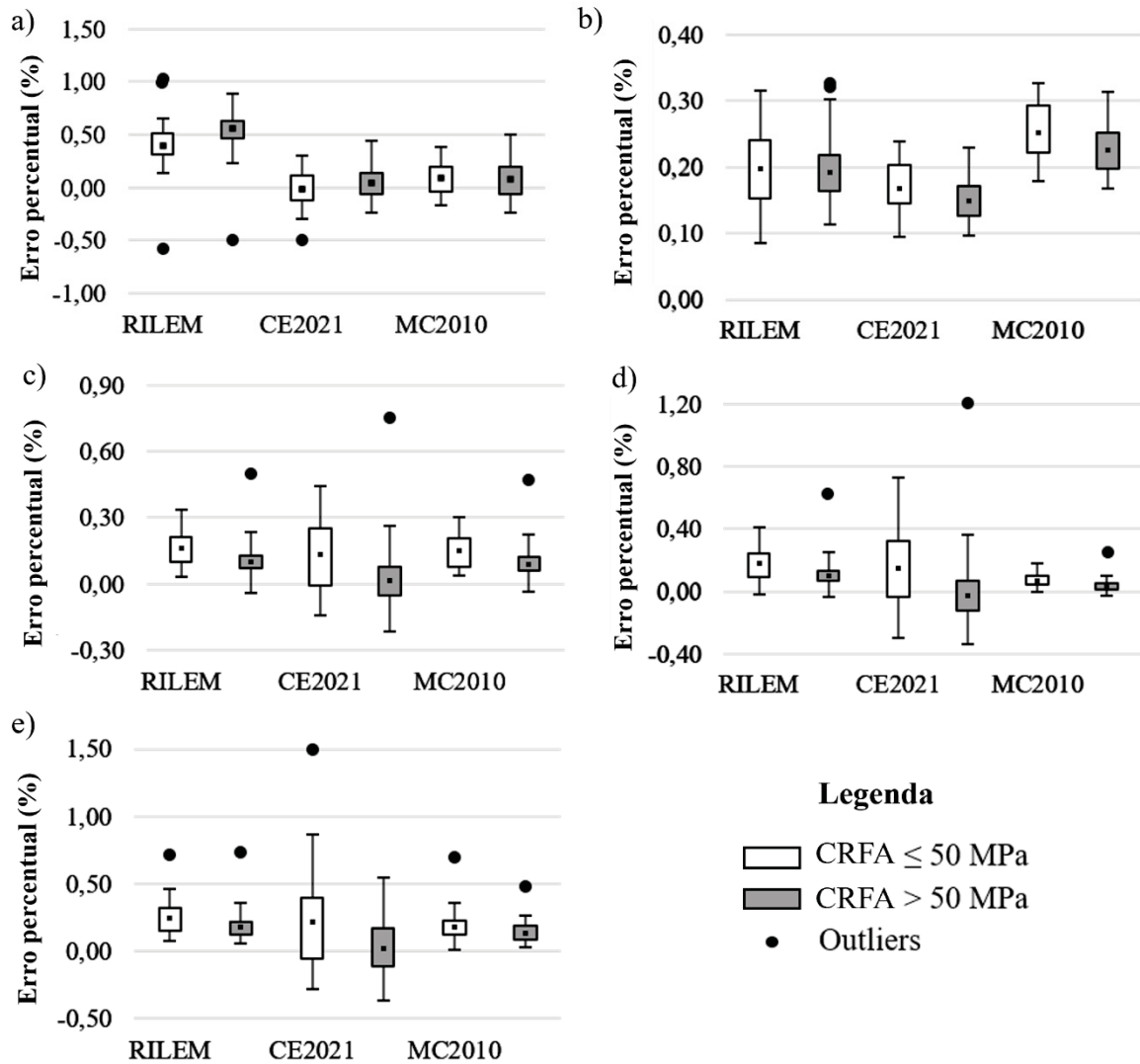
Fonte: A autora (2023).

Em complemento a TABELA 8, realizou-se ANOVA e teste de *Tukey* com objetivo de avaliar se os valores de erros obtidos, considerando a divisão dos grupos, foram estatisticamente significativos entre os modelos e em relação a ele próprio. Nessa perspectiva, plotaram-se gráficos *box-plot* para os cinco principais pontos resultantes dos ensaios à flexão de 3 pontos. Em cada gráfico, são apresentados os valores de erros percentuais obtidos por cada modelo, considerando a divisão da TABELA 7, para toda a base de dados estudada. Na análise do erro médio, foram excluídos os resultados que se destacaram significativamente em relação aos demais, os quais foram representados nos gráficos como *outliers*, a fim de evitar distorções nos resultados.

Os gráficos *box-plot* para cada parâmetro estudado, ou seja, para a resistência média à compressão da matriz, para o volume de fibras, para o fator de forma e para a resistência à tração última das fibras, se encontram ilustrados na FIGURA 27, FIGURA 28, FIGURA 29 e FIGURA 30, respectivamente.

Resistência média à compressão da matriz

FIGURA 27 - Box-plot dos erros percentuais, considerando diferentes resistências à compressão média da matriz, para os valores de carga correspondentes aos seguintes *CMODs*: a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm



Fonte: A autora (2023).

Verificou-se, pelo teste ANOVA, que todos os valores de carga, ilustrados na FIGURA 27, apresentam diferença, do ponto de vista estatístico, na previsão realizada por cada um dos modelos em estudo ($p\text{-valor} \leq 7,395E-06$ em todas as comparações ANOVA). Ou seja, para a divisão realizada, tendo como base a resistência média à compressão da matriz ($CRFA \leq 50$ MPa e $CRFA > 50$ MPa), as leis constitutivas apresentaram estimativas de valores de carga, para cada abertura de fissura, que se diferem consideravelmente entre si.

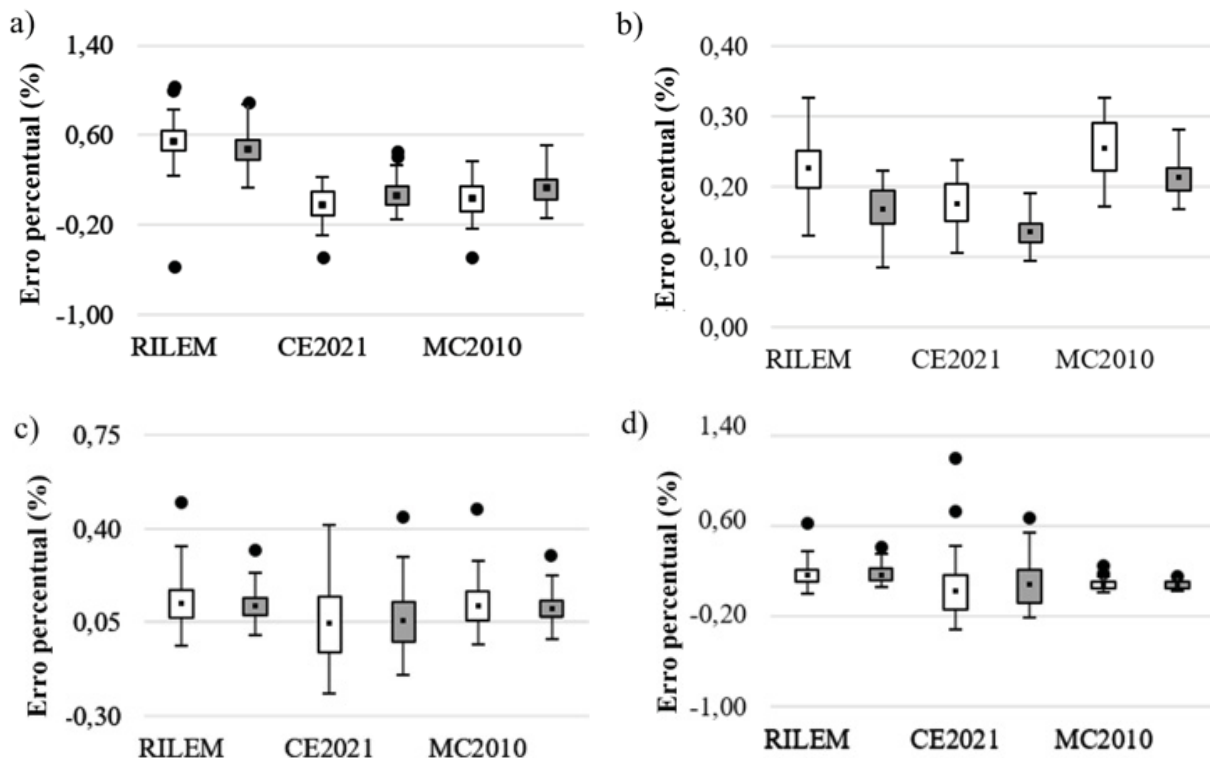
No que diz respeito a carga de pico (FIGURA 27a), tem-se que, segundo o teste Tukey, o modelo do RILEM se mostrou distinto em relação aos demais modelos estudados e em relação

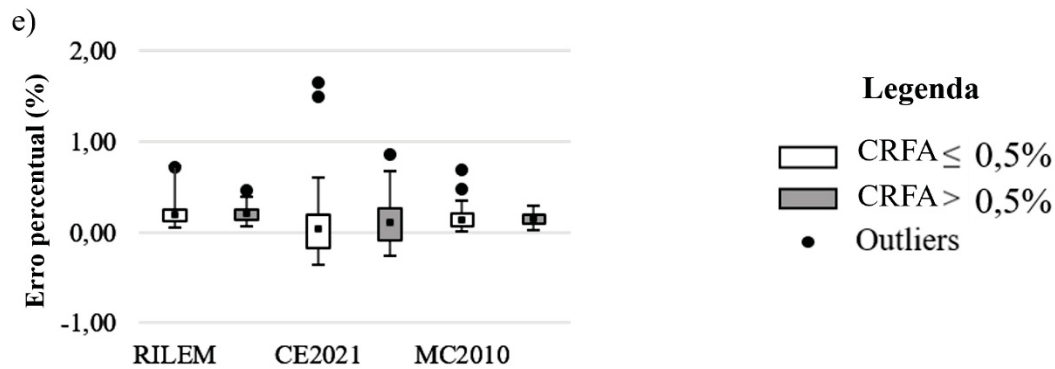
a ele mesmo quando separado em grupos diferentes de resistência à compressão da matriz (p -valor $\leq 0,002731$). Os demais modelos não se mostraram significativamente diferentes nas divisões de grupo. Analisando a TABELA 8, tem-se que o modelo do RILEM apresentou resultados médios de erros menores para concretos com resistências inferiores a 50 MPa. Já os modelos MC2010 e CE2021 apontaram um valor de erro médio e desvio padrão semelhante para ambos os grupos, mostrando que suas previsões para a carga de fissuração não são, de fato, relevantemente influenciadas por tal parâmetro.

Em relação as cargas residuais (FIGURA 27b a FIGURA 27e), de acordo com o teste de Tukey, apenas o modelo CE2021 se mostrou estatisticamente diferente para a divisão de grupos realizada (p -valor $\leq 2,255E-4$). Tal lei constitutiva também apresentou as maiores diferenças nos valores de erro em relação aos outros dois modelos estudados. Ainda, verificou-se, pela TABELA 8, que todos os modelos demonstram melhores resultados para as cargas residuais, tanto de erro médio quanto de desvio padrão, para concretos com resistências superiores a 50 MPa.

Volume de fibras

FIGURA 28 - *Box-plot* dos erros percentuais, considerando diferentes volumes de fibras, para os valores de carga correspondentes aos seguintes *CMODs*: a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm





Fonte: A autora (2023).

O ANOVA indicou que todos os pontos, com exceção do F_4 (p-valor = 0,133), obtiveram valores de erro estatisticamente diferentes entre os modelos. Vale salientar que as cargas F_2 e F_3 apresentaram p-valores (0,01164 e 0,002532, respectivamente) que, apesar de ainda indicarem diferença estatística, foram bastante elevados em comparação com os obtidos para F_1 e F_{LOP} (p-valor $\leq 8,287E-47$), demonstrando, portanto, uma baixa divergências nas respostas dos modelos, para as cargas F_2 e F_3 , quando frente a variações no volume de fibras. A análise realizada pode ser melhor visualizada por meio da FIGURA 28.

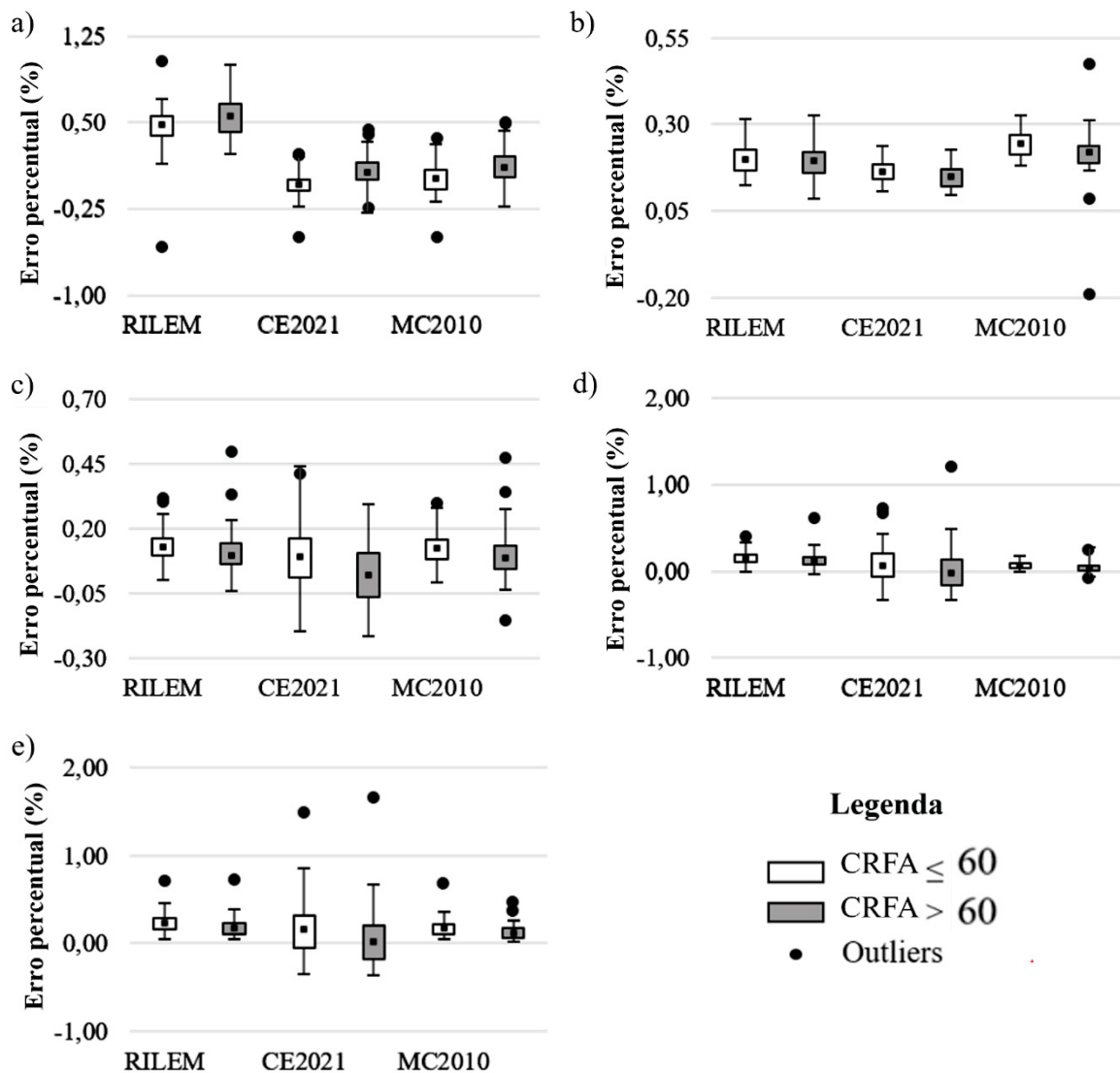
Em relação a carga F_L (FIGURA 28a), observa-se que, tanto os concretos com volume inferior a 0,5% quanto superior, foram melhores previstos pelos modelos CE2021 e MC2010. Apesar disso, nota-se que a previsão do modelo do RILEM indica leves sinais de melhora com aumento do volume de fibras, contrariamente aos outros dois modelos que tem menores valores de erro para volumes mais baixos de fibras. Os resultados do teste de Tukey, confirmam que, para a carga de fissuração, realmente há diferença estatística entre os erros calculados para os modelos CE2021 e MC2010 em relação aos do RILEM (p-valor = 0). Apesar da diferença entre os modelos, não se foi verificado, no teste Tukey, influência da variação do volume de fibras na previsão da carga de fissuração pelos modelos.

Ao analisar a TABELA 8, verifica-se que as cargas residuais não apresentaram uniformidade nos resultados obtidos. Para F_1 e F_2 , concretos com volume acima de 0,5% apresentaram maiores precisões. Enquanto que, para F_3 e F_4 , os valores de erros se mostraram bastante semelhantes. No teste de Tukey, as cargas F_2 e F_4 não apresentaram diferenças estatística entre os modelos. Já a carga F_3 demonstrou uma pequena diferença apenas entre o modelo CE2021 e o RILEM (p-valor $< 0,033$). Sendo as maiores discrepâncias verificadas para as cargas F_1 , onde o modelo do RILEM se diferente dos demais e em relação a ele mesmo na divisão de grupos. Os demais modelos também diferem entre si na divisão de grupos para a

carga F_1 (p-valor $\leq 9,542\text{E-}05$ no teste de Tukey). Tal discussão também pode ser verificada na FIGURA 28b a FIGURA 28e.

Fator de forma

FIGURA 29 - Box-plot dos erros percentuais, considerando diferentes fatores de forma, para os valores de carga correspondentes aos seguintes *CMODs*: a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm



Fonte: A autora (2023).

Em relação ao ANOVA, os modelos constitutivos se mostraram com previsões estatisticamente diferentes para todos os valores de carga, sendo menor o p-valor encontrado para as cargas F_4 e F_2 (0,001322 e 0,0003918, respectivamente). Isso indica que, há uma diferença nas previsões dos modelos, bem como, uma possível influência do fator de forma na

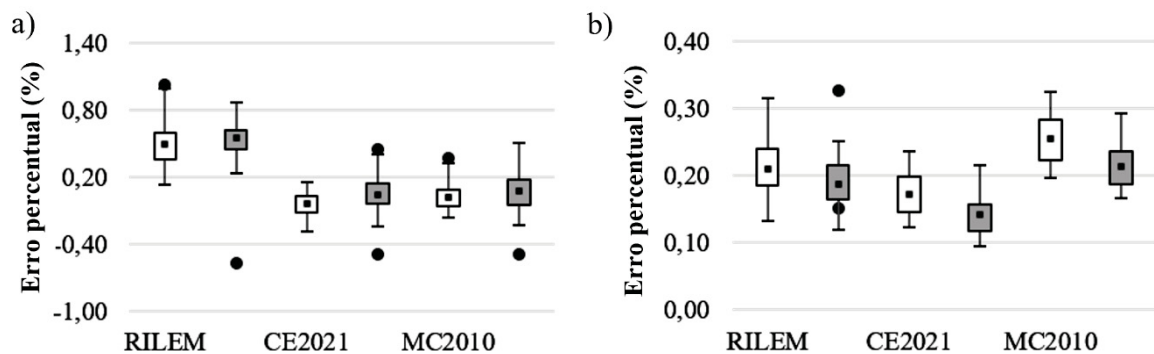
força resistida pelo CRFA para cada abertura de fissura, conforme pode ser observado na FIGURA 29.

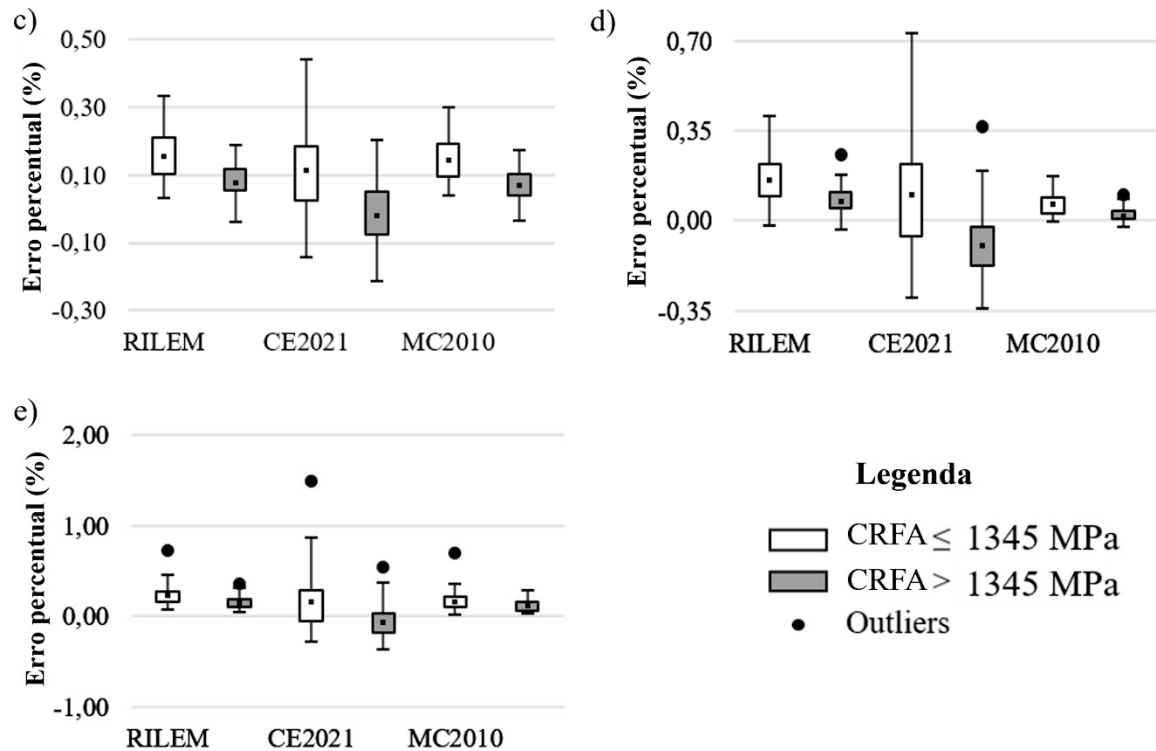
Vale salientar que, conforme pode ser observado na FIGURA 29a, todos os modelos em análise foram mais precisos em prever as cargas de fissuração de concretos reforçados com fibras de fator de forma menor que 60. Em complemento a isso, o teste Tukey apontou que o modelo do RILEM, para a carga de pico, se difere dos demais modelos estudados, porém não se diferencia estatisticamente em relação a si mesmo frente à variação do fator de forma. Já os demais modelos, MC2010 e CE2021, apresentaram uma leve diferença estatística com a divisão dos grupos segundo fator de forma ($p\text{-valor} \leq 0,04489$).

Em contrapartida, conforme a TABELA 8, as cargas residuais foram melhores previstas, em 100% dos casos, para concretos reforçados com fibras de fator forma superior a 60 (FIGURA 29b a FIGURA 29e). Além disso, no teste de Tukey, todas as cargas residuais apontaram diferenças estatísticas entre os modelos CE2021 e RILEM ($p\text{-valor} \leq 0,02591$). Na análise do teste Tukey para a carga F_1 , todos os modelos mostraram diferença estatística entre si, porém não em relação a eles mesmos. E, o único ponto em que algum modelo se mostrou influenciado pelo fator de forma, foi para a carga F_4 , onde, segundo o teste de Tukey, o modelo CE2021 apresenta diferença com a divisão do grupo ($p\text{-valor} = 0,03092$).

Resistência à tração última da fibra

FIGURA 30 - *Box-plot* dos erros percentuais, considerando diferentes resistências à tração das fibras, para os valores de carga correspondentes aos seguintes *CMODs*: a) 0,05 mm, b) 0,5 mm, c) 1,5 mm, d) 2,5 mm, e) 3,5 mm





Fonte: A autora (2023).

O ANOVA indica que, para todos os valores de carga estudados, há diferença estatística entre as previsões realizadas por cada uma das leis constitutivas em estudo (p -valor $\leq 1,45E-09$), de acordo com o ilustrado na FIGURA 30.

Em relação a carga de fissuração (FIGURA 30a), no teste Tukey, o modelo do RILEM se mostrou estatisticamente diferente tanto do MC2010 quanto do CE2021 (p -valor = 0), no entanto, não apresentou grande divergência nas previsões com a variação da resistência à tração última das fibras. Os demais modelos também não se mostraram influenciados pela variação do parâmetro estudado para a carga de pico. Além disso, por meio da TABELA 8, foi possível verificar que as fibras de menor resistência apresentaram maior precisão na previsão da carga de fissuração, fato que também pode ser observado na FIGURA 30a.

As cargas residuais se mostraram bastante afetadas pela variação da resistência à tração das fibras (FIGURA 30b a FIGURA 30e). Prova disso é que, segundo o teste Tukey, em todas as cargas residuais, o modelo CE2021 apresentou diferenças nas previsões com a alteração da resistência à tração última da fibra (p -valor $\leq 0,01578$). Para a carga F_1 , além do CE2010, o MC2010 também apresentou divergências nos resultados com a divisão de grupos. E, para a carga F_2 todos os modelos se mostraram influenciados pela alteração da resistência da fibra. Em relação as previsões dos modelos como um todo, sem levar em consideração a divisão de

grupos conforme a resistência à tração última da fibra, o teste Tukey indicou, de modo geral, diferenças estatísticas ($p\text{-valor} \leq 0,04991$).

Cabe também destacar que, para as cargas residuais, os modelos mostraram, para todos os casos, menores valores de erro e de desvio padrão para concretos reforçados com fibras de resistência superior a 1345 MPa. Portanto, entende-se que os modelos estudados são melhores em prever as cargas residuais de concretos reforçados com fibras de maiores resistências à tração. Porém, no que diz respeito a carga de fissuração, fibras com menores resistências apresentaram desempenho superior na previsão fornecida pelas leis constitutivas.

3.6 CONCLUSÕES FINAIS

Com base nos resultados e nas discussões apresentadas, as seguintes conclusões podem ser destacadas, a respeito da comparação entre as leis constitutivas:

- a) No que diz respeito a carga de fissuração (F_L), o RILEM previu valores superestimados, o CE2021 apresentou um comportamento mais conservador e o MC2010 foi o modelo que mais se aproximou das curvas médias experimentais;
- b) A equação que melhor previu a carga resistida para uma abertura de fissura de 0.5 mm (F_1) foi a proposta pelo CE2021, sendo o MC2010 o que pior previu essa queda na capacidade resistente, enquanto o RILEM se mostrou com resultados intermediários;
- c) Em relação as cargas residuais (F_2 , F_3 e F_4), tem-se que a equação do MC2010 apresenta as previsões que melhor se ajustam a resposta experimental. O RILEM exibiu valores superiores aos valores médios. E, para o CE2021, não foi possível identificar um padrão de comportamento a partir dos dados analisados; e
- d) Para um CRFA com curva *deflection-hardening*, a carga de pico foi melhor estimada pelo CE2021, enquanto o MC2010 exibiu as melhores aproximações em relação as cargas residuais. Porém, para a situação de *hardening*, vale destacar que todas as equações apresentaram comportamentos que tendem ao lado da insegurança.

Com relação aos parâmetros capazes de influenciar a resposta à tração do CRFA, evidenciam-se as conclusões que seguem:

- a) A resistência média à compressão da matriz apresenta influência de forma relevante no resultado quando utilizado o modelo do RILEM para previsão da carga de fissuração e quando utilizado CE2021 para previsão das cargas residuais. Os demais modelos se

apresentaram poucos influenciados pela variação de tal parâmetro. Apesar disso, verificou-se melhora sutil na capacidade de previsão das cargas residuais para concretos de alta resistência e da carga de fissuração quando simulados concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa;

- b) Em relação ao volume de fibras, tem-se que, para as cargas residuais, com exceção da F_1 , os modelos não apresentaram relevantes diferenças nas previsões realizadas, se provando, portanto, pouco influenciáveis por tal parâmetro. Já a carga de fissuração, apresentou diferenças significativas nos resultados previstos entre os modelos, porém, a diferença em relação a divisão de grupos conforme volume de fibras se mostrou pouco significativa. Assim, entende-se que o volume de fibras é capaz de influenciar a previsão do ponto logo após a carga de fissuração (F_1), sendo as demais cargas pouco influenciáveis pela sua variação;
- c) O fator de forma se mostrou pouco capaz de interferir, na carga de fissuração, visto que apenas os modelos MC2010 e CE2021 apresentaram uma variação de erro não muito significativa. No que diz respeito as cargas residuais, não foi observada influência considerável das previsões dos modelos com a variação do fator de forma. Apesar de não haver impacto significativo na resposta, a carga de fissuração é melhor estimada para fatores de forma < 60 , enquanto que as cargas residuais apresentam melhores resultados para fatores de forma > 60 ; e
- d) A resistência à tração última das fibras se revelou um parâmetro capaz de influenciar de forma relevante os resultados de carga resistida pelo CRFA. Visto que, observaram-se diferentes valores de erro encontrados, para um mesmo modelo, apenas variando a resistência à tração. Com destaque para o modelo CE2021, que foi o mais suscetível a variação desse parâmetro.

4 COMPORTAMENTO À FLEXÃO SIMPLES DE ELEMENTOS UNIDIRECIONAIS DE CRFA ATÉ A CARGA ÚLTIMA

4.1 INTRODUÇÃO

Na engenharia civil, a utilização de elementos finitos unidimensionais é uma prática comum em análises estruturais. Ainda que análises sofisticadas requeiram recursos computacionais mais avançados, a simplicidade e eficiência desta técnica a mantêm em uso. No entanto, para melhorar a precisão e adequação dos resultados obtidos, pesquisadores têm proposto aprimoramentos que visem refletir com maior fidelidade a realidade a ser simulada. Esses avanços permitem que os engenheiros realizem simulações mais precisas e apropriadas do ponto de vista estrutural (IMAI, 2018).

Para assegurar uma análise mais acurada, é imperativo considerar a não linearidade física do material, o que muitos estudos realizam ao adotar a técnica de discretização dos elementos em camadas. Essa abordagem de segmentação da seção transversal oferece diversas vantagens. Primeiramente, cada camada pode apresentar seu próprio estado de tensão e ser danificada de forma distinta, permitindo, assim, um resultado mais preciso. Ademais, é possível utilizar qualquer tipo de seção transversal verticalmente simétrica e distribuir as armaduras, caso existam, em qualquer posição desejada na seção transversal. Por fim, a verificação da linha neutra pode ser atualizada em cada etapa, possibilitando uma avaliação contínua e precisa da estrutura em análise (IMAI *et al.*, 2023).

Com base no exposto, foi desenvolvido um código computacional em *Python* para prever o comportamento de elementos unidirecionais de CRFA sob flexão simples até a carga última. O código utiliza um esquema de carregamento incremental e a técnica iterativa de *Newton-Raphson*, associadas a teoria de vigas laminadas de Euler-Bernoulli, tendo como referência o trabalho de Abeche (2015). Dois exemplos foram utilizados para validar essa abordagem: o primeiro é uma laje fina testada por Di Prisco *et al.* (2008), e o segundo é um elemento de laje ensaiado no laboratório da Universidade Federal do Paraná, durante a disciplina "*Fibre reinforced concrete (FRC): material characterization and structure design*", ministrada pelo professor orientador desta pesquisa.

A relevância deste estudo reside no fato de que as simplificações comumente utilizadas em relação à natureza da análise e ao comportamento físico dos materiais podem não garantir a segurança estrutural. Isso é importante, uma vez que o comportamento da estrutura pode sofrer alterações em função da degradação de seus materiais constituintes, o que foi considerado no

modelo proposto. Especificamente, a rigidez em cada camada é atualizada de acordo com a evolução do comportamento do elemento, permitindo uma previsão mais precisa do desempenho estrutural. Além disso, também se levou em consideração o efeito escala, capaz de influenciar os resultados obtidos.

4.1.1 Objetivos

Neste capítulo, o principal objetivo é prever o comportamento de elementos lineares planos de CRFA até a carga última sob flexão simples. Para alcançar esse objetivo, serão revisitados abaixo os objetivos específicos estabelecidos:

- a) Desenvolver um algoritmo que reproduza o comportamento à flexão simples até a carga última de elementos unidirecionais de CRFA, em termos de $F - \delta$ e configuração de uma estimativa do dano, utilizando um método incremental e iterativo para resolver o MEF associado ao modelo de rigidez equivalente;
- b) Comparar as respostas do modelo, em termos de $F - \delta$, com resultados de ensaios experimentais realizados por terceiros;
- c) Identificar a lei constitutiva com os parâmetros mais adequados para atualizar o módulo de deformação do material e, conseqüentemente, a matriz de rigidez;
- d) Avaliar a capacidade do modelo em prever uma estimativa do dano estrutural, comparando os gráficos referentes as configurações de dano finais dos elementos com o padrão de fissuração observados no respectivo ensaio experimental;
- e) Avaliar a relevância da discretização em camadas da seção transversal dos elementos no grau de precisão quanto aos resultados gerados pelo modelo; e
- f) Comparar as respostas obtidas pelo modelo MEF, em termos de $F - \varepsilon$, com as obtidas pelo modelo de análise de seção transversal.

4.1.2 Resumo do capítulo

A seção 4.2 tem como propósito introduzir conceitos teóricos que fornecerão a base para o modelo desenvolvido. Além disso, a seção 4.3 apresenta um esquema detalhado do processo seguido, desde a concepção do programa até a obtenção dos resultados e geração de gráficos. Já a seção 4.4 descreve a metodologia adotada neste capítulo, delineando como o modelo foi desenvolvido, aplicado e validado.

A seção 4.5 apresenta os resultados obtidos, que consistem em uma comparação entre as simulações do modelo e dados experimentais. As análises são baseadas nos diagramas $F - \delta$ e nas representações da distribuição de dano nos elementos simulados, considerando ou não o efeito escala. Foram realizadas simulações com diferentes números de camadas (10 e 30) para avaliar a influência da discretização da seção. Além disso, é feita uma comparação dos valores de $F - \varepsilon$ obtidos pelo modelo de elementos finitos com o modelo de análise de seção transversal, abordado em detalhes no capítulo 3.

Na seção 4.6, são destacadas as principais conclusões em resposta aos objetivos específicos estabelecidos para o capítulo em questão.

4.2 PROCEDIMENTO ANALÍTICO

Neste tópico, busca-se fornecer uma base teórica para a compreensão do modelo elaborado no presente capítulo. Esse modelo foi concebido por meio da aplicação de técnicas do MEF, aliadas a abordagens de solução de problemas não lineares de natureza física. Dessa forma, serão abordados de maneira sequencial os principais conceitos teóricos utilizados, bem como as premissas adotadas.

4.2.1 Hipóteses básicas

O modelo em questão consiste inicialmente em uma implementação de elementos finitos baseados na teoria das vigas de *Euler-Bernoulli*. Esta abordagem possui as seguintes características (CRAIG, 1981):

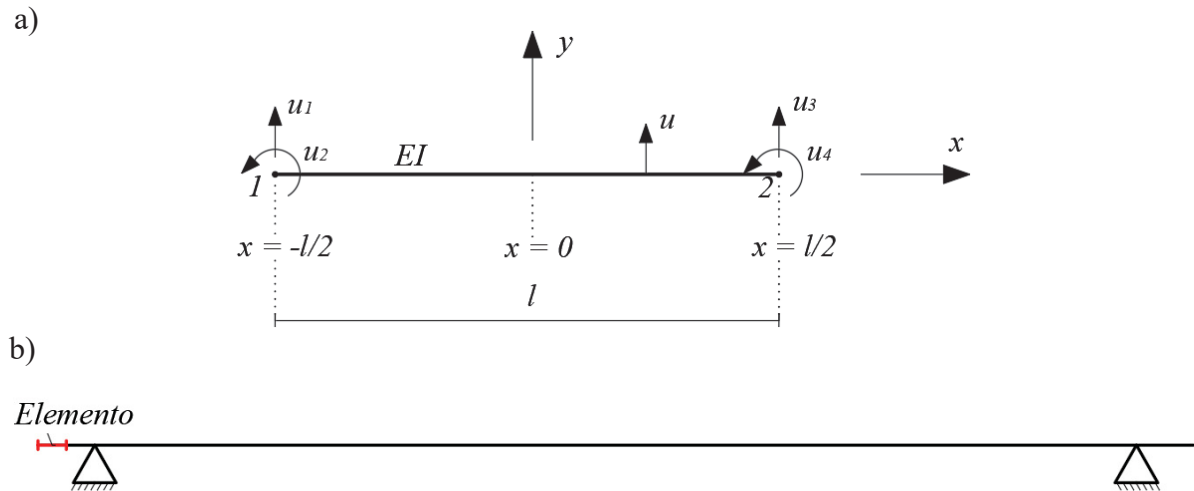
- a) Há uma linha neutra onde a viga não sofre tração e nem compressão;
- b) As seções planas e perpendiculares à linha neutra permanecem planas e perpendiculares após o carregamento ou deformações impostas, ou seja, as deformações devidas ao cisalhamento são negligenciadas;
- c) Material elástico, linear e homogêneo; e
- d) As tensões normais (σ_y e σ_z) são desprezíveis se comparadas à tensão axial (σ_x).

4.2.2 Definição do elemento

O elemento finito adotado é o elemento de viga com quatro graus de liberdade (FIGURA 31a). Definido o modelo da estrutura (FIGURA 31b), a mesma foi discretizada em

elementos finitos, ou seja, dividida em múltiplas partes menores que serão chamadas de elementos, que possuem nós em suas extremidades definindo o seu início e o seu final.

FIGURA 31 – a) Modelo da estrutura, b) elemento finito de viga



Fonte: Adaptado de Soriano (2009); A autora (2023).

4.2.3 Referenciais Lagrangianos

Adotou-se a formulação Lagrangiana, que mede os deslocamentos decorrentes de um dado carregamento em relação à configuração inicial do sistema. Essa formulação pode ser dividida em dois referenciais: o Referencial Lagrangiano Total (RLT) e o Referencial Lagrangiano Atualizado (RLA). Optou-se pela abordagem do RLA, em que os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental. Dessa forma, utilizou-se de um referencial que é atualizado a cada incremento de carga.

Para esse caso, tem-se os eixos axiais e transversais que se referem à configuração inicial do elemento, que servirá de referência para a configuração seguinte e esta servirá de referência para a próxima configuração. Além disso, para cada nova configuração da estrutura, são obtidos novos deslocamentos nos nós iniciais e finais do elemento, sendo os mesmos referenciados pela configuração de equilíbrio anterior.

4.2.4 Método de solução de equações não lineares

Para solucionar um sistema estrutural não linear usando o método dos elementos finitos, é preciso obter um sistema de equações algébricas não lineares e aplicar métodos de solução incrementais e iterativos. Esse processo inclui duas fases: a primeira é a solução dos deslocamentos incrementais utilizando as equações de equilíbrio da estrutura e a segunda é a

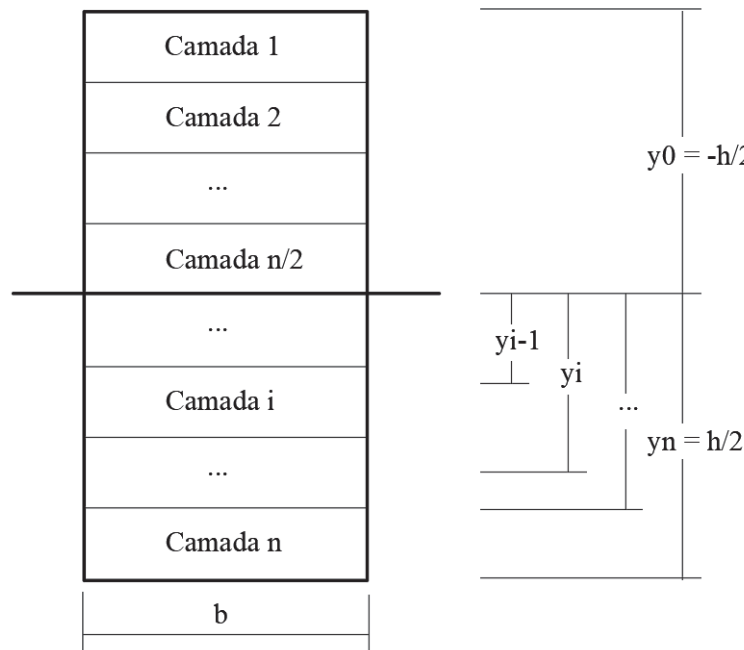
correção das forças internas incrementais com um processo iterativo. Por fim, compara-se as forças internas corrigidas com o carregamento externo, a fim de determinar o desequilíbrio do sistema (VON PARASKI, 2012).

Os itens subsequentes abordarão a incorporação da não linearidade ao modelo de elementos finitos e a estratégia utilizada para sua resolução.

Modelo de rigidez equivalente

Com o objetivo de considerar o comportamento não linear do CRFA no modelo de viga *Euler-Bernoulli* desenvolvido em MEF, adotou-se o modelo de rigidez equivalente, conforme desenvolvido por Abeche (2015). Esse modelo, por sua vez, divide a seção transversal em camadas, como pode ser visto na FIGURA 32.

FIGURA 32 – Seção transversal de um elemento de viga *Euler-Bernoulli* laminado



Fonte: Adaptado de Abeche (2015).

À medida que o carregamento incremental é aplicado, as propriedades de cada camada, tais como módulo de elasticidade e inércia, podem ser alteradas. A partir da divisão da seção em camadas, é possível avaliar essas alterações e determinar a rigidez à flexão resultante para cada seção analisada. Assim sendo, considerando a simetria e largura constante, é possível determinar a rigidez equivalente à flexão utilizando a EQUAÇÃO 11.

$$EI_{eqv} = \frac{1}{3} b \sum_{i=1}^n E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3) \quad (11)$$

onde:

EI_{eqv} = rigidez à flexão equivalente;

b = largura da seção transversal;

n = número de camadas;

i = índice para indicar o número de camadas;

E_i = módulos de deformação de cada camada analisada; e

y_i = valores das coordenadas no eixo y da divisão de pontos das i -ésimas camadas consecutivas.

Processo incremental e iterativo

Conforme mencionado, a carga total é dividida em incrementos, de modo que modelo precise encontrar o estado de equilíbrio para cada passo de carga. Assim, para cada incremento, obtém-se os deslocamentos nos pontos nodais de cada elemento e, a partir desses deslocamentos e utilizando a matriz de deformação (EQUAÇÃO 13), a deformação no ponto nodal de interesse (EQUAÇÃO 12).

$$\varepsilon = Bu^{(e)} \quad (12)$$

onde:

ε = deformação no ponto nodal de interesse;

B = matriz de deformação; e

$u^{(e)}$ = campo de deslocamento transversal elementar.

sendo,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} & -\frac{1}{2} + \frac{6x}{l^2} & \frac{12x}{l^3} & \frac{1}{2} + \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde:

x = valor da coordenada no eixo x ao longo do elemento finito; e

l = comprimento total do elemento finito de viga delimitado entre os nós inicial e final.

Para o cálculo da deformação de cada camada da seção transversal pertencente àquele ponto nodal, aplica-se a EQUAÇÃO 14.

$$\varepsilon_{camada(i)} = \gamma_{camada(i)} \varepsilon \quad (14)$$

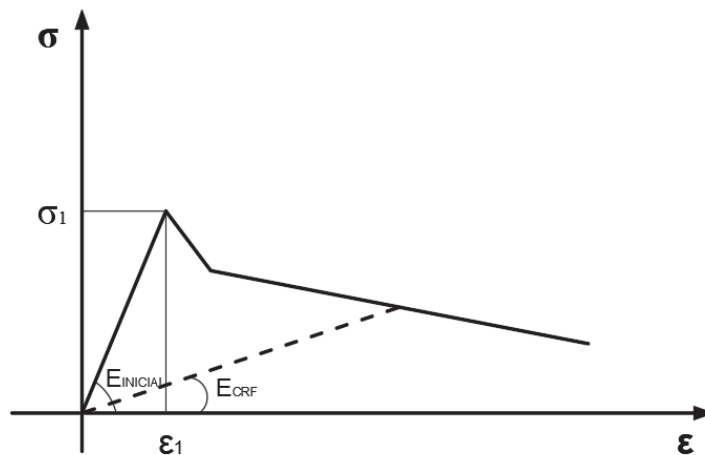
onde:

$\varepsilon_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com as deformações de cada camada analisada;
e

$\gamma_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada.

Com o intuito de reproduzir a não linearidade do compósito em questão, foram adotados modelos constitutivos capazes de descrever o comportamento à tração do CRFA, conforme exemplo ilustrado na FIGURA 33. No que diz respeito à compressão, assim como foi feito no capítulo 3, optou-se por adotar um comportamento elástico linear simples. Isso ocorre porque, na ausência de armaduras, o concreto comprimido não ultrapassa o regime linear.

FIGURA 33 – Exemplo de um modelo que descreve o comportamento à tração do CRFA



Fonte: A autora (2023).

No início do processo, as camadas estão associadas ao módulo de deformação inicial do CRFA, o qual corresponde à inclinação do trecho inicial do diagrama. Posteriormente, a cada incremento de carga, é realizada uma verificação da deformação de cada camada em cada ponto nodal, comparando-a com a deformação limite do trecho inicial. Quando a deformação de alguma camada ultrapassa a deformação limite, o módulo de deformação correspondente é atualizado utilizando o módulo secante equivalente à deformação em questão. Desse modo, o módulo de deformação de cada camada da seção transversal é previsto por meio da EQUAÇÃO 15, sendo que o valor da tensão correspondente é determinado com auxílio das leis constitutivas mencionadas.

$$E_{camada(i)} = \frac{\sigma_{camada(i)}}{\varepsilon_{camada(i)}} \quad (15)$$

onde:

$E_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem dos módulos de deformação de cada camada analisada; e

$\sigma_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com as tensões de cada camada analisada.

Nota-se que, na ausência de fissuração do compósito, o modelo implementado se comporta linearmente. Para essas situações, a posição da linha neutra permanece inalterada. No entanto, caso seja identificado uma deformação superior a deformação de fissuração (ε_1) em alguma das camadas do ponto nodal analisado, a posição da linha neutra pode mudar significativamente. Visto que, por exemplo, uma camada que seria inicialmente comprimida pode passar a sofrer tração se a linha neutra se deslocar para cima. Em vista disso, a posição da linha neutra da seção transversal é reavaliada a cada iteração utilizando a EQUAÇÃO 16.

$$y_{LN} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{camada(i)} E_{camada(i)} A_{camada(i)}}{E_{camada(i)} A_{camada(i)}} \quad (16)$$

onde:

y_{LN} = nova posição da linha neutra; e

$A_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem das áreas de cada camada analisada.

Após atualização da posição da linha neutra, as novas coordenadas no eixo y são atualizadas de acordo com as coordenadas absolutas das camadas e a nova posição do eixo neutro conforme EQUAÇÃO 17.

$$y_{camada_novo(i)} = y_{camada_zero(i)} - y_{LN} \quad (17)$$

onde:

$y_{camada_novo(i)}$ = tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada atualizados conforme a nova posição da linha neutra; e

$y_{camada_zero(i)}$ = tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y considerando a linha neutra passando no meio da seção.

Em sequência, determina-se as tensões normais atuantes em cada camada de cada ponto nodal, por meio da EQUAÇÃO 18.

$$\sigma_{camada(i)} = E_{camada(i)} \varepsilon_{camada(i)} \quad (18)$$

Calculada as tensões, pode-se encontrar o momento atuante em cada camada de cada ponto nodal, bem como, o momento atuante na seção, conforme a EQUAÇÃO 19.

$$M_{seção} = \sum_{i=1}^n M_{camada(i)} = \frac{\sigma_{camada(i)} I_{camada(i)}}{y_{camada_novo(i)}} \quad (19)$$

onde:

$M_{seção}$ = momento fletor atuante na seção;

$M_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com os momentos de cada camada analisada;

e

$I_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com os momentos de inércia de cada camada analisada.

em que o momento de inércia pode ser calculado segundo EQUAÇÃO 20.

$$I_{camada(i)} = \frac{1}{3} b \sum_{i=1}^n (y_{camada_novo(i)}^3 - y_{camada_novo(i-1)}^3) \quad (20)$$

Para determinar o vetor de forças internas, utiliza-se a equação de momento resultante da resistência dos materiais. No caso de um ensaio de viga à flexão por 3 pontos, a EQUAÇÃO 21 é empregada para calcular a força interna. É importante ressaltar que o momento utilizado corresponde ao ponto central da viga, já que é o local onde a carga é aplicada no arranjo estrutural em questão.

$$F_{i(j)} = \frac{M_{seção} \cdot 4}{l} \quad (21)$$

onde:

$F_{i(j)}$ = força interna para a iteração em questão; e

j = índice para indicar o número de iterações.

Caso a configuração estrutural seja diferente, é preciso realizar a revisão da equação para adequá-la à realidade a ser reproduzida (por exemplo, um ensaio à flexão por quatro ou cinco pontos). Após a determinação da força interna, este valor é inserido em um vetor de forças globais, no grau de liberdade associado ao ponto de aplicação da carga na estrutura. Em

seguida, calcula-se a diferença entre a força interna e a força externa, conforme EQUAÇÃO 22.

$$g_{(j)} = F_{ext(j)} - F_{i(j)} \quad (22)$$

onde:

$g_{(j)}$ = tensor de primeira ordem que calcula a força residual entre a força externa e a força interna para a iteração em questão; e

$F_{ext(j)}$ = força externa para a iteração em questão.

Então, é estabelecido um critério de convergência (EQUAÇÃO 23) para interromper o processo iterativo quando a diferença entre a força interna e externa da estrutura atingir um valor inferior ao estabelecido como limite. Isso significa que a mesma se encontra em estado de equilíbrio.

$$\xi \geq \frac{\|g_{(j)}\|}{\|F_{ext(j)}\|} \quad (23)$$

onde:

ξ = critério de convergência.

Dessa forma, verifica-se o critério de convergência. Caso não se obtenha convergência numérica, incrementa-se o índice contador de iterações, e reinicia-se o procedimento iterativo (nesse caso, o método de *Newton-Raphson*) até que as respostas obtidas atinjam a convergência. Após a confirmação da convergência, ou seja, verificado que a estrutura se encontra em equilíbrio, atualizam-se as variáveis e repete-se todo o processo até o último incremento.

Método de Newton-Raphson

O método de *Newton-Raphson* é amplamente utilizado para solucionar sistemas de equações não lineares em estruturas, sendo baseado na aproximação da solução não linear por tangentes à trajetória de equilíbrio até a obtenção da convergência. Nesse método, a matriz de rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração. Isso significa que a previsão da matriz de rigidez se baseia na última situação conhecida ou prevista, mesmo que não seja um estado de equilíbrio. O método apresentado nesta seção se baseia nos conceitos apresentados por Bathe (1996).

Como já abordado, para atualizar o tensor que contém as rigidezes equivalentes da seção é utilizado a EQUAÇÃO 11, considerando os valores de módulo de rigidez e posicionamento da coordenada y obtidos na última iteração. Em seguida, as matrizes de rigidez elementares são retificadas e, por consequência, a matriz de rigidez global da estrutura é recalculada.

Assim, pode-se afirmar que o método de *Newton-Raphson* é incremental e iterativo, pois a cada incremento de carga é calculado o incremento de deslocamento correspondente, até que a convergência do equilíbrio das forças seja alcançada. O incremento de deslocamento a ser adicionado a fim de obter a convergência pode ser obtido pela EQUAÇÃO 24.

$$K_{eqv(j-1)} \Delta u_{(j)} = F_{ext(j)} - F_{i(j)} \quad (24)$$

onde:

$K_{eqv(j-1)}$ = matriz de rigidez atualizada resultante da aplicação do modelo de rigidez equivalente para iteração anterior a iteração vigente; e

$\Delta u_{(j)}$ = tensor de primeira ordem com os deslocamentos a serem incrementados na próxima iteração para que a força interna convirja com a força externa.

No final de cada iteração, calcula-se a EQUAÇÃO 25.

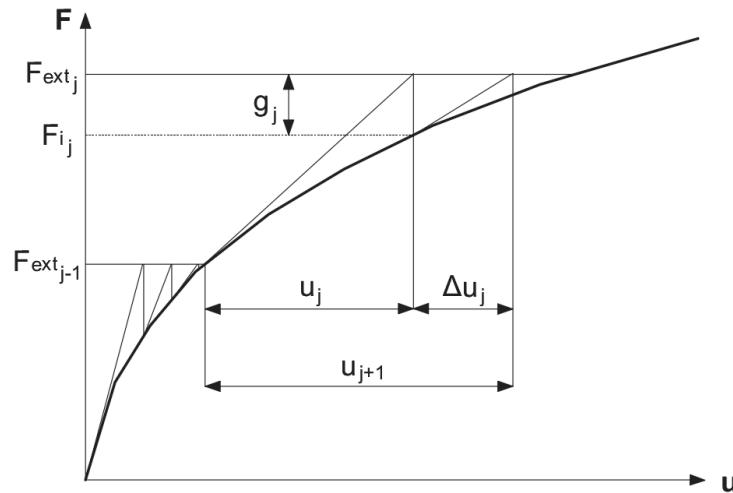
$$u_{(j+1)} = u_{(j)} + \Delta u_{(j)} \quad (25)$$

onde:

$u_{(j+1)}$ = tensor de primeira ordem com os deslocamentos finais da iteração após aplicação do Método de *Newton-Raphson*; e

$u_{(j)}$ = tensor de primeira ordem com os deslocamentos resultantes da iteração antes da aplicação do Método de *Newton-Raphson*.

As iterações dentro de cada passo de carga continuam até o vetor de forças residuais respeite o limite do critério de convergência estabelecido, e consequentemente Δu também tenda a zero. Obtido o equilíbrio do sistema, parte-se para uma nova etapa onde é aplicado um novo incremento de carga. Neste método, a matriz de rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração, conforme ilustrado na FIGURA 34.

FIGURA 34 - Relação entre força e deslocamento do método de *Newton-Raphson*

Fonte: Adaptado de DIANA FEA (2022).

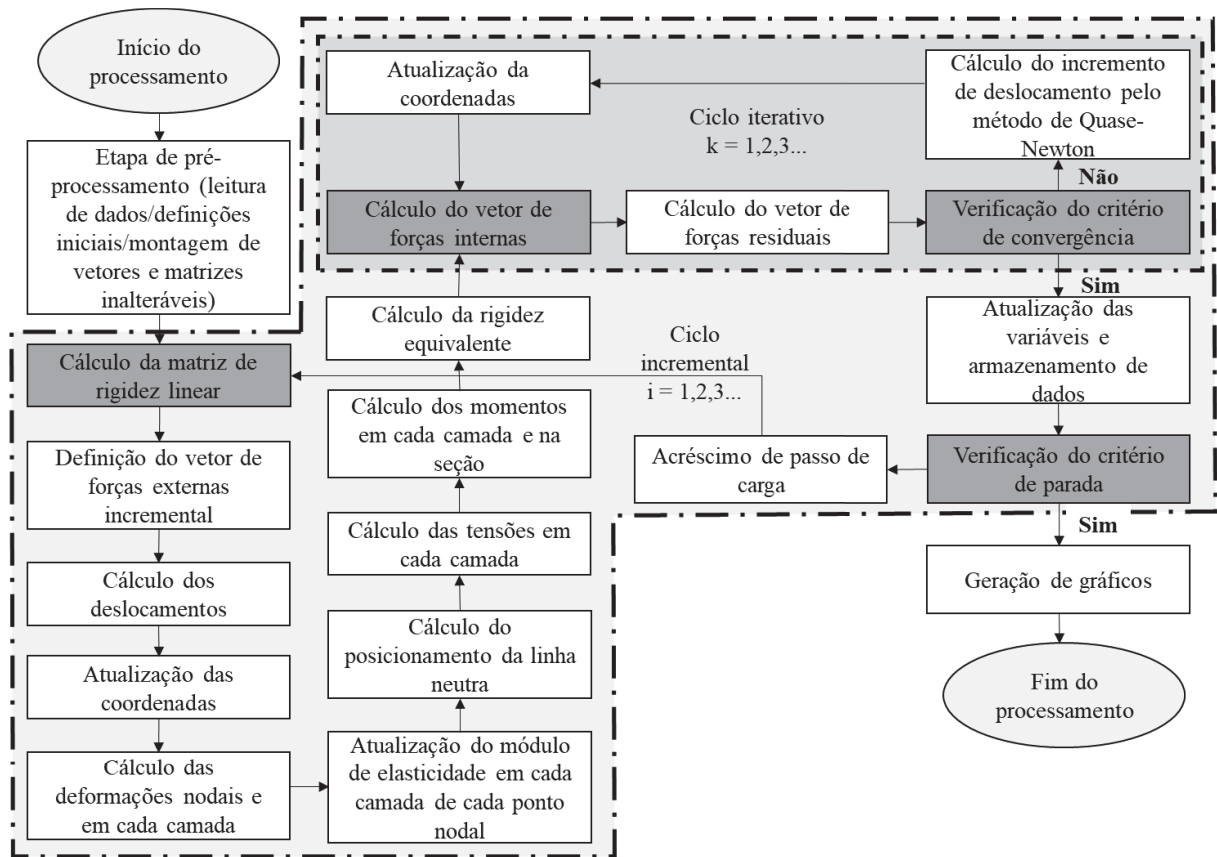
4.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste tópico, é apresentada uma visão geral do código computacional desenvolvido para gerar os resultados apresentados neste capítulo. Para isso, é importante destacar, primeiramente, que um sistema computacional eficiente requer não apenas um *hardware* adequado, mas também códigos bem escritos, objetivos e com estruturação simples. Em vista disso, o código computacional deste estudo foi elaborado em *Python*, uma linguagem que, segundo Von Paraski (2012), pode ser considerada de programação de fácil compreensão para profissionais das áreas de ciências exatas que não tem muita experiência com programação convencional.

Com o intuito de compreender a implementação realizada, cabe destacar que, de maneira geral, o processo de simulação numérica pode ser dividido em três fases: pré-processamento, análise e pós-processamento, que costumam ser tratadas como entidades independentes. No caso do presente trabalho, a etapa de pré-processamento, que é o primeiro passo na análise computacional, envolve a leitura de um ou mais arquivos texto em formatos específicos. Os dados contidos nesses arquivos são processados para obter as respostas relevantes, produzindo gráficos para o pós-processamento.

Considerando o exposto anteriormente, a FIGURA 35 apresenta um fluxograma que ilustra o processo de implementação computacional da teoria discutida neste capítulo.

FIGURA 35 - Fluxograma do código computacional desenvolvido



Fonte: A autora (2023).

Pode-se observar, por meio da FIGURA 35, que o primeiro passo após o início do processamento representa a fase de pré-processamento da análise, constituída por entrada de dados, definições de limites e inicializações de algumas variáveis e vetores. Além disso, neste momento, os vetores e matrizes que não serão alterados durante a análise, tais como o vetor de cargas, o vetor de restrições e a matriz de graus de liberdade, são definidos.

Após essa etapa inicial, o ciclo incremental é iniciado por meio do cálculo da matriz de rigidez não danificada, seguido do cálculo do incremento de força com base nas definições iniciais. Em seguida, os deslocamentos são determinados utilizando uma análise linear e as coordenadas da estrutura são, então, atualizadas. A partir dos deslocamentos nodais, determinam-se as respectivas deformações, bem como, as deformações atuantes em cada camada da seção transversal, considerando a divisão de camadas realizada segundo o modelo de rigidez equivalente.

As deformações em cada camada são verificadas para determinar se elas excedem um valor de deformação que possa causar danos à estrutura, de acordo com os modelos constitutivos utilizados. Se houver dano, a posição da linha neutra é recalculada e o vetor de

alturas da seção é atualizado. Então, calculam-se as tensões em cada camada que permitem encontrar quais os momentos atuantes não só nas camadas, como também, na seção.

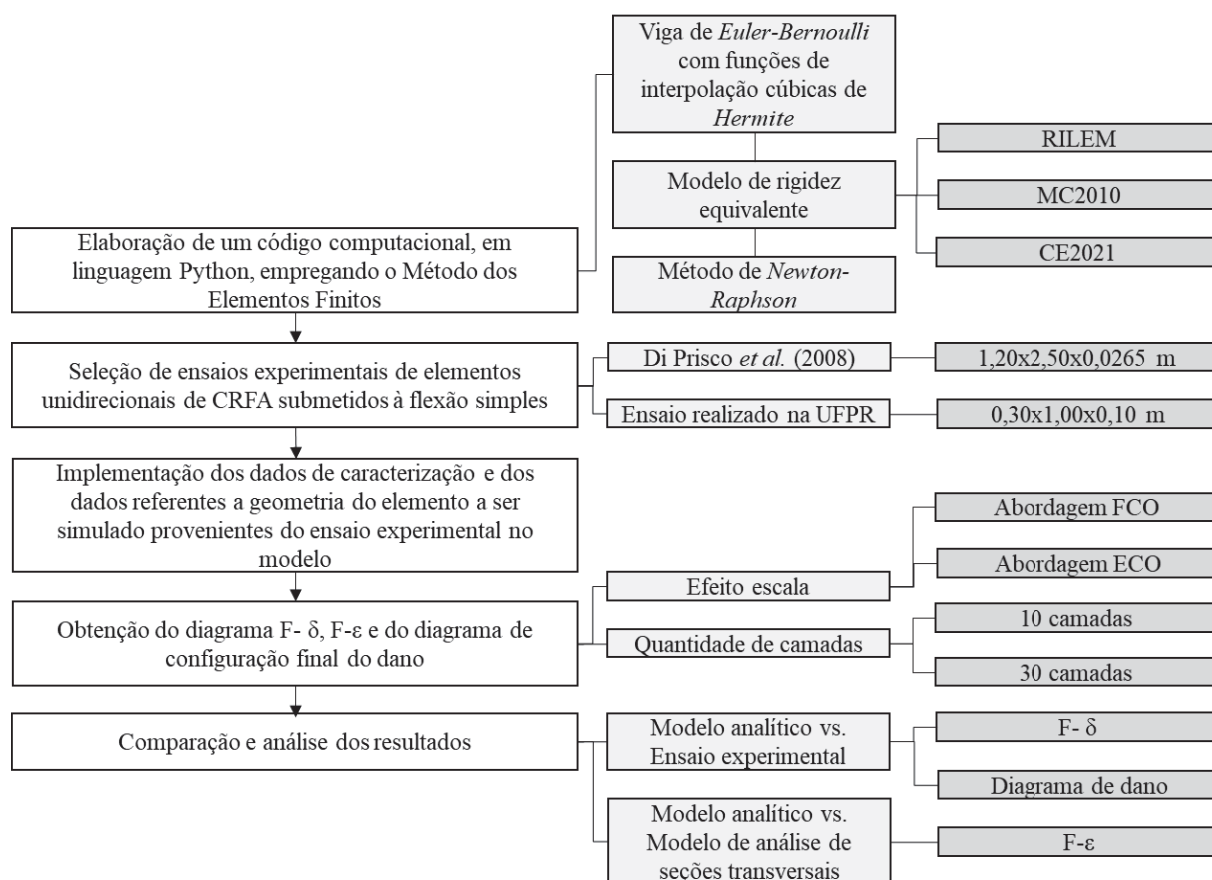
A partir da informação do momento atuante na seção e utilizando equações de resistência dos materiais, é possível determinar a força interna à qual o arranjo estrutural está submetido. Essa força interna é então comparada com a força incremental externa assumida anteriormente a fim de verificar se atende ao critério de convergência. Se o critério não for atendido, o código utiliza o método de *Newton-Raphson* e a matriz de rigidez atualizada com a rigidez equivalente correspondente para encontrar o incremento de deslocamento necessário para atender ao critério.

Após esse processo, ou caso o critério seja atendido sem a necessidade do método, as variáveis são atualizadas e os dados são armazenados. Em seguida, é verificado se o critério de parada foi atendido. Considerou-se como critério de parada o momento a partir do qual o programa atingia um número de iterações indicativo de que ele não é capaz de encontrar a convergência, ou então, o programa se encerrava sozinho por inconsistência dos resultados calculados. Diante de alguma dessas duas situações, o processamento é encerrado. Caso contrário, é dado mais um passo incremental até que o critério de parada seja atendido. Por fim, com os dados armazenados, são gerados os gráficos necessários para análise do elemento e o processamento é encerrado.

4.4 METODOLOGIA

O presente capítulo pode ser subdividido em cinco grandes etapas assim como mostrado na FIGURA 36.

FIGURA 36 – Esquematisação do método proposto para o capítulo 4



Fonte: A autora (2023).

A metodologia proposta se inicia com a elaboração de um código computacional em linguagem *Python*, empregando o MEF com elementos de viga de *Euler-Bernoulli* e funções de interpolação cúbicas de *Hermite*. Com intuito de considerar o efeito da não linearidade nos elementos a serem simulados, é implementado o modelo de rigidez equivalente conforme apresentado no trabalho de Abeche (2015). Para o correto funcionamento desse modelo, são especificadas equações capazes de descrever o comportamento estrutural dos materiais constituintes dos elementos a serem simulados, no caso, o CRFA. Em vista disso, foram utilizadas três diferentes leis constitutivas trilineares: RILEM, MC2010 e CE2021. O carregamento no programa é feito de forma incremental, ou seja, em passos de carga. Isso facilita a resolução de métodos iterativos, como o método de *Newton-Raphson*, que também é utilizado na programação para localizar as respostas de deslocamento não lineares.

Após a implementação do código, tornou-se necessário obter resultados de ensaios que permitissem simular elementos unidirecionais submetidos a esforços de flexão e reforçados exclusivamente com fibras de aço. Para tal finalidade, foram buscados artigos publicados que disponibilizassem dados de ensaios compatíveis com esse objetivo. Um artigo de Di Prisco et

al. (2008), que descreve um ensaio com lajes finais unidirecionais sob flexão, foi identificado como fonte adequada. Os autores deste trabalho conduziram o ensaio para 14 elementos, com volume de fibras equivalente a 1,3%, cujos resultados foram agrupados por meio do cálculo de valores médios para a elaboração dos resultados. Os resultados do ensaio de caracterização por 4 pontos foram utilizados como entrada de dados para a programação, embora tenha sido necessário ajustá-los, uma vez que as leis constitutivas adotadas são baseadas em parâmetros descritos por ensaios por 3 pontos. Esses resultados foram usados para gerar as discussões apresentados em detalhes na seção 4.5.1. Para este ensaio, foram analisados resultados relativos a uma simulação realizada com 30 camadas e 10 camadas.

Visando complementar e validar os resultados encontrados por meio da simulação do ensaio realizado por Di Prisco *et al.* (2008), foram simulados também os resultados de duas lajes ensaiadas no laboratório da UFPR durante a disciplina "*Fibre reinforced concrete (FRC): material characterization and structure design*" do terceiro trimestre letivo do ano de 2022 do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC/UFPR), cujos volumes de fibras foram de 0,5%. Convém ressaltar tais lajes são mais espessas, apesar de também serem unidirecionais e reforçadas unicamente com fibras. O ensaio de caracterização, por sua vez, foi realizado por meio de um ensaio de 3 pontos, o que dispensou, diferentemente do caso anterior, ajustes nos dados de entrada. Depois da inserção dos dados de entrada no modelo, os resultados foram gerados pelo programa para uma seção discretizada em 30 camadas. A discussão dessa simulação é apresentada na seção 4.5.2.

Com base no exposto, foi possível verificar, por meio da curva $F - \delta$ e do diagrama referente a configuração do dano, a precisão do modelo desenvolvido em prever a resposta em termos de $F - \delta$ de elementos unidirecionais de CRFA submetidos à flexão simples até a carga última. A fim de prever resultados mais representativos para elementos CRFA mais finos, complementou-se o estudo simulando também uma abordagem alternativa, proposta por Galeote *et al.* (2020), baseada na substituição do CMOD (abordagem FCO) pela rotação do corpo de prova (abordagem ECO) como parâmetro de referência para determinar as resistências residuais do compósito. Cabe destacar que as conclusões obtidas variam de acordo com a lei constitutiva utilizada para descrever o comportamento estrutural do compósito. Esse aspecto possibilitou a avaliação das leis estudadas para determinar qual delas seria a mais adequada a ser empregada no modelo desenvolvido. Por fim, foram comparadas as respostas obtidas pelo modelo elaborado neste capítulo com as do modelo a ser proposto no terceiro capítulo, em termos de $F - \varepsilon$.

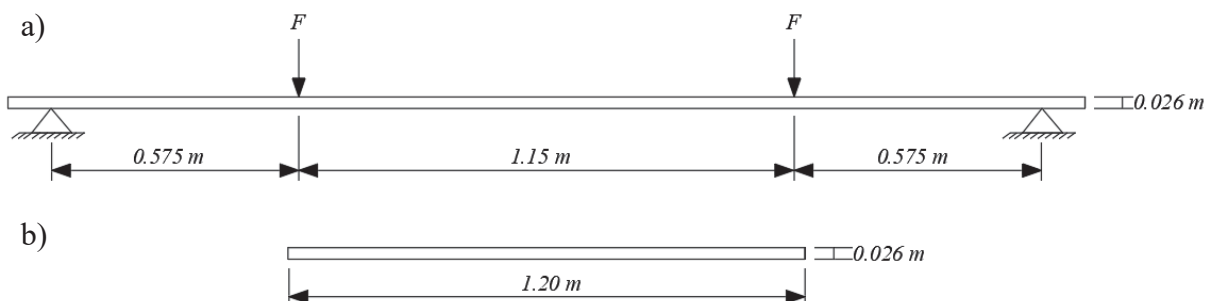
4.5 RESULTADOS

Este tópico apresenta os resultados das simulações computacionais realizadas com o modelo apresentado. Na seção 4.5.1 é analisada um elemento fino com 0,0265 m de espessura, submetido a um carregamento por 4 pontos, tendo vão de 2,30 m e 0,10 m em cada balanço. Na seção 4.5.2 é analisada um elemento mais espesso, com 0,10 m de espessura, tendo 1 m de vão entre apoios e 0,10 m em balanço. Nesse último caso, o elemento é submetido a carregamento por 3 pontos.

4.5.1 Comparação com elemento de dimensões 1,20x2,50x0,0265 m

Nesta simulação, é analisada um elemento biapoiado submetido a um carregamento por 4 pontos. Há duas cargas de mesma intensidade aplicadas, o que ocasiona uma situação de flexão pura. A FIGURA 37a apresenta a vista lateral do elemento, por meio da qual é possível observar a posição dos apoios e as condições de contorno, já a FIGURA 37b ilustra a sua seção transversal.

FIGURA 37 – Ilustração do exemplo 3.4.1 a) vista lateral, b) seção transversal



Fonte: A autora (2023).

A TABELA 9 apresenta os dados do modelo e da aplicação da carga e os parâmetros do material para a simulação em questão.

TABELA 9 – Dados de entrada e parâmetros do material

(continua)

Informações do modelo	Número de elementos finitos	102
	Número de camadas discretizadas na seção	30
Informações da carga	Incremento da carga (kN)	0,032
Parâmetros do CRFA	f_{ck}	138,08
	f_{cm}	144,17

TABELA 9 – Dados de entrada e parâmetros do material

(conclusão)

Parâmetros do CRFA	E	39680				
Parâmetros do CRFA	FCO	$CMOD_i$ (mm)	0,50	1,50	2,50	3,50
		F_i (kN)	4,45	3,90	3,12	2,52
		fR_i (MPa)	1,28	1,12	0,90	0,72
	ECO	$CMOD_i$ (mm)	0,11	0,32	0,53	0,74
		F_i (kN)	4,45	3,90	3,12	2,52
		fR_i (MPa)	1,28	1,12	0,89	0,72
Tolerância		0,0001				

Fonte: A autora (2023).

É importante ressaltar que os parâmetros adotados para o CRFA foram retirados do ensaio de caracterização de 4 pontos realizado por Di Prisco *et al.* (2008), o qual seguiu o padrão recomendado por norma para as dimensões dos corpos de prova. No entanto, como o ensaio de caracterização é de 4 pontos e os modelos constitutivos utilizados na programação requerem o valor de CMOD, foi necessário adaptar o valor do CTOD. Para isso, utilizou-se a recomendação de Di Prisco *et al.* (2013) que propõem $CMOD = 1,2 \cdot CTOD$.

Além disso, para a abordagem ECO, foram calculados novos valores de CMOD com base na altura do elemento a ser simulado, utilizando a EQUAÇÃO 3 apresentada no capítulo 2. Uma vez definidos os CMODs equivalentes, foram encontrados os valores de tensão correspondentes, os quais foram apresentados na TABELA 9. Como o ensaio de caracterização não foi adaptado para as dimensões do elemento simulado, o comprimento característico se manteve igual a $l_{cs} = h_{sp} = 125$ cm (altura do corpo de prova padronizado do ensaio descontado o entalhe).

Modelos constitutivos

Na programação em questão, utilizam-se modelos constitutivos trilineares para descrever o comportamento estrutural do CRFA. Esses modelos atualizam o módulo de elasticidade de acordo com a deformação, em cada camada da seção de cada ponto nodal, permitindo a reprodução da não linearidade na previsão do comportamento do CRFA à flexão simples, conforme abordado na seção 4.2. Vale destacar que tais modelos consideram o comportamento linear-elástico antes da fissuração, o pico de tensão e a perda de rigidez após a fissuração, conforme descrito na TABELA 2 no item 2.4 da presente dissertação.

A TABELA 10 apresenta os valores dos parâmetros calculados para cada modelo constitutivo estudado, considerando as duas abordagens propostas por Galeote *et al.* (2020). É importante destacar que, em todos os modelos, exceto no MC2010, o pico de tensão é representado por σ_1 , enquanto no modelo MC2010, é representado por σ^* . Adicionalmente, não foram utilizados coeficientes parciais de segurança para obtenção de quaisquer valores de tensão e deformação.

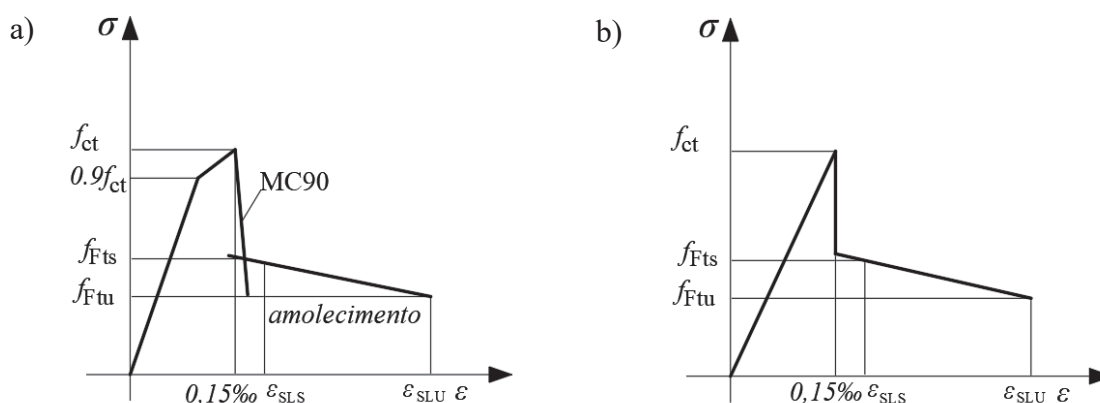
TABELA 10 – Parâmetros dos modelos constitutivos considerando a abordagem FCO e ECO

Abordagem	Modelo	σ_1 (MPa)	ϵ_1 (‰)	σ^* (MPa)	ϵ^* (‰)	σ_2 (MPa)	ϵ_2 (‰)	σ_u (MPa)	ϵ_u (‰)
FCO	RILEM	13,56	0,342	-	-	5,77	0,44	2,68	25
	CE2021	7,55	0,19	-	-	5,77	0,29	1,92	20
	MC2010	-	-	8,01	0,15	6,69	0,15	1,92	20
ECO	RILEM	13,56	0,342	-	-	4,62	0,44	4,72	25
	CE2021	7,55	0,19	-	-	4,62	0,29	4,35	4,24
	MC2010	-	-	8,01	0,15	4,67	0,15	4,35	4,24

Fonte: A autora (2023).

É relevante mencionar que, para a simulação do exemplo 4.5.1, algumas adaptações foram realizadas no modelo MC2010, conforme pode ser verificado na FIGURA 38.

FIGURA 38 - a) MC2010 e b) Hipóteses assumidas para a simulação do elemento do exemplo 3.4.1



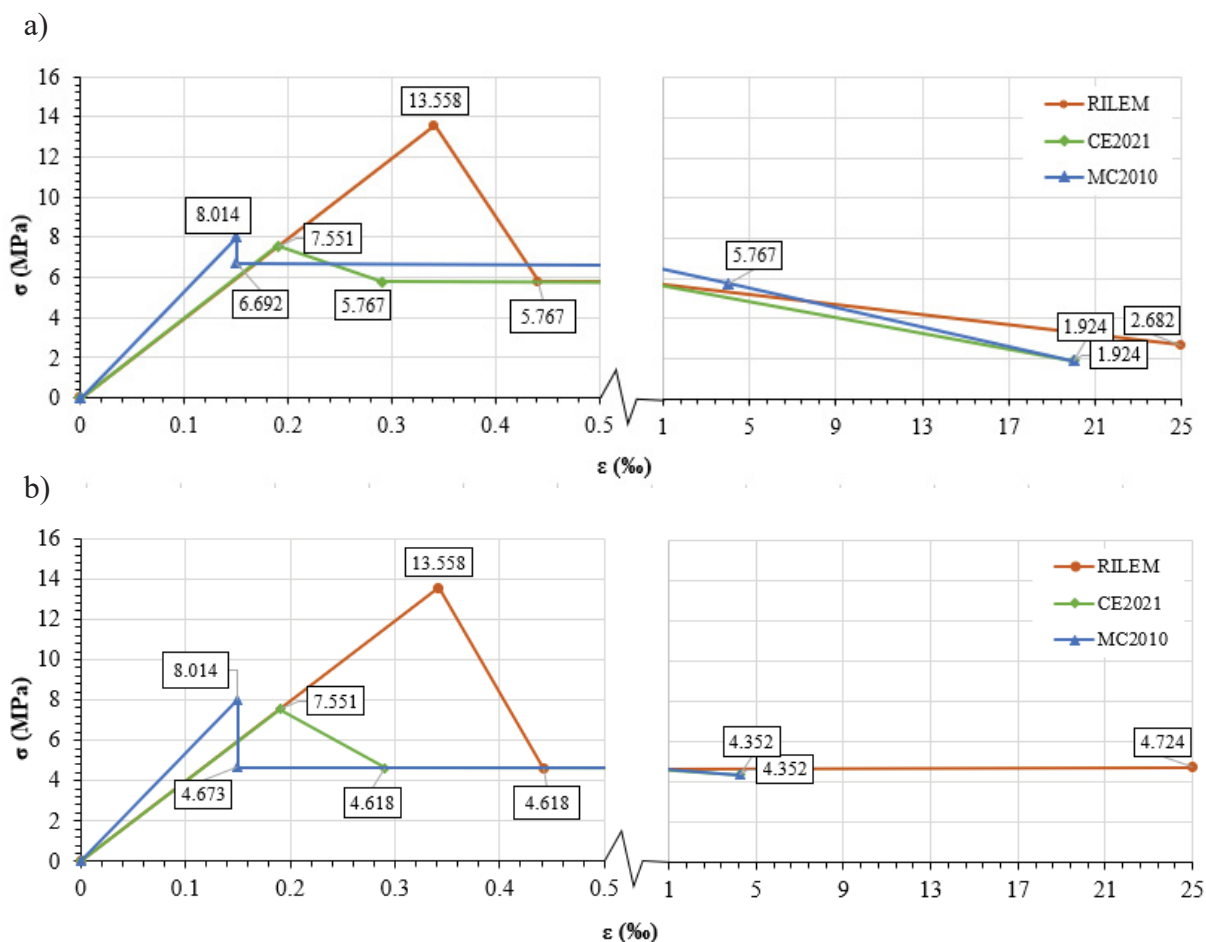
Fonte: A autora (2023).

Para o modelo MC2010, a tensão equivalente a $0,9f_{ct}$ do diagrama foi desconsiderada. Isso ocorreu porque o valor de deformação encontrado para esse valor de tensão foi superior ao valor de deformação encontrado para a tensão de pico (f_{ct}). Como não há sentido físico em um valor de deformação menor do que o de f_{ct} para esse ponto do gráfico, ele foi desconsiderado das análises. Esse fato será responsável por gerar uma inclinação do trecho linear da lei constitutiva do MC2010 diferente daquela dos demais modelos estudados.

Além disso, outra hipótese também foi assumida para a equação proposta pelo MC2010. Nesse modelo, é necessário obter a interseção entre o ramo pós-fissuração do MC90, que depende do valor do l_{cs} e do tramo de amolecimento definido pelos parâmetros do MC2010. Porém, para fins de simplificação, nenhuma contribuição da matriz de concreto foi considerada após a tensão de pico ser atingida.

Os valores dos parâmetros dos modelos constitutivos, de acordo com as abordagens FCO e ECO, apresentados na TABELA 10, podem ser visualizados de maneira mais clara nos gráficos da FIGURA 39.

FIGURA 39 – Diagramas trilineares considerando a abordagem a) FCO, b) ECO



Fonte: A autora (2023).

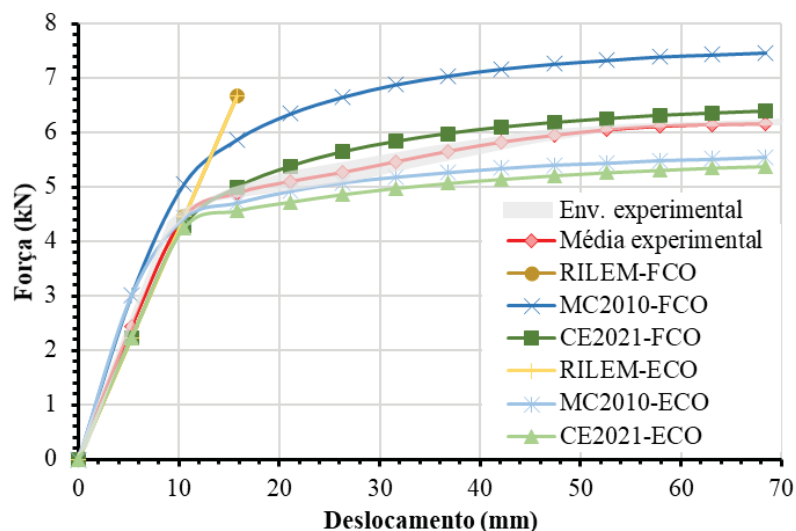
Observa-se, por meio da FIGURA 39, que as tensões de pico entre os diferentes modelos (σ_1 ou σ^* no caso do MC2010) são semelhantes, em ambas as abordagens, com exceção do modelo RILEM, cujo valor é 69% e 80% superior quando comparado ao CE2021 e MC2010, respectivamente. Já em relação à contribuição das fibras (relação entre σ_2 e σ_1), para a abordagem FCO, tem-se que os valores de σ_2 representam 42% de σ_1 para o modelo RILEM,

enquanto para os modelos CE2021 e MC2010 correspondem a 76% e 72%. Para a estratégia ECO, esses valores passam para 34%, 61% e 58% para o RILEM, CE2021 e MC2010, respectivamente. Assim, entende-se que a abordagem ECO permite uma consideração inferior da contribuição das fibras logo após a fissuração quando comparada à abordagem FCO. Apesar disso, a abordagem ECO apresenta maiores valores de tensão última, indicando uma maior capacidade resistente do elemento, ao considerar o efeito escala no momento de deformação última.

Ao analisar os valores de tensão última das abordagens estudadas, verificou-se que o modelo CE2021 e MC2010 apresentaram estimativas equivalentes. Por outro lado, o modelo RILEM previu valores superiores em ambas as estratégias, com aumento de 28,35% na abordagem FCO e 7,83% na ECO. Esses resultados indicam que o modelo RILEM pressupõe um desempenho mais otimista do compósito em relação aos outros modelos no que diz respeito à resistência das fibras à deformação última. Essa mesma conclusão também foi observada nos resultados do modelo de análise de seções estudado no capítulo 3, onde os valores de tensão última encontrados pelo modelo RILEM também foram maiores do que os previstos pelos demais modelos, corroborando a tendência observada.

Resultados em termos de $F - \delta$

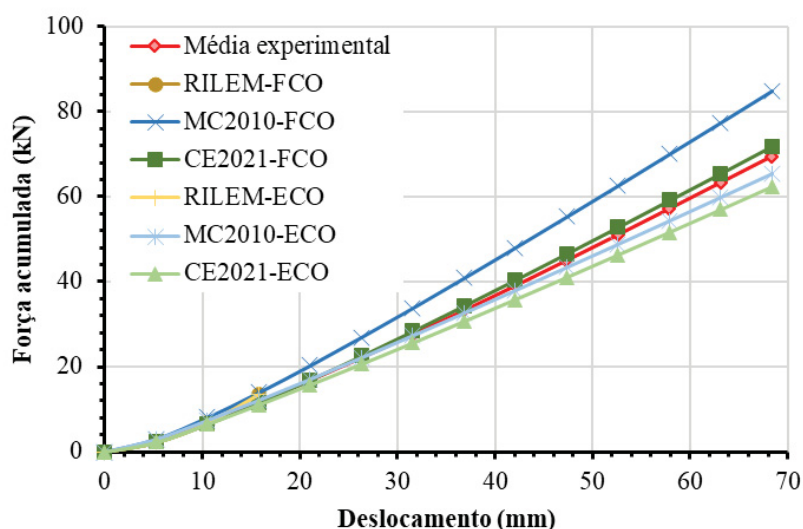
Para tornar a interpretação do desempenho da programação mais clara e auxiliar na identificação dos modelos mais adequados para simular o comportamento de elementos unidirecionais de CRFA, foram geradas as previsões do comportamento à flexão simples do elemento, considerando duas abordagens: FCO e ECO. As previsões, em termos de $F - \delta$, são ilustradas na FIGURA 40.

FIGURA 40 – Força *versus* deslocamento

Fonte: A autora (2023).

Na FIGURA 40, verifica-se os resultados das simulações obtidos a partir dos modelos constitutivos estudados, levando em consideração as estratégias FCO e ECO, até o valor de carga última observado nos ensaios experimentais. Ao analisar graficamente as previsões, é possível observar que, em relação à abordagem FCO, o modelo CE2021 reproduz de forma bastante precisa os valores experimentais, enquanto que o modelo MC2010 apresenta valores superestimados. Quanto aos resultados das simulações considerando o efeito do tamanho, constatou-se que a estratégia ECO se revelou eficaz na redução dos valores de força, resultando em estimativas mais seguras para ambos os modelos, embora subestimadas. Também fica evidente, por fim, que, por razões que serão melhor discutidas adiante, o modelo do RILEM não conseguiu prever com precisão o comportamento do elemento, tendo suas estimativas interrompidas no fim do trecho referente ao comportamento linear.

Com o objetivo de melhor compreender a disparidade entre as simulações realizadas por cada modelo e estratégia em relação ao comportamento observado experimentalmente, foi elaborado o gráfico de força acumulada *versus* deslocamento, o qual está representado na FIGURA 41. O gráfico em questão adere ao princípio estabelecido pelo teste de *Kolmogorov-Smirnov*, o qual se fundamenta na comparação entre os resultados previstos pelos modelos acumulados com dados empíricos, igualmente representados de forma cumulativa. Essa análise tem como finalidade avaliar a proximidade dos dados estimados em relação a uma distribuição de probabilidade de referência. Portanto, compreende-se que os modelos constitutivos estudados são considerados estimadores confiáveis quando suas curvas se aproximam da curva de referência (neste caso, a média experimental).

FIGURA 41 – Força acumulada *versus* deslocamento

Fonte: A autora (2023).

Além disso, apresenta-se a TABELA 11, que fornece as diferenças máximas de carga acumulada obtidas em cada simulação em relação aos dados médios experimentais, tendo em vista todos os pontos indicados no gráfico da FIGURA 41.

TABELA 11 – Máxima diferença das cargas acumuladas previstas por cada modelo em relação à média experimental

Modelo	Diferença (kN)	
	FCO	ECO
RILEM	1,60	1,60
MC2010	15,40	-4,16
CE2021	2,41	-7,18

Fonte: A autora (2023).

Ao examinar a FIGURA 11 e a TABELA 11 é possível notar que, na abordagem FCO, o modelo CE2021 apresentou uma diferença pequena, indicando que sua previsão foi bastante precisa em relação aos valores experimentais, apesar de ter sido um pouco superestimada (sendo equivalente a 2,41 kN a diferença máxima). No entanto, ao levar em consideração o efeito escala, observou-se uma subestimação do valor de força (chegando a -7,18 kN de diferença) o que aumentou a distância da previsão em relação à média experimental, mas produziu resultados mais favoráveis do ponto de vista de segurança estrutural.

Por outro lado, o modelo MC2010 apresentou a pior previsão, superestimando excessivamente o valor de força na abordagem FCO (atingindo 15,40 kN de diferença). Nesse

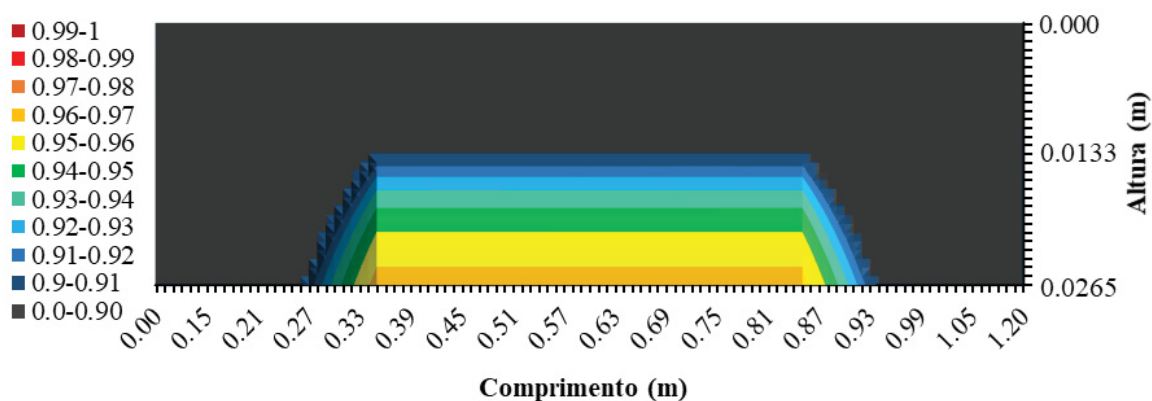
caso, a consideração do efeito escala teve um efeito bastante positivo, uma vez que reduziu os valores de força encontrados, resultando em previsões mais próximas da média experimental (reduzindo a diferença máxima para -4,16 kN).

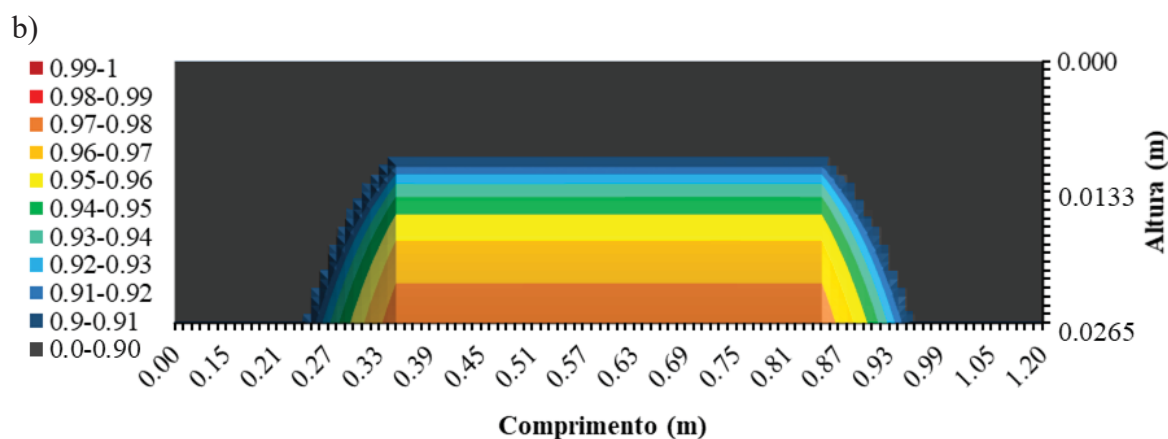
Por fim, é importante destacar que o modelo do RILEM apresentou resultados imprecisos para ambas as abordagens devido a uma simulação mal sucedida quando foram utilizados os parâmetros desse modelo para atualização da matriz de rigidez. A justificativa que explica a incapacidade do modelo do RILEM em reproduzir os resultados será abordada ao término desta seção.

Configuração final do dano

A FIGURA 42 apresenta uma configuração estimada do dano do elemento, atualizando a matriz de rigidez segundo parâmetros do modelo MC2010, considerando as duas abordagens propostas por Galeote *et al.* (2020). Para a obtenção desse formato de gráfico, procedeu-se à divisão do módulo de deformação de cada camada em cada ponto nodal pelo módulo de deformação inicial do CRFA em questão. Por esse motivo, essa configuração é considerada uma estimativa de uma região danificada, e não uma representação direta do dano em si. Portanto, à esquerda do gráfico, encontra-se uma legenda que indica a redução percentual do módulo de deformação em cada ponto em relação ao seu valor inicial. Esse método de exibição da estimativa do dano foi adotado em todas as análises realizadas neste trabalho.

FIGURA 42 - Configuração final de dano segundo o modelo MC2010 considerando a abordagem a) FCO, b) ECO
a)





Fonte: A autora (2023).

Ao examinar a configuração exibida na FIGURA 42, é possível observar uma área estimada de danificação próxima ao centro geométrico da peça, que se estende além desse ponto no segundo caso. Esse fenômeno ocorre devido ao aumento gradual da carga, que resulta em danos por tração nas fibras inferiores do elemento. A presença de danos provoca uma variação na posição da linha neutra. Conforme o dano se propaga, a posição da linha neutra se afasta do bordo inferior e o elemento perde rigidez, movendo a linha neutra em direção às camadas mais rígidas, nesse caso, as camadas comprimidas.

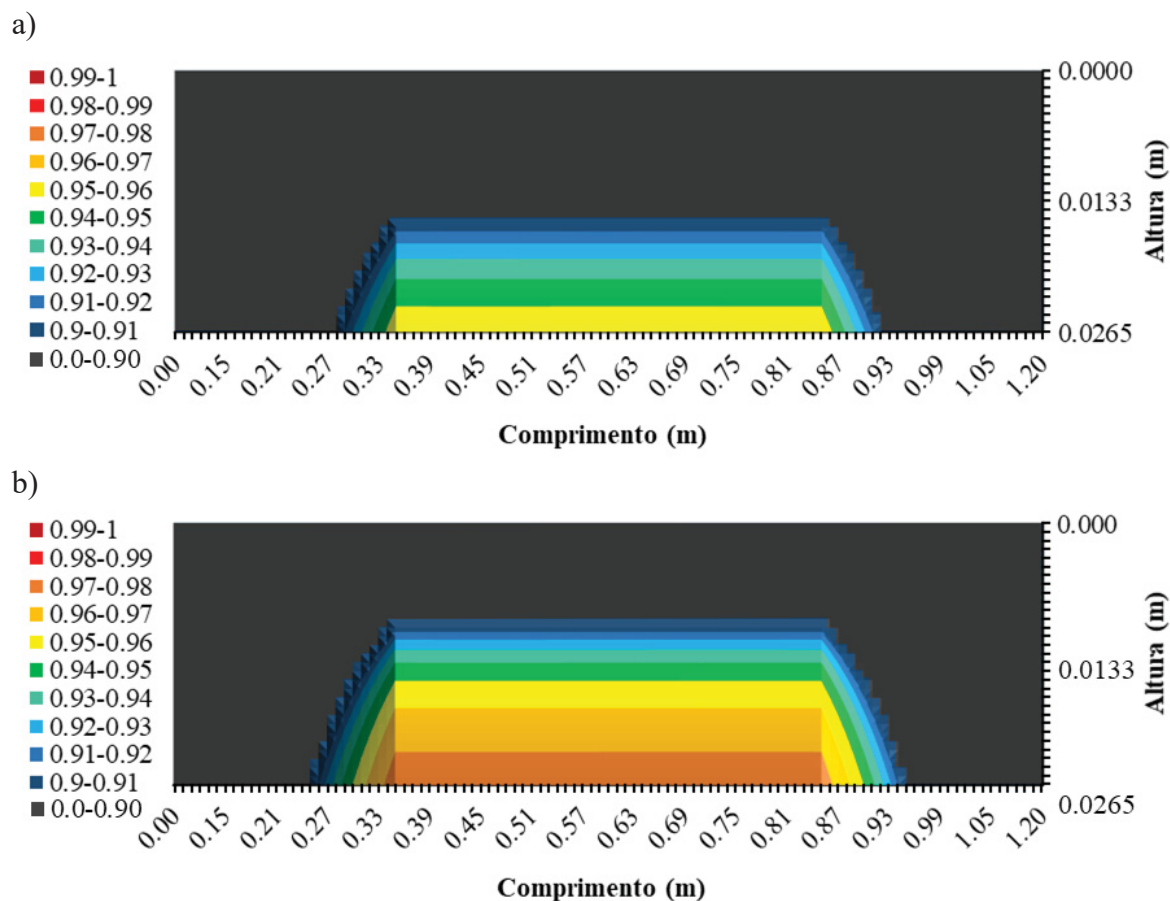
É importante ressaltar que, devido à abordagem adotada no desenvolvimento do modelo, utilizando elementos do tipo viga no MEF, a fissura não é capturada de forma discreta. Isso significa que a representação do dano apresentada não se refere necessariamente à identificação de uma fratura em si, mas sim à representação de uma região provavelmente danificada. Com isso, a configuração de dano gerada pelo modelo também indica uma possível área onde microfissuras em torno das fissuras principais podem surgir.

No que diz respeito à diferença entre as abordagens FCO e ECO, é importante destacar que a estratégia que leva em consideração o efeito escala (FIGURA 42b) resultou em uma configuração com estimativa de dano maior. Isso pode ser atribuído a diferentes fatores, sendo um deles a maior capacidade resistente, em termos de tensão última, prevista pela estratégia ECO.

Além disso, foi observada uma redução significativa no valor da deformação última ao comparar a abordagem FCO com a ECO, passando de 20% para 4,24%. Essa diferença indica que elementos de menores dimensões tendem a se romper com uma deformação menor em comparação com elementos de maiores dimensões, pois eles se danificam de forma mais acentuada para uma mesma abertura de fissura, conforme observado na FIGURA 42.

A FIGURA 43 exibe a estimativa da deterioração do elemento após a conclusão da análise, utilizando a matriz de rigidez atualizada de acordo com o modelo CE2021.

FIGURA 43 - Configuração final de dano segundo o modelo CE2021 considerando a abordagem a) FCO, b) ECO

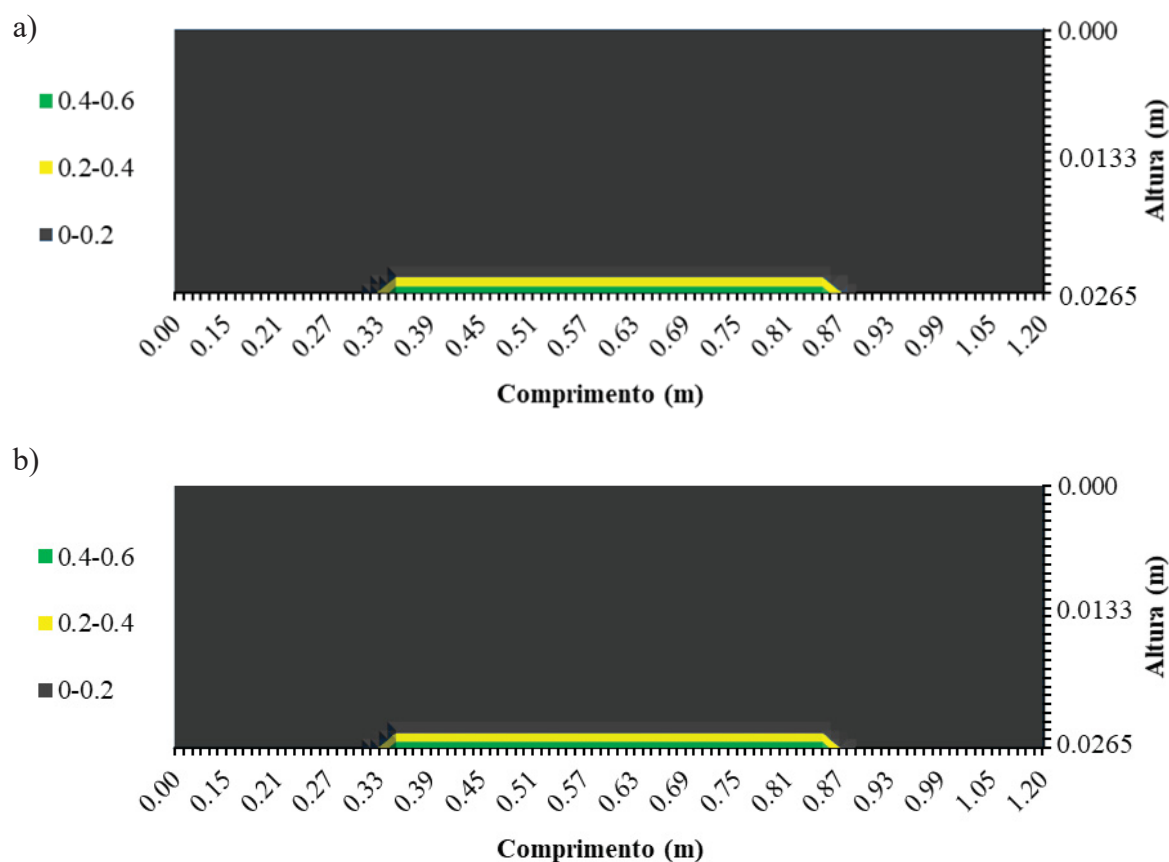


Fonte: A autora (2023).

A partir da FIGURA 43a, é possível observar que a atualização do módulo de deformação com base no modelo CE2021 resultou em uma estimativa menos danificada em comparação ao modelo MC2010 (FIGURA 42a), no que se refere à abordagem FCO. Por outro lado, os resultados obtidos para a abordagem ECO foram praticamente equivalentes. Tal diferença se deve ao fato de que, na abordagem FCO, o modelo MC2010 apresenta parâmetros com valores mais elevados, indicando que o compósito tem maior capacidade resistente. Já na abordagem ECO, os valores calculados para os parâmetros dos modelos apresentaram valores bastante próximos, o que resulta em uma configuração final de dano e resultados $F - \delta$ semelhantes entre os modelos.

A FIGURA 44 apresenta o resultado estimado de danificação do elemento ao final da análise, para a matriz de rigidez atualizada segundo o modelo do RILEM.

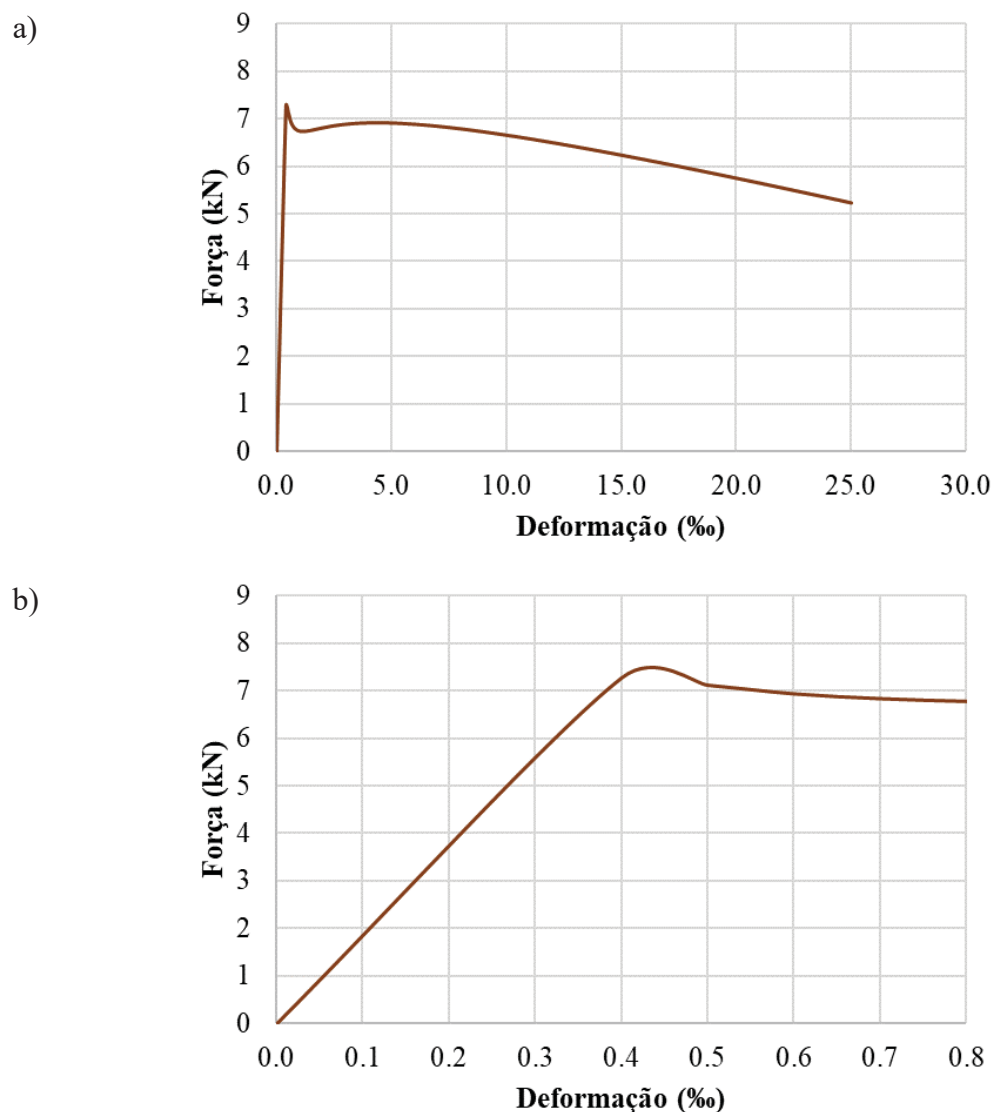
FIGURA 44 – Configuração final de dano segundo o modelo RILEM considerando a abordagem a) FCO, b) ECO



Fonte: A autora (2023).

Conforme pode ser observado na FIGURA 40, que descreve o comportamento à flexão do elemento em termos de $F - \delta$, verificou-se que o modelo do RILEM não foi capaz de reproduzir adequadamente o comportamento observado no ensaio experimental. Ao analisar a FIGURA 44, fica evidente que o programa encerrou em um nível estimado de danificação baixo, o que leva a crer que o elemento seria capaz de resistir além do indicado, sobretudo ao considerar a configuração resultante da atualização da rigidez com as demais leis constitutivas estudadas. No entanto, a programação foi interrompida antes. Esse fato pode ser atribuído à forma como o incremento de carga foi implementado, que ocorre de forma incremental sem nenhuma técnica associada para reduzir o valor da força com o decorrer da análise. A fim de elucidar o ocorrido de maneira mais clara, apresenta-se, na FIGURA 45, o gráfico $F - \varepsilon$ gerado por meio do modelo de análise de seções (abordado no capítulo 3) utilizando os parâmetros propostos pelo modelo do RILEM na abordagem FCO.

FIGURA 45 - Deformação versus carga segundo o modelo do RILEM, para a abordagem FCO a) até a deformação última, b) até a deformação de 0,8‰



Fonte: A autora (2023).

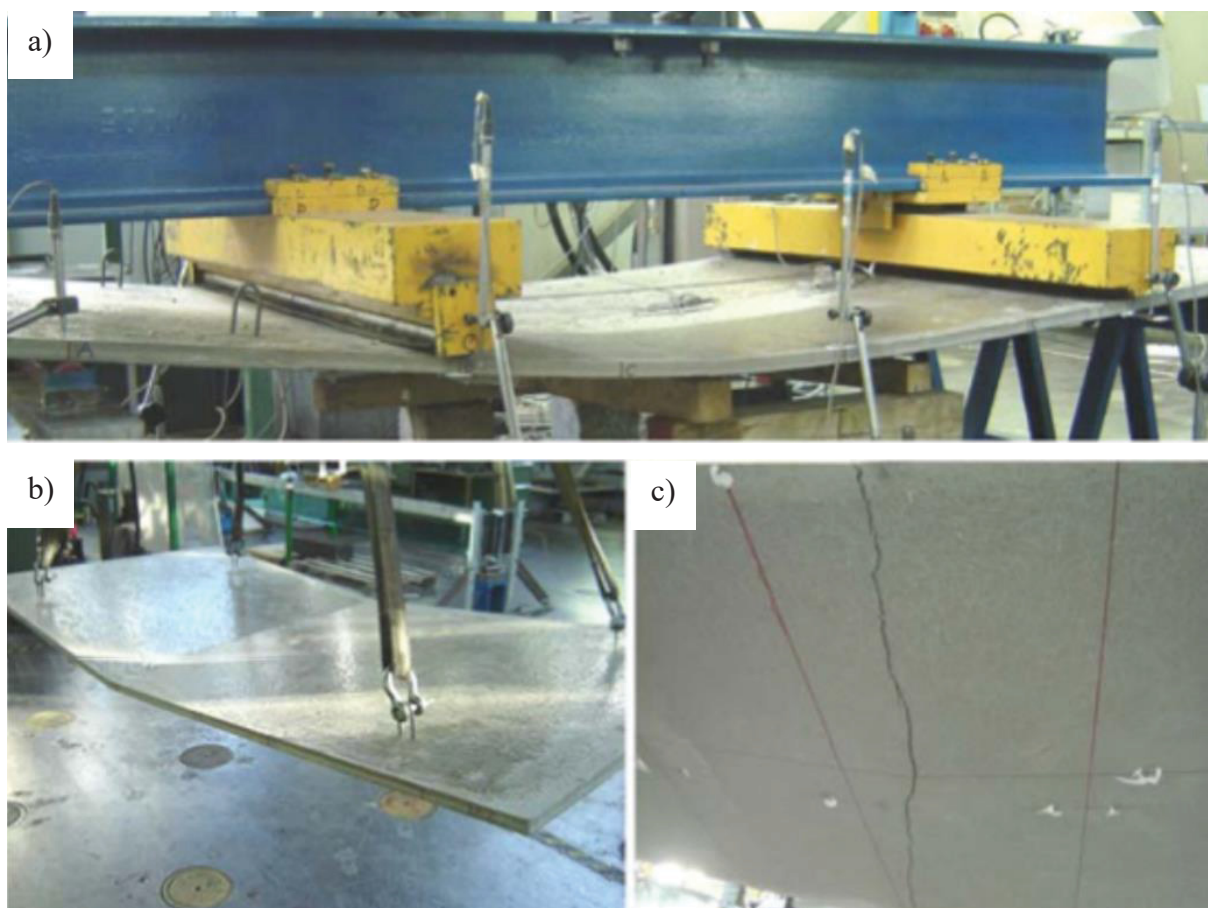
A partir da FIGURA 45 é possível perceber que o modelo do RILEM prevê um pico de capacidade resistente até cerca de 0,44‰ de deformação na base do elemento. Ao analisar os parâmetros da lei constitutiva (TABELA 10), nota-se uma queda significativa na capacidade resistente do elemento da deformação 0,342‰ para 0,44‰, o que resulta em uma diminuição do valor da força. Essa variação brusca na capacidade resistente (57,44% para a abordagem FCO e 65,93% para a estratégia ECO) leva a uma redução significativa na rigidez do elemento, resultando em valores de deslocamento que não permitem localizar a convergência e, consequentemente, encerrando o programa com um resultado impreciso.

Como já discutido no tópico de modelos constitutivos, os parâmetros propostos pelo RILEM podem não refletir a realidade, especialmente para concretos de alta resistência, cujos

valores resultantes dos parâmetros são ainda mais elevados, dado a dependência desses com o valor do f_{ck} (ver TABELA 3). Além disso, pode-se perceber que não houve diferença significativa na estimativa do dano entre as diferentes abordagens, pois a queda na capacidade resistente continuou sendo significativa a ponto de alterar a matriz de rigidez do elemento e gerar imprecisões nos resultados. Portanto, para concretos de alta resistência, o modelo do RILEM pode apresentar resultados que não refletem a realidade experimental.

Visando compreender o comportamento prático da peça, a configuração final da laje em ensaio experimental é apresentada na FIGURA 46, por meio da qual é possível identificar o estado de fissuração do elemento ensaiado por Di Prisco *et al.* (2009).

FIGURA 46 - Registros fotográficos da condição final do elemento a) antes, b e c) depois do ensaio



Fonte: Di Prisco *et al.* (2009).

No modelo experimental, é possível observar que a fissura ocorreu de maneira localizada, próxima à região central da peça, desenvolvendo uma única fissura predominante em seu sentido transversal. Como mencionado em momentos anteriores, devido à forma que a programação foi implementada, não foi possível reproduzir o dano de forma localizada nos

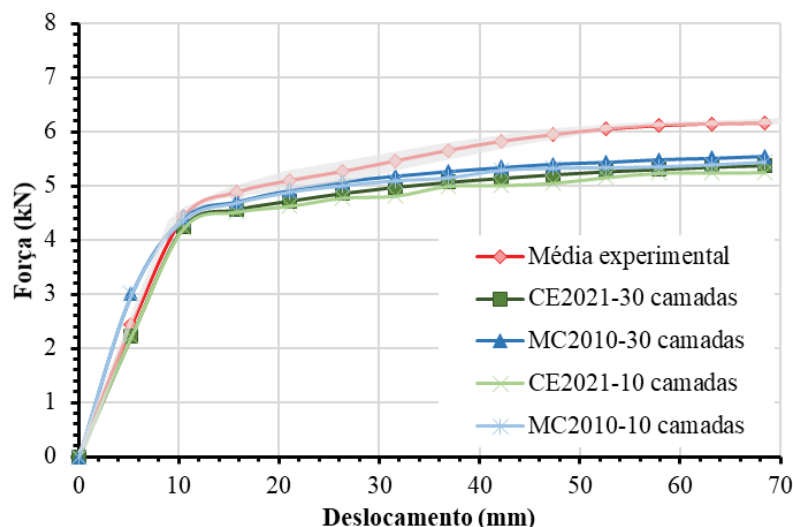
gráficos de configuração correspondentes, uma vez que as camadas adjacentes são afetadas quando uma camada próxima é danificada. No entanto, a partir do modelo realizado, compreende-se que a fissuração na peça se localizaria na região de maior dano, neste caso, na região entre a aplicação dos carregamentos (conforme observado na FIGURA 42 e na FIGURA 43), o que foi verificado na prática.

Discretização da seção em diferentes camadas

Conforme abordado na seção 4.2.4, o modelo de rigidez equivalente consiste em dividir a seção transversal do elemento estudado em camadas. Tal quantidade de camadas deve ser suficiente para reproduzir com precisão a realidade da peça em questão, permitindo que cada camada apresente seu próprio estado de tensão e seja danificada de forma distinta, o que possibilita uma análise mais precisa. Tendo isso em vista, realizou-se a mesma análise descrita anteriormente ($F - \delta$ e configuração final de dano) para a abordagem ECO, mas com a seção dividida em apenas 10 camadas, em contraposição às 30 camadas utilizadas para gerar os resultados previamente apresentados.

Na FIGURA 47 é apresentada uma comparação das respostas previstas pelos modelos constitutivos para o deslocamento do ponto central do elemento durante a aplicação de carga, para uma seção dividida em 10 e 30 camadas. A análise foi repetida apenas para a abordagem ECO, que obteve melhores resultados, uma vez que o objetivo desta discussão é unicamente destacar a diferença de precisão causada pela variação no número de camadas utilizadas para as previsões. Ademais, o modelo do RILEM não foi incluído neste estudo, devido à falta de resultados completos, mesmo ao variar o número de camadas.

FIGURA 47 – Deslocamento *versus* carga máxima considerando a abordagem ECO para um modelo com 10 e 30 camadas

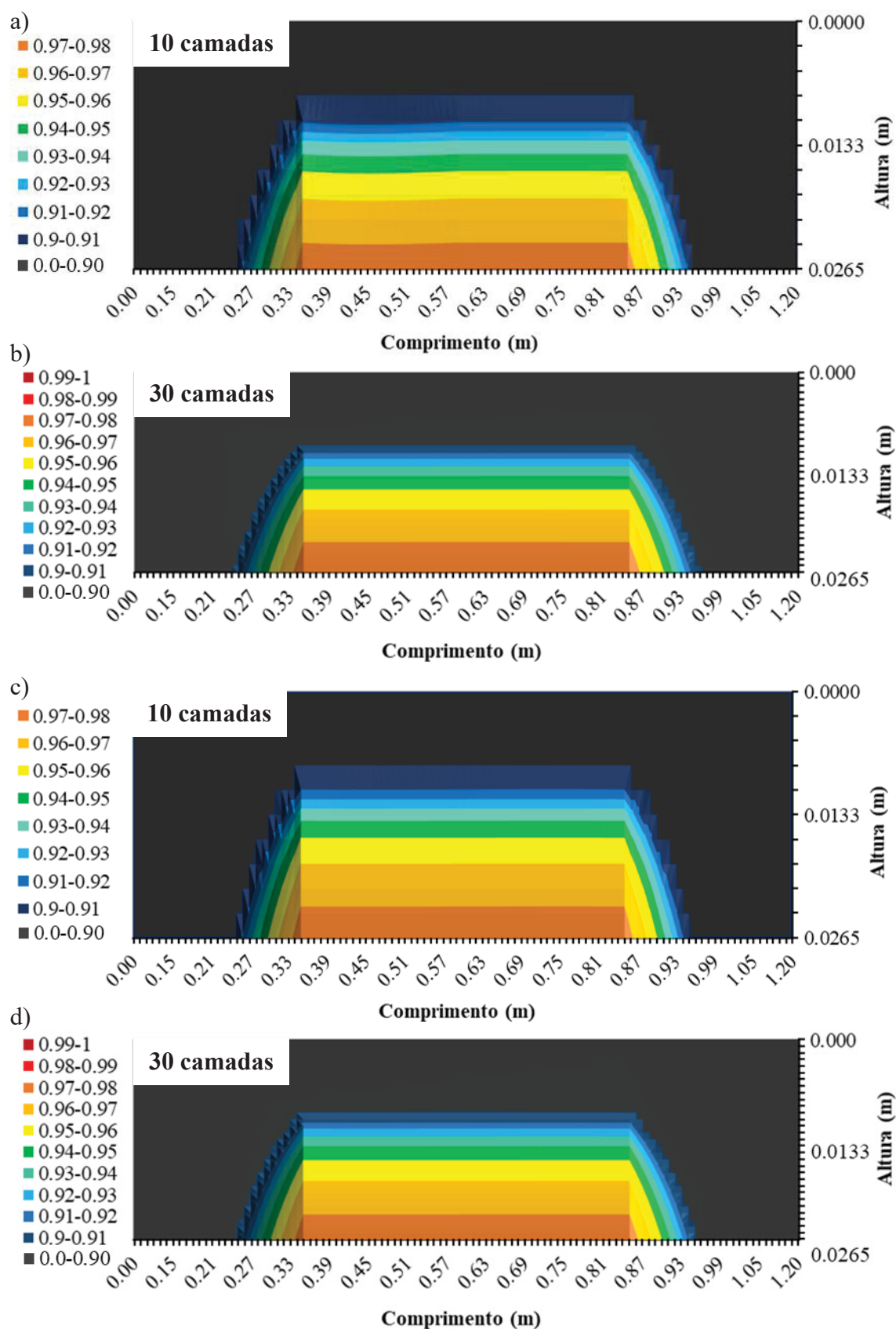


Fonte: A autora (2023).

A partir da análise da FIGURA 46, é possível discernir uma discreta diferença nas previsões ao comparar as discretizações com 10 e 30 camadas. Esse fenômeno decorre da maior intensidade da danificação em discretizações com menor número de camadas que, por consequência, prevê valores menores de forças se comparada com a simulação da seção mais discretizada. Assim sendo, entende-se que quanto maior o número de camadas, menor será a área de danificação na seção, resultando em uma distribuição mais uniforme da danificação e, por conseguinte, em uma curva mais representativa da realidade e com valores superiores de força dada a menor danificação do elemento.

A fim de complementar a discussão supracitada, apresenta-se na FIGURA 48 a estimativa de dano obtida pelo MC2010 e pelo CE2021, considerando a seção transversal dividida em 10 e 30 camadas, a fim de estabelecer um comparativo.

FIGURA 48 – Configuração final de dano para um modelo com 10 e 30 camadas, respectivamente, segundo a abordagem ECO, considerando a) MC2010 – 10 camadas, b) MC2010 – 30 camadas, c) CE2021 – 10 camadas, d) CE2021 – 30 camadas



Fonte: A autora (2023).

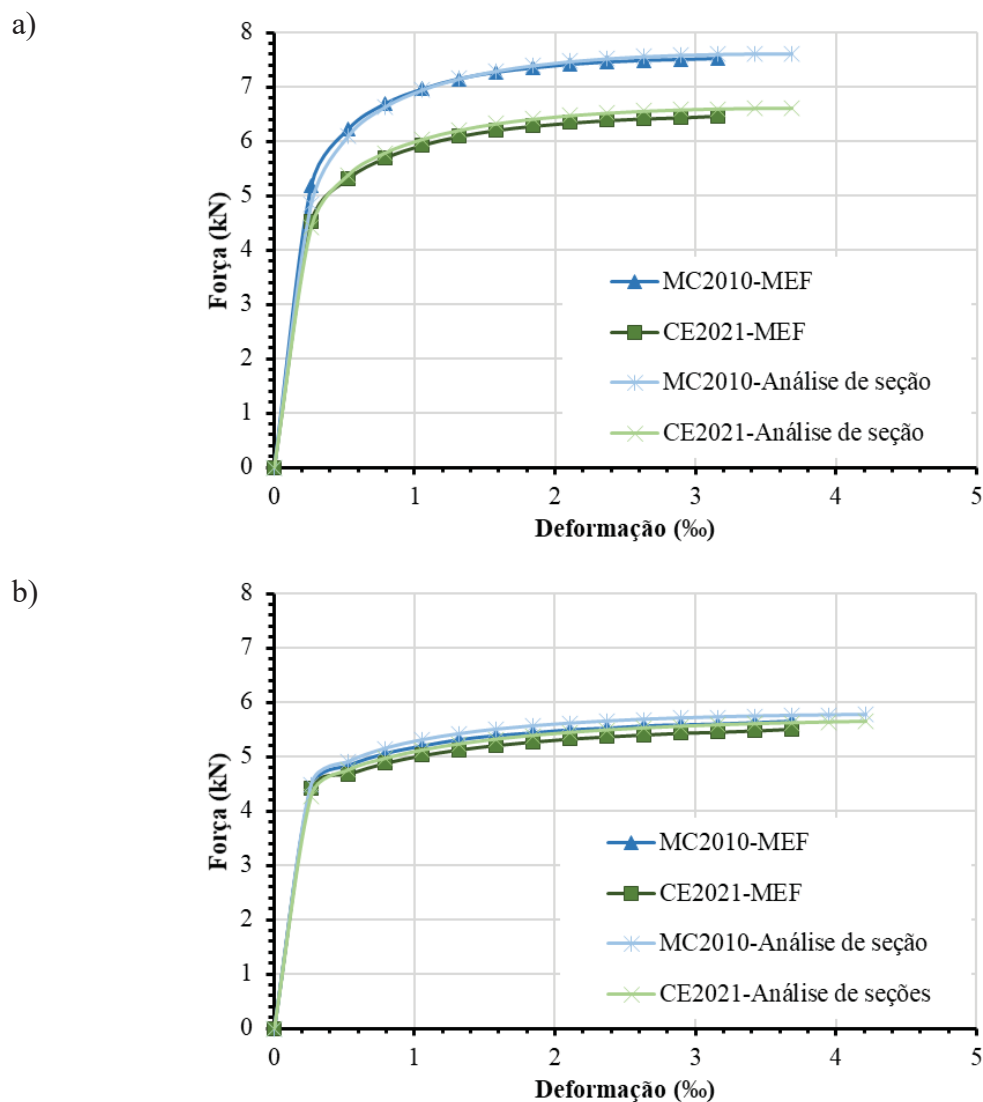
Na FIGURA 48, é evidente uma maior estimativa de danificação do elemento com a seção discretizada com 10 camadas em comparação com a seção discretizada com 30 camadas, o que tende a resultar em aproximações de valores de força menores, conforme observado. Com a adição de mais camadas, as regiões mais solicitadas, como o bordo inferior, podem ser melhor refinadas, melhorando a estimativa de distribuição do dano e, conseqüentemente, as respostas não lineares de $F - \delta$.

Resultados em termos de $F - \varepsilon$

No capítulo 3 deste trabalho, é apresentada a elaboração de um modelo de análise de seções transversais, por meio de uma programação específica. Esse modelo é capaz de fornecer o momento que a seção está submetida, dependendo da deformação na base da seção, com base em parâmetros de leis constitutivas que descrevem o comportamento à tração do CRFA. Utilizando equações de resistência dos materiais, é possível encontrar a força que o elemento está submetido a partir do valor do momento na seção. Para uma compreensão mais detalhada do funcionamento deste código, recomenda-se a leitura do capítulo 3.

Com base no modelo de elementos finitos desenvolvido neste capítulo e no modelo de análise de seções mencionado acima, foi realizada uma comparação dos valores de força encontrados, considerando diferentes valores de deformação na base da seção. Espera-se, a princípio, que os valores encontrados sejam próximos. Para validar essa expectativa, foram plotadas as respostas $F - \varepsilon$ previstas pelos modelos MC2010 e CE2021 (RILEM foi desconsiderado por motivos já mencionados), considerando as duas abordagens estudadas (FCO e ECO). Os gráficos da FIGURA 49 apresentam a deformação na base no ponto em que está sendo aplicado o carregamento, sendo a força correspondente à força total aplicada, como visto anteriormente, equivalente a $2F$.

FIGURA 49 – Deformação *versus* carga máxima considerando a abordagem a) abordagem FCO, b) abordagem ECO



Fonte: A autora (2023).

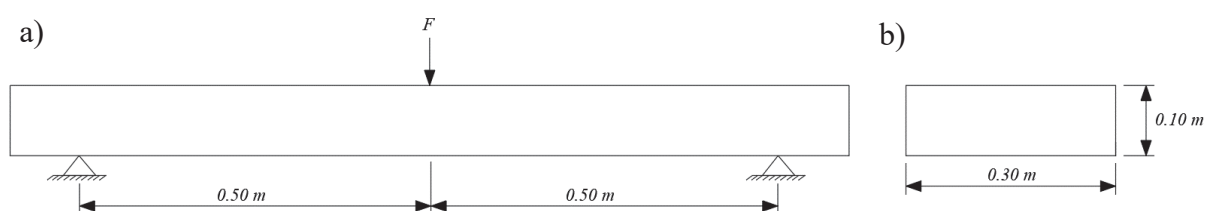
A análise dos gráficos indica que o modelo de elementos finitos apresenta, em geral, valores de deformações inferiores em comparação ao modelo de análise de seções transversais. Essa diferença ocorre devido ao fato de que, no primeiro modelo, as deformações são calculadas com base nos deslocamentos resultantes da análise de elementos finitos, enquanto no segundo modelo, são obtidas por meio das hipóteses de Navier-Bernoulli e da compatibilidade de deformações. A estimativa das deformações por meio dos deslocamentos proporciona uma avaliação mais precisa e realista do que as hipóteses simplificadoras utilizadas no modelo de análise de seções. Já que, no primeiro caso, considera-se a capacidade do material de resistir, enquanto no segundo caso, as deformações são obtidas por meio de imposições geométricas. Apesar disso, observa-se que ambos os modelos produziram respostas de forças bastante

similares. Esse resultado reforça a confiabilidade das previsões estimadas pelo modelo apresentado neste capítulo.

4.5.2 Comparação com o elemento de dimensões 0,30x1,00x0,10 m

Nesta seção, analisa-se um elemento biapoiado submetido a um carregamento no meio do vão. A FIGURA 50 apresenta um esboço da geometria da laje, do carregamento aplicado e da configuração dos apoios.

FIGURA 50 – Ilustração do exemplo 3.5.2 a) vista lateral, b) seção transversal



Fonte: A autora (2023).

Os dados de entrada e os parâmetros do material para a simulação em questão estão listados na TABELA 12. Devido à não realização do ensaio para obtenção do módulo de elasticidade do elemento, ao contrário do caso anterior, esse parâmetro foi calculado de acordo com o proposto por cada recomendação técnica adotada.

TABELA 12 – Dados de entrada e parâmetros do material

Informações do modelo	Número de elementos finitos	102				
	Número de camadas discretizas na seção	30				
Informações da carga	Incremento da carga (kN)	0,032				
Parâmetros do CRFA	fck	29,13				
	fcm	43,86				
	E	Calculado conforme sugestão de cada normativa/recomendação				
	FCO	CMOD _i (mm)	0,50	1,50	2,50	3,50
		F _i (kN)	19,94	14,40	9,80	7,90
		fR _i (MPa)	5,82	4,20	2,86	2,31
	ECO	CMOD _i (mm)	0,40	1,20	2,00	2,80
		F _i (kN)	19,99	14,85	10,48	7,79
		fR _i (MPa)	5,83	4,33	3,06	2,27
Tolerância		0,0001				

Fonte: A autora (2023).

Os parâmetros do CRFA listados na TABELA 12 foram obtidos a partir dos resultados do ensaio de caracterização por 3 pontos, realizado de acordo com a NBR 16940 (ABNT, 2021). Na abordagem ECO, calculam-se novos valores de CMOD, diferentes dos encontrados no ensaio experimental, que fossem equivalentes às dimensões do elemento a ser simulado. Com isso, foi possível obter novos valores de tensão, os quais também se encontram apresentados na TABELA 12. As dimensões do ensaio de caracterização não foram adaptadas a geometria do elemento, e por isso, o comprimento característico adotado foi de $l_{cs} = h_{sp} = 125$ cm.

Modelos constitutivos

Os valores dos parâmetros utilizados em cada um dos modelos constitutivos para atualizar o módulo de deformação do CRFA, e consequentemente, da matriz de rigidez ao longo da análise, estão apresentados na TABELA 13. Tais parâmetros são descritos tanto para a abordagem FCO quanto para a ECO.

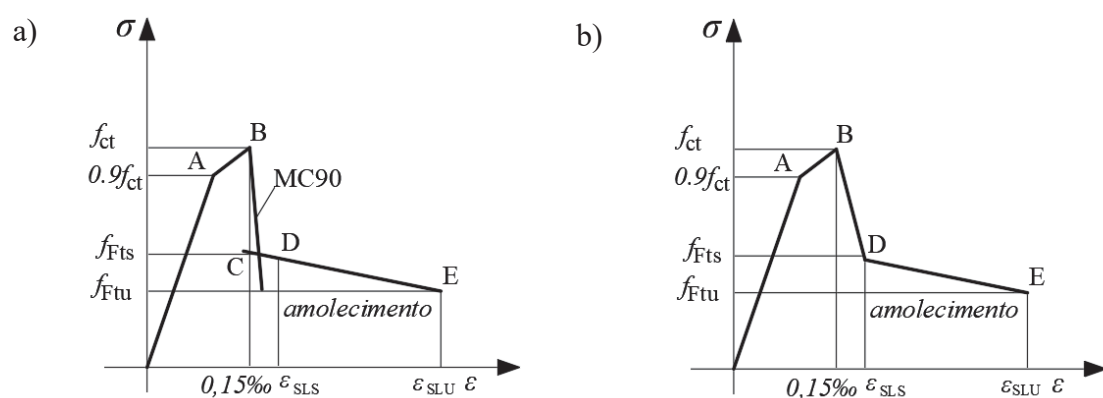
TABELA 13 – Parâmetros dos modelos constitutivos considerando a abordagem FCO e ECO

Abordagem	Modelo	σ_1 (MPa)	ε_1 (‰)	σ^* (MPa)	ε^* (‰)	σ_2 (MPa)	ε_2 (‰)	σ_u (MPa)	ε_u (‰)
FCO	RILEM	4,80	0,14	-	-	2,62	0,24	0,85	25,00
	CE2021	2,68	0,09	-	-	2,62	0,19	0,27	20,00
	MC2010	2,56	0,09	2,84	0,15	2,62	4,00	0,27	20,00
ECO	RILEM	4,80	0,14	-	-	2,63	0,24	0,84	25,00
	CE2021	2,68	0,09	-	-	2,63	0,19	0,36	16,00
	MC2010	2,56	0,09	2,84	0,15	2,63	3,20	0,36	16,00

Fonte: A autora (2023).

É importante ressaltar que uma simplificação foi adotada para os parâmetros calculados de acordo com a lei constitutiva do MC2010. Nesse exemplo, tratando-se de um CRFA de comportamento *softening* ($f_{ct} < f_{FTS}$), foi assumido o caso I proposto pelo MC2010. No entanto, no caso I, a recomendação indica que o valor de σ_c deve ser menor que o valor de f_{ct} , o que não foi verificado neste caso. Por esse motivo, o valor de σ_c foi desconsiderado. Portanto, considerando as hipóteses apresentadas, o diagrama de acordo com os parâmetros do MC2010 ficou conforme apresentado na FIGURA 51.

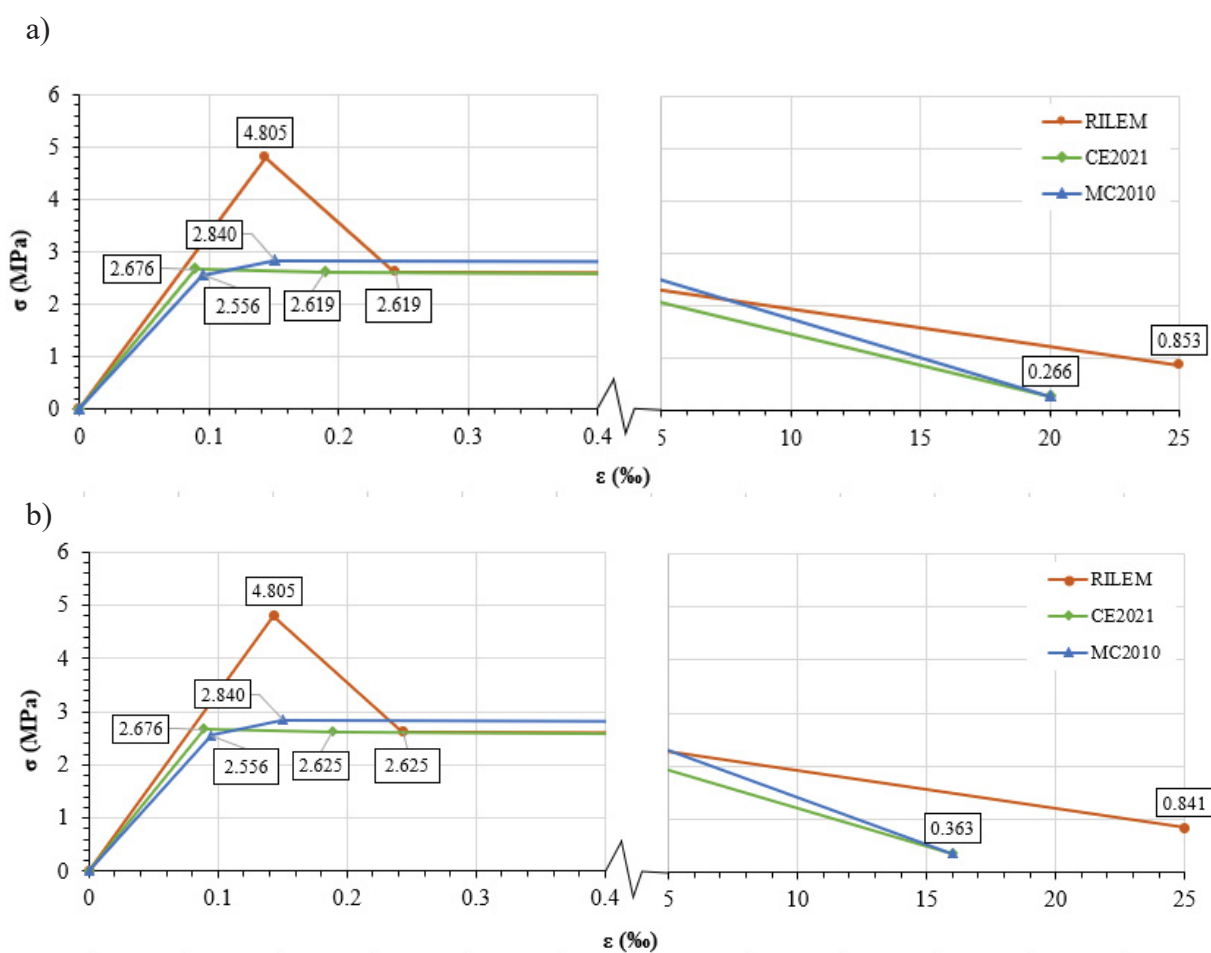
FIGURA 51 – a) MC2010 e b) Hipóteses assumidas para a simulação do elemento do exemplo 3.4.1



Fonte: A autora (2023).

Os diagramas apresentados na FIGURA 52 fornecem uma representação visual dos dados apresentados na TABELA 13.

FIGURA 52 – Diagramas trilineares considerando a abordagem a) FCO, b) ECO



Fonte: A autora (2023).

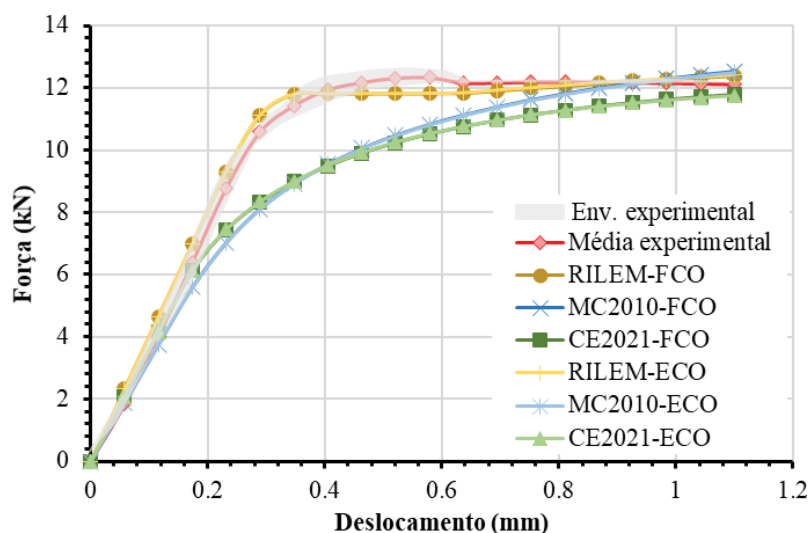
Analizando as informações apresentadas, constata-se que, de fato, o modelo do RILEM recomenda valores superestimados para a tensão de fissuração, conforme já havia sido observado no exemplo 4.5.1, com uma discrepância de 44,16% e 40,83% em relação aos modelos CE2021 e MC2010, respectivamente. Além disso, nota-se que, dentre os modelos simulados, o CE2021 previu novamente o menor valor para esse parâmetro, com uma diferença, nesse caso, de cerca de 5% em relação ao MC2010.

No que tange à contribuição das fibras, tem-se que o CE2021 aponta uma significativa participação das fibras, com σ_2 representando 97,76% de σ_1 . Em contraste, os demais modelos apresentaram perspectivas menos otimistas, com valores de 92,60% e 54,58% para o MC2010 e RILEM, respectivamente. O fato do RILEM apresentar valores reduzidos de contribuição das fibras se deve também a alta estimativa do valor de σ_1 por esse modelo. De todo modo, as mesmas conclusões já haviam sido observadas na simulação anterior, o que confirma o padrão de comportamento previsto por cada lei constitutiva quanto a contribuição das fibras.

Quando se trata da tensão última, o modelo RILEM produziu valores diferentes dos outros modelos que apresentaram estimativas equivalentes. De maneira mais precisa, é possível observar um aumento de 68,23% e 57,14% na abordagem FCO e ECO, respectivamente, em comparação com as outras leis constitutivas estudadas. É importante ressaltar que os valores de deformação permaneceram os mesmos em ambas as abordagens do modelo RILEM, já que foram fixados em sua recomendação técnica e são independentes da geometria do elemento. Como resultado, os valores previstos para a tensão máxima por essa equação constitutiva foram semelhantes em ambas as estratégias. Em geral, nota-se que é uma característica do modelo RILEM apresentar valores de resistência maiores.

Resultados em termos de $F - \delta$

A FIGURA 53 apresenta as respostas não lineares de deslocamento no meio vão previstas pelo modelo proposto, levando em consideração diferentes leis constitutivas e as abordagens FCO e ECO, em comparação às respostas dos ensaios experimentais.

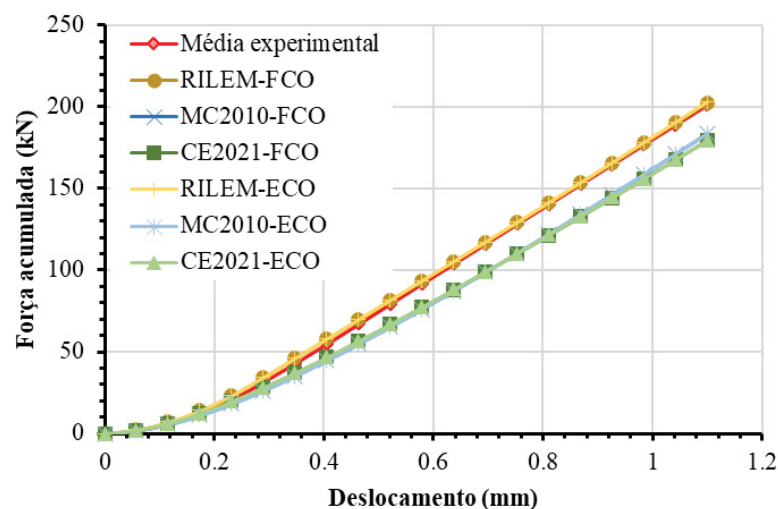
FIGURA 53 – Força *versus* deslocamento

Fonte: A autora (2023).

Verifica-se, na FIGURA 53, os resultados das simulações com cada uma das leis constitutivas estudadas (RILEM, MC2010 e CE2021) até o ponto de deslocamento atingido no ensaio experimental. Ao analisar as curvas resultantes, percebe-se que não há evidência de uma diferença relevante nos resultados obtidos em relação à alteração das abordagens, do FCO para o ECO. Isso pode ser atribuído ao fato de que a geometria da peça ensaiada não difere significativamente da geometria do corpo de prova utilizado nos ensaios de caracterização, permitindo assim uma representação mais precisa dos resultados.

Com relação às previsões dos modelos, ao realizar uma análise exclusivamente gráfica, constata-se que o modelo do RILEM foi o que melhor reproduziu os resultados experimentais, com sua curva praticamente sobreposta aos dados obtidos. Por outro lado, o MC2010 e o CE2021 apresentaram previsões semelhantes entre si, porém que se distanciam de forma mais significativa da média experimental, especialmente na faixa de deslocamento inicial. No entanto, é possível observar que à medida que o ensaio avança, as curvas obtidas com o auxílio desses dois últimos modelos se aproximam dos dados experimentais.

Repetindo o raciocínio realizado na seção 4.5.1, cujo princípio estabelecido pelo teste de *Kolmogorov-Smirnov* foi adotado, gerou-se um gráfico que representa a relação entre a força acumulada e o deslocamento, o qual está apresentado na FIGURA 54.

FIGURA 54 – Força acumulada *versus* deslocamento

Fonte: A autora (2023).

Ademais, também é disponibilizada a TABELA 14, a qual apresenta as diferenças máximas observadas em cada simulação no que se refere a força acumulada em relação aos valores médios experimentais, considerando todos os pontos representados no gráfico da FIGURA 54.

TABELA 14 – Máxima diferença das cargas acumuladas previstas por cada modelo em relação à média experimental

Modelo	Diferença (kN)	
	FCO	ECO
RILEM	3,18	3,18
MC2010	-18,54	-18,63
CE2021	-20,90	-21,68

Fonte: A autora (2023).

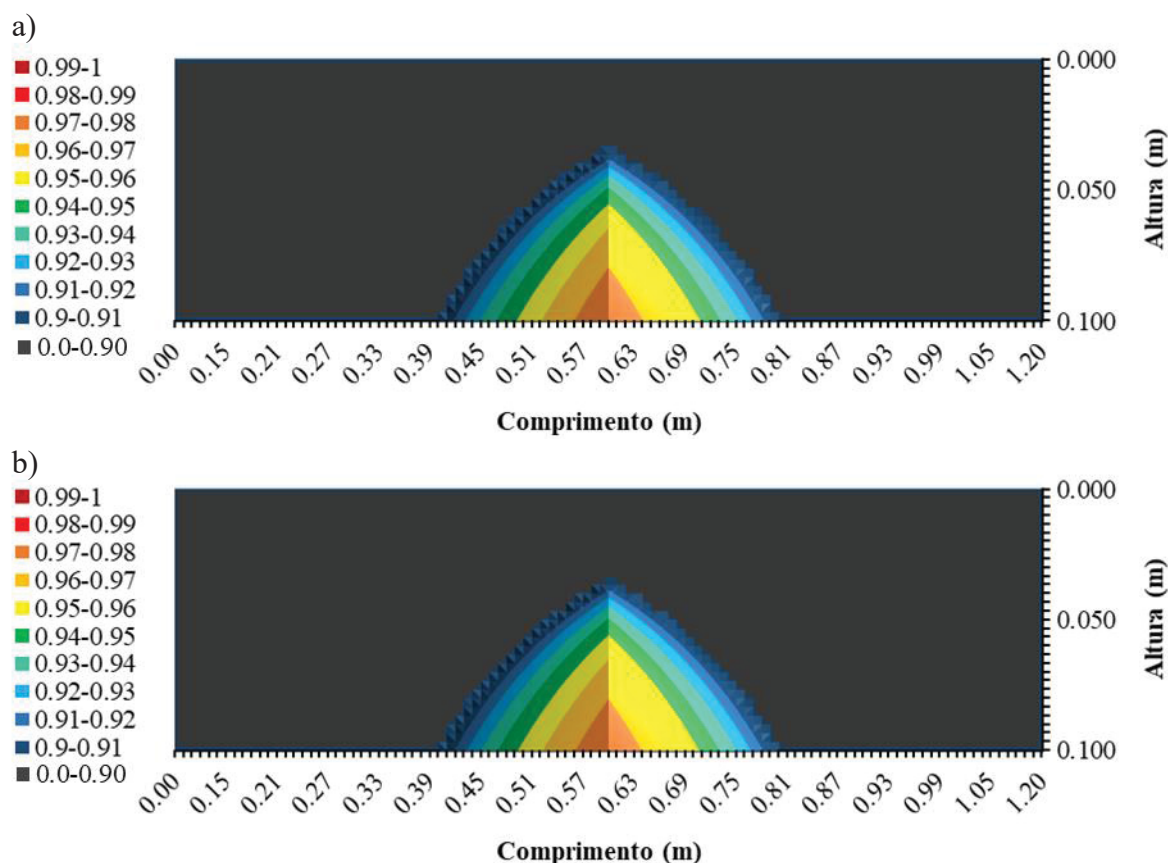
Ao realizar uma análise da FIGURA 54 e da TABELA 14, fica evidente que os valores de força obtidos por meio das simulações estão, de modo geral, próximos dos valores experimentais. Destaca-se o modelo do RILEM, que apresentou uma notável capacidade de previsão, com uma diferença máxima de apenas 3,18 kN em relação à força acumulada. Os outros modelos (MC2010 e CE2021) mostraram estimativas que, apesar de mais distantes da média experimental (-21,68 kN de diferença máxima para o CE2021 e -18,83 kN para o MC2010), subestimam os resultados, o que é favorável em termos de segurança estrutural. Por último, confirma-se a ideia de que a abordagem ECO não teve um impacto significativo nos

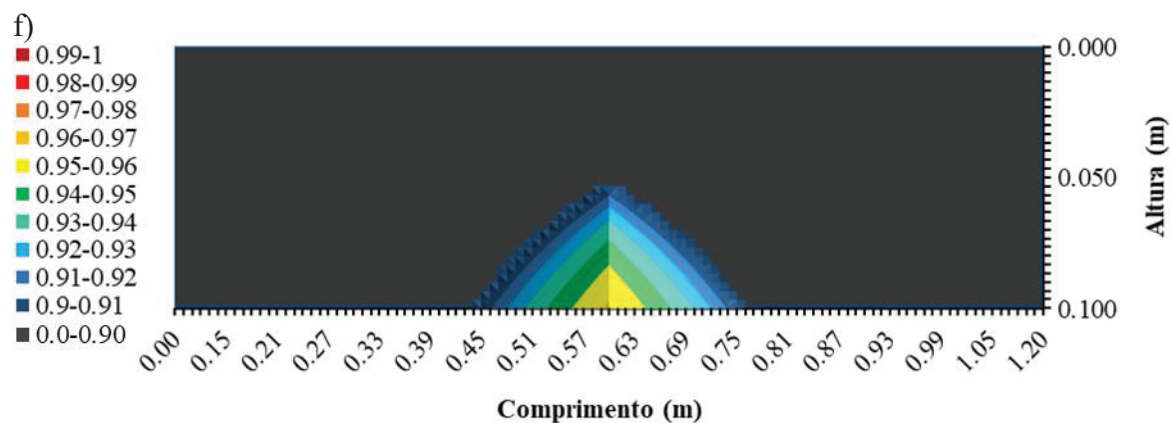
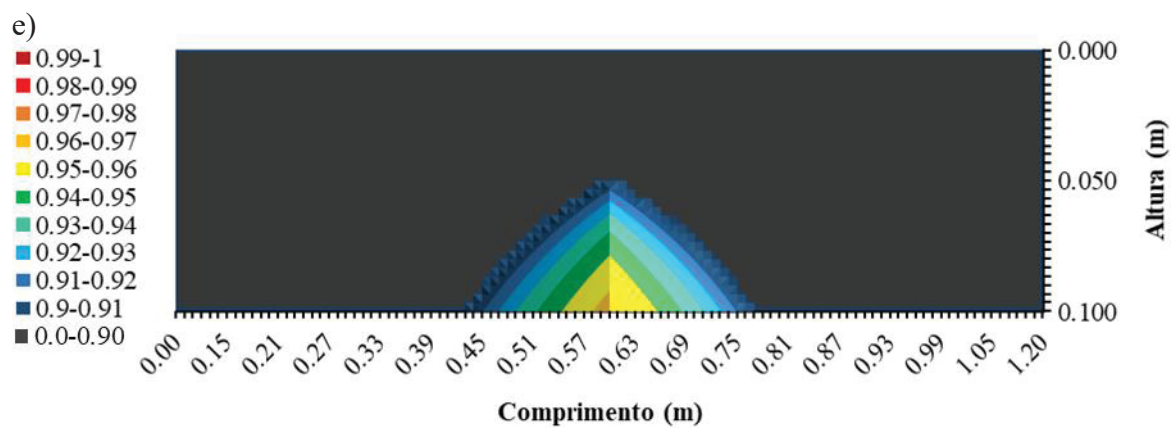
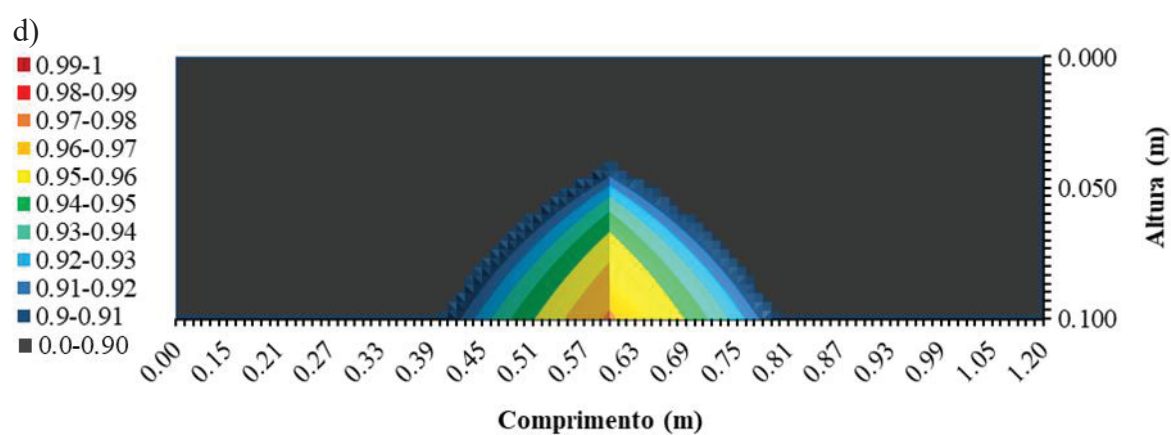
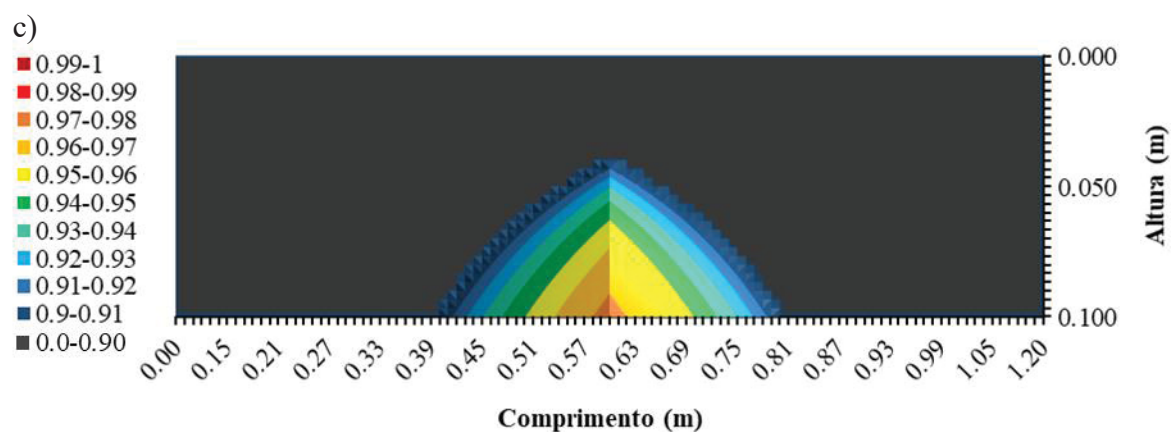
valores de força encontrados, devido à proximidade das dimensões do corpo de prova de caracterização com a peça ensaiada.

Configuração final do dano

A configuração final estimada do dano do elemento, obtida da mesma forma que descrita na seção 4.5.1, é apresentada na FIGURA 55, que foi atualizada de acordo com os parâmetros dos modelos RILEM, MC2010 e CE2021, respectivamente. Esses modelos foram avaliados levando em consideração as abordagens FCO e ECO propostas por Galeote *et al.* (2020).

FIGURA 55 – Configuração final de dano considerando a) RILEM – FCO, b) RILEM – ECO, c) MC2010 – FCO, d) MC2010 – ECO, e) CE2021 – FCO, f) CE2021 – ECO





Fonte: A autora (2023).

Vale destacar que como o ensaio foi realizado por 3 pontos, o diagrama de momento não prevê uma região de flexão pura, como pode ser observado na seção 4.5.1, mas sim um diagrama triangular que se intensifica na região onde o carregamento está sendo aplicado. Por essa razão, pode-se observar, de acordo com a FIGURA 55, que as estimativas de dano apresentam maior intensidade na região central da peça, diminuindo à medida que se aproximam das extremidades do elemento, especificamente em sua face tracionada. Esse fenômeno acarreta uma variação na posição da linha neutra nessa área.

Ao analisar as configurações de estimativas do dano do elemento conforme diferentes recomendações, o modelo RILEM estima valores de danificação maiores em comparação com o modelo MC2010. Por sua vez, o modelo MC2010 revela resultados de danificação superiores ao modelo CE2021. A diferença na taxa de danificação entre os modelos RILEM e MC2010 se deve, principalmente, aos valores distintos dos parâmetros pós-fissuração. O modelo MC2010 possui uma inclinação de reta pós-fissuração menor, resultando em tensões mais elevadas nessa região. Assim, o modelo MC2010 tem uma taxa de danificação menor, mesmo com um deslocamento maior devido à sua maior resistência. A FIGURA 51 apresenta a hipótese adotada que justifica esse comportamento do modelo MC2010, estabelecendo uma queda de tensão menor após a fissuração. Os valores mais baixos de danificação encontrados no modelo CE2021 são explicados pelos menores valores de seus parâmetros em comparação com os outros modelos, resultando em uma estimativa de deslocamento também mais baixa.

Ao comparar as diferentes abordagens (FCO e ECO) em relação à configuração de danos, notou-se que as variações foram mínimas. Isso se deve ao fato de que, ao analisar cada abordagem, houve pouca mudança nos parâmetros do modelo, já que a geometria do corpo de prova utilizado para caracterização é similar ao elemento que está sendo simulado. Em situações em que ocorreram alterações, na abordagem ECO, verificou-se uma redução na danificação.

Para melhor compreender o comportamento desse elemento na prática, é apresentada na FIGURA 56 sua configuração antes e depois do ensaio experimental.

FIGURA 56 - Registros fotográficos da condição final do elemento a) antes, b e c) depois do ensaio



Fonte: A autora (2023).

Ao analisar a FIGURA 56, é possível perceber que a falha ocorre devido a uma única fissura próxima ao ponto de carregamento da peça. Isso indica que as configurações do dano, anteriormente apresentadas, são capazes de estimar as regiões danificadas da peça, já que a fissura começa a se formar por tração na borda inferior e se desenvolve à medida que a carga é aplicada. É importante lembrar que a representação da configuração do dano na FIGURA 55 está mais relacionada à região onde o processo de danificação ocorre, e não à identificação precisa da fratura em si. Por esse motivo, os diagramas apresentam uma área de dano mais abrangente do que a observada após o ensaio experimental.

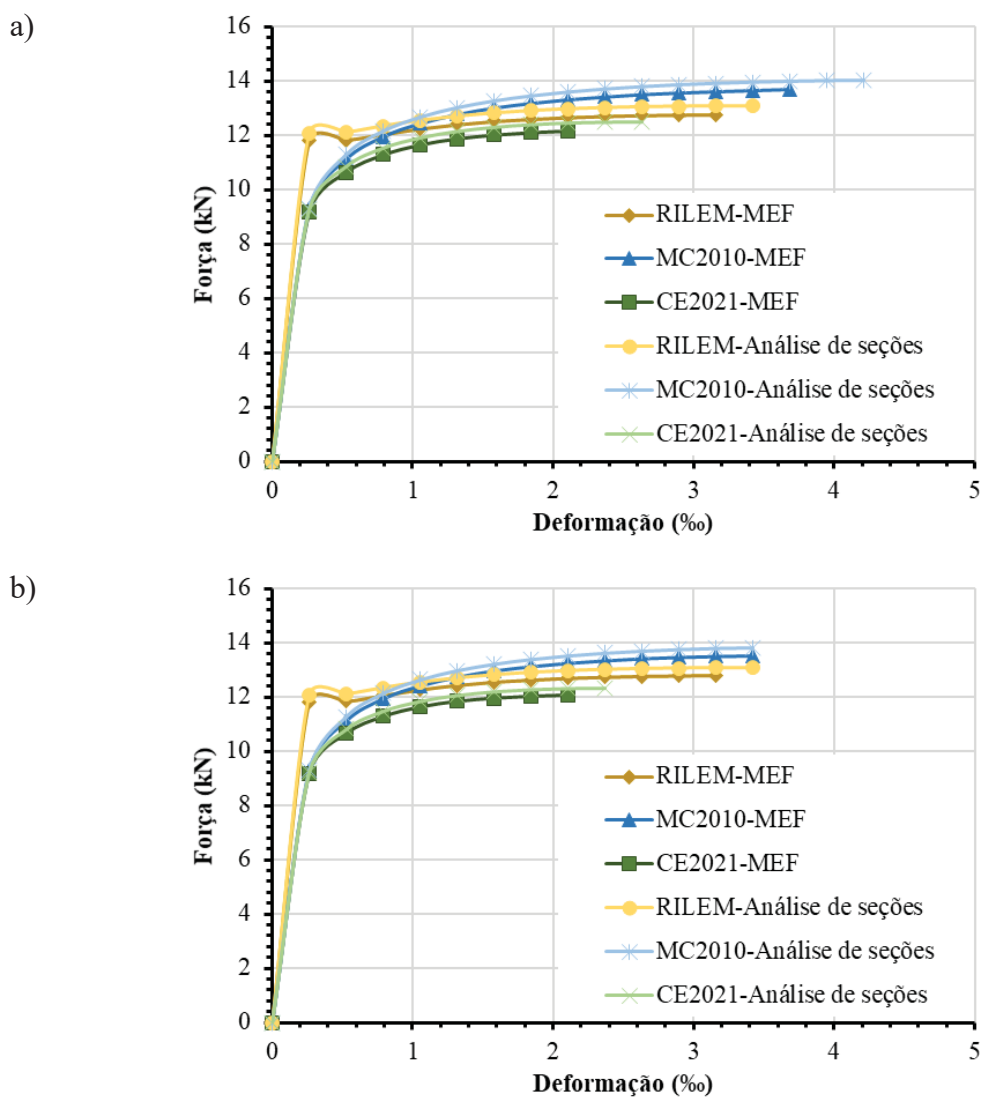
A FIGURA 56b e FIGURA 56c mostram o desenvolvimento da fissura em ambos os lados da peça. Nota-se que a abertura da fissura é bastante reduzida, sobretudo na borda superior da peça, o que sugere que o ensaio experimental poderia ter sido conduzido mais adiante. Em condições ideais, o ensaio deveria ter sido levado até a contribuição final das fibras, possibilitando a avaliação precisa da carga última resistida antes da queda no desempenho do

material. Dessa forma, as conclusões apresentadas seriam mais completas e, portanto, mais confiáveis.

Resultados em termos de $F - \varepsilon$

Neste tópico, serão comparados os resultados de $F - \varepsilon$ obtidos para o elemento em análise utilizando o modelo proposto neste capítulo e o modelo de análise de seções transversais desenvolvido no capítulo 3, assim como feito na seção anterior. Na FIGURA 57, apresenta-se as curvas $F - \varepsilon$ obtidos para essa comparação.

FIGURA 57 - Deformação *versus* carga máxima considerando a abordagem a) abordagem FCO, b) abordagem ECO



Fonte: A autora (2023).

Ao analisar a FIGURA 57, é possível notar que os resultados previstos para a força e a deformação são semelhantes em ambos os modelos. Entretanto, o modelo de análise de seções transversais apresentou valores ligeiramente superiores de força. Em relação às deformações, todas as leis constitutivas previram as deformações de forma semelhante, em ambas as abordagens, sendo que o modelo de elementos finitos, para todos os casos, previu um valor menor deformação em comparação com o modelo de análise de seções transversais. Vale mencionar que os valores de deformação para o modelo do RILEM permanecem os mesmos em ambas as estratégias (FCO e ECO), uma vez que são fixados pela normativa e não dependem do comprimento característico do corpo de prova de caracterização. Por fim, ressalta-se que as discrepâncias nos valores de força e deformação podem ser atribuídas à forma como as deformações em cada modelo foram calculadas, conforme explicado na análise realizada na seção 4.5.1.

4.6 CONCLUSÕES FINAIS

O quarto capítulo do trabalho apresenta os resultados da simulação de elementos unidirecionais de CRFA sob flexão simples até a carga última utilizando o código computacional desenvolvido. A partir da análise dos dados, é possível inferir as seguintes conclusões, que foram agrupadas em tópicos para melhor compreensão e organização.

F – δ

- a) Constatou-se, no exemplo 4.5.1, que o efeito escala tem influência nos resultados obtidos. Isso fica evidente ao notar que a diferença máxima de carga prevista pelos modelos MC2010 e CE2021 em relação à média experimental variou com a mudança de estratégia de FCO para ECO. Para o modelo MC2010, a diferença evoluiu de 15,40 kN para -4,16 kN, enquanto para o modelo CE2021, a diferença evoluiu de 2,41 kN para -7,18 kN. Assim, evidencia-se que as simulações que não levaram em consideração esse efeito (estratégia FCO) resultaram em superestimação dos valores de força última, ainda que de forma discreta. Vale ressaltar que o modelo do RILEM não pôde ser avaliado nesse exemplo específico. Portanto, é compreensível que, em estruturas com dimensões significativamente diferentes daquelas utilizadas para caracterizar o material (como no exemplo 4.5.1), a confiabilidade das previsões estruturais possa ser comprometida se essa diferença não for considerada. Nesse sentido, a estratégia ECO se mostra mais

segura para esses casos, uma vez que não superestima os valores de força previstos em nenhuma das simulações;

- b) No exemplo 4.5.2, as simulações apresentaram valores de força próximos aos experimentais, para ambas abordagens (FCO e ECO), com as menores diferenças encontradas nas previsões realizadas pelo modelo do RILEM, seguido pelo MC2010 e, por último, o CE2021 (sendo a diferença máxima das cargas acumuladas previstas para cada modelo em relação à média experimental de 3,18 kN, -18,63 kN e -21,68 kN, respectivamente). A abordagem ECO teve um impacto mínimo nos valores previstos devido à similaridade das dimensões do corpo de prova de caracterização com a peça ensaiada. Portanto, fica evidente que a consideração da estratégia ECO é especialmente importante em casos em que a diferença entre o elemento em análise e o corpo de prova do ensaio de caracterização seja mais significativa, como no exemplo 4.5.1. Visto que, na análise gráfica realizada no exemplo 4.5.2, foi possível verificar que todos os modelos, independente da consideração do efeito escala, tiveram estimativas razoavelmente adequadas para a previsão da curva $F - \delta$; e
- c) No que tange à escolha da lei constitutiva mais apropriada para atualizar a matriz de rigidez do programa, pode-se concluir que, para o exemplo 4.5.1, o modelo CE2021, com a abordagem FCO, apresentou os resultados mais próximos, embora tenham sido levemente superestimados (com uma diferença máxima de carga acumulada de 2,41 kN). Apesar disso, recomenda-se a utilização do modelo MC2010 aplicando a estratégia ECO, uma vez que este demonstrou resultados mais confiáveis e próximos à média experimental (com uma diferença máxima de carga acumulada de -4,16 kN). No exemplo 4.5.2, o modelo que melhor reproduziu o comportamento foi o RILEM, apresentando uma diferença máxima de carga acumulada de 3,18 kN. Os demais modelos subestimaram o comportamento do material, mostrando melhorias à medida que o deslocamento aumentava. Nessa perspectiva, destaca-se o modelo MC2010, que previu uma diferença máxima de força acumulada em relação à média experimental de aproximadamente -18 kN. Embora esse valor seja maior do que o obtido pelo RILEM, é uma estimativa segura, pois não subestima os resultados. A discrepância no desempenho dos modelos constitutivos estudados entre os dois exemplos estudados pode ser atribuída às diferentes características do CRFA.

Configuração final de dano

- a) Embora o diagrama de configuração do dano não tenha reproduzido com precisão a localização exata da fissura na peça ensaiada, é possível identificar a região com maior probabilidade de ocorrência. Ao analisar os exemplos estudados, tornou-se evidente que a progressão do dano e, conseqüentemente, o surgimento de um processo de fissuração são decorrentes de esforços de tração concentrados na região central da peça. A limitação do modelo utilizado em relação à representação da fissura está relacionada ao fato de que ele considera a região danificada como um todo. Isso pode ser atribuído ao fato de que o elemento utilizado, uma viga para a programação em MEF, não é capaz de reproduzir a fissuração de forma discreta;
- b) No exemplo 4.5.1, em que o efeito escala é significativo, constatou-se que a sua consideração tende a gerar configurações de dano que demonstram maior capacidade de resistência em comparação com aquelas geradas sem considerá-lo, já que apresentou uma danificação maior em comparação com a estratégia que não leva tal efeito em consideração. Este resultado está em concordância com a observação de Galeote *et al.* (2020), que indica que a orientação preferencial das fibras exerce uma influência significativa em elementos de CRFA com baixa espessura ou formato em placa, conferindo-lhes maior capacidade de resistência;
- c) Ao analisar as configurações de danificação do elemento conforme diferentes recomendações, observou-se que o modelo RILEM estima valores de danificação mais elevados em comparação com o modelo MC2010, enquanto o modelo MC2010 revela resultados de danificação superiores ao modelo CE2021. A discrepância na taxa de danificação entre os modelos é principalmente atribuída aos diferentes valores dos parâmetros pós-fissuração calculados segundo cada recomendação técnica; e
- d) Os parâmetros sugeridos pelo RILEM não se provaram uma opção adequada para prever a configuração do dano - e, por consequência, a força e os deslocamentos - em CRFA de alta resistência. Isso ocorre porque os parâmetros propostos pelo RILEM limitaram a capacidade da programação de localizar a convergência antes de se alcançar o resultado desejado (nesse caso, a carga última). No entanto, para CRFA de resistência normal, as estimativas de dano apresentaram resultados semelhantes aos de outros modelos. Portanto, é possível considerar a utilização dos parâmetros propostos pelo modelo do RILEM para atualizar o módulo de elasticidade dos elementos de CRFA em

casos de resistência normal. É importante destacar que a implementação de uma técnica para reduzir o incremento de força na programação proposta pode tornar viável o uso do modelo do RILEM para CRFA de alta resistência, mas seria necessário a realização de mais análises para chegar a uma conclusão definitiva.

Discretização das camadas

- a) Ao analisar os gráficos de configuração do dano, pode-se observar que a precisão das respostas em termos de $F - \delta$ previstas pelos modelos de elementos finitos pode ser afetada pelo número de camadas em que a seção é discretizada. Isso ocorre devido ao fato de que um maior número de camadas resulta em uma danificação mais uniforme em comparação com modelos que possuem menos camadas, o que impacta diretamente nos resultados previstos.

$F - \varepsilon$

- a) Os valores de força e deformação obtidos pelo modelo de elementos finitos foram, em geral, semelhantes aos do modelo de análise de seções transversais, abordado no capítulo 3, com pequenas diferenças devido aos métodos distintos utilizados para o cálculo das deformações. Durante as análises realizadas, foram comparados inicialmente os modelos sem considerar o efeito escala (abordagem FCO), resultando em valores semelhantes. Posteriormente, foram conduzidas simulações com alterações nas deformações (abordagem ECO), obtendo resultados novamente similares. Portanto, entende-se que as previsões estão relacionadas aos dados de entrada inseridos, já que, para as análises realizadas considerando ambas estratégias, os resultados entre os modelos foram próximos. Assim sendo, conclui-se que os modelos dependem da correta inserção dos dados, o que, no caso de elementos sujeitos ao efeito escala, requer considerações específicas, tais como adoção da abordagem ECO proposta por Galeote *et al.* (2020);
- b) A avaliação das deformações por meio dos deslocamentos obtidos pelo MEF é mais realista do que as hipóteses simplificadoras utilizadas no modelo de análise de seções. No MEF, as deformações são calculadas levando em consideração os deslocamentos e o comportamento do material, enquanto no modelo de análise de seções, as deformações

são definidas com base em hipóteses simplificadoras, como a hipótese de *Navier-Bernoulli*, o que provavelmente contribuiu para as diferenças nos resultados em comparação com aqueles obtidos utilizando o MEF; e

- c) Embora tenha havido uma sutil diferença nos valores de deformação encontrados em alguns casos, os valores de força previstos em ambos os modelos foram bastante semelhantes, uma vez que, ao realizar uma análise gráfica das curvas previstas por ambos os modelos, nota-se uma sobreposição. Isso reforça os resultados obtidos, sobretudo em termos de força, pelo modelo elaborado e objetivado neste capítulo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta dissertação, foram propostos vários objetivos específicos, cujos resultados foram descritos detalhadamente nos capítulos correspondentes. Contudo, com o intuito de oferecer uma perspectiva abrangente das principais contribuições alcançadas, serão apresentadas a seguir as conclusões gerais para cada capítulo de resultado.

5.1 CONCLUSÕES GERAIS

Capítulo 3

- a) Compreende-se que a lei constitutiva proposta pelo MC2010 é a mais apropriada para a simulação do comportamento à flexão simples de CRFA, pois é capaz de estimar de forma precisa tanto os valores de carga de fissuração quanto as cargas residuais observadas nos ensaios experimentais; e
- b) Em relação aos fatores que influenciam as previsões do comportamento à flexão do CRFA, é possível afirmar que a resistência à tração última das fibras foi identificada como o parâmetro mais significativo. Além disso, foi observada a relevância da resistência média à compressão da matriz nos resultados, principalmente quando o modelo do RILEM é utilizado para prever a carga de fissuração e o modelo CE2021 é utilizado para prever as cargas residuais. Em contrapartida, o volume de fibras, juntamente com o fator de forma se mostraram com as menores capacidade de influenciar as estimativas decorrentes das simulações.

Capítulo 4

- a) Foi constatada a necessidade de considerar o efeito do tamanho durante a simulação de elementos estruturais que sofrem influência significativa do efeito escala, a fim de obter valores de força mais realistas. Neste estudo, optou-se por adotar a estratégia proposta por Galeote et al. (2020), a qual demonstrou previsões de valores de força mais seguros em comparação com os resultados experimentais. Por exemplo, ao simular o elemento sujeito de forma relevante ao efeito escala (exemplo 4.5.1), observou-se uma evolução da diferença acumulada nos valores de força em relação à média experimental de 15,40 kN para -4,16 kN no modelo MC2010 e de 2,41 kN para -7,18 kN no modelo CE2021;

- b) Com base nos dois exemplos analisados, conclui-se que o modelo MC2010 é o mais apropriado para obter os resultados desejados. Ao considerar a abordagem ECO proposta por Galeote et al. (2020) no primeiro exemplo, obteve-se a menor diferença de carga acumulada nas simulações realizadas, com resultados voltados para a segurança, atingindo um valor de -4,16 kN. Da mesma forma, no segundo exemplo, o modelo MC2010 também demonstrou os melhores resultados, considerando apenas os que priorizam a segurança, com uma diferença em torno de -18 kN para ambas as abordagens estudadas. Portanto, entende-se que, para fins de dimensionamento, o modelo MC2010 considerando a abordagem ECO é o modelo mais adequado;
- c) Quanto à configuração do dano, constatou-se que o modelo inviabiliza a reprodução do dano de forma análoga à ocorrência da fissura em experimentos. Em vez disso, o modelo é capaz de reproduzir uma provável região danificada do elemento, fornecendo uma estimativa das regiões mais danificadas e, portanto, com maior probabilidade de ocorrência de fissuras embora não possa determinar com exatidão a localização exata da fissura em si. Além disso, apesar das diferentes configurações de ensaio adotadas para cada elemento simulado, observou-se uma semelhança na intensidade das configurações de danos finais previstas segundo uma mesma lei constitutiva. Tal fato indica que o modelo proposto é capaz de reproduzir a configuração do dano de forma semelhante entre os diferentes elementos, o que aponta uma certa consistência quanto a previsibilidade do comportamento estrutural dos elementos de CRFA;
- d) Foi observado que o número de camadas em que a seção é discretizada tem potencial de influenciar nos resultados obtidos. Isso se deve ao fato de que uma distribuição mais homogênea do dano no elemento possibilita uma reprodução mais precisa de seu comportamento, uma vez que não superestima sua danificação, conforme observado nos gráficos de configuração de dano gerados com uma seção com 10 e 30 camadas; e
- e) Os resultados obtidos para as forças no modelo de elementos finitos e no modelo de análise de seções se demonstraram próximos, atestando a validade dos resultados apresentados por ambos os modelos. Em relação às deformações, observaram-se ligeiras variações nos resultados gerados, decorrentes das diferenças na forma de cálculo da aplicada em cada modelo.

5.2 PUBLICAÇÕES

A respeito dos assuntos tratados nesta dissertação, mais especificadamente sobre a análise do desempenho do modelo constitutivo de CRFA proposto pelo RILEM, há um artigo publicado no Simpósio Internacional de Mecânica dos Sólidos (MECSOL), intitulado “*Performance analysis of the RILEM constitutive model for Steel Fiber Reinforced Concrete*”. Ademais, foi aceito na revista IBRACON de Estruturas e Materiais, conceito QUALIS CAPES A3, um artigo intitulado “*Comparative analysis of multilinear constitutive models of steel fiber reinforced concrete*”. Neste último, foram avaliadas e comparadas as equações constitutivas sugeridas pelo RILEM, MC2010 e CE2021, bem como se procedeu a avaliação de possíveis parâmetros que influenciam as respostas obtidas por tais modelos (conforme capítulo 3 do presente trabalho). Por fim, também é esperado que outras publicações decorram das discussões e conclusões apresentadas no capítulo 4 desta dissertação.

5.3 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

A partir das conclusões alcançadas e das lacunas identificadas, são apresentadas a seguir sugestões para trabalhos futuros referentes aos modelos estudados.

Modelo de análise de seções

- a) Realizar o mesmo estudo considerando as recomendações de modelos constitutivos propostas por outras normativas (sobretudo a normativa brasileira), bem como, por autores na literatura;
- b) Analisar a influência de outros tipos de fibras quanto às previsões realizadas pelos modelos;
- c) Avaliar a influência de outros parâmetros capazes de influenciar o comportamentos dos modelos constitutivos, tais como: e;
- d) Realizar simulações em elementos que não sejam exclusivamente corpos de prova de ensaios de caracterização, a fim de avaliar também a influência do efeito escala na previsão de cada lei constitutiva.

Modelo de elementos finitos

- a) Comparar os resultados numéricos mais ensaios experimentais de elementos unidirecionais de CRFA, preferencialmente sujeitos ao efeito escala;
- b) Acrescentar uma estratégia de incremento automático de carga, a qual deve ser capaz não apenas de calcular um incremento proporcional à linearidade ou não da estrutura, mas também de escolher corretamente o seu sinal, de forma possibilitar a simulação da curva $F - \delta$ completa e não apenas até a carga última;
- c) Incorporar a quadratura de Gauss,
- d) Considerar a presença de armaduras longitudinais contínuas;
- e) Adaptar o modelo para outros tipos de estruturas além de elementos unidirecionais;
- f) Realizar simulações com elementos finitos bidimensionais ou tridimensionais, a fim de identificar de forma discreta as fissuras; e
- g) Repetir as simulações realizadas para a recomendação de lei constitutiva proposta pela normativa brasileira a fim de avaliar a capacidade de suas previsões.

REFERÊNCIAS

- ABDELGADER, H. S.; BEN-ZEITUN, A. E.; ELGALHUD, A. A. Influence of Different Admixtures on the Mechanical Behavior of Two-Stage (Pre-Placed Aggregate) Concrete. **Design and Sustainability**, Kuwait, p. 12-14, 2007.
- ABECHE, T. D. O. **Modelagem computacional da interação dinâmica desacoplada entre viga e veículo considerando as irregularidades da via e a mecânica do dano contínuo**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR), Curitiba, 2015.
- ABID, A.; FRANZÉN, K. B. **Design of Fibre Reinforced Concrete Beams and Slabs**. 2011. 112 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Estrutural) – Chalmers University of Technology, Gotemburgo, 2011.
- ACCORNERO, F.; CARPINTERI, A.; RUBINO, A.. Post-cracking regimes in the flexural behaviour of fibre-reinforced concrete beams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 248, p. 111637, 2022.
- ALBERTI, M. G.; ENFEDAQUE, A.; GÁLVEZ, J. C. A review on the assessment and prediction of the orientation and distribution of fibres for concrete. **Composites Part B: Engineering**, v. 151, p. 274-290, 2018. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.05.040. Acesso em: 16 de abr. 2022.
- ALFERES FILHO, R. S.; MOTEZUKI, F. K.; ROMANO, R. C. O.; PILEGGI, R. G.; FIGUEIREDO, A. D. Evaluating the applicability of rheometry in steel fiber reinforced self-compacting concretes. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 9, n. 6, p. 969–988, 2017.
- ALGARRA, J. M.; CABRERA, D. G.; CABRERA, M. Á. V. Influencia de la orientación y la densidad de las fibras en la resistencia a tracción por flexión de hormigones. **Hormigón y acero**, 2017. DOI: 10.33586/hya.2019.2037. Acesso em: 15 abr. 2022.
- ÁLVARES, M.S. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado**. Tese (Doutorado) – Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos, 1999.
- ÁLVAREZ, A. B.; ÁLVAREZ, P. P.; DE LA FUENTE ANTEQUERA, A.; DE CEA, A. A. Análisis comparativo de los modelos constitutivos del hormigón reforzado con fibras. **Hormigón y Acero**, v. 61, n. 256, p. 83-101, 2010.
- ÁLVAREZ, A. B. **Characterization and modelling of SFRC elements**. 2013. 242 f. Tese (Doutorado em Engenharia da Construção) – Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2013.
- ÁLVAREZ, A.; PUJADAS, P.; DE LA FUENTE, A.; CAVALARO, S. H. P.; AGUADO, A. Assessment of the fibre orientation factor in SFRC slabs. **Composites Part B: Engineering**, v. 68, p. 343-354, 2015. DOI: 10.1016/j.compositesb.2014.09.001. Acesso em: 15 abr. 2022.

ÁLVAREZ, A.; PUJADAS, P.; DE LA FUENTE, A.; CAVALARO, S. H. P.; AGUADO, A. Influence of the Type of Fiber on the Structural Response and Design of FRC Slabs. **Journal of Structural Engineering**, v. 142, n. 9, p. 04016054, 2016. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001515. Acesso em: 07 jul. 2023.

ALVES, L. M. **Método dos Elementos Finitos**. 438 f. Trabalho Acadêmico (Disciplina Métodos dos Elementos Finitos) - Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos, Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas, Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **C1550-10a**: Standard Test Method for Flexural Toughness of Fiber Reinforced Concrete (Using Centrally Loaded Round Panel). West Conshohocken, 2010.

AMIN, A.; FOSTER, S. J.; MUTTONI, A. Derivation of the σ -w relationship for SFRC from prism bending tests. **Structural Concrete**, v. 16, n. 1, p. 93–105, 2015. DOI: 10.1002/suco.201400018. Acesso em: 28 mar. 2022.

AMIN, A.; FOSTER, S. J. Predicting the flexural response of steel fibre reinforced concrete prisms using a sectional model. **Cement and Concrete Composites**, v. 67, p. 1-11, 2016. DOI: 10.1016/j.cemconcomp.2015.12.007. Acesso em: 19 abr. 2022.

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. **UNE 83512-1**: Hormigones con fibras. Determinación del contenido de fibras de acero. Madri, 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16935:2021**: Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento. Rio de Janeiro, 2021.

_____. **ABNT NBR 16940**: Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) - Método de ensaio. Rio de Janeiro, 2021.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, v. 1, n. 7, 2003.

BACHA, L. **Applications of steel fiber reinforced concrete in Finnish infrastructure**. 2019. 131 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia da Construção) – Aalto-yliopisto, Espoo, 2019.

BARROS, J. A. O.; CUNHA, V.; RIBEIRO, A.; ANTUNES, J. Post-cracking behaviour of steel fibre reinforced concrete. **Materials and Structures**, 2005, v. 38, n. 1, p. 47-56. DOI: 10.1007/BF02480574. Acesso em: 27 jul. 2022.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

BEHBAHANI, H. P.; NEMATOLLAHI, B.; FARASATPOUR, M. Steel fiber reinforced concrete: a review. *In*: Digital Library, 2011, Katubeda. **Anais...** Katubeda: University of Moratuwa, 2011.

BENTUR, A.; MINDESS, S. **Fibre reinforced cementitious composites**. United Kingdom: Elsevier, 2007.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (BOE). Código Estructural. Madri, 2021.

BRITE-EURAM PROJECT. **BRPR-CT98-0813**: Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete. Luxemburgo, 2002.

BUTTIGNOL, T. E. T.; FERNANDES, J. F.; BITTENCOURT, T. N.; SOUSA, J. L. A. O. Design of reinforced concrete beams with steel fibers in the ultimate limit state. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, n. 5, p. 997–1024, 2018. DOI: 10.1590/S1983-41952018000500006. Acesso em: 21 mar. 2022.

CARVALHO, M. R.; BARROS, J. A.; ZHANG, Y.; DIAS-DA-COSTA, D. (2020). A computational model for simulation of steel fibre reinforced concrete with explicit fibres and cracks. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 363, p. 112879. DOI: 10.1016/j.cma.2020.112879. Acesso em: 19 abr. 2022.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118: 2014**. São Carlos: EdUFSCar, 2014.

CAVALARO, S. H. P.; AGUADO, A. Intrinsic scatter of FRC: an alternative philosophy to estimate characteristic values. **Materials and structures**, v. 48, n. 11, p. 3537-3555, 2015. DOI: 10.1617/s11527-014-0420-6. Acesso em: 19 abr. 2022.

COMISIÓN PERMANENTE DEL HORMIGÓN (CPH). **EHE-08**: Instrucción del Hormigón Estructural. Madri, 2008.

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE (CNR). **CNR-DT 204**: Guide for the Design and Construction of Fiber-Reinforced Concrete Structures. Roma, 2006.

CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: An introduction to computer methods**. J. Wiley & Sons, New York, 1981

CUNHA, V. M. C. F.; BARROS, J. A. O.; SENA-CRUZ, J. M. A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites. **Computers and structures**, v. 94, p. 22-33, 2012. DOI: 10.1016/j.compstruc.2011.12.005. Acesso em: 19 abr. 2022.

DANISH TECHNOLOGICAL INSTITUTE (DTI). **Guideline for execution of steel fibre reinforced SCC**. Berlim, 2013.

DE LA FUENTE, A.; AGUADO, A.; MOLINS, C. Numerical model for the non linear analysis of precast and sequentially constructed sections. **Hormigón y Acero**, v. 57, n. 247, p. 69-87, 2008.

DE LA FUENTE, A. **New methodology for the design of structural concrete pipes**. 2011. 154 f. Tese (Doutorado em Engenharia da Construção) – Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2011.

DE MONTAIGNAC, R.; MASSICOTTE, B.; CHARRON, J. P. Design of SFRC structural elements: flexural behaviour prediction. **Materials and structures**, v. 45, n. 4, p. 623-636, 2012.

DE OLIVEIRA, M. A. B.; DA CUNHA, R. R.; DE SOUZA PICANÇO, M.; DE OLIVEIRA, D. R. C.; RAMOS, E. M. L. S.; DA SILVA, M. P. Analysis of the influence of test method and properties of steel fiber addition on concrete under the three-point flexural tensile. **Ingeniare: Revista Chilena de Ingenieria**, v. 28, n. 3, p. 373-382, 2020. DOI: 10.4067/S0718-33052020000300373. Acesso em: 02 abr. 2022.

DESTRÉE, X.; MANDL, J. Steel fibre only reinforced concrete in free suspended elevated slabs: Case studies, design assisted by testing route, comparison to the latest SFRC standard documents. **Tailor made concrete structures**, p. 437-443, 2008.

DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR STAHLBETON (DAfStb). **Richtlinie Stahlfaserbeton**. Berlin, 2010.

DEUTSCHER BETON-UND BAUTECHNIK-VEREIN E.V (DBV). **Guide to good practice steel fibre concrete**. Berlin, 2001.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN EN 12390**: Prüfung von Festbeton, Berlin, 2009.

DIANA FEA. **Diana User's Manual, Release 10.6**. Delft, The Netherlands, 2022.

DIAS-DA-COSTA, D.; CERVENKA, V.; GRAÇA-E-COSTA, R. Model uncertainty in discrete and smeared crack prediction in RC beams under flexural loads. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 199, p. 532-543, 2018. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.06.006. Acesso em: 19 de abr. 2022.

DI PRISCO, M.; LAMPERTI, M.; LAPOLLA, S.; KHURANA, R. S. HPFRCC thin plates for precast roofing. *In*: Proceedings of the 2nd International Symposium on Ultra High-Performance Concrete. Kassel, 2008.

DI PRISCO, M.; PLIZZARI, G.; VANDEWALLE, L. Fibre reinforced concrete: New design perspectives. **Materials and Structures/Materiaux et Constructions**, v. 42, n. 9, p. 1261–1281, 2009. DOI: 10.1617/s11527-009-9529-4. Acesso em: 21 mar. 2022.

DI PRISCO, M.; COLOMBO, M.; DOZIO, D. Fibre-reinforced concrete in fib Model Code 2010: principles, models and test validation. **Structural Concrete**, v. 14, n. 4, p. 342-361, 2013. DOI: 10.1002/suco.201300021. Acesso em: 21 abril 2023.

DI PRISCO, M.; FERRARA, L.; LAMPERTI, M. G. Double edge wedge splitting (DEWS): an indirect tension test to identify post-cracking behaviour of fibre reinforced cementitious composites. **Materials and Structures**, v. 46, n. 11, p. 1893-1918, 2013.

DI PRISCO, M.; MARTINELLI, P.; PARMENTIER, B. On the reliability of the design approach for FRC structures according to fib Model Code 2010: the case of elevated slabs. **Structural Concrete**, v. 17, n. 4, p. 588-602, 2016. DOI: 10.1002/suco.201500151. Acesso em: 23 abr. 2022.

EBECKEN, N. F. F. LORANE-NL. **Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear**. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977.

EFNARC. **European Specification for Sprayed Concrete**, Industry. 1996.

ENTE ITALIANO DI NORMAZIONE. **UNI 11039**. Calcestruzzo rinforzato com fibre di acciaio - Definizioni, classificazione e designazione. Roma, 2003.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **EN 14651**: Test method for metallic fiber-reinforced concrete – Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual). Londres, 2007.

FARIA, T. M. **Estudo numérico em concreto reforçado com fibras de aço utilizando o método dos elementos finitos e modelos constitutivos**. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2017.

FEDERATION INTERNATIONALE DU BETON (FIB). **Model Code 2010**. Lausana, 2010.

FERRARA, L. High performance fibre reinforced cementitious composites: Six memos for the XXI century societal and economical challenges of civil engineering. *Case Studies in Construction Materials*, v. 10, n. 2018, p. e00219, 2019. DOI: 10.1016/j.cscm.2019.e00219. Acesso em: 20 abril. 2022.

FERRARI, V. J.; FERREIRA, L. E. T.; DE HANAI, J. B. Compósitos cimentícios híbridos de microconcreto. **Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural**, v. 4, n. 3, p. 33–49, 2007.

FIGUEIREDO, A. D. **Parâmetros de Controle e Dosagem do Concreto Projetado com Fibras de Aço**. 1997. 342p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

FIGUEIREDO, A. D. Concreto com fibras de aço. **Boletim Técnico (BT/PCC/260)**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – Departamento de Engenharia de Construção Civil, 2000.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto reforçado com fibras**. 2011. 248 f. Tese (Livre docência). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

GALEOTE, E.; BLANCO, A.; DE LA FUENTE, A. Design-oriented approach to determine FRC constitutive law parameters considering the size effect. **Composite Structures**, v. 239, p. 112036, 2020. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112036. Acesso em: 03 maio. 2022.

GALVÃO, A. S. **Formulações geometricamente não lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2000.

GIACCIO, G.; TOBES, J. M.; ZERBINO, R. Use of small beams to obtain design parameters of fibre reinforced concrete. **Cement and Concrete Composites**, v. 30, n. 4, p. 297-306, 2008. DOI: 10.1016/j.cemconcomp.2007.10.004. Acesso em: 28 mar. 2022.

IKUMI, T.; GALEOTE, E.; PUJADAS, P.; DE LA FUENTE, A.; LÓPEZ-CARREÑO, R. D. Neural network-aided prediction of post-cracking tensile strength of fibre-reinforced concrete. **Computers and Structures**, v. 256, p. 106640, 2021.

IMAI, A. P. **Análise do comportamento dinâmico não linear de vigas de pontes de concreto armado com seção e distribuição de armaduras variáveis através da interação entre veículo e ponte e da mecânica do dano**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Construção Civil) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

IMAI, A. P.; ABEICHE, T. O.; MACHADO, R. D. Damage and plasticity evolution of reinforced concrete beams using laminated Euler-Bernoulli finite elements. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 16, 2023. DOI: 10.1590/S1983-41952023000500002.

INSTITUT BELGE DE NORMALISATION. **NBN B 15-238**: Tests on fibre reinforced concrete - Bending test on prismatic samples. Bruxelas, 1992.

KATZER, J. Steel fibers and steel fiber reinforced concrete in civil engineering. **Pacific Journal of science and technology**, v. 7, n. 1, p. 53-58, 2006.

KFK ENGENHARIA (org.). **Fibras**. 2017. Disponível em: <https://www.kfkengenharia.com.br/servicos/pisos-industriais/fibras/>. Acesso em: 30 jul. 2022.

KOOIMAN, A. G. **Modelling Steel Fibre Reinforced Concrete for Strucutral Design**. 2000. 170 f. Tese (Doutorado). Delf University of Technolohy, Delft, 2000.

LARANJEIRA, F.; AGUADO, A.; MOLINS, C. Constitutive equations of fiber reinforced concrete. In: Thematic Conference on Computational Methods in Tunneling (EURO: TUN2007), 2007, Viena. **Proceedings...** Viena: ECCOMAS, 2007.

LARANJEIRA, F.; AGUADO, A.; MOLINS, C.; GRÜNEWALD, S.; WALRAVEN, J.; CAVALARO, S. Framework to predict the orientation of fibers in FRC: A novel philosophy. **Cement and Concrete Research**, v. 42, n. 6, p. 752-768, 2012. DOI: 10.1016/j.cemconres.2012.02.013. Acesso em: 15 abr. 2022.

MOBASHER, B.; DESTRÉE, X. Design and construction aspects of steel fiber-reinforced concrete elevated slabs. In: ACI Fall 2009 Convention, 2010, Nova Orleans. **Anais...** Nova Orleans: American Concrete Institute, 2010.

MORRISON, R.T.; BOYD, R. N. **Química Orgânica**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

NAAMAN, A.E. **A Statistical Theory of Strength for Fiber Reinforced Concrete**. 1972. 196 f. Tese (Doutourado em Filosofia) - Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1972.

NAAMAN, A. E.; ARGON, A. S.; MOAVENZADEH, F. A fracture model for fiber reinforced cementitious materials. **Cement and Concrete Research**, v. 3, n. 4, p. 397-411, 1973.

NAAMAN, A. E.; MOAVENZADEH, F.; MCGARRY, F. J. Probabilistic analysis of fiber-reinforced concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 100, n. 2, p. 397-413, 1974.

NAAMAN, A. E. Fiber reinforcements for concrete: looking back, looking ahead. *In: Fifth International RILEM Symposium On Fibre-Reinforced Concrete. Proceedings...* RILEM Publications, 2000, p. 65-86.

NAAMAN, A. E. Strain hardening and deflection hardening fiber reinforced cement composites. *In: Proc. 4th Int. RILEM Workshop on High Performance Fiber Reinforced Cement Composites. Proceedings...* RILEM Workshop, 2003. p. 95-113.

NAAMAN, A. E.; REINHARDT, H. W. Report of the RILEM International Workshop on High Performance Fiber Reinforced Cement Composites (HPFRCC-4)-Ann Arbor, Michigan, June 16-18, 2003. **Materials and Structures**, v. 36, n. 264, p. 710, 2003.

NAAMAN, A.E.; REINHARDT, H.W. Setting the Stage: toward Performance Based Classification of FRC Composites. *In: High Performance Fiber Reinforced Cement Composites (HPFRCC-4). Proceedings...* RILEM Workshop, 2003, pp. 1-4.

NAAMAN, A. E.; REINHARDT, H. W. Proposed classification of HPFRC composites based on their tensile response. **Materials and structures**, v. 39, n. 5, p. 547-555, 2006.

NAAMAN, A. E. **High performance fiber reinforced cement composites**. Singapore: World Scientific Publishing, 2008.

NAAMAN, A. Fiber reinforced concrete: Five decades of progress. *In: 4th Brazilian Conference on Composite Materials*, 2018, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, 2018.

NEO MATEX (org.). **Fibra de Aço para Concreto Projetado**. Disponível em: <https://www.neomatex.com.br/fibra-aco-concreto-projetado.html>. Acesso em: 30 jul. 2022.

NUNES, N. L.; AGOPYAN, V. **Influência do fator de forma da fibra na tenacidade à flexão do concreto reforçado com fibra de aço**. Boletim Técnico, Escola Politécnica da USP, Departamento de Construção Civil, São Paulo, 1998.

PARMENTIER, B.; DE GROVE, E.; VANDEWALLE, L.; VAN RICKSTAL, F. Dispersion of the mechanical properties of FRC investigated by different bending tests. *In: Tailor Made Concrete Structures: New Solutions for Our Society. Anais...* Amsterdam: Taylor & Francis Group, 2008, p. 507-512.

PASA, V. F. **Análise do comportamento de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço via método dos elementos finitos**. 2007. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

PIERALISI, R. **Concreto reforçado com fibras: Dimensionamento estrutural**, 2021. 56 slides.

QASRAWI H.; SHALABI F.; ASI I. Design and Sustainability of Structural Concrete in the Middle East with Emphasis on High-Rise Buildings. *In: ACI-KC SECOND*

INTERNATIONAL CONFERENCE, 2007, Kuwait. **Proceedings...** Kuwait: American Concrete Institute Kuwait Chapter (ACI-KC), 2007.

RAVIKUMAR, C. S.; RAMASAMY, V.; THANDAVAMOORTHY, T. S. Effect of fibers in concrete composites. **International Journal of Applied Engineering Research**, v. 10, n. 1, p. 419-430, 2015.

REZENDE, T. **RMSE ou MAE? Como avaliar meu modelo de machine learning?** 2018. Disponível em: l1nq.com/M2Z3r. Acesso em: 02 ago. 2022.

RIBEIRO, A. F.; CUNHA, V. M.; BARROS, J. A.; ANTUNES, J. A. B. **Modelo de secção para dimensionamento à flexão de estruturas de betão: formulação e manual do programa docros**. 2003. 60 f. Relatório técnico – Universidade do Minho, Braga, 2003.

ROMUALDI, J. P.; BATSON, G. B. Mechanics of crack arrest in concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 89, n. 3, p. 147-168, 1963.

ROUSSEL, N. Rheology of fresh concrete: from measurements to predictions of casting processes. **Materials and Structures**, v. 40, n. 10, p. 1001-1012, 2007.

SALCEDO, H. R. **Aplicación de Fibras Estructurales a los Pilotes tipo CPI 8**. 2012. 77 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas e Construção). Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2012.

SALEHIAN, H.; BARROS, J. A. O. Prediction of the load carrying capacity of elevated steel fibre reinforced concrete slabs. **Composite Structures**, v. 170, p. 169-191, 2017. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.03.002. Acesso em: 23 abr. 2022.

SALVADOR, R. P. **Análise comparativa de métodos de ensaio para caracterização do comportamento mecânico de concreto reforçado com fibras**. 2013. 178 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

SEGURA-CASTILLO, L.; MONTE, R.; FIGUEIREDO, A. Ensayo “Montevideo”: un nuevo ensayo, simple y económico para la caracterización del hormigón reforzado con fibras. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 2017, Bento Gonçalves. **Anais...** São Paulo: Ibracon, 2017.

SEGURA-CASTILLO, L.; FIGUEREDO, D.; RODRÍGUEZ, I.; GARCÍA, N. **First experimental full-scale elevated FRSCC slab in South America**. Fibre Reinforced Concrete: Improvements and Innovations, RILEM Bookseries, vol 30: Springer, 2020.

SHAH, S.P.; RANGAN, V.B. Fiber Reinforced Concrete Properties. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 68, n. 2, p. 126-135, 1971.

SHEWALUL, Y. W. Numerical and FEA investigation of sectional capacity and moment redistribution behavior of steel fiber reinforced concrete (SFRC) beam. **Heliyon**, v. 7, n. 6, p. e07354, 2021.

SILVA, L.; GALOBARDES, I.; MONTE, R.; FIGUEIREDO, A. D. Avaliação da dispersão de cargas de fissuração e residuais do concreto projetado reforçado

com fibras de aço obtida pelo ensaio Barcelona Introdução. *In: Anais do 57º Congresso Brasileiro do Concreto (CBC 2015)*, n. 1, p. 1–14, 2015.

SINGH, H. Flexural modeling of steel fiber-reinforced concrete members: analytical investigations. **Practice Periodical on Structural Design and Construction**, v. 20, n. 4, p. 04014046, 2015. DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000244. Acesso em: 05 abr. 2022.

SINGH, H. **Steel fiber reinforced concrete: behavior, modelling and design**. Ludhiana: Springer, 2016.

SOLTANZADEH, F.; CUNHA, V. M. C. F.; BARROS, J. A. O. Assessment of different methods for characterization and simulation of post-cracking behavior of self-compacting steel fiber reinforced concrete. **Construction and Building Materials**, v. 227, p. 116704, 2019. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2019.116704. Acesso em: 28 mar. 2022.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos – Formulação e Aplicação Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

STÄHLI, P. **Ultra-Fluid, Oriented Hybrid-Fibre-Concrete**. 2008. 202 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Institute for Building Materials ETH Zürich, Zurique, 2008.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de Elementos Finitos para Análise Não Linear Física e Geométrica de Vigas e Pórticos Planos de Concreto Armado**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

TIBERTI, G.; GERMANO, F.; MUDADU, A.; PLIZZARI, G. A. An overview of the flexural post-cracking behavior of steel fiber reinforced concrete. **Structural Concrete**, v. 19, n. 3, p. 695-718, 2018. DOI: 10.1002/suco.201700068. Acesso em: 23 mar. 2022.

TLEMAT, H.; PILAKOUTAS, K.; NEOCLEOUS, K. Modelling of SFRC using inverse finite element analysis. **Materials and Structures**, v. 39, n. 2, p. 221-233, 2006. DOI: 10.1617/s11527-005-9010-y. Acesso em: 02 maio 2023.

TSCHEGG, E.K.; LINSBAUER, H.N. Testing procedure for determination of fracture mechanics parameters. **Patentschrift**, A-233/86, 1986.

VANDEWALLE, L.; NEMEGEER, D.; BALAZS, L.; BARR, B.; BARROS, J.; BARTOS, P.; WALRAVEN, J. RILEM TC 162-TDF: Test and design methods for steel fibre reinforced concrete'-sigma-epsilon-design method – Final Recommendation. **Materials and Structures**, v. 36, n. 262, pp. 560-567, 2003.

VON PARASKI, N. **Análise Estática Não Linear De Pórticos Planos Via Matlab**. 2012. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2012.

WANG, W.; SHEN, A.; LYU, Z.; HE, Z.; NGUYEN, K. T. Fresh and rheological characteristics of fiber reinforced concrete — A review. **Construction and Building Materials**, v. 296, p. 123734, 2021. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.123734. Acesso em: 22 mar. 2022.

YOO, D. Y.; YOON, Y. S.; BANTHIA, N. Flexural response of steel-fiber-reinforced concrete beams: Effects of strength, fiber content, and strain-rate. **Cement and Concrete Composites**, v. 64, p. 84-92, 2015.

YOO, D. Y.; YOON, Y. S.; BANTHIA, N. Predicting the post-cracking behavior of normal- and high-strength steel-fiber-reinforced concrete beams. **Construction and Building Materials**, v. 93, p. 477-485, 2015.

ZANJANI, E. M.; BARNETT, S.; BEGG, D. Pullout behaviour of hooked end steel fibres embedded in concrete with various cement replacement materials. *In*: 9th International RILEM Symposium On Fibre-Reinforced Concrete, 2016, Vancouver. **Proceedings...** Vancouver: RILEM Publications SARL, 2016, p. 297-308.

ZOLLO, R. F. Fiber-reinforced concrete: an overview after 30 years of development. **Cement and Concrete Composites**, v. 19, n. 2, p. 107–122, 1997. DOI: 10.1016/S0958-9465(96)00046-7. Acesso em: 21 mar. 2022.