

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOÃO VITOR SILVEIRA PEREIRA

DESIGUALDADE DE RENDA E EDUCAÇÃO EM UM MODELO DE
GERAÇÕES SOBREPOSTAS PARA O BRASIL

CURITIBA

2025

JOÃO VITOR SILVEIRA PEREIRA

DESIGUALDADE DE RENDA E EDUCAÇÃO EM UM MODELO DE
GERAÇÕES SOBREPOSTAS PARA O BRASIL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Desenvolvimento Econômico setor de Ciências Sociais
Aplicadas, da Universidade Federal do Paraná, como
requisito parcial à obtenção do título de Doutor em
Desenvolvimento Econômico

Orientador: Prof. Dr. Maurício Vaz Lobo Bittencourt

CURITIBA

2025

FICHA CATALOGRÁFICA

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

Pereira, João Vitor Silveira

Desigualdade de renda e educação em um modelo de gerações
sobrepostas para o Brasil / João Vitor Silveira Pereira .- 2025.

1 recurso on-line: PDF.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Sociais Aplicadas, Programa de Pós-Graduação em
Desenvolvimento Econômico.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Vaz Lobo Bittencourt.

1. Desenvolvimento econômico. 2. Capital humano. 3. Renda -
Distribuição – Brasil. I. Bittencourt, Maurício Vaz Lobo.
II. Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências Sociais
Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento
Econômico. III. Título.

Bibliotecária: Kathya Fecher Dias – CRB-9/2198

TERMO DE APROVAÇÃO



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS SOCIAIS E APLICADAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DESENVOLVIMENTO
ECONÔMICO - 40001016024P0

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **JOÃO VITOR SILVEIRA PEREIRA**, intitulada: **DESIGUALDADE DE RENDA E EDUCAÇÃO EM UM MODELO DE GERAÇÕES SOBREPOSTAS PARA O BRASIL**, sob orientação do Prof. Dr. MAURÍCIO VAZ LOBO BITTENCOURT, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação,

CURITIBA, 29 de Agosto de 2025.

Assinatura Eletrônica

29/08/2025 13:50:01,0

MAURICIO VAZ LOBO BITTENCOURT
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

29/08/2025 14:49:22,0

MARCELO DE CARVALHO GRIEBELER

Avaliador Externo (ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA LUIZ DE
QUEIROZ - UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica

01/09/2025 07:22:57,0

VICTOR RODRIGUES DE OLIVEIRA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

30/08/2025 08:23:05,0

ARMANDO VAZ SAMPAIO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

29/08/2025 13:54:55,0

IGOR SANTOS TUPY

Avaliador Externo (INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA
APLICADA)

AV. PREFEITO LOTHÁRIO MEISSNER, 632 - CURITIBA - Paraná - Brasil

CEP 80210-170 - Tel: (41) 3360-4400 - E-mail: ppgde@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.
Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 479117

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://siga.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp>
e insira o código 479117

Para Sônia Maria, minha mãe, que acredita, e acreditou em mim desde o início da
minha jornada.

AGRADECIMENTOS

Ao chegar ao fim desses quatro anos de doutorado, penso no tempo que passou e vejo todas as transformações que vivi na minha vida pessoal, profissional, acadêmica e intelectual. Não é exagero dizer que hoje sou uma pessoa completamente diferente de quem eu era ao reingressar no programa aos meus 25 anos de idade. Em meio a todos os desafios, dúvidas, inseguranças e vacilos que cometi, o apoio de algumas pessoas foi fundamental para que eu chegasse até o fim desse caminho. Seria impossível mencionar nominalmente todas as pessoas que participaram desse processo de forma direta ou indireta, mas gostaria de agradecer a algumas das pessoas que tornaram possível que eu chegasse ao final do meu doutorado mantendo a cabeça no lugar.

Ao meu orientador, Maurício Bittencourt, meu mais sincero muito obrigado pelos conselhos, pelo apoio, e pelas lições transmitidas desde o mestrado. O desafio que deleguei a mim mesmo de me aventurar numa metodologia nova para mim seria impossível de dar conta se não fosse pela sua participação, confiança e incentivos desde o início do processo.

Agradeço ao professor Armando Sampaio por ter me oferecido as bases do conhecimento de que eu precisava para iniciar nessa jornada. Também agradeço a todos os professores que participaram da minha formação durante o doutorado: Alexandre Porsse, Eduardo Angeli, Fernando Motta, Kênia de Souza e Victor Oliveira, em nome dos quais eu agradeço a todo o corpo docente do PPGDE por terem me acolhido tão bem e me ensinado tanto ao longo dos últimos seis anos.

Meus agradecimentos à Laís Rocha, que trabalha à frente da Secretaria do PPGDE, e demonstrou uma paciência infinita em todas as vezes em que eu meti os pés pelas mãos e perdi prazos ou outras obrigações importantes. Em seu nome, agradeço a todo o corpo de funcionários da UFPR, cujo trabalho é fundamental para manter a universidade em funcionamento no dia a dia.

Agradeço grandemente à minha mãe, Sônia Maria, sem a qual eu jamais teria conseguido chegar tão longe na minha trajetória acadêmica. Agradeço também toda a minha família: ao meu pai, João Luiz; meus irmãos, Daian, Diana, João Gabriel e Luiz Fernando; aos meus tios, tias primos e primas.

Meu muito obrigado a Fernanda, minha companheira, que me ouvia em momentos de inspiração, me aconselhava nos momentos de dúvida, me oferecia o ombro em momentos de desabafo. Espero um dia poder retribuir todo o apoio que você tem me dado, não só no doutorado, mas em todos os desafios que enfrentei.

Agradeço a todos os amigos que fizeram parte da minha vida ao longo dos últimos anos. Aos que conheci graças ao PPGDE: Matheus, Felipe, Carol, Ariel, André, Talys e tantos outros, e todos aqueles que conheci ao longo da vida e me ouviram falar múltiplas vezes sobre o doutorado: Marcus, Vinícius, Lucas, Isa, Carol, Caíque, Yan, Kevyan, Wesley, Ramon, Fernanda, Brilhante, Pedro e tantos outros.

Dentre as várias mudanças na minha vida que me transformaram ao longo do meu último ano, realizar o sonho de trabalhar no Ipea foi a mais marcante delas. Desde então, tenho o privilégio de trabalhar ao lado de pessoas brilhantes, que, apesar de ter conhecido há relativamente pouco tempo, acompanharam meu progresso nessa reta final. Meu muito obrigado a Keiti Gomes, Diretora de Estudos Internacionais pela confiança depositada em mim nesses últimos meses. Aos meus colegas e amigos Igor, Itaquê, Carol, Daniel, Marcell, Camila, Pedro, Synthia, Luiz, Ricardo, Adrianos, Rodrigos, Anas e Joãos, em nome dos quais eu agradeço a todos os colegas do Ipea.

Agradeço também à CAPES pelo financiamento à formação.

*Analisando essa cadeia hereditária
Quero me livrar dessa situação precária
Onde o rico cada vez fica mais rico
E o pobre cada vez fica mais pobre
E o motivo todo mundo já conhece
É que o de cima sobe e o de baixo desce.
(NONATO e RANGEL, 1999)*

RESUMO

Durante os primeiros anos do século XXI, o Brasil passou por um período marcante de redução dos índices de desigualdade de renda, depois de um longo período de crescimento. Essa tendência de queda teve fim no ano de 2015, a partir do qual houve uma estagnação do índice de Gini. Apesar dos esforços feitos durante a última década, o Brasil ainda está entre os países mais desiguais do mundo, e discussões sobre a desigualdade de renda voltam a se tornar relevantes recentemente. Diante disso, este trabalho tem como objetivo contribuir a essa discussão por meio da construção de um modelo de gerações sobrepostas com agentes heterogêneos, e uma restrição de consumo mínimo, desenvolvido a partir de modelos de crescimento voltados a outros países. Essa construção se dá em três momentos: uma versão do modelo sem governo, a segunda com políticas de transferências de renda, e a terceira versão, com transferências de renda e financiamento à educação pública. A partir do modelo, foram feitas simulações numéricas com que testaram os efeitos de políticas de redistribuição de renda sobre o estoque de capital humano da economia. Dos resultados, o principal foi o efeito das políticas de transferências de renda sobre a redução da desigualdade de renda, e o aumento do estoque de capital humano agregado. As principais contribuições do trabalho são duas: (i) o desenvolvimento de um mecanismo – composto pelo modelo em si, e pelo algoritmo utilizado para avaliar sua convergência – que objetiva analisar a distribuição de renda brasileira; e (ii) identificação de uma relação sinérgica entre crescimento e distribuição de capital humano e transferências de renda.

Palavras-chave: Desigualdade de Renda; Desenvolvimento Econômico; Modelos de Gerações Sobrepostas; Capital Humano.

ABSTRACT

During the early years of the 21st century, Brazil underwent a significant period of income inequality reduction, after a long period of growth in inequality. However, this downward trend came to an end in 2015, when the Gini index reached a plateau. Despite efforts made over the past decade, Brazil still ranks among the most unequal countries in the world, and discussions regarding income inequality have regained relevance in recent times. In this context, this study aims to contribute to the discussion by developing an overlapping generations (OLG) model with heterogeneous agents and a minimum consumption constraint, based on growth models originally designed for other countries. The model is constructed in three stages: a benchmark version without government intervention; a second version incorporating an income transfer policy; and a third that includes both income transfers and public education funding. Numerical simulations evaluate the effects of redistribution policies on the economy's human capital stock. The main result highlights the positive effect of income transfers in reducing income inequality and increasing aggregate human capital. The main contributions of this study are twofold: (i) the development of a mechanism – composed of the model itself, and the algorithm that tests its convergence—that focuses on analyzing the Brazilian income distribution; and (ii) the identification of synergies between growth and distribution of human capital, and income transfers.

Keywords: Income Inequality; Economic Development; Overlapping Generations Models; Human Capital.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – FLUXOGRAMA DESCRITIVO DO PROCESSO DE CALIBRAGEM.....	44
FIGURA 2 – FLUXOGRAMA DA VERSÃO MENOS RESTRITIVA DO PROCESSO DE CALIBRAGEM.....	84

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – ÍNDICE DE GINI DA RENDA DOMICILIAR PER CAPITA – PNAD CONTÍNUA E PNAD CONTÍNUA ANUAL.....	29
GRÁFICO 2 – DISTRIBUIÇÃO DE $\delta_{i,27}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO.....	48
GRÁFICO 3 – DISTRIBUIÇÃO DE $h_{i,27}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO.....	49
GRÁFICO 4 – ÍNDICE DE GINI DA RENDA DO TRABALHO DO MODELO SEM GOVERNO.....	50
GRÁFICO 5 – TAXA DE POBREZA DO MODELO SEM GOVERNO.....	51
GRÁFICO 6 – RAZÃO P09/P10 (A) E RENDA DOS 10% MAIS RICOS (B) DO MODELO SEM GOVERNO.....	51
GRÁFICO 7 – ESTOQUE AGREGADO DE CAPITAL HUMANO DO MODELO SEM GOVERNO.....	52
GRÁFICO 8 – COMPARAÇÃO DO ÍNDICE DE GINI DO PERÍODO DE SIMULAÇÃO PARA CADA VALOR DE τ	66
GRÁFICO 9 – COMPARAÇÃO DA TAXA DE POBREZA DO PERÍODO DE SIMULAÇÃO PARA CADA VALOR DE τ	68
GRÁFICO 10 – ÍNDICE DE GINI (A) E TAXA DE POBREZA (B) DAS RENDAS PRÉ-IMPOSTO (LINHA TRACEJADA) E PÓS-IMPOSTO (LINHA CHEIA) CONSIDERANDO $\tau = 5\%$	68
GRÁFICO 11 – COMPARAÇÃO DA RAZÃO P90/P10 (A) E RENDA DOS 10% MAIS RICOS (B) PARA CADA VALOR DE τ	69
GRÁFICO 12 – COMPARAÇÃO DO ESTOQUE DE CAPITAL HUMANO DO PERÍODO DE SIMULAÇÃO PARA CADA VALOR DE τ	69
GRÁFICO 13 – ÍNDICES DE GINI DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE λ (A) E φ (B).....	83

GRÁFICO 14 – DISTRIBUIÇÃO DE $\delta_{i,3}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO.....	86
GRÁFICO 15 – DISTRIBUIÇÃO DE $h_{i,3}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO.....	87
GRÁFICO 16 – ÍNDICES DE GINI DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE φ (A) E τ (B).....	88
GRÁFICO 17 – TAXA DE POBREZA DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE φ (A) E τ (B).....	89
GRÁFICO 18 – ESTOQUE DE CAPITAL HUMANO DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE φ (A) e τ (B).....	90

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – PARÂMETROS ENCONTRADOS NO PROCESSO DE CALIBRAGEM E AJUSTE.....	47
TABELA 2 – PARÂMETROS ENCONTRADOS NA VERSÃO MENOS RESTRITIVA PROCESSO DE CALIBRAGEM E AJUSTE.....	85

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

- BPC - Benefício de Prestação Continuada
- EUA - Estados Unidos da América
- IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
- INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
- IPEA - Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada
- MQO - Mínimos Quadrados Ordinários
- NEM - Novo Ensino Médio
- ODS - Objetivos de Desenvolvimento Sustentável
- ONU - Organização das Nações Unidas
- PIB - Produto Interno Bruto
- PNAD - Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio
- RAIS - Relação Anual de Informações Sociais
- SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

LISTA DE SÍMBOLOS

Σ - Somatório de números

∂ - Derivada parcial

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	18
CAPÍTULO 1: MODELO SEM GOVERNO	23
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
1.1.1. A desigualdade de renda na teoria econômica	23
1.1.2. Desigualdade de renda em modelos de crescimento sem governo	25
1.1.3. A trajetória recente da desigualdade de renda no Brasil	29
1.1.4. Modelos de distribuição de renda no Brasil	33
1.2 MODELO	36
1.2.1. Famílias	37
1.2.2. Firms	43
1.2.3. Equilíbrio	43
1.3 CALIBRAGEM	44
1.4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	51
1.5 CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS FUTUROS DE PESQUISA	54
CAPÍTULO 2: MODELO COM TRANSFERÊNCIAS DE RENDA.....	56
2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	56
2.1.1 Desigualdade de renda em modelos com transferências de renda.....	56
2.1.2. Gastos privados em educação no Brasil	58
2.2 MODELO	60
2.2.1. Consumo, educação e capital humano	61
2.2.2. Impactos distributivos esperados	62
2.2.3. Política de erradicação da pobreza	63
2.3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	67
2.4 CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS FUTUROS DE PESQUISA	73
CAPÍTULO 3: MODELO COM GASTO PÚBLICO EM EDUCAÇÃO	76
3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	76
3.1.1 Acumulação de capital humano e educação	76
3.1.2. Desigualdade na educação brasileira	78
3.2 MODELO.....	83
3.3 CALIBRAGEM	86
3.4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	90
3.5 CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS FUTUROS DE PESQUISA	94
CONSIDERAÇÕES FINAIS	96

REFERÊNCIAS.....	100
APÊNDICE 1 – SCRIPT EM JULIA	106

INTRODUÇÃO

Em sua condição de país em desenvolvimento, o Brasil possui um histórico de altos índices de desigualdade, além de enfrentar outros problemas comuns a países na mesma condição, como o baixo nível de escolaridade dos trabalhadores. Ainda que a história recente da realidade socioeconômica brasileira tenha sido marcada pela melhora em diversos aspectos, ainda há um longo caminho a ser percorrido.

Ao longo das últimas décadas do século XX houve um período de notável melhora educacional no país. De acordo com dados do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), desde 1981, período de início da série histórica, houve um aumento contínuo da média de anos de estudo da população com mais de 25 anos de idade.

Em relação à distribuição de renda, nos primeiros anos da década de 2000 e na primeira metade da década seguinte, o Brasil apresentou uma queda considerável nos índices de desigualdade salarial e de renda. Conforme dados do IPEA, o índice de Gini da renda do trabalho, por exemplo, caiu de 0,596 para 0,518 entre os anos de 2001 e 2014, dando fim a um longo período de aumentos de desigualdade de renda.

Apesar da queda do movimento de queda na desigualdade, nos três anos mais recentes nos quais o Banco Mundial possui dados de desigualdade para pelo menos 50 países (isto é, 2017, 2018, e 2019), o Brasil registrou o índice de Gini mais alto em todos eles. Isso não é o mesmo que dizer o Brasil era o país mais desigual do mundo, uma vez que a amostra compreende um número limitado de países nesses três anos, mas é possível afirmar que o Brasil segue sendo um dos países com as piores distribuições de renda do mundo, o que acende um sinal de alerta, e dá um indicativo de que temas relacionados a distribuição de renda seguem relevantes no país.

Essa preocupação se torna especialmente importante tendo em vista que em 2015, o Governo brasileiro, junto de outros 192 países membros da ONU, firmou compromisso com a Agenda 2030, que instituiu os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS), um conjunto de objetivos a serem alcançados nos 15 anos seguintes, na tentativa de combater a fome, pobreza, mitigar os efeitos das mudanças climáticas, entre outros. Dos 17 ODS, um deles trata diretamente da redução das desigualdades (ODS 10), e dois deles que podem ser diretamente

afetados por melhoras na distribuição de renda (ODS 1 – erradicação da pobreza; ODS 2 – fome zero e agricultura sustentável).

Em 2024, o Relatório Nacional Voluntário, produzido pela Secretaria-Geral da Presidência da República, apontou que das 10 metas associadas ao ODS referente à redução das desigualdades, o Brasil apresentou retrocesso em 2 metas, e foram classificadas como sem evolução em outras 6. Isso reforça a necessidade de se pensar em meios de promover uma melhora da trajetória de longo prazo da distribuição de renda, na busca de se promover uma política de desenvolvimento inclusivo no país.

Além do compromisso internacional, outro argumento em prol de melhorias na distribuição de renda repousa na teoria econômica, e trata sobre seus efeitos na trajetória de crescimento dos países. De acordo com Galor e Moav (2004), a diminuição da desigualdade de renda gera um efeito positivo na acumulação de capital humano de uma economia, e, por sua vez, o aumento da quantidade de capital humano é responsável por promover o crescimento econômico, em especial nos estágios mais avançados do processo de desenvolvimento. Diante disso, pensar em meios de se reduzir a desigualdade de renda se torna ainda mais relevante, pois, além das implicações diretas sobre a qualidade de vida da população, pode-se pensar nas implicações da redução da desigualdade no crescimento econômico de longo prazo.

Outra importante motivação para este trabalho diz respeito às pesquisas empíricas sobre o papel da educação na distribuição de renda brasileira. Isso porque, ao mesmo tempo em que se observa uma disparidade nos gastos privados que as famílias ricas e pobres dedicam na educação de seus filhos (Curi e Menezes-Filho (2010), Moreno e Pontilli (2022), e de Holanda Barbosa et al.,2023), é constatada uma grave disparidade entre a educação pública e a privada (Sampaio e Oliveira, 2015), o que cria um mecanismo de reforço de desigualdade de rendimentos, em especial de salários, na economia brasileira.

A existência de um mecanismo intergeracional que alimenta a desigualdade no longo prazo por meio da educação já foi discutida em análises empíricas por trabalhos como Ferreira e Veloso (2003), Junior. e Ramalho (2013), Mahlmeister et al. (2019), ou Santos e Costa (2023). Todos os trabalhos apontam para a existência da transmissão intergeracional da pobreza por meios ligeiramente diferentes, mas relacionados à educação. Enquanto o primeiro e o terceiro focam apenas nas dificuldades que o Brasil enfrenta na mobilidade educacional, o segundo percebe os mecanismos causais por trás da imobilidade entre os estratos de educação e renda,

e o último trabalha a problemática do trabalho infantil, mostrando inclusive consequências de longo prazo para a renda familiar em domicílios chefiados por pais que trabalharam na infância. As sólidas evidências empíricas da persistência da desigualdade de renda e educacional servem como mais um motivo para iniciar um debate sobre essas desigualdades do ponto de vista teórico.

Apesar dos problemas relacionados a mobilidade intergeracional e distribuição de renda serem amplamente estudados em estudos empíricos para o Brasil, ainda existe uma lacuna no que diz respeito aos modelos macroeconômicos dedicados a modelar dinâmicas relacionadas a economia brasileira. Enquanto trabalhos sobre distribuição de renda e modelos de crescimento ganham força mundialmente, especialmente a partir dos anos 2000, essa tendência não foi seguida no Brasil, que, salvo exceções, como Rocha (2015) e Gomes et al. (2015), por exemplo, pouco produz a esse respeito.

No que diz respeito à distribuição de renda de forma mais ampla, os principais destaques que se pode fazer da literatura nacional nesse tema são os estudos de modelos de economias lideradas pela demanda, como modelos pós-keynesianos ou neo-kaleckianos. Apesar de prestarem contribuições significativas na discussão sobre distribuição de renda, estes trabalhos não possuem espaço para discussões envolvendo agentes heterogêneos, de modo que fica evidente uma considerável lacuna na literatura.

Diante desse cenário, é interessante discutir formas de se interromper o mecanismo de reforço da desigualdade no Brasil, inclusive na tentativa de ampliar o escopo da produção de modelos brasileiros voltados a distribuição de renda. Este trabalho tem como objetivo contribuir para essa discussão de duas formas: primeiro, seguindo na construção de uma ferramenta capaz de discutir sobre distribuição de renda no Brasil a partir de modelos de crescimento com agentes heterogêneos desenvolvidos em outros países, e segundo, usar essa ferramenta para discutir sobre o efeito das políticas distributivas num horizonte de longo prazo, tanto em termos de seus efeitos distributivos, quanto nas consequências de cada política no crescimento econômico.

Para isso, o trabalho constrói um modelo de gerações sobrepostas no qual a acumulação de capital humano é um fator endógeno, sendo transmitida entre as gerações por meio das decisões dos pais em investir na educação dos filhos. A estratégia consiste em começar de um modelo mais simples, e adicionar gradualmente elementos que representem melhor a economia brasileira, especialmente aqueles relacionados à acumulação de capital humano. Nesse sentido,

a escolha de tratar o tema com um modelo teórico como o de gerações sobrepostas oferece a vantagem de se analisar em que medida a transmissão intergeracional de renda e conhecimento é capaz de contribuir para o aumento ou diminuição da desigualdade.

No modelo, as famílias precisam lidar com uma restrição de consumo mínimo. Essa restrição impacta nas escolhas de cada família sobre como alocar sua renda da seguinte maneira: caso a família não tenha condições de satisfazer a restrição de consumo mínimo, a mesma irá tentar se aproximar ao máximo possível desse valor, de modo que não sobrará recursos para serem gastos com educação. Apenas após satisfeitas essa necessidade será possível gastar na educação de seus filhos.

O modelo, assim, pode agir como ambiente para discutir diferentes modelos de políticas sociais de redução da desigualdade de renda, e servir como embasamento teórico para o desenho de políticas públicas com essa finalidade, se somando a outros trabalhos empíricos e teóricos com o mesmo objetivo.

A partir da definição da versão mais simples do modelo, se desenvolvem os objetivos específicos da pesquisa, que giram em torno de incorporar extensões do modelo que se dão em duas direções. Primeiramente, se avalia como políticas de transferências de renda podem ser desenhadas de modo a garantir uma melhora na distribuição de renda. Em seguida, se estuda o papel das políticas de educação pública na formação de capital humano das famílias.

A metodologia empregada aqui consiste numa parte de cunho analítico, em que se verifica, a partir do modelo de gerações sobrepostas, quais são as principais conclusões a priori que se pode inferir de como se dão as dinâmicas de distribuição de renda numa economia em estado estacionário. Em seguida, se desenvolvem simulações numéricas com o objetivo de verificar os efeitos de cada política sobre a distribuição de renda.

Para conduzir as simulações numéricas, foi necessário o desenvolvimento de um método de simulação numérica voltado a resolver o problema do valor inicial ao qual os modelos de gerações sobrepostas estão sujeitos. O método iterativo proposto no trabalho testa diferentes combinações de parâmetros em busca daquelas que melhor se adequam ao modelo. Essa solução tem potencial para ser aplicada não só ao problema proposto nesta tese, mas também a outros modelos de gerações sobrepostas com agentes heterogêneos.

Mais do que esgotar as possibilidades de políticas públicas a serem analisadas, este trabalho tem como principais contribuições para a literatura (i) a adaptação de modelos de crescimento e distribuição de renda que descrevem economias de outros países à lógica da economia brasileira, e, com isso, abrir espaço para discussões de como os dilemas distributivos comuns ao nosso país podem ser pensados à luz da teoria econômica, e (ii) a proposta de um procedimento computacional para resolução do problema do valor inicial e calibragem de modelos de gerações sobrepostas com agentes heterogêneos, que se baseia na distribuição de renda da economia para seu processo de ajuste.

Esta tese está dividida em três capítulos, de acordo com o grau de complexidade dos modelos apresentados. O primeiro capítulo trata de um modelo sem governo, para que seja possível entender como funciona a distribuição de renda numa economia em que o Governo decide não agir sobre a questão. O segundo capítulo inclui o Governo na condição de agente redistribuidor de renda, aplicando um imposto, e redistribuindo o montante arrecadado sob a forma de transferências. Por fim, o terceiro inclui a possibilidade de o Governo dividir seu orçamento entre transferências de renda e educação pública, com o objetivo de exercer influência direta sobre as funções de acumulação de capital humano.

CAPÍTULO 1: MODELO SEM GOVERNO

Antes de verificar o efeito de políticas distributivas, é necessário construir o ambiente econômico no qual essas políticas se dão. Para tal, o primeiro capítulo deste trabalho se dedica a apresentar um modelo de gerações sobrepostas em uma economia sem governo, e com agentes heterogêneos no qual cada família precisa decidir o quanto gastar com consumo e com a educação dos filhos. Os resultados obtidos sobre o modelo apresentado deste capítulo têm por objetivo servir como base de comparação para os seguintes.

O primeiro capítulo conta com as seguintes seções: (i) a revisão bibliográfica, que apresenta brevemente como a distribuição de renda foi tratada na economia ao longo do últimos anos, uma apresentação dos modelos de distribuição de renda produzidos dentro e fora do Brasil, e uma contextualização sobre dados da economia brasileira; (ii) a descrição do modelo, em sua versão sem governo, e a explicação de como funciona a dinâmica dessa economia; (iii) a descrição do processo de calibragem utilizado para produzir simulações numéricas a partir das equações do modelo; (iv) a seção que apresenta e comenta as simulações da versão do modelo sem governo, que servirão de base para o capítulo posterior; e (v) uma seção que comenta as contribuições, aprendizados, e desafios de pesquisas futuras que podem ser pensadas a partir deste capítulo.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1.1. A desigualdade de renda na teoria econômica

Apesar de sempre presentes na literatura econômica, discussões sobre distribuição de renda se mantiveram como objetivo secundário da teoria econômica, a qual focou seus principais esforços em discussões acerca do crescimento econômico. Atkinson (2018) aponta que as primeiras discussões sobre distribuição de renda feitas após a revolução marginalista foram, em sua maioria, “resolvidas” por meio do argumento de que os proprietários de cada fator de produção (ou seja, capitalistas e trabalhadores) recebiam sua remuneração de acordo com a produtividade marginal de seus respectivos fatores. Na época, segundo o autor, esse argumento foi o suficiente para que não houvesse muito espaço para discussões de políticas públicas voltadas necessariamente à redução da desigualdade de renda que passasse por fatores que não estivessem ligados à produtividade dos fatores de produção.

Os primeiros esforços focados em se construir algo que se aproximava de uma teoria sobre desigualdade foram feitos por Kuznets (1955), que explica a relação entre desigualdade

de renda e crescimento econômico como uma função em formato de “U invertido”. De acordo com o autor, em estágios iniciais do processo de desenvolvimento econômico, economias tendem a experimentar um aumento em seus níveis de desigualdade de renda, causado pelo crescimento da indústria. Isso ocorreria porque, à medida em que o processo de industrialização se concretiza, as diferenças de renda entre os setores da economia provocariam o aumento da desigualdade de renda. Com o aumento da predominância da atividade industrial sobre o setor primário da economia, a tendência seria que houvesse uma queda na desigualdade de renda. A curva que representa o caminho que a desigualdade faz à medida em que o aumento da atividade industrial ocorre ficou conhecida como curva de Kuznets.

A disponibilidade de dados à época era escassa, o que até o próprio autor reconhece em seu trabalho: o texto conta apenas com dados sobre EUA, Inglaterra, Alemanha, Índia e Costa Rica, e em pontos esparsos no tempo. Apesar disso, a formulação teórica proposta por Kuznets para explicar o comportamento da desigualdade ao longo do ciclo econômico se manteve relevante nos anos que se seguiram. Os reflexos dessa formulação teórica podem aparecer, em maior ou menor grau, na tentativa de diversas obras de buscar, na intensividade de capital da economia, fatores que explicam os movimentos da desigualdade, ou então no interesse de se entender como funciona a trajetória da desigualdade em períodos de crescimento.

A primeira tentativa de incorporar dinâmicas de distribuição de renda na economia foi o trabalho de Stiglitz (1969), que apresenta um modelo no qual indivíduos podem ser separados em grupos de mesma renda. Nessa economia, o autor assume que o trabalho é homogêneo, o que significa que a origem da desigualdade está atrelada à dotação de capital que cada grupo possui. Sendo a poupança média de cada grupo uma função linear de sua renda, grupos com rendas diferentes poupariam quantidades diferentes, e isso tem uma influência na acumulação de capital de cada grupo.

No modelo de Stiglitz (1969), as condições para as quais haverá convergência de renda ou o aumento da desigualdade estão relacionadas ao nível da razão capital-trabalho correspondente ao equilíbrio: se a economia estiver em equilíbrio com uma baixa razão capital-trabalho, haverá aumento de desigualdade, e diminuição na mesma para equilíbrios em que essa razão se encontra num nível alto.

Como forma de equalizar as rendas ao longo do tempo, Stiglitz (1969) trabalha com a hipotética incidência de um imposto de renda redistributivo. O autor mostra que a incidência

de um imposto que tentasse redistribuir a renda, focado nos grupos de indivíduos cuja renda se situasse abaixo da média da população, diminuiria o valor limite da razão capital-trabalho necessária para a convergência, além de aumentar o ritmo no qual a mesma acontece.

Alguns anos depois da contribuição de Sitglitz (1969), Chatterjee (1994) constrói um modelo neoclássico com agentes heterogêneos que busca sanar algumas das questões que o primeiro autor deixou em aberto. Em seu modelo, Chatterjee define como fonte de heterogeneidade apenas a dotação inicial de riqueza, dividindo os indivíduos entre “ricos” e “pobres”. De acordo com o autor, mudanças na distribuição de renda ao longo do tempo não afetariam o nível de bem-estar social da economia, porém, uma redistribuição de renda no período inicial mudaria o nível de bem-estar ao longo de todo o período subsequente.

Durante as últimas duas décadas, houve um crescimento considerável de discussões a respeito da distribuição de renda, que passaram a ser incorporadas diretamente nos modelos econômicos já estabelecidos para discutir o equilíbrio de steady state, como o modelo neoclássico, de gerações sobrepostas, ou o modelo de Ramsey (1928), por exemplo. Essa incorporação permitiu um melhor entendimento da relação entre crescimento econômico e distribuição de renda, assim como o comportamento da desigualdade ao longo do tempo.

1.1.2. Desigualdade de renda em modelos de crescimento sem governo

A ideia inicial de começar por um modelo sem governo é responder à pergunta de como se dão as dinâmicas de distribuição de renda nessa condição. Por isso é interessante elaborar como esse tema vem sendo abordado na literatura de modelos de crescimento que não consideram políticas voltadas a melhorar a distribuição de renda.

No que diz respeito à incorporação das dinâmicas da desigualdade de renda em modelos de crescimento econômico, de acordo com Caselli e Ventura (2000), só é possível que se discuta desigualdade em um modelo macroeconômico após relaxar a hipótese do agente representativo homogêneo, que costuma ser a unidade de análise do ponto de vista das escolhas das famílias. Em outras palavras, só é possível que haja desigualdade de renda em uma economia na qual os agentes possuem alguma característica que os difira, como dotação inicial de capital (definida de forma exógena ou por herança, por exemplo), níveis de habilidade ou qualidade da educação ao qual cada um tem acesso.

Uma vez que a escolha para a fonte de heterogeneidade entre os agentes é o principal elemento na explicação da desigualdade de renda da economia, cada trabalho pode incorporar uma fonte diferente para essa heterogeneidade. O principal fator responsável por diferenciar os agentes, presente em quase todos os modelos, é a dotação inicial de riqueza seja ela relacionada ao capital, transferências vindas de gerações anteriores, ou determinadas exogenamente. Por outro lado, alguns trabalhos adicionam outras causas de heterogeneidade entre agentes, como habilidades, como é o caso de Eicher e García-Peñalosa (2001), de Croix e Lurbano (2010), García-Peñalosa e Turnovsky (2015), as preferências dos consumidores, como em Caselli e Ventura (2000), e García-Peñalosa e Turnovsky (2015), ou a qualidade da educação como Maliar et al. (2005) e Santos (2011).

A escolha de modelo macroeconômico também é relevante, pois diferentes modelos permitem analisar a desigualdade de renda de diferentes formas. Modelos neoclássicos de crescimento e o modelo de Ramsey são mais adequados quando o objetivo principal é analisar como a desigualdade se relaciona com variações nos ciclos econômicos, por exemplo, enquanto modelos de gerações sobrepostas permitem que sejam investigados elementos de mobilidade geracional, e até mesmo armadilhas de pobreza.

Um grande avanço na literatura que insere a desigualdade em modelos macroeconômicos foi o de Caselli e Ventura (2000), que trabalha com três fontes de heterogeneidade: preferências, habilidades e o estoque inicial de riqueza, num modelo neoclássico de agente representativo, e, posteriormente, aplicam essas ferramentas aos modelos de Ramsey-Cass-Koopmans e de Arrow-Romer. Os autores constroem um modelo cujos agentes possuem um comportamento médio consistente com a hipótese do consumidor representativo, apesar da heterogeneidade. Essa característica é importante, pois permite que os autores definam as condições de equilíbrio como se não houvesse heterogeneidade, para, depois disso, verificarem a dinâmica distributiva dessa economia. No modelo, a provisão de bens públicos possui um papel fundamental, que é o de reduzir a desigualdade do consumo entre indivíduos: como o consumo individual é formado por uma parcela de consumo privado, e outra relacionada ao consumo público, o aumento da provisão de bens de consumo público provoca a convergência nessa economia.

A grande inovação proposta por Caselli e Ventura (2000) é que os autores constroem ferramentas que permitem que se analise os aspectos distributivos de variáveis como consumo, renda e riqueza (e as condições em que existe convergência e divergência nessas variáveis) em

modelos já estabelecidos. Apesar de não discutirem o papel da intervenção do Estado para além de fornecer bens de consumo, a contribuição teórica no debate sobre a desigualdade e sua relação com os ciclos econômicos permitiu que novos trabalhos nessa linha fossem desenvolvidos.

Eicher e García-Peñalosa (2001) é mais um trabalho a estudar o comportamento da desigualdade associado à educação (aqui, relacionado ao acúmulo de capital humano). Os autores elaboram um modelo no qual os trabalhadores podem se dividir entre qualificados e não-qualificados, de acordo com sua decisão sobre obter ou não educação formal na juventude. A heterogeneidade entre agentes, nesse caso, se dá de forma na qual eles se dividem apenas entre esses dois grupos, e a diferença salarial entre eles irá definir o tamanho da desigualdade presente nessa economia.

Uma vez tomadas as decisões individuais de arcar com os custos da educação para o ingresso no mercado de trabalho, os trabalhadores qualificados precisam escolher se se dedicam ao trabalho no setor produtivo ou no de pesquisa e desenvolvimento. A importância do setor de pesquisa e desenvolvimento nesse caso vem do fato de que, em economias desenvolvidas, a maior parte do progresso tecnológico deriva dos trabalhadores qualificados desse setor, enquanto os trabalhadores qualificados do setor produtivo só conseguem inovar por meio do processo de learning-by-doing¹.

A decisão que os trabalhadores qualificados precisam fazer entre se dedicar ao setor produtivo ou ao de pesquisa depende da quantidade de trabalhadores qualificados no primeiro, e no nível geral de trabalhadores qualificados. Só a partir do ponto em que a economia ultrapassa certo nível de desenvolvimento tecnológico é que vale a pena que se empregue mais no setor de pesquisa e desenvolvimento.

A relação intrincada entre qualificação dos trabalhadores e crescimento tecnológico é a principal característica do trabalho de Eicher e García-Peñalosa (2001), uma vez que é dessa interação que deriva a curva de demanda por trabalho qualificado, e, conseqüentemente, o resultado em termos de desigualdade de renda. No entanto, a relação entre avanço tecnológico e aumento na desigualdade não é monotônica, pois depende do custo da educação formal, da

¹ No processo de Learning-by-doing, os autores assumem que, à medida em que o processo produtivo ocorre ao longo do tempo, os trabalhadores desenvolvem novas tecnologias, sem que haja necessidade de pesquisa e desenvolvimento. Dessa forma, as inovações tecnológicas derivam da própria produção.

elasticidade de substituição entre trabalho qualificado e não-qualificado e das externalidades do processo educacional: uma economia com baixos custos para educação, presença forte de externalidades do processo educacional e alta produtividade do setor de pesquisa e desenvolvimento estará associado a um alto nível de crescimento, e a um cenário de armadilha de pobreza no caso oposto.

Maliar et al. (2005) apresentam um modelo neoclássico de crescimento no qual os agentes se diferem por duas variáveis: o estoque inicial de riqueza, e o nível de habilidades, de modo que existem agentes que possuem sua produtividade relativamente mais alta do que seu estoque inicial de riqueza (que os autores chamam de “pobres muito produtivos”), assim como aqueles cujo estoque de riqueza é relativamente maior (os “ricos pouco produtivos”). Cada uma dessas variáveis está sujeita a uma função de distribuição diferente, que determina como cada uma é relativamente melhor ou mais mal distribuída entre os agentes.

Diante disso, os autores definem a renda e a riqueza de cada indivíduo em cada período a partir de uma combinação linear de suas habilidades e de sua riqueza inicial. Nos períodos de choques tecnológicos positivos, as habilidades dos indivíduos seriam mais relevantes para determinar a renda e a riqueza, enquanto o oposto aconteceria nos choques negativos. Com isso, os autores concluem que períodos de crescimento econômico fazem a distribuição de renda convergir em direção à distribuição de habilidades dos indivíduos.

É importante notar que a condição necessária para que a desigualdade caia em períodos de crescimento econômico no modelo é de que as habilidades não-adquiridas sejam distribuídas de forma mais igualitária do que a riqueza inicial. Como não faz parte do escopo do artigo endogenizar as decisões de se aumentar o nível de habilidade, não é possível definir o papel do acesso à educação nesse modelo diretamente, apesar de que uma de suas implicações seria distribuir mais igualmente a dotação de habilidades dos indivíduos, permitindo que a desigualdade caísse em momentos de crescimento.

Outro trabalho que utiliza o modelo de gerações sobrepostas para falar sobre desigualdade de renda, e considera as decisões de se educar como componente endógeno é o de Croix e Lurbano (2010), que constrói um modelo no qual os indivíduos possuem diferentes níveis de habilidade, buscando discutir políticas fiscais de taxaço a partir das habilidades dos indivíduos, o qual a literatura se refere como Endogenous Lifetime, Inequality, and Economic Growth.

No modelo de Croix e Lurbano (2010), os agentes podem escolher que parcela de seu tempo será dedicada a estudar para que se acumule capital humano, ou trabalhar. Ao mesmo tempo, os ganhos do trabalho poderão ser alocados entre consumo e poupança, de modo que a segunda se converterá em consumo no segundo período de sua vida. Apesar de se tratar de um modelo de gerações sobrepostas, nesse modelo, a transmissão de uma geração para a outra se dá de forma involuntária, a partir do capital humano dos indivíduos jovens, que é definido, parcialmente, pelo capital humano da comunidade em seu entorno.

Os resultados do modelo mostram que existe um trade-off entre crescimento e redistribuição, e que as políticas fiscais têm um papel importante na determinação dele. Isso ocorre, pois, a taxa sobre os jovens influencia diretamente na decisão de investir em capital humano. Além disso, os autores argumentam que o modelo ELIE pode ajudar a informar a formulação de políticas públicas que buscam alcançar um equilíbrio adequado entre crescimento e redistribuição.

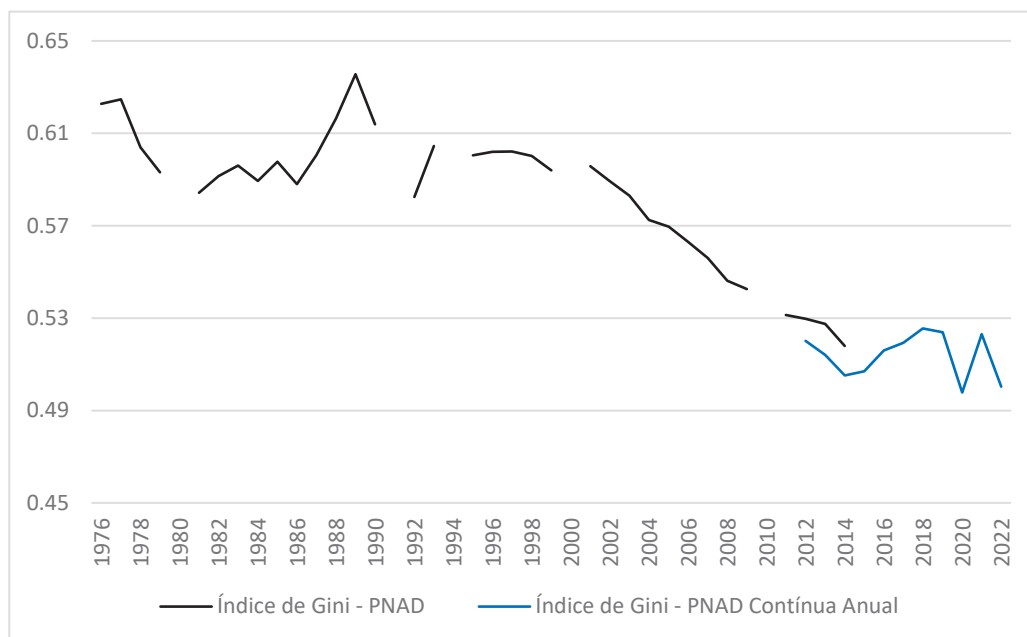
1.1.3. A trajetória recente da desigualdade de renda no Brasil

Seguindo a ideia de dar ao modelo a capacidade de replicar as características distributivas da economia brasileira, é interessante discutir brevemente a evolução recente da distribuição de renda no país. Mais especificamente, ao analisar a queda no índice de Gini ocorrida na década de 2000, esta subseção também apresenta sucintamente as principais razões apontadas na literatura como sendo responsáveis por essa diminuição.

O GRÁFICO 1 apresenta os dados da Pesquisa Anual por Amostras de Domicílio (PNAD) (de 1976 a 2014), e da PNAD Contínua Anual (entre 2012 e 2022) sobre o índice de Gini da renda familiar per capita, calculados pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA). A presença de duas séries temporais se dá pelo fato de a série baseada na PNAD ter sido descontinuada em 2014, enquanto a baseada na PNAD Contínua Anual substituiu a anterior.

Nota-se que, de meados dos anos 1970 até o fim dos 1990, o índice de Gini da renda domiciliar per capita permaneceu num patamar elevado, em torno de 0,6, sem alguma tendência de queda. Apenas após 25 anos desde o início da série temporal pode-se notar uma tendência de queda, que se inicia a partir de 1998, e que se seguiu por 14 anos de queda praticamente contínua, chegando ao valor de 0,518 em 2014, que corresponde a uma queda de 18% em relação ao maior valor da série, que foi de 0,636 em 1989.

GRÁFICO 1 – ÍNDICE DE GINI DA RENDA DOMICILIAR PER CAPITA – PNAD CONTÍNUA E PNAD CONTÍNUA ANUAL



FONTE: Elaboração própria, com dados do IPEA

Porém, esse movimento foi interrompido a partir de 2015, como sugerem os dados da PNAD Contínua Anual. A partir daí, a economia seguiu anos sem uma tendência clara nos movimentos da desigualdade de renda até o último ano disponível da série temporal.

O período de redução da desigualdade foi profundamente estudado por múltiplas perspectivas diferentes, na tentativa de entender, principalmente, quais foram os motivos que levaram a essa tendência de queda. Como será visto a seguir, os estudos que se debruçaram sobre essa questão apontaram como as principais causas pelo sucesso no combate à desigualdade ocorrido nessa década e meia estão, principalmente, (i) melhoras no mercado de trabalho, e (ii) as políticas de transferência de renda.

Em Neri e Souza (2012), tem-se uma análise sobre a década compreendida entre 2001 e 2011 na qual os autores decompõem o índice de Gini de acordo com as fontes de renda em diferentes anos. A decomposição da renda familiar é feita de acordo com cinco categorias: trabalho, previdência, BPC (Benefício de Prestação Continuada), Bolsa Família e Outras Fontes.

Na decomposição, os autores são capazes de mostrar dois importantes componentes do índice de Gini, sendo (i) o coeficiente de concentração, medida que varia entre -1 e 1, e mede

o quão concentrada é aquela fonte de renda, além de avaliar se essa concentração segue a mesma direção do índice de Gini (nesse caso, assume um valor positivo), ou se a fonte de renda é mais concentrada entre as famílias mais pobres (cenário do qual assume um valor negativo), e (ii) a participação relativa da fonte de renda no total de rendimentos das famílias.

Os autores destacam que todas as fontes de renda, com exceção das transferências do Programa Bolsa Família, se tornaram menos concentradas com o tempo, o que significa que a queda no índice de Gini na magnitude que observamos só se tornou possível porque todos os rendimentos se tornaram menos desiguais, com um destaque especial para os rendimentos do trabalho, os quais representaram mais de 75% da renda familiar durante todo o período.

Do ponto de vista das políticas públicas, os autores apontam a eficiência do processo de focalização do Bolsa Família, uma vez que a distribuição de rendimentos advindos do programa é altamente concentrada, e possui um valor negativo, o que significa que são justamente as famílias mais pobres que recebem os maiores montantes de transferências nesses programas. Com isso, os autores entendem que as transferências do Governo de modo geral, e o Bolsa Família, em particular, também possuíram um papel importantíssimo na melhoria da distribuição de renda observada na década.

Se aprofundando no papel do salário mínimo na distribuição de renda, Saboia e Hallak Neto (2018) estimam a elasticidade de rendimentos como a renda do trabalho, pensões e transferências em relação ao salário mínimo, na tentativa de verificar como a política de valorização do mesmo pode afetar a distribuição de renda da economia como um todo.

Os autores argumentam que, como as transferências previdenciárias e o Benefício de Prestação Continuada (BPC) tem seus valores indexados de acordo com o salário mínimo, por isso a importância de analisá-los, assim como os rendimentos do trabalho. Além disso, as elasticidades são calculadas para diferentes grupos de trabalhadores agrupados de acordo com a sua posição na ocupação.

Os autores apontam que a política de valorização do salário mínimo foi capaz de explicar mais da metade da queda do índice de Gini no período entre 2004 e 2013, além de ser responsável por 60% do aumento da participação dos salários no PIB. Os autores apontam, no entanto, que por se tratar de uma variável de caráter pró-cíclico, o poder de ação do salário mínimo na redução da desigualdade tem sua eficácia reduzida em períodos de crise econômica,

e isso pode ser um dos motivos para a interrupção da queda na desigualdade observada após 2015.

Outro trabalho que avalia o impacto das mudanças ocorridas no âmbito do mercado de trabalho na redução de desigualdade é o de Machado et al. (2020), que investigam como se comportou a desigualdade de rendimentos no mercado de trabalho formal. Os autores, trabalhando com dados do Registro Anual de Informações Sociais (RAIS) compreendidos entre 1994 e 2015, verificam quais foram os motivos que levaram à queda de desigualdade por meio de uma decomposição da desigualdade salarial.

Tendo acesso a uma base de dados que contém informações das empresas, os autores são capazes de estimar o impacto da ação das firmas na redução da desigualdade, e mostram que os efeitos fixos das firmas são responsáveis por mais da metade da redução da desigualdade de renda ocorrida no mercado de trabalho formal. O nível de educação dos trabalhadores apareceu como segunda maior fonte, explicando mais de 30% da redução da desigualdade.

Sobre o papel dos programas de transferência de renda na melhoria da distribuição de renda, existe uma vasta literatura disponível, desde trabalhos feitos durante a fase de expansão do programa (Hoffman, 2006, Soares et al., 2006, de Barros et al., 2007, Hoffman, 2009, Soares et al., 2010) quanto análises mais recentes, feitas após a queda na desigualdade (Peña, 2015, Souza et al., 2019).

Ainda durante a década de 2000, o período no qual ocorreram as maiores quedas na desigualdade de renda no Brasil, muito já se estudava sobre o papel que o Bolsa Família tinha nesse movimento. Os trabalhos de Hoffman (2006), Soares et al. (2006), Hoffman (2009) e Soares (2010) estimam esse impacto por meio de uma decomposição fatorial do índice de Gini da renda domiciliar per capita. Com isso, são capazes de verificar como cada fonte de renda foi responsável por promover quedas nos índices agregados de desigualdade. Os resultados apontam para uma influência que se situa entre 15% e 25% da queda do índice de Gini, a depender da janela de tempo utilizada na análise.

Usando uma metodologia baseada em microssimulações, de Barros et al. (2007) fazem uma estimativa sobre o papel das políticas de transferência de renda como um todo na queda da desigualdade entre 2001 e 2005. A metodologia empregada no trabalho envolve analisar individualmente os movimentos das variáveis que compõem a renda não derivada do trabalho das famílias, isolando, nesse processo, as transferências do Governo. Dentre os resultados,

chama atenção que, de acordo com as estimativas, as transferências do Governo foram responsáveis por 49% da queda na desigualdade no período, sendo delas as aposentadorias (26%) as mais relevantes, seguidas pelo Bolsa Família (12%) e pelo Benefício de Prestação Continuada (11%).

De modo geral, mesmo os trabalhos que apontam para a importância das transferências de renda no período deixam claro o papel de protagonismo das melhorias na distribuição da renda do trabalho na queda dos índices agregados de desigualdade, como o Gini.

Diante do papel fundamental das transferências de renda na redução da desigualdade brasileira, o modelo proposto nesse trabalho também contará com o papel das transferências de renda na desigualdade. A ideia é adicionar ao modelo um componente de política de transferência.

1.1.4. Modelos de distribuição de renda no Brasil

No Brasil, os modelos macroeconômicos de distribuição de renda se separam entre os liderados pela oferta e os liderados pela demanda, sendo o segundo tipo os mais numerosos. Esta seção apresenta os dois tipos contribuições, com o objetivo de justificar a escolha da abordagem teórica utilizada neste trabalho, o modelo de gerações sobrepostas.

Dentre as contribuições mais recentes no Brasil, a maior parte dos modelos teóricos construídos com o objetivo de discutir distribuição de renda são os modelos de crescimento liderado pela demanda, principalmente de tradições como a pós-keynesiana (Santos et al., 2017, Valêncio et al. 2018, Santos e Oreiro, 2020), neo-kaleckiana (Avritzer et al. 2008, Lima et al., 2021), além de uma extensa agenda de pesquisa promovida por teóricos estruturalistas brasileiros e de outros países da América Latina, como é apontado por Vergnhanini e Biancarelli (2020).

Em geral, pode-se dizer que esses modelos dão ênfase (cada um à sua maneira), às disputas que ocorrem entre detentores de diferentes fatores de produção, como capital e trabalho. Além disso, a estrutura desses modelos possui um enfoque maior em variáveis de ordem macroeconômica, por isso, não levam em consideração as decisões individuais das famílias na construção do equilíbrio macroeconômico. Isso faz com que não exista a possibilidade de que se acrescente nesses modelos agentes econômicos (especialmente trabalhadores) heterogêneos.

Na prática, isso significa que os modelos heterodoxos interessados em discutir sobre a distribuição de renda possuem como objetivo avaliá-la sob um ponto de vista específico: o da distribuição funcional da renda, que é a proporção da renda total de uma economia que se converte em remuneração a diferentes partes do processo produtivo, como trabalhadores, capitalistas, ou proprietários de terra.

Por isso, por mais que esses modelos sejam eficientes na função de oferecer uma explicação de como a renda é dividida entre diferentes atores do processo produtivo, um estudo que tem o interesse em entender o papel que as decisões de educação possuem sobre a distribuição de renda entre trabalhadores deve utilizar como base teórica modelos que possuem uma abordagem voltada às decisões individuais, especialmente no que diz respeito ao papel dos indivíduos em investir na própria educação e na dos filhos, como é o caso dos modelos de gerações sobrepostas.

Um estudo que, apesar de seguir uma linha teórica diferente da proposta pelo presente trabalho, se dedica a avaliar o papel da acumulação de capital humano na distribuição de renda é o de Lima et al. (2021), apresentando um modelo neo-kaleckiano que discute a importância da acumulação de capital humano na distribuição funcional da renda e crescimento econômico. No modelo, o investimento em capital humano é financiado inteiramente pelo Estado, e possui um papel importante nos salários dos trabalhadores.

Além disso, o modelo mostra que a forma como cada classe (trabalhadores ou capitalistas) financia o gasto público em educação também possui influência sobre o resultado do modelo. De acordo com os autores, um maior investimento em educação é capaz de promover uma melhora na distribuição funcional da renda, em direção aos trabalhadores, que, dotados de maior poder de barganha, recebem uma maior compensação pelo seu papel no processo produtivo. Essa melhora na distribuição de renda, de acordo com os autores, também leva, no longo prazo, a um aumento no crescimento econômico.

Alguns modelos, entretanto, discutem distribuição de renda em um arcabouço neoclássico, como é o caso de Rocha (2015), que elabora um modelo de gerações sobrepostas para discutir o processo de formação de capital humano numa economia com uma restrição de indivisibilidade do investimento em capital humano, e onde as famílias precisam lidar com restrições relacionadas a um nível de consumo mínimo. No modelo, os indivíduos, em sua juventude, precisam decidir sobre como alocar tempo para se educarem e trabalharem, além da

quantidade que irão consumir ou poupar. Na fase subsequente, a escolha fica entre deixar heranças para seus filhos, e consumir.

Associada à hipótese de consumo mínimo, Rocha (2015) trabalha com a heterogeneidade de agentes considerando que as famílias possuem um nível diferente de riqueza inicial, distribuído aleatoriamente. Como resultado, é determinado um valor de riqueza inicial abaixo do qual os indivíduos não serão capazes de realizar gastos em educação de forma ótima. Em relação à indivisibilidade do fator capital humano assume-se a hipótese de que o prêmio salarial da educação se baseia na conclusão de ciclos escolares, assumindo um formato de “escada”. Nesse cenário, apenas o patamar mais alto na escala de retorno à educação corresponderia ao investimento ótimo, porém, como nem todos os agentes seriam capazes de se dedicarem ao máximo para a formação de capital humano, a economia estaria sujeita a um cenário de subinvestimento em capital humano. De modo geral, o autor mostra como essas dinâmicas levam a um cenário no qual as famílias que não têm capacidade de realizar um investimento ótimo em capital humano durante todo o período não tem condições de se igualar às famílias que foram capazes.

Ao se estudar as dinâmicas de acumulação de capital humano por meio da educação num modelo de gerações sobrepostas, o presente trabalho se assemelha ao de Rocha (2015) em seu objeto de estudo, mas se difere em relação aos seus objetivos. Isso ocorre porque, ao analisar de forma cuidadosa diferentes hipóteses sobre as funções utilidade, e de acumulação de capital humano sobre o equilíbrio de longo prazo da economia e na possibilidade de existir uma trajetória de convergência de renda, o autor citado não se dedica a discutir como esses ciclos de convergência ou divergência de rendimentos podem ser interrompidos por meios de políticas públicas, que é o que o presente trabalho se dedica a fazer.

Se afastando um pouco mais do arcabouço de gerações sobrepostas, Gomes et al. (2015), elaboram um modelo neoclássico de equilíbrio geral com agentes heterogêneos, separados em duas categorias (pobres e não-pobres), e tem por objetivo entender em que medida os investimentos públicos em infraestrutura poderiam influenciar uma economia. Um dos fatores que difere as famílias pobres das não-pobres nesse modelo é o acesso à poupança: enquanto uma das famílias pode poupar, portanto, acumular capital, a outra não tem essa possibilidade. Além da restrição à poupança, outro fator de heterogeneidade é a produtividade do trabalho de cada grupo de famílias.

Calibrando o modelo com dados do Brasil, os autores mostram como o consumo do governo é importante para o bem-estar das famílias pobres, porém, quando o financiamento desses gastos vem por parte dos recursos dessas famílias, os ganhos distributivos são anulados.

Ao observar a literatura brasileira sobre crescimento e distribuição de renda, é possível notar uma lacuna no que diz respeito a modelos teóricos que tentem investigar como esse fenômeno se manifesta no Brasil, em especial fora do campo dos modelos liderados pelo lado da demanda. Sabendo disso, a construção de um modelo de crescimento com agentes heterogêneos, e que toma como endógenas as decisões de gasto em educação, podem oferecer respostas para questões que permanecem em aberto sobre a distribuição de renda no Brasil.

1.2 MODELO

O modelo de gerações sobrepostas parte de outras contribuições de trabalhos recentes como em Santos (2011), Croix e Lurbano (2010), Rocha (2015), Yang e Qiu (2016), e Stauvermann e Kumar (2018). Assim como esses modelos foram realizados na intenção de replicar as características mais marcantes das economias específicas, este trabalho tem como referência a economia brasileira, por isso, será construído adicionando hipóteses que dialoguem com a realidade do país. Seguindo a escolha desses trabalhos, optou-se pela versão discreta e de horizonte infinito.

O trabalho elabora um modelo de gerações sobrepostas no qual os pais valorizam a educação dos filhos, e podem tomar a decisão de investir na sua educação (semelhante ao que se vê em Santos, 2011), no qual os indivíduos vivem dois períodos. O primeiro período é a infância, no qual a educação é financiada pelos seus pais. Durante a fase adulta, os indivíduos são responsáveis por gastar com a educação dos próprios filhos. A principal contribuição deste trabalho é a adição ao modelo de uma estrutura condicional que pode levar a escolhas de consumo e gasto em educação inferiores ao seu nível ótimo.

A população dessa economia é composta por n indivíduos na fase adulta, que tomam suas decisões em cada período t , cujas consequências incidirão sobre seus descendentes dos períodos seguintes. Por hipótese, cada indivíduo tem apenas um filho, o que implica que a população não muda de tamanho ao longo dos períodos.

A versão do modelo apresentada neste capítulo tem como objetivo entender como se dão as dinâmicas de distribuição de renda sobre uma economia na qual o governo não age, e a partir daí, entender o impacto de cada tipo diferente de política sobre a formação de capital

humano de cada grupo de famílias ao longo do tempo. Portanto, na primeira versão do modelo, podemos considerar uma economia, a princípio, sem governo, uma vez que não há intervenção relevante.

1.2.1. Famílias

No modelo, as duas gerações coexistem, mas como, por hipótese, os indivíduos tomam decisões economicamente relevantes apenas no segundo período de suas vidas, a preocupação se dá apenas com os N indivíduos economicamente ativos, ou seja, que estão nos períodos de sua vida no qual podem trabalhar.

Os indivíduos maximizam a seguinte função utilidade:

$$U(c_{i,t}, h_{i,t+1}) = \ln(c_{i,t}) + \beta \ln(h_{i,t+1}) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$c_{i,t} = \omega_t h_{it} - e_{i,t} \quad (2)$$

$$h_{i,t+1} = \begin{cases} \delta_{i,t+1} & e_{i,t} = 0 \\ \gamma e_{i,t}^\rho \delta_{i,t+1} & e_{i,t} > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Sendo,

$c_{i,t}$: O consumo da família i em t .

h_{it} : O capital humano acumulado pelo indivíduo que chefia a família i , em t .

$h_{i,t+1}$: O capital humano pelo chefe da família i na geração seguinte

$e_{i,t}$: O gasto em educação realizado em t pela família i .

ω_t : A taxa de salário por unidade de capital humano da economia em t .

$\delta_{i,t+1}$: O nível de habilidade inata dos filhos da família i em t , que se converte em capital humano na geração seguinte.

A função utilidade apresentada na equação (1) inclui o consumo do indivíduo no período corrente $c_{i,t} > 0$ e a quantidade de capital humano que seu descendente possuirá no período seguinte $h_{i,t+1} > 0$, mediados pelo fator de desconto β , que, no modelo, reflete o valor que os pais dão à educação de seus filhos, em comparação ao consumo dos demais bens e serviços. A inclusão do montante de capital humano dos filhos na função utilidade dos pais indica que eles dão valor para a educação de seus filhos a ponto de se absterem de parte de seu consumo no presente para garantir que sejam realizados gastos destinados ao acúmulo de capital humano da geração seguinte. Ainda sobre $h_{i,t+1}$, é importante ressaltar que, apesar de, matematicamente, a variável fazer parte da mesma matriz de $h_{i,t}$, é necessário ter cautela ao interpretar o significado de cada variável, uma vez que cada período de t diferente se refere a uma geração de cada família i .

A equação (2) diz que os indivíduos precisam escolher entre destinar seus recursos financeiros – representados pelo produto da taxa de salário por unidade de eficiência (ω_t) e a quantidade de capital humano (h_{it}) que o indivíduo possui, entre consumo e gasto em educação de seus filhos $e_{i,t}$.

A restrição em (3) representa a função de acumulação de capital, que apresenta uma estrutura condicional dependente do gasto em educação da família, que será melhor explorado adiante. Caso o gasto em educação seja nulo, assume-se que a quantidade de capital humano no futuro será definida apenas pelo nível inato de capital humano do filho, definido pela variável aleatória $\delta_{i,t+1}$, que assume valores diferentes para cada indivíduo da mesma geração, e captura o nível inato de habilidade de cada criança. Essa hipótese segue a ideia de que, mesmo na ausência de educação formal, a experiência adquirida ao longo da vida será tal que o indivíduo poderá se inserir no mercado de trabalho, sendo devidamente remunerado.

Caso o gasto em educação seja positivo, a conversão do mesmo em capital humano será mediada pela elasticidade do gasto com educação ρ , além de ser absorvido por cada indivíduo de forma diferente de acordo com o parâmetro $\delta_{i,t+1}$, de modo que o gasto em educação pode ser mais bem aproveitado por indivíduos mais aptos. Além disso, para assegurar que o estoque de capital humano irá crescer entre gerações, o parâmetro γ representa um fator de crescimento linear que pode ser entendido como um parâmetro que reflete a qualidade do processo educacional, tido como exógeno.

Sobre a variável aleatória δ_i também é importante deixar claro que o conceito aqui chamado de “habilidade inata”, seguindo a nomenclatura que a literatura de modelos de crescimento, tende a adotar pode capturar uma série de características pessoais (em sua maioria, não mensuráveis) que podem diferir indivíduos no mercado de trabalho, que pode ir além necessariamente da inteligência. Em suma, o que se busca trazer para o modelo com esse parâmetro é o fenômeno no qual o mesmo gasto em educação pode levar a diferentes níveis de capital humano a depender de como cada indivíduo absorve esse gasto.

A presença de um fator aleatório na formação de capital humano pode ser entendida como algo relacionado às habilidades cognitivas, esforço (Yang e Qiu, 2016), ou até mesmo à sorte (Becker e Tomes, 1986). Por se tratar de um conceito amplo, multidimensional, e que pode ser entendido sob diferentes óticas, se optou por tratar essa variável como sendo aleatória e independente do nível de capital humano da geração anterior. Essa decisão, inclusive, traz uma conveniência ao modelo por duas razões: em primeiro lugar, permite a possibilidade de a incidência de choques aleatórios ao longo de todo período, e em segundo lugar, a possibilidade de que haja um mecanismo que permita a ascensão social dos indivíduos mais habilidosos, independente de políticas redistributivas.

O problema de maximização, nesse contexto, ocorre da seguinte maneira: resolve-se os problemas sem considerar as restrições de consumo mínimo, para se verificar os valores de $c_{i,t}^*$ e $e_{i,t}^*$, que são os valores de ótimos de gasto em consumo e educação, respectivamente. O segundo passo é checar a condição de consumo mínimo e a partir daí, são definidos os valores de $c_{i,t}$ e $e_{i,t}$. Em outras palavras, mesmo as famílias incapazes de satisfazer a restrição de consumo mínimo são capazes de saber as quantidades ótimas de consumo e educação que gostariam de obter, mas precisam avaliar se essa alocação é possível, uma vez que é necessário antes atender as suas necessidades mais urgentes antes.

Dessa forma, para obter os valores ótimos de $c_{i,t}^*$ e $e_{i,t}^*$, começa-se por inserir as equações (2) e (3) em (1), e o problema de otimização das famílias passa a ser apenas sobre $e_{i,t}$, como pode ser visto em:

$$U(e_{i,t}) = \ln(\omega_t h_{it} - e_{i,t}) + \beta \ln(\gamma e_{i,t}^\rho \delta_{i,t+1}) \quad (1')$$

Das condições de primeira ordem do problema, tem-se que:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{i,t}} = \frac{-1}{\omega_t h_{i,t} - e_{i,t}} + \frac{\beta \rho}{e_{i,t}} = 0$$

Resolvendo para $e_{i,t}$, tem-se;

$$e_{i,t}^* = \frac{\beta \rho \omega_t h_{i,t}}{1 + \beta \rho} \quad (4)$$

A partir de (4), pode-se notar duas características interessantes sobre o gasto ótimo em educação realizado pelos pais para seus filhos. O primeiro ponto que chama atenção é a presença da dotação de capital humano dos pais no gasto em educação dos filhos. Essa relação entre as duas variáveis já era esperada, uma vez que o montante de capital humano de cada pessoa irá se refletir na sua renda, e, conseqüentemente, no gasto em educação para seu descendente, mas pode ser sinal de um mecanismo de retroalimentação da desigualdade salarial, uma vez que pais mais ricos poderão gastar mais na educação de seus filhos do que pais pobres.

O segundo ponto que chama atenção na equação (4) é o fato de que o valor da habilidade inata de seus filhos, $\delta_{i,t+1}$, não é relevante para os pais na decisão de gastar com sua educação. Essa constatação parece razoável, uma vez que fatores relacionados à habilidade inata, ou ao esforço são difíceis de se observar, ainda que possuam influência sobre a habilidade de cada indivíduo no futuro.

Com o gasto em educação, é possível, também, definir o consumo ótimo de cada indivíduo, ao substituir a equação (4) em (2):

$$c_{i,t} = \omega_t h_{i,t} + \frac{\beta \rho \omega_t h_{i,t}}{1 + \beta \rho}$$

Que resulta em:

$$c_{i,t}^* = \frac{\omega_t h_{it}}{1 + \beta \rho} \quad (5)$$

Ao observar as equações (4) e (5) em conjunto, pode-se notar que o gasto ótimo que um indivíduo tem com a educação da geração seguinte depende do produto $\beta \rho$, que é formado pelo fator de desconto e o parâmetro de eficiência do gasto em educação. É interessante notar que, caso $\beta \rho < 1$, os indivíduos gastarão uma parcela maior da renda com o consumo corrente do

que com a educação dos filhos, enquanto no caso de $\beta\rho > 1$, ocorre o inverso. Além disso também é possível notar que o gasto ótimo com a educação dos descendentes seguirá a proporção $(\frac{\beta\rho}{1+\beta\rho})$ do total de rendimentos com educação e $(\frac{1}{1+\beta\rho})$ em consumo.

Apesar de sua importância na definição do nível de capital humano do período seguinte, ambos os parâmetros não variam entre indivíduos, o que significa que eles não irão ser relevantes para explicar as diferenças salariais entre indivíduos no momento.

Após o cálculo do consumo ótimo, ocorre o processo no qual as famílias avaliam se possuem as condições de satisfazer a necessidade de consumo mínimo. Esse processo ocorre a partir da resolução da condição apresentada em:

$$c_{i,t} = \begin{cases} m_{i,t} & m_{i,t} < \bar{c} \\ \bar{c} & \bar{c} \leq m_{i,t}, c^* < \bar{c} \\ c_{i,t}^* & c_{i,t}^* \geq \bar{c} \end{cases} \quad (6)$$

É assumido, na equação (6), que as famílias darão preferência para atingirem certo nível de consumo mínimo $\bar{c}$, definido exogenamente, e só a partir daí irão se dedicar a realizar gastos com a educação de seus filhos. Essa hipótese se assemelha à proposta de Rocha (2015), que analisa em seu modelo o impacto do estabelecimento de um consumo mínimo por parte das famílias. Esse consumo se limitaria a uma questão de subsistência no sentido estritamente nutricional, mas parte de um conceito mais amplo de satisfação de necessidades básicas. Aqui, a escolha das famílias sobre como alocar a sua renda no modelo segue parcialmente a formulação elaborada por Rocha (2015), mas a decisão individual de alocação de gastos se dá de forma diferente, baseado nas hipóteses de indivisibilidade do capital humano.

Ainda na equação (6), $m_{i,t} = \omega_t h_{i,t}$ é o total de rendimentos do indivíduo, e c^* é o valor de c que maximizaria sua função utilidade na ausência da restrição de consumo mínimo. Isso faz com que, na prática, se criem três grupos de indivíduos: um que se situa abaixo da linha de consumo mínimo e não será capaz de realizar gastos em educação, um grupo intermediário que será capaz de atingir o consumo mínimo, mas gastará com a educação de seus filhos uma quantidade sub ótima, e um grupo que não será afetado pelo consumo mínimo, e poderá realizar investimento ótimo em educação.

A ideia por trás dessa regra é a de que indivíduos cuja renda é insuficiente para atingir o nível mínimo de consumo (ou seja, aqueles que possuem $\omega_t h_{i,t} < \bar{c}$), se dedicarão a se aproximar o máximo possível de consumir $\bar{c}$, gastando toda a sua renda em consumo. Aqueles cujo total de rendimentos supera o mínimo, mas ainda não estão aptos a otimizar seus gastos adequadamente, consumirão o mínimo, e alocarão para a educação dos seus filhos a diferença entre seus rendimentos e $\bar{c}$.

Por consequência, o gasto em educação irá ser definido da seguinte maneira:

$$e_{i,t} = \begin{cases} 0 & m_{i,t} < \bar{c} \\ (m_{i,t} - \bar{c}) & \bar{c} \leq m_{i,t}, \quad c^* < \bar{c} \\ e_{i,t}^* & c_{i,t}^* \geq \bar{c} \end{cases} \quad (7)$$

Esse formato do gasto em educação é compatível com o observado na literatura nacional sobre como esse gasto ocorre: a restrição de consumo mínimo obriga os indivíduos mais pobres a dedicar toda a sua renda ao consumo. Isso leva ao cenário observado em trabalhos como Curi e Menezes-Filho (2010), no qual famílias mais pobres não são capazes de gastar com a educação de seus filhos.

Isso faz com que a função de capital humano das famílias também opere sobre uma estrutura condicional, como visto em (3). Ao substituir (4) na equação, determina-se o estoque de capital humano do modelo:

$$h_{i,t+1} = \begin{cases} \delta_{i,t+1} & e_{i,t} = 0 \\ \left[\frac{\beta \rho \omega_t h_{i,t}}{1 + \beta \rho} \right]^\rho \gamma \delta_{i,t+1} & e_{i,t} > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Sendo a habilidade inata de cada filho uma variável aleatória, a equação (8) indica que existe a possibilidade de, por obra do acaso, nascerem indivíduos com alto valor de δ_i , mesmo em famílias pobres, que poderão formar mais capital humano no futuro, e ascender socialmente, da mesma forma como também pode ocorrer o oposto, um cenário no qual um filho de uma família rica possua δ_i excepcionalmente baixo, de modo que o gasto em educação realizado pela geração anterior não se reflita em maior capital humano.

1.2.2. Firms

Em relação à produção, será assumida a hipótese de que a economia produz apenas um bem (Y_t), e que conta apenas com o estoque agregado de capital humano (H_t) da economia e a tecnologia (A), como fatores de produção.

$$Y_t = AH_t \quad (9)$$

Onde e $H_t = \sum_{i=1}^n h_{i,t}$, que é a quantidade agregada de capital humano, e A é definido exogenamente no modelo.

Assumindo que os preços dos fatores de produção são definidos competitivamente, e que não há concentração particular de poder de mercado por parte de firmas ou de trabalhadores, a taxa de salário dessa economia será dada por:

$$\omega_t = A \quad (10)$$

1.2.3. Equilíbrio

No modelo, o equilíbrio é definido, em cada período t , como o conjunto formado por $c_{i,t}$, $e_{i,t}$, $h_{i,t+1}$, ω_t , Y_t e T_t que satisfazem as condições de *market clearing*, dadas as variáveis exógenas, β , $\delta_{i,t}$, ρ , τ , e A . Como cada geração define indiretamente o estoque de capital humano da geração seguinte, o equilíbrio é definido a partir do primeiro até o último período, de forma sequencial.

O conjunto de equações relevantes para determinar o equilíbrio, portanto, é:

$$e_{i,t}^* = \frac{\beta \rho \omega_t h_{i,t}}{1 + \beta \rho} \quad (4)$$

$$c_{i,t}^* = \frac{\omega_t h_{i,t}}{1 + \beta \rho} \quad (5)$$

$$c_{i,t} = \begin{cases} m_{i,t} & \omega_t h_{i,t} < \bar{c} \\ \bar{c} & c_{i,t}^* < \bar{c} < \omega_t h_{i,t} \\ c_{i,t}^* & c_{i,t}^* \geq \bar{c} \end{cases} \quad (6)$$

$$e_{i,t} = \begin{cases} 0 & m_{i,t} < \bar{c} \\ (m_{i,t} - \bar{c}) & \bar{c} \leq m_{i,t}, \quad c_{i,t}^* < \bar{c} \\ e_{i,t}^* & c_{i,t}^* \geq \bar{c} \end{cases} \quad (7)$$

$$h_{i,t+1} = \begin{cases} \delta_{i,t+1} & e_{i,t} = 0 \\ \left[\frac{\beta \rho \omega_t h_{i,t}}{1 + \beta \rho} \right]^\rho \gamma \delta_{i,t+1} & e_{i,t} > 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$Y_t = AH_t \quad (9)$$

$$\omega_t = A \quad (10)$$

A ordem pela qual o equilíbrio é definido, período após período, é definida como: (i) a partir dos gastos em educação realizados pelos indivíduos do período anterior ($t - 1$) e das demais variáveis exógenas, pode-se definir as variáveis agregadas H_t , e, conseqüentemente, Y_t ; (ii) define-se a taxa de salário por unidade de capital humano a partir da equação (10); (iii) sabendo quanto cada família recebe de salário, o próximo passo é definir as quantidades ótimas de gasto em educação e consumo por meio das equações (4) e (5), respectivamente; (iv) é avaliada a condicional apresentada em (6), e definir se cada família pode realizar seus gastos ótimos com consumo e educação; (v) por fim, os novos valores de equilíbrio do período t são usados para resolver o equilíbrio dos períodos seguintes, de acordo com a equação (7).

Adicionalmente, para que seja possível resolver o problema, assume-se a hipótese de que a distribuição de capital humano no primeiro período também é exógena, de modo que, a partir daí, pode-se seguir o processo de definição do equilíbrio em cada período.

É importante ressaltar que a análise no presente trabalho se limita ao estudo da economia em equilíbrio, levando em consideração apenas os choques causados pelas novas gerações de indivíduos. Essa escolha se dá por dois principais motivos. Em primeiro lugar, associar a incidência de choques da função de produção numa economia com agentes heterogêneos seria responsável por gerar altos custos computacionais. Além disso, à medida em que o objetivo do modelo é investigar a tendência de longo prazo de crescimento da desigualdade salarial, analisar o papel de eventuais choques de produtividade poderiam levar a um caminho diferente do objetivo principal.

1.3 CALIBRAGEM

A definição do equilíbrio em Modelos de Gerações Sobrepostas está sujeita ao problema do valor inicial, que consiste na multiplicidade de equilíbrios resultantes das mesmas condições iniciais, o que pode resultar em trajetórias explosivas, ou irrealistas da economia. Diante disso,

o método escolhido para resolver o modelo se torna de grande importância para o realismo das simulações realizadas a partir do mesmo. (Miranda e Frackler, 2004; Ljungqvist e Sargent, 2018).

No processo de escolha do método numérico nessa pesquisa, se buscou lançar mão de algum método que ao mesmo tempo permitisse testar diferentes combinações de parâmetros na busca pelos que se adequassem melhor, e de uma forma de garantir que as condições iniciais do modelo para a simulação fossem alcançadas pela própria dinâmica do modelo no tempo, sem a necessidade de impor condições iniciais. Nesse sentido, foi utilizada uma estratégia iterativa similar ao processo de *shooting*, mas voltada ao problema do valor inicial, e a convergir indicadores específicos da economia a uma condição inicial adequada ao objetivo deste trabalho.

Mais especificamente, esse processo passa pela escolha de (i) da distribuição inicial de capital humano $h_{i,1}$ considerada uma variável exógena aleatória; (ii) da matriz $\delta_{i,t}$, também aleatória, que define os choques individuais na função de acumulação de capital humano em cada período; (iii) dos parâmetros de preferências e tecnologia (β , ρ , γ , $\bar{c}$), além de (iv) o método com o qual o equilíbrio será alcançado.

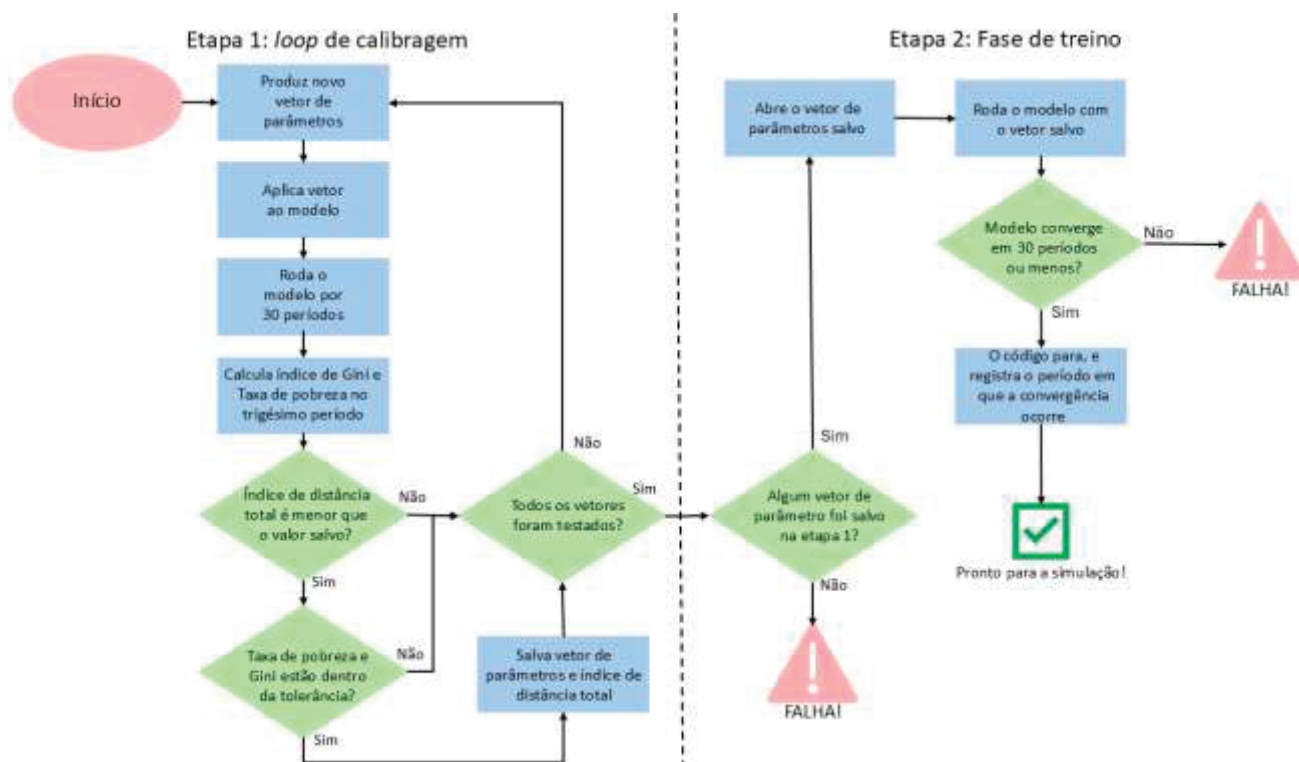
A solução para esse problema consiste em um processo que se divide em duas etapas principais, e visa ao mesmo tempo definir os parâmetros adequados para a calibragem do modelo, e a garantia de que ele segue uma trajetória não-explosiva. Para tal, foi construído um *script* na linguagem de programação Julia². A FIGURA 1 apresenta um fluxograma que explica o funcionamento dessas duas etapas, e quais são as condições necessárias para encontrar um vetor de parâmetros adequado para as simulações.

A primeira parte da solução foi a criação de um *loop* que testa todas as combinações possíveis de valores para β , ρ , γ , $\bar{c}$, além das variâncias da função de distribuição de probabilidade de $h_{i,1}$ e $\delta_{i,t}$. A função utilizada nas iterações do *loop* utiliza as equações de (4) a (10) e as organiza de modo que cada agente da economia maximiza sua utilidade em cada período seguindo o processo descrito na seção anterior. Nessa parte, o modelo é rodado para um período de treino de $T = 30$, e, ao final de cada iteração, o modelo calcula duas medidas na

² Uma cópia do script utilizado no processo de calibragem e ajuste do modelo se encontra na seção de anexos ou em <https://github.com/JoaoVitorPereira1995/Thesis>.

economia: o índice de Gini e o percentual da população com renda menor que $\bar{c}$, que, nos termos desse trabalho, pode ser considerado como equivalente à taxa de pobreza da economia.

FIGURA 1 – FLUXOGRAMA DESCRITIVO DO PROCESSO DE CALIBRAGEM



FONTE: Elaboração própria

Sobre as variáveis aleatórias $\delta_{i,t}$ e $h_{i,1}$, é importante destacar que foi escolhido para ambas uma função de distribuição de probabilidade lognormal com média zero. A vantagem de se usar uma distribuição desse tipo é o fato de que ela apenas assume valores positivos (Bussab e Morettin, 2010, p. 200) o que atende às necessidades do modelo. Além disso, a tendência da distribuição de se concentrar em valores mais baixos, ao invés de ter um comportamento simétrico faz da função uma candidata adequada para o modelo. A variância de cada distribuição foi usada como variável de ajuste no código. Dessa forma, assume-se $\delta_{i,t} \sim \text{lognormal}(0, \sigma_1)$ e $h_{i,1} \sim \text{lognormal}(0, \sigma_2)$.

O *loop* consiste em utilizar as equações de equilíbrio, seguindo o processo descrito no final da seção anterior ao longo de 30 períodos. Ao final desse intervalo, se calcula duas variáveis de ordem distributiva: a taxa de pobreza e o índice de Gini da economia.

A função do *loop* é avaliar se cada vetor de parâmetros possíveis atende a duas condições: a primeira, de que o índice de Gini da renda do trabalho e taxa de pobreza ao final do período de simulação se aproximam dos valores observados para a economia brasileira no ano de 2023, e o segundo, se o indicador de distância total – calculado a partir das distâncias normalizadas entre o valor de referência de cada indicador e o valor encontrado pelo loop – é o menor possível. O indicador de distância total, dessa forma, é:

$$dist_total = \frac{|Gini_{ref} - Gini_{loop}|}{Gini_{tol}} + \frac{|Pob_{ref} - Pob_{loop}|}{Pob_{tol}} \quad (11)$$

Onde:

$Gini_{ref}$: é o valor de referência do índice de Gini;

$Gini_{loop}$: é o valor de referência alcançado por cada iteração do loop;

$Gini_{tol}$: é a tolerância considerada para o índice de Gini no processo de calibragem;

Pob_{ref} : é o valor de referência da taxa de pobreza;

Pob_{loop} : é o valor de referência alcançado pela taxa de pobreza em iteração do loop;

Pob_{tol} : é a tolerância considerada para o índice da taxa de pobreza no processo de calibragem.

Ao avaliar essas duas condições, o *loop* garante ao mesmo tempo que será selecionada uma combinação de coeficientes que garante que os resultados do modelo após o período de treino serão suficientemente próximos da realidade e gerarão o melhor resultado possível ao final do período de treino, dentro dos parâmetros considerados.

Uma vez selecionado um vetor de parâmetros cujos resultados minimizassem o indicador de distância total e estivessem dentro da tolerância, a segunda parte do processo envolve usar o vetor para reiniciar o modelo ao longo do período de treino, até o ponto em que os valores do índice de Gini e da taxa de pobreza alcancem um valor dentro da tolerância. A fase de treino é interrompida quando os parâmetros atingem os valores dentro da tolerância pela primeira vez, e a partir daí, começa a fase de simulação, que dura 50 períodos.

As duas possibilidades de falha descritas pela FIGURA 1 são pontos nos quais o algoritmo de calibragem não é capaz de encontrar um vetor de parâmetros adequado. A falha que aparece primeiro no fluxograma, à esquerda, é a mais comum de ocorrer, uma vez que é consequência direta de quando o processo de teste da primeira etapa não consegue encontrar nenhum vetor que atenda às condições necessárias para ser salvo. A segunda falha, menos frequente, se relaciona a inconsistências nos processos geradores números aleatórios gerados, ou outras inconsistências decorrentes da programação do código.

No caso de ocorrência da primeira falha, é necessário considerar relaxar a tolerância das variáveis usadas como referência, ou mudar as grades de valores possíveis para os parâmetros. Caso nenhuma das duas estratégias seja bem-sucedida, é necessário fazer mudanças mais profundas no *loop*, como elaborar condições menos rigorosas.

Nas primeiras tentativas de aplicar o processo de calibragem, houve a ocorrência da segunda falha. Para lidar com a situação, foi necessário repetir o processo do *loop*, porém, tomando como dados os valores de σ_1 e σ_2 encontrados na primeira tentativa, e criar as matrizes de valores aleatórios de δ e h_{i1} baseadas nesses parâmetros. Com isso, ficou garantido que as matrizes de números aleatórios utilizadas no processo do *loop* fossem as mesmas usadas na segunda etapa, e, por consequência, na fase de simulação.

A aplicação desse método possui duas vantagens fundamentais: a primeira é garantir que as condições iniciais da simulação sejam alcançadas pelo próprio processo de ajustamento do modelo, sem a necessidade da imposição de condições. A segunda vantagem está na flexibilidade em relação aos valores de referência, que podem ser ajustados com facilidade de acordo com o problema de pesquisa. Considerando o objetivo deste trabalho de discutir distribuição de renda pensando no caso brasileiro, foram escolhidos como valores de referência do índice de Gini e da taxa de pobreza observados no Brasil, mas a substituição dessas variáveis por outras não incorreriam em grandes problemas de funcionamento no algoritmo.

Por outro lado, uma desvantagem notável desse método é a possibilidade de que sejam gerados valores para os parâmetros que sejam contraintuitivos do ponto de vista econômico. Portanto, é necessário cautela na definição dos valores máximos e mínimos da grade de valores possíveis, para equilibrar o *trade-off* entre realismo econômico e capacidade do modelo convergir.

Os parâmetros que compõem o vetor encontrado após o período de calibragem e ajuste são os apresentados na TABELA 1. A grade considerou 10 valores possíveis dentro do intervalo citado na tabela, exceto por $\bar{c}$ para o qual foram considerados 20 valores.

TABELA 1 – PARÂMETROS ENCONTRADOS NO PROCESSO DE CALIBRAGEM E AJUSTE

Parâmetro	Símbolo	Intervalo da grade	Valor
Fator de desconto intertemporal	β	0,2 a 0,8	0,80
Consumo mínimo	$\bar{c}$	1,0 a 8,0	1,00
Elasticidade do capital humano em relação ao gasto em educação	ρ	0,1 e 0,9	0,90
Parâmetro de qualidade da educação	γ	1,5 e 2,5	2,50
Variância de δ	σ_1	0,1 e 2,0	0,31
Variância de $h_{i,1}$	σ_2	0,1 e 2,0	0,73

FONTE: Elaboração própria

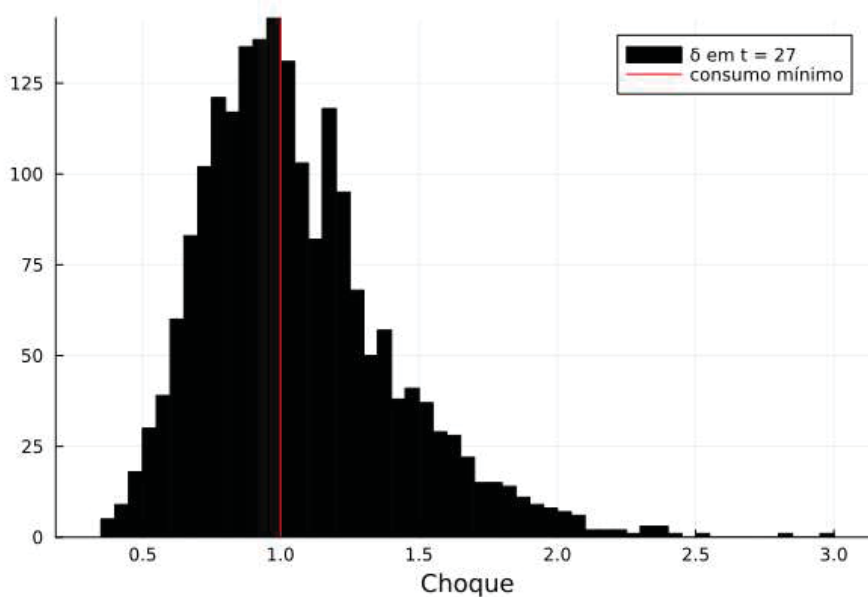
A escolha do número de valores possíveis para cada parâmetro foi feita na tentativa de garantir ao *loop* uma variabilidade razoável de valores a serem considerados, enquanto a amplitude dos valores foi feita respeitando as condições microeconômicas impostas aos parâmetros. A grade resulta, portanto, em um processo de 2 milhões de iterações. Devido ao alto custo computacional imposto pelo número de repetições, considerou-se uma economia com apenas 2 mil indivíduos, para evitar uma carga ainda maior de processamento. No período de treino, as condições desejadas para iniciar a simulação foram alcançadas no vigésimo sétimo período.

Também motivado pelo custo computacional de encontrar um vetor de 6 dimensões de valores ótimos, optou-se por definir, para fins deste trabalho, a igualdade $A = 1$ ao longo de todo o trabalho para evitar a inclusão de uma sétima variável. Ao mesmo tempo em que essa decisão foi feita com o objetivo de simplificar o processo computacional de calibragem, é verdade também que essa escolha impacta as equações (9) e (10) de modo que o produto dessa economia equivale a seu estoque agregado de capital humano (H_t), e os salários das famílias equivalem ao seu estoque individual de capital humano ($h_{i,t}$). A principal consequência disso é que, nos termos deste trabalho, pode-se entender H_t como uma medida de bem-estar da economia, dada a sua equivalência com Y_t .

A partir dos valores de σ_1 e σ_2 , foram geradas uma matriz $n \times T$ de números aleatórios para $\delta_{i,t}$ e um vetor de tamanho n para $h_{i,1}$, respectivamente. Os gráficos 2 e 3 representam as

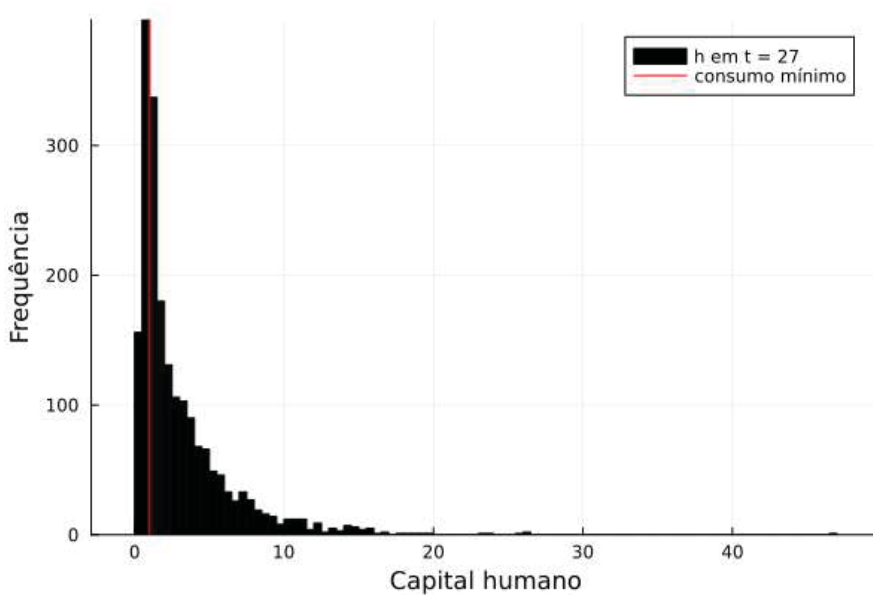
distribuições de cada variável no período no qual a simulação ocorre. Vale lembrar que, enquanto $\delta_{i,27}$ é uma variável aleatória definida a partir da variância apresentada na TABELA 1, $h_{i,27}$, por outro lado, é determinada pelo próprio modelo ao longo do período de treino, uma vez que apenas em $t = 1$ o capital humano é definido de maneira exógena.

GRÁFICO 2 – DISTRIBUIÇÃO DE $\delta_{i,27}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO



FONTE: Elaboração própria

GRÁFICO 3 – DISTRIBUIÇÃO DE $h_{i,27}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO



FONTE: Elaboração própria

Ao se comparar as distribuições de $\delta_{i,27}$ e de $h_{i,27}$, percebe-se que, no modelo, as habilidades inatas possuem uma distribuição menos desigual que a de capital humano. Além disso, a distribuição de δ_i permite valores acima do limiar definido por $\bar{c}$. A consequência disso é que algumas famílias, mesmo com educação zero podem superar a restrição de consumo característica do modelo.

Como resultado, o índice de Gini alcançado foi de 0,5100, tendo como valor de referência de 0,5008, e a taxa de pobreza foi de 27,65% *vis-a-vis* o valor original de 27,4%.

1.4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Considerando a simulação *per se* – ou seja, aquela que se inicia após o modelo convergir para dentro dos valores de tolerância do índice de Gini e da taxa de pobreza – esta seção se dedica a analisar o comportamento da economia a partir desse ponto, para entender como seus indicadores de distribuição de renda variam ao longo dos períodos.

Após o modelo convergir no vigésimo sétimo período da fase de treino, a notação utilizada nas variáveis e gráficos é reiniciado, de modo que o primeiro período da simulação passa a ser identificado como $t = 1$, o segundo $t = 2$, e assim sucessivamente. Essa decisão foi tomada com objetivo de tornar a visualização dos gráficos mais intuitiva, uma vez que apenas os resultados dessa fase serão analisados.

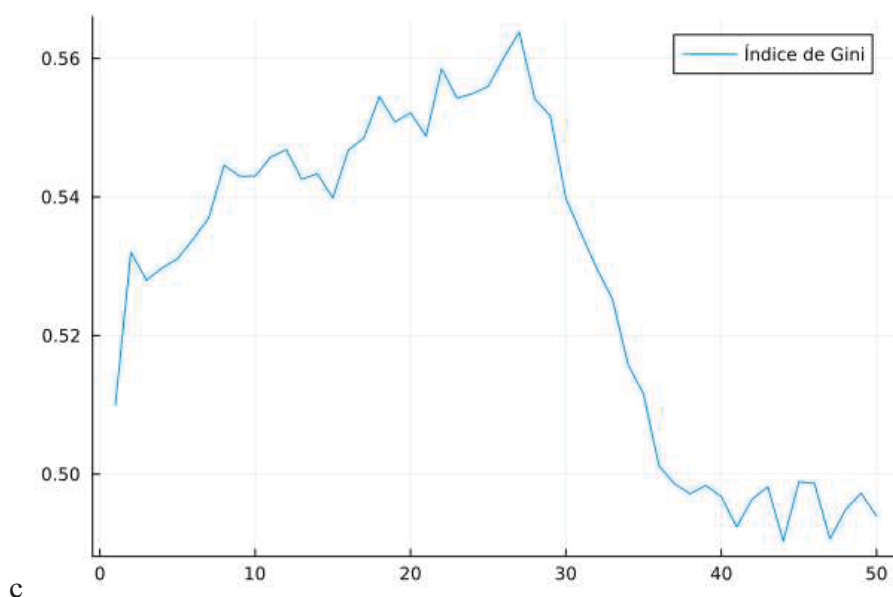
Nesse sentido, em cada período da fase de simulação, foram coletadas algumas estatísticas descritivas a partir dos dados gerados, de modo que fosse possível ter uma noção sobre essa economia ao longo do tempo. Com isso, foi possível acompanhar algumas variáveis ao longo do tempo: além das duas utilizadas de referência para o período de treino (índice de Gini e percentual da população com renda inferior ao consumo mínimo), esta seção também olha para outras duas variáveis de distributivas: a razão entre os percentis 90 e 10 da distribuição da renda do trabalho e a renda média dos 10% mais ricos da economia em cada período. Além disso, o estoque total de capital humano da economia, H_t também é analisado.

O GRÁFICO 4 apresenta o índice de Gini ao longo do período de simulação do modelo. Durante esse período, o índice tem um momento de alta que dura pouco menos que 30 períodos até chegar em seu auge, e depois começa a cair por aproximadamente 10 períodos consecutivos até se estabilizar em torno de pouco menos de 0,5 nos períodos finais.

Apesar de o valor inicial se situar em um patamar um pouco menor no final do período do que o inicial, não é possível afirmar que o modelo, na ausência de intervenção do Governo,

leva a uma tendência de queda na desigualdade de renda. Aqui, a incidência dos choques aleatórios causados pelas variações de δ ao longo das gerações não é o suficiente para levar a um estado em que a distribuição de renda melhora de forma contínua.

GRÁFICO 4 – ÍNDICE DE GINI DA RENDA DO TRABALHO DO MODELO SEM GOVERNO



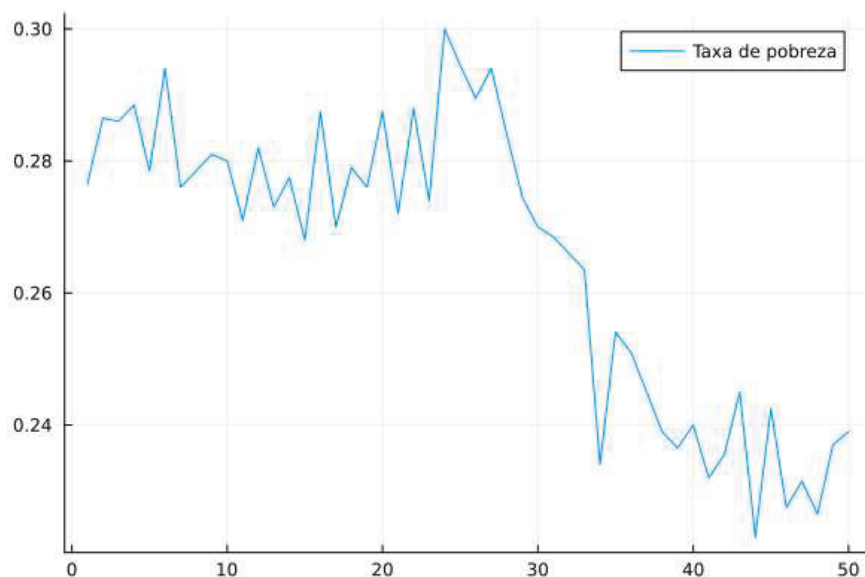
FONTE: Elaboração própria

Enquanto isso, o GRÁFICO 5 apresenta o percentual da população cuja renda é inferior ao limiar de consumo mínimo, que, nos termos deste trabalho, pode ser entendido como análogo à taxa de pobreza da economia. O mesmo movimento de declínio é observado em comparação ao gráfico anterior, também ao redor do trigésimo período de simulação, apesar do movimento de ascensão anterior não ocorrer nos mesmos termos. Uma das principais diferenças entre as duas séries, entretanto, é a maior volatilidade que pode ser observada na taxa de pobreza. Uma possível explicação para essa diferença na volatilidade é possibilidade de que no modelo, a taxa de pobreza seja influenciada pelos choques de forma mais direta do que o índice de Gini, o que pode ser responsável pelas maiores variações entre períodos.

Para completar a análise de variáveis de natureza distributiva, o GRAFICO 6 traz mais dois índices acompanhados ao longo do tempo para essa economia: à esquerda (painel A), tem-se a razão $p90/p10$, que consistem na razão entre os percentis 90 e 10 dessa economia; à direita (painel B), a percentual da renda dos 10% mais ricos da economia. O gráfico indica que essas duas variáveis também tiveram comportamentos muito semelhantes às variáveis distributivas já observadas até o momento, caracterizado por um período de ascensão lenta até pouco antes

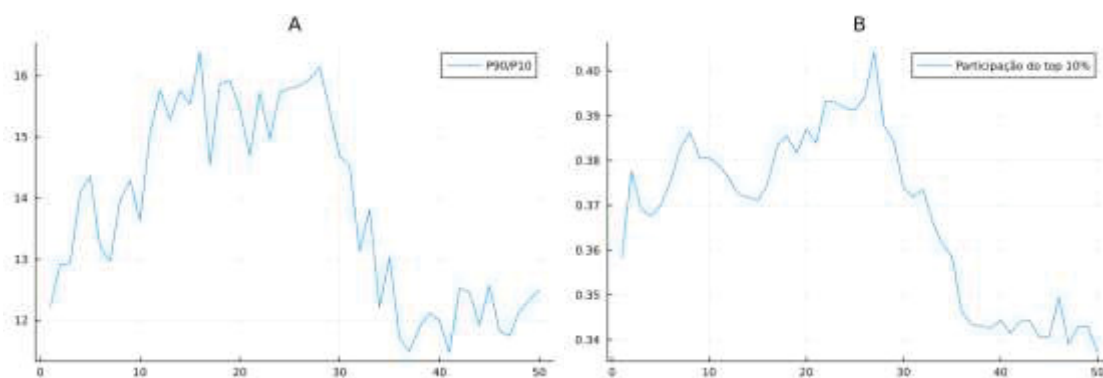
do trigésimo período, seguido de um período de aproximadamente 10 períodos de queda quase contínua, até atingir um platô até o final do período.

GRÁFICO 5 – TAXA DE POBREZA DO MODELO SEM GOVERNO



FONTE: Elaboração própria

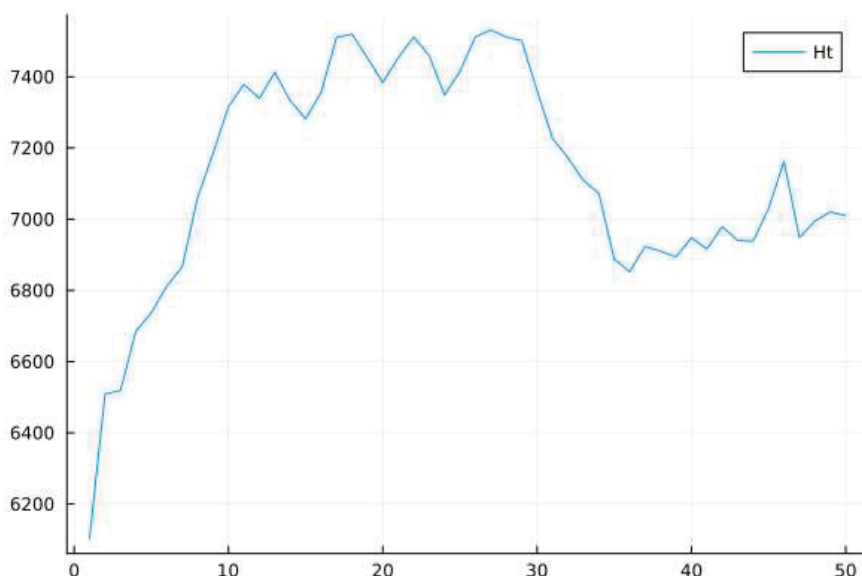
GRÁFICO 6 – RAZÃO P09/P10 (A) E RENDA DOS 10% MAIS RICOS (B) DO MODELO SEM GOVERNO



FONTE: Elaboração própria

O GRÁFICO 7, por fim, representa o comportamento do estoque agregado de capital humano do modelo. Nela, pode-se ver que essa variável se move de maneira semelhante ao índice de Gini, indicando uma relação positiva com a desigualdade na distribuição de capital humano na versão do modelo sem intervenção de políticas redistributivas, ainda que a queda no estoque de capital humano ocorre de maneira menos pronunciada do que a do índice de Gini.

GRÁFICO 7 – ESTOQUE AGREGADO DE CAPITAL HUMANO DO MODELO SEM GOVERNO



FONTE: Elaboração própria

No geral, todos os resultados do modelo sem governo apontam para a mesma direção: um movimento pouco claro ao longo do período, caracterizado por uma piora nos indicadores sociais, seguido de uma melhora em todos eles. Esse movimento parece ser seguido pelo estoque agregado de capital humano da economia, que, por conta das hipóteses simplificadoras assumidas, pode ser considerada como análoga ao produto.

Os resultados obtidos nessa seção poderão ser mais discutidos à luz dos resultados obtidos nas outras versões do modelo. À medida em que forem analisadas as mesmas variáveis nos modelos com políticas públicas, os resultados apresentados nesta seção poderão servir como base de comparação para os demais.

1.5 CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS FUTUROS DE PESQUISA

No processo de calibragem do modelo, foi utilizado um algoritmo que se vale de um *loop* para testar diferentes combinações de parâmetros, e inicia o processo sequencial característico do modelo em busca de combinações de parâmetros capazes de satisfazer as condições de convergência determinadas com base na taxa de pobreza e no índice de Gini. Esse processo, que aparece descrito na FIGURA 1, foi capaz de impedir que o modelo apresentasse uma trajetória explosiva, e garantiu que se conduzissem simulações numéricas a partir do modelo.

Apesar disso, algumas dificuldades encontradas ao longo do processo de construção desse mecanismo merecem destaque. A primeira delas diz respeito ao tempo necessário para rodar o código do começo ao fim, em especial o *loop* de calibragem, que, ao considerar um número muito grande de vetores possíveis no processo, tornou o processo iterativo longo e computacionalmente custoso, exigindo algumas horas de processamento até que se atingisse o final do processo. Considerando que o processo de testes de diferentes especificações, combinações de parâmetros, ou valores de referência é baseado em tentativa e erro, um processo de calibragem de múltiplas horas acaba por demandar ainda mais tempo.

Outra limitação provocada pelo alto custo computacional do processo de calibragem é relacionada ao número de famílias consideradas na economia. A ideia inicial era que o modelo considerasse uma economia com mais famílias, ou até mesmo fazer um teste de sensibilidade dos resultados ao aumento do número de famílias. No entanto, aumentar esse número implica na geração de matrizes α e h maiores, que aumentam consideravelmente o tempo necessário para o processo de calibragem.

Dessa forma, uma agenda de pesquisa futura que buscasse otimizar o processo de calibragem utilizado ao longo deste trabalho poderia evitar os gargalos que foram encontrados aqui, e, dessa maneira, discutir melhor os pontos que não foram possíveis de serem elaborados ao longo do capítulo.

CAPÍTULO 2: MODELO COM TRANSFERÊNCIAS DE RENDA

Neste modelo, a primeira política a ser testada é a de transferências de renda. Este capítulo considera que o Governo intervém na economia com um tributo τ e utiliza os recursos provenientes da tributação para redistribuir à população sob a forma de transferências de renda. A tributação e as transferências, ao longo desse capítulo, afetam a economia de forma homogênea, tributando a todos na mesma proporção, e transferindo o mesmo valor, e, com isso, o efeito líquido da tributação sobre a renda individual varia de acordo com a renda de cada família.

Este capítulo se subdivide: (i) uma revisão bibliográfica, que discute como alguns modelos de crescimento lidam com transferências de renda entre famílias, para apresentar algumas das ideias que norteiam o capítulo, além de uma discussão sobre gastos privados em educação no Brasil; (ii) a seção que consiste na extensão do modelo apresentado na seção anterior considerando uma política de transferência de renda; (iii) a seção que apresenta o resultado das simulações conduzidas sobre o modelo, para que seja possível avaliar o efeito das transferências sobre os índices de distribuição de renda e o agregado de capital humano, e por fim (iv) uma seção que comenta as contribuições e ideias de possíveis desdobramentos da agenda de pesquisa a partir deste capítulo.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1.1 Desigualdade de renda em modelos com transferências de renda

Para prosseguir, é necessário ver como bibliografia a respeito de modelos de crescimento que estudam a distribuição de renda tratam sobre o papel do governo em promover políticas de transferência.

O trabalho de García-Peñlosa e Turnovsky (2015) apresentam um modelo semelhante ao de Maliar et al. (2005), em que os indivíduos se diferem por conta de suas dotações de habilidade e de capital. A diferença é que, no caso do primeiro, existe um processo decisório no qual cada um decide entre dedicar horas entre trabalho e lazer, de modo que o número de horas de trabalho ofertadas possui um papel importante na determinação dos rendimentos de cada indivíduo. No modelo, o Governo adota uma política redistributiva de transferência de renda.

Como resultado do modelo, os autores determinam três variáveis cuja dinâmica merece atenção: a quantidade (relativa) de capital que cada agente possui, seu salário relativo, e a renda relativa, que difere do anterior por também considerar rendimentos do capital. Assim como em Maliar et al. (2005), essas quantidades também podem ser descritas como combinações lineares das dotações de capital e habilidades, mediadas por coeficientes altamente influenciados pelos preços, e, portanto, pelos movimentos dos choques da economia.

García-Peñalosa e Turnovsky (2015) argumentam, com base em seu modelo, que o incremento da oferta de trabalho endógena promove uma força de equalização na economia: como indivíduos que possuem menos dotação de capital estão dispostos a trabalhar mais, períodos de crescimento econômico favorecem a distribuição de renda, uma vez que os salários crescerão mais rápido do que os ganhos do capital.

Diante desse modelo, os autores estudam, por fim, o papel do estado na redução da desigualdade. Ao fazê-lo, mostram que a diminuição dos gastos e impostos possui um impacto pequeno na desigualdade, mas facilita a mobilidade dos agentes ao longo da distribuição de renda. Por mais que nessa economia a distribuição de renda também caminhe em direção à distribuição de habilidades, é importante lembrar que a distribuição de habilidades pode ser mais influenciada por políticas públicas do que a dotação de capital.

Stauvermann e Kumar (2018) também adicionam em seu modelo um componente endógeno na formação de capital humano, com o objetivo de discutir a decisão de se investir em capital humano tomada por adultos, num contexto de adaptação a novas tecnologias. Segundo os autores, a decisão de adultos em investirem na formação de capital humano pode se refletir tanto em melhoras no crescimento econômico, quanto na desigualdade de renda.

No modelo criado por Stauvermann e Kumar (2018), os indivíduos se diferem pelo capital humano herdado dos pais, e de acordo com a hipótese assumida pelos autores, essa variável é distribuída de forma desigual entre a população, o que, nesse contexto, significa dizer que a média da variável de capital humano é maior do que sua mediana.

Inicialmente, a decisão de se investir em capital humano é tomada pelos jovens, que podem escolher entre alocar seus recursos entre consumo, educação e poupança. Os resultados do equilíbrio nesse modelo sugerem que indivíduos herdeiros de uma quantidade maior de capital humano tendem a gastar proporcionalmente mais em educação do que aqueles que possuem uma quantidade menor.

Diante disso, os autores adicionam um elemento de política fiscal progressiva na tentativa de melhorar a distribuição da educação. Os autores constatarem que uma política fiscal progressiva teria como consequências o aumento dos investimentos em educação, mas também uma diminuição da intensidade de capital, uma vez que agentes iriam substituir a poupança pelo investimento em educação. Por outro lado, como a poupança afetaria indiretamente as decisões de investimento em capital humano, Stauvermann e Kumar encontram uma relação de ‘U invertido’ entre o gasto em educação e os impostos cobrados.

Por fim, os autores também endogenizam a taxa na qual os impostos serão cobrados, assumindo que a sociedade segue um modelo democrático no qual as propostas que possuem a maioria dos votos são colocadas em prática. Como a maior parte da população herdou um nível de capital humano abaixo da média, eles se colocam a favor de um imposto que visa diminuir a desigualdade na distribuição de capital humano, o que diminui a desigualdade e aumenta o crescimento de longo prazo.

No geral, a discussão sobre os efeitos das políticas de transferências nos modelos citados motivaram a escolha dessa como a primeira política a ser testada sobre a economia descrita no caso anterior. A inclusão das transferências de renda se dá seguindo a hipótese de que, ao terem recursos o suficiente para superar as restrições de capital humano e permitir que as famílias pobres possam acumular capital humano.

2.1.2. Gastos privados em educação no Brasil

No centro das discussões do modelo de gerações sobrepostas desenvolvido no presente trabalho, tem-se a seguinte pergunta: como as famílias definem o gasto na educação de seus descendentes? Essa pergunta se torna ainda mais relevante tendo em vista que este capítulo se dedica a estudar o papel das transferências de renda no orçamento familiar, vislumbrando a possibilidade de que essa política estimule os gastos privados na educação das gerações subsequentes.

Curi e Menezes-Filho (2010) usam dados da Pesquisa Anual Por Amostra de Domicílios (PNAD) e da Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) de 2003 e 2004, na tentativa de estimar, em resumo, como funcionava o processo de decisão de gastos privados diretos e indiretos em educação no Brasil. Os autores utilizam de um modelo logit para estimar os determinantes sobre o ato de realizar gasto privado, além de usar um modelo de Heckman para medir os efeitos

marginais de uma série de variáveis que dizem respeito aos pais no gasto com a educação de seus filhos.

Dentre os resultados econométricos, os autores destacam a importância da educação dos pais, da renda familiar possuindo uma correlação direta, e dos custos da educação e a oferta relativa de escolas públicas numa correlação direta, além da região de moradia da família. Além disso, os autores também estimam os determinantes do valor do gasto, o qual se mostra altamente sensível ao valor da renda das famílias, além de ser crescente à medida em que os estudantes avançam no ciclo escolar.

Os autores também trouxeram informações interessantes sobre gastos privados em educação não-relacionados diretamente ao modelo econométrico. Dentre eles, se constatou como se dão os gastos privados em educação por faixas de renda: as famílias de faixas de renda mais elevadas gastam mais na educação dos seus filhos em termos absolutos, além de terem uma probabilidade bem maior de realizarem um gasto não-nulo.

Em termos relativos, os autores fazem a diferenciação entre o percentual de gasto educacional total das famílias de cada classe de renda, e o gasto excluídas as famílias com gasto nulo. Analisando o gasto sobre o total de famílias, percebe-se que o gasto educacional como percentual da renda cresce para diferentes classes de renda até que se atinja um patamar próximo a 3,9% para as classes A e B.

Mais recentemente, Moreno e Pontilli (2022) adotaram uma técnica semelhante, associando a estimação de um modelo de Heckman aos dados da POF de 2017 e 2018, também com o objetivo de encontrar determinantes na decisão dos pais de investir na formação de capital humano dos filhos. Os autores também encontraram uma relação positiva entre o total da renda familiar (para a qual foi usada como proxy o total de gastos das famílias) e a decisão de realizar gastos privados na educação dos filhos. Além disso, a proporção de crianças e adolescentes na família também foi uma das variáveis mais relevantes na determinação dessa decisão.

Em certa medida, os resultados apresentados por Moreno e Pontilli (2022) se aproximam dos apresentados por Curi e Menezes-Filho (2010), em especial no que diz respeito ao impacto positivo de uma maior renda domiciliar per capita na probabilidade de se investir na formação de capital humano.

Outra contribuição recente é a proposta por de Holanda Barbosa et al. (2023), no qual era estimada a curva de Engel das famílias sobre diferentes categorias de gastos, dentre eles, o gasto em educação, também por meio de dados da POF de 2017 e 2018. Para isso, as autoras utilizam o método de equações aparentemente não relacionadas (SUR), que é capaz de controlar mudanças nas preferências sobre diferentes tipos de gasto.

Em relação aos gastos privados em educação, as autoras mostram resultados que corroboram os dados apresentados por Curi e Menezes-Filho (2010), e que são de grande importância para o modelo a ser apresentado aqui. Primeiramente, as autoras também mostram uma tendência positiva ao avaliarem essa categoria de gastos como percentual da renda, ou seja, famílias de maior renda irão realizar gastos relativamente maiores. Em segundo lugar, também se observou que os gastos educacionais se situavam, em média, em torno de 4,7% da renda, o que é razoavelmente próximo ao observado pelos autores que trabalharam com dados de 14 anos antes.

De modo geral, a principal informação que se pode utilizar como base para a adaptação do modelo de gerações sobrepostas à economia brasileira é o fato de que não só o volume do gasto em educação é determinado pela renda das famílias, mas também a própria decisão de se investir em educação também. Por conta disso, o modelo precisa se atentar para a possibilidade de que um conjunto de famílias realizem um gasto nulo na educação de seus filhos.

Outro fenômeno observado na literatura, e esse ainda não pode ser contemplado pelo modelo, é o fato de que, quando as famílias mais pobres conseguem realizar gastos positivos em educação, esses gastos configuram um percentual maior de sua renda. Esse fator demarcado pelo esforço das famílias de menor renda, ainda não pôde ser incluído no modelo, uma vez que se faria necessário uma estrutura de preferências capaz de gerar resultados diferentes para famílias com a mesma renda.

2.2 MODELO

A primeira intervenção do governo que será considerada é por meio de uma política de financiamento via imposto de renda, aliada a uma transferência universal, idêntica para todos os indivíduos. Cada família i precisa pagar a mesma taxa τ sobre seu salário, e recebe a mesma transferência T_{it} . Portanto, sob a hipótese de que não existem vazamentos, portanto, toda arrecadação é destinada apenas para as transferências, tal que:

$$T_t = \frac{\tau}{N} \omega_t H_t \quad (12)$$

Onde T_{it} é o valor da transferência feita pelo governo a cada família da economia no período t , e H_t o estoque agregado de capital humano do mesmo período. Outra forma de escrever a equação (12) é definindo $\bar{h}_t = \frac{H_t}{N}$ como sendo a dotação média de capital humano da economia em cada período, de modo que se tem:

$$T_t = \tau \omega_t \bar{h}_t \quad (12')$$

2.2.1. Consumo, educação e capital humano

A inclusão do governo tributando salários e transferindo renda afeta diretamente as restrições orçamentárias das famílias, de modo que:

$$c_{i,t} = (1 - \tau) \omega_t h_{it} + T_t - e_{i,t} \quad (13)$$

Usando o mesmo procedimento do capítulo anterior para maximizar a função utilidade, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{i,t}} = \frac{-1}{(1 - \tau) \omega_t h_{i,t} + T_t - e_{i,t}} + \frac{\beta \rho}{e_{i,t}} = 0$$

Resolvendo para $e_{i,t}$:

$$e_{i,t}^* = \frac{\beta \rho [(1 - \tau) \omega_t h_{i,t} + T_t]}{1 + \beta \rho} \quad (14)$$

E como consequência, pode-se substituir (13) em (12) para obter $c_{i,t}^*$:

$$c_{i,t}^* = \frac{[(1 - \tau) \omega_t h_{i,t} + T_t]}{1 + \beta \rho} \quad (15)$$

A inclusão da política redistributiva de renda no modelo, do ponto de vista algébrico, altera pouco a forma funcional dos gastos em consumo e em educação, além de não mudar o percentual de rendimentos gasto em educação ($\frac{\beta \rho}{1 + \beta \rho}$) ou em consumo ($\frac{1}{1 + \beta \rho}$). Por outro lado, para os indivíduos relativamente mais pobres, que apresentem $T_t > \tau \omega_t h_{it}$, a

transferência do governo vai representar um acréscimo nos seus rendimentos, podendo, inclusive, aumentar a probabilidade de que a família consiga satisfazer as restrições de consumo mínimo.

2.2.2. Impactos distributivos esperados

Ainda antes da análise sobre os resultados do modelo, é possível ter uma ideia do que esperar dos efeitos da política pública redistributiva nessa economia. O primeiro ponto ao qual pode-se dar destaque é a forma como a formação de capital humano, do ponto de vista individual, será afetada pela política distributiva.

Primeiramente, considera-se a acumulação de capital de uma família que realiza um gasto em educação positivo ($h_{i,t+1}^{np}$). De volta à equação (12'), pode-se averiguar o impacto da taxação sobre a acumulação de capital de cada indivíduo. Inserindo (12') em (4), e definindo o período t como base, tem-se:

$$h_{i,t+1}^{np} = \left[\frac{\beta\rho[(1-\tau)\omega_{t-1}h_{i,t-1} + \tau\omega_{t-1}\bar{h}_t]}{1+\beta\rho} \right]^\rho \gamma\delta_{i,t} \quad (16a)$$

Caso a família i tenha investido em educação no período passado, e:

$$h_{i,t}^p = \delta_{i,t} \quad (16b)$$

No caso de um investimento nulo em educação por parte da geração anterior. O próximo passo é derivar $h_{i,t+1}^{np}$ e $h_{i,t}^p$ em relação a τ :

$$\frac{\partial h_{i,t+1}^{np}}{\partial \tau} = \rho\gamma\delta_{i,t} \left[\frac{\beta\rho\omega_{t-1}(h_{i,t-1} + \tau\bar{h}_{t-1} - \tau h_{i,t-1})}{1+\beta\rho} \right]^{\rho-1} \left[\frac{\beta\rho\omega_{t-1}(\bar{h}_{t-1} - h_{i,t-1})}{1+\beta\rho} \right]^\rho \quad (17a)$$

$$\frac{\partial h_{i,t}^p}{\partial \tau} = 0, \quad \text{se } e_{i,t} = 0 \quad (17b)$$

À primeira vista, é possível ver que o efeito da alíquota de imposto possui um efeito dual na acumulação de capital, pois, ao mesmo tempo em que a taxação afeta o poder de compra dos indivíduos, e, conseqüentemente, sua capacidade de realizar gastos em educação, ela também afeta positivamente por meio das transferências governamentais. Portanto, é de se imaginar que o impacto das taxações seja diferente em cada indivíduo.

A equação (17a) mostra que o papel de cada família enquanto beneficiária líquida ou financiadora líquida da política é definida pela diferença entre a renda da geração anterior e a média da economia no mesmo período. Mais especificamente, a parcela $\left[\frac{\beta \rho \omega_{t-1} (\bar{h}_{t-1} - h_{i,t-1})}{1 + \beta \rho} \right]^\rho$ é sempre positiva quando $\bar{h}_{t-1} > h_{i,t-1}$, e negativa caso contrário, ao mesmo tempo em que as outras parcelas multiplicativas da equação sempre assumem valores maiores que zero. Dessa maneira, a política de transferências, quando financiada por um imposto de renda idêntico a todas as famílias, tende a beneficiar apenas famílias situadas abaixo da média de renda.

Por outro lado, nota-se que o impacto da tributação sobre a formação de capital humano só é positiva nos casos em que as famílias mais pobres são capazes de superar a restrição de consumo mínimo e investirem em educação. Caso contrário, impacto da transferência sobre a acumulação de capital humano é nulo.

No entanto, dada a natureza recursiva do problema, a discussão não pode ser encerrada apenas com essa constatação. Como, nessa economia, os valores de $\bar{h}_{t-1}$ e $h_{i,t-1}$ também são influenciados por τ , será possível ter uma ideia mais nítida dos efeitos de longo prazo a partir do uso de simulações numéricas

2.2.3. Política de erradicação da pobreza

Considerando um dos possíveis desdobramentos da inclusão de uma política de transferência de renda no modelo, esta seção tem o objetivo de pensar em uma política de tal tipo que possua tamanho o suficiente para garantir que toda a população saia da pobreza, ou seja, tenha renda alta o suficiente para escapar da restrição de consumo mínimo, nos mesmos moldes de financiamento. Esse exercício possui a função de calcular o valor de τ necessário para garantir que os gastos privados em educação atinjam um valor mínimo acima de zero.

É importante ressaltar que no contexto do presente trabalho, os conceitos de população cuja renda é insuficiente para satisfazer à restrição de consumo mínimo e de taxa de pobreza serão tratados como sinônimos. Por mais que, rigorosamente, o conceito de pobreza como definido pelas instituições internacionais, como o Banco Mundial, estejam mais relacionadas a fatores estritamente alimentares, neste trabalho se seguirá um conceito de pobreza um pouco mais abrangente, de modo que a partir deste ponto, para que seja considerada “erradicação da pobreza” é necessário que se crie condições para que todas as famílias sejam capazes de satisfazer suas necessidades de consumo mínimo.

Dessa forma, pode-se pensar em uma política de transferência de renda semelhante à de Tondani (2009), mas pensada com o objetivo de alcançar a erradicação da pobreza, e que funciona seguindo a regra expressa por:

$$B_{i,t} = \begin{cases} k - \omega_t h_{i,t} & \text{se } 0 \leq m_{i,t} \leq k \\ \tau(k - \omega_t h_{i,t}) & \text{se } m_{i,t} \geq k \end{cases} \quad (18)$$

Onde $B_{i,t}$ é o benefício líquido da política de transferência de renda que a família i recebe, e k é o valor máximo do benefício pago às famílias de renda igual a zero. Dessa forma, o benefício oferecido passa a variar de acordo com a necessidade da família, podendo atingir um valor máximo de k quando $\omega_t h_{i,t} = 0$, e cuja linha de corte para separar famílias financiadoras das famílias beneficiárias também é definido ao redor de k .

Sabendo disso, o próximo passo é a definição desse ponto de corte. Considerando que o valor máximo da transferência precisa ser tal que garanta $c_{i,t}^* = \bar{c}$, mesmo para uma família cuja renda do trabalho é igual a zero, ele deve ser definido endogenamente. Para isso, basta partir da seguinte igualdade:

$$c^* = \frac{\omega_t h_{i,t} + k}{1 + \beta\rho} = \bar{c} \quad (19)$$

E assumindo uma família com $\omega_t h_{i,t} = 0$, tem-se que:

$$k = (1 + \beta\rho)\bar{c} \quad (20)$$

O próximo passo é garantir que essa política terá impacto fiscal neutro, o que equivale a dizer que:

$$\sum_{i=1}^n B_{i,t} = 0 \quad (21)$$

Na prática, isso é o mesmo que garantir que o somatório dos benefícios tanto das famílias beneficiárias quanto das financiadoras será o mesmo:

$$\sum_{i=1}^p k - \omega_t h_{i,t} = \sum_{i=p}^n \tau(\omega_t h_{i,t} - k) \quad (22)$$

Ao substituir (20) em (22), basta resolver para τ , para determinar alíquota do imposto redistributivo necessário para financiar a eliminação das restrições de consumo mínimo:

$$\tau = \frac{p}{(n-p)} \frac{[(1+\beta\rho)\bar{c} - \bar{m}^p]}{[\bar{m}^R - (1+\beta\rho)\bar{c}]} \quad (23)$$

Com $\tilde{m}^p$ e $\tilde{m}^R$ representando as médias das rendas da população pobre e não-pobre, respectivamente. Dessa forma, a equação (23) mostra que o valor de τ necessário para reduzir a pobreza deriva do produto de duas frações: a parcela $\frac{p}{(n-p)}$ representa a proporção relativa de pobres e não-pobres na economia, e $\frac{[(1+\beta\rho)\bar{c}-\tilde{m}^p]}{[\tilde{m}^R-(1+\beta\rho)\bar{c}]}$, a razão entre as distâncias rendas médias de cada grupo e o valor máximo das transferências (aqui, dado em termos do consumo mínimo, de acordo com a equação (20)).

É possível extrair algumas ideias interessantes a partir apenas da equação (23). A primeira delas é bem intuitiva, que é o fato de que quanto maior o percentual de pobres dessa economia, maior será a taxa necessária para que se resolvam a restrição do consumo mínimo de toda a população. Inclusive, essa necessidade diz respeito apenas ao ponto de vista redistributivo, sem levar em conta possíveis impactos negativos causados por um aumento muito considerável em τ na produção ou nas decisões individuais das famílias.

Outro ponto que merece destaque, que acaba por ser uma consequência direta do anterior, é sobre a impossibilidade da existência de que a política de transferências por si só seja o suficiente para resolver o problema relacionado à restrição de consumo mínimo, mesmo sem considerar os efeitos indiretos sobre a atividade econômica e os processos decisórios. Essa impossibilidade está ligada ao fato de que, como é de se esperar, deve-se respeitar a relação $0 < \tau < 1$, que impõe um limite máximo à alíquota de imposto.

Em uma economia hipotética em que a taxa de pobreza supera 50%, a razão $\frac{p}{(n-p)}$ em (23) se torna maior que 1. Ao mesmo tempo, quanto maior for a proporção de pobres na economia, ou quanto maior for a intensidade dessa pobreza, a razão relacionada à renda média de cada grupo também tende a aumentar. Em outras palavras, as economias muito pobres, em termos da população incapaz de satisfazer a restrição de consumo mínimo, podem se ver diante de um cenário no qual é impossível que a política de transferência de renda por si só satisfaça essas restrições.

O próximo passo, a partir de agora, é retornar ao processo de maximização de utilidade das famílias com essa nova regra de política e verificar como esse modelo de transferência afeta as famílias, tanto as beneficiárias quanto as financiadoras.

Somando (18) na restrição orçamentária presente na equação (2), o resultado passa a ser diferente de acordo com a situação financeira da família:

$$c_{i,t} = \omega_t h_{it} - e_{i,t} + B_{i,t} \quad (24)$$

Resultando em:

$$c_{i,t} = \begin{cases} k - e_{i,t} & \text{se } 0 \leq m_{i,t} \leq k \\ (1 - \tau) \omega_t h_{it} - e_{i,t} + \tau k & \text{se } m_{i,t} \geq k \end{cases} \quad (25)$$

Sobre (25), é possível notar alguns pontos. Primeiro, em relação à restrição orçamentária das famílias pobres, nota-se que a transferência é o suficiente para garantir que todas as famílias que possuam $m_{i,t} \leq k$ terão uma renda disponível de k , sendo suficiente para arcar com a restrição de consumo mínimo, enquanto k respeitar a (29). Isso implica que para as famílias pobres a renda dos pais deixa de ser diretamente determinante da renda disponível dos filhos. No caso das famílias com $m_{i,t} \geq k$, é importante ressaltar que na equação o produto τk serve para garantir que quanto mais acima de k for a renda da família, maior será o imposto líquido a ser pago pela família.

Substituindo (25) em (1) e realizando o mesmo processo de maximização de utilidade para cada grupo de famílias, tem-se para o caso das famílias pobres que:

$$U(e_{i,t}) = \ln(k - e_{i,t}) + \beta \ln(\gamma e_{i,t}^\rho \delta_{i,t+1}) \quad (26)$$

Das condições de primeira ordem do problema:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{i,t}} = \frac{-1}{k - e_{i,t}} + \frac{\beta \rho}{e_{i,t}} = 0$$

Resolvendo para $e_{i,t}$, tem-se:

$$e_{i,t}^* = \frac{\beta \rho k}{1 + \beta \rho} \quad (27)$$

Outra forma de escrever (27) é substituindo k de acordo com (20):

$$e_{i,t}^* = \beta \rho \bar{c} \quad (27')$$

E, ao substituir (27') e (20) em (25), é possível ver que a igualdade entre consumo ótimo e consumo mínimo é, de fato, mantida, ou seja, $c^* = \bar{c}$. Para as famílias não pobres, responsáveis por financiar a política, o processo de maximização de utilidade é semelhante à versão com transferências universais. Substituindo (25) em (1) para realizar o mesmo processo para as famílias não-pobres, tem-se que:

$$U(e_{i,t}) = \ln((1 - \tau) \omega_t h_{it} - e_{i,t} + \tau k) + \beta \ln(\gamma e_{i,t}^\rho \delta_{i,t+1}) \quad (28)$$

Replicando o mesmo processo, agora chega-se a:

$$e_{i,t}^* = \frac{\beta \rho [(1 - \tau) \omega_t h_{it} + \tau k]}{1 + \beta \rho} \quad (29)$$

Ou, em termos de $\bar{c}$:

$$e_{i,t}^* = \frac{\beta \rho [(1 - \tau) \omega_t h_{it}]}{1 + \beta \rho} + \tau \beta \rho \bar{c} \quad (29')$$

E substituindo (28') em (24), tem-se o consumo ótimo das famílias não-pobres:

$$c_{i,t}^* = \frac{\beta \rho [(1 - \tau) \omega_t h_{it}]}{1 + \beta \rho} + \tau \beta \rho \bar{c} \quad (30)$$

As equações (29) e (30) mostram que tanto o consumo e o gasto em educação das famílias não pobres são parcialmente afetados pela política redistributiva, mas, na prática, esse efeito tende a ser maior para famílias cuja renda se situa muito acima de k . Isso mostra como, mesmo diante de um modelo de taxaço e transferência de renda que afete as famílias igualmente, os efeitos líquidos da política de taxaço ainda possuem um caráter consideravelmente progressivo.

Esta se  o se dedicou a apresentar uma proposta de como uma política de transferência de renda e de taxaço pensados para garantir    popula  o pobre uma renda mínima que d   conta de sua restri  o de consumo mínimo pode ser inserida e discutida no contexto deste modelo. A análise de um desdobramento mais ambicioso da política de transferências de renda modelada mostra o potencial que o modelo apresentado ao longo do capítulo possui de motivar estudos futuros a partir do marco teórico apresentado.

2.3 SIMULA  OES NUMÉRICAS

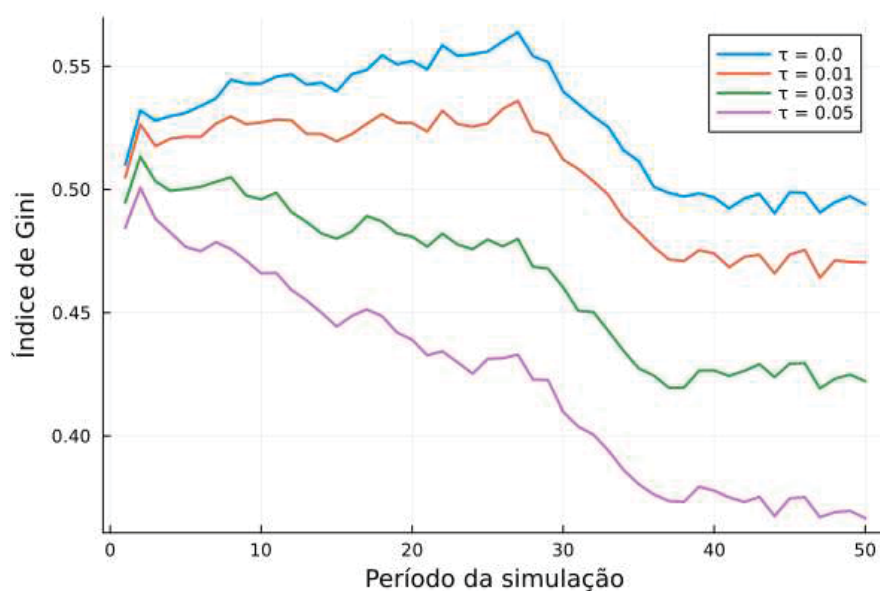
Para garantir comparabilidade deste capítulo com o anterior, optou-se por manter tanto o processo de treino do modelo descrito na se  o 1.3 quanto os parâmetros apresentados na TABELA 1. Durante todo o processo de treino, considera-se uma economia sem política

redistributiva, porém, a partir do ponto no qual a economia converge aos valores de referência, são introduzidas as variáveis de política econômica³.

A partir daí, começa o período de simulação do modelo com três valores possíveis para τ : de 1%, 3%, e 5%, de modo que se torna possível comparar os resultados de cada cenário entre si, além e com o cenário apresentado no Capítulo 1, de uma economia sem governo. À medida em que o modelo considera uma alíquota de imposto de renda destinada exclusivamente à redistribuição, se considerou um valor de τ acima de 5% seja demasiadamente grande, levando em conta que, no Brasil, o gasto com o maior programa de transferência de renda do país, o Programa Bolsa Família nunca superou 2% do PIB⁴.

Além da comparação entre diferentes cenários, observa-se o índice de Gini e a taxa de pobreza num cenário de transferências de renda com $\tau = 5\%$ das rendas pré-imposto e pós-imposto. Enquanto a primeira considera apenas os rendimentos do trabalho de cada família em cada período, a segunda conta com as deduções representado por $(1 - \tau)$ e as transferências T_t .

GRÁFICO 8 – COMPARAÇÃO DO ÍNDICE DE GINI DO PERÍODO DE SIMULAÇÃO PARA CADA VALOR DE τ



³ Na prática, essa mudança consiste apenas numa alteração da alíquota de imposto, τ , uma vez que quando $\tau = 0$, a renda das famílias (e por consequência, o consumo e o gasto em educação também) equivale ao cenário descrito no capítulo 1.

⁴

Disponível

em

<https://www9.senado.gov.br/QvAJAXZfc/opendoc.htm?document=senado%2Fsigabrazilpainelcidadao.qvw&host=QVS%40www9a&anonymous=true&Sheet=shOrcamentoVisaoGeral>

FONTE: Elaboração própria

O GRÁFICO 8 apresenta a distribuição de renda da economia medida pelo índice de Gini para cada valor de τ do período simulado. A primeira coisa possível de ser perceber é em relação ao efeito da política de transferências na distribuição de renda: dentro desse recorte, maiores valores de τ destinados à distribuição de renda levam uma renda mais bem distribuída ao longo do tempo. Além disso, a política de transferências de renda leva uma tendência de diminuição da desigualdade que se perpetua durante todo o período de simulação.

Apesar das séries iniciarem em pontos de partida semelhantes, à medida em que o período de simulação avança a distância entre as séries aumenta. Essa distância chega ao ponto de o índice de Gini do último período ser de aproximadamente 0.500 na economia sem políticas redistributivas *versus* um valor pouco maior do que 0.350 na economia com um tributo de 5% destinado a transferências de renda.

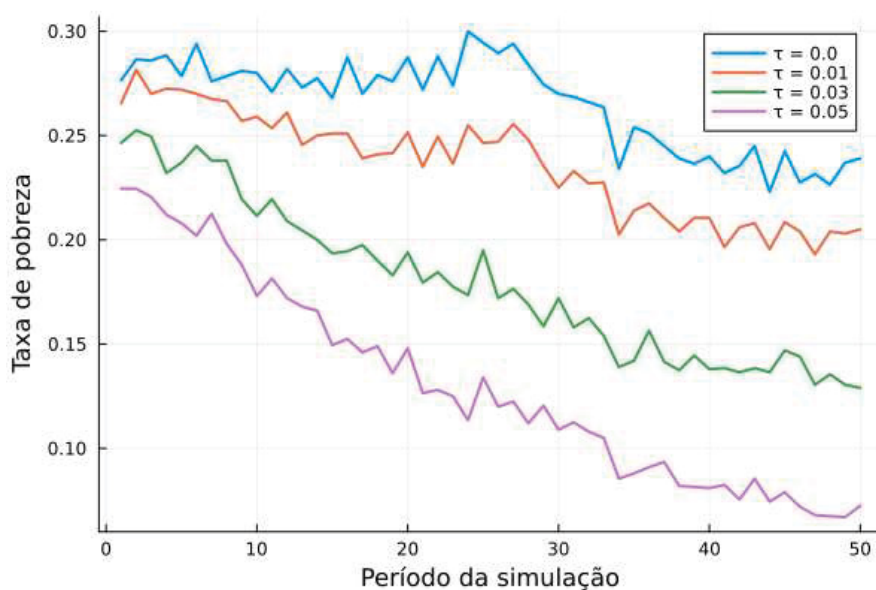
Essa mesma ideia é reforçada pelo GRÁFICO 9, que apresenta a taxa de pobreza sob a política de transferências de renda. Ao se beneficiarem de um ganho líquido promovido pela política redistributiva, as famílias mais pobres são capazes de superar a restrição de consumo mínimo imposta pelo modelo, e isso pode ser percebido pela queda da taxa de pobreza conforme se destina uma alíquota maior para fins redistributivos. Assim como no caso anterior, a grande diferença nas séries temporais de cada cenário é a tendência, uma vez que os movimentos provocados por choques geracionais tendem a ser semelhantes.

Assim como no caso do índice de Gini, a diferença entre a taxa de pobreza de cada cenário cresce com o tempo: enquanto no cenário sem política de transferência de renda a taxa de pobreza do último período se aproxima de 25%, sendo que, no último ela se situa abaixo de 10%. Os ganhos distributivos apresentados pelas duas variáveis, porém, não se devem somente ao impacto direto das transferências. O GRÁFICO 10 faz uma comparação das duas mesmas medidas sobre a renda pré-imposto e pós-imposto, de modo que fica nítido o efeito da política sobre os ganhos do trabalho de cada família, independente da transferência.

Ao comparar as duas medidas sobre a renda bruta e líquida, nota-se que, tanto para o Gini quanto para a taxa de pobreza, a versão pré-imposto de cada indicador corresponde a um deslocamento paralelo da curva pós-imposto para cima quase perfeito. Isso significa que a tendência de queda observada nos gráficos 8 e 9 se mantém mais ou menos na mesma magnitude.

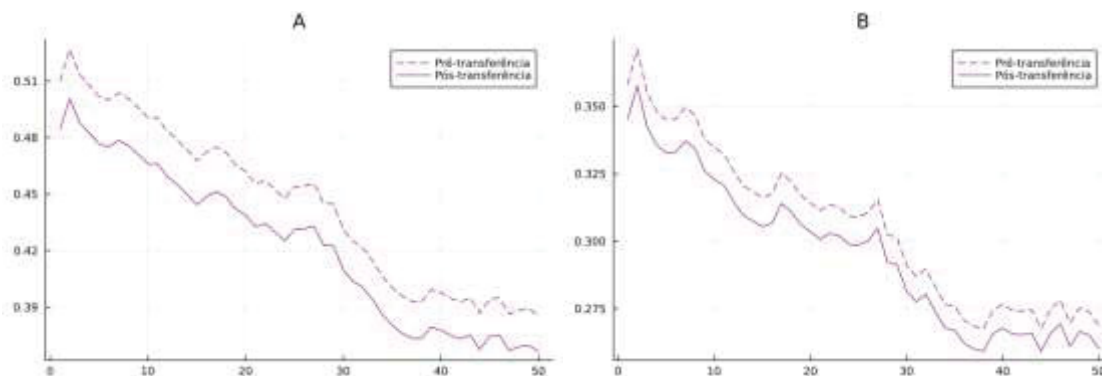
Essa relação se mantém a mesma para os outros valores de τ para as duas estatísticas, de modo que, para evitar redundância, apenas os valores que representam maiores transferências foram escolhidos. Permanece, portanto, a conclusão de que, nas condições descritas pelo modelo apresentado nesse trabalho, a política de transferência de renda promove uma tendência significativa de melhora na distribuição de renda no longo prazo.

GRÁFICO 9 – COMPARAÇÃO DA TAXA DE POBREZA DO PERÍODO DE SIMULAÇÃO PARA CADA VALOR DE τ



FONTE: Elaboração própria

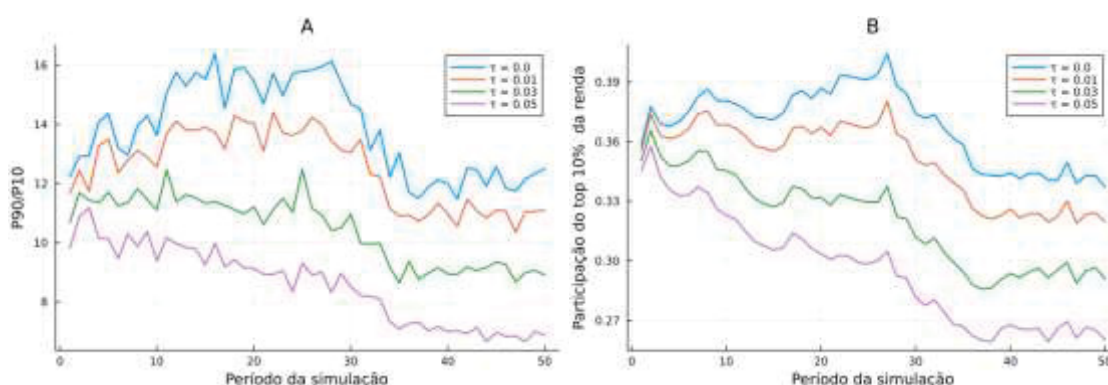
GRÁFICO 10 – ÍNDICE DE GINI (A) E TAXA DE POBREZA (B) DAS RENDAS PRÉ-IMPOSTO (LINHA TRACEJADA) E PÓS-IMPOSTO (LINHA CHEIA) CONSIDERANDO $\tau = 5\%$



FONTE: Elaboração própria

Por fim, o GRÁFICO 11, que traz os resultados da política de transferência de renda por mais duas medidas distributivas aponta para o sucesso da política de transferência de renda no objetivo de reduzir a desigualdade de renda. As duas medidas de desigualdade mais sensíveis a mudanças no topo da distribuição também mostraram uma trajetória mais acentuada de declínio com a introdução da política.

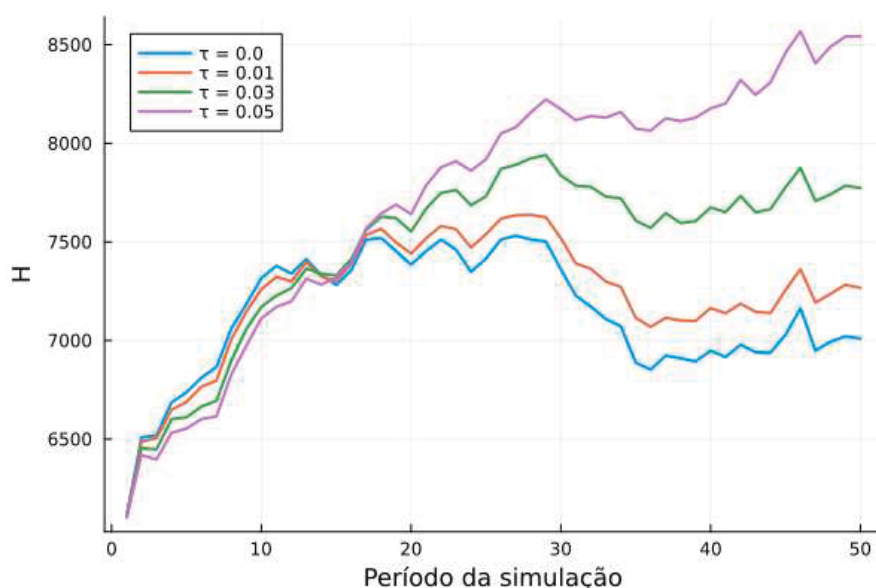
GRÁFICO 11 – COMPARAÇÃO DA RAZÃO P90/P10 (A) E RENDA DOS 10% MAIS RICOS (B) PARA CADA VALOR DE τ



FONTE: Elaboração própria

Passando da discussão acerca da distribuição de renda para a variável capaz de mensurar, nos moldes do modelo, o bem-estar da sociedade, o GRÁFICO 12 apresenta o agregado de capital humano do modelo que, vale lembrar, nos termos deste trabalho, pode ser entendido como análogo ao produto da economia.

GRÁFICO 12 – COMPARAÇÃO DO ESTOQUE DE CAPITAL HUMANO DO PERÍODO DE SIMULAÇÃO PARA CADA VALOR DE τ .



Fonte: Elaboração própria

O resultado da política de transferência de renda sobre o estoque de capital humano da população segue uma trajetória interessante. Durante aproximadamente os primeiros 15 períodos as séries andam próximas, com uma ligeira vantagem do cenário sem governo. No entanto, à medida em que a trajetória de crescimento da série equivalente à economia sem política redistributiva se esgota, as séries que contam com redistribuição de renda possuem um período maior de aumento, que é mais acentuado quanto maiores são as transferências.

Uma hipótese possível para explicar esse fenômeno pode estar associada aos retornos marginais decrescentes aos quais a função de acumulação de capital está sujeita. À medida em que nos primeiros períodos, pioras na distribuição de renda levam a um aumento expressivo do estoque de capital humano, uma vez que o aumento de renda das famílias mais ricas implica também em aumentos no gasto em educação, esse aumento, por se concentrar mais no topo da distribuição, gera resultados relativamente menores com o passar do tempo, levando a um “teto” na quantidade de capital humano da economia, refletindo os retornos marginais decrescentes associados à função de acumulação de capital humano.

À luz das evidências empíricas, esse mecanismo de transmissão que parte da melhora da distribuição de renda e leva a ganhos econômicos pela via da acumulação de capital humano está em linha com os resultados obtidos por Erman e te Kaat (2019), e Che Sulaiman et al (2021), e Hasparyk et al (2023), que encontram evidências de que melhoras distributivas aceleram o ritmo do crescimento econômico.

Para dados brasileiros, no entanto, Silva (2020) apresenta evidências de que choques de aumento na desigualdade levam a aumentos no produto per capita da economia, enquanto aumentos exógenos do produto levam a melhoras distributivas. Apesar dos resultados diferentes, o autor aponta a circunstância do Brasil enquanto país em desenvolvimento, como uma possível justificativa para a relação positiva entre desigualdade e crescimento. Como este trabalho não considera na função de produção a acumulação de capital físico, e consequentemente, não tem uma regra de poupança definida na função utilidade, a tarefa de abrir um diálogo com os achados de Silva (2020) se torna mais complexo, mas uma extensão do modelo que considere essas variáveis pode trazer mais elementos para embasar a discussão entre distribuição de renda e crescimento.

Ainda segundo essa hipótese, a introdução um mecanismo de distribuição de renda faz com que parte do aumento de H_t observado nos primeiros períodos seja absorvido pela parcela da população, e esses ganhos levam a possibilidade de acumulação de capital humano por parte das famílias mais pobres, o que, por sua vez, leva a um estoque agregado maior. Um mecanismo similar a esse é descrito por Galor e Moav (2004), onde melhoras na distribuição de renda levam a resultados agregados favoráveis na acumulação de capital humano da economia.

É importante, porém, cautela ao interpretar os resultados até aqui obtidos. Uma vez que este modelo funciona sob as hipóteses de pleno emprego possui uma função de produção com um formato que só depende de H_t , é de se esperar que o efeito da política de transferência sobre a distribuição de renda e sobre o produto sejam superestimados em comparação a uma economia mais complexa, com altas taxas de desemprego, outros fatores impactando o produto, ou outras assimetrias no mercado de trabalho, como discriminação ou segmentação.

Apesar disso, a simulação aponta para dois principais resultados: primeiramente, uma melhora considerável da distribuição de renda, e em segundo lugar, e decorrente do primeiro resultado, uma elevação de longo prazo do estoque de capital humano da economia, o que representa um potencial produtivo, capaz de levar a uma melhora do bem-estar da economia.

2.4 CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS FUTUROS DE PESQUISA

Os resultados das simulações numéricas indicam que a política de transferência de renda promove uma melhora generalizada na economia, ao elevar o estoque de capital humano da população nos estratos inferiores de renda. No modelo, essa melhora é capaz de fazer com que parte das famílias pobres acumulem capital humano ao superarem a restrição de consumo mínimo a qual estão sujeitas, uma vez que famílias mais ricas, por conta dos rendimentos

marginais decrescentes associados à função de acumulação de capital humano, se situam num patamar no qual acréscimos de renda geram retornos menores.

Nesse sentido, a discussão desse capítulo tem potencial de servir de marco teórico e motivação para discussões sobre distribuições de renda, ao indicar um mecanismo de transmissão entre diminuição das desigualdades, e crescimento econômico, liderado pela acumulação de capital humano.

No entanto, é possível notar uma limitação na interpretação dos resultados aqui apresentados, no que diz respeito ao papel da acumulação de capital humano no produto da economia. A hipótese simplificadora de que a função de produção depende apenas do estoque de capital humano provoca duas principais consequências na interpretação dos resultados: a de superestimar o peso dos salários da distribuição de renda, e a de superestimar os efeitos de melhoras distributivas na economia.

A primeira consequência se relaciona ao peso dos salários na renda total. Na medida em que a função de produção conta apenas com o capital humano, a renda total da economia é composta apenas de salários. À medida em que existisse acumulação de capital físico, gerando lucros, melhoras da distribuição salarial provocariam resultados menos pronunciados sobre o índice de desigualdade da economia, mantido tudo mais constante.

Similarmente, a segunda consequência tem a ver com o argumento segundo o qual melhoras distributivas são eficazes em levar a um aumento na produção quanto mais intensivo em conhecimento for a função de produção de cada economia. Como consequência, o esperado seria que a adição do capital físico na função de produção levasse um cenário no qual os impactos da distribuição de renda no crescimento fossem menores do que os apresentados nas simulações numéricas do capítulo.

Tendo essas limitações em vista, é possível sinalizar caminhos possíveis para desdobramentos futuros dessa linha de pesquisa a partir das ideias apresentadas neste capítulo. Além da já mencionada inclusão do componente de capital físico, outro possível incremento futuro ao modelo é a possibilidade de se permitir choques exógenos de tecnologia, para estimar como choques de oferta afetariam a distribuição de renda.

Em relação à inclusão da variável de capital físico seria necessário fazer algumas inclusões no modelo, entre elas (i) a inclusão de poupança na função utilidade das famílias; (ii) uma função de acumulação de capital físico ao longo das gerações; e (iii) a construção de uma

função de transmissão intergeracional de capital físico. Além disso, o processo de calibragem precisaria incluir os parâmetros resultantes dessas adições. A adição de choques tecnológicos, por sua vez, seria de implementação menos custosa, tanto do ponto de vista algébrico, quanto computacional. As simulações numéricas poderiam ser feitas a partir de variações no parâmetro A , que ao longo deste trabalho foi fixado no valor de 1.

O próximo capítulo se dedica a dar um passo a mais nessa discussão, por meio da adição de mais uma variável de política: o gasto público em educação. Essa adição se dá motivada pela tentativa de, mais uma vez, aproximar o modelo da economia brasileira. A adição dessa política se dará sem a exclusão de transferências, com o objetivo de analisar o papel que cada uma desempenha na distribuição individualmente.

CAPÍTULO 3: MODELO COM GASTO PÚBLICO EM EDUCAÇÃO

Após a versão do modelo com transferências de renda, o próximo passo deste trabalho é apresentar um modelo no qual o Governo pode, além de financiar uma política de transferências, financiar também a educação pública. Perseguindo esse objetivo, este capítulo apresenta uma extensão do modelo do capítulo anterior, no qual o orçamento público se divide em dois gastos possíveis, a transferência de renda e o gasto com a educação pública.

A adição dessa política no modelo, porém, se mostrou um desafio maior do que a anterior, e exigiu que se retornasse ao processo de calibragem do modelo, de modo a repetir o processo de calibragem apresentado no capítulo 1, porém, com uma variável adicional, o parâmetro de eficiência da educação pública.

Com isso, este capítulo se divide em 5 seções: (i) a seção de revisão bibliográfica que serviu para embasar algumas decisões sobre a forma de se aplicar a política de transferência de renda nos moldes do modelo; (ii) a seção que discorre sobre o modelo em si, com as novas equações de formação de capital humano e regra de gastos do Governo, (iii) a seção de calibragem revisitada, na qual se adapta o processo de calibragem utilizado no capítulo 1 a essa nova versão; (iv) a seção de simulações numéricas, diante desse novo contexto, e (v) uma seção de considerações a respeito das contribuições do capítulo para a literatura, e principais desafios e desdobramentos futuros para projetos de pesquisa decorrentes.

3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1.1 Acumulação de capital humano e educação

Restuccia e Urrutia (2004) constroem um modelo de gerações sobrepostas para discutir distribuição de renda numa economia em que os agentes passam por dois ciclos educacionais, o da educação básica e o da educação universitária. No modelo, as famílias podem custear a educação de seus filhos nos dois ciclos, e possuem uma capacidade limitada de se endividarem para realizar esse investimento. Além dos dois tipos de gasto, a transmissão de capital humano através de gerações também pode acontecer por meio de uma variável de habilidade inata, que é transmitida de pais para filhos seguindo um processo de Markov, no qual a quantidade de capital humano da geração anterior explica uma parte da quantidade de capital humano da geração atual.

Com esse arcabouço, construído com o objetivo de replicar características da economia dos Estados Unidos, os autores têm o objetivo de analisarem políticas públicas de financiamento

da educação por meio de subsídios às famílias em cada ciclo. Os autores mostram que, levando em conta o objetivo de melhorarem a mobilidade intergeracional, o financiamento da educação básica tem mais efetividade do que o financiamento da educação universitária. Isso acontece principalmente porque é no período da educação básica em que as famílias precisam lidar com as maiores restrições de financiamento na educação, além do fato de que os subsídios para a educação universitária não possuem o poder de afetar o processo de decisão das famílias.

Outra abordagem que estuda o papel da educação na desigualdade de renda em um modelo de gerações sobrepostas é a de Yang e Qiu (2016), que foca na mobilidade intergeracional. Os autores elaboram um modelo que tem como objetivo replicar características da economia chinesa, principalmente no que diz respeito ao processo no qual os pais decidem por dar continuidade à educação dos filhos, e tem como inovação o fato de trabalharem com um modelo que permite ao mesmo tempo que se olhe para os movimentos da desigualdade entre gerações, e entre famílias do mesmo período.

No modelo, os pais são considerados altruístas, o que significa que suas funções valor consideram o nível de habilidade dos filhos, tanto no presente, quanto nos períodos seguintes. A acumulação de capital humano, nesse contexto, se dá como uma função dos gastos da família, dos gastos públicos, e do próprio nível inato de habilidade de seus filhos. No primeiro período, o ensino é compulsório, e vai até o fim do ensino fundamental, e após isso, os pais podem escolher entre seus filhos permanecerem na escola ou se dedicarem ao mercado de trabalho.

Como resultado do modelo, os autores constataam que os gastos da família com a educação dos filhos possuem papel mais relevante do que as diferenças de habilidades inatas dos indivíduos. Isso se dá pela diferença de gastos entre os pais ricos e pobres na educação de seus filhos, o que é, inclusive, confirmado a partir dos dados que os autores levantam.

Os trabalhos utilizados ao longo dessa revisão bibliográfica, em especial Restuccia e Urrutia (2004), e Yang e Qiu (2016), serviram de base para a função de capital humano utilizada ao longo desse capítulo, na qual gastos públicos e privados em educação contribuem para a formação de capital humano. Uma mudança promovida neste trabalho, porém, consiste na diferenciação entre a eficiência da educação pública e privada, para refletir a desigualdade que ocorre no sistema educacional brasileiro, como será brevemente apresentado a seguir.

3.1.2. Desigualdade na educação brasileira

Tendo em mente o papel que a renda do trabalho possui na economia brasileira, os mecanismos de transmissão entre educação e rendimentos, que já são discutidos desde Mincer (1974), e os processos pelos quais as famílias decidem realizar gastos em educação de seus filhos, pode-se agora voltar a responder a seguinte pergunta: como se dá a distribuição da educação no Brasil? Responder a essa pergunta é relevante pois, a partir daí, pode-se trabalhar com a hipótese de que a desigualdade no acesso à educação se reflete em desigualdade de renda e vice-versa, que é justamente o mecanismo que o modelo de gerações sobrepostas pode se propor a descrever.

Para entrar nessa discussão, pode-se começar com o trabalho de Sampaio e Oliveira (2015), que tem o objetivo de discutir a desigualdade educacional sob três perspectivas diferentes: a do acesso à educação, a de desigualdade de tratamento, e a de proficiência dos estudantes. O conceito de desigualdade de acesso à educação diz respeito ao conceito mais simples, que é o acesso escolar em diferentes níveis do sistema educacional. A dimensão da desigualdade de tratamento trata dos currículos aos quais os estudantes têm acesso, e o quão uniformes são esses currículos. Por fim, a proficiência dos estudantes tem a ver com o conhecimento adquirido ao longo da trajetória escolar, e está relacionado não à ideia de plena igualdade de resultados, mas ao estabelecimento de um patamar mínimo de conhecimento comum aos alunos. Diante dessas três dimensões da desigualdade educacional, os autores buscam verificar como o sistema de ensino brasileiro se adequa em cada uma delas.

Em relação ao acesso à educação, os autores apontam que nas fases intermediárias do ensino, a saber, entre os 6 e 14 anos de idade, a diferença de acesso entre os 25% mais pobres da população e os 25% mais ricos é bem próxima a zero, enquanto nas faixas etárias mais ao extremo, que são de 0 a 3 anos e dos 18 aos 24, a diferença é bem mais perceptível, com aproximadamente 40% dos estudantes mais ricos tendo acesso à educação contra aproximadamente 20% dos mais pobres, em ambos os casos. Essa desigualdade é ainda mais acentuada no que diz respeito à conclusão do ensino fundamental, e principalmente do médio, chegando a alcançar uma diferença de aproximadamente 50 pontos percentuais.

No que diz respeito à desigualdade de tratamento, os autores apontam diversos fatores relacionado às estruturas das escolas que não se adequam aos padrões estabelecidos pelo Plano Nacional de Educação (PNE), ou que poderiam configurar diferenças no acesso dos estudantes

ao mesmo tipo de currículo. Um exemplo dessa disparidade é em relação à estrutura das escolas públicas, das quais, de acordo com os autores, apenas 4,4% das escolas de ensino fundamental e 22,6% das escolas de ensino médio contavam com a estrutura recomendada pelo PNE em 2013. Por fim, na dimensão da proficiência, os autores apontam para a dificuldade de obter dados relevantes do desempenho dos alunos, por isso não trazem dados empíricos nessa dimensão.

Pode-se entender que o trabalho de Sampaio e Oliveira (2015) resume bem o cenário da educação brasileira até metade da década passada, mas nos últimos anos houve uma importante mudança de paradigma, que foi a instauração do Novo Ensino Médio, que entrou em vigor em 2017, e ainda é um campo vasto para discussões na literatura brasileira sobre educação.

Foge de o escopo principal do trabalho fazer uma descrição extensiva da política do Novo Ensino Médio (NEM), mas cabe uma breve explicação sobre a política, uma vez que ela pode ter um papel importante na formação de capital humano, e na melhora ou piora da distribuição da desigualdade educacional brasileira dos próximos anos. Em vigor desde 2017, a política se baseia na reestruturação dos currículos e nos planos de ensino nas escolas públicas e privadas do Brasil inteiro.

Dentre as mudanças propostas pelo NEM, a que mais chamou atenção foi a mudança do currículo, que passou a ser formado de dois componentes. O primeiro, chamado formação geral básica, que contém conhecimentos previstos na Base Nacional Comum Curricular da área de linguagens, matemática, ciências humanas e da natureza, com carga máxima de 1800 horas. O segundo, chamado de itinerários formativos, com carga horária mínima de 1200 horas e uma formação diversa, e de acordo com o interesse do estudante, com disciplinas focadas nos eixos de investigação científica, processos criativos, mediação e intervenção sociocultural, e empreendedorismo.

Ainda há uma relativa escassez de trabalhos que busquem avaliar do ponto de vista quantitativo o NEM, especialmente no âmbito das desigualdades educacionais. Um dos trabalhos que se propõem em algum grau a essa discussão é o de Ferreira Gusmão (2023), que utiliza dados de 2013 a 2019 da prova do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que mede o rendimento escolar de estudantes de todo o país, e dados de progressão no sistema de ensino vindos do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

Tanto nas estatísticas de desempenho escolar quanto nas de progressão do ensino, os autores encontraram sinais da disparidade entre estudantes da rede pública e privada no Brasil, com o segundo grupo possuindo, em média, melhor desempenho na prova do SAEB taxas de distorção idade-série bem inferior aos estudantes da rede pública. Apesar de não possuir meios de fazer uma análise mais profunda do impacto do NEM na desigualdade educacional, inclusive pela base dados não alcançadas um período longo o suficiente para essa avaliação, é possível constatar a profundidade da desigualdade educacional no Brasil.

Diante dessas discussões recentes, fica claro que ainda há uma diferença significativa entre educação pública e privada no Brasil, que, como visto, também é mais uma forma pela qual a má distribuição de renda do país se manifesta, uma vez que as famílias mais pobres são menos propensas a realizarem gastos privados na educação de seus filhos. Pensando no modelo teórico, mesmo que se inclua uma possibilidade de política voltada ao ensino público, a distinção entre ensino público e privado continua sendo relevante para o modelo, uma vez que o segundo apresenta desempenhos superiores.

A relação de interdependência entre renda e educação ao longo de gerações no Brasil leva a um cenário no qual a capacidade de gerar capital humano (e por consequência, a oportunidade de melhores salários) tem uma alta probabilidade de ser transmitida de modo intergeracional. Esse fenômeno já foi estudado por trabalhos como Ferreira e Veloso (2003), Junior e Ramalho (2013), Mahlmeister et al. (2019), ou dos Santos e Costa (2023). Esses estudos mostram como a riqueza (e especialmente a pobreza) pode ser transmitida entre as gerações por meio das dificuldades encontradas no processo educativo.

Ferreira e Veloso (2003) tem uma importante contribuição para a literatura sobre as desigualdades no processo educativo ao estimarem o coeficiente de persistência intergeracional da educação, que avalia em que medida pais com a educação acima da média influenciam a probabilidade de seus filhos também possuírem a educação acima da média. Além disso, os autores também estimam o coeficiente para diferentes grupos amostrais, na tentativa de entender em que medida diferentes grupos possuem um grau de mobilidade maior ou menor.

Usando dados da PNAD de 1996 e um modelo que combinava o uso de estimação via MQO para diferentes subgrupos amostrais e coortes, os autores constataram a presença de não-linearidades no coeficiente de persistência intergeracional, tanto em respeito à educação quanto à renda. Os autores mostram que os indivíduos cujos pais tinham tido pouco acesso à educação

estavam mais sujeitos ao processo de transmissão intergeracional de educação, ou seja, eram mais propensos a se manterem nos estratos menos educados da população. Para os estratos mais altos da distribuição educacional, por outro lado, esse fenômeno não era observado.

Em outros recortes, os autores também constataram diferenças no coeficiente em alguns grupos específicos, como nos de negros, e de moradores da região Nordeste, indicando que esses grupos estavam ainda mais sujeitos a esse processo de estagnação no nível educacional ao longo do tempo. Em relação às coortes separadas por faixas etárias, os autores também notaram que a grupos mais jovens possuíam um grau um pouco maior de mobilidade em relação à educação de seus pais.

Pouco mais de uma década e meia depois, Mahlmeister et al. (2019) revisitam o trabalho de Ferreira e Veloso (2003) para verificar se houve melhora em termos da transmissão intergeracional da educação, e, para isso, trabalham com uma metodologia semelhante e dados da PNAD de 2014, que contou com um suplemento de mobilidade geracional. Olhando para dados mais recentes, os autores perceberam que os mesmos fenômenos seguiam sendo observados, porém, felizmente, em uma escala menor.

Em relação às características sociais e regionais, os autores notaram uma tendência generalizada de diminuição das diferenças nos graus de mobilidade intergeracionais entre grupos diferentes de indivíduos. No geral, foi possível constatar uma melhora geral na educação entre 1996 e 2014, e que essa melhora provocou um enfraquecimento no ciclo de transmissão da educação. No entanto, apesar dessa atenuação, essas melhoras não foram grandes o suficiente para encerrar essa tendência.

Seguindo uma estratégia ligeiramente diferente, Junior e Ramalho (2013) analisam esse fenômeno também associado à renda, para investigar também como se dá a transmissão intergeracional de renda. Os autores utilizam microdados dos Censos de 1990 e 2000 para estimar os determinantes mobilidade intergeracional. A metodologia também difere dos trabalhos anteriores, pois, para esse tipo de análise, um modelo logit que mensura o impacto de diferentes variáveis sobre a probabilidade de um indivíduo de se deslocar em direção a um estrato mais elevado na distribuição de renda é mais adequado.

Com diferenças na base de dados e na metodologia, os autores são capazes de analisar uma série maior de variáveis que podem ter efeito sobre a mobilidade social tanto em termos de renda quanto de educação. Dentre os principais candidatos a determinantes da mobilidade

intergeracional os autores elencaram gênero, cor, arranjo familiar, situação conjugal, região de residência, além de atributos de pessoas próximas, como irmãos, irmãs e cônjuges. Os autores apontam a existência de uma alta correlação entre a educação e renda dos pais e a dos filhos, mas indicam que alguns fatores aumentam a possibilidade de ascensão social como a escolaridade paterna, além de características relacionadas a indivíduos do sexo masculino, brancos, filhos de pais letrados e famílias biparentais.

Outro estudo que constata a persistência da desigualdade no ensino através de gerações sob uma perspectiva diferente é o de Santos e Costa (2023), que analisa, sob a ótica do trabalho infantil, a relação entre dificuldades em se obter educação pelos pais e pelos filhos. As autoras utilizam dados da PNAD de 2015, para estimar o impacto de longo prazo do trabalho infantil, tanto na probabilidade o adulto que trabalhou na infância se encontrar em uma situação de pobreza como também na probabilidade de seus filhos estarem nas condições de trabalho infantil.

Os resultados do trabalho indicam que o fato de um indivíduo ter trabalhado na infância de fato o prejudica no longo prazo, aumentando a probabilidade de que ele permaneça pobre na sua fase adulta, assim como a de que seus filhos trabalhem. Esse fenômeno pode gerar um caráter de reforço da pobreza no longo prazo, além de explicar, em partes, o motivo dos coeficientes de persistência intergeracional da educação apontado por Ferreira e Veloso (2003) serem mais altos para indivíduos dos estratos mais baixos da distribuição de educação.

Além disso, as autoras apontam para outros fatores que podem ser relevantes para aumentar a probabilidade de que a criança trabalhe como o gênero (masculino), a idade (positivamente), carteira assinada do chefe de família (negativamente), e o fato de a criança não estar matriculada na escola (positivamente). Com isso, o trabalho mostra como o esse fenômeno pode ser multidimensional.

Tendo em mente que a sociedade brasileira é marcada por certo grau de inércia no que diz respeito à educação, em especial nas famílias mais pobres, fica clara a necessidade de se adaptar modelos de gerações sobrepostas tendo em mente esse fenômeno. A restrição de consumo mínimo aqui opera de modo a replicar a dificuldade que as famílias mais pobres possuem de dedicar seus esforços na educação de seus filhos, o que leva ao cenário de reforço da pobreza através das gerações. Além disso, o modelo também conta com a presença de um componente aleatório na função de acumulação de capital humano, que varia de indivíduo para

indivíduo, o que permitirá a existência de algum grau de mobilidade social ao longo do tempo, mas não terá poder para, por si só, interromper a armadilha da pobreza.

3.2 MODELO

O próximo passo será a inclusão da possibilidade de o Governo ofertar educação pública, como meio de oferecer uma alternativa às famílias incapazes de realizar gastos na educação de seus filhos. Nesse contexto, o Governo continua tendo como fonte de arrecadação a renda do trabalho dos indivíduos, mas o padrão dos gastos muda para um modelo em que o governo pode escolher como alocar seus recursos entre educação e transferências de renda.

A ideia por trás do gasto público em educação, aqui, é permitir que famílias incapazes de gastar na educação de seus filhos tenham acesso à educação de alguma forma. Restuccia e Urrutia (2004), e, posteriormente, Yang e Qiu (2016) trabalham com uma função de acumulação de capital humano que combina gastos públicos e privados, e que apresenta os dois gastos como sendo igualmente eficientes. Aqui, a função de acumulação de capital humano é uma adaptação desse formato, e avança em relação aos trabalhos anteriores ao considerar diferenças na eficiência nos dois gastos, para refletir o fato de que, na economia brasileira, ainda existe uma disparidade considerável entre educação pública e privada.

Dessa forma, a função de acumulação de capital com educação pública se torna:

$$h_{i,t+1} = (\gamma e_{i,t} + \lambda d_t)^\rho \delta_{i,t+1} \quad (31)$$

Na função, λ é o parâmetro de eficiência da educação pública, e d_t o gasto em educação per capita. Diferente da função de acumulação do primeiro capítulo apresentada na equação (8), não é necessário fazer uma distinção nessa função de acumulação de capital humano quando $e_{i,t} = 0$, pois a presença de d_t faz com que mesmo as famílias incapazes de realizar gastos privados possam ver seus filhos acumularem alguma quantidade de capital humano e poderem desenvolver suas habilidades de acordo com $\delta_{i,t+1}$. Outro ponto que chama atenção em (31) é que o gasto público contribui na formação de capital humano de todas as famílias, mesmo as mais ricas.

Os gastos públicos per capita em educação (d_t) e com transferências (T_t) passam a ser definidos de acordo com as equações (32a) e (32b). O Governo aloca sua arrecadação per capita (f_t) entre gastos em educação e transferências de renda, de acordo com o parâmetro $0 \leq \varphi \leq 1$:

$$T_t = (1 - \varphi) \frac{\sum_{i=1}^n \tau \omega_t h_{i,t}}{n} \quad (32a)$$

$$d_t = \varphi f_t \quad (32b)$$

$$f_t = \frac{\sum_{i=1}^n \tau \omega_t h_{i,t}}{n} \quad (33)$$

Ou, em termos da quantidade média de capital humano do período:

$$f_t = \tau \omega_t \bar{h}_t \quad (33')$$

Tendo definida a nova função de acumulação de capital, pode-se voltar ao problema de maximização de utilidade para avaliar o novo equilíbrio. A nova restrição orçamentária permanece como vista no Capítulo 2, na equação (13). Dessa forma, substituindo (31) e (13) na função utilidade apresentada em (1), tem-se:

$$U(e_{i,t}) = \ln(\omega_t h_{i,t} - e_{i,t} + T_t) + \beta \ln((\gamma e_{i,t} + \lambda d_t)^\rho \delta_{i,t+1}) \quad (34)$$

E a escolha de $e_{i,t}$ segue em:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{i,t}} = \frac{-1}{\omega_t h_{i,t} - e_{i,t} + T_t} + \frac{\gamma \beta \rho}{(\gamma e_{i,t} + \lambda d_t)} = 0$$

De modo que se define:

$$e_{i,t}^* = \frac{\beta \rho [(1-\tau) \omega_t h_{i,t} + T_t]}{1+\beta \rho} - \frac{\lambda d_t}{\gamma(1+\beta \rho)} \quad (35)$$

A equação (35) mostra que, num cenário em que o gasto público em educação se oferece como um substituto ao gasto privado, ocorre uma espécie de efeito *crowding-out* no gasto privado em educação, uma vez que o gasto ótimo em educação diminui quanto maior é o gasto público. Da mesma forma, deduz-se o consumo ótimo após substituir a equação (35) em (13):

$$c_{i,t}^* = \frac{[(1-\tau) \omega_t h_{i,t} + T_t]}{1+\beta \rho} + \frac{\lambda d_t}{\gamma(1+\beta \rho)} \quad (36)$$

Em (36), nota-se que a parcela $\frac{\lambda d_t}{\gamma(1+\beta \rho)}$, subtraída do gasto privado em educação, é acrescida ao gasto privado em consumo para as famílias que são capazes de superar o limiar de consumo mínimo. Com isso, pode-se determinar a quantidade de capital humano no período seguinte de cada grupo de famílias. Substituindo (32a), (32b), (33) e (35) em (31), tem-se o capital humano do período seguinte das famílias não pobres ($h_{i,t+1}^{np}$):

$$h_{i,t+1}^{np} = \left[\gamma \left(\frac{\beta \rho [(1-\tau) \omega_t h_{it} + (1-\varphi) \tau \omega_t \bar{h}_t]}{1 + \beta \rho} - \frac{\lambda \varphi \tau \omega_t \bar{h}_t}{\gamma (1 + \beta \rho)} \right) + \lambda \varphi \tau \omega_t \bar{h}_t \right]^\rho \delta_{i,t+1}$$

O que resulta em:

$$h_{i,t+1}^{np} = \left[\frac{\gamma \beta \rho [(1-\tau) \omega_t h_{it} + (\gamma(1-\varphi) + \lambda \varphi \beta \rho) \tau \omega_t \bar{h}_t]}{1 + \beta \rho} \right]^\rho \delta_{i,t+1} \quad (37a)$$

No caso das famílias pobres, considera-se $e_{i,t} = 0$, o que torna a quantidade de capital humano do período seguinte como:

$$h_{i,t+1}^p = (\lambda \varphi \tau \omega_t \bar{h}_t)^\rho \delta_{i,t+1} \quad (37b)$$

Em (37a), é possível ver como se dá a dinâmica de transmissão intergeracional de capital humano num modelo com política de educação pública e transferência de renda. Agora, é possível separar o estoque de capital humano em duas partes: uma que depende apenas da renda da família no período anterior ($\gamma \beta \rho [(1-\tau) \omega_t h_{it}]$), e outra relacionada à renda média da economia ($(\gamma(1-\varphi) + \lambda \varphi \beta \rho) \tau \omega_t \bar{h}_t$), assim como em (15a). Aqui, também, alguns parâmetros podem influenciar positiva ou negativamente o acúmulo de capital humano do período seguinte, como φ e τ .

Por outro lado, a equação (37b) mostra que as famílias que não são capazes de satisfazer a restrição de consumo mínimo (mesmo após a transferência), acumulam capital humano de acordo com o parâmetro de eficiência da educação pública (λ), o percentual dos gastos sociais destinados à educação pública (φ), e a arrecadação total da economia para esse fim ($\tau \omega_t \bar{h}_t$). Isso permite que seja possível acumular capital humano em algum grau, mesmo para as famílias mais pobres da economia. Aqui, fica garantido que toda geração será capaz de desenvolver suas habilidades de acordo com seu nível inato $\delta_{i,t+1}$.

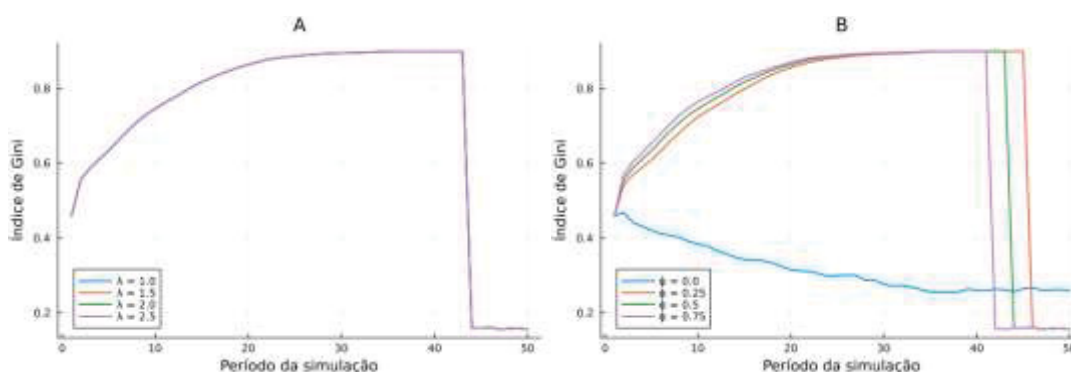
Além disso, é possível notar que, no caso das famílias pobres, mesmo que exista a possibilidade de a educação integralmente pública ficar aquém da educação privada, a alternativa de educação pública pode ser eficaz para interromper o ciclo de pobreza, uma vez que a renda dos pais mais pobres deixa de ser determinante para a renda dos filhos, especialmente se houver a garantia de que $(\lambda \varphi \tau \omega_t \bar{h}_t)^\rho > 1$.

3.3 CALIBRAGEM

Diferente do caso do Capítulo 2, as mudanças propostas no capítulo não se adequaram bem à simulação nos termos em que o modelo estava constituído até então. Mais especificamente, o uso dos parâmetros apresentados na TABELA 1 gerou trajetórias explosivas para o índice de Gini e a Taxa de pobreza, as variáveis utilizadas como base para a calibragem.

A título de exemplo, o GRÁFICO 13 ilustra as inconsistências encontradas ao se introduzir a política de educação no modelo após o final do período de treino. É possível notar que o índice de Gini assume valores irrealistas, que é uma característica de modelos que não escolheram um método numérico adequado para solucionar o equilíbrio de longo prazo. Este é o sinal mais aparente de que é necessário revisitar o processo de calibragem do modelo em busca de parâmetros que garantam um ajuste melhor aos dados.

GRÁFICO 13 – ÍNDICES DE GINI DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE λ (A) E φ (B)



FONTE: Elaboração própria

No gráfico, é possível notar que diferentes valores de λ e φ , considerando um valor de τ igual a 10%, geram trajetórias explosivas na economia, levando a um cenário no qual é impossível que se faça uma comparação com os resultados dos capítulos anteriores. Múltiplas causas podem ser responsáveis por esse descompasso, sendo a mais simples um problema de ajuste do modelo aos parâmetros e a mais complexa algum problema intrínseco a como se constitui o equilíbrio no modelo.

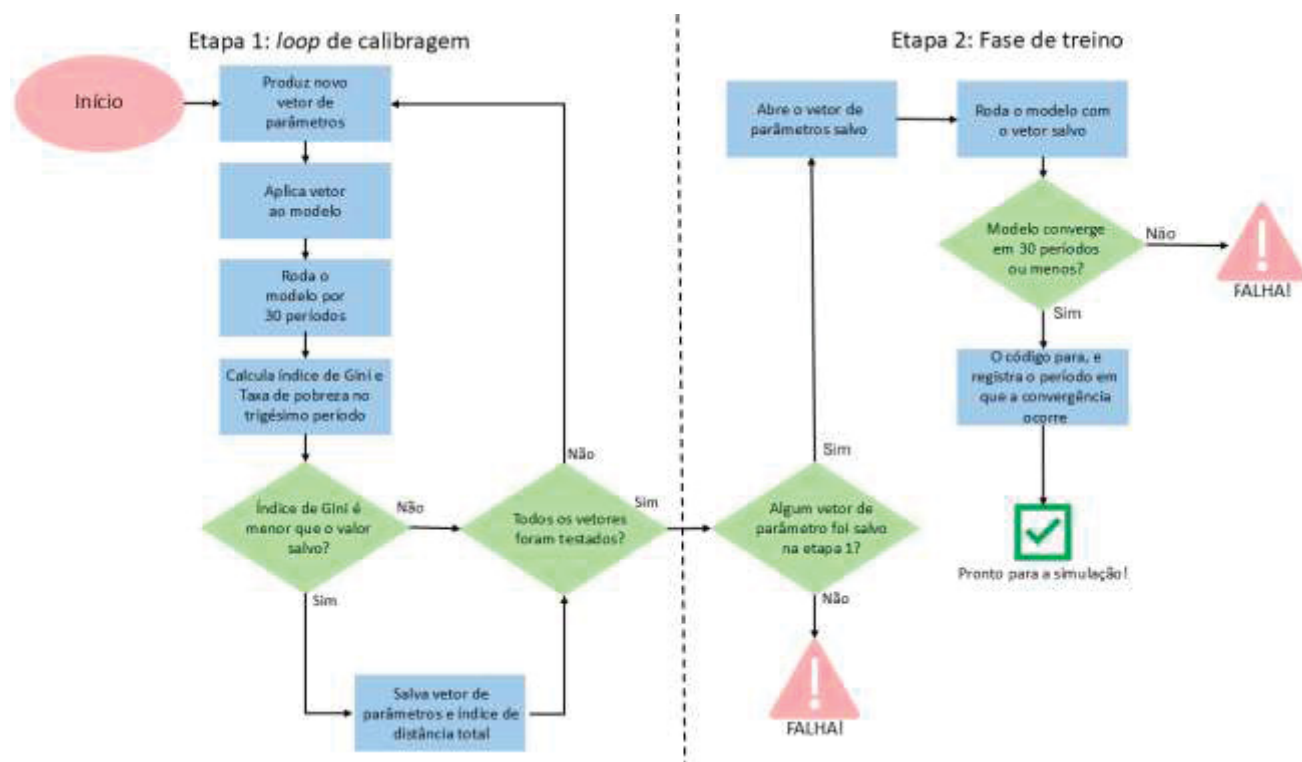
Além disso, a inclusão de um novo parâmetro de na função de acumulação de capital humano, a dizer, λ , gera a necessidade de que se retorne ao *loop* com o qual o modelo foi ajustado, na tentativa de encontrar o valor que garante o melhor ajuste. Porém, ao adicionar uma nova variável exógena, o processo de calibragem ganha uma dimensão adicional, o que

multiplica o número de iterações feitas no Capítulo 1 por 10. Seguindo a hipótese de que a educação privada é mais eficiente na geração de capital humano do que a pública, o *loop* só considera combinações de vetores nas quais $\gamma > \lambda$, para fins de diminuição dos altos custos computacionais envolvidos.

Somada ao desafio computacional, essa nova fase do processo de calibragem encontrou outra limitação: não foi possível selecionar uma combinação de parâmetros que ao mesmo tempo mantivesse o índice de Gini e taxa de pobreza dentro dos valores de transferência. Em termos do fluxograma apresentado na FIGURA 1, o resultado das tentativas de calibragem foi a falha que ocorre quando nenhum vetor de parâmetros é salvo, pois nenhum foi capaz de atender às restrições.

Por isso, se priorizou a busca de parâmetros com o objetivo de minimizar apenas o índice de Gini. A consequência disso foi que apenas esta variável do modelo convergiu para dentro dos valores de interesse considerados no estudo. A versão menos restritiva do código, portanto, segue uma linha descrita pelo fluxograma presente na FIGURA 2, que possui uma regra menos rigorosa para salvar vetores de parâmetros, facilitando, assim, a convergência.

FIGURA 2 – FLUXOGRAMA DA VERSÃO MENOS RESTRITIVA DO PROCESSO DE CALIBRAGEM



FONTE: Elaboração própria

Por fim, a necessidade de se refazer o processo de calibragem do modelo provoca outra limitação: a incomparabilidade dos resultados apresentados aqui com aqueles dos dois capítulos anteriores. Como a única diferença das simulações numéricas do modelo com transferências para o modelo sem governo dizia respeito ao valor do parâmetro de política, τ , foi possível analisar como o modelo se comportava diante de diferentes valores da variável. Por outro lado, ao se retornar ao *loop* de calibragem, se perde a capacidade de entender o efeito da política de educação pública no modelo.

O *loop* utilizado possui a mesma estrutura utilizada no Capítulo 1, na qual se testam todas as combinações possíveis de β , $\bar{c}$, ρ , γ , λ , σ_1 , e σ_2 a partir dos vetores de valores possíveis para cada parâmetro. No entanto, as diferenças mais importantes são: (i) a inclusão de λ , que foi introduzida neste capítulo, sujeita à condição $\gamma > \lambda$ (ii) a redução do vetor de valores de $\bar{c}$ de 20 para 10 elementos, e num intervalo menor, que vai de 1,0 a 5,0, e por fim (iii) a mudança do mecanismo de avaliação de convergência do modelo, que passa a considerar apenas o índice de Gini como referência.

Diante da impossibilidade de calibrar o modelo com as variáveis de política pública, τ e ϕ iguais a zero, foi necessário que se fizesse um palpite inicial sobre quais valores de cada variável seriam utilizados no processo do *loop*, para que, uma vez com o modelo calibrado, elas fossem alteradas de modo a verificar sua influência na economia. O palpite inicial de τ , o imposto de renda, foi de 10%, enquanto ϕ , o percentual da arrecadação destinado à educação pública foi de 50%.

TABELA 2 – PARÂMETROS ENCONTRADOS NA VERSÃO MENOS RESTRITIVA
PROCESSO DE CALIBRAGEM E AJUSTE

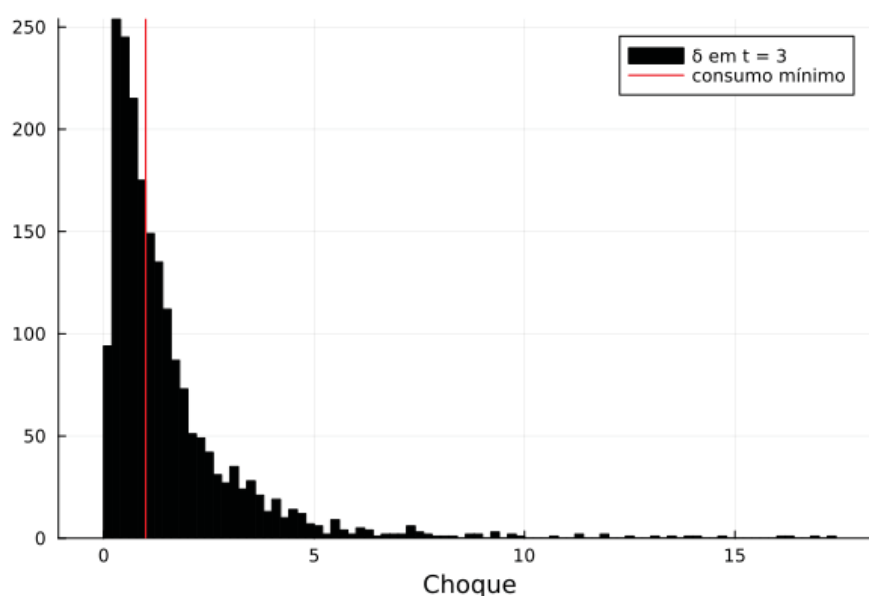
Parâmetro	Símbolo	Intervalo da grade	Valor - Capítulos 1 e 2	Valor - Capítulo 3
Fator de desconto	β	0,2 a 0,8	0,8	0,8
Consumo mínimo	$\bar{c}$	1,0 a 5,0	1,0	1,0
Elasticidade do capital humano em relação ao gasto em educação	ρ	0,1 e 0,9	0,9	0,37
Parâmetro de qualidade da educação privada	γ	1,5 e 2,5	2,5	2,5
Parâmetro de qualidade da educação pública	λ	1,0 e 2,0	-	1,33
Variância de δ	σ_1	0,1 e 2,0	0,31	0,94
Variância de $h_{i,1}$	σ_2	0,1 e 2,0	0,73	2

Fonte: Elaboração própria

Como consequência, os parâmetros resultantes do processo de calibragem são os dispostos na TABELA 2. Nela, é possível perceber que três dos seis parâmetros testados inicialmente permaneceram os mesmos: β , $\bar{c}$, e γ . Enquanto isso, os parâmetros ligados às duas variáveis aleatórias do modelo, nessa versão, apontam para uma economia com um estágio inicial mais desigual, e com choques de habilidade ao longo do período também mais desiguais, o que tendem a gerar oscilações mais bruscas nas variáveis distributivas ao longo do período. Finalmente, vale chamar atenção para o fato de que o parâmetro qualidade da educação pública, λ , foi definido como sendo pouco mais de 50% do parâmetro de qualidade da educação privada, o que, por um lado, leva a uma tendência de maiores desigualdades, mas por outro, atenua o impacto do efeito *crowding-out* mencionado na equação (35).

Uma vez definidos os parâmetros, o próximo passo é verificar em quanto tempo o coeficiente de Gini da economia converge para o valor dentro da tolerância, o qual se manteve idêntico ao utilizado anteriormente, de 0,01. Já no terceiro período, alcançou-se um valor do Índice de Gini dentro dos valores de tolerância considerados, o de 0,4988. A partir daí, foi possível analisar a dinâmica da economia para diferentes parâmetros de política distributiva.

GRÁFICO 14 – DISTRIBUIÇÃO DE $\delta_{i,3}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO

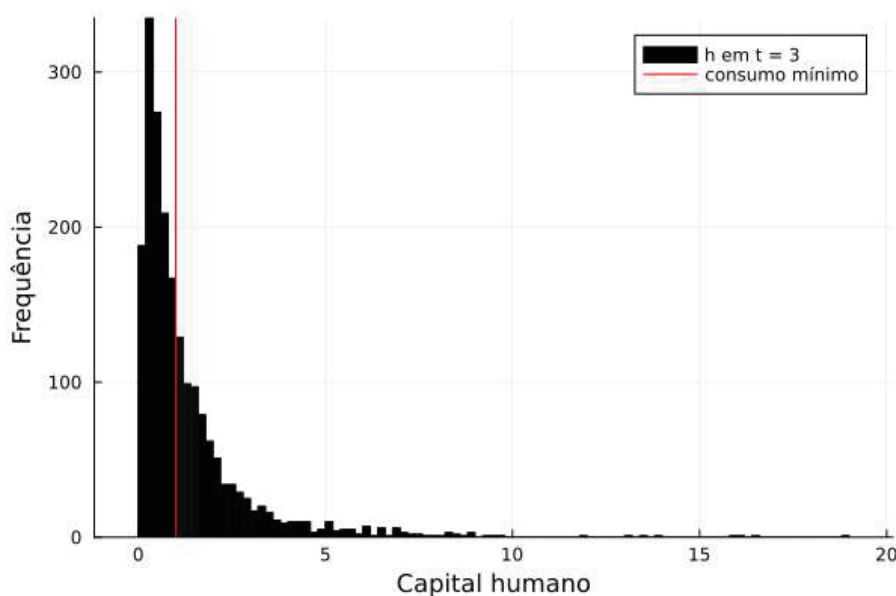


FONTE: Elaboração própria

O GRÁFICO 14 mostra a distribuição de frequência do choque provocado por δ no último período da fase de treino, ou seja, em $t = 3$. Uma comparação com o GRÁFICO 2 revela que, nessa versão do modelo, a incidência dos choques se dá em um padrão bem diferente dos

capítulos anteriores, com uma distribuição bem mais concentrada em valores mais baixos, característica de variáveis aleatórias de distribuição lognormal com variâncias maiores.

GRÁFICO 15 – DISTRIBUIÇÃO DE $h_{i,3}$, PRIMEIRO PERÍODO DE SIMULAÇÃO



FONTE: Elaboração própria

Da mesma forma, a distribuição de capital humano do último período da fase de treino, presente no GRÁFICO 15, mostra uma distribuição de capital humano ligeiramente mais concentrada do que o GRÁFICO 3, que representa a distribuição inicial das simulações anteriores. Apesar de menos pronunciada, a diferença entre as duas distribuições também aponta para o mesmo lado: as simulações neste capítulo partem de um cenário de capital humano é mais concentrado.

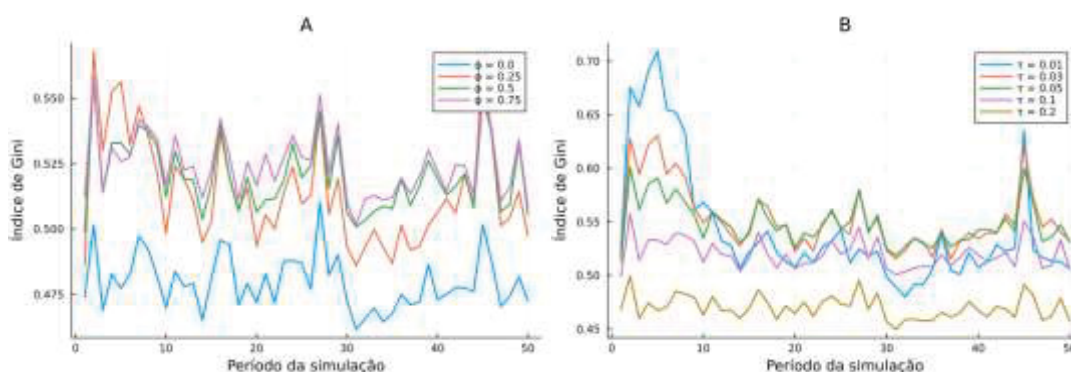
3.4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Essa seção se dedica a estudar a dinâmica do modelo descrito nas seções anteriores, tanto no que diz respeito à capacidade do modelo em produzir simulações numéricas estáveis, quanto no efeito da política de educação pública. Levando em conta as limitações encontradas no processo de calibragem mencionadas na seção anterior – mais especificamente a impossibilidade de que o modelo fosse calibrado usando tanto o Índice de Gini quanto a taxa de pobreza como referência – os resultados apresentados aqui serão analisados sob a ótica do desempenho e capacidade explicativa do modelo, ao invés da tentativa de extrair algum entendimento sobre os fenômenos econômicos aqui tratados.

Assim como nos capítulos anteriores, foi mantido o princípio: a simulação numérica consiste em rodar o modelo por mais 50 períodos a partir do ponto no qual ele converge para dentro dos valores de tolerância no processo de calibragem. A partir daí, para cada combinação de ϕ e τ , se calcula o equilíbrio para cada período, armazenando algumas variáveis de interesse da economia ao longo do tempo.

O GRÁFICO 16 apresenta o coeficiente de Gini da economia para diferentes valores de ϕ (painel A) e τ (painel B). Para ϕ , foram escolhidos os valores de 0%, 25%, 50%, e 75%, que representam os valores do percentual do orçamento do Governo destinado a financiar a educação pública em relação à política de transferências, enquanto se mantinha fixo o valor de 10% para τ . Paralelamente, o GRÁFICO 16B considerou os valores de 1%, 3%, 5%, 10%, e 20% para τ , mantendo ϕ fixo em 50%.

GRÁFICO 16 – ÍNDICES DE GINI DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE ϕ (A) E τ (B)



FONTE: Elaboração própria

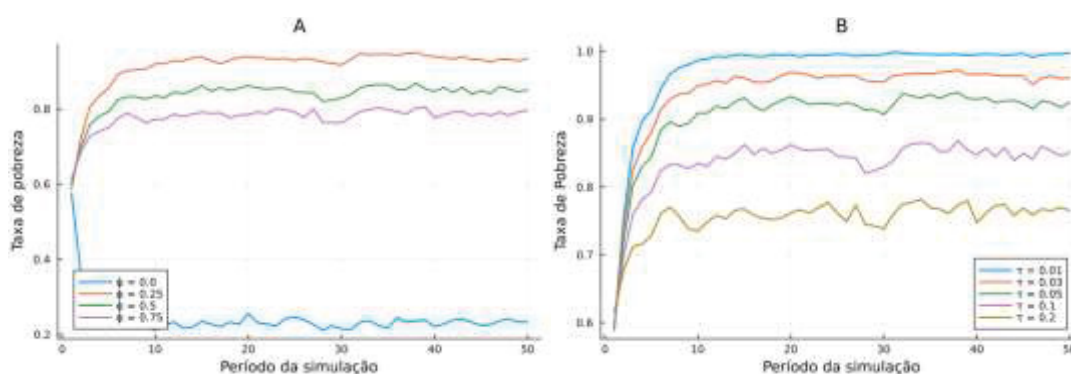
É possível perceber alguns pontos importantes a partir da observação dos dois gráficos. A primeira delas é o comportamento mais volátil dos índices em relação às simulações feitas nos capítulos anteriores, o que pode ser fruto do aumento da variância da variável aleatória $\delta_{i,t}$, responsável pelos choques causados pelo surgimento de cada geração nova de indivíduos.

Também chama atenção o fato de que não há tendência clara de crescimento ou decréscimo do Gini, independente de alterações nos parâmetros de política. Por mais que essas alterações levem a deslocamento das séries para cima ou para baixo, esses deslocamentos não são mudam a trajetória de longo prazo dos índices de Gini das simulações, que tendem a permanecer flutuando em torno da média.

Em relação aos efeitos dos parâmetros de política, nota-se no painel B, que, assim como no Capítulo 2, aumentos de τ produziram, no geral, valores menores para o índice de Gini, indicando o potencial progressivo das políticas distributivas na economia. Isso não é verdade, no entanto, quando se analisa exclusivamente o papel da educação pública: no painel A, é possível perceber que aumentos no gasto público em educação em detrimento das transferências leva a trajetórias mais desiguais na distribuição de renda.

No entanto, como mencionado anteriormente, é necessário ter cautela ao interpretar os resultados, pois, como a observação das demais variáveis de interesse revela, fica nítido que o método numérico empregado no processo de calibragem do modelo considerando apenas o índice de Gini não foi adequado para produzir uma simulação realista da economia, livre de trajetórias explosivas. O primeiro indício disso se apresenta com a análise do GRÁFICO 17, que apresenta a taxa de pobreza da economia, para diferentes valores de ϕ e τ .

GRÁFICO 17 – TAXA DE POBREZA DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE ϕ (A) E τ (B)



FONTE: Elaboração própria

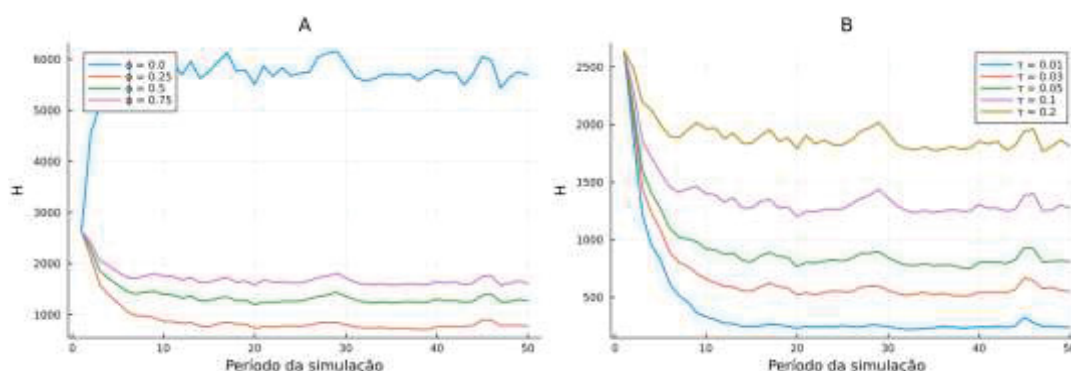
No gráfico, fica nítido como a impossibilidade de se calibrar o modelo fazendo uso apenas do índice de Gini como referência afeta o desempenho do modelo. É possível ver que, com exceção da trajetória em que $\phi = 0$, no painel A – equivalente ao cenário em que não há gasto em educação pública –, a taxa de pobreza assume valores em torno de 80% ainda nos primeiros períodos de simulação, fenômeno que não foi observado nos capítulos anteriores.

No geral, o que se observa em relação a ϕ é uma relação inversa entre o percentual direcionado à educação pública e a taxa de pobreza, exceto pelo fato de a trajetória que apresenta $\phi = 0$ é aquela na qual a pobreza é a menor possível. E repetindo a tendência já observada anteriormente, maiores valores de τ aparecem associados a menores taxas de

pobreza, mas mesmo a menor taxa é alta demais para os padrões observados nos capítulos anteriores, nos quais o processo de calibragem foi bem-sucedido com duas variáveis.

Também se observam comportamentos explosivos em relação ao estoque de capital humano: não foi possível obter uma simulação que apresentassem resultados factíveis, de modo que se torna impossível analisar o impacto da política de educação pública no modelo. O GRÁFICO 18 ilustra esse problema: mais uma vez, com exceção da trajetória sem educação pública, representada por $\varphi = 0$, todas as trajetórias do estoque de capital humano apontam para quedas abruptas nos primeiros períodos, reflexo das taxas de pobreza demasiadamente altas.

GRÁFICO 18 – ESTOQUE DE CAPITAL HUMANO DO MODELO, PARA DIFERENTES VALORES DE φ (A) e τ (B)



FONTE: Elaboração própria

Seguindo uma tendência similar ao observado nas taxas de pobreza, maiores valores de φ e τ estão associados a trajetórias de maior estoque agregado de capital humano, ainda que estes resultados sejam de pouca relevância diante do fato de que o modelo foi pouco capaz de representar resultados críveis para o período de simulação numérica.

A impossibilidade de o processo de calibragem deste trabalho encontrar um vetor de parâmetros capaz de fazer convergir para valores de interesse tanto o índice de Gini quanto a taxa de pobreza fez com que apenas a primeira variável fosse utilizada no processo. E a consequência dessa decisão foi o fato de, mesmo com uma trajetória estável do índice de desigualdade de renda, as demais variáveis de interesse do modelo apresentaram trajetórias explosivas, e/ou valores irrealistas, o que tornou impossível a tarefa de descrever os efeitos da política de educação pública de forma satisfatória.

Levando em conta essas limitações, se revela a necessidade de formular hipóteses que apontem caminhos para entender as causas dos problemas encontrados neste capítulo. Essas hipóteses podem ajudar no avanço da agenda de pesquisa em trabalhos futuros que busquem dar continuidade às discussões de distribuição de renda em modelos de crescimento.

3.5 CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS FUTUROS DE PESQUISA

Conforme foi explicitado ao longo do capítulo, a dificuldade de utilizar a taxa de pobreza aliada ao índice de Gini como referência durante o processo de calibragem fez com que os resultados das simulações numéricas não apresentassem resultados próximos da realidade.

Em comparação aos capítulos anteriores, ainda há um caminho mais longo a ser percorrido no que diz respeito à modelagem e simulação da política de financiamento da educação pública, e alguns caminhos possíveis podem ser a chave para que projetos futuros voltados a essa linha de pesquisa gerem resultados mais frutíferos. E para pensar nesses caminhos, pode-se considerar algumas hipóteses que tentem explicar essas limitações.

A primeira hipótese diz respeito à função de acumulação de capital humano. Uma das consequências do formato da função de acumulação de capital humano, contando tanto com gastos privados quanto com gastos públicos em educação levou com que os gastos privados tendessem a cair, gerando uma espécie de efeito *crowding out*. Esse desincentivo aos gastos privados pode estar por trás das altas da taxa de pobreza do modelo, e à dificuldade de fazê-la convergir, junto com o coeficiente de Gini, aos valores de referência.

Outra possibilidade é a de que a escolha das variáveis de ajuste não tenha sido adequada. Apesar de o processo de calibragem ter sido bem-sucedido nos capítulos anteriores, não se pode descartar a hipótese de que, sob o cenário diferente deste capítulo, a escolha das mesmas variáveis de referência tenha sido inadequada. Para investigar essa possibilidade, seria necessário testar outros índices que pudessem ser extraídos ao longo do período de simulação.

Mais uma possível causa pode estar relacionada aos valores iniciais de τ e ϕ escolhidos para iniciar o processo de calibragem, que poderiam ter sido insuficientes. A fase de simulação numérica apresentou os resultados para diferentes valores do índice de Gini, taxa de pobreza e estoque acumulado da economia para diferentes combinações dos parâmetros de política pública, mas não se pode descartar a possibilidade de que a economia só atingisse valores da taxa de pobreza dentro da tolerância se a economia estivesse submetida a valores mais altos de

τ por exemplo. No entanto, se essa possibilidade se demonstrar verdadeira, o fato de a taxa de pobreza da economia só atingir valores dentro da tolerância diante de um imposto muito alto, isso não deixa de ser um ponto de fragilidade do modelo, que deveria ser discutido.

Afinal, o custo computacional de se implementar testes sobre o modelo fez com que não fosse possível investigar todas as possíveis saídas para o problema de convergência encontrado ao longo do capítulo, uma vez que cada tentativa de reproduzir o *loop* de teste dos parâmetros consumia uma quantidade considerável de tempo. Com isso, passos futuros da agenda de pesquisa conduzida por este trabalho seriam beneficiados por melhorias na eficiência computacional do algoritmo, como foi discutido ao final do capítulo 1.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho se dedicou a estudar o tema da distribuição individual de renda, fazendo uso de um modelo de gerações sobrepostas com agentes heterogêneos. A escolha de abordagem metodológica foi feita não só motivada pela lacuna no que diz respeito à produção nacional de trabalhos sobre distribuição de renda em modelos de crescimento, mas também porque essa abordagem permite a discussão acerca de um tema fundamental para o Brasil que é a persistência da desigualdade de renda entre gerações.

À medida em que o Brasil segue no ranking dos países com maiores índices de desigualdade, o tema da distribuição de renda se mantém relevante, de modo que pesquisas voltadas a estudar as dinâmicas distributivas no país também tem sua importância justificada. Levando em conta a lacuna na literatura brasileira acerca do tema, este trabalho se dedicou a apresentar uma tentativa de adaptar o modelo de gerações sobrepostas à realidade brasileira, não com o objetivo de oferecer conclusões definitivas, mas com o de ajudar na construção de um marco teórico sobre distribuição de renda, levantando um debate sobre modelagens dedicadas a discutir a temática em modelos com agentes heterogêneos.

O primeiro capítulo apresenta as principais características do modelo numa economia sem governo, para que sejam analisadas como se dão as dinâmicas distributivas da economia antes de intervenções de políticas públicas. No capítulo, também é detalhado o processo pelo qual se dá a escolha dos parâmetros e a fase de treino para preparar o modelo para as simulações. As simulações, por sua vez, apresentam um cenário que serve como base de comparação para os capítulos seguintes, em especial o segundo, que usa o mesmo vetor de parâmetros em suas simulações.

Na sequência, o segundo capítulo adiciona a primeira política a ser analisada no modelo: a de transferências de renda. Ao longo do capítulo, em especial na seção de resultados, é possível ver como a distribuição de renda provoca um crescimento no estoque agregado de capital humano da economia, uma vez que os rendimentos marginais decrescentes da função de acumulação de capital humano levam a um cenário no qual as transferências direcionam recursos para as famílias de menor renda, com um retorno marginal superior.

O terceiro capítulo conta com uma versão do modelo na qual o governo equilibra seu orçamento entre transferências de renda – nos mesmos moldes do capítulo 2 – e financiamento à educação pública, considerada, por hipótese, menos eficiente que a privada, e que entra no modelo a partir de sua inclusão na função de acumulação de capital humano, que passa a contar

com os dois tipos de gasto em educação. A inclusão de uma nova variável e um novo parâmetro fez com que fosse necessário retornar ao processo de calibragem do modelo, mas o processo não foi capaz de encontrar uma combinação de parâmetros capaz de satisfazer as condições definidas ao longo do capítulo 1.

Ao retornar ao processo de calibragem, em sua versão simplificada, o trabalho encontrou seu maior gargalo: o processo de calibragem, apesar de gerar um valor do índice de Gini próximo aos dados brasileiros produziu uma economia na qual aproximadamente 80% das famílias não eram capazes de satisfazer a restrição de consumo mínimo, o que diminuiu a interpretabilidade dos resultados do capítulo. No entanto, é possível captar uma lição a partir desse gargalo, que é sobre a importância de se considerar no processo de calibragem duas variáveis de referência ao invés de apenas uma.

Apesar de a limitação mais relevante ser aquela encontrada no capítulo 3, ao longo deste trabalho foram encontrados outros pontos que apontam para lacunas de pesquisa a serem exploradas futuramente, entre elas: a necessidade de incluir a acumulação de capital físico na função de produção, a introdução de choques de produtividade, e otimizações no processo de calibragem, para que seja possível aumentar o número de indivíduos ou períodos na economia.

Ainda que o fato de o modelo não contar com acumulação de capital físico não permita que sejam tiradas conclusões definitivas acerca da relação entre transferências, distribuição de renda e crescimento, a mensagem que fica é otimista: melhoras na distribuição de renda possuem o potencial de gerarem benefícios agregados positivos, corroborando o modelo de Galor e Moav (2004). Espera-se, inclusive, que esses ganhos sejam mais pronunciados em setores da economia que contem mais com capital humano em seu processo produtivo (Erman e te Kaat, 2019), ainda que estudos empíricos sobre o Brasil, como o de Silva (2020) indiquem que, em sua condição de país em desenvolvimento, ainda há evidências de que aumentos na desigualdade levem a crescimentos na renda per capita da economia.

Seguindo essa lógica, é possível que uma política de redução de desigualdades em um país em desenvolvimento como o Brasil, se não acompanhada de políticas focadas em aumentar a intensidade de capital humano no processo produtivo, poderia não ter resultados tão promissores do ponto de vista do crescimento econômico. No entanto, considerando as já mencionadas limitações associadas às hipóteses simplificadoras adotadas ao longo deste trabalho, essa discussão é mais uma pergunta de pesquisa que poderia ser abordada em trabalhos futuros decorrentes das contribuições deste.

Da mesma forma, a política de tributação introduzida no capítulo 2 utilizava uma alíquota idêntica para todas as famílias, independentemente de sua renda. Levando em conta o escopo de análise deste trabalho, não era objetivo discutir como diferentes níveis de tributação – fossem eles propostas de tributações progressivas, ou tentativas de reproduzir modelos de tributação regressivos – impactariam a distribuição de renda, mas estudos futuros voltados a este fim poderiam aproveitar o arcabouço montado aqui para adentrar nessa discussão, a partir do aumento do número de famílias, e de um processo de calibragem mais sofisticado, voltado a emular a parcela da renda de cada faixa da distribuição, por exemplo.

A partir dessas reflexões sobre perguntas de pesquisa que poderiam ser respondidas por derivações do modelo apresentado aqui, é possível dizer que a maior contribuição deste trabalho está na construção de uma ferramenta analítica que adapta modelos de crescimento voltados a outros países para o caso brasileiro, caracterizado especialmente pela restrição de consumo mínimo. Ainda que sujeita a limitações, essa ferramenta pode ser aperfeiçoada a fim de dar conta de debater efeitos de longo prazo de políticas distributivas conduzidas à luz da teoria econômica.

Além das contribuições relacionadas à abertura de outras temáticas de pesquisa, o algoritmo em duas etapas utilizado no processo de calibragem, elaborado com o intuito de encontrar os parâmetros que melhor se ajustam ao modelo, tendo em vista sua capacidade de gerar condições adequadas para a fase de simulação, é outra contribuição importante deste trabalho. Ao passo que o código adjacente ao processo está disponibilizado de forma integral e aberta, ele pode ser consultado e tomado de base para resolução do problema do valor inicial em outros modelos semelhantes, sendo ajustado de acordo com cada necessidade de pesquisa.

Enquanto as contribuições derivadas dos resultados gerados na fase de simulação numérica – em especial as apresentadas no segundo capítulo – terem efeito imediato levando em conta seu valor analítico, as contribuições deste trabalho enquanto parte da literatura sobre modelos de crescimento com agentes heterogêneos tem potencial para se tornarem mais relevantes à medida em que mais estudos com essa temática forem desenvolvidos. Nesse sentido, fica evidente a contribuição do trabalho enquanto parte de uma agenda de pesquisa que se constrói em torno da tentativa de qualificar o debate sobre a relação entre políticas públicas, distribuição de renda, no escopo de teorias de crescimento econômico, especialmente voltadas ao Brasil.

Por fim, percebe-se que para os fins aos quais este trabalho foi desenvolvido, é possível afirmar que os principais objetivos foram parcial ou totalmente alcançados. Em relação ao objetivo de adaptação dos modelos de crescimento com agentes heterogêneos para o caso brasileiro, o trabalho representou esta adaptação não só pelo uso de variáveis macroeconômicas brasileiras no processo de calibragem, como também pela adição da restrição de consumo mínimo. No que diz respeito à análise das políticas de transferências de renda e educação pública, a primeira foi analisada integralmente, por meio de simulações numéricas, enquanto a segunda foi analisada parcialmente, levando em conta os desafios encontrados ao longo do caminho.

O tema da distribuição de renda segue relevante no Brasil, tanto no que diz respeito às questões políticas em torno do tema, quanto em relação ao combate às desigualdades como estratégia para promover o desenvolvimento econômico. Na medida em que mais esforços são empregados na condução de debates em torno do tema, e na construção de políticas públicas, é fundamental contar com o apoio da teoria econômica e de achados empíricos para qualificar essas discussões. Dentro desse contexto, o papel da agenda de pesquisa relacionada à distribuição de renda na economia, em todas as suas frentes, seguirá sendo de enorme relevância.

REFERÊNCIAS

ARELLANO, M.; BOND, S. Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. **The review of economic studies**, v. 58, n. 2, p. 277-297, 1991.

Atkinson, A., Trinder, C., Maynard, A., Corlyon, J., Jenkins, S. P., & Sutherland, H. (1993). **Parents and children: Incomes in two generations**. Heinemann, 1993.

ATKINSON, A. **Desigualdade: O que pode ser feito?**. São Paulo: Editora Companhia das Letras, 2018.

AVRITZER, J. D., FREITAS, F. N., & de MEDEIROS BRAGA, J. Crescimento e a Distribuição Funcional da Renda no Brasil entre 1952 e 2011. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, 58, 3, 2008.

DE BARROS, R. P.; DE CARVALHO, M.; FRANCO, S. O papel das transferências públicas na queda recente da desigualdade de renda brasileira. **Desigualdade de renda no Brasil: uma análise da queda recente**, v. 2, p. 41-86, 2007.

BECKER, G.; TOMES, N. Human capital and the rise and fall of families. **Journal of labor economics**, v. 4, n. 3, Part 2, p. S1-S39, 1986.

BEHRMAN, J.; TAUBMAN, P. Intergenerational transmission of income and wealth. **The American Economic Review**, v. 66, n. 2, p. 436-440, 1976.

Black, S. E., Devereux, P. J., Lundborg, P., & Majlesi, K. Poor little rich kids? The determinants of the intergenerational transmission of wealth. Cambridge, MA, USA: National Bureau of Economic Research, 2015.

BRAMBILLA, M. A.; CUNHA, M. S. Pobreza multidimensional no Brasil, 1991, 2000 e 2010: uma abordagem espacial para os municípios brasileiros. **Nova Economia**, v. 31, p. 869-898, 2022.

BRASIL. Secretaria-Geral da Presidência da República. RNV 2024 - Relatório Nacional Voluntário. Brasília: **Presidência da República**, 2024.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 22 nov.

2018. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file>. Acessado em março de 2024.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística básica**. 6a edição. São Paulo: Saraiva, p. 200, 2010.

CASELLI, F., & VENTURA, J. A representative consumer theory of distribution. **American Economic Review**, 90(4), 909-926, 2000.

CHATTERJEE, S. Transitional dynamics and the distribution of wealth in a neoclassical growth model. **Journal of Public Economics**, 54(1), 97-119, 1994.

CHE SULAIMAN, N. F.; SAPUTRA, J.; MUHAMAD, S. Effects of human capital and innovation on economic growth in selected ASEAN countries: Evidence from panel regression approach. **The Journal of Asian Finance, Economics and Business**, v. 8, n. 7, p. 43-54, 2021.

CROIX, D. D. L., & LURBANO, M. The trade-off between growth and redistribution: ELIE in an overlapping generations model. In *On Kolm's Theory of Macrojustice: A Pluridisciplinary Forum of Exchange* (pp. 305-337). Berlin, Heidelberg: **Springer Berlin Heidelberg**, 2010.

CURI, A. Z.; MENEZES-FILHO, N. A. . Determinantes dos gastos com educação no Brasil, 2010.

EICHER, T. S., & GARCÍA-PEÑALOSA, C. Inequality and growth: the dual role of human capital in development. **Journal of Development Economics**, 66(1), 173-197, 2001.

ERMAN, L.; TE KAAT, D. M. Inequality and growth: industry-level evidence. **Journal of Economic Growth**, v. 24, n. 3, p. 283-308, 2019.

FERREIRA, S. G., & VELOSO, F. A. Mobilidade intergeracional de educação no Brasil. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, v 33, n 3, 2003.

FERREIRA GUSMÃO, F. A. Análise do ensino médio brasileiro com base em indicadores educacionais. *Roteiro*, 48, 2023.

FUNDO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A INFÂNCIA (UNICEF). Objetivos de Desenvolvimento Sustentável. Disponível em: <https://www.unicef.org/brazil/objetivos-de-desenvolvimento-sustentavel>. Acesso em Fevereiro de 2025

GARCÍA-PENALOSA, C., & TURNOVSKY, S. J. Income inequality, mobility, and the accumulation of capital. **Macroeconomic Dynamics**, 19(6), 1332-1357, 2015.

GALOR, O., MOAV, O. From physical to human capital accumulation: Inequality and the process of development. **The Review of Economic Studies**, 71(4), 1001-1026, 2004.

GOMES, J. W. F., BEZERRA, A. R., & PEREIRA, R. Efeitos macroeconômicos e redistributivos de políticas fiscais no Brasil. ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 43, 2015.

HASPARYK, Rebecca Gramiscelli; RIBEIRO, Rafael Saulo Marques; BOTTEGA, Ana. Mind the wage gap: an empirical analysis of the impact of labour income inequality on economic growth. **Review of Keynesian Economics**, v. 11, n. 1, p. 10-30, 2023.

DE HOLANDA BARBOSA, A. L. N., MACHADO, D. C., PASSOS, L., & DOS SANTOS, L. A. O consumo das famílias brasileiras: um olhar de gênero e raça. **Sociedade Brasileira de Economia Política**, 15(05), 2023.

HOFFMANN, R. Transferências de renda e a redução da desigualdade no Brasil e cinco regiões entre 1997 e 2004. **Revista Econômica**, v. 8, n. 1, 2006.

HOFFMAN, R. Desigualdade da distribuição da renda no Brasil: a contribuição de aposentadorias e pensões e de outras parcelas do rendimento domiciliar per capita, 2009.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios - PNAD: microdados. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9127-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios.html?=&t=microdados>. Acesso em: abr. 2023.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios - PNAD Contínua: microdados. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9171-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios-continua-mensal.html?=&t=microdados>. Acesso em: abr. 2023.

INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA APLICADA (IPEA).Brasil. Disponível em: <http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx>.

JUNIOR, N.; DE BRITO RAMALHO, H. M.; DA SILVA, E. K. Transmissão intergeracional de educação e mobilidade de renda no Brasil. **Revista Economia e Desenvolvimento**, v. 12, n. 2, p. 11-23, 2013.

KUZNETS, S. Economic growth and income inequality. **The American economic review**, v. 45, n. 1, p. 1-28, 1995.

LIMA, G. T., CARVALHO, L., & SERRA, G. P. Human capital accumulation, income distribution, and economic growth: A demand-led analytical framework. **Review of Keynesian Economics**, 9(3), 319-336, 2011.

LJUNGQVIST, L.; SARGENT, T. J. Recursive macroeconomic theory. **MIT press**, 2018.

MACHADO, G. S., JÚNIOR, R. D. G. E., & PAES, N. L. Impacto de longo prazo do aumento da idade de aposentadoria utilizando um modelo de gerações sobrepostas. **Revista Brasileira de Economia de Empresas**, 20(2), 2020.

MAHLMEISTER, R. et al. Revisitando a mobilidade intergeracional de educação no Brasil. **Revista Brasileira de Economia**, v. 73, n. 2, p. 159-180, 2019.

MALIAR, L., MALIAR, S., & MORA, J. Income and wealth distributions along the business cycle: Implications from the neoclassical growth model. **Topics in Macroeconomics**, 5, 2005.

MIRANDA, Mario J.; FACKLER, Paul L. Applied computational economics and finance. MIT press, 2004.

MINCER, J. Schooling, Experience, and Earnings. **Human Behavior & Social Institutions** No. 2, 1974.

MORENO, M. H. B.; PONTILI, R. M. Investimento Familiar em Capital Humano: Evidências Para Filhos Aptos a Cursar a Educação Básica, **Encontro Nacional da Associação Brasileira de Estudos Regionais e Urbano**, 2022.

NERI, M.; SOUZA, P. H. C. F. A década inclusiva (2001-2011): desigualdade, pobreza e políticas de renda. **Comunicados do IPEA**, n. 155, 2012.

NERI, M. What are the main drivers of Brazilian income distribution changes in the new millennium?. **WIDER Working Paper**, 2018.

NOLAN, B. PALOMINO, J., VAN KERM, P., & MORELLY, S. The intergenerational transmission of wealth in rich countries. **VoxEU**, 2020.

NONATO, Rogério; RANGEL, Wesley. Xibom Bombom. In.: MENINAS, As. **Xibom Bombom**. Universal Music Ltda. Rio de Janeiro, 1999

PEÑA, C. R., PINHEIRO, D. S., ALBUQUERQUE, P. H., FERNANDES, L. M. A eficácia das transferências de renda: as tendências da desigualdade antes e depois do Programa Bolsa Família. **Revista de Administração Pública**, 49, 889-914, 2015.

RAMSEY, F. P. A mathematical theory of saving. **The economic journal**, 38(152), 543-559, 1928.

RESTUCCIA, D.; URRUTIA, C. Intergenerational persistence of earnings: The role of early and college education. **American Economic Review**, v. 94, n. 5, p. 1354-1378, 2004.

ROCHA, I. C. Investimento endógeno em capital humano em um modelo de gerações sobrepostas com restrição de crédito e consumo mínimo, 2015.

ROMER, P. Human capital and growth: Theory and evidence, 1989.

SABOIA, J.; HALLAK NETO, J. Salário mínimo e distribuição de renda no Brasil a partir dos anos 2000. **Economia e Sociedade**, v. 27, p. 265-285, 2018.

SAMPAIO, G. T. C., & de OLIVEIRA, R. L. P. Dimensões da desigualdade educacional no Brasil. **Revista Brasileira de Política e Administração da Educação**, 31(3), 511-530, 2015.

SANTOS, J. F. C., & OREIRO, J. L. The Term Structure of Interest Rate and Income Distribution in an SFC Post-Keynesian Growth Model with Inflation Targeting and Zero Money Financing of Government Deficit, 2020.

SANTOS, J. F. C. Ensaio sobre crescimento, restrição ao balanço de pagamentos e distribuição de renda em abordagem Stock-Flow Consistent (SFC), 2017.

SANTOS, M. E. Human capital and the quality of education in a poverty trap model. *Oxford Development Studies*, 39(01), 25-47, 2011.

DOS SANTOS, I. A.; COSTA, L. V. Trabalho infantil no Brasil: Transmissão intergeracional e suas consequências sobre a pobreza atual dos domicílios. **XVI Encontro de Economia da Região Sul**, 2023.

SIGA BRASIL. Painel Cidadão – Bolsa família. Disponível em <https://www9.senado.gov.br/QvAJAXZfc/opendoc.htm?document=senado%2Fsigabrasilpain>

elcidadesao.qyw&host=QVS%40www9a&anonymous=true&Sheet=shOrcamentoVisaoGeral.

Acesso em: Junho de 2025

SILVA, M. E. A. . Does inequality benefit growth? New evidence using a panel VAR approach. **International Journal of Development Issues**, v. 19, n. 1, p. 63-76, 2020.

SOARES, F. V., SOARES, S. S. D., MEDEIROS, M., & OSÓRIO, R. G. Programas de transferência de renda no Brasil: impactos sobre a desigualdade, 2006.

SOARES, S., de SOUSA, P. H. G. F., OSÓRIO, R. G., & SILVEIRA, F. G. Os impactos do benefício do Programa Bolsa Família sobre a desigualdade e a pobreza. *Bolsa família*, 27-52, 2010.

de SOUZA, P. H., OSORIO, R. G., PAIVA, L. H., & SOARES, S. Os efeitos do Programa Bolsa Família sobre a pobreza e a desigualdade: um balanço dos primeiros quinze anos (No. 2499). Texto para discussão, 2019.

STAUVERMANN, P.; KUMAR, R. Adult learning, economic growth and the distribution of income. **Economies**, v. 6, n. 1, p. 11, 2018.

STIGLITZ, J. E. Distribution of income and wealth among individuals. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 382-397, 1969.

TONDANI, D. Universal basic income and negative income tax: Two different ways of thinking redistribution. **The Journal of Socio-Economics**, 38(2), 246-255, 2009.

VALÊNCIO, A., CARVALHO, L., OREIRO, J. L., & da SILVA, E. H. Crescimento, Distribuição de Renda e Utilização da Capacidade Produtiva num Modelo Pós-keynesiano com Consistência entre Estoques e Fluxos, 2018.

VERGNHANINI, R., & BIANCARELLI, A. M. Distribuição de renda, crescimento econômico e mudança estrutural na tradição do estruturalismo latino-americano: uma sistematização em quatro momentos. **Revista de Economia Contemporânea**, 24(01), e202412, 2020.

WORLD BANK. SI.POV.GINI: GINI Index. Disponível em: <https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.GINI>. Acesso em: 28 abr. 2023.

YANG, J., & QIU, M. The impact of education on income inequality and intergenerational mobility. **China Economic Review**, 37, 110-125, 2016.

APÊNDICE 1 – SCRIPT EM JULIA

```
# =====
# Preâmbulo: Pacotes e Configuração
# =====

using Random, Distributions, Statistics, StatsBase, Inequality, Plots,
Serialization

# =====
# 1. Definir Parâmetros e Configurações do Modelo
# =====

const n = 2000                # número de indivíduos
const T_warm = 30             # número de períodos de treino
const T_sim = 50              # número de períodos de simulação (após
treino)

T_total = T_warm + T_sim      # total de períodos a simular

# Parâmetros do modelo (ajuste conforme necessário)
τ = 0                        #Para a versão do modelo com governo, ajustar τ
φ = 0                        #Para a versão do modelo com governo e educação pública,
ajustar τ e φ
A = 1.00                     #Para fins de simplificação, essa igualdade será mantida até
o final

# Parâmetros para distribuições iniciais
μ1 = 0.0                   # média para δ
μ2 = 0.0                   # média para capital humano inicial h[:,1]

# Momento-alvo para calibração: definir valor alvo (ex: coeficiente de Gini
da base de dados)
target_gini = 0.50083 # coeficiente de Gini da renda do trabalho em 2023
gini_tolerance = 0.01 # diferença aceitável entre Gini simulado e alvo

target_poverty_rate = 0.274 # taxa de pobreza em 2023
poverty_tolerance = 0.01 # diferença aceitável entre taxa de pobreza simulada
e alvo

# =====
```

```

# 2. Inicializar Variáveis de Estado
# =====

# Usamos matrizes com T_total colunas para lidar tanto com o treino quanto
com a simulação principal.
h = zeros(n, T_total) # capital humano dos indivíduos (variável de estado)
c = zeros(n, T_total) # consumo
e = zeros(n, T_total) # gasto com educação
c_ot = zeros(n, T_total) # consumo
e_ot = zeros(n, T_total) # gasto com educação

# =====

# 3. Definir a Função de Simulação por Período
# =====
"""
simulate_period!(h, c, e, c_ot, e_ot, cmin, t, T_total,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ , A,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,
 $\lambda$ )

Simula o período t do modelo e atualiza o estado:
- Usa a taxa salarial A e calcula um termo de transferência Tr com base no
capital humano agregado H.
- Calcula o consumo e gasto educacional ótimo para cada indivíduo.
- Atualiza o capital humano para t+1 (se t < T_total).
"""

function simulate_period!(h, c, e, c_ot, e_ot, cmin, t, T_total,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ ,
A,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ )
    # Capital humano agregado em t
    H_t = sum(h[:, t])

    # Calcula o termo de transferência e de gasto público em educação conforme
a lógica do modelo
    budget = ( $\tau$  / n) * A * H_t
    Tr = (1- $\varphi$ )*budget
    d =  $\varphi$ *budget

    for i in 1:n
        # Renda do indivíduo i no período t

```

```

income = (1 -  $\tau$ ) * A * h[i, t] + Tr

# Consumo e educação ótimos conforme equações (5) e (4):
c_ot[i, t] = income / (1 +  $\beta$  *  $\rho$ )
e_ot[i, t] =  $\beta$  *  $\rho$  * income / (1 +  $\beta$  *  $\rho$ )

# Condições de mínimo
if income < cmin
    c[i, t] = income
    e[i, t] = 0
elseif c_ot[i, t] < cmin
    c[i, t] = cmin
    e[i, t] = income - cmin
else
    c[i, t] = c_ot[i, t]
    e[i, t] = e_ot[i, t]
end

if  $\varphi$  == 0 #condição referente aos capítulos 1 e 2
    # Atualiza capital humano do próximo período conforme a equação
(8):
    if t < T_total
        if e[i, t] > 0
            h[i, t + 1] = (e[i, t]) $\rho$  *  $\delta$ [i, t + 1] *  $\gamma$ 
        else
            h[i, t + 1] =  $\delta$ [i, t + 1]
        end
    end
else #condição referente ao capítulo 3
    # Atualiza capital humano do próximo período conforme a equação
(31):
    if t < T_total
        h[i, t + 1] = (  $\gamma$ *e[i, t] +  $\lambda$ *d/n) $\rho$  *  $\delta$ [i, t + 1]
    end
end
end

```

```

        end
    end

    # =====
    # 4.1. Grade de Parâmetros: Encontrar combinação que melhor se ajusta ao
    modelo
    # =====

    # Definir grades de busca
    betas = range(0.2, 0.8, length=10)
    rhos = range(0.1, 0.9, length=10)
    gammas = range(1.5, 2.5, length=10)
    lambdas = range(1.0, 2.0, length=10)
    sigmas1 = range(0.1, 2.0, length=10)
    sigmas2 = range(0.1, 2.0, length=10)
    cmin_grid = range(1.0, 5.0, length=10)

    # Variáveis auxiliares para guardar os melhores resultados
    best_distance_gini = Inf
    best_distance_poverty = Inf
    best_total_distance = Inf
    best_distance = Inf
    best_beta = nothing
    best_rho = nothing
    best_gamma = nothing
    best_lambda = nothing
    best_sigma1 = nothing
    best_sigma2 = nothing

    best_params = nothing
    best_cmin_trial = nothing
    best_final_gini = nothing
    best_final_poverty = nothing
    h_trial = zeros(n, T_warm)

    # Loop de calibração

```

```

if  $\varphi == 0$       #Referente aos capítulos 1 e 2
  for cmin_trial in cmin_grid
    for  $\beta$ _trial in betas
      for  $\rho$ _trial in rhos
        for  $\gamma$ _trial in gammas
          for  $\sigma_1$ _trial in sigmas1
            for  $\sigma_2$ _trial in sigmas2

              Random.seed!(1995)
              h_trial[:,1] = rand(LogNormal( $\mu_2$ ,  $\sigma_2$ _trial), n)

              Random.seed!(1995)
               $\delta_1$ _trial = rand(LogNormal( $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ _trial), n,
T_warm)

              c = zeros(n, T_warm)
              e = zeros(n, T_warm)
              c_ot = zeros(n, T_warm)
              e_ot = zeros(n, T_warm)

              for t in 1:T_warm
                simulate_period!(h_trial, c, e, c_ot, e_ot,
cmin_trial, t, T_warm,  $\delta_1$ _trial,
 $\beta$ _trial,  $\tau$ ,  $\varphi$ , A,  $\rho$ _trial,
 $\gamma$ _trial,  $\lambda$ )
              end

              final_gini = Inequality.gini(h_trial[:, T_warm])
              income = (1 -  $\tau$ ) * A .* h_trial[:, T_warm]
              final_poverty_rate = count(income .< cmin_trial)

/ n

              gini_distance = abs(final_gini - target_gini)

```



```

println("Melhor  $\sigma_1$ : ", best_sigma1)
println("Melhor  $\sigma_2$ : ", best_sigma2)
println("Melhor cmin: ", best_cmin)
println("Gini obtido: ", best_final_gini)
println("Taxa de pobreza final = ", round(best_final_poverty * 100,
digits=2), "%")

# Salvar em arquivo
open("C:/caminho/best_params_2moments.jld", "w") do io
    serialize(io, (
        beta = best_beta,
        rho = best_rho,
        gamma = best_gamma,
        cmin = best_cmin,
        final_gini = best_final_gini,
        sigma1 = best_sigma1,
        sigma2 = best_sigma2,
        poverty = best_final_poverty
    ))
end
else
    println("Nenhum parâmetro adequado encontrado. Tente ajustar a grade
ou relaxar a tolerância.")
end

params = deserialize("C:/caminho/best_params_2moments.jld")

best_beta = params.beta
best_rho = params.rho
best_gamma = params.gamma
best_cmin = params.cmin
best_sigma1 = params.sigma1
best_sigma2 = params.sigma2

else      #Referente ao capítulo 3
    for  $\lambda_{\text{trial}}$  in lambdas

```

```

for  $\gamma_{\text{trial}}$  in gammas
    if  $\lambda_{\text{trial}} \geq \gamma_{\text{trial}}$ 
        continue
    else
        for  $\beta_{\text{trial}}$  in betas
            for  $\rho_{\text{trial}}$  in rhos
                for cmin_trial in cmin_grid
                    for  $\sigma_{1\text{trial}}$  in sigmas1
                        for  $\sigma_{2\text{trial}}$  in sigmas2

                            Random.seed!(1995)
                            h_trial[:,1] = rand(LogNormal( $\mu_2$ ,
 $\sigma_{2\text{trial}}$ ), n)

                            Random.seed!(1995)
                             $\delta_{1\text{trial}}$  = rand(LogNormal( $\mu_1$ ,  $\sigma_{1\text{trial}}$ ),
n, T_warm)

                            c = zeros(n, T_warm)
                            e = zeros(n, T_warm)
                            c_ot = zeros(n, T_warm)
                            e_ot = zeros(n, T_warm)

                            for t in 1:T_warm
                                simulate_period!(h_trial, c, e,
c_ot, e_ot, cmin_trial, t, T_warm,  $\delta_{1\text{trial}}$ ,
 $\beta_{\text{trial}}$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ , A,
 $\rho_{\text{trial}}$ ,  $\gamma_{\text{trial}}$ ,  $\lambda_{\text{trial}}$ )

                            end

                            income_trial = (1 -  $\tau$ ) * A .* h_trial[:,
T_warm] .+ (1 -  $\varphi$ ) * ( $\tau$  / n) * A * sum(h_trial[:, T_warm])

                            final_gini =
Inequality.gini(income_trial)

                            distance = abs(final_gini - target_gini)

```

```

# save best if closer
    if distance < best_distance
        best_distance = distance
        best_params = ( $\beta$ _trial,  $\rho$ _trial,
 $\gamma$ _trial,  $\sigma_1$ _trial,  $\sigma_2$ _trial,  $\lambda$ _trial)

        best_cmin_trial = cmin_trial
        best_final_gini = final_gini
    end
end
end
end
end
end
end
end

if best_params != nothing
    best_beta,    best_rho,    best_gamma,    best_sigma1,    best_sigma2,
best_lambda = best_params
    best_cmin = best_cmin_trial

    println("Melhor  $\beta$ : ", best_beta)
    println("Melhor  $\rho$ : ", best_rho)
    println("Melhor  $\gamma$ : ", best_gamma)
    println("Melhor  $\lambda$ : ", best_lambda)
    println("Melhor  $\sigma_1$ : ", best_sigma1)
    println("Melhor  $\sigma_2$ : ", best_sigma2)
    println("Melhor cmin: ", best_cmin)
    println("Gini obtido: ", best_final_gini)
    println("Taxa de Pobreza: ", best_final_poverty)

# Salvar em arquivo
open("C:/caminho/best_params_2moments_ch3-2_teste.jld", "w") do io

```

```

        serialize(io, (
            beta = best_beta,
            rho = best_rho,
            gamma = best_gamma,
            lambda = best_lambda,
            cmin = best_cmin,
            final_gini = best_final_gini,
            sigma1 = best_sigma1,
            sigma2 = best_sigma2,
            poverty = best_final_poverty
        ))
    end
else
    println("Nenhum parâmetro adequado encontrado. Tente ajustar a grade
ou relaxar a tolerância.")
end

loaded_params = deserialize("C:/caminho/best_params_2moments_ch3-
2_teste.jld")

best_beta = loaded_params.beta
best_rho = loaded_params.rho
best_gamma = loaded_params.gamma
best_lambda = loaded_params.lambda
best_cmin = loaded_params.cmin
best_sigma1 = loaded_params.sigma1
best_sigma2 = loaded_params.sigma2

end

# =====
# 4.2. Evitar inconsistências com variáveis aleatórias
# =====

"""

```

Nota: A primeira versão não separava a seção #4 em duas. Mas por algum motivo, existia uma inconsistência nas variáveis aleatórias.

Mesmo mantendo a seed igual, o comando gerava matrizes diferentes e eu nunca entendi bem o motivo.

A saída para isso foi dividir o script em duas partes:

4.1 faz o loop com todas as variáveis;

4.2 usa as variâncias encontradas na anterior, define as variáveis aleatórias a priori e refaz o loop;

Com isso, a inconsistência foi resolvida sem prejuízos maiores ao código.

```

"""
 $\sigma_1$  = best_sigma1
 $\sigma_2$  = best_sigma2

# Gerar os espaços para  $\delta$  e h
 $\delta$  = zeros(n, T_total)
h = zeros(n, T_total)

# Preencher  $\delta$  e h com números aleatórios conforme variância encontrada em 4.1
Random.seed!(1995)
 $\delta$  = rand(LogNormal( $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ), n, T_total)

Random.seed!(1995)
h[:, 1] = rand(LogNormal( $\mu_2$ ,  $\sigma_2$ ), n)

if  $\varphi == 0$       #Referente aos capítulos 1 e 2

    # Repetir simulação com  $\delta$  e h fixos
    for cmin_trial in cmin_grid
        for  $\beta$ _trial in betas
            for  $\rho$ _trial in rhos
                for  $\gamma$ _trial in gammas

                    c = zeros(n, T_warm)
                    e = zeros(n, T_warm)

```



```

end

if best_params != nothing
    best_beta, best_rho, best_gamma = best_params
    best_cmin = best_cmin_trial

    println("Melhor  $\beta$ : ", best_beta)
    println("Melhor  $\rho$ : ", best_rho)
    println("Melhor  $\gamma$ : ", best_gamma)
    println("Melhor  $\sigma_1$ : ", best_sigma1)
    println("Melhor  $\sigma_2$ : ", best_sigma2)
    println("Melhor cmin: ", best_cmin)
    println("Gini obtido: ", best_final_gini)
    println("Taxa de pobreza final = ", round(best_final_poverty * 100,
digits=2), "%")

    open("C:/caminho/best_params_teste__2moments_final.jld", "w") do io
        serialize(io, (
            beta = best_beta,
            rho = best_rho,
            gamma = best_gamma,
            cmin = best_cmin,
            final_gini = best_final_gini,
            sigma1 = best_sigma1,
            sigma2 = best_sigma2,
            poverty = best_final_poverty
        ))
    end
else
    println("Nenhum parâmetro adequado encontrado. Tente ajustar os
parâmetros ou aumentar T_warm.")
end

else #Referente ao capítulo 3

    for  $\lambda_{\text{trial}}$  in lambdas

```



```

for  $\gamma_{\text{trial}}$  in gammas
    if  $\lambda_{\text{trial}} \geq \gamma_{\text{trial}}$ 
        continue
    else
        for  $\beta_{\text{trial}}$  in betas
            for  $\rho_{\text{trial}}$  in rhos
                for cmin_trial in cmin_grid

                    c = zeros(n, T_warm)
                    e = zeros(n, T_warm)
                    c_ot = zeros(n, T_warm)
                    e_ot = zeros(n, T_warm)

                    for t in 1:T_warm
                        simulate_period!(h, c, e, c_ot, e_ot,
cmin_trial, t, T_warm,  $\delta$ ,
 $\gamma_{\text{trial}}$ ,  $\lambda_{\text{trial}}$ )
                         $\beta_{\text{trial}}$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ , A,  $\rho_{\text{trial}}$ ,
                    end

                    income_trial = (1 -  $\tau$ ) * A .* h[:, T_warm] .+ (1
-  $\varphi$ ) * ( $\tau$  / n) * A * sum(h[:, T_warm])

                    final_gini = Inequality.gini(income_trial)

                    distance = abs(final_gini - target_gini)

                    # save best if closer
                    if distance < best_distance
                        best_distance = distance
                        best_params = ( $\beta_{\text{trial}}$ ,  $\rho_{\text{trial}}$ ,  $\gamma_{\text{trial}}$ ,  $\sigma_1$ ,
 $\sigma_2$ ,  $\lambda_{\text{trial}}$ )
                        best_cmin_trial = cmin_trial
                        best_final_gini = final_gini
                    end
end

```

```

end
end
end
end
end
end

if best_params != nothing
    best_beta,    best_rho,    best_gamma,    best_sigma1,    best_sigma2,
best_lambda = best_params
    best_cmin = best_cmin_trial

    println("Melhor  $\beta$ : ", best_beta)
    println("Melhor  $\rho$ : ", best_rho)
    println("Melhor  $\gamma$ : ", best_gamma)
    println("Melhor  $\lambda$ : ", best_lambda)
    println("Melhor  $\sigma_1$ : ", best_sigma1)
    println("Melhor  $\sigma_2$ : ", best_sigma2)
    println("Melhor cmin: ", best_cmin)
    println("Gini obtido: ", best_final_gini)

    # Salvar em arquivo
    open("C:/caminho/best_params_2moments_ch3.2_final_teste.jld", "w")
do io

    #open("C:/caminho/best_params_2moments_ch3.2_final_teste.jld", "w")
do io

    serialize(io, (
        beta = best_beta,
        rho = best_rho,
        gamma = best_gamma,
        lambda = best_lambda,
        cmin = best_cmin,
        final_gini = best_final_gini,
        sigma1 = best_sigma1,

```

```

        sigma2 = best_sigma2,
        poverty = best_final_poverty
    ))
end
else
    println("Nenhum parâmetro adequado encontrado. Tente ajustar a grade
ou relaxar a tolerância.")
end
end

# =====
# 5. Fase de Treino: Rodar até encontrar os momentos-alvo
# =====

params = deserialize("C:/caminho/best_params_teste__2moments_final.jld")

β = params.beta
ρ = params.rho
γ = params.gamma
c_min = params.cmin
σ1 = params.sigma1
σ2 = params.sigma2

println("Rodando treino com:")
println("β = ", β)
println("ρ = ", ρ)
println("c_min = ", c_min)
println("σ1 = ", σ1)
println("σ2 = ", σ2)

if φ != 0      #Referente ao capítulo 3
    λ = params.lambda
    println("γ = ", γ)
end

```

```

c = zeros(n, T_total)
e = zeros(n, T_total)
c_ot = zeros(n, T_total)
e_ot = zeros(n, T_total)

h = zeros(n, T_total)
Random.seed!(1995)
h[:, 1] = rand(LogNormal( $\mu_2$ ,  $\sigma_2$ ), n)
 $\delta$  = rand(LogNormal( $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ), n, T_total)

println("==== Fase de Treino =====")
match_found = false
warmup_period = T_warm

for t in 1:T_warm
    simulate_period!(h, c, e, c_ot, e_ot, c_min, t, T_total,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ , A,
     $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ )
    current_gini = Inequality.gini(h[:, t])

    income = (1 -  $\tau$ ) * A .* h[:, t] .+ (1 -  $\varphi$ ) * ( $\tau$  / n) * A * sum(h[:, t])
    current_poverty = count(income .< c_min) / n

    println("Período de treino $t: Gini = $(round(current_gini, digits=8)),
    Pobreza = $(round(current_poverty, digits=8))")

    gini_distance = abs(current_gini - target_gini)
    poverty_distance = abs(current_poverty - target_poverty_rate)

    if gini_distance < gini_tolerance && poverty_distance < poverty_tolerance
        warmup_period = t
        println("Gini e Pobreza atingidos no período de treino $t.")
        match_found = true
        break
    end
end
end

```

```

    if !match_found
        println("Alvos não atingidos no treino. Tente ajustar os parâmetros ou
aumentar T_warm.")
    end

# =====
# 6. Simulação Principal: Continuar a partir do Fim do Treino
# =====

taus = (0.0, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.2)
phis = (0.0, 0.25, 0.5, 0.75)

resultados_dict = Dict{Tuple{Float64, Float64}, Dict}()

# Novas séries para renda
pre_tax_income_series = zeros(n, T_sim)
post_tax_income_series = zeros(n, T_sim)

# Usar o último período do treino como ponto de partida
T_total = warmup_period + T_sim

# Início da simulação

for  $\varphi$  in phis
    for  $\tau$  in taus
        println("Rodando simulação para  $\tau = \$(\tau)$ ,  $\varphi = \$(\varphi)$ ")

        # Redefinindo as variáveis

        T_total = warmup_period + T_sim
    end
end

```

```

h_new = zeros(n, T_total)
δ_new = zeros(n, T_total)
c_new = zeros(n, T_total)
e_new = zeros(n, T_total)
c_ot_new = zeros(n, T_total)
e_ot_new = zeros(n, T_total)

h_new[:, 1:warmup_period] .= h[:, 1:warmup_period]
c_new[:, 1:warmup_period] .= c[:, 1:warmup_period]
e_new[:, 1:warmup_period] .= e[:, 1:warmup_period]
c_ot_new[:, 1:warmup_period] .= c_ot[:, 1:warmup_period]
e_ot_new[:, 1:warmup_period] .= e_ot[:, 1:warmup_period]

δ_new[:, 1:warmup_period] .= δ[:, 1:warmup_period]
Random.seed!(1995)
δ_new[:, warmup_period+1:end] .= rand(LogNormal(μ1, σ1), n, T_total
- warmup_period)

# Redefinir matrizes principais
h, δ, c, e, c_ot, e_ot = h_new, δ_new, c_new, e_new, c_ot_new, e_ot_new

# --- Criar séries temporais ---
gini_series_post = zeros(T_total)
poverty_series_post = zeros(T_total)
H_series = zeros(T_total)
p90_series_post = zeros(T_total)
p10_series_post = zeros(T_total)
top10_share_post = zeros(T_total)

gini_series_pre = zeros(T_total)
poverty_series_pre = zeros(T_total)
p90_series_pre = zeros(T_total)
p10_series_pre = zeros(T_total)
top10_share_pre = zeros(T_total)

```

```

for t in warmup_period:(T_total - 1)
    simulate_period!(h, c, e, c_ot, e_ot, c_min, t, T_total,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ,
 $\varphi$ , A,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ )

    # Renda
    y_post = (1 -  $\tau$ ) * A .* h[:, t] .+ (1 -  $\varphi$ ) * ( $\tau$  / n) * A * sum(h[:,
t])

    y_pre = A .* h[:, t]

    # Salvar séries de distribuição
    gini_series_post[t] = Inequality.gini(y_post)
    poverty_series_post[t] = count(y_post .< c_min) / n
    H_series[t] = sum(h[:, t])
    p90_series_post[t] = quantile(y_post, 0.9)
    p10_series_post[t] = quantile(y_post, 0.1)
    top10_income_post = sum(sort(y_post, rev=true)[1:div(n,10)])
    top10_share_post[t] = top10_income_post / sum(y_post)

    gini_series_pre[t] = Inequality.gini(y_pre)
    poverty_series_pre[t] = count(y_pre .< c_min) / n
    p90_series_pre[t] = quantile(y_pre, 0.9)
    p10_series_pre[t] = quantile(y_pre, 0.1)
    top10_income_pre = sum(sort(y_pre, rev=true)[1:div(n,10)])
    top10_share_pre[t] = top10_income_pre / sum(y_pre)

end

# Guardar resultados para cada  $\tau$ 
resultados_dict[( $\tau$ ,  $\varphi$ )] = Dict(
    "gini_post" => gini_series_post,
    "poverty_post" => poverty_series_post,
    "p90_post" => p90_series_post,
    "p10_post" => p10_series_post,
    "top10_share_post" => top10_share_post,
    "gini_pre" => gini_series_pre,

```

```

        "poverty_pre" => poverty_series_pre,
        "p90_pre" => p90_series_pre,
        "p10_pre" => p10_series_pre,
        "top10_share_pre" => top10_share_pre,
        "Ht" => H_series
    )
end
end

# =====
# 7. Pós-Simulação: Plotar e Analisar os Resultados
# =====

output_dir = "C:/caminho/"

plot_range = warmup_period:(T_total - 1)
sim_range = 1:T_sim

#----- Capítulo 1
# Figura 3
histogram(h[:, warmup_period], bins = 100, label = "h em t = $warmup_period",
xlabel = "Capital humano", ylabel = "Frequência", color = :black)
vline!([c_min], label = "consumo mínimo", color = :red, linewidth = 1)
savefig(joinpath(output_dir, "Figura3.png"))

# Figura 4
histogram(δ[:, warmup_period], bins = 100, label = "δ em t = $warmup_period",
xlabel = "Choque", color = :black)
vline!([c_min], label = "consumo mínimo", color = :red, linewidth = 1)
savefig(joinpath(output_dir, "Figura4.png"))

#Figura 5
gini_cap1 = resultados_dict[(0.0, 0.0)]["gini_pre"]
plot(sim_range, gini_cap1[plot_range], label = "Índice de Gini")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura5.png"))

```



```

# Figura 6
poverty_cap1 = resultados_dict[(0.0, 0.0)]["poverty_pre"]
plot(sim_range, poverty_cap1[plot_range], label = "Taxa de pobreza")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura6.png"))

# Figura 7
Ht_cap1 = resultados_dict[(0.0, 0.0)]["Ht"]
plot(sim_range, Ht_cap1[plot_range], label = "Ht")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura7.png"))

# Figura 8a
p10_pre_cap1 = resultados_dict[(0.0, 0.0)]["p10_pre"]
p90_pre_cap1 = resultados_dict[(0.0, 0.0)]["p90_pre"]

p90p10_ratio_cap1 = p90_pre_cap1 ./ p10_pre_cap1
plot(sim_range, p90p10_ratio_cap1[plot_range], label = "P90/P10", title =
"A")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura8a.png"))

# Figura 8b
top10_share_cap1 = resultados_dict[(0.0, 0.0)]["top10_share_pre"]
plot(sim_range, top10_share_cap1[plot_range], label = "Participação do top
10%", title = "B")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura8b.png"))

#----- Capítulo 2

#Figura 9
plot()
for  $\tau$  in taus
    gini_cap2 = resultados_dict[( $\tau$ , 0.0)]["gini_post"]
    plot!(1:T_sim, gini_cap2[warmup_period:(T_total-1)],
        label = " $\tau = \$(\tau)$ ")
end

```

```

xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("Índice de Gini")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura9.png"))

#Figura 10
plot()
for  $\tau$  in taus
    poverty_cap2 = resultados_dict[( $\tau$ , 0.0)]["poverty_post"]
    plot!(1:T_sim, poverty_cap2[warmup_period:(T_total-1)],
        label = " $\tau = \$(\tau)$ ")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("Taxa de pobreza")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura10.png"))

#Figura 11
gini_pre_5pct = resultados_dict[(0.05, 0.0)]["gini_pre"]
gini_post_5pct = resultados_dict[(0.05, 0.0)]["gini_post"]

plot(sim_range, gini_pre_5pct[plot_range],, label="Pré-transferência",
color=:purple, linestyle=:dash)
plot!(sim_range, gini_post_5pct[plot_range], , label="Pós-transferência",
color=:purple, linestyle=:dash)
savefig(joinpath(output_dir, "Figura11.png"))

#Figura 12a
plot()
for  $\tau$  in taus
    p90p10_ratio_post = resultados_dict[( $\tau$ , 0.0)]["p90_post"]./
resultados_dict[( $\tau$ , 0.0)]["p10_post"]
    plot!(1:T_sim, p90p10_ratio_post[warmup_period:(T_total-1)],
        label = " $\tau = \$(\tau)$ ", lw=2, title = "A")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("P90/P10")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura12a.png"))

```

```

#Figura 12b
plot()
for  $\tau$  in taus
    top10_share_pre = resultados_dict[( $\tau$ , 0.0)]["top10_share_pre"]
    plot!(1:T_sim, top10_share_pre[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\tau = \$(\tau)$ ", lw=2, title = "A")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("Participação do top 10% da renda")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura12b.png"))

```

```

#Figura 13
plot()
for  $\tau$  in taus
    Ht_cap2 = resultados_dict[( $\tau$ , 0.0)]["Ht"]
    plot!(1:T_sim, Ht_cap2[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\tau = \$(\tau)$ ", )
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("H")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura13.png"))

```

```

#----- Capítulo 3

```

Figuras 14a e 14b são feitas com o mesmo código de 18a 3 18b, mas após o processo de calibragem utilizando $\phi == 0$, e alteração de ϕ em simulate_period

Figuras 16 e 17 são feitas com o mesmo código das figuras 3 e 4, mas após o processo de calibragem utilizando $\phi != 0$

```

taus = (0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.2) #Redefinindo o vetor 'taus' para
desconsiderar o cenário  $\tau = 0$ 

```

```

#Figura 18a
plot()
for  $\phi$  in phis

```

```

        gini = resultados_dict[(0.1,  $\varphi$ )]["gini_post"]
        plot!(1:T_sim, gini[warmup_period:(T_total-1)],
              label = " $\varphi = \$(\varphi)$ ", lw=2, title = "A")
    end
    xlabel!("Período da simulação")
    ylabel!("Índice de Gini")
    savefig(joinpath(output_dir, "Figura18a.png"))

#Figura 18b
plot()
for  $\varphi$  in phis
    gini = resultados_dict[(0.1,  $\varphi$ )]["gini_post"]
    plot!(1:T_sim, gini[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\varphi = \$(\varphi)$ ", lw=2, title = "A")

plot()
for  $\tau$  in taus
    gini = resultados_dict[( $\tau$ , 0.5)]["gini_post"]
    plot!(1:T_sim, gini[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\tau = \$(\tau)$ ", lw=2, title = "B")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("Índice de Gini")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura18b.png"))

#Figura 19a
plot()
for  $\varphi$  in phis
    gini = resultados_dict[(0.1,  $\varphi$ )]["poverty_post"]
    plot!(1:T_sim, gini[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\varphi = \$(\varphi)$ ", lw=2, title = "A")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("Taxa de pobreza")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura19a.png"))

```

```

#Figura 19b
plot()
for  $\tau$  in taus
    gini = resultados_dict[( $\tau$ , 0.5)]["poverty_post"]
    plot!(1:T_sim, gini[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\tau = \$(\tau)$ ", lw=2, title = "B")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("Taxa de Pobreza")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura19b.png"))

# Figura 20a
plot()
for  $\varphi$  in phis
    gini = resultados_dict[(0.1,  $\varphi$ )]["Ht"]
    plot!(1:T_sim, gini[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\varphi = \$(\varphi)$ ", lw=2, title = "A")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("H")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura20a.png"))

# Figura 20b
plot()
for  $\tau$  in taus
    gini = resultados_dict[( $\tau$ , 0.5)]["Ht"]
    plot!(1:T_sim, gini[warmup_period:(T_total-1)],
          label = " $\tau = \$(\tau)$ ", lw=2, title = "B")
end
xlabel!("Período da simulação")
ylabel!("H")
savefig(joinpath(output_dir, "Figura20b.png"))

```