

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ

UMA ABORDAGEM DE GRADIENTE PROJETADO PARA OTIMIZAÇÃO
MULTIOBJETIVO COM RESTRIÇÃO DE CARDINALIDADE

CURITIBA

2025

ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ

UMA ABORDAGEM DE GRADIENTE PROJETADO PARA OTIMIZAÇÃO
MULTIOBJETIVO COM RESTRIÇÃO DE CARDINALIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Evelin H. M. Krulikovski.

Coorientador: Prof. Dr. Ademir Alves Ribeiro.

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cruz, André Luiz Zanin da

Uma abordagem de gradiente projetado para otimização multiobjetivo com restrição de cardinalidade / André Luiz Zanin da Cruz. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Evelin Heringer Manoel Krulikovski

Coorientador: Ademir Alves Ribeiro

1. Otimização matemática. 2. Programação não-linear. 3. Cardinalidade. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Krulikovski, Evelin Heringer Manoel. IV. Ribeiro, Ademir Alves. V. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

ATA Nº126-M

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia onze de agosto de dois mil e vinte e cinco às 09:00 horas, na sala PA-300 SEMINÁRIOS DMAT, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Centro Politécnico, Av. Cel. Francisco H. dos Santos, 100 - Jardim das Américas, Curitiba - PR, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de dissertação do mestrando **ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ**, intitulada: **Uma Abordagem de Gradiente Projetado para Otimização Multiobjetivo com Restrição de Cardinalidade**, sob orientação da Profa. Dra. EVELIN HERINGER MANOEL KRULIKOVSKI. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: EVELIN HERINGER MANOEL KRULIKOVSKI (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), CARINA MOREIRA COSTA (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ), MARIANA KLEINA (DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO - UFPR). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de mestre está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, EVELIN HERINGER MANOEL KRULIKOVSKI, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 11 de Agosto de 2025.

Assinatura Eletrônica
13/08/2025 09:40:05.0

EVELIN HERINGER MANOEL KRULIKOVSKI
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
12/08/2025 10:27:27.0

CARINA MOREIRA COSTA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ)

Assinatura Eletrônica
12/08/2025 09:01:22.0
MARIANA KLEINA

Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE
PRODUÇÃO - UFPR)

Assinatura Eletrônica
12/08/2025 12:47:04.0
ADEMIR ALVES RIBEIRO

Coordenador(a) (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ**, intitulada: **Uma Abordagem de Gradiente Projetado para Otimização Multiobjetivo com Restrição de Cardinalidade**, sob orientação da Profa. Dra. EVELIN HERINGER MANOEL KRULIKOVSKI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 11 de Agosto de 2025.

Assinatura Eletrônica

13/08/2025 09:40:05.0

EVELIN HERINGER MANOEL KRULIKOVSKI

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

12/08/2025 10:27:27.0

CARINA MOREIRA COSTA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ)

Assinatura Eletrônica

12/08/2025 09:01:22.0

MARIANA KLEINA

Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE
PRODUÇÃO - UFPR)

Assinatura Eletrônica

12/08/2025 12:47:04.0

ADEMIR ALVES RIBEIRO

Coordenador(a) (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me abençoado, dado forças para perseverar nas dificuldades e por guiar meu caminho até a conclusão deste trabalho. Também sou grato aos meus pais, Sonia F. Zanin e Jean C. da Cruz, que mesmo com a distância que nos separava, sempre me deram o apoio que precisava para concluir meus estudos.

Em especial, quero agradecer ao meu tio, Jivanildo J. da Cruz, por toda ajuda que recebi durante o mestrado, sendo a ponte que garantiu minha caminhada nesse desafio em Curitiba e a presença familiar que me trouxe conforto.

Também sou grato aos meus orientadores Dra. Evelin H. M. Krulikowski e Dr. Ademir A. Ribeiro, pessoas que tanto admiro e profissionais que me inspiram, seus conselhos e ensinamentos ajudaram a desenvolver minha compreensão sobre a Otimização Matemática, área de estudo que sou tão apaixonado. Também agradeço por suas correções neste trabalho e por disporem do seus tempos livres para minha orientação.

Também agradeço a Dra. Carina M. Costa e a Dra. Mariana Kleina por aceitarem contribuir e avaliar este trabalho. Sou grato ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR pela oportunidade e formação de qualidade propiciada. Além disso agradeço a todos meus colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR que contribuíram para minha formação ao longo desses dois anos de estudo.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro ao Programa de Demanda Social, CAPES-DS, sua bolsa de estudos garantiu minha autonomia financeira durante a pós-graduação.

Muito obrigado.

RESUMO

Neste trabalho, propomos um algoritmo baseado no Método do Lagrangeano Aumentado para resolver problemas de otimização multiobjetivo com restrição de cardinalidade. Especificamente, como são problemas difíceis de serem resolvidos diretamente, aproveitamos uma reformulação contínua que flexibiliza a restrição de cardinalidade e propomos essa abordagem que utiliza, em conjunto, o método do gradiente projetado com busca linear não monótona, adequado para conjuntos viáveis convexos e fechados. Incorporamos também duas estratégias distintas de penalização externa vetorial, a penalização quadrática e a exponencial. Para relatar justificativas do uso de tal abordagem, realizamos um estudo, exibindo interpretação geométrica e perspectiva analítica dos métodos para resolver problemas de otimização multiobjetivo nos casos: linear, irrestrito e restrito. Na análise da convergência, mostramos a viabilidade do ponto limite e sua otimalidade sob hipóteses fortes, como eficiência fraca. Também utilizamos a teoria de dualidade Lagrangiana, que notamos facilitar os cálculos. Entretanto, uma hipótese mais forte, denominada eficiência própria, foi necessária. Realizamos uma análise teórica sobre as propriedades de viabilidade e otimalidade das soluções obtidas, com base em condições de estacionariedade e argumentos geométricos. Além disso, o algoritmo foi implementado em linguagem Python e aplicado a problemas reais de seleção de portfólio. Os experimentos demonstraram tempos de execução adequados ao contexto multiobjetivo, e os resultados foram avaliados por meio de indicadores como o Hipervolume. A comparação com métodos da literatura evidenciou a eficiência, robustez e competitividade na construção da fronteira de Pareto da abordagem proposta.

Palavras-chave: Otimização Escalar ou mono-objetivo · Otimização Multiobjetivo · Programação Não-Linear · Restrição de Cardinalidade · Penalidade · Lagrangeano Aumentado · Problema de Seleção de Portfólio

ABSTRACT

In this work, we propose an algorithm based on the Augmented Lagrangian Method to solve multi-objective optimization problems with cardinality constraints. Specifically, since these problems are difficult to solve directly, we leverage a continuous reformulation that relaxes the cardinality constraint and propose this approach that uses, in conjunction with the projected gradient method with non-monotonic linear search, suitable for convex and closed feasible sets. We also incorporate two distinct vectorial external penalty strategies: quadratic and exponential. To provide justifications for using this approach, we conduct a study, presenting a geometric interpretation and an analytical perspective of the methods for solving multi-objective optimization problems in the following cases: linear, unconstrained, and constrained. In the convergence analysis, we demonstrate the feasibility of the limit point and its optimality under strong assumptions, such as weak efficiency. We also utilize Lagrangian duality theory, which we note facilitates calculations. However, a stronger assumption, called eigenefficiency, was necessary. We performed a theoretical analysis of the feasibility and optimality properties of the obtained solutions, based on stationarity conditions and geometric arguments. Furthermore, the algorithm was implemented in Python and applied to real portfolio selection problems. The experiments demonstrated runtimes suitable for the multi-objective context, and the results were evaluated using indicators such as Hypervolume. Comparison with methods in the literature demonstrated the efficiency, robustness, and competitiveness of the proposed approach in constructing the Pareto frontier.

Keywords: Scalar or Single-Objective Optimization · Multi-Objective Optimization · Non-Linear Programming · Cardinality Constraint · Penalty · Augmented Lagrangian · Portfolio Selection Problem

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de função coerciva.	25
1.2	Exemplo de conjunto convexo e não convexo.	28
1.3	Exemplo de função convexa e não convexa.	29
1.4	Ilustração do Teorema da Projeção.	31
1.5	Exemplo de cone convexo e não convexo.	32
1.6	Aplicação do Método do Gradiente Projetado.	37
2.1	Conjunto admissível do problema (2.3) - Espaço das soluções.	44
2.2	Conjunto admissível do problema (2.3) - Espaço dos objetivos.	44
2.3	Imagem dos pontos A, B, C e D no conjunto dos objetivos $\mathcal{Y}$	45
2.4	Imagem dos pontos A, D e E no conjunto dos objetivos $\mathcal{Y}$	49
2.5	Exemplos de pontos eficientes na otimização bi-objetivo.	49
2.6	Exemplo de fronteira de Pareto sobre soluções não dominadas.	50
2.7	Conjunto admissível do espaço dos objetivos do problema (2.3).	51
2.8	Conjuntos admissíveis do problema (2.3).	52
2.9	Exemplo de direção de descida para uma função $F(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$	61
2.10	Curvas de nível e projeção de z^0	65
3.1	Gráfico do espaço dos objetivos do Exemplo 3.6.	79
3.2	Espaço dos objetivos do Exemplo 3.14 com dominância do vetor nulo.	83
4.1	Fronteira eficiente em problema de otimização de portfólio.	107
4.2	Exemplo do Hipervolume de um conjunto de soluções não dominadas arbitrárias.	109
4.3	Exemplo de combinação viável de dois ativos [6, pág.14].	113
4.4	Fronteira de Pareto com pontos encontrados pelo método da soma ponderada em problema com restrição de cardinalidade [6, pág.18].	113
4.5	Fronteira de Pareto com somente os pontos invisíveis desse exemplo [6, pág.18].	114
4.6	Aplicação do filtro de dominância no Algoritmo 8.	117
4.7	Imagens das soluções não dominadas de cada fronteira de Pareto encontrada no espaço dos objetivos (Quad/Exp) - Caso Simples.	119

4.8	Comparação entre a fronteira de Pareto obtida pelo MIQP e pelo Algoritmo 8 (Quad/Exp) - Caso Simples.	119
4.9	Imagens das soluções não dominadas encontradas no espaço dos objetivos (AL-Quad/AL-Exp) - Port 1.	122
4.10	Comparação entre a fronteira de Pareto obtida pelo MIQP e pelo Algoritmo 8 (AL-Quad/AL-Exp) - Port 1.	123
4.11	Construção do Hipervolume no problema Caso Simples - (AL-Quad/AL-Exp).	125
4.12	Construção do Hipervolume no problema Port 1 - (AL-Quad/AL-Exp). . .	126
4.13	Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via métrica de Hipervolume - Port 2, 3 e 4	128
4.14	Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via métrica de <i>Purity</i> - Port 2, 3 e 4.	129
4.15	Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via a métrica $\Gamma - Spread$ - Port 2, 3 e 4.	130
4.16	Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via métrica de tempo de CPU - Port 2, 3 e 4.	131

Lista de Tabelas

4.1	Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - Exemplos 1.	99
4.2	Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - Exemplos 2.	100
4.3	Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - Exemplos 3.	101
4.4	Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - 4.	102
4.5	Resumo do desempenho do Algoritmo 6.	103
4.6	Comparação de tempos entre os algoritmos AL-Quad e AL-Exp para diferentes valores de α - Caso Simples.	120
4.7	Resumo dos retornos esperados e riscos do problema Caso Simples: AL-Quad vs AL-Exp vs MIQP.	121
4.8	Comparação de tempos entre os algoritmos AL-Quad e AL-Exp para diferentes valores de α - Port 1.	122
4.9	Resumo dos retornos e riscos do problema Port 1: AL-Quad vs AL-Exp vs MIQP.	123

Lista de abreviaturas e siglas

CQs	Constraint Qualifications
KKT	Karush-Kuhn-Tucker Conditions
NLP	Non-linear Programming
AL	Augmented Lagrangian
MPCaC	Mathematical Problems with Cardinality Constraints
MPCaC-R	Relaxed Problem
MPCaC-RP	Penalized Relaxed Problem
MOP	Multiobjective Optimization Problem
UMOP	Unconstrained Multiobjective Optimization Problem
D-MOP	Dual Multiobjective Optimization Problem
MOLP	Multiobjective Optimization Linear Problems
MOPCaC	Multiobjective Optimization Problems with Cardinality Constraints
MOPCaC-R	Relaxed Multiobjective Problem
MOPCaC-RP	Penalized Relaxed Multiobjective Problem
SQP	Sequential Quadratic Programming
SLSQP	Sequential Least Squares Programming
PGM	Projected Gradient Method
SPG	Spectral Projected Gradient
PGM-MOP	Projected Gradient Method for MOPs
WSM	Weighted Sum Method

Lista de símbolos

Os principais símbolos utilizados nesta dissertação são os seguintes.

n	Dimensão do espaço de entrada.
m	Número de restrições de desigualdade.
q	Número de restrições de igualdade.
p	Número de funções objetivo f_i .
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos.
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano n -dimensional, onde $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.
x	Vetor em $\mathbb{R}^n$, formado por uma n -upla de números reais, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
x_i	i -ésima componente do vetor x .
$\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$	Sequência infinita das soluções obtidas pelo algoritmo.
x^k	k -ésima iteração do algoritmo.
$ I $	Cardinalidade do conjunto I .
$\ x\ _0$	Cardinalidade do vetor x , ou seja, número de componentes x_i não nulas.
α	Número natural não negativo dado, usado para limitar a cardinalidade.
x^i	Ponto i do espaço de entrada.
$x^\top$	Transposto do vetor x .
$x^\top y$	Produto interno euclidiano entre $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotado também por $\langle x, y \rangle$.
$\ x\ $	Norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$, dado por $\ x\ ^2 = x^\top x = x_1^2 + \dots + x_n^2$.
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Derivada parcial de f em relação à variável x .
λ_i	Parâmetro de penalização associado à restrição de igualdade.
τ	Parâmetro de penalização associado à restrição de igualdade quadrática.
e	Vetor cujas componentes são todas iguais a 1.
0	Vetor cujas componentes são todas iguais a 0.
$B(a, \delta)$	Bola aberta de centro a e raio $\delta > 0$, ou seja, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x - a\ < \delta\}$.

SUMÁRIO

Introdução	16
1 Revisão de Conceitos	21
1.1 Preliminares	21
1.2 Problema de Otimização Escalar/Mono-objetivo	26
1.2.1 Convexidade	28
1.2.2 Programação Quadrática Sequencial	34
1.2.3 Método do Gradiente Projetado	36
1.2.4 Algoritmo de Dykstra	37
1.2.5 Dualidade	39
2 Otimização Multiobjetivo	42
2.1 Preliminares	42
2.1.1 Dualidade para MOP	53
2.1.2 O Método da Soma Ponderada	54
2.1.3 Problema de Otimização Multiobjetivo Linear	55
2.1.4 Problema de Otimização Multiobjetivo Irrestrito	56
2.2 Problema de Otimização Multiobjetivo Restrito	60
2.2.1 Busca Linear Não Monótona	66
3 Problemas com Restrição de Cardinalidade	73
3.1 Problema Escalar/Mono-objetivo com restrição de cardinalidade	73
3.1.1 Penalização Externa e Lagrangeano Aumentado	75
3.2 MOP com restrição de cardinalidade	77
3.2.1 Penalização Externa e Lagrangeano Aumentado	84
4 Experimentos Numéricos	97
4.1 Aplicações do PGM-MOP	98
4.2 Aplicações em problemas de portfólio	103
4.3 Perfil de desempenho e métricas para MOPs	107
4.4 WSM para MOPCaC	112
4.5 Banco de Dados e Análise dos Resultados	115
4.5.1 Perfis de desempenho: Hipervolume	125
4.5.2 Perfis de desempenho: <i>Purity</i>	128
4.5.3 Perfis de desempenho: $\Gamma - Spread$	129
4.5.4 Perfis de desempenho: Tempo de CPU	131
5 Conclusões e trabalhos futuros	133

Introdução

Existem diversas áreas da ciência que fazem uso da Otimização para ajudar na tomada de decisões. Por exemplo, em problemas que envolvem um único objetivo, que através de modelos e técnicas de otimização minimizam (ou maximizam) uma função linear ou não, denominada função objetivo, em que está sujeita a restrições também lineares ou não, compondo a chamada região admissível (viável).

Nas diversas situações reais que precisamos modelar e obter um resultado satisfatório, surge o estudo de programação matemática com vários objetivos. Entretanto, geralmente tais objetivos são conflitantes, disputando entre si por uma determinada solução. Para esses problemas, denominamos Problemas de Otimização Multiobjetivo (MOP, do Inglês *Multiobjective Optimization Problem*).

Nesta dissertação, apresentamos primeiramente um breve estudo desses problemas com múltiplos objetivos, que é um dos campos com inúmeras aplicações, entre elas Engenharia, Economia, Estatística e até mesmo da Exploração Espacial [4, 15].

Em geral, não há um único ponto ótimo que irá otimizar todas as funções objetivo ao mesmo tempo. Nesses casos, estamos interessados em buscar pontos que denominamos de soluções ótimas de Pareto (ou eficientes). Existem também soluções menos restritas, como soluções ótimas fracas de Pareto (ou fracamente eficientes) e pontos Pareto estacionários/críticos. O livro [51] foi uma referência pioneira para tratar tais conceitos.

Nosso primeiro objetivo é apresentar o que é um problema de Otimização Multiobjetivo, abordando a relação com o caso escalar (Otimização Mono-objetivo). Pretendemos tornar este trabalho autocontido, ou seja, contendo em si os principais conceitos que são necessários para o leitor entender as principais diferenças de generalizar o caso escalar para o multiobjetivo, apresentando as diferentes definições e resultados presentes na literatura. É importante ressaltar que inúmeros métodos, associados à otimização escalar, têm sido estendidos ao caso multiobjetivo [15, 17, 48].

Existem basicamente três tipos de MOPs, o linear, o irrestrito e o restrito. Neste trabalho, temos como objetivo realizar um estudo teórico e uma aplicação para o caso específico restrito de problemas multiobjetivo com restrição de cardinalidade (MOPCaC, do Inglês *Multiobjective Optimization Problems with Cardinality Constraints*). Em geral, problemas com restrição de cardinalidade são programas matemáticos difíceis, mas forne-

cem soluções esparsas, ou seja, soluções com um número limitado de elementos não nulos, e que possuem diferentes aplicações, como compressão de imagens, seleção de variáveis para aprendizado de máquinas e otimização de portfólio. [40]

Também apresentamos duas possíveis abordagens para resolver tais problemas. Iniciaremos com uma generalização do chamado Método do Gradiente Projetado, onde trabalhamos com um conjunto viável convexo. Para tal método, uma revisão mais aprofundada pode ser encontrada no trabalho de Birgin, Martínez e Raydan em [13]. O Método do Gradiente Projetado para MOPs foi introduzido em [20].

Este trabalho também tem como objetivo tratar de questões relacionadas à extensão de forma teórica e prática dos recentes trabalhos baseados em derivadas para problemas de otimização escalar de Krejić, Krulikovski e Raydan em [39, 40]. Especificamente, realizamos uma análise do método de gradiente projetado para resolver MOPCaC. O estudo inclui relatar justificativas para o uso de tal abordagem e exibir interpretações geométricas e perspectiva analítica.

A ideia-chave foi aproveitar o fato de que as restrições do MOPCaC em uma reformulação contínua, recentemente desenvolvida que relaxa a restrição de cardinalidade, são conjuntos convexos “fáceis de projetar” (caixas, esferas, subespaços, entre outros). Com a motivação de encontrar soluções Pareto para o problema MOPCaC, baseadas no algoritmo proposto por Carrizo, Fazzio e Schuverdt em [20], analisaremos se o método combinado converge para pontos que satisfazem condições de otimalidade/estacionariedade obtidas ao algoritmo do Lagrangeano aumentado, recorrendo à Programação Sequencial de Mínimos Quadrados, que também pode ser feito pelo uso do Algoritmo de Dijkstra.

O enfoque do trabalho consiste em estudar de forma teórica e prática abordagens precisas e eficientes para obter soluções Pareto de MOPCaC. O desenvolvimento, análise de convergência, implementação (em *Python*) e testes dos algoritmos obtidos em dados reais serão os objetivos no que diz respeito à extensão dos problemas de otimização aqui propostos.

Um objetivo específico deste trabalho é realizar uma aplicação para problemas de portfólio. Aplicamos a abordagem, visando analisar os resultados com a teoria apresentada. Levamos em conta a escolha dos parâmetros de penalização da função Lagrangeana, tanto para o caso quadrático quanto exponencial. Esta dissertação tem como inspiração os trabalhos feitos por Krulikovski, Ribeiro e Sachine em [16], Garmanjani, Krulikovski e Ramos em [45], Lapucci em [21, 35, 36].

Em linhas gerais, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar os principais conceitos da otimização multiobjetivo e discutir sua relação com o caso escalar;
- Revisar a literatura relacionada à restrição de cardinalidade e às reformulações contínuas utilizadas para tratá-la;

- Adaptar e aplicar o método do gradiente projetado para problemas multiobjetivo com restrição de cardinalidade (MOPCaC);
- Estudar a penalização da restrição de Hadamard com funções quadráticas e exponenciais, analisando suas vantagens e limitações;
- Propor e analisar um algoritmo baseado no Lagrangeano aumentado multiobjetivo com penalização externa para MOPCaC;
- Demonstrar propriedades teóricas do algoritmo, como viabilidade dos pontos de acumulação e condições de otimalidade/estacionariedade;
- Implementar os algoritmos propostos em linguagem Python e aplicá-los a problemas reais de seleção de portfólio;
- Comparar os métodos propostos com abordagens da literatura, como a formulação MIQP com soma ponderada, avaliando desempenho na construção da fronteira de Pareto, robustez e qualidade das soluções obtidas.

Principais contribuições

Em resumo, as principais contribuições da dissertação são:

- Capítulo 1
 - Apresentamos os resultados principais que são usados para generalizar o caso escalar/mono-objetivo para o caso multiobjetivo.
 - Deixamos de forma o mais didática possível o Método do Gradiente Projetado, apresentando na Figura 1.6 sua aplicação.
 - Relembramos dualidade, recorrendo tanto a função conjugada (resultado que não é tão clássico) quanto na aplicação direta da função Lagrangeana.
- Capítulo 2
 - Discutimos a respeito das definições presentes na literatura, tentando deixar clara a diferença entre elas.
 - Introduzimos para ilustrar no caso bi-objetivo tais definições, os Exemplos 2.3, 2.3, 2.9 e ilustrações nas Figuras 2.5, 2.4, 2.7, 2.8.
 - Apresentamos de forma autocontida as generalizações presentes na literatura para (MOP), principalmente os resultados referentes a convexidade.
 - Generalizamos a formulação dual para (MOP) com restrições de igualdade.

- Apresentamos um exemplo de reformulação do problema (2.3) como um problema de otimização linear multiobjetivo, servindo como base para nosso trabalho em estudar o caso não linear.
 - Demonstramos o Lema 2.22 que relaciona pontos eficientes com pontos Pareto estacionários no problema (UMOP).
 - Discutimos a generalização do Método do Gradiente Projetado para (MOP), apresentando Exemplos como presentes na Figura 2.9 e detalhando resultados implícitos da literatura.
 - Apresentamos o Exemplo 2.33 para ilustrar a escolha de calcular a direção de busca em nossas abordagens.
 - Deixamos de maneira acessível a demonstração do Teorema 2.37.
 - Fundamentamos teoricamente a existência de soluções para (MOP).
 - Provamos uma forma alternativa de definir soluções eficientes no Lema 2.7.
 - Apresentamos modificações na demonstração do Teorema 2.45 para garantir que todo ponto de acumulação gerado pela sequência do Algoritmo 6 é um ponto viável estacionário de MOP.
 - Enunciamos o Corolário 2.46 que complementa o Teorema 2.45.
 - Apresentamos uma alternativa de demonstração do Lema 2.47, recorrendo a outros resultados do capítulo.
- Capítulo 3
 - Relembramos os resultados de penalidade externa Lagrangeano para MPCaC.
 - Apresentamos o Exemplo 3.6, mostrando que a relação de equivalência entre soluções ótimas locais de Pareto nem sempre é válida.
 - Realizamos uma releitura do trabalho de [45], apresentando os principais resultados para utilizarmos na convergência da nossa abordagem algorítmica.
 - Detalhamos o Exemplo 3.14, onde a condição MOP-WCQ falha.
 - Nossa principal contribuição é a Seção 3.2.1, desde a definição de nosso algoritmo quanto as demonstrações de convergência.
 - Capítulo 4
 - Detalhamos nossos códigos em *Python*, do qual foram elaborados no *Google Colab*. Os códigos estão disponíveis no *Github* em https://github.com/Andrezanincruz01/Dissertacao_Mestrado.git.
 - Realizamos testes numéricos para o problema de portfólio, acompanhados da análise na escolha dos parâmetros de penalização, tanto o caso exponencial quanto o quadrático.

Organização do trabalho

Apresentamos o estudo da seguinte forma. No Capítulo 1, as principais referências foram [1, 40, 47, 53]. Nas Seções 1.1 e 1.2, apresentamos algumas definições e teoremas usados para fundamentar o desenvolvimento da abordagem proposta no trabalho. Destacamos alguns conceitos clássicos de Análise, Topologia, Álgebra Linear e Otimização Escalar/Mono-objetivo, focando na Otimização Convexa na Subseção 1.2.1, Programação Quadrática Sequencial na Subseção 1.2.2, Método do Gradiente Projetado na Subseção 1.2.3, Algoritmo de Dykstra na Subseção 1.2.4 e Dualidade na Subseção 1.2.5.

No Capítulo 2, apresentamos nossa pesquisa teórica sobre Otimização Multiobjetivo, as principais fontes foram [15, 19, 20, 28, 45, 46, 48]. Mais especificamente, na Seção 2.1 temos algumas definições e resultados preliminares sobre otimização multiobjetivo presentes na literatura. Dualidade para MOP em 2.1.1. O Método da Soma Ponderada em 2.1.2. Depois, explicamos na Subseção 2.1.3 sobre os problemas de otimização linear multiobjetivo. Na Subseção 2.1.4 discutimos os Problemas de Otimização Multiobjetivo Irrestrito, apresentando o Método do Gradiente. Na Seção 2.2 tratamos do Problema de Otimização Multiobjetivo Restrito, muito importante para nosso trabalho, abordando a Busca Linear Não Monótona na Subseção 2.2.1.

No Capítulo 3 apresentamos a parte principal dos nossos resultados teóricos. Começamos na Seção 3.1, estudando os problemas de otimização escalar/mono-objetivo e métodos presentes na literatura para resolvê-los na Subseção 3.1.1. Em seguida, na Seção 3.2 apresentamos nossa pesquisa sobre os métodos de penalização externa e Lagrangeano Aumentado na Subseção 3.2.1 no caso multiobjetivo, recorrendo ao PGM-MOP. Introduzimos nosso algoritmo voltado para problemas multiobjetivo com restrição de cardinalidade, bem como seus resultados sobre viabilidade e convergência. Além disso, exibimos alguns resultados recentes da literatura sobre condições de qualificação voltadas para essa classe de problemas. As principais referências são [21, 39, 40, 45].

No Capítulo 4, apresentamos nossos testes numéricos com o PGM-MOP na Seção 4.1, bem como utilizamos a estratégia de múltiplos inícios para a construção da fronteira de Pareto. Em seguida, explicamos o que são problemas de portfólio e o modelo de Markowitz na Seção 4.2. E para as Subseções 4.3, 4.4 e 4.5 definimos o que são perfis de desempenho e as métricas para MOPs. Além disso, explicamos como implementamos o método WSM para MOPCaC usando o MIQP CPLEX e apresentamos nossos experimentos numéricos em diferentes problemas de portfólio encontrados na literatura. As referências mais fundamentais neste capítulo são [3, 6, 17, 34, 40, 43, 48].

Finalmente, no Capítulo 5, temos as principais conclusões de todo o estudo realizado e as possibilidades para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Revisão de Conceitos

Neste capítulo destacamos alguns conceitos clássicos de Análise, Topologia, Álgebra Linear e Otimização, focando na Otimização Convexa. Também apresentamos alguns resultados importantes de Programação de Mínimos Quadrados Sequenciais (SLSQP, do Inglês *Sequential Least Squares Programming*) e do algoritmo de projeção de Dykstra.

Deste modo, podemos ter melhor entendimento de MOPs com restrição de cardinalidade, que é o foco principal de nosso trabalho. As principais referências consideradas neste capítulo são [1, 40, 47, 48, 53].

1.1 Preliminares

Iniciamos com uma breve introdução de notação muito útil ao longo do texto. Primeiramente, introduzimos as seguintes relações de ordem parcial para quaisquer dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \leq y, \text{ se, e somente se, } x_i \leq y_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

e

$$x < y, \text{ se, e somente se, } x_i < y_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Usamos $x \not\leq y$ se $x \leq y$ e x difere de y em pelo menos uma componente. Equivalentemente, que $x \leq y$ e $x \neq y$. Caso tais vetores não sejam comparáveis, denotamos $x \sim y$. Temos que (1.1) e (1.2) são relações de ordem parcial binária. Além disso, as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva ocorrem [48].

Exemplo 1.1 Considere $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, tais que $x = (4, 6, 8)^\top$, $y = (3, 5, 7)^\top$ e $z = (4, 5, 6)^\top$. Então, $y < x$ e $z \leq x$, porém z e y não podem ser comparados.

Definidas tais relações de ordem, somos capazes de distribuir os vetores do $\mathbb{R}^n$ com base em seus sinais. Portanto, o conjunto formado por todos os vetores não-negativos do $\mathbb{R}^n$ denotamos por

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\} \quad (1.3)$$

e o seu negativo, ou seja, o conjunto formado por todos os vetores não-positivos como

$$-\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \leq 0\}. \quad (1.4)$$

Também consideramos o conjunto

$$\mathbb{R}_{++}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0\} \quad (1.5)$$

e seu negativo por

$$-\mathbb{R}_{++}^n = \mathbb{R}_{--}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x < 0\}. \quad (1.6)$$

Dado uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, definimos a matriz jacobiana de F em x , denotada por $JF(x)$, como a matriz com entradas

$$(JF(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

O vetor gradiente de f_i é dado por $\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)^\top$. Também é comum usar a notação $\nabla F(x) = (\nabla f_1, \dots, \nabla f_p)$ para representar a matriz Jacobiana.

A seguir, apresentamos um dos resultados mais conhecidos na área da análise e que marca presença em algumas demonstrações posteriores.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) [1] *Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores x e y são linearmente dependentes.

Por conveniência vamos estabelecer $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ contida no espaço $\mathbb{R}^n$ é uma função que relaciona cada número do conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ com um vetor do espaço $\mathbb{R}^n$. Também é comum denotar uma sequência por (x^k) .

Definição 1.3 [1, pág.1] *Dizemos que o limite da sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é o ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter um índice $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que*

$$k \geq \bar{k} \Rightarrow \|x^k - \bar{x}\| < \varepsilon.$$

Neste caso, também dizemos que a sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $\bar{x}$ e indicamos este fato por $x^k \rightarrow \bar{x}$ ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}.$$

Já uma subsequência de $\{x^k\}$ é a mesma função, mas restrita a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, digamos $\mathbb{N}_1 = \{k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$. Assim, podemos denotar uma subsequência de $\{x^k\}$ por $\{x^{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ ou também $\{x^{k_i}\}_{k_i \in \mathbb{N}_1}$.

Teorema 1.4 [1] *Se uma sequência $\{x^k\}$ converge para um limite $\bar{x}$, então toda subsequência $\{x^{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ também converge para $\bar{x}$.*

Diremos que uma sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é limitada, quando existir um número real $M > 0$ tal que $\|x^k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.5 [1] *Toda sequência convergente é limitada.*

Teorema 1.6 [Bolzano-Weierstrass] *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Um ponto de acumulação ou valor de aderência de uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é o limite de uma subsequência da mesma. Vejamos agora como caracterizar o maior e menor ponto de acumulação.

Definição 1.7 [1, pág.3] *Seja $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência limitada. Definimos o limite inferior da sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como seu menor ponto de acumulação e denotamos por $\liminf x^k$. Analogamente, definimos o limite superior da sequência como seu maior ponto de acumulação e denotamos por $\limsup x^k$.*

Relembremos agora a definição de sequência monótona e seu resultado de convergência ao assumir também a hipótese de ser limitada.

Definição 1.8 [1, pág.3] *Dizemos que a sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}$ é não decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e é não crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se as desigualdades forem estritas, diremos que $\{x^k\}$ é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo. Em qualquer uma dessas situações, a sequência é dita monótona.*

Teorema 1.9 [1] *Toda sequência $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.*

Teorema 1.10 [1] *Se uma sequência monótona $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, então $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente.*

Agora que definimos o que é uma sequência monótona, podemos estender essa definição para o caso n -dimensional. Considere a sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$, diremos que ela é $\mathbb{R}_+^n$ -decrescente se cada componente do vetor x^k diminui estritamente seu valor a cada iteração, ou seja, $x_i^k > x_i^{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \dots, n$. De forma análoga, essa sequência é $\mathbb{R}_+^n$ -crescente, se cada componente do vetor x^k cresce estritamente a cada iteração.

Para finalizar essa subseção, vamos definir um tipo de sequência muito utilizada no estudo da convergência completa do método do gradiente e do gradiente projetado com funções convexas componente a componente.

Definição 1.11 [50] *Tome $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio e fechado. Uma sequência infinita $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos fora de U é dita ser Fejér ou monótona Fejér com respeito a U se vale as seguintes: $x^k \neq x^{k+1}$ e $\|x^{k+1} - z\| \leq \|x^k - z\|$ para todo $z \in U$ e $k \in \mathbb{N}$.*

Já em uma sequência quase-Fejér convergente, permitimos uma violação de ser monótona por parâmetros ε_k , que somam um valor finito ao longo das iterações.

Definição 1.12 [15, Sequência Quase-Fejér, pág.598] Dizemos que uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é quase-Fejér convergente para o conjunto fechado e não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ se para todo $x \in U$ existe uma sequência $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon_k \geq 0$ para todo k e tal que

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k - x\|^2 + \varepsilon_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ com } \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k < \infty.$$

Teorema 1.13 [44] Se uma sequência $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é quase-Fejér convergente para um conjunto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, então $\{u^k\}$ é limitada. Se, além disso, $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem um ponto de acumulação u que pertence a U , então $\lim_{k \rightarrow \infty} u^k = u$.

Durante nosso estudo sobre pontos estacionários em problemas de otimização multiobjetivo (MOPs), estudamos pontos estacionários que correspondem a soluções ótimas locais. Para fundamentar nosso estudo, retomamos alguns conceitos da Topologia, que são fundamentais para compreender e descrever o comportamento de tais soluções.

O conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser limitado quando temos a presença de uma bola que o contém, ou seja, existe $a \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, tais que $X \subset B(a, \delta)$. Tome o conjunto A , a função $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser limitada quando seu conjunto-imagem é limitado, [1].

Definição 1.14 [1, pág.9] Diz-se que um ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ é interior ao conjunto X se existe uma bola aberta com centro em a e contida em X . Neste caso, diz-se também que X é uma vizinhança de a . O interior de X , $\text{int}(X)$, é o conjunto formado por todos os pontos que são interiores a X . Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de aberto se todos os seus pontos são interiores, isto é, se $\text{int}(X) = X$.

Precisamos também definir os conjuntos fechados, porque um dos nossos focos de estudo são funções de MOP com seus domínios tendo essas características.

Definição 1.15 [1, pág.9] Um ponto $\bar{x}$ é dito ser aderente ao subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando é limite de alguma sequência de pontos desse subconjunto, isto é, se qualquer vizinhança de $\bar{x}$ contém algum elemento X . O conjunto dos pontos aderentes a X é chamado de fecho de X , e será denotado por $\text{cl}(X)$.

Definição 1.16 [1] Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado quando $\text{cl}(X) = X$. De maneira equivalente, X é um conjunto fechado se, dada qualquer sequência $\{x^k\} \subset X$, com $x^k \rightarrow \bar{x}$, implicar em $\bar{x} \in X$.

Definição 1.17 [1] Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito ser ponto de fronteira de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando qualquer vizinhança de $\bar{x}$ contém algum elemento de X e algum elemento do seu complementar X^c ($\mathbb{R}^n \setminus X$). O conjunto dos pontos fronteira de X é denominado de fronteira de X e será denotado por ∂X .

Como já sabemos o que são conjuntos fechados e limitados, podemos estabelecer o clássico teorema de Heine-Borel que estabelece uma equivalência entre conjuntos compactos e conjuntos fechados e limitados.

Teorema 1.18 [1] *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser compacto se ele é fechado e limitado.*

Definição 1.19 *Dizemos que $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função homogênea de grau k , se para qualquer escalar positivo t e qualquer entrada x na função, temos*

$$\varphi(tx) = t^k \varphi(x),$$

onde k é uma constante. Além disso, se o escalar t é restrito a ser positivo ($t > 0$), dizemos que a função é positivamente homogênea.

Definição 1.20 [1] *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Diremos que f é coerciva sobre X , quando para cada sequência $\{x^k\} \subset X$ tal que ou $\|x^k\| \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$ ou $x^k \rightarrow x^* \in cl(X) \setminus X$ (conjunto dos pontos de acumulação), tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = +\infty$.*

Definição 1.21 [28] *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $z \in \mathbb{R}$. Se define o conjunto de nível, $C_f(z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq z\}$.*

Na Figura 1.1, apresentamos um exemplo de função coerciva $f(x) = x^4 - x^2$, da qual para uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qualquer, se $\|x^k\| \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$, obtemos então $f(x^k) \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} +\infty$.

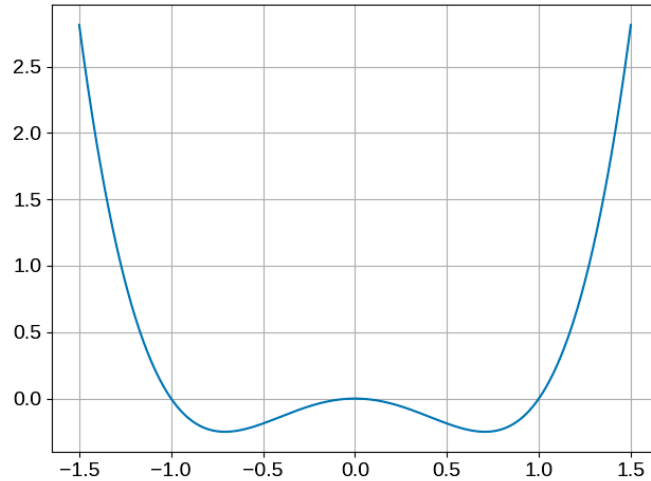


Figura 1.1: Exemplo de função coerciva.

Proposição 1.22 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Então f é coerciva sobre X se, e somente se, o conjunto*

$$C_f(z, X) = \{x \in X \mid f(x) \leq z\}$$

é limitado, para todo $z \in \mathbb{R}$.

Na seção seguinte, concentramos no caso de problemas de programação matemática com um objetivo, ou seja, o caso escalar. O intuito é revisar a existência e unicidade das soluções para estes problemas, e também as condições necessárias e suficientes de otimalidade. Além disso, no próximo capítulo, o qual trata dos problemas multiobjetivo, realizaremos uma análise semelhante à que foi apresentada até aqui.

1.2 Problema de Otimização Escalar/Mono-objetivo

Consideramos o seguinte problema não linear de otimização escalar ou também denominado problema de otimização mono-objetivo:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{NLP}$$

com função objetivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e conjunto viável não vazio $\mathcal{X}$ dado por

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0, i = 1, \dots, q \text{ e } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\},$$

onde $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$ e $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ são funções de restrição também continuamente diferenciáveis. Cada ponto $x \in \mathcal{X}$ é chamado ponto viável. Por simplicidade, também denotamos o conjunto viável $\mathcal{X}$ por

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0\}.$$

Definição 1.23 *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Considere o problema (NLP) e seja x^* um ponto viável em $\mathcal{X}$. Então*

1. *Dizemos que x^* é um minimizador global (ou solução ótima) do problema (NLP), ou seja, um minimizador global de f em $\mathcal{X}$, se $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$.*
2. *Dizemos que x^* é um minimizador local (ou solução ótima local) do problema (NLP) se existe um $\delta > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathcal{X} \cap B(x^*, \delta)$.*
3. *O valor ótimo do problema (NLP) se define como sendo $\inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$. Se x^* é um minimizador global então $\inf_{x \in \mathcal{X}} f(x) = f(x^*)$.*

A função objetivo f pode admitir vários minimizadores globais. Entretanto, o valor ótimo (global) do problema (NLP) é único.

Dado $\bar{x} \in \mathcal{X}$, dizemos que uma restrição de desigualdade g_i é ativa em $\bar{x}$ quando $g_i(\bar{x}) = 0$. Caso $g_i(\bar{x}) < 0$, dizemos que g_i é inativa em $\bar{x}$. O conjunto dos índices das

restrições de desigualdade ativas é denotado por

$$I(\bar{x}) = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Definição 1.24 [1] Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito estacionário para o problema (NLP) quando existirem vetores $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^q$ (multiplicadores de Lagrange) tais que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^q \bar{\beta}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0, \quad (1.7a)$$

$$g(\bar{x}) \leq 0, h(\bar{x}) = 0, \quad (1.7b)$$

$$\bar{\alpha}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.7c)$$

$$\bar{\alpha}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.7d)$$

Para o problema irrestrito, ou seja, quando $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, dizemos que um ponto $\bar{x}$ é estacionário ou crítico da função f , se $\nabla f(\bar{x}) = 0$. As condições (1.7a)–(1.7d) são conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) e, sob determinadas hipóteses de qualificação, são satisfeitas em um ponto que seja minimizador. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é dito qualificado quando atende a uma condição de qualificação (CQ). Apresentamos a seguir algumas dessas CQs para o problema (NLP).

Definição 1.25 (Condição de qualificação de independência linear) [1, pág. 150] Dizemos que a condição de qualificação de independência linear (LICQ) é satisfeita em $\bar{x}$ quando o conjunto formado pelos gradientes das restrições de igualdade e das restrições de desigualdade ativas é linearmente independente, isto é,

$$\{\nabla g_i(\bar{x}) \mid i \in I(\bar{x})\} \cup \{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, q\} \text{ é LI.}$$

Definição 1.26 (Condição de qualificação de Slater) [1, pág. 149] Dizemos que a condição de qualificação de Slater é satisfeita quando h é afim, cada componente g_i , $i = 1, \dots, m$, é convexa e existe $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $h(\tilde{x}) = 0$ e $g(\tilde{x}) < 0$.

Teorema 1.27 (KKT) [1] Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ um minimizador local do problema (NLP) e suponha que seja satisfeita uma condição de qualificação. Então existem vetores $\alpha^* \in \mathbb{R}^m$, $\beta^* \in \mathbb{R}^p$ tais que (x^*, α^*, β^*) cumpre (1.7a)–(1.7d).

Existe uma situação particular que se faz presente neste trabalho, em que as restrições são afins, caso em que os pontos viáveis também são qualificados.

Proposição 1.28 (Conjunto viável poliedral) [1] Suponha que as restrições g e h são afins, isto é, digamos que o problema seja da forma

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && Ax \leq b \\ & && Mx = r, \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $r \in \mathbb{R}^p$. Neste caso, todo ponto viável é qualificado. Portanto, se x^* é um minimizador local deste problema, então x^* satisfaz as condições de KKT.

Se não for verificada nenhuma condição de qualificação, podemos ter minimizadores que não cumpram KKT, atrapalhando a caracterização de tais pontos. Precisamos então de condições necessárias e ou suficientes de otimalidade para que um ponto viável do problema (NLP) seja ótimo. Neste trabalho, nosso foco será em condições de primeira ordem (ou seja, condições que envolvem as derivadas de primeira ordem).

1.2.1 Convexidade

A convexidade é um dos conceitos que desempenha um papel importante na resolução de problemas de otimização. Tal característica garante que pontos estacionários (que as condições de KKT são satisfeitas) são soluções globais. Vamos começar relembrando alguns dos principais conceitos e resultados relacionados a convexidade que serão úteis nos capítulos futuros para abordar resultados teóricos e algorítmicos, mais especificamente, do Método do Gradiente Projetado Multiobjetivo (PGM-MOP).

Definição 1.29 [1, pág.39] Um subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se, para todo $x, y \in \mathcal{X}$, o segmento de reta com extremidades em x e y está inteiramente contido em $\mathcal{X}$. Em outras palavras, $x, y \in \mathcal{X} \Rightarrow (1 - t)x + ty \in \mathcal{X}$ para todo $t \in [0, 1]$.

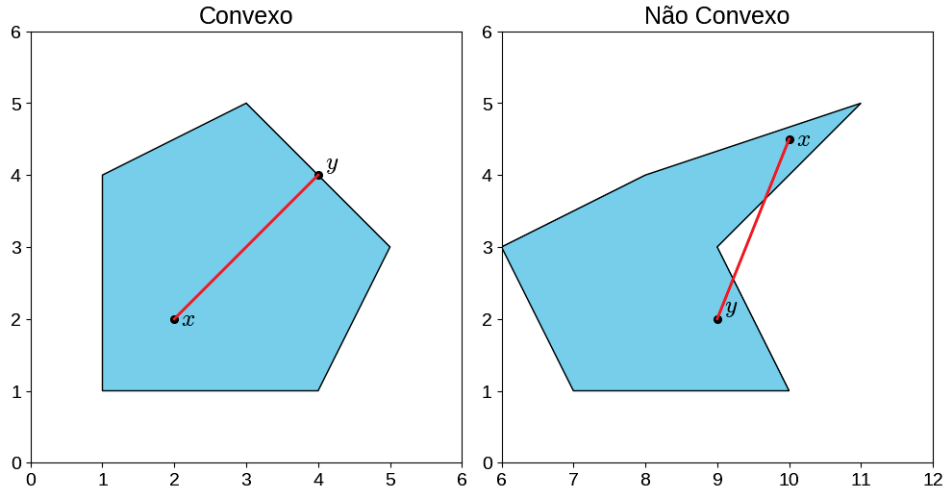


Figura 1.2: Exemplo de conjunto convexo e não convexo.

A noção de convexidade de conjuntos pode ser representada pela Figura 1.2, que ilustra dois conjuntos, um convexo e outro não.

Definição 1.30 Dado um conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Uma combinação convexa de elementos de $\mathcal{X}$ é um vetor da forma $\sum_{i=1}^n v_i x_i$, onde $x_i \in \mathcal{X}$, $v_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n v_i = 1$.

Sejam $\mathcal{X}_i$, $i = 1, \dots, m$ conjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$. Um resultado comum da literatura, importante neste trabalho, é que a interseção $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{X}_i$ é convexa.

Definição 1.31 [1, pág.56] *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Dizemos que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em $\mathcal{X}$ quando*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in \mathcal{X}$ e $t \in [0, 1]$. Caso a desigualdade seja estrita, para todos $x, y \in \mathcal{X}$ e $t \in (0, 1)$, f é dita *estritamente convexa*.

Segundo a Definição 1.31, o gráfico de uma função convexa está sempre abaixo de qualquer segmento que une dois pontos quaisquer do gráfico de f . Veja Figura 1.3.

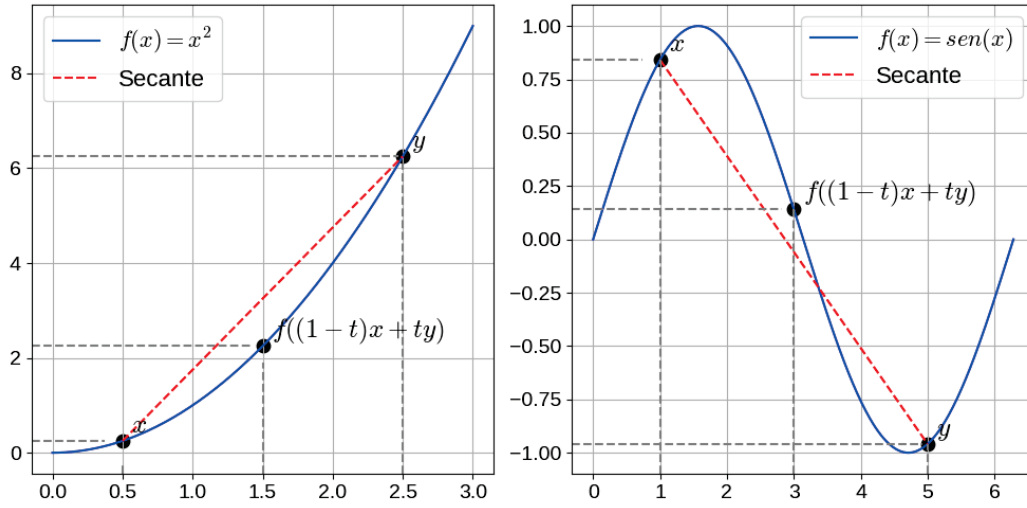


Figura 1.3: Exemplo de função convexa e não convexa.

Observação 1.32 *Todo problema de maximização*

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{maximizar}} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

pode ser transformado em um problema de minimização equivalente

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{minimizar}} && -f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Além disso, uma função f é dita *côncava* se $-f$ for convexa. Assim, a maximização de uma função côncava equivale à minimização de uma função convexa.

Nem sempre é fácil provar explicitamente que uma função é convexa seguindo diretamente a definição. No entanto, quando assumimos a hipótese de diferenciabilidade, podemos caracterizar a convexidade da função de outras formas.

Teorema 1.33 [1, pág.58] *Sejam $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathcal{X}$. A função é convexa se, e somente se,*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$$

para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

O próximo resultado estabelece que pontos estacionários de problemas convexos são minimizadores globais.

Teorema 1.34 [1] *Considere o problema (NLP) e suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, são funções continuamente diferenciáveis e convexas. Suponha também que h é afim. Então, qualquer ponto estacionário para este problema é minimizador global.*

Observação 1.35 *Portanto, se o problema de Otimização é convexo, isto é, a função objetivo é convexa e as restrições determinam um conjunto convexo, então as condições de KKT são necessárias e suficientes para x^* ser minimizador global.*

O próximo resultado justifica a convexidade ser uma propriedade tão interessante.

Teorema 1.36 [1] *Considere o problema (NLP) e suponha que $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e f é uma função convexa em $\mathcal{X}$. Então, todo minimizador local para este problema será minimizador global.*

Podemos agora apresentar a importância que a hipótese de convexidade tem sobre a projeção de pontos. Primeiramente, vamos supor um conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $z \in \mathbb{R}^n$, definimos então a projeção euclidiana do ponto z sobre o subconjunto $\mathcal{X}$, denotado por $P_{\mathcal{X}}(z)$, como a solução do problema de minimização de encontrar a menor distância entre z e os pontos de $\mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} \quad \|x - z\| \\ & \text{sujeito a} \quad x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

e definimos $P_{\mathcal{X}}(z) = \underset{x \in \mathcal{X}}{\operatorname{argmin}} \|x - z\|$.

O problema de otimização anterior pode não apresentar nenhuma solução, e se houver, não é garantido que será única, tudo vai depender da estrutura do conjunto utilizado. Se o conjunto $\mathcal{X}$ for fechado, vamos ter a garantia de existência da projeção do ponto z e caso ele também seja convexo, então a projeção é única [1].

O resultado a seguir garante a existência de ao menos um ponto para a projeção no conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Esse resultado não depende da norma, mas vamos continuar guardando essa notação para a norma euclidiana.

Lema 1.37 [1] *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado não vazio. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe $\bar{z} \in \mathcal{X}$ tal que*

$$\|z - \bar{z}\| \leq \|x - z\|, \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Além disso, se adicionarmos a hipótese que $\mathcal{X}$ é convexo, então dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe um único $\bar{z} \in \mathcal{X}$ tal que

$$\|z - \bar{z}\| \leq \|z - x\|, \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Apresentamos agora o teorema da projeção, este resultado afirma que sob a hipótese de um conjunto fechado e convexo e considerando um $z \in \mathbb{R}^n$, partindo do ponto $\bar{z} = P_X(z)$ temos que todo vetor que aponta para qualquer outro ponto $x \in X$ gera um ângulo obtuso (e no mínimo um ângulo reto) com o vetor que parte de $\bar{z}$ para z , ou seja, para todo $x \in X$, tem-se o produto interno $(x - \bar{z})^\top (z - \bar{z}) \leq 0$.

Teorema 1.38 [1] *Considere $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado, $z \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{z} = P_X(z)$, então $(x - \bar{z})^\top (z - \bar{z}) \leq 0$, para todo $x \in X$.*

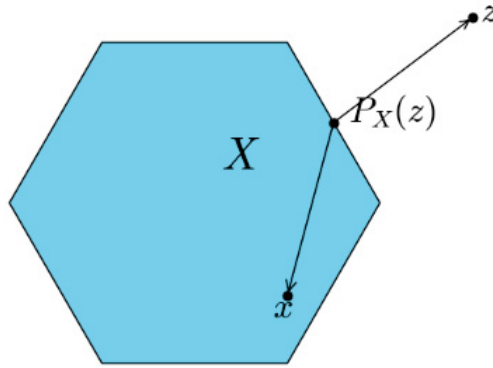


Figura 1.4: Ilustração do Teorema da Projeção.

O teorema anterior estabelece uma condição necessária, mas o próximo resultado fornece uma condição suficiente para caracterizar a projeção.

Lema 1.39 [1] *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado e $z \in \mathbb{R}^n$. Se $\bar{z} \in X$ satisfaz*

$$(z - \bar{z})^\top (x - \bar{z}) \leq 0,$$

para todo $x \in X$, então $\bar{z} = P_X(z)$.

Outro conceito importante para o trabalho são os chamados conjuntos cônicos, que são fundamentais na programação convexa e otimização vetorial. Em [1] é explicado sobre a possibilidade de criar aproximações lineares do conjunto viável em torno de um ponto. Dessa forma, estabelecemos propriedades sobre o conjunto viável que verificam o cumprimento das condições de KKT através de CQs recorrendo a tais conjuntos. A seguir, definimos o conceito de cone linear e seu polar.

Definição 1.40 [48, pág.20] Dizemos que o subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um cone se $tx \in X$ sempre que $x \in X$, para todo $t \geq 0$. Dizemos que um cone X é pontudo se $X \cap -X = \{0\}$.

Um cone também pode ser caracterizado como convexo e não convexo, como mostra a imagem abaixo.

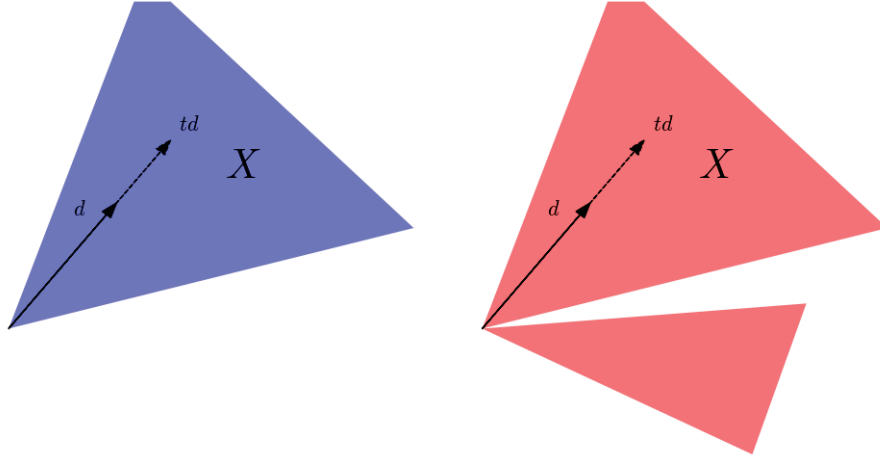


Figura 1.5: Exemplo de cone convexo e não convexo.

Em seguida, veremos o cone formado pelos vetores que formam um ângulo obtuso ou reto com os outros vetores do conjunto X .

Definição 1.41 [1, pág.192] Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, definimos o polar de X como

$$X^\circ = \{d \in \mathbb{R}^n \mid d^\top x \leq 0, \forall x \in X\}.$$

Observe que na Definição 1.41, todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ vai possuir um polar e que esse polar será um conjunto não vazio, pois o vetor nulo também pertence a esse conjunto. O próximo resultado fundamenta a construção da relação de dominância em otimização multiobjetivo através da relação de ordem parcial.

Proposição 1.42 [48, pág.20] Seja A uma relação binária em $\mathbb{R}^n$. A é uma ordem parcial linear se, e somente se, existe um cone convexo pontudo $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$(x, y) \in A \quad \text{se, e somente se,} \quad y - x \in K. \quad (1.8)$$

Por conveniência, vamos representar a relação binária $(x, y) \in A$ por $x \leq_K y$, seguindo a notação de [48]. Logo, podemos reescrever (1.8) como $x \leq_K y \iff y - x \in K$. Além disso, para $y, z \in \mathbb{R}^n$ escrevemos $z \geq y$ (ou $y \leq z$) para significar $z - y \in \mathbb{R}_+^n$ e $z > y$ (ou $y < z$) para $z - y \in \mathbb{R}_{++}^n$.

Definição 1.43 Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um cone convexo fechado e não vazio com $\text{int}(K) \neq \emptyset$. O conjunto

$$K^* = \{d \in \mathbb{R}^m \mid d^\top x \geq 0, \quad \forall x \in K\}$$

é o cone dual de K .

Considere o conjunto arbitrário $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x^* \in X$, uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ será denominada direção viável em x^* , com respeito a X , quando partimos desse ponto e caminhamos ao longo dessa direção, por algum tamanho de passo, e chegamos em um ponto que também pertence a X .

Definição 1.44 *Sejam $x^* \in X$ e $d \in \mathbb{R}^n$, dizemos que d é uma direção viável no ponto x^* em relação ao conjunto X , quando existe algum $\delta > 0$ tal que*

$$x^* + td \in X, \forall t \in [0, \delta].$$

O conjunto das direções viáveis em x^* , com respeito a X é denotado por

$$\mathcal{V}_X(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \delta > 0 \mid x^* + td \in X, \forall t \in [0, \delta]\}.$$

Perceba que pela própria definição do conjunto $\mathcal{V}_X(x)$, podemos concluir que ele é um cone não vazio. No entanto, esse cone não oferece informações relevantes sobre a estrutura do conjunto em torno do ponto, podendo haver casos onde o vetor nulo é o único vetor viável, por exemplo, quando X é uma circunferência.

Vejamos agora outro tipo de vetor bastante utilizado no estudo do domínio da função em problemas de otimização escalar. Além disso, seu conceito pode ser estendido para o caso multiobjetivo, como veremos posteriormente.

Definição 1.45 *[1, pág.66] Considere uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $x^* \in X$ e um vetor direção $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Afirmamos que d é uma direção de descida para f , a partir de x^* , quando existe algum $\delta > 0$ tal que*

$$f(x^* + td) < f(x^*), \forall t \in (0, \delta).$$

O conjunto de direções de descida da função f em x^* será denotado por $\mathcal{S}(x^*)$.

Perceba que $\mathcal{S}(x^*)$ não é um cone, uma vez que o vetor nulo não pertence a ele. As direções de descida são um tanto complicadas de serem trabalhadas seguindo apenas a definição, mas podemos caracterizá-las com o seguinte resultado.

Teorema 1.46 *[1] Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $x^* \in X$. Se $d \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $\nabla f(x^*)^\top d < 0$, então $d \in \mathcal{S}(x^*)$.*

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, o cone tangente para X em $\bar{z} \in X$ é o conjunto

$$T_X(\bar{z}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists (z^k, t_k) \subset X \times \mathbb{R}_+ \text{ com } t_k \rightarrow 0 \text{ e } \frac{z^k - \bar{z}}{t_k} \rightarrow d \right\} \quad (1.9)$$

Esse cone é muito conhecido na literatura de otimização, porque também permite uma aproximação do conjunto viável nas proximidades de um ponto. Temos que $T_X(x)$ sempre contém todas as direções viáveis em x , $\mathcal{V}_X(x)$, então é fácil ver que a propriedade de estacionariedade

$$\nabla f(x)^\top d \geq 0, \text{ para todo } d \in T_X(x) \quad (1.10)$$

é uma condição necessária de otimalidade para (NLP) com X convexo e compacto. Verificar a condição (1.10) geralmente não é imediato, uma vez que estamos pedindo que a propriedade seja válida para infinitas direções.

Junto do cone tangente, o cone normal também é uma ferramenta útil na obtenção de condições de otimalidade necessárias com base na sua aproximação da vizinhança do conjunto analisado. Definimos o cone normal como

$$\hat{N}_X(\bar{z}) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{z \rightarrow \bar{z}, z \in X, z \neq \bar{z}} \frac{w^\top (z - \bar{z})}{\|z - \bar{z}\|} \leq 0 \right\}, \quad (1.11)$$

e o cone normal limitante de X para $\bar{z} \in X$ é definido por

$$N_X(\bar{z}) = \limsup_{z \rightarrow \bar{z}, z \in X} \hat{N}_X(z).$$

De acordo com [45, pág.6], se $\bar{x} \notin X$, temos $T_X(\bar{z}) = \emptyset$, $\hat{N}_X(z^*) = N_X(\bar{z}) = \emptyset$. Além disso, sempre temos $\hat{N}_X(\bar{z}) = T_X(\bar{z})^\circ$ e $\hat{N}_X(\bar{z}) \subset N_X(\bar{z})$. Por fim, se o conjunto X é convexo, então $\hat{N}_X(\bar{z}) = N_X(\bar{z}) = \{\beta \in \mathbb{R}^n \mid \beta^\top (z - \bar{z}) \leq 0, \forall z \in \Omega\}$.

Um cone também muito usado na otimização escalar é o cone viável linearizado. Esse cone também é usado para aproximar o conjunto viável de uma função, sendo reconhecido principalmente na caracterização dos pontos de KKT através de seu polar, algumas CQs famosas e mais fracas como Abadie e Guignard surgem a partir da relação desse cone com o cone tangente.

Definição 1.47 [1, pág.136] Dado $\bar{z} \in \mathcal{X}$, definimos o cone viável linearizado de $\mathcal{X}$ em torno de $\bar{z}$ por

$$\mathcal{D}(\bar{z}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_i(\bar{z})^\top d = 0, \text{ se } i \in \mathcal{I} \text{ e } \nabla g_j(\bar{z})^\top d \leq 0, \text{ se } j \in I_g(\bar{z})\}.$$

Lema 1.48 [1] O conjunto $\mathcal{D}(\bar{z})$ é um cone convexo fechado não vazio.

O conjunto $\mathcal{D}(\bar{z})$ pode ser visto como um conjunto viável com suas restrições de igualdade e desigualdade ativas linearizadas.

1.2.2 Programação Quadrática Sequencial

Uma técnica muito utilizada na solução de problemas difíceis é a resolução através de uma sequência de problemas mais simples. Veremos a seguir uma dessas técnicas, de-

nominada Programação Sequencial de Mínimos Quadrados (SLSQP, do Inglês *Sequential Least Squares Programming*), que é baseada na Programação Quadrática Sequencial (SQP, do Inglês *Sequential Quadratic Programming*) [1, 53].

Considere o problema (NLP) com f , g e h pelo menos duas vezes continuamente diferenciáveis. Suponhamos que x^k é uma aproximação da solução para este problema. Iremos aproximar f por uma função quadrática numa vizinhança de x^k

$$f(x) \approx f(x^k) + \nabla f(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^\top B^k(x - x^k),$$

onde B^k denota uma aproximação da matriz Hessiana da função Lagrangeana associada ao problema (NLP) com $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ e dada por $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^\top h(x) + \mu^\top g(x)$, onde λ e μ são os multiplicadores de Lagrange.

Faremos também uma aproximação linear nas restrições. Denotando $d^k = x - x^k$ podemos transformar o problema (NLP) em um problema mais fácil e provavelmente conseguiremos uma aproximação melhor do que x^k

$$\begin{aligned} & \underset{d \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && f(x^k) + \nabla f(x^k)^\top d + \frac{1}{2}d^\top B^k d \\ & \text{sujeito a} && h(x^k) + \nabla h(x^k)^\top d = 0, \\ & && g(x^k) + \nabla g(x^k)^\top d \leq 0. \end{aligned} \tag{SQP}$$

Apresentamos a seguir um algoritmo básico de programação quadrática sequencial destinado a resolver (NLP) baseado em [53].

Algoritmo 1 Algoritmo SQP básico.

- Passo 1. Considere x^0 uma aproximação inicial da solução de (NLP), λ^0 e μ^0 uma aproximação inicial dos multiplicadores de Lagrange. Se x^k, λ^k, μ^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) são as aproximações obtidas na k -ésima iteração, $B^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica, então x^{k+1} é obtida da seguinte maneira:
 - Passo 2. Resolva o problema (SQP) para obter uma direção de busca $\bar{d}$.
 - Passo 3. Verifique o critério de convergência para o problema (NLP). Se eles são satisfeitos, vamos para o último Passo, do contrário, segue-se ao Passo 4.
 - Passo 4. Atualize os parâmetros de penalidade para a função de mérito (usada para obter um critério de aceitação) e estimar novos multiplicadores $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$.
 - Passo 5. Se $\bar{x}$ verifica um critério de aceitação, definir $x^{k+1} = \bar{x}$, $\lambda^{k+1} = \bar{\lambda}$ e $\mu^{k+1} = \bar{\mu}$ e terminar a iteração. Caso contrário, definir $k = k + 1$ e, em seguida, retornar ao Passo 2.
 - Passo 6. Retornar $d^{k+1} = \bar{d} = x^{k+1} - x^k$, λ^k , μ^k , $f(x^k)$.
-

Neste trabalho, vamos focar no SLSQP, variação do método SQP, desenvolvido em 1982 por [30]. O algoritmo do SLSQP é semelhante ao Algoritmo 1, exceto que agora,

em cada iteração, um subproblema de mínimos quadrados é resolvido para gerar a direção de descida utilizada para o problema (NLP)

$$\begin{aligned} & \underset{d \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && \frac{1}{2} \|R^k d - q^k\|^2 \\ & \text{sujeito a} && h(x^k) + \nabla h(x^k)^\top d = 0, \\ & && g(x^k) + \nabla g(x^k)^\top d \leq 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

com R^k sendo uma matriz triangular superior e q^k um vetor, que satisfazem as equações $(R^k)^\top R^k = B^k$ e $(R^k)^\top q^k = -\nabla f(x^k)$, respectivamente. Em seguida, depois de obter os fatores $LDL^\top$ (L^k e D^k) de B^k , conseguimos calcular a matriz R^k , com

$$R^k = (D^k)^{\frac{1}{2}} \cdot (L^k)^\top,$$

onde L^k é uma matriz triangular inferior com a diagonal formada por uns, e D^k é uma matriz identidade.

1.2.3 Método do Gradiente Projetado

O Método do Gradiente Projetado (PGM, do Inglês *Projected Gradient Method*) é uma técnica de otimização muito usada na resolução de problemas de minimização em conjuntos viáveis fáceis de serem projetados, isto é, conjuntos fechados e convexos [18]. Em [13] foi acrescentado passo espectral e busca linear não monótona.

Iniciamos com x^0 um ponto escolhido aleatoriamente, mas para o método iniciar precisamos de um ponto viável, então projetamo-o em $\mathcal{X}$ obtendo o ponto x^1 . Basicamente, o método realiza duas etapas iterativas. Primeiro, é determinado o gradiente, o tamanho de passo $t_k > 0$, obtendo $v^k = x^k - t_k \nabla f(x^k)$. Em seguida, realiza-se a projeção ortogonal sobre o conjunto viável, com $P_{\mathcal{X}}(v^k)$. O próximo iterando x^{k+1} é obtido na direção dada por $d^k = P_{\mathcal{X}}(v^k) - x^k$. O processo se repete até que alguma condição de estacionariedade seja satisfeita. Na Figura 1.6 podemos ver um exemplo simples de aplicação do método.

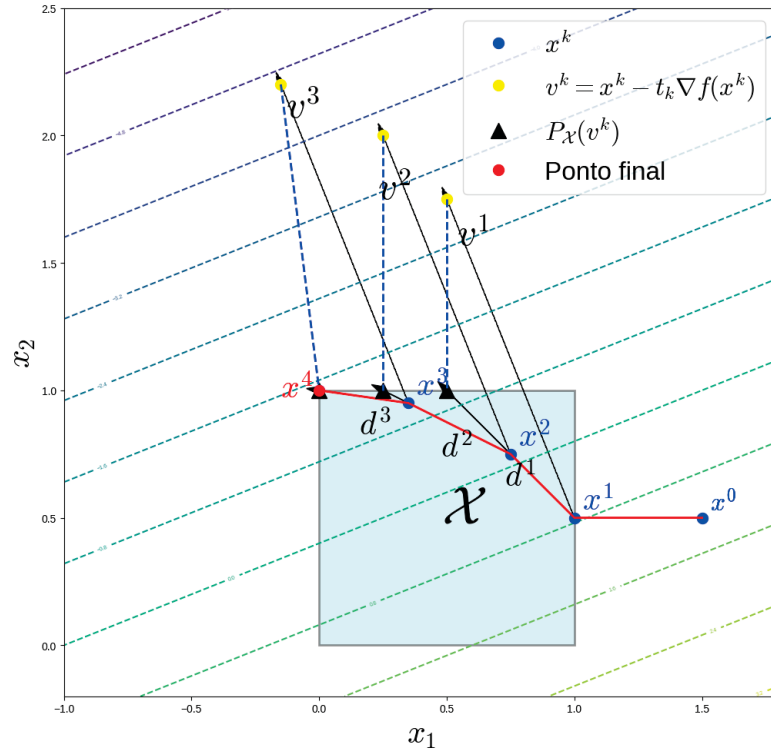


Figura 1.6: Aplicação do Método do Gradiente Projetado.

1.2.4 Algoritmo de Dykstra

Agora, abordaremos o algoritmo de Dykstra, que desempenha um papel importante no trabalho, por garantir projeção na interseção de conjuntos fechados e convexos. Foi proposto por [47] e três anos depois foi ampliado para espaços de Hilbert em [27].

Considere um ponto arbitrário $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e os conjuntos fechados e convexos

$$\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m \subseteq \mathbb{R}^n,$$

nosso objetivo é determinar o ponto pertencente à interseção não vazia e finita

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{X}_i \neq \emptyset$$

que está mais próximo de $\bar{x}$. Alcançamos isso solucionando o problema de minimização abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \|\bar{x} - z\|^2 \\ &\text{sujeito a} \quad z \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

O algoritmo de Dykstra foi desenvolvido para resolver situações semelhantes ao problema (1.13), em que o ponto mínimo procurado $z^* \in \mathbb{R}^n$ é exatamente a projeção do ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{X}$, isto é, $z^* = P_{\mathcal{X}}(\bar{x})$.

O método produz duas sequências ao longo de seus ciclos iterados, sendo a sequência principal $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e as sequências de vetores de correção $\{I_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ para cada conjunto $\mathcal{X}_i$ com $i = 1, \dots, m$. Para $k \geq 1$, elas são calculadas usando as seguintes equações:

$$\begin{aligned} z_i^k &= P_{\mathcal{X}_i}(z_{i-1}^k + I_i^{k-1}), \\ I_i^k &= z_{i-1}^k - (z_i^k - I_i^{k-1}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

com $P_{\mathcal{X}_i}(x) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{X}_i} \|x - u\|$ sendo a projeção euclidiana de x sobre o conjunto fechado e convexo $\mathcal{X}_i$, $k \in \mathbb{N}$. Além disso, partiremos do valor inicial $z_m^0 = \bar{x}$ e dos acréscimos $I_i^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ para todo $i = 1, \dots, m$. A sequência de vetores de correção $\{I_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é fundamental para garantir a convergência.

Perceba que durante cada ciclo, a sequência de correção $\{I_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ armazena os resíduos acumulados ao longo das projeções. Em particular, o vetor $I_i^k = z_i^k - (z_{i-1}^k - I_i^{k-1}) = I_i^{k-1} + z_{i-1}^k - z_i^k$ armazena a diferença entre o ponto antes da projeção com o vetor após a projeção, isto é, quanto a projeção em $\mathcal{X}_i$ modificou o ponto atual. Deste modo, as próximas projeções consideram esses deslocamentos anteriores, convergindo cada vez mais para a projeção na interseção.

A seguir apresentamos o algoritmo de Dykstra [40, pág. 7].

Algoritmo 2 Algoritmo de Dykstra.

Passo 1. Inicializar com $z_m^0 = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $I_1^0 = \dots = I_m^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Passo 2. Repita o processo:

Para $k = 1, 2, 3, \dots$, calcule

$$z_0^k = z_m^{k-1}.$$

Para $i = 1, 2, \dots, m$, calcule

$$z_i^k = P_{\mathcal{X}_i}(z_{i-1}^k + I_i^{k-1}),$$

$$I_i^k = z_{i-1}^k - (z_i^k - I_i^{k-1}).$$

Passo 3. Retorne z_m^k .

A seguir temos o resultado que estabelece a convergência do método de Dykstra.

Teorema 1.49 [27] *Considere os conjuntos fechados e convexos $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{X}_i \neq \emptyset$. Para todo $i = 1, \dots, m$ fixo e todo vetor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ produzida pelo Algoritmo 2 converge para $z^* = P_{\mathcal{X}}(\bar{x})$.*

O último resultado apresenta uma propriedade importante sobre o Algoritmo 2, o qual estabelece convergência para uma única solução.

Teorema 1.50 [47] *Considere $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência gerada pelo Algoritmo 2. Então seu limite z^* é a única solução de (1.13).*

1.2.5 Dualidade

A teoria da dualidade tem sido uma questão central há muito tempo na programação convexa. Baseia-se em associar um problema de minimização (primal) a um problema de maximização (dual), que sob certas condições é equivalente ao primal e pode ter uma resolução mais fácil. Além disso, quando o problema primal é convexo, obtemos relações de dualidade mais fortes. Existem diversos tipos de duais para um dado problema de programação matemática, por exemplo o dual do tipo Wolfe [52].

Em problemas com restrições, é conveniente definir uma função, conhecida como Lagrangeana, que incorpora informações sobre a função objetivo e as restrições. Para melhor compreensão podemos consultar [2, 37].

Definição 1.51 *Dado um problema de Otimização, como o descrito em (NLP), podemos definir a função Lagrangeana $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\mathcal{L}(x, \zeta, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \zeta_i g_i(x) + \sum_{i=1}^q \mu_i h_i(x) = f(x) + \zeta^\top g(x) + \mu^\top h(x),$$

onde os coeficientes ζ_i e μ_i são chamados de multiplicadores de Lagrange.

O problema dual de Lagrange de (NLP) é definido por

$$\begin{aligned} \max_{\zeta, \mu} \quad & \theta(\zeta, \mu) \\ \text{s.a} \quad & \zeta \geq 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $\theta : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, chamada função dual, é dada por $\theta(\zeta, \mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \zeta, \mu)$.

Note que o problema dual (1.15) é equivalente ao problema

$$\begin{aligned} \min_{\zeta, \mu} \quad & -\theta(\zeta, \mu) \\ \text{s.a} \quad & (\zeta, \mu) \in D, \end{aligned} \tag{1.16}$$

onde

$$D = \{(\zeta, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \mid \zeta \geq 0 \text{ e } \theta(\zeta, \mu) > -\infty\}. \tag{1.17}$$

Uma das teorias da dualidade baseia-se no conceito de funções conjugadas, atribuído a Fenchel e Rockafellar. Dado um problema de otimização, utilizando funções conjugadas, associam a ele um problema dual [46].

Definição 1.52 *A função $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f^*(p^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{p^{*\top} x - f(x)\}$$

é chamada de função conjugada de f .

Então, considerando o problema de otimização

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & x \in \mathcal{X}, \\ & g(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{P}$$

O problema (P) podemos considerar como um problema primal e seu problema dual de Lagrange, usando a definição de função conjugada, pode ser obtido como

$$\sup_{\zeta^* \geq 0} \inf_{x \in \mathcal{X}} [f(x) + \zeta^{*\top} g(x)]$$

que é exatamente o problema dual (1.15) se definirmos a função Lagrangeana de (NLP) aplicada somente as restrições de desigualdade $g(x) \leq 0$. Existem outros duais na literatura como dual de Fenchel ou Fenchel-Lagrange [46].

Uma propriedade interessante é que, mesmo o problema primal não cumprindo nenhuma hipótese de convexidade, o dual será sempre equivalente a um problema convexo.

Teorema 1.53 [2] *O conjunto definido em (1.17) é convexo e a função dual θ é côncava, o que significa que o problema (1.16) é convexo.*

O teorema seguinte estabelece que o valor da função dual nunca supera o valor da função primal em pontos viáveis para os problemas (NLP) e (1.15).

Teorema 1.54 [2, Dualidade fraca] *Dados $\bar{x} \in \mathcal{X}$ e $(\bar{\zeta}, \bar{\mu}) \in D$, temos $\theta(\bar{\zeta}, \bar{\mu}) \leq f(\bar{x})$.*

Agora, veremos que se ocorrer a igualdade no Teorema 1.54, então os pontos são soluções dos seus respectivos problemas.

Teorema 1.55 [2, Dualidade forte] *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ funções continuamente diferenciáveis. Se $x^* \in \mathcal{X}$ e $(\zeta^*, \mu^*) \in D$ satisfazem a igualdade $\theta(\zeta^*, \mu^*) = f(x^*)$, então x^* é minimizador global do problema primal (NLP) e (ζ^*, μ^*) é maximizador global do problema dual (1.15). Além disso, (x^*, ζ^*, μ^*) satisfaz as condições de KKT dadas em (1.7a)–(1.7d).*

Em geral, não podemos garantir que $\theta(\zeta^*, \mu^*) = f(x^*)$. A diferença entre tais valores é definida abaixo.

Definição 1.56 [2] *A diferença entre os valores ótimos da função objetivo do problema primal e do dual, $f(x^*) - \theta(\zeta^*, \mu^*)$, é definida como gap de dualidade.*

Sob hipóteses de convexidade, podemos provar que o gap de dualidade é nulo.

Teorema 1.57 *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, são funções continuamente diferenciáveis e convexas e que h é uma função afim. Se $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto estacionário para o problema (NLP) e $(\zeta^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$ é um vetor de multiplicadores de Lagrange associado, então x^* é minimizador global do problema primal (NLP) e (ζ^*, μ^*) é maximizador global do problema dual (1.15). Além disso, não há gap de dualidade, ou seja, $\theta(\zeta^*, \mu^*) = f(x^*)$.*

Além do que vimos nos Teoremas 1.55 e 1.57, uma outra maneira de relacionar otimalidade com o *gap* de dualidade é por meio do conceito de ponto de sela, conforme veremos a seguir.

Definição 1.58 *Um vetor $(x^*, \zeta^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^q$ é dito ponto de sela da função Lagrangeana associada ao problema primal (NLP) quando*

$$\mathcal{L}(x^*, \zeta, \mu) \leq \mathcal{L}(x^*, \zeta^*, \mu^*) \leq \mathcal{L}(x, \zeta^*, \mu^*) \quad (1.18)$$

para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $(\zeta, \mu) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^q$.

Teorema 1.59 *Suponha que $(x^*, \zeta^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^q$ é um ponto de sela da função Lagrangeana. Então, $x^* \in \mathcal{X}$, $(\zeta^*, \mu^*) \in D$ e $\theta(\zeta^*, \mu^*) = f(x^*)$.*

A recíproca do Teorema 1.59 também é verdadeira.

Teorema 1.60 *Suponha que $(x^*, \zeta^*, \mu^*) \in \mathcal{X} \times D$ satisfaz $\theta(\zeta^*, \mu^*) = f(x^*)$. Então (x^*, ζ^*, μ^*) é um ponto de sela da função Lagrangeana.*

Por fim, também apresentamos um resultado imediato pelo Teorema 1.57.

Corolário 1.61 *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, são funções continuamente diferenciáveis e convexas e que h é uma função afim. Se $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto estacionário para o problema (NLP) e $(\zeta^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$ é um vetor de multiplicadores de Lagrange associado, então (x^*, ζ^*, μ^*) é um ponto de sela da função Lagrangeana.*

Capítulo 2

Otimização Multiobjetivo

Neste Capítulo trataremos de alguns resultados de grande importância para a sequência do trabalho. Discutiremos conceitos relacionados a Otimização Multiobjetivo Não Linear e seus problemas, tanto na versão irrestrita quanto restrita. Apresentamos dois métodos para resolver problemas multiobjetivo, Método do Gradiente e Método do Gradiente Projetado Multiobjetivo (PGM-MOP, do Inglês *Projected Gradient Method* para MOP). Além disso, daremos foco ao segundo método, realizando uma abordagem de busca linear não monótona. Maiores detalhes dos resultados abordados neste Capítulo podem ser consultados em [14, 15, 19, 20, 21, 23, 25, 28, 29, 48]

2.1 Preliminares

Existem diversas situações do cotidiano que podem ser modeladas como problemas matemáticos de tomada de decisões, nos quais buscamos otimizar um número finito de funções objetivo simultaneamente. Cada função objetivo indicaria um critério diferente, e na grande maioria dos casos, são critérios conflitantes. Estes problemas são conhecidos como problemas de otimização multiobjetivo, um dos principais focos na área de Otimização, na qual buscamos otimizar uma função vetorial.

Existe uma ampla variedade de problemas multiobjetivo originados de situações reais, os quais podem ser modelados e resolvidos por técnicas e métodos de otimização. No caso de o leitor desejar conhecer outras aplicações, em [4, 15] podemos encontrar referências de aplicação nas áreas da Engenharia, Economia e Estatística.

No geral, problemas de otimização multiobjetivo restritos têm o seguinte formato

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^T \\ &\text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{MOP}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, com $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq 2$. Assumimos ainda que F é uma função multiobjetivo continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$, isto é, cada componente $f_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ da

função objetivo é continuamente diferenciável em seu domínio, com $i = 1, \dots, p$.

Denominamos o conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ de conjunto viável do problema multiobjetivo (MOP), sendo formado pelas funções de restrição continuamente diferenciáveis $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vamos assumir que $\mathcal{X}$ é um conjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, convexo simples e fechado, ou seja, é fácil projetar nele. Para que $\mathcal{X}$ tenha essas propriedades com restrições de igualdade e desigualdade, escolhemos supor que as funções h e g sobre o conjunto $\mathcal{X}$ são afins. Definimos

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0\} \quad (2.1)$$

e

$$\mathcal{Y} = F(\mathcal{X}) = \{F(x) \in \mathbb{R}^p \mid x \in \mathcal{X}\} \quad (2.2)$$

como os conjuntos viáveis de (MOP) no espaço das soluções $\mathbb{R}^n$ (ou também conhecido como espaço de decisão), e no espaço objetivo $\mathbb{R}^p$, respectivamente.

Em problemas de Otimização Multiobjetivo podemos ter soluções que, quando comparadas às demais, apresentam piores resultados sob todos os objetivos simultaneamente considerados. Claramente, estas soluções não importam. Em contrapartida, também podemos ter soluções que, quando comparadas às demais, são melhores em um ou mais objetivos. E são tais soluções que possivelmente otimizam a função objetivo F .

Por exemplo, no setor de varejo, um vendedor quer maximizar a qualidade do seu produto, enquanto simultaneamente quer minimizar os custos de aquisição de materiais desse produto, caracterizando um problema de otimização bi-objetivo.

A seguir, apresentamos um problema de otimização bi-objetivo definido em $\mathbb{R}^2$ com quatro restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} \underset{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2}{\text{minimizar}} \quad & F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^T = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)^T \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 3 \geq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6 \leq 0, \\ & g_3(x_1, x_2) = x_1 \geq 0, \\ & g_4(x_1, x_2) = x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Na Figura 2.1 vemos o conjunto viável $\mathcal{X}$ do problema (2.3) no espaço das soluções.

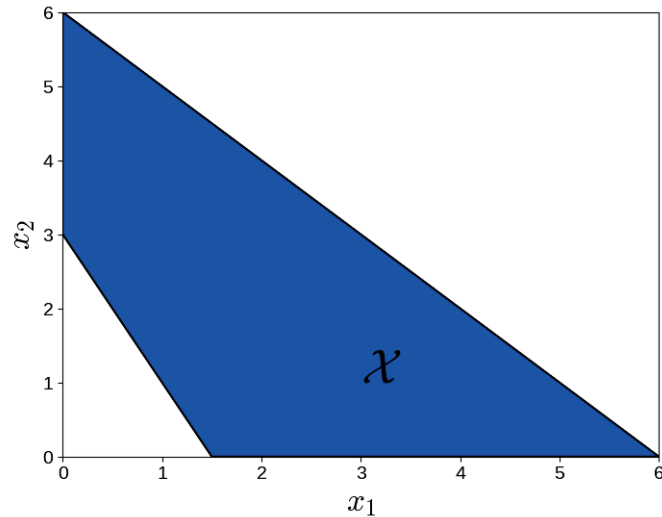


Figura 2.1: Conjunto admissível do problema (2.3) - Espaço das soluções.

Na Figura 2.2, apresentamos o conjunto viável $\mathcal{Y}$ no espaço dos objetivos. Perceba que não existe um ponto em $\mathcal{X}$ que minimize ao mesmo tempo os dois objetivos f_1 e f_2 .

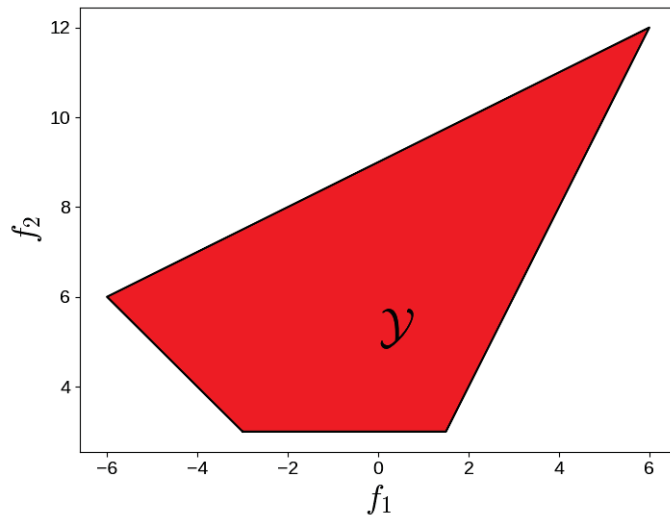


Figura 2.2: Conjunto admissível do problema (2.3) - Espaço dos objetivos.

Surge, então, duas indagações fundamentais: Como podemos definir uma “solução ótima” neste problema? E qual a generalização para mais objetivos?

A seguir, apresentamos uma situação mais complexa e que pode ser modelada em um problema multiobjetivo. Essa situação se faz presente no contexto da Engenharia de Produção.

Exemplo 2.1 *Suponhamos uma fábrica de automóveis operada com o sistema Just-In-Times (JIT), no qual diferentes modelos são produzidos em uma mesma linha, como Hatchbacks, Conversíveis e Esportivos. Em certo dia, ocorre um atraso no fornecimento dos bancos de couro, devido a questões climáticas ou logísticas. Consequentemente, os automóveis com essa configuração ficam de fora da sequência de produção até que esse item*

seja reposto no estoque. No entanto, retirar esses veículos da linha de produção e jogá-los no fim da fila pode trazer alguns problemas, como a desarmonia na linha de produção, o aumento dos custos operacionais devido à reorganização dos automóveis e também prováveis atrasos com outros fornecedores, que dependem dessa sequência de produção. A fábrica então aplica um modelo matemático multiobjetivo para realizar um re-sequenciamento. Por exemplo, usando o método no trabalho de [4], no qual atenda às restrições operacionais da linha de produção, tais como limite da quantidade de modelos por turno, o espaçamento mínimo entre os automóveis, restrições de segurança e, simultaneamente, busca minimizar os custos operacionais.

Para tentar responder às questões levantadas acima, novas noções de otimalidade para otimização multiobjetivo são introduzidas recorrendo aos conceitos de eficiência e dominância para comparação de pontos no espaço das soluções e no espaço dos objetivos, respectivamente. Iremos estabelecer primeiro o conceito de dominância usando a ordem parcial estrita anteriormente definida e depois definiremos o conceito de eficiência.

Definição 2.2 [19, pág.22] Dados dois pontos $\tilde{y}, \bar{y} \in \mathcal{Y}$, dizemos que $\tilde{y}$ domina $\bar{y}$ para o problema (MOP) e escrevemos como $\tilde{y} \prec \bar{y}$, se $\forall i = 1, \dots, p$, tem-se $\tilde{y}_i \leq \bar{y}_i$ e existe pelo menos um índice j tal que $\tilde{y}_j < \bar{y}_j$, ou seja, $\tilde{y} \leq \bar{y}$.

Para o caso irrestrito, ou seja, quando $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, diz-se que o ponto $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ domina outro ponto $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se $F(\tilde{y}) \leq F(\bar{y})$ e $F(\tilde{y}) \neq F(\bar{y})$.

Exemplo 2.3 Considere os pontos A, B, C e $D \in \mathcal{X}$ com $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $F(A) = (1, 7)$, $F(B) = (4, 7)$, $F(C) = (7, 5)$ e $F(D) = (3, 3)$. Na Figura 2.3 observamos a distribuição no conjunto dos objetivos $\mathcal{Y}$.

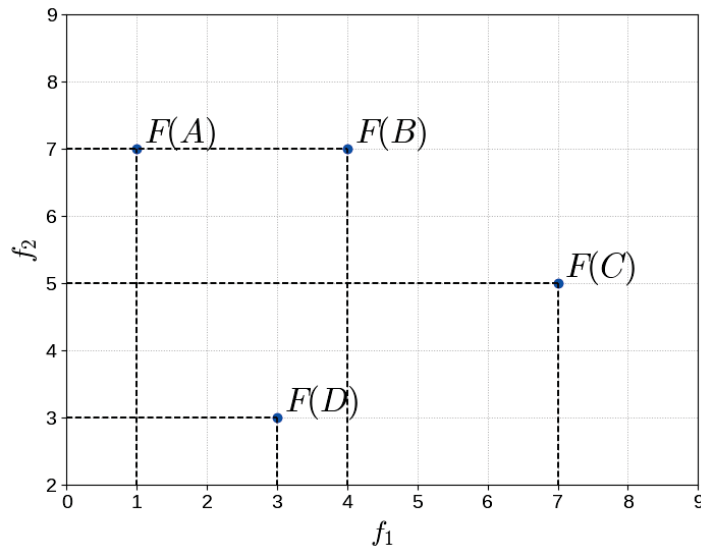


Figura 2.3: Imagem dos pontos A, B, C e D no conjunto dos objetivos $\mathcal{Y}$.

Pela Definição 2.2, observamos que $F(A) \leq F(B)$, ou seja, $F(A)$ domina $F(B)$ pois $f_2(A) = f_2(B)$ mas $f_1(A) < f_1(B)$, o mesmo ocorre com $F(D) \leq F(B)$ e $F(D) \leq F(C)$.

$F(C)$. Enquanto temos os pontos não comparáveis $F(A) \sim F(C)$, já que mesmo tendo $f_1(A) < f_1(C)$ temos $f_2(A) > f_2(C)$, o mesmo ocorre com $F(B) \sim F(C)$ e $F(A) \sim F(D)$.

Definição 2.4 [48, pág.21] *Sejam $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$, $C \subset \mathbb{R}^p$ um cone convexo pontudo. Um ponto $y^* \in \mathcal{Y}$ é um ponto minimal se não existe $y \in \mathcal{Y} - \{y^*\}$ tal que $y \leq_C y^*$.*

Para este trabalho, quando necessitarmos usar os resultados como da Definição 2.4, consideramos como cone convexo pontudo o ortante não-negativo $C = \mathbb{R}_+^p$.

Assim, de acordo com [48], um problema de Otimização Multiobjetivo através de cones consiste na busca por pontos $x \in \mathcal{X}$ tal que $F(x)$ pertença ao conjunto dos pontos minimais de $\mathcal{Y}$. O ponto de $\mathcal{X}$ que cumpre essa condição é chamado de solução eficiente, ou também, solução ótima de Pareto (nomenclatura devido ao matemático economista italiano Vilfredo Pareto, precursor desta área [51]). Dito de outra forma, um ponto é eficiente quando não é possível melhorar nenhum objetivo sem piorar em algum outro. Durante a década de 60, surgiram as primeiras noções sobre eficiência fraca.

Em outras palavras, o aumento da satisfação de alguns objetivos do problema causa a piora de outros, criando assim um equilíbrio entre os objetivos. Resumidamente, uma definição análoga ao caso escalar/mono-objetivo pode ser apresentada, veja Definição 1.23, como está presente no trabalho de [45].

Definição 2.5 *Considere o problema de minimizar $F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T$ sujeito a $x \in \mathcal{X}$ e seja x^* um ponto viável em $\mathcal{X}$. Então,*

1. *Dizemos que x^* é uma solução ótima local Pareto fraca (ou localmente fracamente eficiente) se existe um $\delta > 0$ tal que não existe $x \in \mathcal{X} \cap B(x^*, \delta)$ com $f_i(x) < f_i(x^*)$ para todo $i = 1, \dots, p$.*
2. *Dizemos que x^* é uma solução ótima local Pareto forte (ou localmente eficiente) se existe um $\delta > 0$ tal que não existe $x \in \mathcal{X} \cap B(x^*, \delta)$ com $f_i(x) \leq f_i(x^*)$, para todo $i = 1, \dots, p$ e $F(x) \neq F(x^*)$.*
3. *Dizemos que x^* é uma solução ótima Pareto fraca (ou fracamente eficiente) se não existe outro ponto viável $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$, para todo $i = 1, \dots, p$. Nesse caso $F(x^*)$ é, dito fracamente não dominado.*
4. *Dizemos que x^* é uma solução ótima Pareto forte (ou eficiente) se não existe outro ponto viável $x \in \mathcal{X}$ tal que $F(x) \leq F(x^*)$ e $F(x) \neq F(x^*)$. Nesse caso $F(x^*)$ é dito não dominado.*
5. *Dizemos que $x^* \in \mathcal{X}$ é uma solução propriamente eficiente se ela é eficiente e se existe $M > 0$ tal que, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ e $x \in \mathcal{X}$ satisfazendo $f_i(x) < f_i(x^*)$, existe um índice j tal que $f_j(x^*) < f_j(x)$ tal que*

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M.$$

O ponto $y^* = F(x^*)$ é dito ser propriamente não dominado.

É imediato das próprias definições que eficiência própria implica em eficiência que implica em eficiência fraca. Além disso, também é válida a Observação 1.32 para problemas multiobjetivo. Ao trabalharmos com um problema de otimização multiobjetivo que envolve tanto soluções eficientes quanto soluções localmente eficientes, denotaremos o primeiro caso como soluções globalmente eficientes. O conceito de solução propriamente eficiente também pode ser caracterizado recorrendo a escalarização [46].

Definição 2.6 Dizemos que $x^* \in \mathcal{X}$ é uma solução propriamente eficiente com respeito a (MOP) se existe $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)^\top \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ ($\nu_i > 0, i = 1, \dots, p$) tal que

$$\sum_{i=1}^p \nu_i f_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^p \nu_i f_i(x), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Portanto, uma solução $x^* \in \mathcal{X}$ é dita ser eficiente se não existe outro ponto admissível x tal que $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ para todo $i = 1, \dots, p$, com pelo menos uma desigualdade estrita $f_j(x) < f_j(x^*)$ para algum j . Em outras palavras, x^* é uma solução que é impossível melhorar uma função objetivo sem piorar no mínimo outra função objetivo. Diremos que um ponto viável é ineficiente caso ele não seja eficiente. A seguir, apresentamos outras formas de definir soluções eficientes.

Lema 2.7 Um ponto $x^* \in \mathcal{X}$ é um ponto eficiente para o problema (MOP) se, e somente se, para todo $y \in \mathcal{X}$, pelo menos uma das seguintes relações vale:

$$i. \max_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} > 0.$$

$$ii. \min_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} \geq 0.$$

Demonstração. Seja x^* uma solução eficiente para o problema (MOP). Pela Definição 2.5, não existe outro ponto viável $y \in \mathcal{X}$ tal que $F(y) \leq F(x^*)$ e $F(y) \neq F(x^*)$.

Portanto, para todo $y \in \mathcal{X}$, a proposição

$$f_i(y) - f_i(x^*) \leq 0, \forall i = 1, \dots, p \quad \text{e} \quad f_j(y) - f_j(x^*) < 0 \quad \text{para algum } j,$$

não pode ser verdadeira. Da negação da proposição anterior, temos dois casos possíveis:

Ou existe pelo menos um índice j tal que $f_j(y) - f_j(x^*) > 0$, o que implica no máximo dos $f_i(y) - f_i(x^*)$ ser positivo,

$$\max_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} > 0.$$

Ou o segundo caso, no qual para todo $y \in \mathcal{X}$ e todo $i = 1, \dots, p$, vamos ter $f_i(y) - f_i(x^*) \geq 0$, o que implica em

$$\min_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} \geq 0.$$

Para demonstrar a volta, suponha que para todo $y \in \mathcal{X}$ se verifica

$$(i) \max_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} > 0 \quad \text{ou} \quad (ii) \min_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} \geq 0.$$

Se vale (i), mas existe $y \in \mathcal{X}$ com $f_i(y) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, p$ e $f_j(y) < f_j(x^*)$ para algum j , então $\max_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} \leq 0$, contradizendo (i). Logo, x^* é eficiente.

Agora, se vale (ii), mas existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $F(y) \not\leq F(x^*)$, então $\min_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} \leq 0$, o que implica $\min_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} = 0$. Porém, como existe um índice j , tal que $f_j(y) - f_j(x^*) < 0$, temos uma contradição sobre o mínimo. Logo, x^* é eficiente. $\square$

A seguir apresentamos uma forma alternativa de verificar eficiência fraca.

Lema 2.8 [21] *Um ponto $x^* \in \mathcal{X}$ é fracamente eficiente para (MOP) se, e somente se, para todo $y \in \mathcal{X}$ temos $\max_{i=1, \dots, p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} \geq 0$.*

Note que da desigualdade no Lema 2.8, podemos usar a seguinte relação de equivalência entre máximo e mínimo, que vale para todo vetor $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\max_{i=1, \dots, p} u_i \geq 0 \iff -\min_{i=1, \dots, p} (-u_i) \geq 0 \iff \min_{i=1, \dots, p} (-u_i) \leq 0.$$

Deste modo, somos capazes de usar o mesmo resultado com uma desigualdade com mínimo,

$$\min_{i=1, \dots, p} \{f_i(x^*) - f_i(y)\} \leq 0.$$

Assim, a eficiência fraca permite o cenário de que todas as funções objetivo possam ser iguais aos de x^* , mas não permite a existência de um ponto que melhore estritamente todas as funções objetivo ao mesmo tempo.

Retomando ao Exemplo 2.3, podemos agora determinar seus pontos eficientes.

Exemplo 2.9 *No Exemplo 2.3, seguindo a Definição 2.5 temos que os pontos A e D são eficientes. Além disso, eles também são fracamente eficientes. Entretanto, os pontos B e C são ineficientes. Se houvesse outro ponto $E \in \mathcal{X}$ tal que $F(E) = (1, 3)$, então E seria a solução eficiente, pois $F(E) \leq F(A)$ e $F(E) \leq F(D)$. Logo, A e D se tornam ineficientes, porém permanecem sendo soluções fracamente eficientes, pois não existe um ponto que melhore estritamente suas duas funções objetivo. Veja a Figura 2.4.*

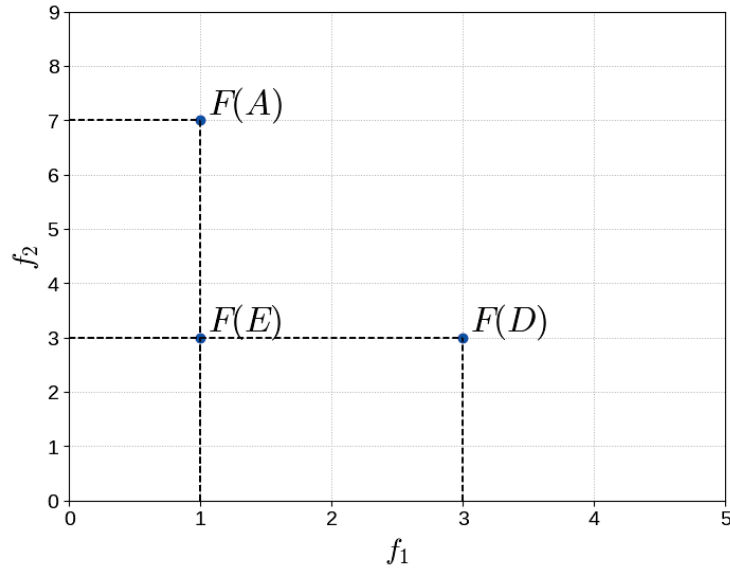


Figura 2.4: Imagem dos pontos A , D e E no conjunto dos objetivos $\mathcal{Y}$.

Na Figura 2.5 podemos observar os conceitos de eficiência global, local, fraca e localmente fraca em um problema bi-objetivo. Nos casos locais, usamos a cor laranja para indicar a presença da vizinhança $B(x^*, \delta)$ no espaço dos objetivos.

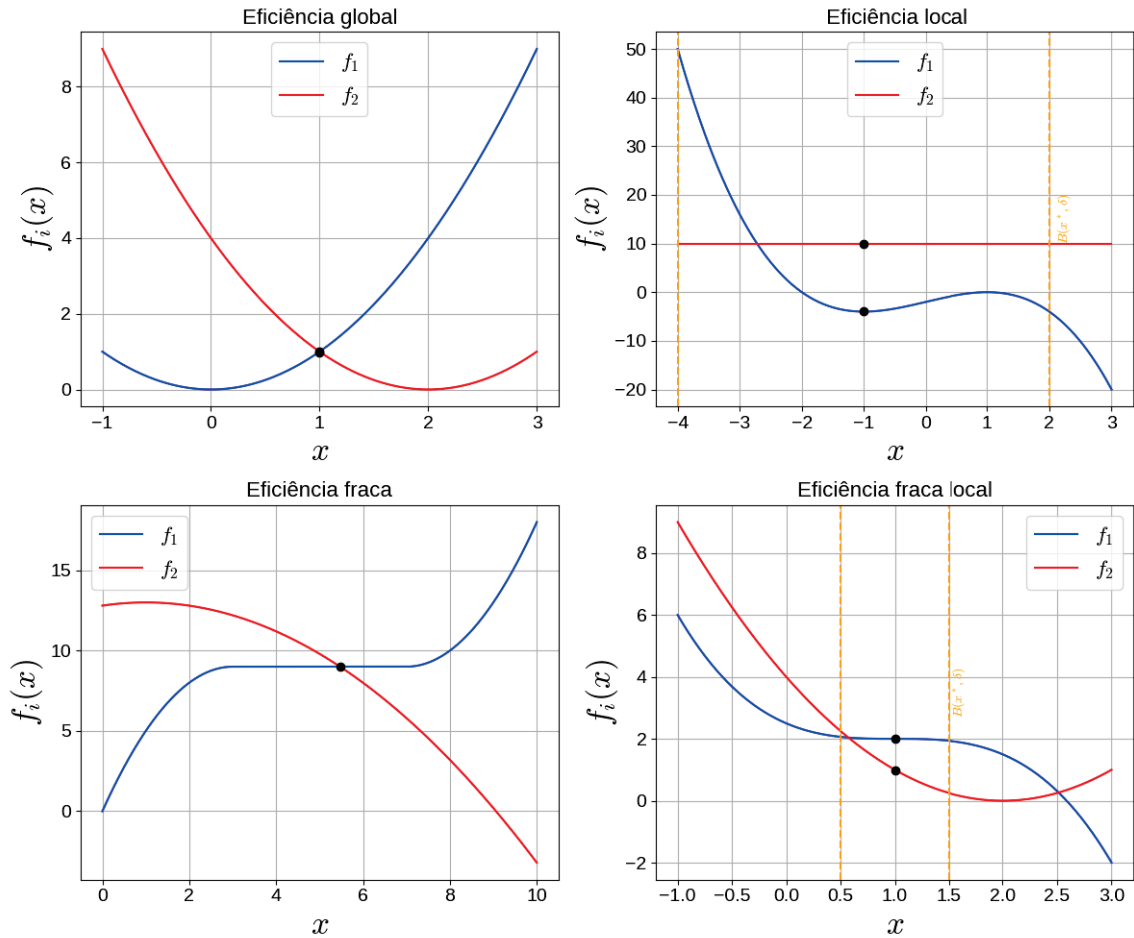


Figura 2.5: Exemplos de pontos eficientes na otimização bi-objetivo.

Note que no primeiro gráfico (Eficiência global) não é possível encontrar outra solução diferente de $x = 1$ que reduza f_1 quanto f_2 , o mesmo ocorre no segundo gráfico (Eficiência local), porém só dentro da vizinhança introduzida. Para a eficiência fraca, notamos que no gráfico (Eficiência fraca) podemos reduzir o valor da função f_1 , entretanto o valor de f_2 aumenta (e vice-versa). E no segundo gráfico (Eficiência fraca local), notamos que f_1 não altera se reduzirmos f_2 localmente.

Denotamos o conjunto de todas as soluções eficientes de um problema de otimização multiobjetivo por

$$\mathcal{X}_E$$

e chamamos *conjunto eficiente* ou *conjunto Pareto ótimo*.

No espaço dos objetivos, o conjunto de todos os pontos não dominados será denotado por

$$\mathcal{Y}_E = F(\mathcal{X}_E)$$

e nomeado *conjunto não dominado* ou *Fronteira de Pareto*.

Veamos na Figura 2.6 um exemplo simples de fronteira de Pareto para um problema (MOP), donde as soluções não dominadas compõem esse conjunto. Veja como não é possível melhorar A em qualquer objetivo sem prejudicar o outro, e A domina o ponto B , porque suas componentes são estritamente menores em comparação.

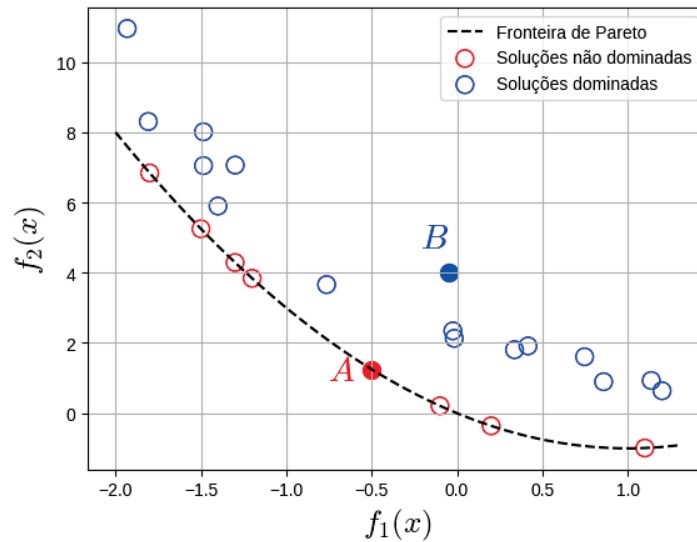


Figura 2.6: Exemplo de fronteira de Pareto sobre soluções não dominadas.

O conjunto das soluções fracamente eficientes será denotado por

$$\mathcal{X}_{wE}$$

e com ele podemos definir no espaço dos objetivos um conjunto que engloba a fronteira

de Pareto e as imagens das soluções fracamente eficientes, sendo

$$F(\mathcal{X}_{wE}) = \mathcal{Y}_{wE}$$

e chamamos de conjunto das soluções fracamente não dominadas.

Retornando ao problema (2.3), observamos o espaço dos objetivos na Figura 2.7.

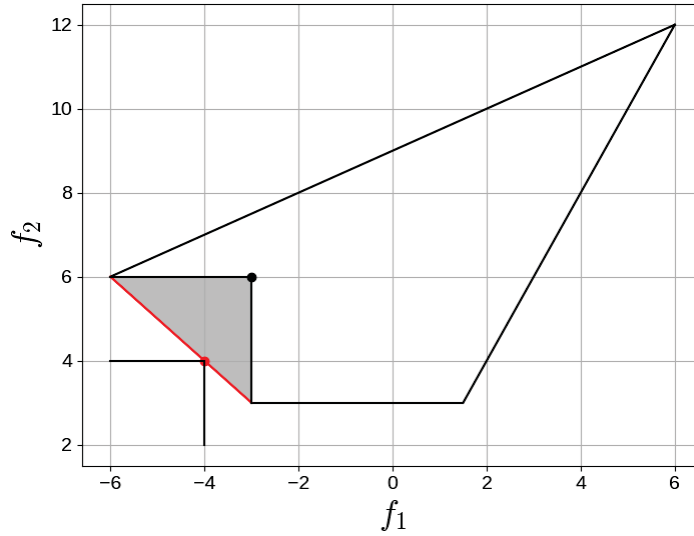


Figura 2.7: Conjunto admissível do espaço dos objetivos do problema (2.3).

Ao considerar o ponto $\bar{y} = (-3, 6) \in \mathcal{Y}$, notamos que ele é um ponto dominado, porque podemos encontrar pontos em $\mathcal{Y}$ que melhoram ambas as funções objetivo individualmente. Esses pontos estão no conjunto $(\bar{y} - \mathbb{R}_+^2) \cap \mathcal{Y} = \{y \in \mathcal{Y} \mid y = \bar{y} - w, w \in \mathbb{R}_+^2\}$. Em particular, os pontos sobre o segmento de reta em vermelho são os pontos não dominados de $\mathcal{Y}$. Assim, concluímos que um ponto y é não dominado se, e somente se, $(y - \mathbb{R}_+^2) \cap \mathcal{Y} = \{y\}$.

Podemos identificar os conjuntos apresentados anteriormente, veja Figura 2.8. No espaço das soluções e no espaço dos objetivos, temos

$$\mathcal{X}_E = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \mid x_1 + 2x_2 - 3 = 0, 0 \leq x_1 \leq 1.5\},$$

$$\mathcal{X}_{wE} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \mid 3 \leq x_2 \leq 6\} \cup \mathcal{X}_E,$$

$$\mathcal{Y}_E = \{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y} \mid y_1 + y_2 = 0, -6 \leq y_1 \leq -3\},$$

e

$$\mathcal{Y}_{wE} = \{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y} \mid y_2 = 3, -3 \leq y_1 \leq 1.5\} \cup \mathcal{Y}_E.$$

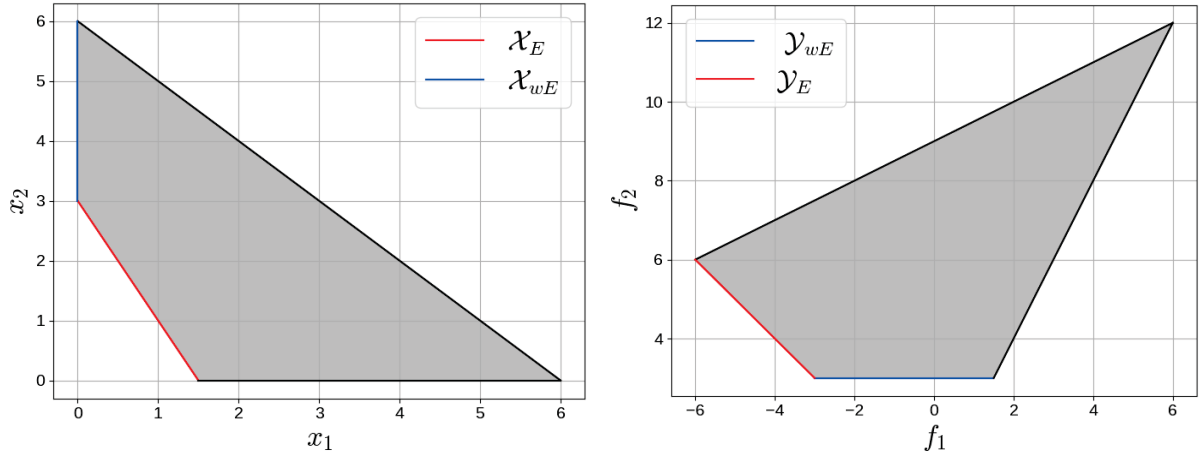


Figura 2.8: Conjuntos admissíveis do problema (2.3).

Observando o vetor não dominado $y^* = (-3, 3)^\top$ na Figura 2.8, podemos notar que não existe nenhum outro ponto admissível que diminua ambas as funções objetivo, isto é, que domine y^* .

Em seguida, vamos apresentar a Definição 2.10 de pontos fracos/fortes de KKT para o problema (MOP).

Definição 2.10 [45, KKT para MOPs] Considere o problema (MOP). Seja $(\sigma, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+^m$ um vetor não nulo tal que $\mu_j g_j(x) = 0$, para $j = 1, \dots, m$ e

$$\sum_{l=1}^p \sigma_l \nabla f_l(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x) + \sum_{i=1}^q \lambda_i \nabla h_i(x) = 0. \quad (2.4)$$

Então, dizemos que

- (a) x é um ponto fraco KKT de (MOP), se (2.4) for válido com $\sigma \neq 0$.
- (b) x é um ponto forte KKT de (MOP), se (2.4) for válido com $\sigma_l > 0$, para todo $l = 1, \dots, p$.

Outro conceito importante a ser revisado, utilizado para o estabelecimento de condições de qualificação em MOPs, é o cone normal regular p -multiobjetivo.

Definição 2.11 [45, pág.22] Tome X um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, $z^* \in X$ e $p \in \mathbb{N}$ ($p \neq 0$), o cone normal regular p -multiobjetivo para X em z^* é o cone definido como

$$\hat{N}_X(z^*; p) = \left\{ V = (v_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid \limsup_{z \rightarrow z^*, z \in X, z \neq z^*} \min_{i=1, \dots, p} \frac{v_i^\top (z - z^*)}{\|z - z^*\|} \leq 0 \right\}, \quad (2.5)$$

e o cone normal limitante p -multiobjetivo para X em $z^* \in X$ é dado por

$$N_\Omega(z^*; p) = \limsup_{z \rightarrow z^*, z \in X} \hat{N}_X(z, p).$$

Podemos também estender a Definição 1.31 do caso escalar para o multiobjetivo, recorrendo à noção de ordem parcial apresentada no Capítulo 1.

Definição 2.12 *Uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ com $F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^\top$ é dita ser convexa componente a componente ou $\mathbb{R}_+^p$ -convexa se*

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(z) \text{ para todo } x, z \in \mathbb{R}^n \text{ e todo } \lambda \in [0, 1].$$

Enunciamos a generalização do resultado presente no Teorema 1.2.1 no caso escalar/mono-objetivo agora para o caso multiobjetivo.

Teorema 2.13 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função diferenciável. A função F é convexa se*

$$F(y) \geq F(x) + JF(x)(y - x) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A seguir, apresentamos a extensão do Teorema 1.36, que sob hipótese de convexidade, qualquer solução localmente eficiente é também uma solução globalmente eficiente.

Lema 2.14 [28, pág.12] *Se $\mathcal{X}$ é convexo e $F : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é convexa componente a componente, então cada solução localmente eficiente será solução globalmente eficiente.*

2.1.1 Dualidade para MOP

O objetivo nesta subseção é apresentar alguns resultados sobre dualidade para problemas de otimização multiobjetivo. Para isso, estudamos primeiramente a dualidade para problemas de otimização escalar no Capítulo 1. A estrutura escalar nos dá uma ideia de como construir um dual multiobjetivo. A existência de dualidade fraca e forte também é apresentada, generalizando o trabalho de [46], com restrições de igualdade.

Formulamos um dual multiobjetivo para (MOP) como

$$\begin{aligned} &\text{maximizar}_{(\nu, \zeta, v, t)} \quad \Theta(\nu, \zeta, v, t) = (\Theta_1(\nu, \zeta, v, t), \Theta_2(\nu, \zeta, v, t), \dots, \Theta_m(\nu, \zeta, v, t))^\top \\ &\text{sujeito a} \quad v \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p) \iff v_i > 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ &\quad \sum_{i=1}^p v_i \zeta_i \geq 0, \\ &\quad \sum_{i=1}^p v_i t_i = 0, \end{aligned} \tag{D-MOP}$$

com

$$\Theta_j(\nu, \zeta, v, t) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ -f_j^* \nu_j - (\zeta_j^\top g)^* \left(-\frac{1}{p \nu_j} \sum_{i=1}^p v_i \nu_i \right) + t_j \right\}, \quad j = 1, \dots, p$$

e as variáveis duais $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_p) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $v = (v_1, \dots, v_p)^\top \in \mathbb{R}^p$, $t = (t_1, \dots, t_p)^\top \in \mathbb{R}^p$.

Após introduzirmos o dual multiobjetivo (D-MOP), apresentamos os teoremas da dualidade fraca e forte para o caso multiobjetivo..

Teorema 2.15 [46, Dualidade fraca] Não existe $x \in \mathcal{X}$ e nem (ν, ζ, v, t) viável para (D-MOP) cumprindo $\Theta(\nu, \zeta, v, t) \geq F(x)$ e $\Theta(\nu, \zeta, v, t) \neq F(x)$.

Teorema 2.16 [46, Dualidade forte] Assuma que existe $x' \in \cap_{i=1}^p \text{dom}(f_i)$, onde $\text{dom}(f_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) < +\infty\}$ cumprindo $g(x') \in -\text{int}(K)$, com K cone convexo fechado com $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Seja $\bar{x}$ uma solução propriamente eficiente para (MOP). Então existe uma solução eficiente $(\bar{\nu}, \bar{\zeta}, \bar{v}, \bar{t})$ para (D-MOP) e a dualidade forte ocorre $\Theta(\bar{\nu}, \bar{\zeta}, \bar{v}, \bar{t}) = F(\bar{x})$.

Um dos principais objetivos dos pesquisadores do campo multiobjetivo é obter resultados que permitam decidir quando um ponto viável é ou não eficiente, seja global, local ou fracamente. Um método clássico é tentar relacionar o problema (MOP) com algum problema escalar específico, recorrendo aos resultados da Otimização escalar/mono-objetivo. Este processo é denominado escalarização, o qual é possível converter um problema multiobjetivo em um problema de otimização escalar equivalente, de tal maneira que as soluções do problema multiobjetivo podem ser obtidas como soluções de um problema clássico de programação não linear. Na Subseção 2.1.2 vamos considerar um destes métodos, conhecido como o Método da Soma Ponderada.

2.1.2 O Método da Soma Ponderada

O Método da Soma Ponderada (WSM, do Inglês *Weighted Sum Method*), ou também conhecido como método dos pesos ou Método da Ponderação, é um dos mais populares métodos de resolução de um MOP. Segundo [48, pág. 24], todas as funções objetivo são combinadas linearmente em uma única função usando um vetor de pesos $\nu \geq 0$, com $\|\nu\|_1 = 1$. Portanto, definimos o problema (MOP) de forma escalar pelo WSM, obtendo o seguinte problema ponderado

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && \sum_{i=1}^p \nu_i f_i(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (P(\nu))$$

Assim, esse método consiste em resolver o problema de otimização escalar $(P(\nu))$, permitindo obter uma aproximação da fronteira de Pareto. Veremos que a partir de algumas hipóteses, podemos mostrar que cada solução ótima do problema escalarizado anterior é uma solução eficiente do problema (MOP).

Proposição 2.17 [48, pág. 26] Se x^* é a única solução ótima de $P(\nu)$ para um dado vetor $\nu \geq 0$, com $\|\nu\|_1 = 1$, então x^* é uma solução eficiente para (MOP).

Proposição 2.18 [48, pág. 26] *Se x^* é uma solução ótima de $P(\nu)$ para um dado vetor $\nu > 0$, com $\|\nu\|_1 = 1$, então x^* é uma solução eficiente para (MOP).*

O método pode não ser eficaz para conjuntos viáveis não convexos, porque não determina soluções fracamente eficientes que têm a imagem na parte não convexa da fronteira de Pareto. Trataremos melhor deste caso no Capítulo (4), onde abordaremos o WSM na construção da fronteira de Pareto em problemas de portfólio.

2.1.3 Problema de Otimização Multiobjetivo Linear

Entre os problemas da otimização multiobjetivo, destacam-se aqueles que possuem função objetivo e restrições lineares, denominados problemas de otimização linear multiobjetivo (MOLP, do Inglês *Multiobjective Optimization Linear Problems*), presentes na maioria dos problemas reais. Veja o problema (2.3) e os Exemplos 2.1 e 2.3.

Um problema linear multiobjetivo é caracterizado por considerar a função objetivo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T$ com $f_i(x) = c_i^T x, i = 1, \dots, p, c_i \in \mathbb{R}^n$ e o conjunto de restrições escrito como $Ax = b$ com $x \geq 0$ dado por

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && F(x) = Cx \\ & \text{sujeito a} && Ax = b, \\ & && x \geq 0, \end{aligned} \tag{MOLP}$$

onde $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Logo, os conjuntos admissíveis são definidos como

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \text{ e } \mathcal{Y} = \{y = Cx \in \mathbb{R}^p \mid x \in \mathcal{X}\}. \tag{2.6}$$

Retomando ao problema (2.3), podemos reescrevê-lo como um (MOLP). Primeiramente, precisamos deixar as funções de restrição g_1 e g_2 com o formato de igualdade. Isso é possível se adicionarmos variáveis de folga $x_3, x_4 \in \mathcal{X}$ com base no sinal da desigualdade. Resultando em $h_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + x_2 - x_3 = 3$ e $h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_4 = 6$. Assim, obtemos o problema linear bi-objetivo:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} && Cx \\ & \text{sujeito a} && 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ & && x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

com

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \text{ e } b = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}^T. \tag{2.8}$$

O resultado a seguir é um dos principais para MOLP, obtendo convexidade.

Lema 2.19 [33, pág.14] *Os conjuntos admissíveis $\mathcal{X}$ no espaço de decisão e $\mathcal{Y}$ no espaço dos objetivos do problema (MOLP) são convexos e fechados.*

A seguir, pretendemos definir o que seria um ponto Pareto estacionário/crítico em um problema de otimização multiobjetivo, analisando os casos irrestrito ($\mathbb{R}$) e restrito ($\mathcal{X}$), bem como os resultados que relacionam esses pontos com os pontos eficientes. Além disso, apresentamos o método do gradiente e o método do gradiente projetado, ambos para o caso multiobjetivo, explicando as relações entre os dois e suas características.

2.1.4 Problema de Otimização Multiobjetivo Irrestrito

Considere o seguinte problema de otimização multiobjetivo irrestrito

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^\top \quad (\text{UMOP})$$

Vejamos agora a definição de ponto Pareto estacionário para este caso irrestrito.

Definição 2.20 [15, pág.588] *Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é Pareto estacionário para o problema (UMOP) se ele satisfaz*

$$JF(x^*)(\mathbb{R}^n) \cap (-\mathbb{R}_{++}^p) = \emptyset,$$

onde $JF(x^*)(\mathbb{R}^n) = \{JF(x^*)(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ (imagem de $JF(x^*) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$). Equivalentemente, podemos estabelecer que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto Pareto estacionário se, para todo $d \in \mathbb{R}^n$, existe pelo menos um índice $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\nabla f_i(x^*)^\top d \geq 0$.

Na Definição (2.20), perceba que também é equivalente afirmar que x^* é Pareto estacionário, se, e somente se, $\max_{i=1, \dots, p} \{\nabla f_i(x^*)^\top d\} \geq 0$. Então, podemos estabelecer que um ponto x^* não é Pareto estacionário, se e somente se, existe uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $JF(x^*)d < 0$, ou seja, $\nabla f_i(x^*)^\top d < 0$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

Apresentamos agora um resultado auxiliar comumente usado na literatura, que se existe uma direção d tal que $JF(x)d < 0$, então d é uma direção de descida para F em x . Além disso, também podemos estimar o decréscimo da função objetivo.

Lema 2.21 [15, pág.588] *Tome $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ continuamente diferenciável, $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $JF(x)d < 0$ (ou seja, $\nabla f_i(x)^\top d < 0$ para todo $i = 1, \dots, p$) e $\delta \in (0, 1)$. Então existe algum $\varepsilon > 0$ (que pode depender de x , d e δ) tal que*

$$F(x + td) < F(x) + \delta t JF(x)d \text{ para qualquer } t \in (0, \varepsilon]. \quad (2.9)$$

Em particular, d é uma direção de descida para F em x .

Através do lema anterior, podemos demonstrar o seguinte resultado que relaciona pontos eficientes com pontos Pareto estacionários no problema (UMOP).

Lema 2.22 *Se $x \in \mathbb{R}^n$ é eficiente para (UMOP) então x é Pareto estacionário.*

Demonstração. Considere $x^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto eficiente e F com cada f_i , $i = 1, \dots, p$ sendo continuamente diferenciável. Suponha, por contradição, que x^* não é Pareto estacionário. Então por definição, existe uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $JF(x^*)^\top d < 0$, ou equivalentemente, $\nabla f_i(x^*)d < 0, \forall i = 1, \dots, p$. Pela definição de diferenciabilidade de F e pelo Lema (2.21) para qualquer $\delta \in (0, 1)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, $\forall t \in (0, \varepsilon]$,

$$F(x^* + td) < F(x^*) + t\delta JF(x^*) < F(x^*),$$

pois $JF(x^*)d < 0$. Logo, se $t \rightarrow 0^+$, temos $F(x^* + td) < F(x^*)$. Portanto $x^* + td$ domina x^* , contrariando o fato de x^* ser eficiente (imagem não dominada). □

É importante destacar que, como no caso escalar/mono-objetivo, um ponto estacionário não necessariamente implica em minimizador, no caso multiobjetivo também temos que Pareto estacionário não necessariamente implica em ser eficiente.

Essa implicação é garantida apenas quando assumimos hipóteses de convexidade sobre as funções objetivo.

Lema 2.23 [15] *Tome x^* uma solução fracamente eficiente para $F : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Então x^* é um ponto Pareto estacionário. Supondo agora que F é $\mathbb{R}_+^p$ -convexa, esta condição é suficiente para x^* ser uma solução fracamente eficiente.*

Então, sob $\mathbb{R}_+^p$ -convexidade, os conceitos de fracamente eficiente e Pareto estacionário são equivalentes.

Lema 2.24 [23] *Suponha que todas as funções f_i de F são estritamente convexas. Se $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto Pareto estacionário de F , então x é uma solução eficiente.*

Para resolver (UMOP), estudaremos algoritmos que geram uma sequência tal que seu ponto de acumulação é uma solução do tipo Pareto. Primeiramente, vejamos como determinar a direção de busca d^k a partir de um iterando x^k . Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, defina a função auxiliar $\omega(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\omega(x)(d) = \max_{i=1, \dots, p} \{\nabla f_i(x)^\top d\}. \quad (2.10)$$

A função anterior é o máximo de funções lineares, convexa e é uma função Lipschitz contínua com constante um. Além disso, é positivamente homogênea, veja Definição 1.19. Portanto,

$$\omega(x)(\lambda d) = \lambda \omega(x)(d) \text{ para todo } \lambda > 0 \text{ e todo } d \in \mathbb{R}^n.$$

Para determinar a direção de busca d^k em cada iterando x^k , consideramos o seguinte subproblema irrestrito, que é um modelo quadrático aplicado a (UMOP)

$$\underset{d \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad \omega(x)(d) + \frac{\|d\|^2}{2} = \min_{d \in \mathbb{R}^n} \max_{i=1, \dots, p} \nabla f_i(x)^\top d + \frac{\|d\|^2}{2}. \quad (\text{min-max})$$

O subproblema (min-max) está bem definido, pois possui como primeiro termo uma função convexa (o máximo de uma função linear $d \mapsto \nabla f_i(x)^\top d$). Assim, sua função objetivo é fortemente convexa, o que implica ter uma única solução ótima. Denotaremos tal solução por $d(x)$, ou seja,

$$d(x) = \underset{d \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \omega(x)(d) + \frac{\|d\|^2}{2}. \quad (2.11)$$

E vamos denotar por $\phi(x)$ o valor ótimo de (min-max)

$$\phi(x) = \omega(x)(d) + \frac{\|d(x)\|^2}{2}. \quad (2.12)$$

Na sequência, veremos uma forma de caracterizar um ponto Pareto estacionário do problema (UMOP) através de d e ϕ .

Proposição 2.25 [15, pág.590] *Tome $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dados por (2.11) e (2.12), respectivamente. Então, as seguintes afirmações são válidas.*

1. $\phi(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. A função $\phi(\cdot)$ é contínua.
3. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) O ponto x não é Pareto estacionário.
- (b) $\phi(x) < 0$.
- (c) $d(x) \neq 0$.

Em particular, x é Pareto estacionário se, e somente se, $\phi(x) = 0$.

Em vista da Proposição 2.25, vemos que o Problema (min-max) tem um papel duplo: ele fornece uma quantidade de violação da estacionariedade de Pareto em um dado ponto x e, se $d(x) \neq 0$, este último pode ser usado como uma direção de descida.

Também observamos que, se $p = 1$, então $d(x) = -\nabla f_1(x)$, reduzindo assim à direção oposta ao gradiente para otimização de objetivo escalar (método do Gradiente/Cauchy escalar). Sobre a escolha do tamanho do passo t^k que usamos para andar na direção $d^k = d(x^k)$ e obter o próximo iterando x^{k+1} , podendo ser feito pela condição de Armijo com *Backtracking*.

Com tais informações, definiremos o clássico método do gradiente para resolver o problema (UMOP). Ele abre caminho para a discussão do PGM-MOP, que desempenha papel muito importante para este trabalho. Mais informações são encontradas em [15].

Algoritmo 3 Método do Gradiente para o problema (UMOP) [15, pág. 591].

Passo 1. Escolha o ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in (0, 1)$. Defina $k = 0$.

Passo 2. Calcule a solução $d^k = d(x^k) = \operatorname{argmin}_{d \in \mathbb{R}^n} \omega(x^k)(d) + \frac{1}{2}\|d\|^2$,
onde $\omega(x^k)(d) = \max_{i=1, \dots, p} \nabla f_i(x^k)^\top d$.

Passo 3. Calcule $\phi(x^k) = \omega(x^k)(d^k) + \frac{1}{2}\|d(x^k)\|^2$. Se $\phi(x^k) = 0$, então pare.

Passo 4. Escolha t_k como o maior $t \in \left\{ \frac{1}{2^j} \mid j = 0, 1, 2, \dots \right\}$ tal que

$$F(x^k + td^k) \leq F(x^k) + \delta t JF(x^k)d^k.$$

Passo 5. Defina $x^{k+1} = x^k + t_k d(x^k)$, $k = k + 1$ e retorne ao Passo 2.

Segundo [15, pág. 592], a condição de parada $\phi(x^k) = 0$ pode ser substituída por $d^k = 0$ por conta da Proposição 2.25. É comum encontrar na literatura o uso do $\frac{1}{2}$ como fator de redução no Passo 4, mas pode ser escolhido qualquer outro escalar desde que pertença ao intervalo $(0, 1)$. Uma característica importante do Algoritmo 3 é que ele vai parar em um ponto Pareto estacionário no Passo 3 ou vai gerar uma sequência infinita $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos não estacionários. Nesse último caso, pelo Passo 4 do fato de $JF(x^k)d(x^k) < 0$, obtemos que $F(x^{k+1}) < F(x^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, os valores da função objetivo diminuem em cada iteração do algoritmo.

Observação 2.26 *Uma observação importante, é que apesar da função*

$$\omega(x^k)(d) + \frac{1}{2}\|d\|^2$$

ser convexa, ela nem sempre é diferenciável por conta da função máximo. Segundo [15, pág. 6], uma forma de suprimir essa possível falta de diferenciabilidade é através do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned} & \underset{(t,d) \in \mathbb{R}^{n+1}}{\text{minimizar}} && t + \frac{1}{2}\|d\|^2 \\ & \text{sujeito a} && \nabla f_i(x)^\top d \leq t, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned} \tag{2.13}$$

que é um problema convexo. É fácil verificar que d é uma solução ótima de (min-max) se e somente se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que (t, d) é uma solução ótima de (2.13).

O próximo resultado caracteriza o Algoritmo 3 sob a hipótese de gerar uma sequência infinita $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos não estacionários.

Lema 2.27 [15, pág.597] *Tome $\{x^k\}$ uma sequência infinita de pontos não estacionários em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(x^{k+1}) \leq F(x^k)$ para todo k .*

1. *Se x^* é um ponto de acumulação de $\{x^k\}$, então*

$$F(x^*) \leq F(x^k), \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^k) = F(x^*).$$

Também, F é constante no conjunto de pontos de acumulação $\{x^k\}$.

2. *Se $\{x^k\}$ é uma sequência gerada pelo Algoritmo 3 e tem um ponto de acumulação, então todos os resultados do item anterior são válidos.*

Para saber mais detalhes sobre o método do gradiente no multiobjetivo, recomendamos a leitura de [15]. Neste trabalho, focaremos no caso restrito.

2.2 Problema de Otimização Multiobjetivo Restrito

Considerando agora $x^* \in \mathcal{X}$ como no problema de otimização restrito multiobjetivo (MOP), introduziremos os resultados necessários para estabelecer o PGM-MOP, baseados em [15, 20].

Vamos começar definindo um ponto Pareto estacionário no caso restrito.

Definição 2.28 [20, pág.412] *Um ponto $x^* \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é Pareto estacionário para o problema (MOP) se ele satisfaz*

$$JF(x^*)(\mathcal{X} - \{x^*\}) \cap (-\mathbb{R}_{++}^p) = \emptyset,$$

onde $JF(x^*)(\mathcal{X} - \{x^*\}) = \{JF(x^*)(x - x^*) \mid x \in \mathcal{X}\}$ e $\mathcal{X} - \{x^*\} = \{u - x^* \mid u \in \mathcal{X}\}$. Equivalentemente, dizemos que o ponto $x^* \in \mathcal{X}$ é Pareto estacionário se, e somente se, para todo $d \in \mathcal{X}$, temos

$$\max_{i=1, \dots, p} \{\nabla f_i(x^*)^\top d\} \geq 0.$$

Perceba que a Definição 2.28 é estabelecida para um conjunto $\mathcal{X}$ convexo. Geralmente é usado o conjunto das direções viáveis a partir de um ponto sobre um conjunto quando queremos abordar conjuntos convexos. O próximo resultado é uma forma alternativa para definir x^* como ponto Pareto estacionário usando o conjunto das direções viáveis $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x^*)$ conforme Definição 1.44.

Lema 2.29 [21] *Um ponto $x^* \in \mathcal{X}$ é Pareto estacionário para o problema (MOP) se, e somente se,*

$$\min_{\substack{d \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x^*) \\ \|d\| \leq 1}} \max_{i=1, \dots, p} \{ \nabla f_i(x^*)^\top d \} = 0,$$

onde $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{t} > 0 \mid x^* + td \in \mathcal{X}, \forall t \in [0, \bar{t}]\}$.

O próximo resultado é uma versão alternativa do Lema 2.21 para conjuntos fechados e convexos, deste modo caracterizamos as direções de descida tanto no caso irrestrito quanto no restrito.

Proposição 2.30 [32] *Tome $\delta \in (0, 1)$, $x \in \mathcal{X}$ e $d \in \mathcal{X} - \{x\}$ tal que $JF(x)d < 0$. Então existe $\bar{t} < 1$ tal que $F(x + td) < F(x) + \delta t JF(x)d$ para todo $t \in (0, \bar{t}]$.*

Podemos observar na Figura 2.9 um exemplo de direção de descida d a partir de x^* para a função $F = (f_1, f_2)$. Note que $\nabla f_1(x^*)^\top d < 0$ e $\nabla f_2(x^*)^\top d < 0$, pois o ângulo formado entre esses vetores é obtuso.

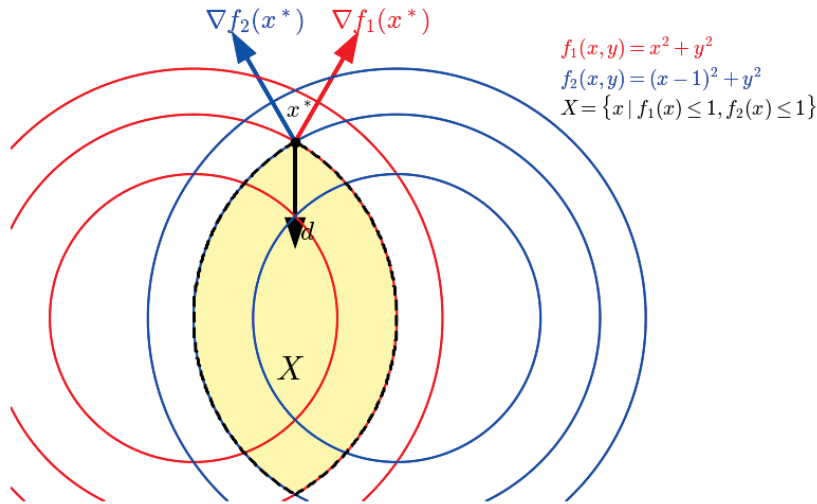


Figura 2.9: Exemplo de direção de descida para uma função $F(x) = (f_1(x), f_2(x))^\top$.

Determinamos anteriormente, a direção de busca com $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ recorrendo a (2.11). Agora, iremos apresentar uma generalização para (MOP).

$$d_\beta(x) = \operatorname{argmin}_{d \in \mathcal{X} - \{x\}} \beta \omega(x)(d) + \frac{1}{2} \|d\|^2, \quad (2.14)$$

onde $\beta > 0$ é um parâmetro e $\omega(x)$ é a função dada por (2.10).

Semelhante ao caso irrestrito, como a função objetivo de (2.14) é fortemente convexa, então o vetor de busca $d_\beta(x)$ está sempre bem definido, isso para todo $x \in \mathcal{X}$. Denominamos esse vetor de direção do gradiente projetado. E definimos a função do valor ótimo por

$$\phi_\beta(x) = \beta \omega(x)(d_\beta(x)) + \frac{1}{2} \|d_\beta(x)\|^2. \quad (2.15)$$

Além disso, temos uma extensão da Proposição 2.25 para o caso restrito.

Proposição 2.31 [20, pág.413] Tome $d_\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dados por (2.14) e (2.15), respectivamente. Então, as seguintes afirmações são válidas.

1. $\phi_\beta(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$.
2. A função $\phi_\beta(\cdot)$ é contínua.
3. As seguintes condições são equivalentes:
 - (a) O ponto $x \in \mathcal{X}$ não é Pareto estacionário.
 - (b) $\phi_\beta(x) < 0$.
 - (c) $d_\beta(x) \neq 0$.

Em particular, x é Pareto estacionário se, e somente se, $\phi_\beta(x) = 0$.

Como desejamos explorar em nossa pesquisa os problemas restritos (MOP), focaremos no Algoritmo do Método do Gradiente Projetado, apresentando seus resultados de convergência e de busca linear não monótona. A Proposição 2.30 nos permite implementar a condição de Armijo para o Algoritmo 4 recorrendo ao *Backtracking* no Passo 4, assim como ocorreu no Algoritmo 3.

Algoritmo 4 Método do Gradiente Projetado Multiobjetivo [15, pág. 602].

Passo 1. Escolha o ponto inicial $x^0 \in \mathcal{X}$, $\beta > 0$ e $\delta \in (0, 1)$. Defina $k = 0$.

Passo 2. Calcule a solução $d_\beta^k = d_\beta(x^k) = \underset{d \in \mathcal{X} - \{x^k\}}{\operatorname{argmin}} \beta \omega(x^k)(d) + \frac{1}{2} \|d\|^2$,
 onde $\omega(x^k)(d) = \max_{i=1, \dots, p} \nabla f_i(x^k)^\top d$.

Passo 3. Calcule $\phi_\beta(x^k) = \beta \omega(x^k)(d_\beta^k) + \frac{1}{2} \|d_\beta(x^k)\|^2$. Se $\phi(x^k) = 0$, então pare.

Passo 4. Escolha t_k como o maior $t \in \left\{ \frac{1}{2^j} \mid j = 0, 1, 2, \dots \right\}$ tal que

$$F(x^k + td^k) \leq F(x^k) + \delta t JF(x^k)d^k.$$

Passo 5. Defina $x^{k+1} = x^k + t_k d_\beta(x^k)$, $k = k + 1$ e retorne ao Passo 2.

A semelhança entre os dois métodos de descida multiobjetivo apresentados é evidente. Podemos observar que o primeiro é um caso particular do segundo, porque ao escolher $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ e tomar $\beta = 1$ no Algoritmo 4, retornamos ao Algoritmo 3.

A Proposição 2.31 permite estabelecer um critério de parada alternativo na terceira etapa, com $d_\beta^k = 0$. Além disso, este algoritmo também pode gerar uma sequência infinita de pontos não estacionários ou encontrar um ponto estacionário em uma quantidade finita de iterações. A escolha do fator para redução do tamanho de passo na quarta

etapa também é a mesma do Algoritmo 3. Podemos usar um problema auxiliar como em (2.13) para ganhar diferenciabilidade.

A abordagem de como esse método estende o clássico PGM escalar para o caso multiobjetivo está presente em [14, 15]. Entretanto, apresentamos uma versão mais detalhada para justificar o uso do subproblema (2.14) ao invés de uma abordagem semelhante ao que é feito para obter a direção de busca no PGM em otimização escalar, ou seja, quando $p = 1$ usar

$$d_\beta(x) = P_{\mathcal{X}}(x - \beta \nabla f(x)) - x. \quad (2.16)$$

A função objetivo é convexa e o conjunto viável $\mathcal{X} - \{x\} \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e fechado em (2.14), então uma condição necessária para $d_\beta(x)$ ser solução é a existência de um vetor $v \in \mathbb{R}^p$ que satisfaz a Definição 1.30, ou seja,

$$v_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^p v_i = 1 \quad (2.17)$$

tal que

$$\left\langle \beta \sum_{i=1}^p v_i \nabla f_i(x) + d_\beta(x), d - d_\beta(x) \right\rangle \geq 0 \text{ para todo } d \in \mathcal{X} - \{x\}. \quad (2.18)$$

Podemos reescrever a desigualdade acima para

$$\left\langle x - \beta \sum_{i=1}^p v_i \nabla f_i(x) - (x + d_\beta(x)), u - (x + d_\beta(x)) \right\rangle \leq 0 \text{ para todo } u \in \mathcal{X}.$$

Temos pelo Lema 1.2.1 que a projeção a seguir é garantida e dada por

$$P_{\mathcal{X}} \left(x - \beta \sum_{i=1}^p v_i \nabla f_i(x) \right) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{X}} \left\| u - \left(x - \beta \sum_{i=1}^p v_i \nabla f_i(x) \right) \right\|^2 = x + d_\beta(x).$$

Assim, podemos afirmar que existe $v \in \mathbb{R}^p$ que satisfaz as condições de (2.17) e

$$d_\beta(x) = P_{\mathcal{X}}(x - \beta JF(x)^\top v) - x. \quad (2.19)$$

Tome $\{e^1, \dots, e^p\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^p$. Observamos que podemos reescrever

$$v = \sum_{i=1}^p v_i e^i.$$

O seguinte resultado estabelece uma relação de equivalência entre o subproblema do Passo 2 do Algoritmo 4 e a Equação (2.19). Deste modo, podemos resolver um problema sem a necessidade de projetar, visto que a projeção em um conjunto formado pela interseção de outros conjuntos convexos pode ser complicada. Entretanto, podemos usar o Algoritmo de Dykstra 2, que tem muitas vantagens computacionais.

Lema 2.32 [14, Lema 2.4] *Seja $K \subset \mathbb{R}^p$ um cone convexo, fechado e pontudo de interior não vazio. Considere também $\mathcal{X} \subset K^*$ (cone dual de K) um conjunto fechado e convexo, $v \in \mathcal{X}$ e constante $\beta > 0$. Então,*

$$\operatorname{argmin}_{d \in \mathcal{X} - \{x\}} \left\{ \beta \langle v, JF(x)d \rangle + \frac{\|d\|^2}{2} \right\} = P_{\mathcal{X} - \{x\}}(-\beta JF(x)^\top v) = P_{\mathcal{X}}(x - \beta JF(x)^\top v) - x.$$

Antes de analisar os resultados presentes sobre convergência do PGM-MOP, apresentamos um exemplo para ilustrar a igualdade apresentada pelo Lema 2.32.

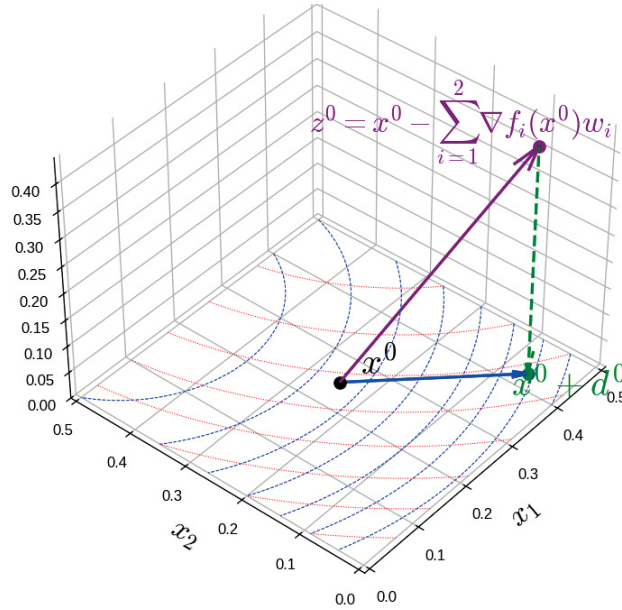
Exemplo 2.33 *Considere o seguinte problema de minimização*

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimizar}} && (f_1(x), f_2(x))^\top \\ & \text{sujeito a} && 0 \leq x_i \leq 0.5, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

com $f_1(x) = (x_1 - 0.2)^3 + (x_2 - 0.6)^3$ e $f_2(x) = (x_1 - 0.8)^2 + (x_2 - 0.6)^2$.

Consideramos para resolver tal problema o Algoritmo 4 com ponto inicial $x^0 = (0.25, 0.25)^\top$. Basicamente, a cada iteração k , o método SLSQP determina a direção d^k ao invés de usar o processo de obtenção do vetor recorrendo a $P_{\mathcal{X}}(x - \beta JF(x)^\top v)$. No entanto, podemos determinar um vetor de pesos $w \in \mathbb{R}^2$ conhecendo d^k obtido pelo SLSQP. Por exemplo, tome $d^0 = (0.18, -0.1867)^\top$ obtido pelo SLSQP. Como $x^0 + d^0$, ele é um ponto no interior do conjunto viável. Notamos então que o SLSQP pode não gerar uma aproximação boa da solução do problema original. De fato, pois deveríamos ter a igualdade apresentada pelo Lema 2.32, o que não acontece pois $x^0 + d^0$ deveria estar na fronteira do conjunto viável.

Suponhamos que valesse a igualdade, então para encontrarmos o vetor de pesos igualamos a projeção $P_{[0,0.5]^2}(x^0 - JF(x^0)w) = x^0 - JF(x^0)\tilde{w}$ com $x^0 + d^0$, resolvendo o sistema linear $JF(x^0)\tilde{w} = -d^0$. Então, $x^0 - JF(x^0)w = x^0 + d^0$, veja Figura 2.10.


 Figura 2.10: Curvas de nível e projeção de z^0 .

Podemos agora analisar a convergência do Algoritmo 4. Conforme já falado, podemos encontrar um ponto estacionário em uma quantidade finita de iterações ou gerar uma sequência infinita de pontos não estacionários. Surge então a necessidade de verificar se esses pontos gerados são viáveis.

Lema 2.34 [15, Lema 4.3] Tome $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência gerada pelo Algoritmo 4. Então $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$.

O próximo resultado nos diz que se uma sequência de pontos gerada pelo Algoritmo 4 converge para um ponto de acumulação, então será um ponto Pareto estacionário.

Teorema 2.35 [15, Teorema 4.4] Todo ponto de acumulação, se houver, de uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gerada pelo Algoritmo 4 é um ponto Pareto estacionário.

Veremos agora quando um ponto de acumulação de uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gerada pelo Algoritmo 4 é fracamente eficiente. Perceba que o Lema 2.23 ainda não é suficiente para afirmar que o Algoritmo 4 converge para uma solução fracamente eficiente, apesar de sabermos pelo Teorema 2.35 que um ponto de acumulação é Pareto estacionário. Vamos considerar a seguinte hipótese de convergência.

Hipótese 2.36 Toda sequência $\mathbb{R}_+^p$ -decrescente

$$\{y^k\} \subset F(\mathcal{X}) = \{F(x) \mid x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n\}$$

é $\mathbb{R}_+^p$ -limitada inferiormente por um ponto de $F(\mathcal{X})$. Algebricamente,

$$\forall \{y^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset F(\mathcal{X}) \text{ com } y^{k+1} < y^k \ \forall k \in \mathbb{N}, \exists x^* \in \mathcal{X} \text{ tal que } F(x^*) \leq y^k \ \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Assim, [15, pág. 598] estabelece o seguinte resultado, mostrando a convergência do Algoritmo 4 ao assumir (2.20) e a hipótese de F ser $\mathbb{R}_+^p$ -convexa.

Teorema 2.37 *Assuma que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é $\mathbb{R}_+^p$ -convexa e que vale (2.20). Então, qualquer sequência gerada pelo Algoritmo 4 converge para um ponto fracamente eficiente.*

Demonstração. Apresentamos uma reescrita da demonstração focando nas partes essenciais para este trabalho. Primeiro, definimos o conjunto

$$L = \{x \in \mathcal{X} \mid F(x) \leq F(x^k) \text{ para todo } k\}.$$

e tome $\bar{x} \in L$, que existe pela Suposição (2.20). É possível mostrar que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é quase-Fejér (veja Definição 1.12) convergente para o conjunto L . Pelo Teorema 1.13, temos que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Então, como $\mathcal{X}$ é fechado, $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ tem pelo menos um ponto de acumulação viável, digamos x^* , que é Pareto estacionário pelo Teorema 2.35. Usando agora a $\mathbb{R}_+^p$ -convexidade de F , pelo Lema 2.23, segue que $x^* \in \mathcal{X}$ é fracamente eficiente. Como $F(x^{k+1}) < F(x^k)$ para todo k , pelo Lema 2.27, item 1, $F(x^*) \leq F(x^k)$ para todo k , e $x^* \in L$. Finalmente, pelo Teorema 1.13, concluímos que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $x^* \in \mathcal{X}$, um ponto fracamente eficiente. $\square$

2.2.1 Busca Linear Não Monótona

Nosso foco no PGM-MOP é utilizar a busca linear não monótona. Queremos saber, em cada iteração, como obter uma direção d^k e um tamanho de passo t_k para determinar o quanto caminhar nessa direção e obter o próximo iterando x^{k+1} .

Podemos observar que a condição de Armijo presente no Passo 4 dos Algoritmos 3 e 4 está impondo que o valor da função objetivo sempre diminua durante as iterações ou permaneça igual. Esse comportamento indica uma busca linear monótona para determinar o tamanho de passo t_k . Entretanto, exigir que os valores da função sejam monótonos pode acarretar no método convergir mais lentamente.

Além disso, como desejamos explorar funções não convexas em nosso trabalho, faremos uso da busca linear não monótona do tipo máximo, proposta em 1986 por [31]. Uma característica principal desta busca é permitir algum crescimento no valor da função objetivo durante algumas iterações, realizando alguns passos “ruins” com o objetivo de fugir de mínimos locais.

No Passo 4 do Algoritmo 4 fazemos uso da condição de Armijo, com $\delta \in (0, 1)$, para verificar a validade do tamanho de passo t_k ,

$$F(x^k + t_k d^k) \leq F(x^k) + \delta t_k JF(x^k) d^k. \quad (2.21)$$

Se supormos agora que t_k satisfaz a desigualdade

$$F(x^k + t_k d^k) \leq A^k + \delta t_k JF(x^k) d^k, \quad (2.22)$$

com $A^k \in \mathbb{R}^p$, então posteriormente veremos no Lema 2.38 que a Desigualdade (2.22) é um relaxamento da condição de Armijo (2.21), porque $F(x^k) \leq A^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Também denominamos (2.22) de condição de Armijo, mas indicando sua particularidade em A^k .

Tal condição toma $A^k := (A_1^k, \dots, A_p^k)^\top$ com A_i^k sendo o máximo dos valores recentes da função objetivo f_i em uma janela limitada de até M valores recentes, veja Algoritmo 5.

Algoritmo 5 Busca linear não monótona do tipo máximo [29, pág. 8].

Passo 1. Escolha o ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e um inteiro não negativo M . Defina $k = 0$, $m(k) = 0$.

Passo 2. Para $k \geq 1$, escolha $m(k)$ tal que $0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1) + 1, M\}$ e defina

$$A_i^k = \max_{1 \leq j \leq m(k)} f_i(x^{k-j}), \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (2.23)$$

Agora, apresentamos o algoritmo do PGM-MOP adaptado para a busca linear não monótona do tipo máximo e os resultados ligados ao estudo de sua convergência. Este algoritmo foi retirado de [20]. Podemos observar a presença de uma sequência de escalares $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ variando entre limites determinados $\beta_{\min}$ e $\beta_{\max}$ ao invés de um escalar fixo β como no Algoritmo 4. Segundo a autora, um β_k adequado traz um melhor desempenho, resultando em uma convergência mais rápida do que com β fixo.

Iremos manter a sequência $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ porque ela não altera a validade dos resultados, podemos assumir $\beta_k = \beta, \forall k \in \mathbb{N}$. Por conveniência notacional, vamos então modificar (2.14) e (2.15) para se adequarem a sequência de escalares:

$$d_{\beta_k}^k = d_{\beta_k}(x^k) = \operatorname{argmin}_{d \in \mathcal{X} - \{x\}} \beta_k \omega(x)(d) + \frac{1}{2} \|d\|^2 \quad (2.24)$$

e o valor ótimo dessa função sendo

$$\phi_{\beta_k}^k = \phi_{\beta_k}(x) = \min_{d \in \mathcal{X} - \{x\}} \beta_k \omega(x)(d) + \frac{1}{2} \|d\|^2 = \beta_k \omega(x)(d_{\beta_k}(x)) + \frac{1}{2} \|d_{\beta_k}(x)\|^2. \quad (2.25)$$

Algoritmo 6 Gradiente projetado multiobjetivo com busca linear não monótona [20].

Passo 1. Escolha $\delta \in (0, 1)$, $M > 0$, $0 < \beta_{\min} < \beta_{\max} < \infty$ e $\beta_0 \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$. Seja $x^0 \in \mathcal{X}$ um ponto inicial arbitrário. Defina $k = 0$.

Passo 2. Calcule a direção da busca.

$$d_{\beta_k}(x^k) = \operatorname{argmin}_{d \in \mathcal{X} - \{x^k\}} \beta_k \omega_k(d) + \frac{\|d\|^2}{2}. \quad (2.26)$$

$$\text{onde } \omega_k(d) = \omega(x^k)(d) = \max_{i=1, \dots, p} \{\nabla f_i(x^k)^\top d\}.$$

Passo 3. Critério de parada. Calcule $\phi_{\beta_k}(x^k) = \beta_k \omega_k(d_{\beta_k}(x^k)) + \frac{1}{2} \|d_{\beta_k}(x^k)\|^2$. Se $\phi_{\beta_k}(x^k) = 0$, então pare.

Passo 4. Calcule o comprimento do passo. Seja $m(k) = \min\{k, M\}$ e escolha t_k como o maior $t \in \left\{ \frac{1}{2^j} \mid j = 0, 1, 2, \dots \right\}$ tal que

$$F(x^k + t_k d_{\beta_k}^k) \leq A^k + \delta t_k JF(x^k) d_{\beta_k}^k, \quad (2.27)$$

onde vale $A^k = (A_1^k, \dots, A_p^k)^\top$ e A_i^k é dado por (2.23).

Passo 5. Defina $x_{k+1} = x^k + t_k d_{\beta_k}(x^k)$. Defina β_{k+1} tal que $\beta_{k+1} \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$. Defina $k = k + 1$ e retorne ao Passo 2.

Assim como o Algoritmo 4 que trabalha com a busca linear monótona, o Algoritmo 6 também possui a característica de terminar em um número finito de iterações com um ponto Pareto estacionário ou produzir uma sequência infinita de pontos não Pareto estacionários, visto que ele também é verificado pela Proposição 2.31.

Se $x \in \mathcal{X}$ não for um ponto Pareto estacionário, então $JF(x) d_\beta(x) < 0$ e $d_\beta(x)$ é uma direção de descida [20, pág. 415]. Suponhamos que temos o caso de uma sequência infinita de pontos não Pareto estacionários, então $JF(x^k) d_\beta^k < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como consequência da busca linear não monótona, temos o seguinte lema.

Lema 2.38 [20, pág.416] *Para cada k no Algoritmo 6, então $F(x^k) \leq A^k$.*

Demonstração. Diretamente da definição de A^k em (2.23). □

O próximo resultado garante que o Algoritmo 6 está bem definido.

Lema 2.39 [20, pág.416] *Tome x^k uma iterando do Algoritmo 6. Se x^k não é Pareto estacionário, então existe um tamanho de passo $t_k > 0$ tal que a condição de Armijo (2.27) é válida.*

Os próximos dois resultados são usados na demonstração da convergência do Algoritmo 8 no final do capítulo.

Proposição 2.40 [20, pág. 413] Tome $\beta > 0$, $d_\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dados por (2.14) e (2.15). Então,

$$i. \|d_\beta(x)\|^2 \leq 2|\phi_\beta(x)|.$$

$$ii. \beta\omega(d_\beta(x)) \leq -|\phi_\beta(x)|.$$

Lema 2.41 [20] A sequência de escalares $\{\|d_{\beta_k}(x)\|\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.

O próximo resultado estabelece que a sequência de escalares $\{A_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ da busca linear não monótona gerada pelo Algoritmo 6 é não crescente e admite um limite.

Lema 2.42 [29] Tome $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo Algoritmo 6. Suponha também que F é continuamente diferenciável e limitada inferiormente, então, $\{A_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e admite um limite quando $k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$.

Proposição 2.43 [20, pág.416] Tome $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência gerada pelo Algoritmo 6 e K um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, $\beta^* > 0$, $x^* \in \mathcal{X}$ tal que $\lim_{k \in K} x^k = x^*$ e $\lim_{k \in K} \beta_k = \beta^*$. Então, existe K^* um subconjunto infinito de K tal que

$$\lim_{k \in K^*} \phi_{\beta_k}(x^k) = \phi_{\beta^*}(x^*). \quad (2.28)$$

O próximo resultado estabelece que sequência $\{t_k|\phi_\beta(x^k)|\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para zero quando $k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$. Esse resultado auxiliar é fundamental para demonstrar a convergência global do Algoritmo 6, porque poderemos supor que ou a sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ou a sequência $\{|\phi_{\beta_k}(x^k)|\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para zero e estudar esses dois casos.

Proposição 2.44 [20, pág.416] Tome $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ a sequência gerada pelo Algoritmo 6. Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k|\phi_{\beta_k}(x^k)| = 0.$$

Com essas informações, [20] demonstra que todo ponto de acumulação da sequência gerada pelo Algoritmo 6 é um ponto Pareto estacionário. A seguir, apresentamos uma demonstração mais detalhada deste resultado.

Teorema 2.45 Seja $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência gerada pelo Algoritmo 6. Então, todo ponto de acumulação de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é um ponto viável estacionário de (MOP).

Demonstração. Considere $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência gerada pelo Algoritmo 6 e $x^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação qualquer, logo existe uma subsequência de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para x^* . Além disso, sabemos que a sequência $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, então existe uma subsequência de $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $\beta^* > 0$. Deste modo, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $x^k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_1} x^*$ e $\beta^k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_1} \beta^*$. Podemos obter a viabilidade de x^* usando o fato de $\mathcal{X}$ ser fechado e de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$.

Supondo que o Algoritmo 6 não termina em um número finito de passos, ou seja, gera uma sequência infinita de pontos não estacionários $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, vamos mostrar que x^* é Pareto estacionário para o problema (MOP). Relembremos que $t_k \in (0, 1], \forall k \in \mathbb{N}$ e $\phi_{\beta_k}(x^k) < 0$ para todo ponto não estacionário. Invocando a Proposição 2.44, sabemos que $t_k |\phi_{\beta_k}(x^k)| \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} 0$, então ou $\liminf_{k \in \mathbb{N}} |\phi_{\beta_k}(x^k)| = 0$ ou $\liminf_{k \in \mathbb{N}} t_k = 0$. Podemos agora dividir a demonstração em duas partes.

Primeira situação:

Suponhamos que $\liminf_{k \in \mathbb{N}} |\phi_{\beta_k}(x^k)| = 0$. Pela definição de limite inferior, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que $|\phi_{\beta_k}(x^k)| \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_2} 0$. Pela Proposição 2.43, garantimos a continuidade de $\phi_{\beta_k}(x^k)$ para uma subsequência de $\mathbb{N}_2$, então $|\phi_{\beta^*}(x^*)| = 0$ e, com a Proposição 2.31, conseguimos a estacionariedade de Pareto.

Segunda situação:

Suponha agora que $\liminf_{k \in \mathbb{N}} t_k = 0$. Pela definição de limite inferior, existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que $t_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_2} 0$. Pelo Lema 2.41, a norma da sequência de direções de busca é limitada, então existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2$, tal que $d_{\beta_k}(x^k) \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_3} d^*$ com $d^* \in \mathbb{R}^n$ e $t_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_3} 0$.

Por definição, sabemos que

$$\max_{i=1, \dots, p} \{\beta_k \nabla f_i(x^k)^\top d_{\beta_k}(x^k)\} \leq \max_{i=1, \dots, p} \{\beta_k \nabla f_i(x^k)^\top d_{\beta_k}(x^k)\} + \frac{1}{2} \|d_{\beta_k}(x^k)\|^2 = \phi_{\beta_k}(x^k) < 0.$$

Como cada ∇f_i é contínua, $\beta_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_3} \beta^*$ e $d_{\beta_k} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_3} d^*$, então, aplicando o limite quando $k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_3} \infty$, obtemos a desigualdade

$$\max_{i=1, \dots, p} \{\beta^* \nabla f_i(x^*)^\top d^*\} \leq \limsup_{k \in \mathbb{N}_3} \phi_{\beta_k}(x^k) \leq 0. \quad (2.29)$$

Fixe agora um inteiro positivo qualquer w . Como $t_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_3} 0$, segue então pela definição de limite que $t_k < \frac{1}{2^w}$, demonstrando que a condição não monotonicidade do Passo 4. do Algoritmo 6 não vale quando $t = \frac{1}{2^w}$ em x^k . Então a condição de Armijo não é satisfeita, ou seja,

$$F(x^k + \frac{1}{2^w} d_{\beta_k}(x^k)) > A^k + \delta \frac{1}{2^w} JF(x^k)^\top d_{\beta_k}(x^k).$$

Agora, ao tomar o limite quando $k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_3} \infty$, então para cada $k \in \mathbb{N}_3$, existe um índice $i_k \in \{1, \dots, p\}$ tal que

$$f_{i_k}(x^k + \frac{1}{2^w} d_{\beta_k}(x^k)) > A_{i_k}^k + \delta \frac{1}{2^w} \nabla f_{i_k}(x^k)^\top d_{\beta_k}(x^k),$$

seguindo a definição de dominância entre vetores.

Como temos uma quantidade infinita de índices distribuídos em um conjunto finito, isto é, $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}_3} \subset \{1, \dots, p\}$, então pelo princípio das gavetas, existe pelo menos um índice $i^* \in \{1, \dots, p\}$ que sucede infinitamente. Com efeito, podemos produzir um novo subconjunto infinito, $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}_3$ tal que $i_k = i^*$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{i^*}(x^k + \frac{1}{2^w} d_{\beta_k}(x^k)) > A_{i^*}^k + \delta \frac{1}{2^w} \nabla f_{i^*}(x^k)^\top d_{\beta_k}(x^k).$$

Usando agora o resultado auxiliar, Lema 2.38, nos obtemos

$$f_{i^*}(x^k + \frac{1}{2^w} d_{\beta_k}(x^k)) \geq f_{i^*}(x^k) + \delta \frac{1}{2^w} \nabla f_{i^*}(x^k)^\top d_{\beta_k}(x^k). \quad (2.30)$$

Assim, ao aplicarmos o limite quando $k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}^*} \infty$ na desigualdade (2.30), conseguimos

$$f_{i^*}(x^* + \frac{1}{2^w} d^*) \geq f_{i^*}(x^*) + \frac{\delta}{2^w} \nabla f_{i^*}(x^*)^\top d^*.$$

Como a desigualdade anterior foi estabelecida por um inteiro positivo arbitrário w e $i^* \in \{1, \dots, p\}$, segue da Proposição 2.30 que $JF(x^*)d^* \not\leq 0$ e, portanto, vale a desigualdade $\max_{i=1, \dots, p} \{\nabla f_i(x^*)^\top d^*\} \geq 0$. Juntando essa desigualdade com (2.29), obtemos $\max\{\nabla f_i(x^*)^\top d^*\} = \omega(d^*) = 0$, e pelo item (ii) da Proposição 2.40, conseguimos que $\phi_{\beta^*}(x^*) = 0$. Portanto, concluímos que x^* é um ponto Pareto estacionário para (MOP).

□

Apresentamos um complemento do Teorema 2.45, ao supor que F tem seu conjunto de nível limitado, garantindo a existência de um ponto de acumulação e Pareto estacionário.

Corolário 2.46 *Tome $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência gerada pelo Algoritmo 6. Se F possui seu conjunto de nível limitado, no sentido de que o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^0)\}$ é limitado, então a sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ permanece limitada e tem pelo menos um ponto Pareto estacionário.*

Demonstração. Sabemos que $F(x^k) \leq A^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $A^k = \max_{1 \leq j \leq m(k)} F(x^{k-j})$, com $m(k) = \min\{k, M\}$. Como mostramos anteriormente que $\{A_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente, então $A_i^k \leq \dots \leq A_i^0 = f_i(x^0)$ para todo $i = 1, \dots, p$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $F(x^k) \leq F(x^0)$. Tome o conjunto de nível $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^0)\}$, então temos que $x^k \in C, \forall k \in \mathbb{N}$. Pela hipótese no enunciado, temos que C é limitado, então a sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C$ também é limitada. Pelo Teorema 1.6, temos que existe uma subsequência $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}_1}$ onde $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, tal que $x^{k_j} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_1} x^* \in \mathcal{X}$. Pelo Teorema 2.45, o ponto de acumulação x^* é Pareto estacionário.

□

Por fim, terminamos nossa análise sobre a convergência do PGM-MOP com o Lema 2.47 que garante que, sob a hipótese de a função ser convexa componente a componente, então todo ponto de acumulação da sequência gerada pelo Algoritmo 6 é um ponto fracamente eficiente. Redigimos sua demonstração fazendo menção aos Lemas 2.7 e 2.8.

Lema 2.47 *Tome $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo Algoritmo 6, com x^* como ponto de acumulação. Então valem as seguintes afirmações.*

- i. Se F é convexa componente a componente, então x^* é fracamente eficiente.*
- ii. Se F é estritamente convexa componente a componente, então x^* é eficiente.*

Demonstração. Considere $x^k \xrightarrow{k \in K} x^*$, com $K \subset \mathbb{N}$ sendo um subconjunto infinito.

No item (i), pelo Lema 2.34, sabemos que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$, como todo ponto fracamente eficiente é Pareto estacionário e pelo Teorema 2.45 x^* é viável e Pareto estacionário, então $\forall d \in \mathcal{X}$, temos $\max\{\nabla f_i(x^*)^\top d\} \geq 0$. Pela convexidade de cada f_i e pelo Teorema 1.33, então

$$\max_{i=1,\dots,p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} \geq \max_{i=1,\dots,p} \{\nabla f_i(x^*)^\top (y - x^*)\} \geq 0, \forall y \in \mathcal{X},$$

satisfazendo o Lema 2.8.

No item (ii), já sabemos que x^* é Pareto estacionário. Usando a convexidade estrita de cada f_i e o processo do item (i) vale que $\max_{i=1,\dots,p} \{f_i(y) - f_i(x^*)\} > 0, \forall y \in \mathcal{X}$, satisfazendo o primeiro item do Lema 2.7. $\square$

Capítulo 3

Problemas com Restrição de Cardinalidade

Iniciamos estudando os problemas de otimização escalar/mono-objetivo e métodos presentes na literatura para resolvê-los. Em seguida, apresentaremos nossa pesquisa sobre os métodos de Lagrangeano Aumentado no caso multiobjetivo, recorrendo ao PGM-MOP, introduzindo assim nosso algoritmo voltado para problemas multiobjetivo com restrição de cardinalidade, bem como seus resultados sobre viabilidade e convergência.

Além disso, exibiremos alguns resultados recentes da literatura sobre condições de qualificação voltadas para essa classe de problemas do multiobjetivo. As principais referências presentes neste capítulo são [21, 39, 40, 45].

3.1 Problema Escalar/Mono-objetivo com restrição de cardinalidade

Na otimização escalar/mono-objetivo, os problemas com restrição de cardinalidade são dados por

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \|x\|_0 \leq \alpha, \end{aligned} \tag{MPCaC}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m \text{ e } h_j(x) = 0, \forall j = 1, \dots, q\}$ são funções continuamente diferenciáveis, e a restrição de cardinalidade $\|x\|_0 \leq \alpha$, com $1 \leq \alpha < n$, indica a quantidade máxima de componentes não nulas do vetor x . Perceba que se $\alpha = n$, então todo vetor no $\mathbb{R}^n$ satisfaz essa restrição porque possui no máximo n componentes. Portanto, o efeito da restrição de cardinalidade deixa de existir e voltamos a ter o problema apenas sobre o conjunto $\mathcal{X}$. Importante comentar que, apesar da notação, a restrição de cardinalidade $\|\cdot\|_0$ não é norma e também não é contínua.

Observação 3.1 *A seguir neste trabalho, estaremos assumindo que $\mathcal{X}$ é um conjunto convexo simples fechado (ou seja, é fácil projetar nele, como é o caso de caixas, esferas ou semi-espaços), veremos que essas características serão necessárias para abordar o método do gradiente projetado. Para que $\mathcal{X}$ tenha essas propriedades com restrições de igualdade e desigualdade, escolhemos supor que as funções h e g sobre o conjunto $\mathcal{X}$ são afins.*

Problemas (MPCaC) são muito difíceis de serem resolvidos computacionalmente, são comumente resolvidos por técnicas globais de otimização discreta ou combinatória da Programação Inteira-Mista, como o *Branch-and-Bound* e *Branch-and-Cut*, veja [10].

Em [8] foi desenvolvido e analisado um método de otimização de direção alternada usando penalização (PADM, do Inglês *Penalty Alternating Direction Method*) para problemas convexos sujeitos a uma restrição de cardinalidade. A ideia central do método foi separar a parte contínua da parte discreta, resolvendo essas duas partes com subproblemas, usando um termo de penalização em norma- l_1 na diferença entre as variáveis duplicadas.

Além dessas técnicas, uma abordagem alternativa surgiu em [41] ao relaxar o seguinte problema de inteiro-misto, indicado para resolver (MPCaC),

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \quad e^\top y \geq n - \alpha, \\ & && x_i y_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & && y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $e \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de uns.

Essa abordagem consiste na adição de um vetor de variáveis auxiliares $y \in \mathbb{R}^n$ e de restrições contínuas que garantam sua cardinalidade e complementariedade com o vetor de variáveis x .

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \quad e^\top y \geq n - \alpha, \\ & && x_i y_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & && 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{MPCaC-R}$$

A restrição $e^\top y \geq n - \alpha$ vai garantir que y tenha, no máximo, o complementar de componentes não nulas de x , enquanto que as restrições $0 \leq y_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, p$ permitem tratar y como um vetor contínuo, garantindo maior liberdade em comparação com a variável inteira.

Os autores de [41] propuseram essa reformulação relaxada para o caso escalar, mas posteriormente ela foi estendida a problemas multiobjetivos. Também foi demonstrado por eles a equivalência entre os problemas (MPCaC-R) e (MPCaC), no sentido de x^* ser minimizador global. Com respeito a minimizadores locais, a equivalência ocorre somente sob uma hipótese na cardinalidade de x^* , $\|x^*\|_0 = \alpha$.

Note que, $\mathcal{X}$ é um conjunto fechado e convexo, temos um semiespaço $e^\top y \geq n - \alpha$ e as últimas n restrições denotam uma caixa simples no vetor de variáveis auxiliares $y \in \mathbb{R}^n$. Logo, a interseção dessas restrições, se for não vazia, também é um conjunto fechado e convexo. A única exceção de convexidade presente são as restrições de Hadamard, $x_i y_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$.

É fácil ver que essas restrições não definem um conjunto convexo, por exemplo, considere $x, y \in \mathbb{R}^2$ e o conjunto dos vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^4$ tal que $x_i y_i = 0, \forall i = 1, 2$. Sejam $(x, y) = (2, 2, 0, 0)$ e $(u, v) = (0, 0, 2, 2)$, ambos pertencem a esse conjunto, pois $x_i y_i = 0$ e $u_i v_i = 0$ para todo i . Entretanto, o vetor $(1/2)(x, y) + (1/2)(u, v) = e$ não pertence ao conjunto, logo não é convexo.

É comum na literatura usar a notação $x \circ y$ (ou $x * y$), para indicar o vetor com as restrições de Hadamard, isto é, $x \circ y = x * y = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)^\top$.

Através desta nova reformulação, com exceção da condição de Hadamard, os pontos viáveis do problema de otimização pertencerão à intersecção de conjuntos fechados e convexos. Assim, necessitamos de um método que seja capaz de gerar uma sequência de pontos projetados nesses conjuntos, como o PGM.

Agora que apresentamos o problema (MPCaC-R), vejamos como podemos penalizar a restrição de Hadamard tornando o conjunto viável totalmente convexo.

3.1.1 Penalização Externa e Lagrangeano Aumentado

Dos muitos cenários de aplicação na otimização, buscamos desenvolver técnicas para conversão de problemas complexos em outros mais simples. Nesse sentido, focaremos nos métodos de penalização externa ou, somente penalização, para contornar a restrição de Hadamard. Iremos nos basear na reestruturação da função objetivo, adicionando a restrição de Hadamard através de um parâmetro de penalidade com o objetivo de castigar a violação dessa restrição.

Na pesquisa de [40], a introdução da penalização externa é feita por uma abordagem mais direta, usando o termo de penalização $\tau p(x, y)$ com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, obtendo o seguinte problema penalizado associado a (MPCaC-R).

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimizar}} && f(x) + \tau p(x, y) \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \\ & && e^\top y \geq n - \alpha, \\ & && 0 \leq y_i \leq 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n, \end{aligned} \tag{MPCaC-RP}$$

onde $\tau > 0$ é um parâmetro de penalização escolhido de modo conveniente. Definimos o conjunto fechado e convexo $\bar{\Omega}$ por

$$\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in \mathcal{X}, e^\top y \geq n - \alpha, 0 \leq y_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}.$$

O princípio é recorrer a uma função contínua que se anula no conjunto a ser penalizado e é positiva fora dele. Então consideramos a função de penalidade continuamente diferenciável $p : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade:

$$p(x, y) \begin{cases} = 0 & \text{se } x \circ y = 0 \\ > 0 & \text{se } x \circ y \neq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Então $p(x, y) \geq 0$ para todo ponto (x, y) viável e $p(x, y) = 0$ se, e somente se, $x_i y_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, percebemos o papel crucial da função $p(x, y)$ nessa reformulação do problema de cardinalidade e de como sua escolha é importante. Uma possível definição para p que atenda essa equivalência com a restrição de Hadamard é $p(x, y) = \|x \circ y\|^2$.

Podemos então aplicar o algoritmo de penalização externa, resolvendo uma sequência de subproblemas convexos restritos como o problema anterior,

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimizar}} && f(x) + \tau_k p(x, y) \\ & \text{sujeito a} && (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (\text{MPCaC-RP}_k)$$

com $\tau_k > 0$ sendo a sequência de parâmetros de penalidade que cresce a cada k de modo a penalizar a infração causada pela restrição de Hadamard. Assim, no limite, aproximamos a solução penalizada da solução que cumpre a restrição. De acordo com [40], com algumas hipóteses razoáveis, podemos comprovar que a sequência de soluções de (MPCaC-RP_k) converge para uma solução global do problema (MPCaC-R) .

Para a resolução dos subproblemas (MPCaC-RP_k) , utilizam o método SPG (*Spectral Projected Gradient*) com o algoritmo Dykstra 2, pois agora o conjunto viável é uma interseção finita de conjuntos convexos.

No início de nossa pesquisa, buscamos estudar esse método de penalização para problemas (MOP). No entanto, com o estudo de trabalhos recentes como [7, 39], decidimos voltar nosso foco para o método do Lagrangeano Aumentado, que tem apresentado melhores resultados na aplicação escalar.

Em [39] a proposta foi penalizar a condição de Hadamard usando a função Lagrangeana aumentada, recorrendo ao algoritmo adaptado de Lagrangeano aumentado (AALM, do Inglês *Adaptive Augmented Lagrangean Objective Penalty Function Method*).

Grande parte dos trabalhos de otimização utilizam como base o modelo de Lagrangeano aumentado difundido no final da década de 60 por Powell, Hestenes e Rockafellar (PHR) com formato

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \tau) = f(x) + \frac{\tau}{2} \left[\sum_{i=1}^q \left[h_i(x) + \frac{\lambda_i}{\tau} \right]^2 + \sum_{j=1}^m \left[\max \left(0, g_j(x) + \frac{\mu_j}{\tau} \right) \right]^2 \right], \quad (3.3)$$

com $\mu \in \mathbb{R}_+^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^q$ e $\tau > 0$. Os métodos de Lagrangeano aumentado de formato PHR, são métodos de penalização com deslocamento e, geralmente, têm como objetivo penalizar as restrições difíceis do problema de otimização (por exemplo, restrições não convexas e não lineares) ou penalizar todas para obter um problema de otimização irrestrito, veja [7].

Neste trabalho, nosso foco principal é generalizar estas técnicas para problemas de otimização multiobjetivo com restrição de cardinalidade.

3.2 MOP com restrição de cardinalidade

Um problema de otimização multiobjetivo com restrição de cardinalidade (MOP-CaC) tem o seguinte formato

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} && F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^T \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{X}, \\ & && \|x\|_0 \leq \alpha. \end{aligned} \tag{MOPCaC}$$

Novamente, focaremos em uma reformulação contínua, que desempenhará um papel fundamental em nossa proposta algorítmica. O problema reformulado multiobjetivo está presente no trabalho recente de [45], sendo dado por

$$\begin{aligned} & \underset{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}}{\text{minimizar}} && F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^T \\ & \text{sujeito a} && (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \tag{MOPCaC-R}$$

O conjunto viável Ω do problema (MOPCaC-R) é definido por

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \left| \begin{array}{l} x \in \mathcal{X}, \\ e^\top y \geq n - \alpha, \\ x_i y_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}, \tag{3.4}$$

onde $e \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor de uns.

Vejamos agora alguns resultados que relacionam as soluções de Pareto do problema (MOPCaC) com sua reformulação contínua (MOPCaC-R). Além disso, iremos considerar os seguintes conjuntos de índices auxiliares:

$$\begin{aligned} I_{00}(x, y) &= \{i \mid x_i = 0, y_i = 0\} & I_{\pm 0}(x, y) &= \{i \mid x_i \neq 0, y_i = 0\} \\ I_{0\pm}(x, y) &= \{i \mid x_i = 0, y_i \in (0, 1]\} & I_0(x) &= \{i \mid x_i = 0\} \\ I_{01}(x, y) &= \{i \mid x_i = 0, y_i = 1\} & I_{\pm}(x) &= \{i \mid x_i \neq 0\} \end{aligned}$$

Iniciamos por apresentar alguns lemas preliminares.

Lema 3.2 [16] *Seja (x^*, y^*) um ponto viável do problema (MOPCaC-R) tal que $\|x^*\|_0 = \alpha$. Então, $e^\top y^* = n - \alpha$, $y_i = 0$ para $i \notin I_0(x^*)$, $y_i^* = 1$ para $i \in I_0(x^*)$ e $I_{00}(x^*, y^*) = \emptyset$.*

Lema 3.3 [16] *Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto viável para (MOPCaC). Então existe $y^* \in \mathbb{R}^n$ tal que (x^*, y^*) é viável para (MOPCaC-R). Se $\|x^*\|_0 = \alpha$, então y^* é único. Por outro lado, se (x^*, y^*) é viável para (MOPCaC-R), então x^* é viável para (MOPCaC).*

Teorema 3.4 [45, pág.4] *As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se x^* é uma solução eficiente/fracamente eficiente para o problema (MOPCaC), então existe $y^* \in \mathbb{R}^n$ tal que (x^*, y^*) é uma solução eficiente/fracamente eficiente de (MOPCaC-R). Além disso, para o problema relaxado, todo par viável na forma (x^*, y^*) é uma solução eficiente/fracamente eficiente.*
2. *Se (x^*, y^*) é uma solução eficiente/fracamente eficiente de (MOPCaC-R), então x^* é uma solução eficiente/fracamente eficiente de (MOPCaC).*

O Teorema 3.4 apresenta uma relação de equivalência entre soluções Pareto dos problemas (MOPCaC) e (MOPCaC-R). Todavia, necessitamos de uma hipótese sobre a cardinalidade para obter equivalência para solução local de Pareto.

Teorema 3.5 [45, pág.5] *Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ uma solução localmente eficiente/fracamente eficiente de (MOPCaC). Então existe um vetor $y^* \in \mathbb{R}^n$ tal que (x^*, y^*) é uma solução localmente eficiente/fracamente eficiente de (MOPCaC-R).*

A seguir, vejamos um exemplo mostrando que a relação de equivalência entre soluções ótimas locais de Pareto nem sempre é válida.

Exemplo 3.6 *Considere o seguinte MOPCaC e seu problema relaxado*

$$\begin{array}{ll}
 \underset{x \in \mathbb{R}^3}{\text{minimizar}} & F(x) = ((x_3 - 1)^2, -x_3)^\top \\
 \text{sujeito a} & x_1 \leq 0, \\
 & \|x\|_0 \leq 2.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \underset{x, y \in \mathbb{R}^3}{\text{minimizar}} & F(x) = ((x_3 - 1)^2, -x_3)^\top \\
 \text{sujeito a} & x_1 \leq 0, \\
 & y_1 + y_2 + y_3 \geq 1, \\
 & x_i y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
 & 0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3
 \end{array}$$

Considere $x^ = (0, 1, 0)$. Seja $t \in (0, 1)$ e defina $y^* = (1 - t, 0, t)$. Afirmamos que (x^*, y^*) é uma solução localmente fracamente eficiente do problema relaxado, satisfazendo todas suas restrições. Assim, para cada (x, y) suficientemente perto de (x^*, y^*) , obtemos $y_3 \neq 0$ e, consequentemente, $x_3 = 0$. Deste modo, $f_1(x) = f_1(x^*) = 1$ e $f_2(x) = f_2(x^*) = 0$, provando a afirmação. Por outro lado, x^* não é uma solução localmente fracamente eficiente para o MOPCaC. Com efeito, dado $\delta > 0$, então para todo ponto $x_\delta = (0, 1, \delta)$ perto de x^* , obtemos $f_1(x_\delta) = (\delta - 1)^2 < f_1(x^*) = 1$ e $f_2(x_\delta) = -\delta < f_2(x^*) = 0$, isto é, x^* não é fracamente eficiente. A Figura 3.1 mostra o espaço dos objetivos do problema*

relaxado, com as soluções não dominadas em vermelho, podemos também observar que $F(x^*)$ é dominado por alguns pontos $F(x_\delta)$ abaixo dele na curva em azul.

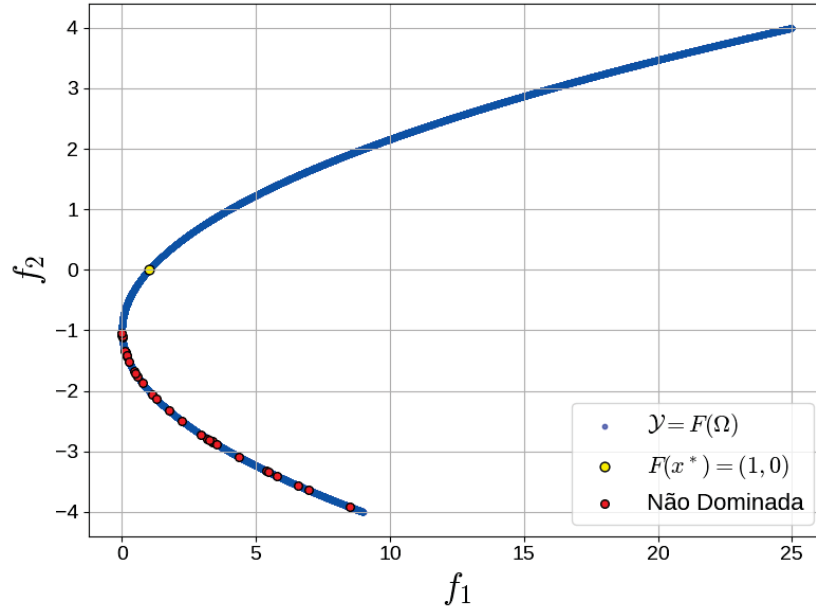


Figura 3.1: Gráfico do espaço dos objetivos do Exemplo 3.6.

Teorema 3.7 [45, pág.5] *Seja (x^*, y^*) uma solução localmente fracamente eficiente do problema relaxado (MOPCaC-R). Então $\|x^*\|_0 = \alpha$ se, e somente se, y^* é único, isto é, existe exatamente um y^* tal que (x^*, y^*) é uma solução localmente fracamente eficiente de (MOPCaC-R). Neste caso, as componentes de y^* são binárias e x^* é uma solução localmente fracamente eficiente de (MOPCaC).*

Para garantirmos a existência de soluções estacionárias para problemas MOP-CaC, precisamos estabelecer condições de qualificação. Além disso, devemos aproveitar o momento para apresentar as condições de otimalidade de KKT no multiobjetivo. Neste trabalho, abordaremos apenas as condições de otimalidade de primeira ordem, estacionariedade e de qualificação para (MOPCaC), nos baseando no recente trabalho de [45].

Na Definição 2.11, estabelecemos o cone normal regular p -multiobjetivo. Tomando agora $X = \Omega$ então $\hat{N}_\Omega(x^*, y^*; p) \subset \mathbb{R}^{2n \times p}$. Portanto, ao considerar algum $U = (u_i)_{i=1}^p \in \hat{N}_\Omega(x^*, y^*; p)$ e para todo $i = 1, \dots, p$, escrevemos u_i como $u_i = (u_i^x, u_i^y)$ onde $u_i^x \in \mathbb{R}^n$ e $u_i^y \in \mathbb{R}^n$. O Lema 3.8 é um resultado usado para caracterizar os elementos do cone normal p -multiobjetivo que está associado ao conjunto viável de (MOPCaC-R).

Lema 3.8 [45] *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ o conjunto viável (3.4) e $(x^*, y^*) \in \Omega$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $U = (u_i)_{i=1}^p \in \hat{N}_\Omega(x^*, y^*; p)$ com $u_i^y = 0, \forall i = 1, \dots, p$;
2. Existe uma função multiobjetivo de classe C^1 da forma $F = (f_1, \dots, f_p)^\top$ que depende apenas da variável x tal que $(x^*, y^*) \in \Omega$ é uma solução localmente fracamente

eficiente do problema (MOPCaC-R) relativo à Ω , $u_i^x = -\nabla f_i(x^*)$ e $u_i^y = 0$, para todo $i = 1, \dots, p$.

A partir do resultado anterior, podemos definir o seguinte conjunto utilizado para definir as CQs para (MOPCaC).

$$\hat{N}_{\Omega,0}(x^*, y^*; p) = \left\{ U = (u_i)_{i=1}^p \in \hat{N}_{\Omega}(x^*, y^*; p) : u_i^y = 0, \forall i = 1, \dots, p \right\}. \quad (3.5)$$

Definição 3.9 [45, pág.10] Considere (x^*, y^*) um ponto viável de (MOPCaC-R). Suponha que exista um vetor $0 \neq (\lambda^f, \lambda^g, \lambda^h, \gamma) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla F(x^*)^\top \lambda^f + \nabla g(x^*)^\top \lambda^g + \nabla h(x^*)^\top \lambda^h + \gamma = 0. \quad (3.6)$$

$$\lambda_i^g g_i(x^*) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

Então, dizemos que (x^*, y^*) é um:

- (a) Ponto fraco CaC-M-estacionário, se $\lambda^f \neq 0$ e, além de (3.6) e (3.7), $\gamma_i = 0$ para todo $i \in I_{\pm}(x^*)$;
- (b) Ponto forte CaC-M-estacionário, se $\lambda_i^f > 0$ para todo $i = 1, \dots, p$ e, além de (3.6) e (3.7), $\gamma_i = 0$ para todo $i \in I_{\pm}(x^*)$;

Adicionalmente, (x^*, y^*) é um

1. Ponto fraco CaC-S-estacionário, se (x^*, y^*) é um ponto fraco CaC-M-estacionário com $\gamma_i = 0$ para todo $i \in I_0(y^*)$;
2. Ponto forte CaC-S-estacionário, se (x^*, y^*) é um ponto forte CaC-M-estacionário com $\gamma_i = 0$ para todo $i \in I_0(y^*)$.

A Definição 3.9 fornece condições de estacionariedade para um ponto (x^*, y^*) ser candidato a solução Pareto do problema (MOPCaC-R). Segundo [45, pág.9], um ponto fraco/forte CaC-M-estacionário não depende do vetor y^* , e todo ponto fraco/forte CaC-S-estacionário é também fraco/forte CaC-M-estacionário.

Em [45, Proposição 2] temos que, dado um ponto fraco/forte CaC-M-estacionário (x^*, y^*) , é possível encontrar outra variável $\bar{z}$ tal que $(x^*, \bar{z})$ seja um ponto fraco/forte CaC-S-estacionário, ou seja, os conceitos de CaC-S-estacionário e CaC-M-estacionário são equivalentes ao realizar algumas modificações sobre a variável y .

A seguir, apresentamos o resultado que relaciona pontos fracos/fortes de KKT com pontos fracos/fortes CaC-S-estacionários para o problema (MOPCaC-R).

Teorema 3.10 [45] Um ponto (x^*, y^*) é um ponto fraco/forte CaC-S-estacionário de (MOPCaC-R) se, e somente se, (x^*, y^*) é um ponto fraco/forte KKT de (MOPCaC).

Semelhante ao que apresentamos na Definição 1.47, vamos precisar apresentar a Definição 3.11 do cone viável linearizado para Ω em (x^*, y^*) .

Definição 3.11 [45, pág.11] Considere o conjunto Ω de (3.4) e $(x^*, y^*) \in \Omega$. Definimos o cone viável linearizado para Ω em (x^*, y^*) por

$$\mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*) = \left\{ d = (u, v) \left| \begin{array}{ll} \nabla g_i(x^*)^\top u \leq 0, & \text{para todo } i \in I_g(x^*); \\ \nabla h_i(x^*)^\top u = 0, & \text{para todo } i = 1, \dots, q; \\ e^\top v \geq 0 & \text{se } e^\top y^* = n - \alpha; \\ v_i \geq 0 & \text{para todo } i \in I_{00}(x^*, y^*); \\ v_i \leq 0 & \text{para todo } i \in I_{01}(x^*, y^*); \\ u_i = 0 & \text{para todo } i \in I_{0\pm}(x^*, y^*); \\ v_i = 0 & \text{para todo } i \in I_{\pm 0}(x^*, y^*). \end{array} \right. \right\} \quad (3.8)$$

Note que $(x^*, y^*) \in \Omega$ é um ponto fraco/forte KKT de (MOPCaC-R), se existe um vetor não nulo $\lambda^f \in \mathbb{R}_+^p$ tal que

$$(-\nabla F(x^*), 0)^\top \lambda^f = \sum_{i=1}^p \lambda_i^f (-\nabla f_i(x^*), 0) \in \mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)^\circ.$$

Em [45] definem o cone CaC-linearizado para Ω em (x^*, y^*) por

$$\mathcal{D}_\Omega^{CaC}(x^*, y^*) = \mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*) \cap \{d = (u, v) \mid u_i v_i = 0, \forall i \in I_{00}(x^*, y^*)\}. \quad (3.9)$$

A diferença entre esses dois cones viáveis linearizados é a adição das restrições de Hadamard $u_i v_i = 0$, para todo $i \in I_{00}(x^*, y^*)$.

Definição 3.12 [45, pág.11] Seja (x^*, y^*) um ponto viável do problema (MOPCaC-R). Então, dizemos que (x^*, y^*) satisfaz

1. *Condição de Qualificação de Abadie (ACQ)* se $T_\Omega(x^*, y^*) = \mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)$.
2. *Condição de Qualificação de Guignard (GCQ)* se $T_\Omega(x^*, y^*)^\circ = \mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)^\circ$.
3. *MOPCaC-Abadie (MOPCaC-ACQ)* se $T_\Omega(x^*, y^*) = \mathcal{D}_\Omega^{CaC}(x^*, y^*)$.
4. *MOPCaC-Guignard (MOPCaC-GCQ)* se $T_\Omega(x^*, y^*)^\circ = \mathcal{D}_\Omega^{CaC}(x^*, y^*)^\circ$.

Segundo [45, pág.11], podemos estabelecer uma igualdade entre os polares dos cones $\mathcal{D}_\Omega^{CaC}(x^*, y^*)$ e $\mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)$, valendo também a inclusão $T_\Omega(x^*, y^*) \subset \mathcal{D}_\Omega^{CaC}(x^*, y^*) \subset \mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)$. Assim, podemos estabelecer as seguintes implicações

$$ACQ \implies MOPCaC - ACQ \implies MOPCaC - GCQ \iff GCQ. \quad (3.10)$$

A seguir, vamos apresentar a CQ mais fraca da literatura para validar da condição de estacionariedade fraca CaC-S em uma solução localmente fracamente eficiente.

Teorema 3.13 [45, MOP-WCQ] *Seja (x^*, y^*) um ponto viável de (MOPCaC-R). Considere o conjunto*

$$\mathbb{L}_{\Omega,0}(x^*, y^*; p) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \min_{i=1, \dots, p} u_i^\top d \leq 0, \forall (u_i)_{i=1}^p \in \widehat{N}_{\Omega,0}(x^*, y^*; p) \right\}.$$

A CQ mais fraca, denominada MOP-WCQ, sob a qual cada solução localmente fracamente eficiente (MOPCaC-R) é um ponto fraco CaC-S-estacionário é a inclusão

$$\mathcal{D}_{\Omega}(x^*, y^*) \subset \mathbb{L}_{\Omega,0}(x^*, y^*; p). \quad (3.11)$$

Isto é, (3.11) vale se, e somente se, (x^, y^*) for um ponto fraco CaC-S-estacionário sempre que (x^*, y^*) é uma solução localmente fracamente eficiente de (MOPCaC-R) para alguma função continuamente diferenciável $F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^\top$.*

Segundo [45, pág.13], diferente do que ocorre na otimização escalar, na otimização multiobjetivo, a condição GCQ não é suficiente para cumprir a condição fraca de KKT em uma solução localmente fracamente eficiente. Portanto, temos uma brecha entre a otimização escalar e multiobjetivo donde a condição ACQ é suficiente para garantir a condição fraca KKT em uma solução localmente fracamente eficiente, mas não GCQ.

Além disso, a qualificação CaC-ACQ não é suficiente para garantir a condição fraca CaC-S-estacionária em uma solução localmente fracamente eficiente e também não podemos substituir o cone $\mathcal{D}_{\Omega}(x^*, y^*)$ pelo conjunto $\mathcal{D}_{\Omega}^{CaC}(x^*, y^*)$ ao passo que o mantemos como um CQ para conseguir a condição de estacionariedade fraca CaC-S. Veja o Exemplo 3.14.

Exemplo 3.14 *Considere o seguinte MOPCaC e seu problema relaxado*

$$\begin{array}{ll} \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimizar}} & F(x) = (x_1, x_2)^\top \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 = 0, \\ & \|x\|_0 \leq 1. \end{array} \quad \begin{array}{ll} \underset{x, y \in \mathbb{R}^2}{\text{minimizar}} & F(x) = (x_1, x_2)^\top \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 = 0, \\ & y_1 + y_2 \geq 1, \\ & x_i y_i = 0, i = 1, 2, \\ & 0 \leq y_i \leq 1, i = 1, 2. \end{array}$$

Aqui, $x^ = (0, 0)$ é uma solução eficiente de MOPCaC. Tomando $y^* = (1, 0)$, temos pela Definição 2.5 que (x^*, y^*) é uma solução fracamente eficiente do problema relaxado, porque não existe ponto $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz $f_1(x) = x_1 < 0 = f_1(x^*)$ e $f_2(x) = x_2 < 0 = f_2(x^*)$ simultaneamente com a restrição $x_1 x_2 = 0$.*

Além disso, não é um ponto KKT fraco. Escolha um vetor arbitrário não nulo $\lambda^f \in \mathbb{R}_+^p$, podemos mostrar que $(-\nabla F(x^), 0)^\top \lambda^f \notin \mathcal{D}_{\Omega}(x^*, y^*)^\circ$. Tome $\nabla f_1(x^*) =$*

$(1, 0, 0, 0)^\top$ e $\nabla f_2(x^*) = (0, 1, 0, 0)^\top$, note que $d^* = (0, -1, 0, 0) \in \mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)$, mas $\nabla f_1(x^*)^\top d^* = 0$ e $\nabla f_2(x^*)^\top d^* < 0$. Definindo $v = (-\nabla F(x^*), 0)^\top \lambda^f$, então $v^\top d^* > 0$ e, portanto, não pertence a $\mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)^\circ$, consequentemente, (x^*, y^*) não é KKT fraco.

Se um ponto (x^*, y^*) é fracamente eficiente e satisfaz MOP-WCQ, então esse ponto será KKT fraco. Tomando a contra-positiva desta afirmação, obtemos que MOP-WCQ falha em (x^*, y^*) . Apesar de MOP-WCQ não ser satisfeita, podemos notar que $T_\Omega(x^*, y^*) = D_\Omega^{CaC}(x^*, y^*)$, portanto, vale a condição de qualificação CaC-ACQ.

Vejamos na Figura 3.2 as imagens das soluções encontradas pela nossa abordagem apresentada neste trabalho. Maiores detalhes da abordagem serão discutidos nas próximas seções.

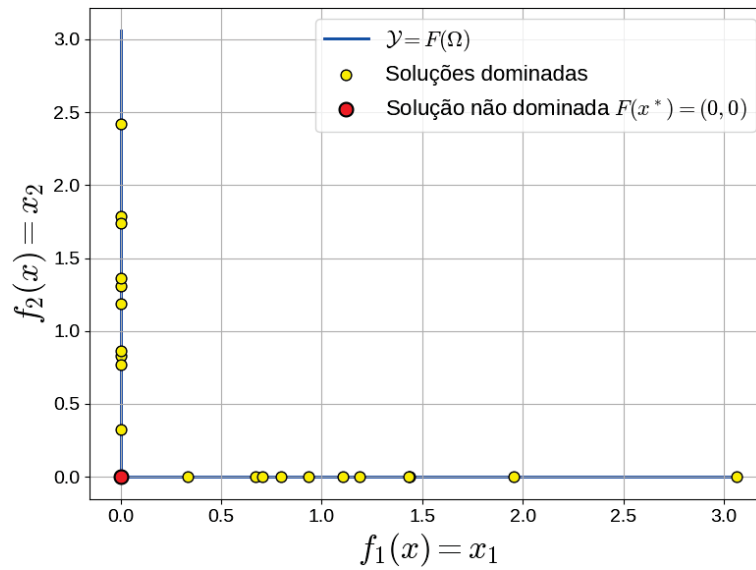


Figura 3.2: Espaço dos objetivos do Exemplo 3.14 com dominância do vetor nulo.

As soluções foram filtradas por um teste de dominância sobre F , de modo que, $F(x^*)$ é a solução não dominada no espaço dos objetivos. As imagens das soluções amarelas seriam dos pontos fracamente eficientes, os quais nunca são vencidos em todos os objetivos simultaneamente.

Apesar de MOP-WCQ não valer no exemplo anterior, sob a hipótese de algum tipo de continuidade externa ao conjunto polar relacionado ao cone $\mathcal{D}_\Omega(x^*, y^*)$, podemos garantir (3.11) no caso das funções h e g serem afins. Na sequência, apresentaremos um resultado auxiliar para garantir essa continuidade externa. Este lema é estabelecido usando o poliedro geral que contém Ω dado por

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} a_j^\top x + b_j^\top y \leq c_j, \quad \forall j = 1, \dots, m \\ x_i y_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

e também o cone viável linearizado para $\mathcal{Q}$ em $z = (x, y)$, dado por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}(z) = \left\{ (d_x, d_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} a_j^\top d_x + b_j^\top d_y \leq 0, \quad \forall j \mid a_j^\top x + b_j^\top y = c_j; \\ y_i(e^\top d_x) + x_i(e_i^\top d_y) = 0, \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}.$$

Teorema 3.15 [45] *Considere o conjunto viável Ω definido em (3.4) onde h e g são funções afins. Então, $\mathcal{D}_{\Omega}(x^*, y^*) \subset \mathbb{L}_{\Omega,0}(x^*, y^*; p)$ vale para todo ponto viável $(x^*, y^*) \in \Omega$. Em particular, se (x^*, y^*) é uma solução localmente fracamente eficiente de (MOPCaC-R) para alguma função continuamente diferenciável F , então (x^*, y^*) é um ponto fraco CaC-S-estacionário.*

3.2.1 Penalização Externa e Lagrangeano Aumentado

A seguir, iremos analisar a viabilidade e convergência de duas abordagens algorítmicas propostas neste trabalho, bem como caracterizar os pontos de acumulação encontrados para o problema (MOPCaC).

Na primeira abordagem, vamos propor penalizar a restrição de Hadamard através de uma sequência de subproblemas definidos por

$$\begin{aligned} & \underset{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}}{\text{minimizar}} && F(x) + \tau p(x, y) e = (f_1 + \tau p(x, y), \dots, f_p + \tau p(x, y))^\top \\ & \text{sujeito a} && (x, y) \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Neste caso, o termo de penalização $\tau p(x, y)$ é adicionado em cada componente de F , de modo a penalizar uniformemente a violação causada pela restrição de Hadamard em cada f_i , $i = 1, \dots, p$. Para a resolução de (3.12) recorreremos ao Algoritmo 6. A viabilidade da sequência ficaria assegurada pelo Lema 2.34.

Foi observado por [20, pág. 418] que calcular a direção de busca d_β^k através do Passo 2. do Algoritmo 6 é equivalente a minimizar o subproblema quadrático $\nabla f(x^k)^\top d + d^\top B_k d$, aproximação quadrática da função objetivo na iteração x^k , apresentado por [12] utilizando o Algoritmo de Dykstra 2 para obter viabilidade da sequência. Logo, para encontrar a direção de busca podemos usar tanto SLSQP para resolver o Passo 2 do Algoritmo 6 quanto minimizar uma aproximação quadrática recorrendo a Dykstra. Como vimos, isso também é evidenciado pelo Lema 2.32 e Exemplo 2.33. Neste trabalho, optamos por SLSQP conforme algoritmo PGM-MOP de [20] e usamos Dykstra para garantir que o ponto inicial seja viável.

Portanto, propomos o Algoritmo 7 que une o PGM-MOP estudado anteriormente com o método de penalização para MOPCaC relaxado.

Algoritmo 7 Gradiente Projetado Multiobjetivo Penalizado para MOPCaC.

Passo 1. Considere $1 \leq \alpha < n$, $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{2n}$ um ponto inicial, $\tau_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$, $M > 0$, $-\infty < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < \infty$, $\lambda_0 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n \subset \mathbb{R}^n$, $0 < tol_1 < 1$ e $0 < tol_2 < 1$. Selecione $\eta_0 > 1$ e defina também $k = 0$.

Passo 2. Atualize η_{k+1} e o parâmetro de penalização $\tau_{k+1} = \eta_{k+1}\tau_k$.

Passo 3. Partindo de (x^k, y^k) , aplique o método PGM-MOP com o Algoritmo 6 para resolver o problema relaxado e penalizado multiobjetivo (3.12) até que o critério de parada com a tolerância tol_1 seja satisfeito. Considere então (x^{k+1}, y^{k+1}) a solução obtida.

Passo 4. Se

$$\left(\frac{(x^{k+1})^2}{\|x^{k+1}\|^2} \right)^\top \left(\frac{(y^{k+1})^2}{\|y^{k+1}\|^2} \right) \leq tol_2 \text{ e } \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\| \leq tol_2,$$

então pare. Caso contrário, defina $k = k + 1$ e retorne ao Passo 2.

Nesta subseção, inicialmente estávamos interessados em resolver o problema de otimização multiobjetivo (MOPCaC-R) com o Algoritmo 7. Para esta finalidade, usaríamos a penalização externa da restrição de Hadamard e o Algoritmo 6 junto do SLSQP e do método de Dykstra como auxiliares.

Contudo, segundo [38, pág.64], métodos de penalização externa apresentam a necessidade de crescimento ilimitado do parâmetro de penalização τ , podendo causar instabilidades numéricas na implementação, isso também foi notado em nossos experimentos.

Inspirados nos trabalhos recentes de [7, 39] que utilizam o Lagrangiano aumentado para penalizar a restrição de Hadamard e o trabalho recente de [21] sobre um algoritmo global de Lagrangiano aumentado multiobjetivo para restrições de desigualdade convexas, decidimos unir essas vertentes para propor um algoritmo de Lagrangiano aumentado para resolver MOPCaC ao penalizar a condição de Hadamard de MOPCaC-R.

Portanto, seguiremos esta abordagem somando em cada função f_i o termo de penalização que envolve a condição de Hadamard e adicionando um termo de regularização dos multiplicadores de Lagrange. Temos então $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^p$ dado por

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \tau) = F(x) + \left[\frac{\tau}{2} \left[\sum_{i=1}^n \left[x_i y_i + \frac{\lambda_i}{\tau} \right]^2 \right] \right] e = F(x) + \left[\frac{\tau}{2} \left\| x \circ y + \frac{\lambda}{\tau} \right\|^2 \right] e. \quad (3.13)$$

Assim, cada função componente de $\mathcal{L}$ é continuamente diferenciável, de modo que não afeta a teoria apresentada sobre PGM-MOP. Assim, usamos essa abordagem Lagrangeana para resolver o seguinte subproblema,

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimizar}} && \mathcal{L}(x, y, \lambda, \tau) \\ & \text{sujeito a} && (x, y) \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Em 1993, [42] apresentou uma alternativa em relação à penalização quadrática de PHR usando uma função de penalização exponencial para penalizar uma restrição de desigualdade $g_i(x) \leq 0$, e resolver problemas da otimização restrita convexa, dada por

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \tau) = f(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\tau} (e^{\tau g_i(x)} - 1)$$

Segundo os mesmos autores, esse método opera como o método de Lagrangiano aumentado de PHR, mas teria a vantagem de ser duas vezes diferenciável no caso das funções f e g o serem, permitindo uma melhor eficiência quando usado com métodos do tipo Newton em problemas de otimização irrestritos, porque garantiria uma convergência superlinear. Também analisaram a taxa de convergência do método de penalização exponencial quando aplicado em problemas da programação linear. Além disso, dualizam esse método para obter um algoritmo de minimização logarítmica, sendo equivalente ao método exponencial.

Assim, os métodos de penalização quadrática e exponencial podem ser utilizados na resolução do mesmo problema de otimização, entretanto não são sempre métodos equivalentes, devido a estrutura dos gradientes serem diferentes no termo de penalização, ou seja, não devemos esperar que convirjam sempre para o mesmo ponto.

No caso multiobjetivo, o recente trabalho de [5] apresenta dois métodos aproximativos de Lagrangeano aumentado multiobjetivo com penalização exponencial, um usado com PGM-MOP e o outro com o método do gradiente multiobjetivo, mas ambos voltados para restrições de desigualdade convexas. Inspirados neste trabalho e lembrando nosso objetivo de penalizar a restrição de Hadamard, propomos a seguinte função como alternativa de penalização.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \tau) = F(x) + \left[\lambda^\top (x \circ y) + \tau \left[\sum_{i=1}^n (e^{x_i^2 y_i^2} - 1) \right] + \frac{\|\lambda\|^2}{2\tau} \right] e. \quad (3.15)$$

Veja que ela nem sempre será equivalente à penalização quadrática, pois a estrutura dos gradientes e a curvatura do método exponencial crescem muito mais rápido, como podemos ver abaixo

$$\frac{\tau}{2} \nabla_{x_i} (e^{x_i^2 y_i^2} - 1) = \tau x_i y_i^2 e^{x_i^2 y_i^2} \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{2} \nabla_{x_i} (x_i^2 y_i^2) = \tau x_i y_i^2.$$

A seguir, vejamos o Algoritmo 8 que busca uma solução para (MOPCaC-R) resolvendo uma sequência de subproblemas como (3.14).

Algoritmo 8 Lagrangeano Aumentado Multiobjetivo com PGM-MOP para MOPCaC.

Passo 1. Tomando $1 \leq \alpha < n$, $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{2n}$ como o ponto inicial, $\tau_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$, $M > 0$, $-\infty < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < \infty$, $\lambda^0 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n \subset \mathbb{R}^n$, $0 < tol_1 < 1$, e $0 < tol_2 < 1$. Escolha $\eta_0 > 1$ e considere $k = 0$.

Passo 2. Partindo de (x^k, y^k) , aplique o método PGM-MOP com o Algoritmo 6 para resolver o problema de Lagrangeano aumentado multiobjetivo (3.14) até que o critério de parada com a tolerância tol_1 seja satisfeito. Considere (x^{k+1}, y^{k+1}) como solução obtida do problema

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimizar}} && \mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k) \\ & \text{sujeito a} && (x, y) \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Passo 3. Se as desigualdades a seguir forem satisfeitas pare

$$\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \leq tol_2 \|x^{k+1}\|^2 \|y^{k+1}\|^2 \text{ e } \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\| \leq tol_2.$$

Caso contrário, tome

$$\lambda^{k+1} = P_{[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n}(\lambda^k + \tau_k(x^{k+1} \circ y^{k+1}))$$

e verifique:

Passo 3a. Se $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| \leq \frac{1}{\eta_k} \|x^k \circ y^k\|$, então tome $\tau_{k+1} = \tau_k$

Passo 3b. Caso contrário, compute $\eta_{k+1} > \eta_k$ e tome $\tau_{k+1} = \eta_{k+1} \tau_k$.

Passo 4. Tome $k = k + 1$ e retorne ao Passo 2.

Agora, vamos apresentar algumas propriedades sobre viabilidade e estacionariedade de Pareto que desenvolvemos para o Algoritmo 8.

Lema 3.16 *Considere Ω o conjunto viável do problema original (MOPCaC-R) e $\bar{\Omega}$ o conjunto viável do problema penalizado (3.14) Tome $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função continuamente diferenciável com conjuntos de nível limitados, no sentido de que o conjunto $C_F(z) = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \mid F(x) \leq z\}$ é limitado para todo $z \in \mathbb{R}^p$. Então, os conjuntos de nível da função Lagrangeana aumentada são limitados e todo ponto de acumulação (x^{k+1}, y^{k+1}) é Pareto estacionário viável do problema*

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimizar}} && \mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k) \\ & \text{sujeito a} && (x, y) \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Demonstração. Sabemos que $\bar{\Omega}$ é a interseção finita de conjuntos fechados, convexos e com base nas instruções do Algoritmo 8, (x^{k+1}, y^{k+1}) é obtido do Algoritmo 6 usando

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \tau) = F(x) + \left[\frac{\tau}{2} \left\| x \circ y + \frac{\lambda}{\tau} \right\|^2 \right] e \tag{3.17}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $\tau > 0$. Pelo Lema 2.27, temos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \bar{\Omega}$. Vejamos primeiro que a função $\mathcal{L}$ tem seus conjuntos de nível limitados.

Tome $z \in \mathbb{R}^p$ arbitrário, sabemos que $C_F(z)$ é limitado. Considerando o conjunto de nível $C_{\mathcal{L}_k}(z) = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \mid \mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k) \leq z\}$. Pela definição de $\mathcal{L}$, vale que $F(x) \leq \mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k)$ para todo $(x, y) \in \bar{\Omega}$, $\tau_k > 0$ e $\lambda^k \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n$. Portanto, $C_{\mathcal{L}_k}(z) \subset C_F(z)$. Como z é arbitrário e todo subconjunto de um conjunto limitado é limitado, então vale a primeira parte.

Agora, do Teorema 2.45, sabemos que o Algoritmo 6 gera uma sequência de pontos tal que todo ponto de acumulação é um ponto Pareto estacionário.

Sabemos que o Algoritmo 6 converge em um número finito de iterações ou gera uma sequência infinita de pontos não estacionários. Do primeiro caso, diretamente encontramos um ponto de acumulação e concluímos o resultado. Do segundo caso, vamos supor a sequência de pontos não estacionários $\{(x^t, y^t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ para o problema de minimizar $\mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k)$. Como os conjuntos de nível do Lagrangeano aumentado são limitados, existe então uma subsequência infinita $K \subset \mathbb{N}$ tal que $(x^t, y^t) \xrightarrow{k \in K} (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega}$. Mas como $(\bar{x}, \bar{y})$ é um ponto de acumulação, então ele é um ponto Pareto estacionário do problema penalizado de minimizar $\mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k)$. Logo, todo ponto de acumulação do Algoritmo 6, converge para um ponto Pareto estacionário e viável do problema (3.16), pois como $\bar{\Omega}$ é fechado, então $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega}$. $\square$

O Lema 3.16 estabelece que se os conjuntos de nível de F são limitados, então os conjuntos de nível do Lagrangiano aumentado também o são. Além disso, como consequência do PGM-MOP sempre produzir uma sequência, tal que seus pontos de acumulação são Pareto estacionários, então isto também valerá para todo Lagrangeano aumentado atualizado em todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 3.17 *Note que a hipótese do Lema 3.16 sobre considerar todos os conjuntos de nível limitados é muito forte. No caso escalar, Proposição 1.22 nos diz que tal hipótese implica coercividade. Resultado este que é muito utilizado para obter ótimo global.*

O próximo Teorema 3.2.1 estabelece viabilidade ao Algoritmo 8, no sentido de que todo ponto de acumulação (x^*, y^*) da sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\}_{k \in \mathbb{N}}$ pertence ao conjunto Ω do problema (MOPCaC-R).

Teorema 3.18 (Viabilidade) *Considere o conjunto viável Ω de (MOPCaC-R), e o conjunto viável $\bar{\Omega}$ do problema penalizado (3.14). Suponha que $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^p$ seja continuamente diferenciável tal que seus conjuntos de nível $C(z) = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \mid F(x, y) \leq z\}$ sejam limitados para todo $z \in \mathbb{R}^p$. Tome também $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\} \subset \bar{\Omega}$ a sequência gerada pelo Algoritmo 8. Então, todo ponto de acumulação (x^*, y^*) é viável para o problema original, isto é, $(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, y^*) \in \Omega$.*

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito tal que $(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, y^*)$. Como F é contínua e a sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\}_{k \in K}$ está contida no fechado $\overline{\Omega}$, então $(x^*, y^*) \in \overline{\Omega}$ e $F(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} F(x^*, y^*)$. Resta mostrar que $x^* \circ y^* = 0$. Como a sequência $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é monótona não decrescente, existem apenas duas possibilidades: ou ela é limitada ou divergente. A seguir, façamos uma análise dessas situações:

Primeira situação (Sequência $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada):

Como $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $\tau_k \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Observando as instruções do Algoritmo 8 temos que, ou $\eta_k = \eta_0$ e $\tau_k = \tau_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou existe algum índice $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\eta_k > \eta_0$ para todo $k \geq k_1$. Em ambos os casos (como $\eta_0 > 1$), a convergência desejada segue da desigualdade do Passo 3a. do algoritmo. A prova nos dois casos é análoga, então focaremos apenas no segundo caso.

De fato, os saltos multiplicativos $\tau_{k+1} = \eta_{k+1}\tau_k > \tau_k$ (pois $\eta_{k+1} > \eta_k > 1$), só podem ocorrer um número finito de vezes, do contrário $\tau_k \rightarrow \infty$.

Logo, existe um $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_1$, temos

$$\tau_{k+1} = \tau_k \text{ e } \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| \leq \frac{1}{\eta_k} \|x^k \circ y^k\|, \quad \eta_k > 1.$$

Perceba que a partir de k_1 , o Algoritmo 8 não modifica nem τ e nem η (do Passo 3a.), temos $\eta_{k+1} = \eta_k$ para $k \geq k_1$. Desta forma, para $i \geq k_1$ temos $\frac{1}{\eta_i} = \frac{1}{\eta_{k_1}}$. Então, por indução, podemos escrever

$$\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| \leq \left(\frac{1}{\eta_{k_1}}\right)^{(k-1)-(k_1)+1} \|x^{k_1} \circ y^{k_1}\| \leq \left(\frac{1}{\eta_{k_1}}\right)^{k-k_1} \|x^{k_1} \circ y^{k_1}\|.$$

Como $1/\eta_{k_1} < 1$, a potência tende a zero quando $k \rightarrow \infty$. Então $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} 0$. Em particular, temos $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| \xrightarrow{k \in K} 0$. Pela continuidade da norma, vale que

$$\|x^* \circ y^*\| = 0 \iff x_i^* y_i^* = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Segunda situação (Sequência $\tau_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$):

Como $\tau_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$, então $\tau_k \xrightarrow{k \in K} \infty$. Pelas instruções do Algoritmo 8, $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como F tem seus conjuntos de níveis limitados, pelo Lema anterior, os conjuntos de nível da função Lagrangeana aumentada são limitados. Vamos mostrar que $\|x^* \circ y^*\| = 0$, suponha, por contradição, que $\|x^* \circ y^*\| > 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que para todo $k \in K$ suficientemente grande, temos $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| \geq \delta$. Além disso, $\{\lambda^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em um compacto e $\tau_k > 0$, temos

$$\|(x^{k+1} \circ y^{k+1}) + \frac{\lambda^k}{\tau_k}\|^2 = \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 + 2 \frac{(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1})}{\tau_k} + \frac{\|\lambda^k\|^2}{\tau_k^2}.$$

Pela Proposição 1.2, $|\lambda^\top (x \circ y)| \leq \|\lambda\| \|x \circ y\|$, o que implica em $-2\|\lambda\| \|x \circ y\| \leq 2\lambda^\top (x \circ y) \leq 2\|\lambda\| \|x \circ y\|$, usando a primeira desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} & \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 + 2 \frac{(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1})}{\tau_k} + \frac{\|\lambda^k\|^2}{\tau_k^2} \\ \geq & \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 - 2 \frac{\|\lambda^k\| \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|}{\tau_k} + \frac{\|\lambda^k\|^2}{\tau_k^2} \\ \geq & \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 - 2 \frac{\|\lambda^k\| \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|}{\tau_k} \\ \geq & \delta^2 - 2 \frac{\|\lambda^k\| \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|}{\tau_k}. \end{aligned}$$

E tomando $k \in K$ suficientemente grande, conseguimos a desigualdade

$$\delta^2 - 2 \frac{\|\lambda^k\| \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|}{\tau_k} \geq \frac{\delta^2}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\frac{\tau_k}{2}$, então $\frac{\tau_k}{2} \|(x^{k+1} \circ y^{k+1}) + \frac{\lambda^k}{\tau_k}\|^2 \geq \frac{\tau_k}{2} \delta^2 \xrightarrow{k \in K} \infty$.

Assim, o valor da função $\mathcal{L}(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k)$ cresce sem limites, contradizendo o fato de que os conjuntos de nível de $\mathcal{L}$ são limitados. Logo, $\|x^* \circ y^*\| = 0$ o que implica em $x^* \circ y^* = 0$. $\square$

Até o momento, estamos analisando um resultado que demonstre a convergência estacionária de Pareto para o ponto (x^*, y^*) em Ω . Os principais desafios desta prova surgem do fato do conjunto Ω ser não convexo.

Todavia, ao adicionarmos uma hipótese mais forte sobre os pontos da sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\}_{k \in \mathbb{N}}$, como a de serem fracamente eficientes para o subproblema (3.14) em $\overline{\Omega}$, conforme sugerido em [21], então podemos estabelecer novos resultados de viabilidade e convergência.

Lema 3.19 *Considere Ω o conjunto viável do problema original (MOPCaC-R) e $\overline{\Omega}$ o conjunto viável do problema penalizado (3.14), sendo este último a interseção finita de conjuntos convexos e fechados. Considere $1 \leq \alpha < n$ e o conjunto de nível de F limitado por $F(x^0) \in \mathbb{R}^p$, no sentido de que o conjunto $C = \{(x, y) \in \overline{\Omega} \mid F(x) \leq F(x^0)\}$ é limitado. Tome também*

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \tau) = F(x) + \left[\frac{\tau}{2} \left\| x \circ y + \frac{\lambda}{\tau} \right\|^2 \right] e,$$

onde $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n$ e o vetor e é compatível com a dimensão dos objetivos. Suponha que o Algoritmo 8 gera a sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\} \subset \overline{\Omega}$ e que para todo $k \in \mathbb{N}$, o ponto (x^{k+1}, y^{k+1}) é fracamente eficiente para o subproblema

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimizar}} && \mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k) \\ & \text{sujeito a} && (x, y) \in \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

isto é, $\nexists (x, y) \in \overline{\Omega}$ tal que $\mathcal{L}_i(x, y, \lambda^k, \tau_k) < \mathcal{L}_i(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k)$, $\forall i = 1, \dots, p$. Então, todo ponto de acumulação $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ é um ponto viável para o problema original, isto é, $(x^*, y^*) \in \Omega$.

Demonstração.

Seja $K \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito tal que $(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, y^*)$. Como F é contínua e a sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\}_{k \in K}$ está contida no fechado $\overline{\Omega}$, então $(x^*, y^*) \in \overline{\Omega}$ e $F(x^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} F(x^*)$. Resta mostrar que $x_i^* y_i^* = 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Como que a sequência $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é monótona não decrescente, novamente precisamos estudar a possibilidade da sequência ser limitada ou divergente.

Primeira situação (Sequência $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada):

Supondo a sequência $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ limitada, a prova segue exatamente como a primeira situação da demonstração do Teorema 3.18, uma vez que a estrutura do Algoritmo 8 permanece inalterada.

Segunda situação (Sequência $\tau_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$):

Suponha agora que $\tau_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$, então $\tau_k \xrightarrow{k \in K} \infty$. Seja $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ um ponto viável para o problema original, logo, $\bar{x} \circ \bar{y} = 0$.

Temos, por hipótese, que para todo $k \in \mathbb{N}$, (x^{k+1}, y^{k+1}) é um ponto fracamente eficiente do subproblema

$$\min_{(x, y) \in \overline{\Omega}} \mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k),$$

e como $\overline{\Omega}$ é convexo, podemos então usar o Lema 2.8 para obter a desigualdade:

$$\min_{j=1, \dots, p} \left\{ \mathcal{L}(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k) - \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda^k, \tau_k) \right\} \leq 0.$$

Usando o fato de $(\bar{x} \circ \bar{y}) = 0$ e dividindo essa desigualdade por $\tau_k > 0$, vamos ter

$$\min_{j=1, \dots, p} \left\{ \frac{f_j(x^{k+1}) - f_j(\bar{x})}{\tau_k} + \frac{(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1})}{\tau_k} + \frac{1}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \right\} \leq 0.$$

Sabemos que o conjunto de nível C é limitado, então $F(x^{k+1}) \leq F(x^0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $F(\bar{x}) \leq F(x^0)$. Note que C também é compacto, e como F é contínua, pelo Teorema 1.6, existe

$$M = \max_{w, w' \in C} |F(w) - F(w')|$$

finito, tal que $|f_j(x^{k+1}) - f_j(\bar{x})| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1, \dots, p$.

Como λ_k é limitado pela projeção em $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n$ e $x^{k+1} \circ y^{k+1} \xrightarrow{k \in K} x^* \circ y^*$ por ser contínua, então $(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1})$ é limitado. Dividindo os termos por τ_k e aplicando o limite quando $k \xrightarrow{k \in K} \infty$, então

$$\frac{M}{\tau_k} \xrightarrow{k \in K} 0 \quad \text{e} \quad \frac{(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1})}{\tau_k} \xrightarrow{k \in K} 0,$$

resultando em

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \min_{j=1, \dots, p} \left\{ \frac{f_j(x^{k+1}) - f_j(\bar{x})}{\tau_k} + \frac{(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1})}{\tau_k} + \frac{1}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \right\} = \\ = \frac{1}{2} \|x^* \circ y^*\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\|x^* \circ y^*\|^2 = 0$ e vale a equivalência

$$\|x^* \circ y^*\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^* y_i^*)^2 = 0 \iff x_i^* y_i^* = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Portanto, concluímos que todo ponto de acumulação (x^*, y^*) é um ponto viável. $\square$

Na sequência, temos um resultado auxiliar para demonstrar a convergência do algoritmo para um ponto fracamente eficiente. Nele usamos o clássico princípio das gavetas para determinar o limite da subsequência.

Lema 3.20 *Sob as hipóteses do Lema 3.19 e supondo uma subsequência convergente da sequência gerada pelo Algoritmo 8, ou seja, $(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, y^*)$, para algum subconjunto infinito $K \subset \mathbb{N}$. Então, existe um índice $i^* \in \{1, \dots, p\}$ e um subsubconjunto infinito $K^* \subset K$, tais que*

$$\frac{\tau_k}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \xrightarrow{k \in K^*} 0.$$

Demonstração. Por hipótese, sabemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, (x^{k+1}, y^{k+1}) é uma solução fracamente eficiente do problema penalizado e pelo Lema 3.19, $(x^*, y^*) \in \Omega$.

Seguindo a definição clássica de fracamente eficiente, não há nenhum outro ponto $(x, y) \in \bar{\Omega}$ que simultaneamente reduza todas as componentes no Lagrangeano aumentado

para (x^{k+1}, y^{k+1}) , ou seja, não vale $\mathcal{L}_i(x, y, \lambda^k, \tau_k) < \mathcal{L}_i(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k)$ em cada ponto (x^{k+1}, y^{k+1}) e todo $i = 1, \dots, p$.

Em particular, fixando o ponto $(x^*, y^*) \in \Omega \subset \bar{\Omega}$, não pode acontecer

$$\mathcal{L}_i(x^*, y^*, \lambda^k, \tau_k) < \mathcal{L}_i(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k), \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Logo, existe ao menos um índice $i_k \in \{1, \dots, p\}$ tal que

$$\mathcal{L}_{i_k}(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k) \leq \mathcal{L}_{i_k}(x^*, y^*, \lambda^k, \tau_k).$$

Abrindo essa desigualdade para esse índice i_k :

$$f_{i_k}(x^{k+1}) + (\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1}) + \frac{\tau_k}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \leq f_{i_k}(x^*), \quad (3.18)$$

uma vez que $x^* \circ y^* = 0$. Note que a sequência $\{i_k\}_{k \in K}$ assume sempre valores do conjunto finito $\{1, \dots, p\}$. Pelo princípio da gavetas, existe pelo menos um índice $i^* \in \{1, \dots, p\}$ que sucede infinitamente. Deste modo, podemos condensar um subconjunto infinito K^* tal que

$$K^* \subset K \quad \text{e} \quad i_k = i^*, \forall k \in K^*.$$

Assim, podemos reescrever a Desigualdade (3.18) como

$$f_{i^*}(x^{k+1}) + (\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1}) + \frac{\tau_k}{2} \|(x^{k+1} \circ y^{k+1})\|^2 \leq f_{i^*}(x^*).$$

Agora perceba que

$$\frac{\tau_k}{2} \|(x^{k+1} \circ y^{k+1})\|^2 \leq [f_{i^*}(x^*) - f_{i^*}(x^{k+1})] - (\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1}).$$

Defina $\delta_k = [f_{i^*}(x^*) - f_{i^*}(x^{k+1})] - (\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1})$. Como $(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, y^*)$, f_{i^*} é contínua e $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n$, obtemos $\delta_k \xrightarrow{k \in K^*} 0$.

Aplicando o limite quando $k \xrightarrow{k \in K^*} \infty$ na desigualdade

$$0 \leq \frac{\tau_k}{2} \|(x^{k+1} \circ y^{k+1})\|^2 \leq \delta_k,$$

o Teorema do Confronto afirma que

$$\frac{\tau_k}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \xrightarrow{k \in K^*} 0,$$

concluindo nossa demonstração. □

Apresentamos agora o nosso resultado de convergência da sequência gerada pelo Algoritmo 8 para um ponto fracamente eficiente, mas sob hipóteses fortes no enunciado.

Um dos nossos desejos futuros é enfraquecer essas hipóteses, para estabelecer assim uma convergência mais prática.

Teorema 3.21 *Considere o conjunto viável Ω para o problema original (MOPCaC-R) e o conjunto viável $\bar{\Omega}$ do subproblema penalizado (3.14). Tome a função $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^p$ continuamente diferenciável e cujos conjuntos de nível são limitados em $\bar{\Omega}$. Considere também a sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \bar{\Omega}$ gerada pelo Algoritmo 8, em que para todo $k \in \mathbb{N}$, (x^{k+1}, y^{k+1}) é fracamente eficiente para o subproblema (3.14) em $\bar{\Omega}$ e suponha que exista uma subsequência convergente*

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, y^*) \in \Omega.$$

Então (x^, y^*) é uma solução fracamente eficiente para (MOPCaC-R).*

Demonstração. Suponha, por contradição, que (x^*, y^*) não seja fracamente eficiente para o problema (MOPCaC-R). Então existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$, tal que

$$f_i(\bar{x}, \bar{y}) < f_i(x^*, y^*), \forall i = 1, \dots, p.$$

Por hipótese, sabemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, os pontos $(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \bar{\Omega}$ são soluções fracamente eficientes do subproblema penalizado,

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimizar}} \quad \mathcal{L}(x, y, \lambda^k, \tau_k) \\ & \text{sujeito a} \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

onde a função lagrangeana aumentada é dada por:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_k, \tau_k) = F(x) + \left[\frac{\tau_k}{2} \left\| x \circ y + \frac{\lambda^k}{\tau_k} \right\|^2 \right] e.$$

Pelo Lema 2.8, sabemos que para todo ponto fracamente eficiente $(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \bar{\Omega}$ vale a desigualdade

$$\min_{j=1, \dots, p} \{ \mathcal{L}_j(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k) - \mathcal{L}(w, \lambda^k, \tau_k) \} \leq 0,$$

para todo $w \in \bar{\Omega}$, e como $\Omega \subset \bar{\Omega}$, então para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\min_{j=1, \dots, p} \{ \mathcal{L}_j(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^k, \tau_k) - \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda^k, \tau_k) \} \leq 0, \quad (3.19)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\bar{x} \circ \bar{y} = 0$, segue que

$$\min_{i=1, \dots, p} \{ f_i(x^{k+1}) - f_i(\bar{x}) \} \leq -(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1}) - \frac{\tau_k}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2, \quad (3.20)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pela hipótese de convergência, temos $(x^{k+1} \circ y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} 0$ e pelo Lema (3.19), sabemos que independentemente da sequência $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ser limitada ou $\tau_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$, obtemos $(x^{k+1} \circ y^{k+1}) \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} (x^* \circ y^*) = 0$.

Além disso, $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitado, pois pertence ao compacto $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n$. Analisando com os casos de $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ser limitado ou $\tau_k \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \infty$. No primeiro caso, existe um $M > 0$ tal que $\tau_k \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$, então

$$(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} 0 \quad \text{e} \quad \frac{\tau_k}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \leq \frac{M}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \xrightarrow{k \in K} 0.$$

Tomando limite em (3.20) quando $k \in K$, obtemos

$$\min_{i=1, \dots, p} \{f_i(x^*, y^*) - f_i(\bar{x}, \bar{y})\} \leq 0.$$

Agora, se a sequência do parâmetro divergir, sabemos que $\tau_k \xrightarrow{k \in K} \infty$, então pelo Lema 3.20, existe um subsubconjunto infinito $K^* \subset K$ tal que

$$(\lambda^k)^\top (x^{k+1} \circ y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K^*} 0, \quad \frac{\tau_k}{2} \|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|^2 \xrightarrow{k \in K^*} 0.$$

Semelhante ao caso anterior, ao aplicar o limite em (3.20) quando $k \in K^*$, obtemos

$$\min_{i=1, \dots, p} \{f_i(x^*) - f_i(\bar{x})\} \leq 0.$$

Em ambos os casos, contrariamos a suposição de $f_i(x^*, y^*) - f_i(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ para todo i . Portanto, (x^*, y^*) é fracamente eficiente para o problema original relaxado. $\square$

Podemos também obter a Conjectura 3.22, com um resultado semelhante ao apresentado no Teorema 3.21, supondo que para todo $k \in \mathbb{N}$, (x^{k+1}, y^{k+1}) é propriamente eficiente, que é uma hipótese mais forte do que assumir fracamente eficiente.

Conjectura 3.22 *Considere o conjunto viável Ω para o problema original (MOPCaC-R), o conjunto viável $\bar{\Omega}$ do subproblema penalizado (3.14) e os conjuntos de nível de F limitados em $\bar{\Omega}$. Considere também a sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \bar{\Omega}$ gerada pelo Algoritmo 8, em que para todo $k \in \mathbb{N}$, (x^{k+1}, y^{k+1}) é propriamente eficiente para o subproblema (3.14) em $\bar{\Omega}$ e suponha que exista uma subsequência convergente*

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, y^*) \in \Omega.$$

Então existe uma solução eficiente para o dual de (3.14) e a dualidade forte ocorre. Em particular, $(x^, y^*, \lambda^*, \tau^*)$ é uma solução eficiente para (3.14). Mais ainda, (x^*, y^*) é fracamente eficiente para (MOPCaC-R).*

A Conjectura 3.22 baseia-se no Teorema de Dualidade Forte para MOP 2.1.1, onde existe uma solução eficiente para o dual e a dualidade forte ocorre. Além disso,

pela convexidade do dual, todo ponto de acumulação (λ^*, τ^*) é uma solução fracamente eficiente, conforme Teorema 2.37.

Por último, como definimos anteriormente h e g funções afins, temos pela Proposição 1.2 que no caso escalar todos os pontos viáveis são qualificados. Mas, analisando os problemas multiobjetivo, temos uma implicação direta com a CaC-ACQ, discutida em [45]. Desta forma, podemos apresentar a Conjectura 3.23 para determinar uma estacionariedade com implicações na teoria de KKT no multiobjetivo.

Conjectura 3.23 (Convergência CaC-M-estacionário do Algoritmo 8) *Considere os conjuntos Ω e $\bar{\Omega}$ assim como nos resultados anteriores. Seja (x^*, y^*) ponto de acumulação da sequência $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\} \subset \bar{\Omega}$ gerada pelo Algoritmo 8 e suponha que todos sejam fracamente eficientes. Considere também F tendo seus conjuntos de nível limitados, que $(x^*, y^*) \in \Omega$ e que as funções de restrição h e g são afins. Então, (x^*, y^*) é um ponto fraco CaC-M-estacionário do problema original (MOPCaC-R).*

Capítulo 4

Experimentos Numéricos

Neste capítulo, apresentamos experimentos numéricos para verificar os resultados teóricos e testar os algoritmos apresentados nos capítulos anteriores, seguindo as referências [3, 6, 17, 34, 40, 43, 48].

Os experimentos foram realizados através do *Google Colab* que utiliza a linguagem *Python*, em um notebook LENOVO da série 330-15IGM com processador Intel(R) Celeron(R) N4000 CPU @ 1.10GHz, 1101 Mhz, 2 Núcleo(s), 2 Processadores Lógicos e com 4 GB de memória RAM. Além disso, o sistema operacional é o Microsoft Windows 11 Home Single Language.

No PGM-MOP usamos o SLSQP para resolver o subproblema para determinar a direção de busca. Como nossos códigos são escritos na linguagem de programação *Python* e este já possui uma pasta do *SciPy* com o SLSQP em sua biblioteca, podemos usá-lo de maneira mais direta, sem precisar implementar seu algoritmo.

O *SciPy* é um *software* matemático de código aberto na linguagem *Python* desenvolvido pela equipe [43], ele apresenta uma ampla quantidade de funções para otimizar problemas mono/multi-objetivo, sujeitos ou não a restrições, tanto linear quanto não linear. Segundo [43], este tem a seguinte estrutura:

```
minimize(fun, x0, method = SLSQP, jac, constraints, options = 'ftol', 'maxiter', 'disp'),
```

com “*fun*” sendo a função F a ser minimizada, “*x0*” é o ponto inicial, “*jac*” é a função jacobiana de F , “*constraints*” são as restrições dadas em igualdade e desigualdade. No tópico opções, “*ftol*” que é a meta de precisão para o valor de F no critério de parada, “*maxiter*” o número máximo de iterações e “*disp*” para exibir mensagens de convergência. Mais informações sobre o *SciPy* e sua implementação estão em <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-slsqp.html>.

Para determinar a fronteira de Pareto em um problema de otimização multiobjetivo, usamos uma abordagem de múltiplos inícios (do inglês, *multi-start*). Essa estratégia

consiste em executar o algoritmo a partir de diferentes pontos de partida, coletando depois os pontos não dominados encontrados [34]. Os pontos iniciais foram gerados com uma distribuição aleatória uniforme e depois projetados no conjunto viável pelo Algoritmo Dykstra para garantir a viabilidade inicial.

4.1 Aplicações do PGM-MOP

Realizamos primeiramente alguns testes numéricos com o Algoritmo 6 para constatar sua eficiência em problemas com funções convexas e não convexas antes usá-lo dentro do Algoritmo 8 para resolver problemas de otimização multiobjetivo com restrição de cardinalidade.

São oito experimentos, divididos em funções convexas e não convexas, os seis primeiros possuem apenas restrições de caixa, enquanto os dois últimos utilizam o Algoritmo Dykstra para projetar também em restrições de semiplanos, bolas e hiperplanos. Em cada exemplo, o código é rodado 50 vezes com pontos diferentes que foram escolhidos aleatoriamente de maneira uniforme no espaço das soluções, lembrando que no método de Dykstra estabelecemos como critério de parada

$$\left(\sum_{i=1}^m \|I_i^k - I_i^{k-1}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon,$$

com $\varepsilon = 10^{-12}$ e colocamos também um limite de no máximo 500 ciclos.

Ao longo dos experimentos, escolhemos $\delta = 0.5$, $M = 10$ e $\beta_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Como critérios de parada do subproblema, para os testes do PGM-MOP, usamos $ftol = 10^{-14}$ (apenas em problemas com poucos inícios, porque a procura por uma direção que satisfaça esse critério de avaliação da função pode estender muito o tempo computacional) e $maxiter = 500$. Enquanto no código principal, vamos estabelecer o limite máximo de 50 iterações, para o cálculo do tamanho de passo por *backtracking* usamos até 20 iterações e critério de parada, $\|d\| \leq 10^{-14}$ ou $|\phi(x^*)| \leq 10^{-14}$, pois são equivalentes pelo Lema 2.21.

Nas tabelas a seguir, apresentamos aproximações da fronteira de Pareto ($\mathcal{Y}_E$) e do conjunto das soluções fracamente não dominadas ($\mathcal{Y}_{wE}$) de cada função selecionada.

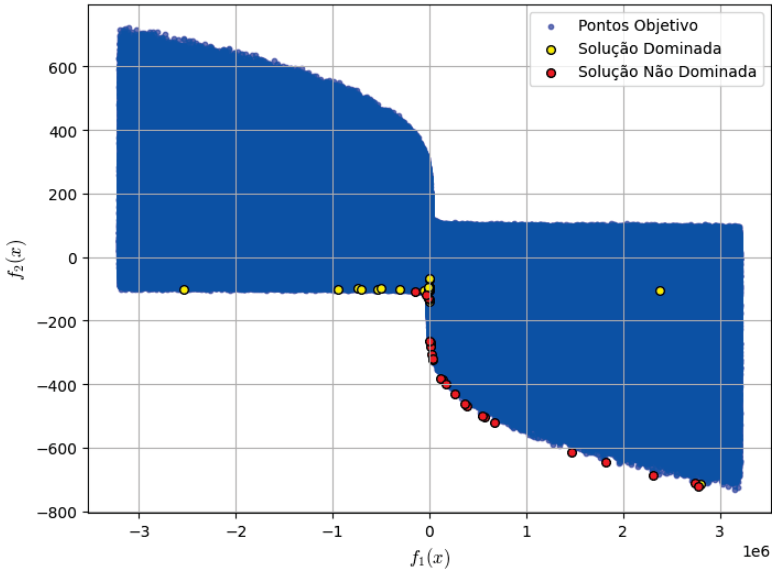
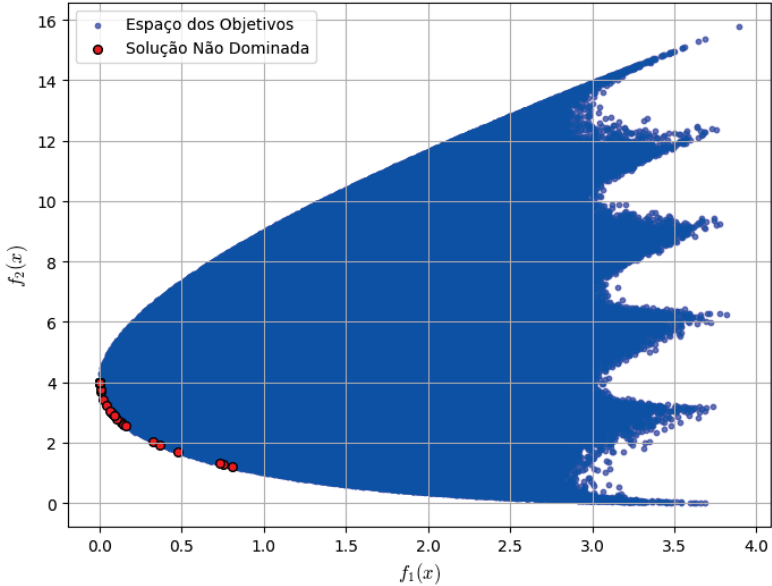
Funções	Espaço dos Objetivos
Nome: Das e Dennis [26]. $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^2 + x_5^5$ $f_2(x) = 3x_1 + 2x_2 - \frac{x_3}{3} + \frac{1}{100}(x_4 - x_5)^2$ Função não convexa. Restrição de caixa: $-20 \leq x_i \leq 20, i = 1, 2, 3, 4, 5$ Número de pontos iniciais: 50.	
Nome: Jin, Olhofer e Sendhoff (JOS1) [26]. $f_1(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2$ $f_2(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - 2)^2$ Função convexa. Restrições de caixa: $-2 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2, 3, 4, 5$ Número de pontos iniciais: 50.	

Tabela 4.1: Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - Exemplos 1.

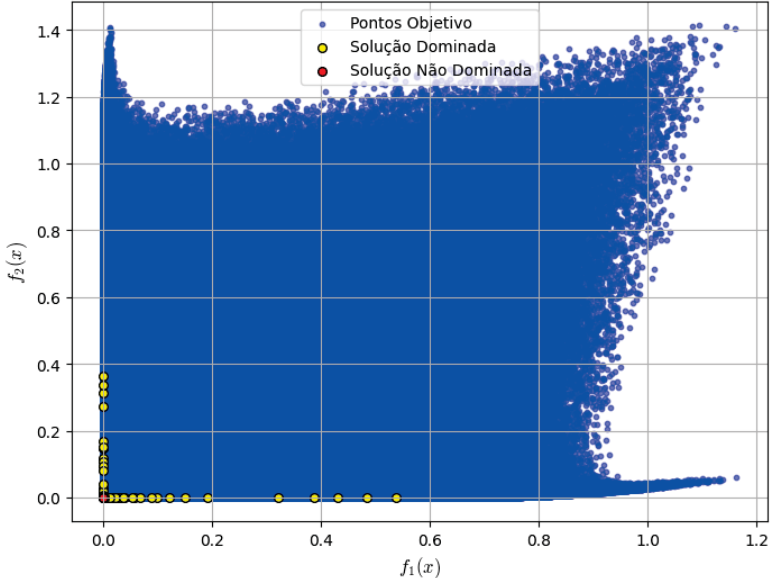
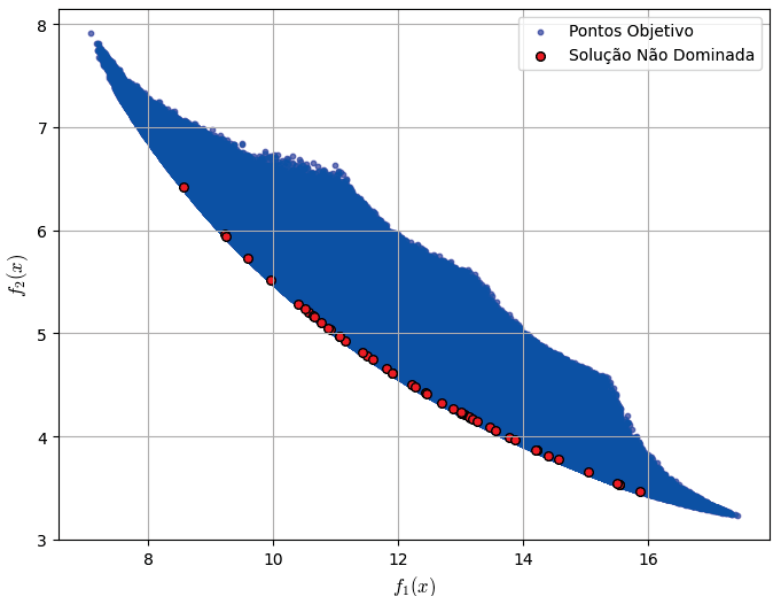
Nome: Trigonometric [26]. $f_1(x) = \left(4 - \sum_{i=1}^4 \cos(x_i) + (1 - \cos(x_1)) - \sin(x_1)\right)^2$ $f_2(x) = \left(4 - \sum_{i=1}^4 \cos(x) + 2(1 - \cos(x_2)) - \sin(x_2)\right)^2$ Função não convexa. Restrições de caixa: $-0.5 \leq x_i \leq 0.5, \quad i = 1, 2, 3, 4$ Número de pontos iniciais: 50.	
Nome: Stadler e Dauer (SD) [26]. $f_1(x) = 2x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 + x_4$ $f_2(x) = 2x_1 + \frac{2\sqrt{2}}{x_2} + \frac{2\sqrt{2}}{x_3} + \frac{2}{x_4}$ Função convexa. Restrições de caixa: $1 \leq x_1 \leq 3,$ $\sqrt{2} \leq x_2 \leq 3,$ $\sqrt{2} \leq x_3 \leq 3$ e $1 \leq x_4 \leq 3.$ Número de pontos iniciais: 50.	

Tabela 4.2: Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - Exemplos 2.

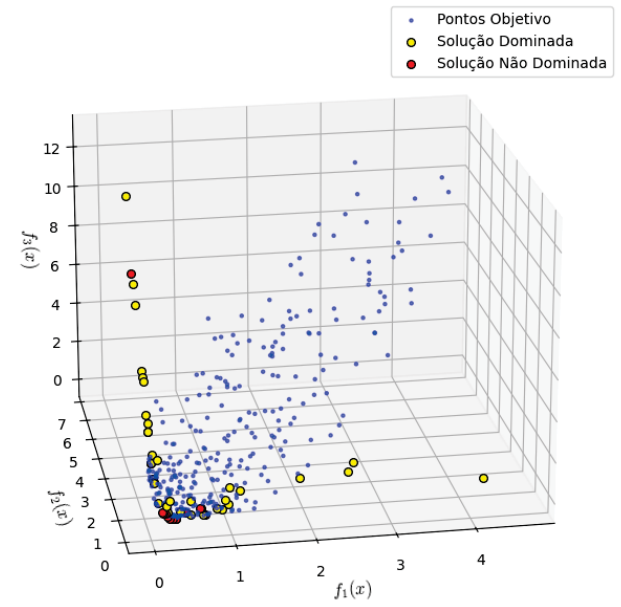
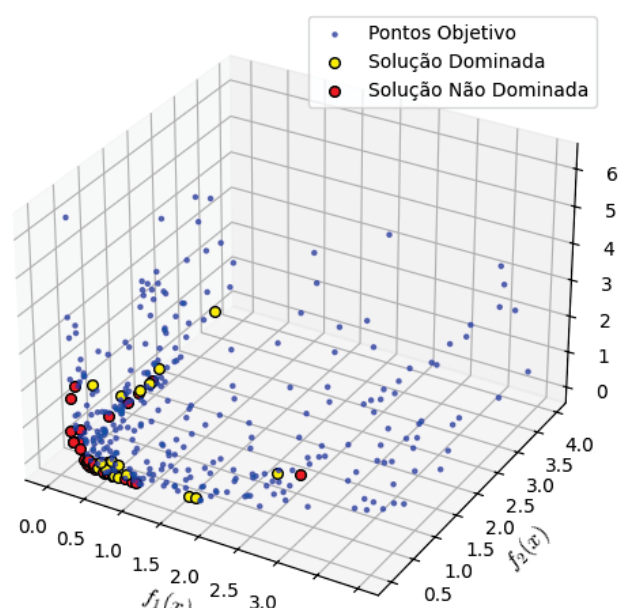
Nome: Brown e Dennis [26]. $f_1(x) = (x_0 + t_1 x_1 - e^{t_1})^2 + (x_2 + x_3 \sin(t_1))^2$ $f_2(x) = (x_0 + t_2 x_1 - e^{t_2})^2 + (x_2 + x_3 \sin(t_2))^2$ $f_3(x) = (x_0 + t_3 x_1 - e^{t_3})^2 + (x_2 + x_3 \sin(t_3))^2,$ com $t_1 = 1/5$, $t_2 = 2/5$ e $t_3 = 3/5$; Função não convexa. Restrições de caixa: $-0.1 \leq x_1 \leq 0.1,$ $-5 \leq x_2 \leq 5,$ $-5 \leq x_3 \leq 5$ e $-10 \leq x_4 \leq 10.$ Número de pontos iniciais: 50.	
Nome: TRIDIA [26]. $f_1(x) = (2x_1 - 1)^2$ $f_2(x) = 2(2x_1 - x_2)^2$ $f_3(x) = 3(2x_2 - x_3)^2;$ Função convexa. Restrições de caixa: $0.5 \leq x_i \leq 0.5, \quad i = 1, 2, 3.$ Número de pontos iniciais: 50.	

Tabela 4.3: Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - Exemplos 3.

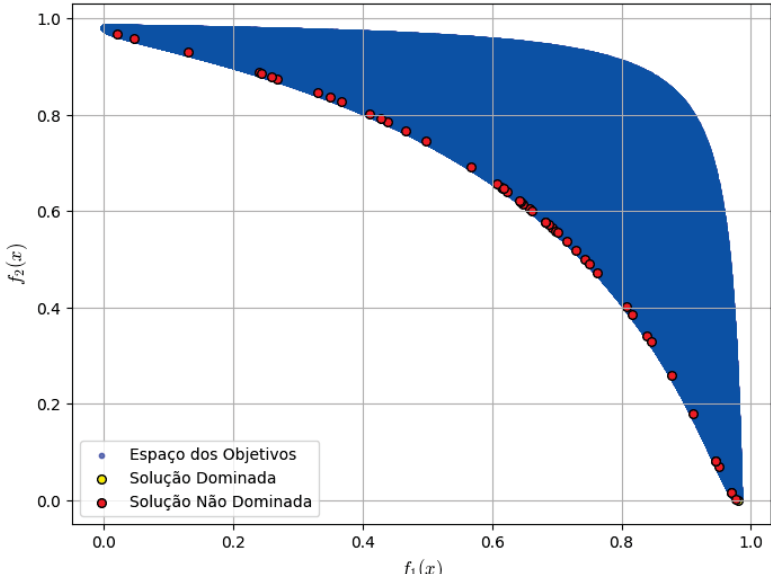
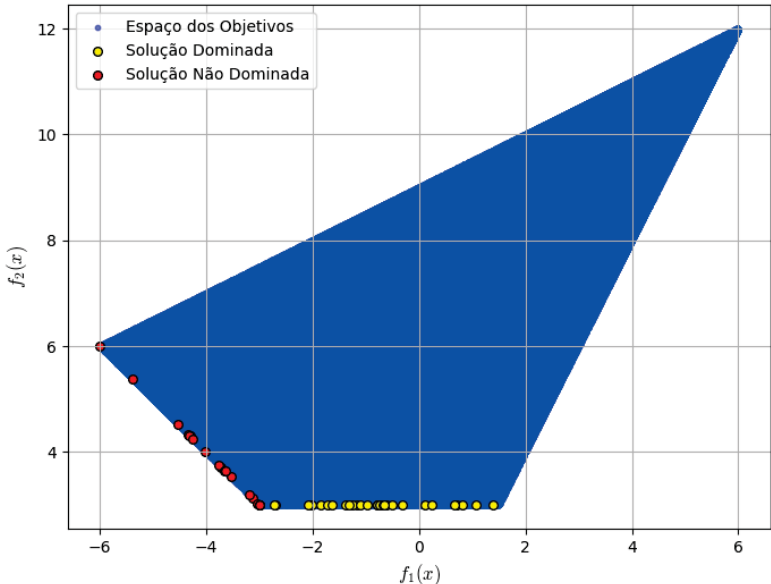
Nome: Fonseca-Fleming [9]. $f_1(x) = 1 - \exp(-[(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2])$ $f_2(x) = 1 - \exp(-[(x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2])$ Função não convexa. Restrições de caixa: $-1 \leq x_i \leq 1, \quad \forall i = 1, 2$ Restrição de bola: $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ Número de pontos iniciais: 50.	
Nome: Exemplo 2.7. $f_1(x) = x_1 - x_2$ $f_2(x) = 2x_1 + x_2$ Função convexa. Restrições de semiespaço: $x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$ Restrições de hiperplano: $2x_1 + x_2 - x_3 = 3$ e $x_1 + x_2 + x_4 = 6$ Número de pontos iniciais: 50.	

Tabela 4.4: Aplicação do Algoritmo 6 em funções convexas e não convexas - 4.

O Algoritmo 6 consegue determinar uma boa aproximação da fronteira de Pareto tanto com funções convexas quanto não convexas. Sabemos que o método converge para uma solução fracamente eficiente quando aplicado em funções $\mathbb{R}_+^p$ -convexas, ou seja, converge para um ponto presente na fronteira de Pareto fraca $\mathcal{Y}_{wE}$, observamos que entre esses exemplos, temos uma melhor distribuição uniforme dos pontos não dominados na fronteira com essa classe de funções, enquanto que nas não convexas como, por exemplo, Das e Dennis, notamos a presença de pontos amarelos no interior do espaço dos objetivos.

Deixando de lado os perfis de desempenho que abordamos apenas na próxima seção, para mensurar a performance de convergência do algoritmo PGM-MOP, usamos da Proposição 2.31 que, $\phi(x^*) = 0$ se, e somente se, x^* é Pareto estacionário, então é

interessante medir a variação de ϕ nesses exemplos. Além disso, o número de iterações também indica se o algoritmo está convergindo rapidamente para o ponto estacionário de Pareto.

Para analisar o custo computacional, observamos o tempo de execução do *multi-start* dos 50 pontos. Decidimos usar a mediana dos valores de ϕ e do número de iterações ao longo desses resultados, por ser uma medida de tendência robusta e que não é afetada por *outliers*, isto é, pontos com uma diferença significativa dos demais.

Funções	Mediana de ϕ	Mediana de iterações	Tempo (s)
Das e Dennis	-0.04535	49	28.71
Jin, Olhofer e Sendhoff	0	23	16.03
Trigonometric	8.1×10^{-17}	14	24.05
Stadler e Dauer	0	30	12.13
Brown e Dennis	-2.7×10^{-4}	49	17.00
TRIDIA	0	7	6.60
Fonseca-Fleming	0	11	2.25
Exemplo (2.7)	0	2	0.87

Tabela 4.5: Resumo do desempenho do Algoritmo 6.

Na Tabela 4.5, percebe-se que as funções não convexas Das e Dennis e Brown e Dennis apresentam uma mediana de ϕ maior (pior) que a dos demais, ou seja, metade dos 50 resultados possuem um valor de ϕ maior que -0.04535 e -2.7×10^{-4} , respectivamente. Em contrapartida, outros conseguiram convergir para uma solução estacionária com um valor de ϕ próximo de zero. Outro ponto a ser observado é que alguns valores de mediana são positivos, enquanto outros não. Pela Proposição 2.31, $\phi(x_k) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$ se x_k não é estacionário de Pareto.

Segundo [53, pág.8], SLSQP quando trabalhado em problemas de otimização mal condicionados com ruídos numéricos, a direção de busca pode ser uma direção de subida. Em nosso caso, aconteceu porque os códigos trabalharam com números muito pequenos que são sensíveis aos ruídos numéricos. Contudo, isso não atrapalhou a convergência do algoritmo, como é notado nestes exemplos na Tabela 4.5.

4.2 Aplicações em problemas de portfólio

A restrição de cardinalidade pode ser aplicada em diversas situações, como na compressão de sinais e imagens, na seleção de subconjuntos para regressão e na otimização de portfólios [41]. Neste trabalho, optamos pela última aplicação, por ser mais recorrente na literatura.

Nosso objetivo é comparar as fronteiras de Pareto obtidas pelo Algoritmo 8, no qual consideramos duas abordagens distintas de penalização da restrição de Hadamard:

Quadrática (AL-Quad) e Exponencial (AL-Exp). Essas fronteiras de Pareto serão comparadas com as de outro método presente na literatura. Além disso, usaremos perfis de desempenho para avaliar qual penalização da restrição de Hadamard apresentou a melhor fronteira de Pareto e com o melhor tempo de execução.

Antes de apresentar os resultados numéricos, vamos introduzir o problema de portfólio. A formulação matemática desse problema pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && \left(\frac{1}{2}x^\top Qx, \quad -v^\top x \right)^\top \\
 & \text{sujeito a} && e^\top x = 1, \\
 & && 0 \leq x_i \leq u_i, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \\
 & && e^\top y \geq n - \alpha, \\
 & && x \circ y = 0, \\
 & && 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $u, v \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq \alpha < n$ e a matriz de covariância Q são dados. Supomos n possíveis ativos para compor uma carteira de investimento e x_i com $i \in \{1, \dots, n\}$, a proporção de capital investido no ativo i . Além disso, a soma dos investimentos deve ser igual ao capital disponível, formando assim uma restrição linear, ou seja, $e^\top x = 1$ e não é permitido obter um ativo sem capital necessário para sua compra, ou seja, $x_i \geq 0$.

Tais valores contemplam as condições do limite de investimento, de risco e a expectativa de retorno de um investidor. Este é o modelo matemático para otimização de portfólio, modelo de média variância (MV) criado em 1952 por Harry M. Markowitz, com duas métricas de análise na compra de ativos, sendo o risco e o retorno [19, pág.31].

Segundo [3, pág.14], o mercado financeiro é essencial para o funcionamento e desenvolvimento da sociedade, como pessoas físicas, bancos, fundos de pensão e oportunidades de obtenção de capital para empresas que necessitam de investimento. Para compreender o funcionamento do mercado, estudar suas incertezas e evitar perdas em investimentos, surgiram os primeiros modelos de otimização de portfólio, bem como estratégias com redes neurais, teoria do caos e algoritmos genéticos [3, pág.14].

Para modelar o retorno de um ativo, na literatura normalmente utiliza-se uma variável aleatória R_i , com a respectiva média $v_i = E(R_i)$, sendo $E(R)$ uma função que retorna o valor esperado da variável aleatória R . Para determinar este valor, precisamos conhecer os retornos anteriores do ativo i em cada período de tempo t .

Em teoria, analisamos a média também com a probabilidade desse retorno acontecer, mas na prática usamos alguma série histórica das taxas de retorno do ativo i em cada período, com uma possibilidade igual de retorno. De acordo com [6, pág.7], a média de retorno de um ativo i é dada por

$$v_i = E(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t,$$

com r_i^t sendo o retorno do ativo i no período t e T o total de períodos considerados. Conhecendo a média de retorno de um ativo i , devemos também determinar a média de retorno do portfólio. Com efeito, a média de retorno $\bar{R}$ de um portfólio nos T períodos é calculada por

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r^t,$$

onde $r^t = x_1 r_1^t + x_2 r_2^t + \cdots + x_n r_n^t$ é o retorno no período t .

Perceba que na média de retorno do portfólio, as porcentagens de investimento x_i são as mesmas em cada período t , assim podemos reescrever a equação anterior como

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \right) = \sum_{i=1}^n x_i v_i. \quad (4.2)$$

De acordo com [19, pág. 31], esse medidor não considera a incerteza do retorno dos portfólios, por exemplo, se um investidor está apenas buscando o máximo de retorno na compra do ativo, ele acaba por desconsiderar o risco de perder seu dinheiro apenas com base no histórico recente de retorno, uma vez que alguns ativos podem apresentar uma momentânea boa média de retorno, mas ter uma variação de preços muito brusca. Assim, Markowitz propõe o uso da variância do portfólio para mensurar a incerteza do retorno, dada por $\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_i^t - v_i)^2$.

Segundo [19, pág.31], Markowitz acreditava que dois ativos no mercado financeiro poderiam apresentar alguma correlação, conseqüentemente, mesmo o investidor tendo um portfólio diversificado, não conseguiria retirar toda sua variância. Logo, era preciso utilizar algum medidor para essa relação mútua entre dois ativos, sendo sugerido por ele usar a covariância. Conforme [6, pág.7], a covariância entre um ativo i e um ativo j é dada por

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_i^t - v_i)(r_j^t - v_j),$$

e percebe que a covariância entre um ativo i e ele próprio é a variância, isto é, $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$. Além de determinar a média de retorno de um portfólio, Markowitz sugere o cálculo da variância do retorno também, sendo representada por

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r^t - \bar{R})^2.$$

Segundo [6, pág.19], ao usarmos a definição de r^t e a Equação (4.2), encontramos

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij},$$

ficando evidente que a variância média de retorno da carteira de investimento pode ser determinada a partir da covariância dos retornos dos ativos. Denominamos σ de risco de investimento do portfólio e também podemos representar na forma

$$\sigma = \sqrt{x^\top Q x},$$

onde Q é a matriz de covariância. Portanto, o modelo de Média-Variância de Markowitz para otimização de portfólio é dado pelo seguinte problema quadrático mono-objetivo,

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{minimizar}} \quad & x^\top Q x \\ \text{sujeito a} \quad & e^\top x = 1, \\ & v^\top x \geq \rho, \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo ρ um limite inferior para o retorno esperado da carteira de investimento.

Mais tarde, Markowitz aborda o conceito de fronteira eficiente (ou fronteira de Pareto), trazendo a possibilidade de minimizar o risco e maximizar o retorno esperado através de um problema de otimização bi-objetivo. Assim, o investidor possui uma diversidade maior de troca entre riscos e retornos de ativos.

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{minimizar}} \quad & (x^\top Q x, \quad -v^\top x)^\top \\ \text{sujeito a} \quad & e^\top x = 1, \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Perceba que no problema bi-objetivo acima, ao invés de maximizar o retorno, é realizado uma abordagem equivalente a minimizar o oposto do retorno. Em alguns trabalhos, como de [40], é comum modificar a primeira função objetivo para $f_1(x) = \frac{1}{2}x^\top Q x$ por uma questão de conveniência algébrica, então estamos usando ela em nossas aplicações.

Podemos agora nos perguntar, qual seria a utilidade da restrição de cardinalidade em um modelo de otimização de portfólio? Dificilmente um investidor decide comprar todos os ativos disponíveis no mercado financeiro. Na prática, é escolhido apenas um subconjunto que reflita suas preferências e estratégias.

Ao denotarmos x como um vetor de alocações de capital de investimento e n o número total de ativos disponíveis, a restrição $\|x\|_0 \leq \alpha$ garante que o portfólio seja composto por, no máximo, α ativos. Vejamos um exemplo de situação que demonstra como essa limitação é necessária.

Exemplo 4.1 *Suponhamos que um fundo de investimentos deseja construir um portfólio com os 500 ativos disponíveis no mercado financeiro. Por conta de custos fixos por transação ou de dificuldades pessoais entre alguns cotistas, o gestor sugere ao grupo de*

cotistas que é melhor aplicar em no máximo 25 ativos simultaneamente. Como cada ativo adicionado a carteira traz um custo adicional, conseqüentemente o retorno líquido do portfólio é reduzido. Assim, a restrição $\|x\|_0 \leq 25$ garante que o portfólio final não seja excessivo, garantido um melhor equilíbrio entre o risco e o retorno do investimento.

Nosso objetivo neste capítulo é aplicar nossos algoritmos em alguns problemas de portfólio com o formato (4.1) e compará-los com outro método da literatura.

A Figura 4.1, adaptada de [19, pág.49], representa um exemplo de fronteira de Pareto formada a partir do modelo MV, onde temos o risco e o retorno como objetivos. O ponto BEP (do inglês, *Best Expectation Portfólio*) é o ativo de retorno esperado mais elevado, mas que também apresenta um grande risco de investimento.

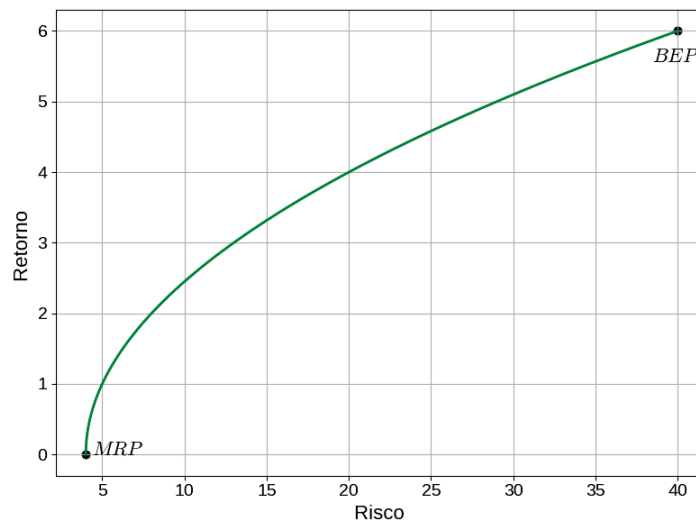


Figura 4.1: Fronteira eficiente em problema de otimização de portfólio.

O ponto MRP (do inglês, *Minimum Risk Portfolio*) seria o ponto de menor risco presente. A fronteira de Pareto é formada por todos os pontos na curva entre MRP até BEP.

Em [48, pág.50] é feita uma interessante análise sobre a fronteira de Pareto do tipo risco e retorno, escrevendo o sistema KKT para o problema (4.4) e supondo a matriz Q definida positiva (por construção ela é simétrica e semidefinida positiva) para demonstrar que o traço da fronteira eficiente dessa classe de problema é o lado direito de uma hipérbole, cuja fronteira eficiente sempre está na parte superior do gráfico.

4.3 Perfil de desempenho e métricas para MOPs

Para apresentar dados que informam o desempenho da nossa abordagem podemos usar métricas como, por exemplo, o tempo de CPU, o número de avaliações de funções ou a contagem de iterações. Como estamos considerando otimização multiobjetivo, queremos avaliar a capacidade de encontrar pontos eficientes e de calcular uma aproximação bem

diversificada da fronteira de Pareto. Com isso em mente, vamos apresentar agora uma breve revisão das métricas mais utilizadas na literatura.

Para apresentar os dados das diferentes métricas em todos os problemas e algoritmos considerados, utilizamos os perfis de desempenho [11]. Estes representam através de um gráfico a razão de desempenho entre os diferentes algoritmos solucionadores para um mesmo conjunto de problemas.

Considere o conjunto S dos a_s algoritmos resolvidores analisados e seja P o conjunto dos a_p experimentos que pretendemos resolver. Utilizamos então um medida de comparação, podendo ser algumas mais simples e indicadas para um conjunto pequeno de experimentos, como o tempo de CPU na resolução do problema, o número de avaliações de funções, o número de iterações e etc. E também podemos usar algumas métricas mais elaboradas, voltadas para estudar a fronteira de Pareto e a distribuição dos pontos não dominados, como Hipervolume, *Purity*, $\Gamma - Spread$ e $\Delta - Spread$ [11, pág. 5].

Considere $t_{p,s}$ o valor da medida t que o algoritmo s utilizou (ou determinou) para resolver o problema p . A taxa de desempenho é definida pela razão, $r_{p,s}$, e dada por

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,s} : s \in S\}}.$$

Perceba que essa razão é sempre maior ou igual a um, para qualquer que seja o $p \in P$ e $s \in S$. Em seguida, definimos a fração

$$\rho_s(\tau) = \frac{|\{p \in P : r_{p,s} \leq \tau\}|}{a_p}, \quad (4.5)$$

do conjunto de todos os experimentos concluídos pelo algoritmo s com uma taxa de desempenho menor ou igual do que $\tau \geq 1$. O τ usado como variável da função ρ_s não se refere ao mesmo utilizado como parâmetro de penalização no capítulo anterior.

Segundo [11, pág.5], a função de distribuição $\rho_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é não decrescente, o valor $\rho_s(1)$ indica a probabilidade do algoritmo s vencer os demais, conseguimos a exata parte do conjunto P na qual obteve a melhor eficiência em relação aos demais, ou seja, $t_{p,s} = \min\{t_{p,s}\}$. Quanto a definição de perfil de desempenho para valores grandes de τ , a mesma autora sugere definir um parâmetro real r_K grande o suficiente, tal que $r_{p,s} \in [1, r_K]$ e que $r_{p,s} = r_K$ quando o problema p não é resolvido por s . Dessa adição, obtemos $\rho_s(r_K) = 1$. Dizemos que o algoritmo s com o maior valor de $\rho_s(\tau)$ para grandes valores de τ é aquele com melhor robustez para aquele problema.

Vejamos agora um pouco de cada métrica usada em nosso trabalho:

1. *Hipervolume*. Para [19, pág.24], o Hipervolume (HV) é uma métrica que calcula o volume (ou a área se for um problema $2D$), do espaço dominado pela fronteira

de Pareto determinada pelo algoritmo de otimização multiobjetivo utilizado. Assim, quanto mais perto da fronteira de Pareto ótima as soluções encontradas estão e quanto mais uniformemente espalhadas estão, então maior será o valor do Hipervolume. Além disso, o mesmo autor explica que, se todas as soluções de um conjunto T forem fracamente dominadas pelas soluções de um outro conjunto, V , então significa que o Hipervolume desse segundo conjunto é o maior.

Para estabelecer o indicador do Hipervolume, utilizamos o espaço delimitado pela frente de Pareto e um ponto fixo usado de referência $r \in \mathbb{R}^p$.

A escolha do ponto de referência pode trazer uma grande diferença no cálculo do Hipervolume, segundo [17, pág. 17] definimos r como sendo o ponto dominado por todos os pontos pertencentes às diferentes aproximações obtidas de cada frente de Pareto do problema $p \in P$. Um exemplo simples de construção do Hipervolume de um conjunto de pontos não dominados pode ser visto na Figura 4.2.

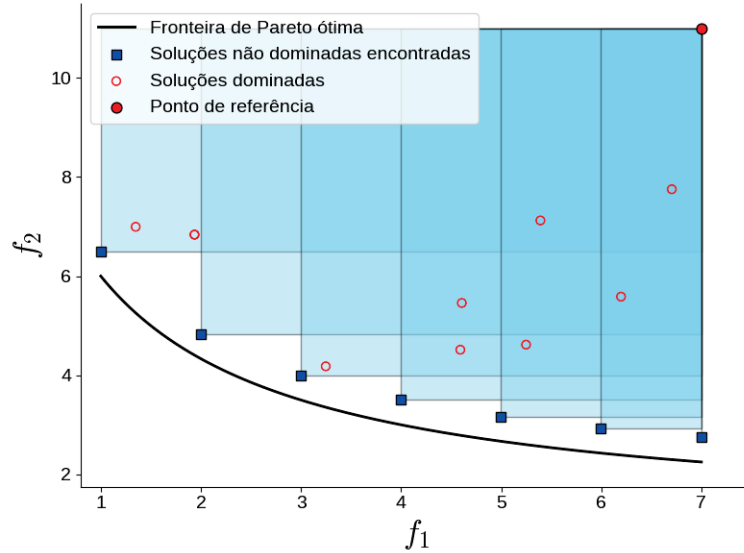


Figura 4.2: Exemplo do Hipervolume de um conjunto de soluções não dominadas arbitrárias.

Segundo [17, pág. 17], podemos definir o indicador de Hipervolume da seguinte forma: Tome um conjunto de pontos não dominados $A \subset \mathbb{R}^p$ e um ponto de referência $r \in \mathbb{R}^p$, o Hipervolume do problema p obtido pelo algoritmo s , indicado por $HV_{p,s}$, é a mensuração da região fracamente dominada por A e limitada por r , ou seja,

$$\bar{t}_{p,s} = HV_{p,s} := Vol(\{q \in \mathbb{R}^p \mid \exists a \in A : a \leq q \text{ e } q \leq r\}).$$

Aqui a função $Vol(\cdot)$ denota a função de Lebesgue mensurável de dimensão p . Assim, essa métrica pode ser interpretada como a união das caixas formadas pelas soluções

não dominadas e pelo ponto de referência:

$$\bar{t}_{p,s} = HV_{p,s} := Vol \left(\bigcup_{a \in A, p \leq r} [a, r] \right),$$

onde $[a, r] = \{q \in \mathbb{R}^p \mid \exists a \in A : a \leq q \text{ e } q \leq r\}$ denota a caixa delimitada inferiormente por $a \in A$ e superiormente por r .

Como queremos comparar as soluções não dominadas de dois algoritmos, AL-Quad e AL-Exp, então analisaremos para cada algoritmo, o Hipervolume da frente não dominada completa construída para cada instância α .

Decidimos reunir todos os pontos não dominados obtidos de cada algoritmo e em cada instância α para aquele experimento de dimensão n e tomar como ponto de referência aquele dominado por todos esses pontos. Deste modo, mantemos a definição de r e podemos usar o mesmo ponto de referência no cálculo dos Hipervolumes. Como nosso código utiliza *multi-start* para gerar uma aproximação da fronteira de Pareto, aplicaremos uma quantidade fixa de pontos iniciais para cada α .

Como o Hipervolume é por definição uma métrica que tratamos de maximizá-la, isto é, quanto maior o volume ou área coberta, melhor é o desempenho do algoritmo, então para adequá-la ao perfil de desempenho, consideramos a inversão $t_{p,s} = 1/\bar{t}_{p,s}$. Deste modo, quanto menor for $t_{p,s}$, melhor será, ou seja, estamos invertendo de modo que o melhor HV implique na menor razão de desempenho.

2. *Purity*. A métrica *Purity* é usada para comparar as fronteiras de Pareto determinadas por diferentes algoritmos, sendo denotada por Pur . Segundo [17, pág. 16], tome S um conjunto de algoritmos e P o conjunto de problemas. Vamos denotar por $F_{p,s}$ o conjunto de pontos da fronteira de Pareto determinada pelo algoritmo $s \in S$ para o experimento $p \in P$. Defina também uma aproximação da verdadeira frente de Pareto, denotado por F_p do problema p , na prática esse conjunto é a união de todos os pontos não dominados encontrados pelos algoritmos para aquele problema,

$$F_p = \bigcup_{s \in S} F_{p,s},$$

e então removendo deste conjunto todos os pontos dominados. Ainda por [17, pág. 16], essa métrica consiste em determinar, para o algoritmo $s \in S$ e problema $p \in P$, a razão

$$\bar{t}_{p,s} = Pur_{p,s} := \frac{|F_{p,s} \cap F_p|}{|F_{p,s}|},$$

lembrando que $|\cdot|$ sobre um conjunto indica sua cardinalidade. Assim, $Pur_{p,s}$ é um número no intervalo $[0, 1]$ no qual mensuramos o quanto das soluções não dominadas geradas por um algoritmo s estão exatamente na frente de Pareto tomada como

referência, no caso, aquela construída pela união dos pontos não dominados de todos os métodos. Quanto mais próximo de 1, significa que boa parte das soluções geradas por s pertencem a frente de referência, portanto, possuem melhor qualidade. No caso de um valor baixo, significa que menos de suas soluções pertencem a essa fronteira de referência.

Com a convenção do perfil de desempenho, para analisar a métrica *Purity* dos algoritmos, precisamos inverter a métrica, assim como o Hipervolume, tomando $t_{p,s} = 1/\bar{t}_{p,s}$. Assim, quanto maior o valor de $Pur_{p,s}$, menor será o valor da razão $r_{p,s}$.

3. Γ -*Spread*. É uma métrica usada para medir o máximo espaçamento entre os pontos não dominados na fronteira de Pareto aproximada. Segundo [17, pág.24], o valor de Γ -*Spread* é sempre positivo e pode ser calculado da seguinte forma: Considere $x^1, x^2, \dots, x^N$ as soluções não dominadas produzidas pelo algoritmo, ($N \in \mathbb{N}$), aos quais adicionamos os denominados pontos extremos, x^0 e x^{N+1} , que correspondem aos pontos com os melhores e piores valores para cada função objetivo. Assim, essa métrica pode ser computada por

$$\Gamma_{p,s} := \max_{j=1,\dots,v} \left(\max_{i \in \{0,\dots,N\}} \{\delta_{j,i}\} \right),$$

com v representando o número de funções objetivo e $\delta_{j,i} = f_j(x^{i+1}) - f_j(x^i)$, devemos também assumir que os valores das funções objetivo estão organizados em ordem crescente para cada j .

Para usar essa métrica em perfis de desempenho, não precisamos realizar sua inversão como ocorreu nas métricas anteriores porque ela já é adequada por definição. Usaremos então $t_{p,s} = \bar{t}_{p,s}$.

Portanto, em Γ -*Spread* estamos mensurando o maior *gap* (lacuna) entre as soluções não dominadas da fronteira aproximada, e quanto menor o Γ , mais densa e uniforme é a disposição dos pontos. Assim, na análise da eficiência no perfil de desempenho, observamos qual método consegue o menor Γ encontrado de imediato. E para análise da robustez entre os métodos, estamos observando o método que mantém em todas as instâncias, no máximo uma porcentagem do melhor Γ -*Spread*, $\Gamma_{p,s} \leq \tau \cdot \Gamma_{p,melhor}$. Lembrando que $\Gamma_{p,melhor} = \min\{\Gamma_{p,s} : s \in S\}$.

4. *Tempo de CPU*. Assim como a métrica Γ -*Spread*, o tempo computacional CPU, denotado por T , também é uma métrica que já se encontra adequada para o perfil de desempenho. Ao longo de cada instância α , recolhemos o tempo computacional daquele *multi-start* como métrica em ambos os métodos. Assim, se forem aplicados

κ pontos de início no *multi-start* para aquela instância, então

$$t_{p,s} = T_{p,s} := \sum_{i=1}^{\kappa} T_{p,s}^{(i)},$$

onde $T_{p,s}^{(i)}$ é o tempo total do procedimento exterior no início i .

4.4 WSM para MOPCaC

Consideremos a seguinte ponderação do problema de portfólio de Markowitz bi-objetivo, tome os pesos ν_1 e ν_2 para definir a função objetivo ponderada

$$\frac{\nu_1}{2} x^\top Q x - \nu_2 v^\top x,$$

que é equivalente a usar,

$$\nu \left(\frac{1}{2} x^\top Q x \right) + (1 - \nu)(-v^\top x), \quad (4.6)$$

sendo ν agora um escalar pertencente ao intervalo $[0, 1]$.

Abordamos anteriormente no Capítulo 2 o método da soma ponderada como um facilitador na resolução de problemas de otimização multiobjetivo. No entanto, mostramos que o método apresenta uma desvantagem quando o conjunto viável do problema não é convexo, existindo segundo [49, pág.12], pontos invisíveis na fronteira de Pareto que não são obtidos matematicamente.

Em [49, pág.12], utilizam a formulação da soma ponderada em um problema multiobjetivo de portfólio com restrição de cardinalidade, mas argumenta que apesar da possibilidade de resolver as equações para valores de ν quanto desejarmos, sempre haverá partes da fronteira de Pareto do conjunto com restrição de cardinalidade (não convexo) que nunca poderão ser encontrados por tal abordagem, denominando esses pontos de soluções invisíveis, porque são invisíveis para uma abordagem exata embasada pela ponderação das funções objetivo. Deste modo, podemos ainda abordar o WSM em problemas com conjuntos não convexos para encontrar uma aproximação da fronteira de Pareto, enquanto guardamos sua simplicidade de implementação, mas não teremos a fronteira de Pareto totalmente obtida.

Em [6, pág.14], o autor considera um exemplo de problema de otimização de portfólio com restrição de cardinalidade $\alpha = 2$ enquanto resolve a soma ponderada por métodos da programação inteira mista. Na figura 4.3, temos o gráfico de todas as possíveis carteiras de investimento compostas por dois ativos encontradas nesse exemplo.

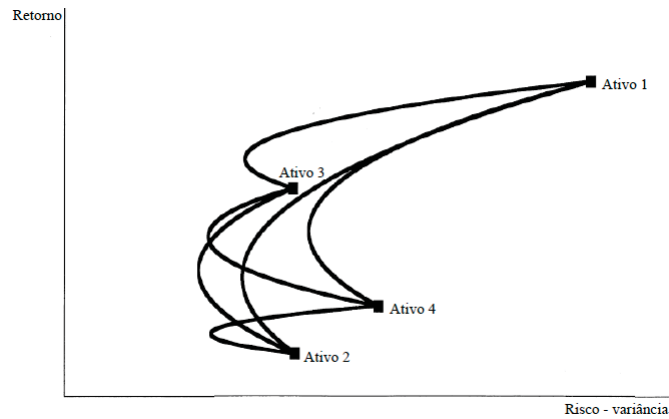


Figura 4.3: Exemplo de combinação viável de dois ativos [6, pág.14].

E em seguida, temos a fronteira de Pareto descontínua gerada pelo modelo de soma ponderada sobre as restrições de seu método não convexo.

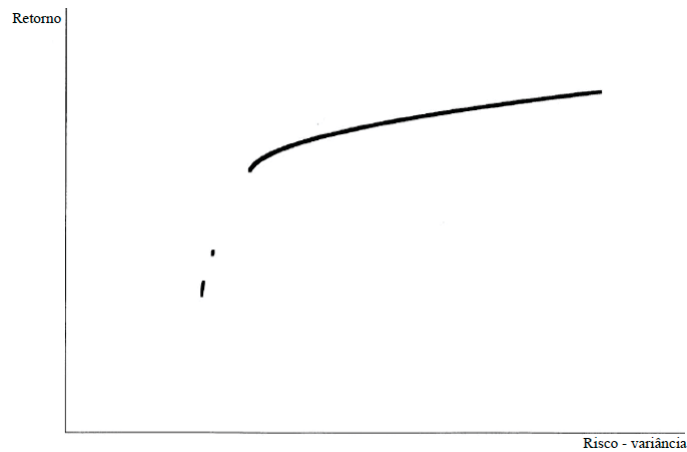


Figura 4.4: Fronteira de Pareto com pontos encontrados pelo método da soma ponderada em problema com restrição de cardinalidade [6, pág.18].

É afirmado por [6, pág.16], que a descontinuidade da curva ocorre por conta do número de ativos pertencentes ao portfólio ser menor que o número de ativos disponíveis para investimento, consequentemente temos pontos distintos na curva de Pareto com as mesmas taxas de crescimentos e soluções diferentes do tipo (4.6) com o mesmo ν . Assim, o método acaba considerando apenas uma solução e construindo uma fronteira de Pareto com falhas. Veja abaixo os pontos invisíveis desse mesmo exemplo.

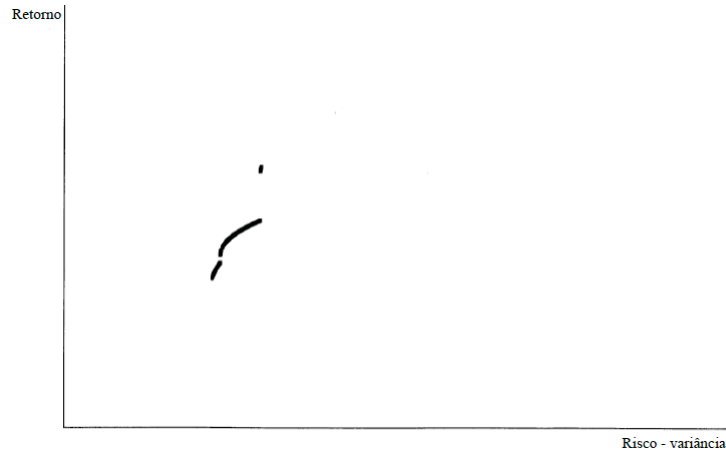


Figura 4.5: Fronteira de Pareto com somente os pontos invisíveis desse exemplo [6, pág.18].

Assim, segundo [6, pág. 19], resolver através de um método exato um problema de soma ponderada sujeito a restrição de cardinalidade, pode gerar uma fronteira de Pareto incompleta. Para completar o restante da fronteira, os autores [6, 49] utilizaram de algoritmos meta-heurísticos para investigar mais soluções e localizar pontos invisíveis.

Portanto, o método da soma ponderada tem aplicação em problemas não convexos, possibilitando obter uma aproximação da frente de Pareto, mas nunca conseguimos obter ela completamente como no caso convexo. Como estamos interessados em comparar a fronteira de Pareto aproximada de nossos algoritmos, achamos suficiente considerar apenas a fronteira de Pareto proporcionada pelo método da soma ponderada. Além disso, não planejamos estudar heurísticas em nossa pesquisa, deixaremos o estudo de suas aplicações para trabalhos futuros.

Seguindo os modelos de [40, 49], reformulamos o problema de soma ponderada anterior com restrição de cardinalidade, obtendo uma função objetivo quadrática com restrições lineares e com algumas variáveis inteiras, logo estamos diante de um problema da Programação Quadrática Inteira-Mista (MIQP, do Inglês *Mixed-Integer Quadratic Programming*), e dado por

$$\begin{aligned}
 &\underset{x,y}{\text{minimizar}} && \nu(\tfrac{1}{2}x^\top Qx) + (1 - \nu)(-v^\top x) \\
 &\text{sujeito a} && e^\top x = 1, \\
 & && e^\top y \geq n - \alpha, \\
 & && 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n, \\
 & && x_i + y_i \leq 1, \\
 & && y_i \in \{0, 1\},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

e com os parâmetros $\nu \in [0, 1]$. O método da soma ponderada é reconhecido por sua velocidade na obtenção de repostas e sua fácil implementação, no entanto, com a adição de variáveis inteiras, o grau de dificuldade aumenta consideravelmente.

Para solucionar o problema (4.7) empregamos o *IBM ILOG CPLEX Optimizer*,

que é um *software* comercial da IBM. O CPLEX é comumente indicado para resolver problemas da Programação Linear, da Programação Quadrática e da Programação Inteira Mista. Para facilitar a implementação, utilizamos sua versão em *Python*, garantida pelo DOcplex (versão 22.2.0). O DOcplex é responsável por traduzir o modelo com os objetivos, variáveis e restrições, para o formato interno de CPLEX e entregar esses dados ao método resolvidor que é instalado no código *Python* por “!pip install cplex docplex”.

Nos códigos presentes em https://github.com/Andrezanincruz01/Dissertacao_Mestrado.git, nossa função “*solve_weighted*” recebe o par (α, ν) , dando instruções para “*mdl = Model(name='miqp')*” que cria um modelo denominado “miqp”. Na sequência, geramos o vetor de variáveis contínuas e o vetor de variáveis binárias com “*continuous_var_list*” e “*binary_var_list*”, respectivamente.

As restrições são adicionadas em “*add_constraint*”, e a função objetivo de soma ponderada (4.6) é apresentada ao código com “*mdl.minimize(...)*”. Adicionamos também a opção de “*mdl.parameters.timelimit = x*”, para definir um limite de procura de solução de x segundos. Por fim, a resolução do problema ocorre com “*sol = mdl.solve(...)*” que retorna um conjunto de soluções contendo os valores ótimos. Mais informações sobre essa implementação no *Python* e do DOcplex em <https://ibmdecisionoptimization.github.io/docplex-doc>

4.5 Banco de Dados e Análise dos Resultados

Por uma questão de conveniência, decidimos utilizar os mesmos problemas de otimização de portfólio presentes nos trabalhos de [40, 49] com algumas modificações.

São cinco problemas de portfólio no total, com dimensões $n = 6, 31, 85, 89$ e 98 , os dois primeiros usaremos para mostrar nossas aproximações da fronteira de Pareto, enquanto os últimos três são usados na análise de perfis de desempenho.

Começamos falando sobre o problema de dimensão $n = 6$, denominaremos ele assim como o autor [40] de Caso Simples. O vetor de retorno esperado e a matriz de covariância desse problema são dados por:

$$v = (0.021, 0.04, -0.034, -0.028, -0.005, 0.006)^\top,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.038 & 0.020 & 0.017 & 0.014 & 0.019 & 0.017 \\ 0.020 & 0.043 & 0.015 & 0.013 & 0.021 & 0.014 \\ 0.017 & 0.015 & 0.034 & 0.011 & 0.014 & 0.014 \\ 0.014 & 0.013 & 0.011 & 0.044 & 0.014 & 0.011 \\ 0.019 & 0.021 & 0.014 & 0.014 & 0.040 & 0.014 \\ 0.017 & 0.014 & 0.014 & 0.011 & 0.014 & 0.046 \end{pmatrix}^\top$$

Segundo [40], esse exemplo foi pensado para demonstrar as propriedades do pro-

blema e do algoritmo de um modo simples de visualizar. Sua matriz de covariância é simétrica, positiva definida e alguns dos ativos apresentam uma média de retorno negativa. Quanto aos outros quatro problemas de portfólio, foram obtidos na Biblioteca OR de Beasley, (<https://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/portinfo.html>), veja também [24].

Eles foram desenvolvidos no trabalho de [49], ao selecionar os índices de cinco mercados de capitais ao redor do mundo, no período de março de 1992 até setembro de 1997, são representados por “Port 1” (Hang Seng - Mercado de Hong Kong) com $n = 31$ ativos, “Port 2” (DAX100 - Mercado da Alemanha) com $n = 85$ ativos, “Port 3” (FTSE 100 - Mercado do Reino Unido) com $n = 89$ ativos e “Port 4” (S&P - Mercado dos Estados Unidos) com $n = 98$ ativos.

Na biblioteca OR, encontramos o retorno médio e o desvio padrão do retorno para todos os pares de ativos presentes em cada arquivo, do “Port 1” até o “Port 4”, então para nossa prática, criamos um código na linguagem *Python* para retirar esses dados e construir o vetor de retorno esperado e uma matriz de covariância. A biblioteca também oferece as fronteiras de Pareto irrestritas de cada portfólio, obtidas de [49] ao completá-las pelo método da soma ponderada com meta-heurísticas, não foi necessário utilizá-las em nossos experimentos, mas elas poderiam ser usadas como terceira via comparativa.

Para formar uma aproximação da fronteira de Pareto com esse algoritmo, implementamos também nesse experimento uma filtragem de dominância entre as soluções encontradas via *multi-start*. Nesse processo, para cada ponto inicial $z^k = (x^k, y^k)$, aplicamos o Algoritmo (8), obtendo z^{k+1} , em seguida definimos o par $(z^{k+1}, F(z^{k+1}))$ no conjunto auxiliar ND_k para verificarmos se existe algum par $(u, F(u)) \in ND_k$ tal que $F(u) \not\leq F(z^{k+1})$, isto é, $F(u)$ domina $F(z^{k+1})$.

Caso exista, então não introduzimos z^{k+1} e mantemos $ND_{k+1} = ND_k$. E se não existir, retiramos de ND_k todo vetor $(u, F(u))$ tal que $F(u)$ é dominado por $F(z^{k+1})$, definindo ND_{k+1} agora como

$$ND_{k+1} = ND_k / \{(u, F(u)) \in ND_k \mid F(z^{k+1}) \not\leq F(u)\} \cup \{(z^{k+1}, F(z^{k+1}))\}.$$

Com efeito, após cada início do *multi-start*, guardamos apenas aquelas soluções que são não dominadas por nenhuma outra solução encontrada. Veja abaixo um exemplo de como a filtragem da dominância entre as soluções permite uma melhor visualização da fronteira de Pareto aproximada.

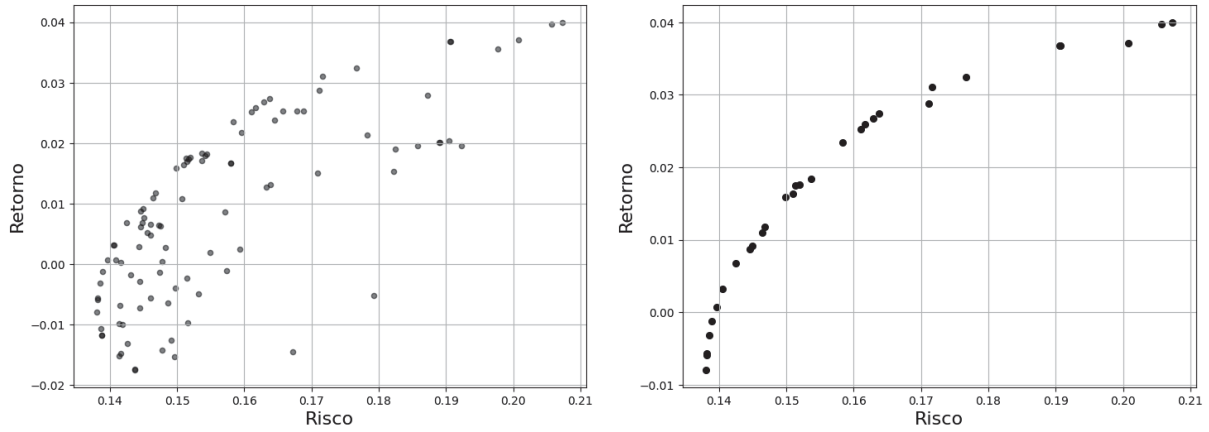


Figura 4.6: Aplicação do filtro de dominância no Algoritmo 8.

Uma estratégia alternativa que pode trazer benefícios para a construção da fronteira de Pareto é discutida em [36] com o método *Sparse Front Steepest Descent* (SFSD). Este método percorre a fronteira de Pareto e analisa diretamente conjuntos de suporte (conjunto dos índices de um vetor cujas componentes são não nulas) e super suporte (conjuntos de suportes de diferentes pontos). Como nosso código já se mostra prático na aproximação da fronteira de Pareto, decidimos não aplicar essa estratégia, mas em trabalhos futuros o uso do SFSD será uma boa alternativa.

Observação 4.2 *A seguir, temos algumas observações sobre nossa abordagem.*

1. Nosso código foi inspirado no trabalho de [39], assim como ele, para guardar o balanceamento trade-off entre a viabilidade e otimalidade, isto é, o valor de $F(x)$ e as restrições de Hadamard, decidimos escolher convenientemente o parâmetro inicial $\tau_0 > 0$ com a mesma ordem de magnitude do autovalor da matriz de covariância Q . Para isto, usamos o quociente de Rayleigh, ao tomar $z = Qe$ e $\tau_0 = \frac{z^\top Q z}{z^\top z}$, gerando assim uma boa estimativa para o maior autovalor de Q .
2. Como queremos fazer $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| \rightarrow 0$ ao longo do processo de convergência do algoritmo, utilizamos no Passo 3b. as seguintes atualizações para os parâmetros τ e η :

$$\tau_{k+1} = \eta_{k+1} \tau_k \quad \text{com} \quad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{(n - \alpha)}{2n} \frac{|v^\top x^{k+1}|}{\sqrt{(x^{k+1})^\top Q x^{k+1}}} \quad \text{e} \quad \eta_0 > 1. \quad (4.8)$$

Perceba que a atualização de η é controlada pela razão entre o valor absoluto do retorno $|v^\top x|$ e o risco atual $\sqrt{(x^{k+1})^\top Q x^{k+1}}$. Na maioria de nossos experimentos, a sequência do parâmetro de penalização $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem um crescimento estável e garantindo a convergência do produto de Hadamard para zero. Mas caso a matriz Q possua muitas entradas, levando a uma demora maior para a convergência, τ_k

pode aumentar demais e causar erros de overflow, por isso recomendamos também a limitação de τ .

3. *No Passo 3. do algoritmo atualizamos o parâmetro de penalização τ e o vetor Lagrangeano λ da seguinte forma. Caso $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\| > \frac{1}{\eta_{k+1}} \|x^k \circ y^k\|$, a iteração apresentou uma tendência a se desviar da região viável, logo é realizado o salto multiplicativo do parâmetro de penalidade τ_k . Do contrário, a iteração se aproxima da viabilidade, $\|x^{k+1} \circ y^{k+1}\|$ continua a tender para zero e o parâmetro auxiliar η_k não precisa ser atualizado.*
4. *Semelhante ao algoritmo de [39], atualizamos o vetor dos multiplicadores de Lagrange através da projeção em uma caixa compacta $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n$. Para cada $1 \leq j \leq n$, λ_i^k é obtido através de*

$$\lambda_i^{k+1} = \min\{\max\{\lambda_{\min}, (\lambda^k + \tau_k(x^{k+1} \circ y^{k+1}))_i\}, \lambda_{\max}\}.$$

De modo a comparar qual entre as penalizações implementadas em nosso algoritmo tem um melhor desempenho e apresenta uma melhor aproximação de sua fronteira de Pareto com a fronteira do método MIQP CPLEX, escolhemos para os dois problemas iniciais de portfólio quatro instâncias de $1 \leq \alpha \leq n$, rodando com 300 pontos iniciais, e nos outros três problemas, escolhemos 25 instâncias, com 30 pontos iniciais para cada α .

Como critérios do Algoritmo 8, temos $tol_1 = 10^{-08}$, $tol_2 = 10^{-08}$, o subproblema para obter direção de busca utiliza $f_{tol} = 10^{-06}$ para Caso Simples e Port 1, e $f_{tol} = 10^{-4}$ para Port 2, 3 e 4. Em todos os experimentos, o método de Dykstra utiliza 500 ciclos com tolerância de 10^{-12} . Em todos os testes, usamos $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^n = [-10^4, 10^4]^n$, com $\lambda^0 = 0$. Vamos começar com o Caso Simples e o Port 1.

Na Figura 4.7, podemos observar as soluções não dominadas no espaço dos objetivos tanto da penalização AL-Quad quanto na penalização AL-Exp. Perceba que a quantidade de pontos encontrados para cada cardinalidade está diminuindo, isso era esperado por nós, uma vez que a quantidade de zeros no vetor x aumenta, o conjunto viável tende a diminuir. Isso também é observado nesse mesmo exemplo para otimização escalar em [40], indicando que essa característica se mantém no multiobjetivo.

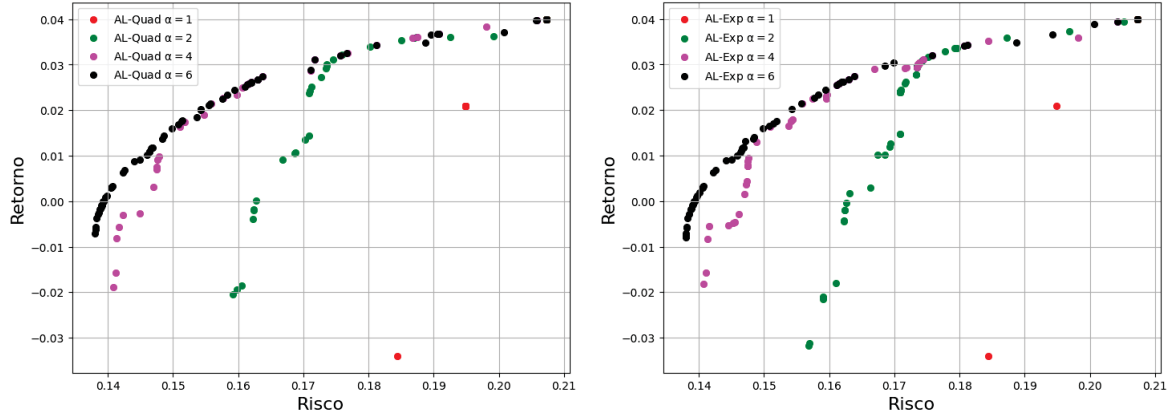


Figura 4.7: Imagens das soluções não dominadas de cada fronteira de Pareto encontrada no espaço dos objetivos (Quad/Exp) - Caso Simples.

Na sequência, podemos comparar visualmente a aproximação da fronteira de Pareto gerada pelo MIQP usando o CPLEX, juntamente com aproximação obtida de cada método de penalização. Perceba que a fronteira fica mais irregular para valores de $\alpha < n$, isso ocorre por conta da restrição de cardinalidade, tornando a curva da fronteira não convexa.

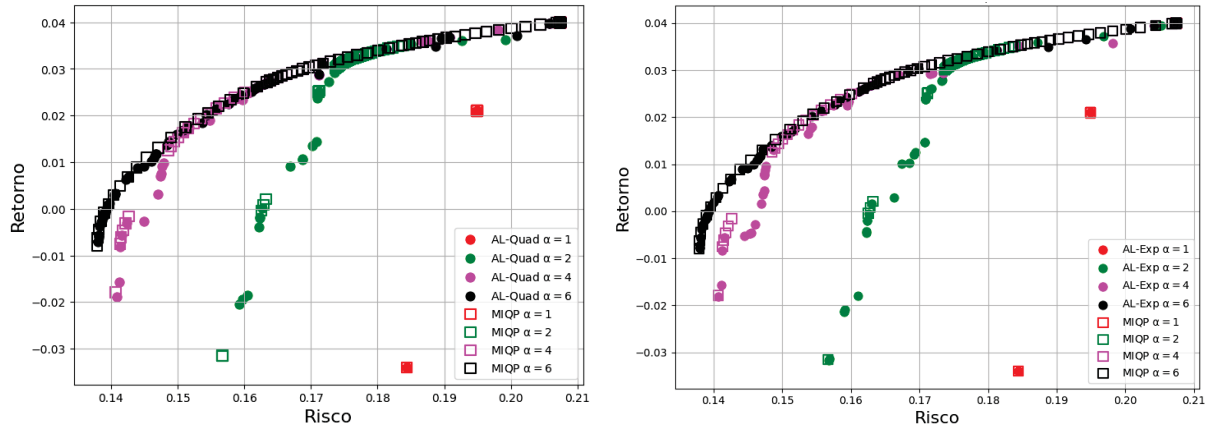


Figura 4.8: Comparação entre a fronteira de Pareto obtida pelo MIQP e pelo Algoritmo 8 (Quad/Exp) - Caso Simples.

Note que a imagem de diversas soluções de nossas implementações estão próximas ou atingiram os pontos da fronteira do MIQP. Em relação ao tempo de execução do algoritmo para cada tipo penalização, apresentamos na Tabela 4.6 a soma total dos tempos (em segundos) dos procedimentos externos para todos os 300 inícios realizados com *multi-start*, além da média aritmética desses tempos, para as quatro restrições α distintas.

α	AL-Quad (Total)	AL-Quad (Média)	AL-Exp (Total)	AL-Exp (Média)
1	196,6436	0,6555	296,9312	0,9898
2	251,3295	0,8378	316,8124	1,0560
4	262,1004	0,8737	332,4310	1,1081
6	232,0760	0,7736	275,3316	0,9178
Soma	942,1495		1.221,5062	

Tabela 4.6: Comparação de tempos entre os algoritmos AL-Quad e AL-Exp para diferentes valores de α - Caso Simples.

Podemos observar que o algoritmo 8 com penalização quadrática apresentou tempos de execução melhores em comparação com a penalização exponencial, especialmente para melhores valores de α . Isso sugere que a penalização quadrática venceu a exponencial para o problema Caso Simples. No total, levou aproximadamente, 15 minutos para o caso quadrático e 20 minutos para o exponencial.

O problema Caso Simples foi retirado do texto de [40], mas foi apresentado primeiro por Markowitz em [22]. Em seu trabalho, foi encontrado como minimizador do problema escalar de otimização de média variância

$$x^* = (0.0961, 0.1168, 0.2625, 0.2140, 0.1429, 0.1677)^\top,$$

apresentando um o retorno médio de -0.0079 e 0.1379 de risco, esse ponto é bem aproximado nas aplicações anteriores em AL-Quad e AL-Exp, sua localização é a ponta inferior da curva.

Considere agora $v_{\min}$ ($v_{\max}$) como o menor (maior) retorno esperado entre os portfólios não dominados naquele algoritmo, e também, $Q_{\min}$ ($Q_{\max}$) o menor (maior) risco entre todos os portfólios não dominados. Também consideramos $Card_{\min}$ ($Card_{\max}$) como a menor (maior) cardinalidade encontrada. Assim, as tabelas mostradas na sequência, condensam, para cada α , os extremos encontrados de retorno, risco e número de ativos dentro da frente de Pareto gerada por cada método.

Portanto, esses extremos são valores internos de cada fronteira e não uma comparação global entre os três métodos. Essa escolha de tabela é mais simples, devido a quantidade de resultados obtidos, e também porque os dados extremos de uma fronteira de Pareto são os valores mais atraentes para um investidor.

α	Método	$v_{\min}$	$v_{\max}$	$Q_{\min}$	$Q_{\max}$	$Card_{\min}$	$Card_{\max}$
1	AL-Quad	-0.0340	0.0400	0.1844	0.2074	1	1
1	AL-Exp	-0.0340	0.0400	0.1844	0.2074	1	1
1	MIQP	-0.0340	0.0400	0.1844	0.2074	1	1
2	AL-Quad	-0.0205	0.0400	0.1592	0.2074	1	2
2	AL-Exp	-0.0317	0.0400	0.1568	0.2074	1	2
2	MIQP	-0.0315	0.0400	0.1567	0.2074	1	2
4	AL-Quad	-0.0188	0.0400	0.1408	0.2074	1	4
4	AL-Exp	-0.0181	0.0400	0.1407	0.2074	1	4
4	MIQP	-0.0179	0.0400	0.1407	0.2074	1	4
6	AL-Quad	-0.0071	0.0400	0.1380	0.2074	1	6
6	AL-Exp	-0.0079	0.0400	0.1380	0.2074	1	6
6	MIQP	-0.0079	0.0400	0.1379	0.2074	1	6

Tabela 4.7: Resumo dos retornos esperados e riscos do problema Caso Simples: AL-Quad vs AL-Exp vs MIQP.

Economicamente falando, os termos positivos de v indicam uma rentabilidade esperada, enquanto que os negativos expressam uma expectativa de perda da carteira de investimento. No caso do risco, quanto menor ele for em comparação aos demais, mais conservadora e segura é a carteira de investimento, e quanto maior ele for, maior é o perigo de sua compra.

Por exemplo, para $\alpha = 1$, todos devolveram o mesmo par de retorno $v_{\min} = -0.03400$ e $v_{\max} = 0.04000$, na compra de um ativo para formar seu portfólio, entre os portfólios não dominados encontrados pelo método, um desses portfólios tem um retorno esperado negativo de -3.4% , ou seja, uma perda de capital e o portfólio de maior ganho apresenta 4% de retorno da aplicação. Também exibiram portfólios com os mesmos riscos, todas as carteiras encontradas são compostas de apenas um ativo, respeitando assim a restrição do problema.

Para $\alpha = 2$, AL-Quad surpreende encontrando uma carteira com um retorno mínimo melhor que os outros dois, mas MIQP tem carteiras com um menor risco. Em relação aos outros parâmetros, todos ficaram empatados. Em $\alpha = 4$, MIQP leva vantagem apenas no retorno mínimo, ficando empatado com AL-Exp, ou seja, ambos encontraram carteiras com o mesmo retorno máximo e risco mínimo (máximo).

Em $\alpha = 6$, AL-Quad encontrou uma carteira menos negativa (-0.71%), enquanto MIQP e AL-Exp empatam em $Q_{\min}$, com o melhor sendo de 4% em todos os métodos. Na prática, se tratando de valores extremos, nenhum método foi dominante nesse experimento, MIQP apresentou um desempenho um pouco melhor nos casos $\alpha = 2, 4$, mas depois foi alcançado em $\alpha = 6$. Os três métodos respeitaram a restrição de cardinalidade, não ultrapassando o limite de ativos imposto para o portfólio. Deste modo, os métodos AL-Quad e AL-Exp apresentaram um bom desempenho para um problema de baixa dimensão.

As próximas imagens são uma comparação entre as fronteiras de Pareto determinadas por AL-Quad e AL-Exp para o problema Port 1.

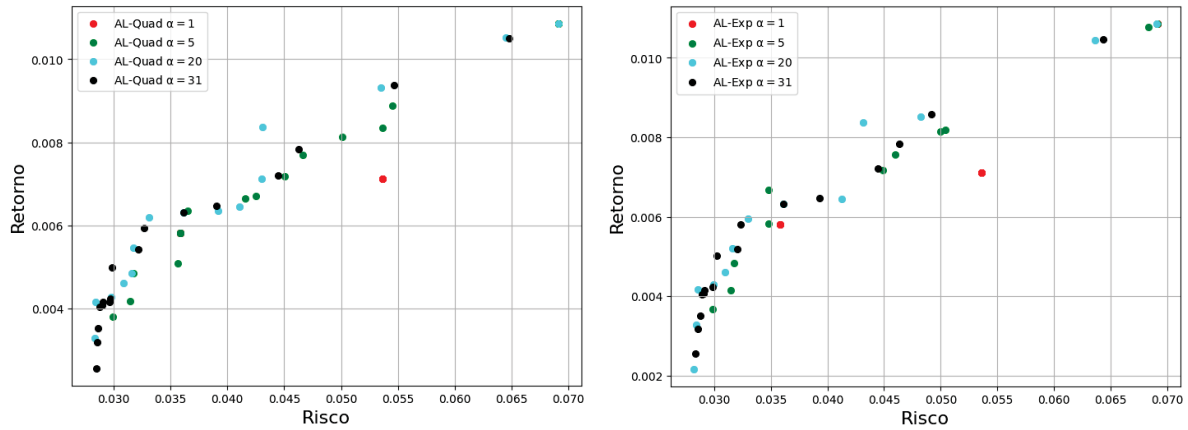


Figura 4.9: Imagens das soluções não dominadas encontradas no espaço dos objetivos (AL-Quad/AL-Exp) - Port 1.

Com o crescimento da dimensão do problema para $n = 31$, a dificuldade computacional também aumentou. O tempo de execução de AL-Quad foi um pouco melhor em comparação com AL-Exp, como podemos observar na Tabela 4.8 ao comparar seus tempos totais e médias para os 300 inícios usando *multi-start*. Ao todo, foi preciso de, aproximadamente, 1 hora e 30 minutos para AL-Quad aplicar todos os pontos em todas as restrições α , enquanto que AL-Exp precisou de 1 hora e 32 minutos.

α	AL-Quad (Total)	AL-Quad (Média)	AL-Exp (Total)	AL-Exp (Média)
1	1.481,8014	4,9393	1.547,2410	5,1575
5	1.360,6056	4,5354	1.404,2982	4,6810
20	1.430,6330	4,7688	1.435,5103	4,7850
31	1079.9796	3,5999	1.119,4250	3,7314
Soma	5.353,0196		5.521,256	

Tabela 4.8: Comparação de tempos entre os algoritmos AL-Quad e AL-Exp para diferentes valores de α - Port 1.

Uma observação sobre o limite de tempo sobre o algoritmo MIQP CPLEX, “*mdl.parameters.timelimit = x*”, usamos $x = 30s$ nos problemas Caso Simples e Port 1, porque este tempo se mostrou suficiente para encontrar as soluções ótimas, enquanto que para Port 2, 3 e 4, recomendamos usar $x = 120s$.

Após gerar 300 pontos iniciais pelo *multi-start* para cada α , apenas algumas soluções não dominadas atingiram a fronteira de Pareto do MIQP, enquanto que os pontos restantes, mesmo satisfazendo as condições do problema, aparecem “dentro” da curva da fronteira do MIQP.

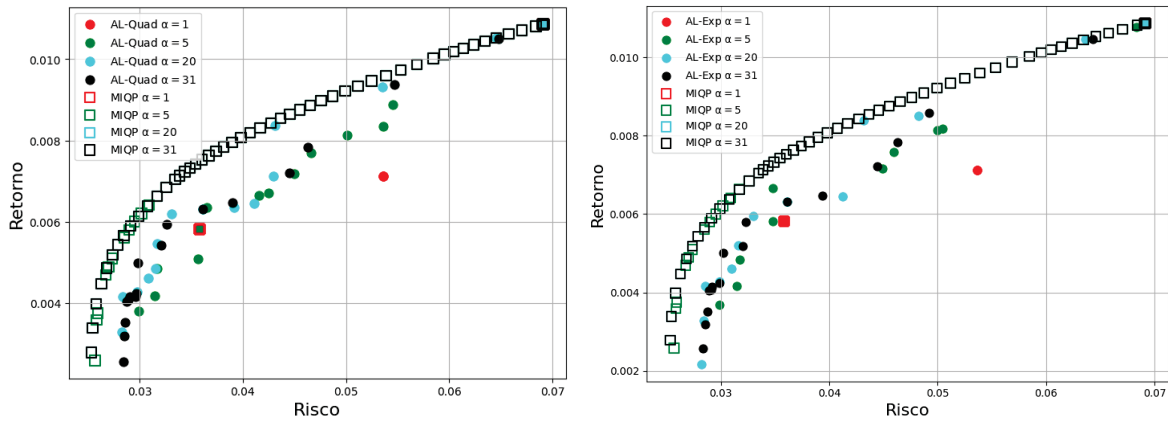


Figura 4.10: Comparação entre a fronteira de Pareto obtida pelo MIQP e pelo Algoritmo 8 (AL-Quad/AL-Exp) - Port 1.

Segue também a tabela com o resumo valores extremos da aplicação do nosso método com os dois tipos de penalização para o problema de portfólio Port 1, juntamente com os resultados do MIQP.

α	Método	$v_{\min}$	$v_{\max}$	$Q_{\min}$	$Q_{\max}$	$Card_{\min}$	$Card_{\max}$
1	AL-Quad	0.0058	0.0109	0.0358	0.0691	1	1
1	AL-Exp	0.0058	0.0109	0.0358	0.0691	1	1
1	MIQP	0.0058	0.0109	0.0358	0.0691	1	1
5	AL-Quad	0.0038	0.0109	0.0299	0.0691	1	4
5	AL-Exp	0.0037	0.0109	0.0299	0.0691	1	5
5	MIQP	0.0026	0.0109	0.0257	0.0691	1	5
20	AL-Quad	0.0033	0.0109	0.0283	0.0691	1	13
20	AL-Exp	0.0022	0.0109	0.0282	0.0691	2	14
20	MIQP	0.0028	0.0109	0.0253	0.0691	1	12
31	AL-Quad	0.0026	0.0105	0.0284	0.0648	2	22
31	AL-Exp	0.0026	0.0105	0.0283	0.0643	2	23
31	MIQP	0.0028	0.0109	0.0253	0.0691	1	12

Tabela 4.9: Resumo dos retornos e riscos do problema Port 1: AL-Quad vs AL-Exp vs MIQP.

À luz da Tabela 4.9, para $\alpha = 1$, todos os métodos possuem um portfólio com retornos e riscos mínimos (ou máximos) iguais. Logo, o problema de $\alpha = 1$ foi trivial para os três métodos. Com $\alpha = 5$, MIQP apresentou carteiras com o menor risco mínimo, seguido pelos outros dois métodos com o mesmo valor. Os três possuem carteiras com retorno máximo de 1.09% e risco máximo de 6.91%. O melhor mínimo retorno é dado por AL-Quad, garantindo carteiras de investimento com até 4 ativos e com 0.38% de retorno esperado, seguido por AL-Exp e MIQP, todos apresentando um retorno positivo.

Para $\alpha = 20$, AL-Quad apresentou ter portfólios com os melhores retornos mínimos, todos com pelo menos 0.33% de retorno. Os três métodos mostraram ter carteiras de investimento com os mesmos retornos e riscos máximos, $v_{\max} = 1.09\%$ e

$Q_{\max} = 6.91\%$, o porque fica mais evidente na fronteira de Pareto, apesar da maioria dos pontos não dominados estarem abaixo da frente de MIQP, para um alto valor de risco, AL-Quad e AL-Exp conseguem alcançar essa fronteira.

Em relação a cardinalidade, AL-Exp possui carteiras mais diversificadas entre os três métodos, compostas de no mínimo 2 ativos e no máximo 14 ativos, seguido por AL-Quad com no máximo 13 ativos e MIQP com até 12 ativos.

Quanto a $\alpha = 31$, MIQP encontrou portfólios com um melhor retorno mínimo, 0.28%, um pouco a mais do que 0.26% dos outros dois métodos. Além disso, também exibiu carteiras com maior retorno e menor risco mínimo. Já AL-Exp, apresentou carteiras um risco máximo menor, 6.43%, indicando uma fronteira de Pareto mais focada em portfólios menos voláteis e, também possui carteiras mais diversificadas, com até 23 ativos, seguido de perto por AL-Quad com 22 ativos e 12 com MIQP.

Deste modo, apesar do MIQP apresentar uma fronteira de Pareto mais suave e com melhor volatilidade na maioria das instâncias, os dois métodos de penalização apresentaram suas próprias vantagens.

Com os dados disponíveis até o momento, não conseguimos decidir qual penalização apresentou as melhores vantagens, mas ambas demonstraram a capacidade de construir boas aproximações da fronteira de Pareto e de atingir seus extremos.

Também testamos esses problemas de portfólio com o Algoritmo 7, utilizando o termo de penalização externa $\tau p(x, y) = \tau \|x \circ y\|^2$. Essa abordagem precisou de 43 minutos para concluir o Caso Simples e 2 horas e 20 minutos para concluir o Port 1, bem mais do que os métodos com Lagrangiano aumentado. Assim, mantivemos nosso foco apenas no Algoritmo 8.

Em seguida, exibimos os perfis de desempenho com as métricas de Hipervolume, *Purity*, $\Gamma - Spread$ e tempo de CPU para obter uma melhor análise. Basicamente, para cada método $s \in \{\text{AL-Quad}, \text{AL-Exp}\}$,

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{a_p} |\{p = 1, \dots, a_p : r_{p,s} \leq \tau\}|$$

onde $a_p = 25$ é o número de problemas (instâncias) para cada perfil, em nosso caso, teremos para $n = 85$,

$$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 82, 85],$$

para $n = 89$ são analisados

$$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 89],$$

e por fim, para $n = 98$, são

$$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 98].$$

Para cada α , aplicamos 30 pontos iniciais para construir aproximações de cada fronteira de Pareto.

4.5.1 Perfis de desempenho: Hipervolume

Relembrando que Hipervolume é uma métrica que mede o volume (ou a área) da região dominada, formada através dos pontos da fronteira de Pareto aproximada e do ponto de referência.

Em nosso problema bi-objetivo, estaremos medindo a área total da região de pontos dominados, formada pela união dos retângulos em seu interior. Quanto maior essa métrica, mais próximo da fronteira de Pareto ótima estamos.

Para os problema de portfólio Caso Simples e Port 1, com restrição de cardinalidade $\alpha = 6$ e $\alpha = 31$, respectivamente, as Figuras (4.11) e (4.12) apresentam a construção do Hipervolume a partir dos pontos não dominados gerados por cada método, enquanto também usando a frente de MIQP como comparação.

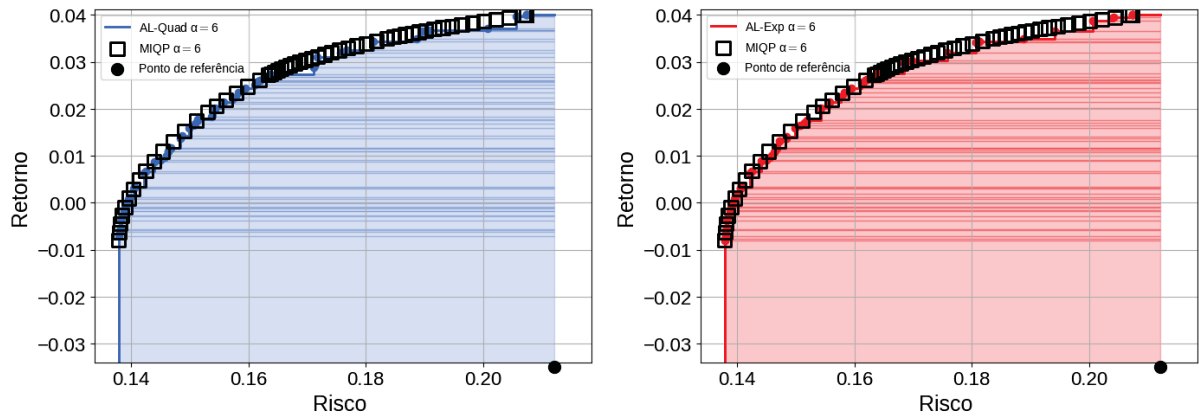


Figura 4.11: Construção do Hipervolume no problema Caso Simples - (AL-Quad/AL-Exp).

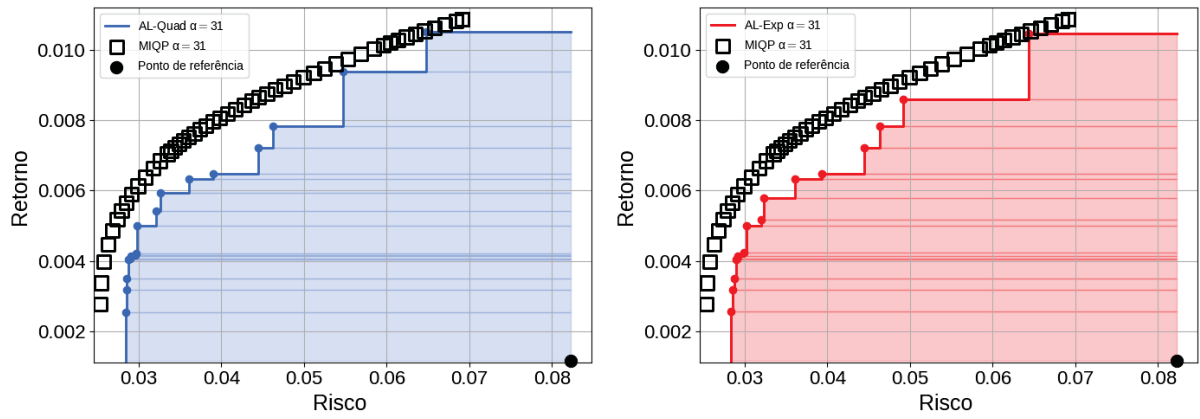


Figura 4.12: Construção do Hipervolume no problema Port 1 - (AL-Quad/AL-Exp).

Tomando a fronteira de Pareto do MIQP como referência, podemos medir quanto da área abaixo dela é obtida pelos outros dois métodos, fazendo uma simples divisão entre o Hipervolume do método de penalização pelo Hipervolume do MIQP.

Assim, obtemos que AL-Quad cobre 98.8% do Hipervolume do MIQP, enquanto AL-Exp teve uma aproximação de 98.9% do Hipervolume dessa área. Na prática, ambos os métodos tiveram um desempenho semelhante para o problema de baixa dimensão. No Port 1, o Hipervolume de MIQP obtido por AL-Quad chegou a 89.5%, enquanto que AL-Exp teve 88.3%.

Novamente, os dois métodos tiveram uma atuação semelhante até esse nível de dimensão. O método MIQP CPLEX permaneceu melhor nesses testes iniciais, mas se um investidor admitisse um desvio para a métrica Hipervolume de até 1% para o problema Caso Simples e de 10.5% até 11.7% com o Port 1, então os dois métodos passariam a serem opções de análise de carteiras de investimentos comparáveis ao MIQP CPLEX.

Essa é apenas uma das formas de utilizar o Hipervolume na análise da fronteira de Pareto. Vamos agora utilizar o perfil de desempenho de [11] como instrumento de estudo.

Estabelecemos para cada problema Port 2 ($n = 85$), Port 3 ($n = 89$) e Port 4 ($n = 98$), 25 restrições de cardinalidade usadas como instâncias, do qual computamos o Hipervolume total da fronteira de Pareto para cada instância e a razão $r_{p,s}$. A medida que τ aumenta, mais instâncias vão pertencer ao conjunto $\{s : r_{p,s} \leq \tau\}$, fazendo a função $\rho_s(\tau)$ crescer até 1.

Nestes gráficos, $\rho_s(\tau)$ indica, em função de $\tau \geq 1$, a proporção de instâncias onde o desempenho do algoritmo satisfaz, naquele problema, o fator τ do melhor algoritmo, ou seja, para cada τ analisamos quantas instâncias satisfazem $r_{p,s} \leq \tau$. Então, por exemplo, suponhamos que $\tau = 1$ e $\rho_{Quad}(1) = 0.5$ (ou seja, 50%), isso significa que metade das instâncias do método AL-Quad atingiram exatamente o melhor Hipervolume, ou seja, foi o melhor método para metade dos problemas.

Agora, se $\tau = 1.2$ e $\rho_{Quad}(1.2) = 0.7$, então, significa que em 70% das instâncias, o algoritmo AL-Quad obteve

$$HV_{p,Quad} \geq \frac{HV_{p,mejor}}{1.2} = 0.833 \times HV_{p,mejor},$$

isto é, em 70% das instâncias, o valor do Hipervolume por AL-Quad foi, pelo menos, 83,3% do melhor Hipervolume.

Observando os perfis de desempenho para Hipervolume (4.13), em Port 2 com $\tau = 1$ a curva de AL-Quad começa em $\rho_{Quad}(1) = 0.6$, indicando que em 60% das instâncias, este método obteve o melhor Hipervolume. Portanto, para valores pequenos de τ a curva de AL-Quad está acima de AL-Exp, indicando que foi mais eficiente que a penalização exponencial, que teve $\rho_{Exp}(1) \approx 0.45$.

Em seguida, pouco após o início temos AL-Exp superando AL-Quad, logo depois em $t \approx 1.13$ ele atinge $\rho_{Exp}(t) = 1$, mostrando uma melhor robustez em comparação com a penalização quadrática nesse exemplo.

No problema Port 3, o perfil de Hipervolume mostra $\rho_{Exp}(1) \approx 0.80$, então, em 80% das instâncias, AL-Exp obteve o melhor Hipervolume, apresentando uma melhor eficiência em comparação com $\rho_{Quad}(1) \approx 0.35$. Conforme o crescimento do fator de comparação, AL-Exp permanece na liderança, cobrindo todas as instâncias em $\tau \approx 1.25$, ou seja, em 100% das instâncias, AL-Exp foi, pelo menos 75% do valor do melhor Hipervolume. Do outro lado, a penalização quadrática só cobre todas as instâncias com $\tau \approx 1.78$.

Em Port 4, AL-Quad retorna como o método com maior eficiência, apresentando $\rho_{Quad}(1) \approx 0.80$, ou seja, em 80% das instâncias, a penalização quadrática obtém o melhor HV possível, enquanto que $\rho_{Exp}(1) \approx 0.33$. Conforme τ aumenta, AL-Exp empata com AL-Quad em alguns momentos, mas termina sendo superado por AL-Quad, que atinge todas as instâncias em $\tau \approx 1.35$, ou seja, em 100% das instâncias, este método chegou a ser até 35% do valor do melhor Hipervolume. Enquanto isso, a curva de AL-Exp se mantém constante por um momento, com $\rho_{Exp} = 1$ em $t \approx 1.62$.

Portanto, o método AL-Quad foi o mais eficiente nos problemas de portfólio Port 2 e Port 4, resolvendo uma maior fração de instâncias com um menor fator de comparação, além de ser também o método com melhor robustez no último problema. Por outro lado, o método AL-Exp também teve um bom desempenho, sendo o mais robusto em Port 2 e Port 3.

Assim, com relação a métrica Hipervolume, podemos dizer que cada método apresentou suas próprias vantagens, nenhum deles sendo mais dominante que o outro em todos os casos. Se um investidor deseja escolher o método com base no critério de eficiência, o mais indicado seria AL-Quad. E se o critério for robustez, então AL-Exp é a escolha natural.

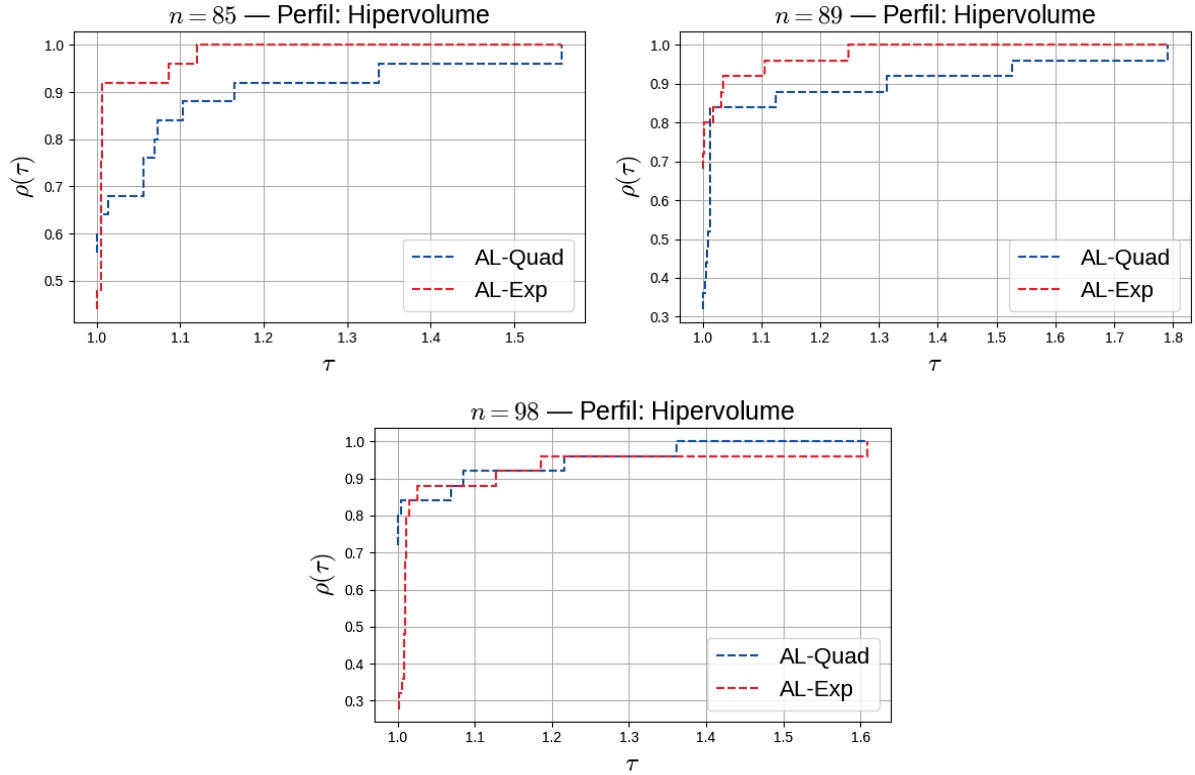


Figura 4.13: Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via métrica de Hipervolume - Port 2, 3 e 4

4.5.2 Perfis de desempenho: *Purity*

Na sequência, estudamos a métrica *Purity* em cada instância. Sabemos que essa métrica representa a porcentagem de pontos não dominados obtidos pelo método que pertencem exatamente a fronteira de Pareto de referência, então $Pur_{p,s} \in [0, 1]$. Além disso, conforme $Pur_{p,s}$ cresce, menor é o valor de $t_{p,s} = 1/Pur_{p,s}$ e, portanto, melhor.

Observando agora o perfil de desempenho da métrica *Purity* 4.14 para Port 2, o método AL-Quad se mostrou como o mais eficiente com $\rho_{Quad}(1) \approx 0.6$, isto é, para 60% das instâncias esse método obteve a melhor *Purity*. Embora o método AL-Exp tenha uma eficiência menor, com $\rho_{Exp}(1) = 0.40$, com o crescimento do fator de comparação, AL-Exp atinge a mesma cobertura de AL-Quad duas vezes, em $\tau = 2$ e $\tau = 4$. Em $\tau = 5$, a curva de AL-Quad atinge o valor $\rho = 1$, isto é, em todas as instâncias, sua *Purity* nunca ficou abaixo de 20% da melhor *Purity* ($1/5 \approx 0.20$). A medida que τ cresce, AL-Exp consegue uma cobertura total das instâncias em $\tau = 7$.

Na sequência com Port 3, o método AL-Quad começa com um valor maior de *Purity*, com $\rho_{Quad}(1) \approx 0.69$ contra $\rho_{Exp}(1) = 0.35$. Conforme τ cresce, AL-Exp supera AL-Quad e alcança todas as instâncias em $\tau \approx 1.6$, indicando ser o método mais robusto. A penalização quadrática alcança essa marca apenas com $\tau \approx 2.5$.

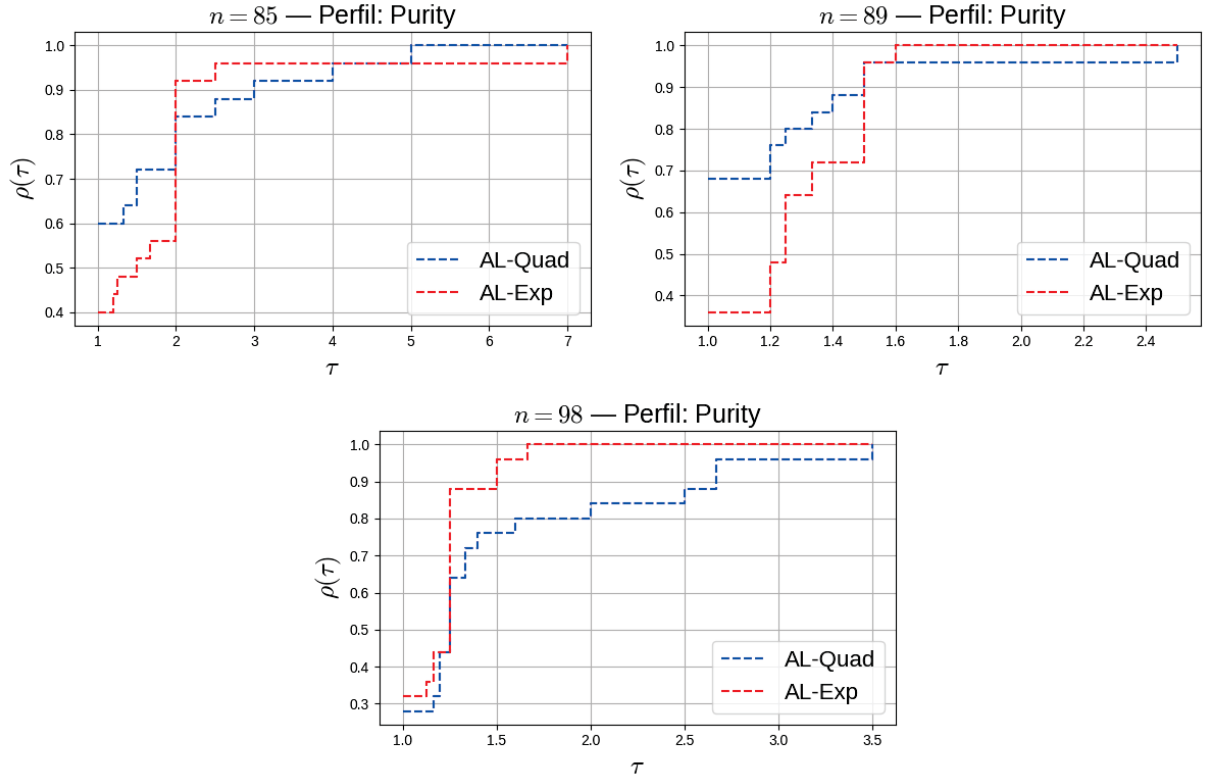


Figura 4.14: Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via métrica de *Purity* - Port 2, 3 e 4.

Para Port 4, desta vez AL-Exp começa na frente com $\rho_{Exp}(1) \approx 0.35$, ou seja, em 35% das instâncias esse método obteve a melhor métrica de *Purity*, por outro lado, AL-Quad consegue este feito em, aproximadamente, 25% delas. Com o crescimento do fator de desempenho, AL-Exp empata com AL-Quad em $t = 1.25$, mas o supera completamente na sequência, atingindo todas as instâncias com $\rho_{Exp}(1.7) = 1$ contra $\rho_{Quad}(3.5) = 1$, ou seja, em todas as instâncias estudadas, a métrica de *Purity* de AL-Exp nunca esteve abaixo de 59% ($1/1.7 \approx 0.59$) da melhor *Purity*.

Dos três problemas de portfólio, AL-Quad foi, em média, o método de penalização mais eficiente porque apresentou $\rho_{Quad}(1)$ maior do que $\rho_{Exp}(1)$ na maioria dos casos, lembrando que eficiência indica a capacidade de resolver a maior fração de instâncias em uma menor medida de comparação. Em termos de robustez, AL-Exp obteve uma cobertura total das instâncias com valores menores de τ em comparação com AL-Quad, em Port 3 e Port 4, mas esse último se manteve melhor em Port 2.

4.5.3 Perfis de desempenho: Γ – *Spread*

Os próximos perfis de desempenho utilizam a métrica Γ – *Spread* para avaliar a distribuição da fronteira de Pareto encontrada por esses métodos, ou seja, quão uniformemente distribuídos estão os pontos não dominados da fronteira de Pareto aproximada.

Lembrando que essa métrica não exige a conversão da medida para sua inversa, logo quanto menor o valor de $\Gamma - Spread$, melhor será a qualidade da cobertura obtida.

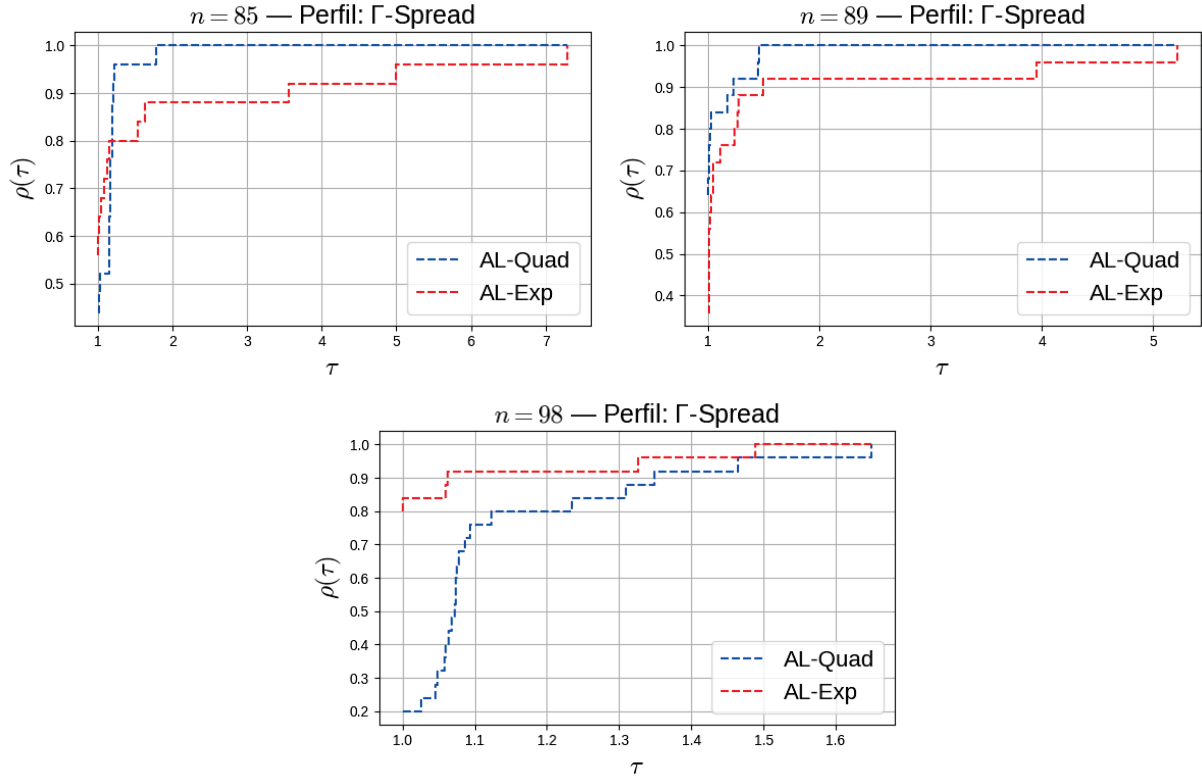


Figura 4.15: Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via a métrica $\Gamma - Spread$ - Port 2, 3 e 4.

Analisando Port 2, o método AL-Exp se mostrou o mais eficiente, começando com $\rho_{Exp}(1) = 0.6$ enquanto $\rho_{Quad}(1) \approx 0.52$. Com o crescimento do fator de comparação, AL-Quad ultrapassa AL-Exp e atinge todas as instâncias em, aproximadamente, $\rho_{Quad}(1.25) = 1$, com seu concorrente conseguindo esse feito apenas com $\rho_{Exp}(7.5) = 1$. Quanto ao problema Port 3, AL-Quad foi dominante, obtendo uma melhor eficiência e robustez em comparação com AL-Exp. Como prova dessa eficiência, temos $\rho_{Quad}(1) \approx 0.8 > \rho_{Exp}(1) \approx 0.55$, quanto a robustez, temos $\rho_{Quad}(1.5) = 1$, feito que só é alcançado por AL-Exp em $\tau \approx 5.5$.

Agora com o perfil de Port 4, o método AL-Exp apresentou a melhor eficiência, com $\rho_{Exp}(1) \approx 0.85$ contra $\rho_{Quad}(1) \approx 0.2$, ou seja, em 85% das instâncias analisadas, AL-Exp obteve o melhor $\Gamma - Spread$ em comparação com AL-Quad, que apenas teve a melhor medida em 20%. Conforme cresce o fator de comparação, AL-Exp se mantém na liderança sobre AL-Quad, obtendo $\rho_{Exp} = 1$ quando $\tau \approx 1.65$, enquanto que $\rho_{Quad} = 1$ com $\tau \approx 1.85$. Logo, AL-Quad também demonstrou ter a melhor robustez em comparação com AL-Exp para Port 4.

Deste modo, pela métrica $\Gamma - Spread$, o método AL-Exp apresentou a melhor eficiência em dois dos três problemas de portfólio (Port 2 e 4), enquanto AL-Quad ganhou

em Port 3. Com relação a robusteza, AL-Quad provou ser um método mais robusto para Port 2 e 3, já AL-Exp liderou apenas no problema Port 4.

Os dois métodos apresentaram um desempenho aproximado com relação a métrica $\Gamma - Spread$, ambos foram dominantes em pelo menos uma questão de portfólio, enquanto que no Port 2, AL-Exp foi o mais eficiente e AL-Quad o mais robusto. Podemos concluir que ambos os métodos ofereceram fronteiras de Pareto com uma distribuição uniformemente semelhante ao outro. Por fim, vamos analisar os perfis de desempenho usando a métrica de tempo de CPU.

4.5.4 Perfis de desempenho: Tempo de CPU

Observando o perfil de desempenho em (4.16) do problema Port 2, o método AL-Quad apresentou uma vantagem inicial sobre o método AL-Exp, com $\rho_{Quad}(1) = 0.9$ contra $\rho_{Exp}(1) = 0.2$, então em 90% das instâncias, a penalização quadrática obteve o melhor tempo, com a penalização exponencial conseguindo apenas 10% das instâncias. Assim, o AL-Quad demonstrou uma eficiência melhor nesse caso.

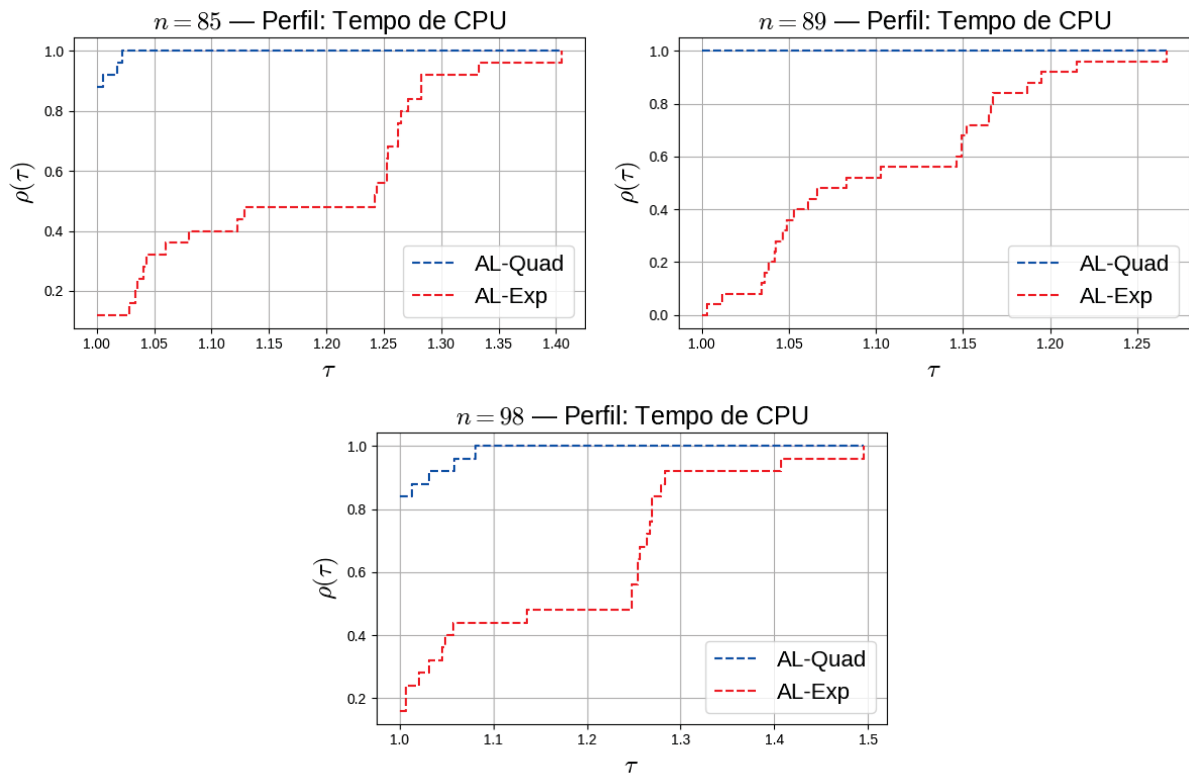


Figura 4.16: Perfis de desempenho entre as penalizações AL-Quad e AL-Exp via métrica de tempo de CPU - Port 2, 3 e 4.

Além disso, com o crescimento do fator de comparação, observamos AL-Quad cobrir todas as instâncias antes de AL-Exp, com $\rho_{Quad} = 1$ em, aproximadamente, $\tau \approx 1.025$, enquanto $\rho_{Exp} = 1$ com $\tau \approx 1.40$. Portanto, em todas as instâncias, AL-Quad não ficou mais do que 2.5% acima do melhor tempo de CPU. Lembrando que $\rho_s(\tau)$

indica a fração de problemas solucionados cujo tempo do algoritmo s para cada α satisfaz $T_{p,s} \leq \tau \min\{T_{p,s} \mid s \in S\}$. Logo, AL-Quad também foi o mais robusto em Port 2.

Nos problemas de portfólio Port 3 e Port 4, AL-Quad novamente dominou AL-Exp, sendo o método mais eficiente e robusto para essa métrica. Em Port 3, observamos $\rho_{Quad}(1) = 1$, enquanto que em Port 4, ele apresenta $\rho_{Quad}(1) \approx 0.85$ contra $\rho_{Exp}(1) = 0.15$. E como prova de robustez de AL-Quad, $\rho_{Quad} = 1$ em, aproximadamente, $\tau \approx 1.08$, enquanto $\rho_{Exp} = 1$ em $\tau \approx 1.5$.

Em resumo, AL-Quad apresentou uma clara dominância quanto ao tempo computacional, sendo o método com melhor eficiência e robustez para essa métrica em todos os problemas de portfólio. Na prática, se um investidor procura um método com melhor economia de tempo enquanto mantém a eficiência, AL-Quad é a opção certa.

Em relação às outras métricas de qualidade e distribuição de soluções, as diferenças entre os dois métodos são menores, não havendo uma dominância completa entre os dois. Observamos que AL-Quad demonstrou uma melhor eficiência na métrica *Purity* em mais casos, o que implica em mais soluções estarem na fronteira de Pareto aproximada.

Quanto a AL-Exp, este mostrou melhores valores de Hipervolume em pelo menos dois problemas, principalmente na questão de robustez. Quanto a análise do $\Gamma - Spread$, as diferenças entre os dois métodos são pequenas, apesar de haver casos específicos de eficiência e robustez, essas diferenças não são tão evidentes como nos métodos anteriores. Portanto, ambos conseguiram gerar fronteiras de Pareto bem distribuídas.

Importante observar que conforme as dimensões dos problemas de portfólio aumentam, podemos notar AL-Quad lentamente superando AL-Exp para Hipervolume, e um comportamento semelhante pode ser notado nos perfis de *Purity* e $\Gamma - Spread$ para AL-Exp. Podemos então deduzir que AL-Quad seja a melhor opção para Hipervolume e AL-Exp para *Purity* e $\Gamma - Spread$ quando trabalhados em problemas com dimensões maiores do que os nossos.

Deste modo, nenhum método de penalização foi totalmente superior ao outro em todos os critérios. Em problemas de portfólio com dimensões semelhantes as nossas, caso um investidor prioriza tempo de execução e prefere um método mais consistente quanto a eficiência na obtenção de pontos não dominados, então AL-Quad seria a melhor opção.

Agora, se o investidor tem preferência pela qualidade total das soluções, principalmente em relação ao Hipervolume, mas aceitando mais tempo de execução, então AL-Exp seria a melhor indicação.

No final, ambos os métodos de penalização são altamente competitivos entre si, com características próprias que podem atender a necessidade de investidores interessados em problemas de portfólio. Além disso, trouxeram uma boa exploração do algoritmo multiobjetivo para MOPCaC proposto.

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Neste capítulo, apresentamos as conclusões desta dissertação, bem como as sugestões para trabalhos que futuramente poderão ser desenvolvidos.

O objetivo de nosso trabalho foi realizar uma análise teórica dos problemas de otimização mono-objetivo e multiobjetivo com restrição de cardinalidade, reunindo as informações necessárias para desenvolver um algoritmo de otimização vetorial voltado para MOPCaC. Esse algoritmo une ideias recentes da literatura, como a penalização vetorial através do Lagrangeano aumentado, dualidade multiobjetivo e restrição de cardinalidade com variáveis contínuas.

No Capítulo 1 apresentamos conceitos de Análise em $\mathbb{R}^n$, Otimização Convexa e Dualidade em $\mathbb{R}$ para relembrarmos as definições e resultados presentes na Otimização Escalar e como são tratados na Otimização Multiobjetivo. Com o Capítulo 2, começamos apresentando a otimização multiobjetivo, com seus principais conceitos antes de apresentar a dualidade para MOP e abordamos o Método da Soma Ponderada como método resolvidor comparativo para nossa prática. Em seguida, apresentamos a Otimização Multiobjetivo, explicando minuciosamente seus principais conceitos com diferentes exemplos. Também apresentamos os problemas multiobjetivo lineares e não lineares, dando mais foco aos não lineares restritos. Por fim, fizemos um estudo aprofundado sobre o método do gradiente projetado multiobjetivo com busca linear não monótona. Nesta seção, demonstramos também alguns resultados do nosso modo.

No Capítulo 3, nossa principal contribuição foi desenvolver um algoritmo prático com Lagrangeano aumentado multiobjetivo para MOPCaC com variáveis contínuas, estendendo pesquisas anteriores de Lagrangeano aumentado mono-objetivo para CaC. Apresentamos também o método sob duas penalizações diferentes para a restrição de Haddamard, a penalização quadrática e a exponencial. Propomos também resultados sobre sua viabilidade e convergência sob hipóteses fortes, como eficiência fraca e eficiência própria para dualidade.

Por fim, no último capítulo, mostramos inicialmente aplicações experimentais do

método do gradiente projetado em funções convexas e não convexas, com o objetivo de avaliar sua praticidade junto do resolvidor SLSQP e com auxílio externo do método de Dykstra. No restante do capítulo, implementamos nosso algoritmo em diferentes problemas de portfólio baseados no modelo de média variância de Markowitz, considerando as duas abordagens de penalização, as quais denominamos de AL-Quad e AL-Exp.

O objetivo principal dessa etapa foi comparar a construção da fronteira de Pareto obtida pelo nosso algoritmo (com ambas as penalizações) com um método presente na literatura, o método da soma ponderada em formato MIQP. Além disso, analisamos qual das duas penalizações propostas se mostrou mais vantajosa na construção da fronteira de Pareto e no tempo de processamento, utilizando perfis de desempenho.

Os resultados mostraram que nosso método é competitivo em relação ao método da soma ponderada em formato MIQP, tanto na construção da fronteira quanto na obtenção de seus valores extremos, principalmente em problemas de baixa dimensão, apesar de exigir um tempo de processamento maior por conta da barreira entre o escalar e o multiobjetivo.

Quanto à comparação entre AL-Quad e AL-Exp, analisamos os perfis de desempenho sob diferentes métricas e concluímos que não houve uma penalização dominante em todos os sentidos. Cada penalização mostrou vantagens próprias dependendo da dimensão do problema e da métrica utilizada. Em síntese, AL-Quad destacou-se em questão de tempo de processamento e eficiência em certas métricas, enquanto AL-Exp prevaleceu em questão de robustez em outras.

O trabalho realizado nos trouxe ainda outros pontos que podem ser abordados em trabalhos futuros, descritos a seguir:

- Realizar uma análise da viabilidade e convergência do método sob hipóteses mais fracas como, por exemplo, a estacionariedade de Pareto com apenas um conjunto de nível compacto.
- Usar o Teorema 3.13 para mostrar que todo ponto de acumulação de uma sequência gerada por nosso algoritmo em um MOPCaC é um ponto fraco KKT.
- Fazer a análise teórica de segunda ordem (ou seja, condições que envolvem as derivadas segundas) para que um ponto viável seja eficiente.
- Realizar testes com o método do gradiente projetado multiobjetivo espectral (SPG-MOP), realizando comparações entre ele e o PGM-MOP.
- Utilizar outras métricas comparativas como o $\Delta - Spread$ e o *Additive Epsilon Indicator* usados em [20].
- Implementar heurísticas para obter uma fronteira de Pareto mais completa usando o Método da Soma Ponderada, como foi sugerido por [49].

- Substituir na construção da fronteira de Pareto da nossa abordagem o *multi-start* pelo método *Sparse Front Steepest Descent* (SFSD) e verificar possíveis diferenças.
- Estudar os meios de implementação do Algoritmo de Dykstra 2 em nosso Algoritmo para substituir o SLSQP na obtenção de direções de descida, usando-o em conjunto com o PGM-MOP, semelhante ao que foi realizado em [13] no caso escalar.

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Ribeiro e E. W. Karas. *Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. Cengage Learning, Brasil, 2013.
- [2] A. Izmailov e M. Solodov. *Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e Dualidade*. v. 1. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [3] A. L. Bruni. *Risco, Retorno e Equilíbrio: Uma análise do modelo de precificação de ativos financeiros na avaliação de ações negociadas na bovespa (1988–1996)*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, São Paulo, 1998.
- [4] A. R. F. O. Viana. *A Multi-Start Metaheuristic Approach for Multi-Objective Car Resequencing Problem in Just-In-Time Assembly Lines: A Real-World Case*. Trabalho de conclusão de curso, Curitiba, Brasil, 2024.
- [5] A. Tougma e K. Some. Inexact exponential penalty function with the augmented lagrangian for multiobjective optimization algorithms. *Journal of Applied Mathematics*, 2024(1):9615743, 2024.
- [6] C. H. Dias. *Um novo algoritmo genético para a otimização de carteiras de investimento com restrições de cardinalidade*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, Março 2008.
- [7] C. Kanzow, A. B. Raharja e A. Schwartz. An augmented lagrangian method for cardinality-constrained optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 189(3):793–813, 2021.
- [8] C. M. Costa, D. Kreber e M. Schmidt. An alternating method for cardinality-constrained optimization: A computational study for the best subset selection and sparse portfolio problems. *INFORMS Journal on Computing*, 34(6):2968–2988, 2022.
- [9] C. M. Fonseca et al. Genetic algorithms for multiobjective optimization: formulation discussion and generalization. In *Icga*, volume 93, pages 416–423. Citeseer, 1993.
- [10] D. Bertsimas e R. Shioda. Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. *Computational Optimization and Applications*, 43(1):1–22, 2009.

- [11] E. D. Dolan e J. J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91:201–213, 2002.
- [12] E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. Raydan. Inexact spectral projected gradient methods on convex sets. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 23(4):539–559, 2003.
- [13] E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. Raydan. Spectral projected gradient methods: review and perspectives. *Journal of Statistical Software*, 60:1–21, 2014.
- [14] E. H. Fukuda e L. M. G. Drummond. Inexact projected gradient method for vector optimization. *Computational Optimization and Applications*, 54:473–493, 2013.
- [15] E. H. Fukuda e L. M. G. Drummond. A survey on multiobjective descent methods. *Pesquisa Operacional*, 34:585–620, 2014.
- [16] E. H. M. Krulikovski, A. A. Ribeiro e M. Sachine. On the weak stationarity conditions for mathematical programs with cardinality constraints: a unified approach. *Applied Mathematics & Optimization*, pages 1–23, 2021.
- [17] E. J. Silva e A. L. Custódio. An inexact restoration direct multisearch filter approach to multiobjective constrained derivative-free optimization. *Optimization Methods and Software*, pages 1–27, 2024.
- [18] E. S. Levitin e B. T. Polyak. Constrained minimization methods. *USSR Computational mathematics and mathematical physics*, 6(5):1–50, 1966.
- [19] F. G. D. C. Ferreira. *Estudo Comparativo de Modelos e Técnicas para Otimização de Portfólios com Restrição de Cardinalidade*. Dissertação de mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2018.
- [20] G. A. Carrizo, N. S. Fazzio e M. L. Schuverdt. A nonmonotone projected gradient method for multiobjective problems on convex sets. *Journal of the Operations Research Society of China*, 12(2):410–427, 2024.
- [21] G. Cocchi e M. Lapucci. An augmented lagrangian algorithm for multi-objective optimization. *Computational Optimization and Applications*, 77(1):29–56, 2020.
- [22] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [23] H. Tanabe, E. H. Fukuda e N. Yamashita. Proximal gradient methods for multiobjective optimization and their applications. *Computational Optimization and Applications*, 72:339–361, 2019.
- [24] J. E. Beasley. OR-Library: Distributing test problems by electronic mail. *Journal of the Operational Research Society*, 41(11):1069–1072, 1990.

- [25] J. Fliege e B. F. Svaiter. Steepest descent methods for multicriteria optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 51:479–494, 2000.
- [26] J. J. Moré, B. S. Garbow e K. E. Hillstom. Testing unconstrained optimization software. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 7(1):17–41, 1981.
- [27] J. P. Boyle e R. L. Dykstra. A method for finding projections onto the intersection of convex sets in hilbert spaces. In *Advances in Order Restricted Statistical Inference: Proceedings of the Symposium on Order Restricted Statistical Inference held in Iowa City, Iowa, 1985*, pages 28–47. Springer, 1986.
- [28] K. Miettinen. *Nonlinear multiobjective optimization*, volume 12. Springer Science & Business Media, 1999.
- [29] K. Mita, E. H. Fukuda e N. Yamashita. Nonmonotone line searches for unconstrained multiobjective optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 75(1):63–90, 2019.
- [30] K. Schittkowski. The nonlinear programming method of wilson, han, and powell with an augmented lagrangian type line search function: Part 1: Convergence analysis. *Numerische Mathematik*, 38:83–114, 1982.
- [31] L. Grippo, F. Lampariello e S. Lucidi. A nonmonotone line search technique for newton’s method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23(4):707–716, 1986.
- [32] L. M. G. Drummond e A. N. Iusem. A projected gradient method for vector optimization problems. *Computational Optimization and Applications*, 28:5–29, 2004.
- [33] M. F. Martins. *Introdução à programação linear multiobjetivo*. Dissertação de mestrado, Universidade de Coimbra. Portugal, 2017.
- [34] M. L. N. Gonçalves, F. S. Lima e L. F. Prudente. Globally convergent newton-type methods for multiobjective optimization. *Computational Optimization and Applications*, 83(2):403–434, 2022.
- [35] M. Lapucci e P. Mansueto. Improved front steepest descent for multi-objective optimization. *Operations Research Letters*, 51(3):242–247, 2023.
- [36] M. Lapucci e P. Mansueto. Cardinality-constrained multi-objective optimization: Novel optimality conditions and algorithms. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 201(1):323–351, 2024.
- [37] M. R. Pinheiro e C. Grande. *Conjugação e dualidade em programação convexa*. Relatório técnico, 1984.
- [38] J. M. Martínez and S. A. Santos. Métodos computacionais de otimização. 20.^o Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, 1995.

- [39] N. Krejić, E. H. M. Krulikovski e M. Raydan. An augmented lagrangian approach for cardinality constrained minimization applied to variable selection problems. *Applied Numerical Mathematics*, 208:284–296, 2025.
- [40] N. Krejić, E. H. M. Krulikovski e M. Raydan. A low-cost alternating projection approach for a continuous formulation of convex and cardinality constrained optimization. *SN Operations Research Forum*, 4(4):73, 2023.
- [41] O. P. Burdakov, C. Kanzow e A. Schwartz. Mathematical programs with cardinality constraints: reformulation by complementarity-type conditions and a regularization method. *SIAM Journal on Optimization*, 26(1):397–425, 2016.
- [42] P. Tseng e D. P. Bertsekas. On the convergence of the exponential multiplier method for convex programming. *Mathematical programming*, 60(1):1–19, 1993.
- [43] P. Virtanen et al. Scipy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in python. *Nature methods*, 17(3):261–272, 2020.
- [44] R. Burachik, L. M. G. Drummond e A. N. Iusem e B. F. Svaiter. Full convergence of the steepest descent method with inexact line searches. *Optimization*, 32(2):137–146, 1995.
- [45] R. Garmanjani, E. H. M. Krulikovski e A. Ramos. On stationarity conditions and constraint qualifications for multiobjective optimization problems with cardinality constraints. *Applied Mathematics & Optimization*, 91(1):22, 2025.
- [46] R. I. Boç. *Duality and Optimality in Multiobjective Optimization*. Phd. thesis, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz, Germany, 2003.
- [47] R. L. Dykstra. An algorithm for restricted least squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 78(384):837–842, 1983.
- [48] P. R. Sampaio. *Teoria, métodos e aplicações de otimização multiobjetivo*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- [49] T. J. Chang et al. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13):1271–1302, 2000.
- [50] T. S. Motzkin e I. J. Schoenberg. The relaxation method for linear inequalities. *Canadian Journal of Mathematics*, 6:393–404, 1954.
- [51] V. Pareto. Cours d’économie politique, rouge. *Lausanne, Switzerland*, 1896.
- [52] Wolfe, P. A duality theorem for non-linear programming. *Quarterly of applied mathematics*, 19(3):239–244, 1961.
- [53] Y. Ma et al. Improved sqp and slsqp algorithms for feasible path-based process optimisation. *Computers & Chemical Engineering*, 188, 2024.