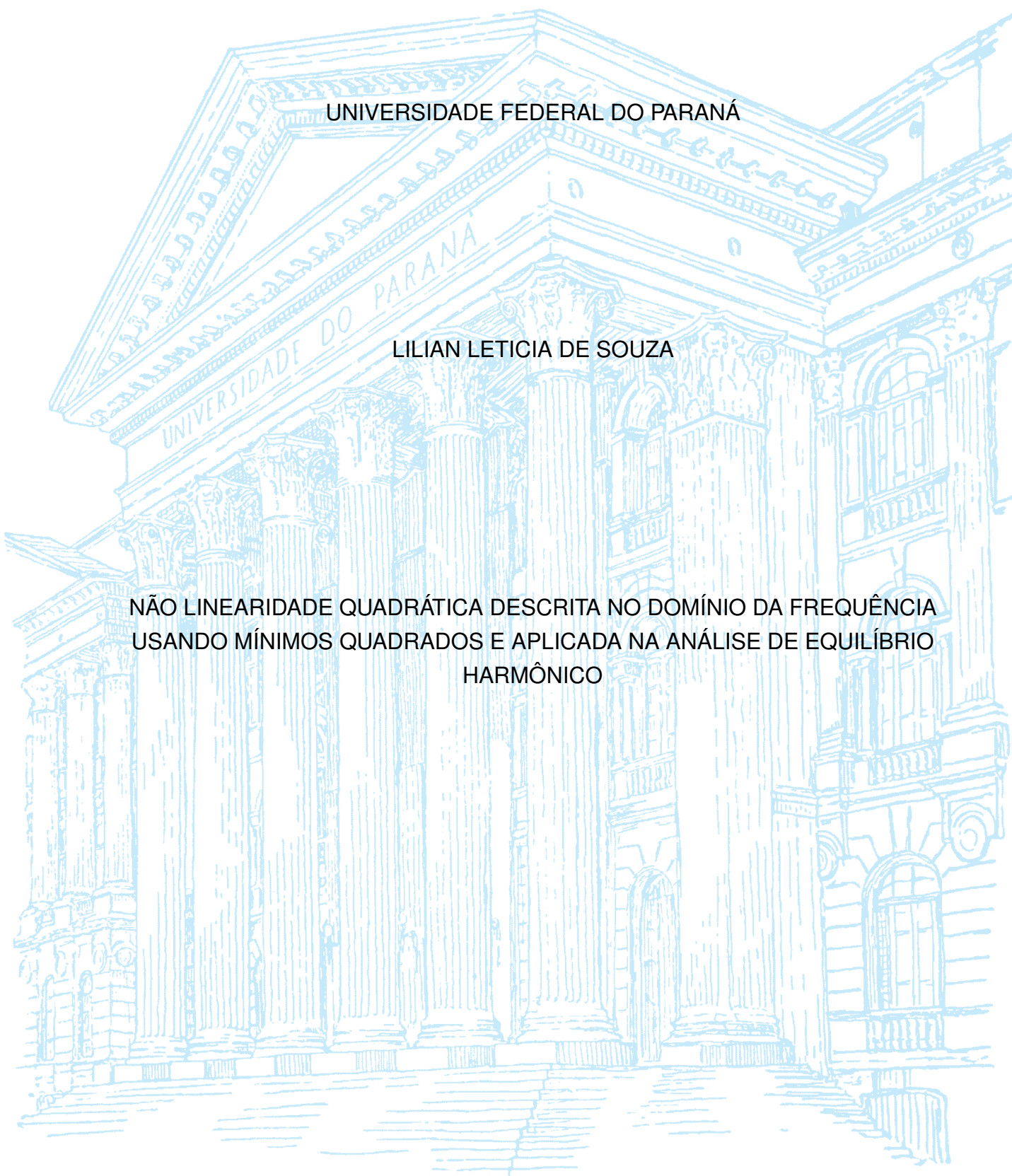




UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LILIAN LETICIA DE SOUZA

NÃO LINEARIDADE QUADRÁTICA DESCRITA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
USANDO MÍNIMOS QUADRADOS E APLICADA NA ANÁLISE DE EQUILÍBRIO
HARMÔNICO

CURITIBA

2025

LILIAN LETICIA DE SOUZA

NÃO LINEARIDADE QUADRÁTICA DESCRITA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
USANDO MÍNIMOS QUADRADOS E APLICADA NA ANÁLISE DE EQUILÍBRIO
HARMÔNICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Engenharia Elétrica, Setor de Tec-
nologia, Universidade Federal do Paraná como
requisito parcial à obtenção do Bacharel em En-
genharia Elétrica.

Orientador: Prof. PhD. Eduardo Gonçalves de
Lima

CURITIBA

2025

TERMO DE APROVAÇÃO

LILIAN LETICIA DE SOUZA

NÃO LINEARIDADE QUADRÁTICA DESCRITA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA USANDO MÍNIMOS QUADRADOS E APLICADA NA ANÁLISE DE EQUILÍBRIO HARMÔNICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Elétrica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do Bacharel em Engenharia Elétrica, pela seguinte banca examinadora:

Prof. PhD. Eduardo Gonçalves de Lima
Orientador

Prof. Dr. Bruno Knevez
Hammerschmittz

Departamento de Engenharia Elétrica,
UFPR

Prof. Claudio Bastos da Silva

Departamento de Engenharia Elétrica,
UFPR

Curitiba, 04 de Julho de 2025.

Dedico este trabalho à memória da minha avó Maria Trindade, cuja presença permanece viva em meu coração. Cada passo para chegar até aqui foi guiado pelo amor e cuidado que dela recebi. Também dedico à minha avó Jeni, por seu carinho constante e por ser um exemplo de força e sabedoria. A influência de ambas foi essencial para que esta conquista se tornasse possível.

*“A única coisa que vale a pena neste mundo é lutar pela liberdade e pela justiça.
A educação é o começo dessa luta.”*

— Darcy Ribeiro

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ser minha fonte de força e sabedoria ao longo desta jornada. Sua presença me sustentou nos momentos difíceis, me dando discernimento em todos os caminhos que me fizeram chegar até aqui.

Aos meus pais, agradeço por todo o amor, apoio e pelos valores que me ensinaram desde cedo. Foram vocês que me ensinaram, com paciência e afeto, a contar nos dedos — e também a contar com vocês em todas as fases da vida. Foram minha base em cada etapa desta jornada. Ao meu irmão, meu sincero reconhecimento por sua parceria, incentivo e presença silenciosa, sempre torcendo por mim.

À minha madrinha, que foi como uma segunda mãe na minha vida. Sempre presente, com conselhos sábios e colo acolhedor nos momentos em que mais precisei.

À minha avó Maria Trindade, que, mesmo não estando mais aqui, continua cuidando de mim todos os dias, com o mesmo amor e dedicação com que sempre esteve presente.

À minha avó Jeni, que sempre foi fonte de encorajamento para os meus estudos e acreditou em cada passo da minha trajetória.

Aos meus amigos e amigas, que estiveram ao meu lado nos momentos de riso e também nos de cansaço, meu mais sincero agradecimento. Foram vocês que tornaram as angústias e alegrias dessa fase mais leves e cheias de significado. Cada momento compartilhado foi fundamental para que eu pudesse chegar aqui.

Agradeço ao meu professor e orientador, Prof. Ph.D. Eduardo Gonçalves de Lima, por confiar em mim e, mesmo que de forma indireta, me mostrar que eu era capaz de chegar até aqui. Sua orientação foi essencial para a construção deste trabalho.

Ao Diretório Acadêmico de Engenharia Elétrica (DAEL) e ao Conselho dos Estudantes do Setor de Tecnologia (C7), que, de forma direta ou indireta, me ensinaram o valor da luta por uma educação pública, gratuita e de qualidade, marcaram minha trajetória acadêmica com os melhores momentos e me presentearam com amizades que levarei para a vida.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia para representar não linearidades quadráticas diretamente no domínio da frequência, utilizando o método dos mínimos quadrados e aplicada à análise de equilíbrio harmônico. A proposta consiste em gerar diferentes combinações de componentes harmônicas de entrada, reconstruir os sinais correspondentes no tempo, aplicar a não linearidade quadrática e, posteriormente, projetar os resultados novamente no domínio da frequência.

Utilizando-se do conjunto de dados obtidos a partir dessa análise, é possível, obter uma correspondência entre os coeficientes de entrada e saída que permite construir um modelo empírico do tipo caixa-preta. Esse modelo é capaz de capturar o efeito da não linearidade quadrática sem a necessidade de transformações entre domínios, o que simplifica o processamento e mantém a consistência com os princípios do equilíbrio harmônico.

O modelo obtido é então aplicado diretamente em um sistema harmônico, substituindo o tratamento tradicional da não linearidade. Os resultados são comparados com uma abordagem analítica da literatura e demonstram boa precisão e estabilidade, mesmo diante de pequenas variações nas condições de entrada. Isso indica que a técnica proposta é robusta e promissora para aplicações que envolvem análise de circuitos com não linearidades.

Palavras-chave: Equilíbrio Harmônico, Não Linearidade Quadrática, Mínimos Quadrados, Modelagem em Caixa-Preta, Domínio da Frequência.

ABSTRACT

This work presents a methodology to represent quadratic nonlinearities directly in the frequency domain, using the least squares method and applied to harmonic balance analysis. The proposed approach consists in generating different combinations of input harmonic components, reconstructing the corresponding time-domain signals, applying the quadratic nonlinearity, and subsequently projecting the results back onto the frequency domain.

Using the dataset obtained from this analysis, it becomes possible to establish a mapping between input and output coefficients that allows the construction of a black-box empirical model. This model is capable of capturing the effect of the quadratic nonlinearity without requiring transformations between domains, thus simplifying the computational process while maintaining consistency with the principles of harmonic balance.

The resulting model is then directly applied within a harmonic system, replacing the conventional time-domain nonlinear treatment. The results are compared with an analytical approach found in the literature and demonstrate good accuracy and stability, even under small variations in input conditions. These findings indicate that the proposed technique is robust and promising for applications involving the analysis of circuits with nonlinearities.

Keywords: Harmonic Balance, Quadratic Nonlinearity, Least Squares, Black-Box Modeling, Frequency Domain.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Comparação entre as formas de onda da corrente I_L obtidas pelos métodos no tempo e na frequência com $H = 2$	18
FIGURA 2 – Gráfico comparativo entre os sinais $x(t)$ e $y(t) = x(t)^2$ obtidos para o vetor de entrada $\mathbf{X}_0$	23
FIGURA 3 – Gráfico comparativo entre os sinais $x(t)$ e $y(t) = x(t)^2$ obtidos para o vetor de entrada $\mathbf{X}_1$	23
FIGURA 4 – Gráfico comparativo entre os sinais $x(t)$ e $y(t) = x(t)^2$ obtidos para o vetor de entrada $\mathbf{X}_2$	23
FIGURA 5 – Diagrama de blocos representando o fluxo de processamento da etapa: $\mathbf{X} \rightarrow x(t) \rightarrow x(t)^2 \rightarrow \mathbf{Y}$	24
FIGURA 6 – Comparação entre a saída modelada $\hat{y}(t)$ e a saída real $y(t) = x(t)^2$ para $\mathbf{X} = [0, 0.2, 0, 0, 0]$	27
FIGURA 7 – Esquema do circuito com resistência R , indutância L , e a não linearidade quadrática aplicada via vetor $\mathbf{P}$	28
FIGURA 8 – Sinais reconstruídos no tempo a partir dos coeficientes obtidos com HB não linear.	31

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Vetores de coeficientes harmônicos utilizados na etapa de entrada do modelo	21
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

AC Alternating Current (Corrente Alternada)

DC Direct Current (Corrente Contínua)

DFT Discrete Fourier Transform (Transformada Discreta de Fourier)

HB Harmonic Balance (Equilíbrio Harmônico)

MMQ Mínimos Quadrados

MSE Mean Squared Error (Erro Quadrático Médio)

NT Número de Amostras no Tempo

LISTA DE SÍMBOLOS

H	Número de harmônicas utilizadas
f	Frequência fundamental do sinal
ω_c	Frequência angular fundamental $\omega_c = 2\pi f$
$\mathbf{X}$	Vetor de coeficientes harmônicos de entrada
$x(t)$	Sinal no tempo reconstruído a partir de $\mathbf{X}$
$y(t)$	Sinal no tempo após aplicação da não linearidade quadrática
$\mathbf{Y}$	Vetor de coeficientes harmônicos da saída
$\mathbf{H}$	Matriz de base harmônica
$\mathbf{C}$	Matriz de coeficientes do modelo caixa-preta
$\mathbf{P}$	Vetor de produtos quadráticos e cruzados de $\mathbf{X}$
Ω	Matriz diferencial no domínio da frequência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	OBJETIVOS	15
1.1.1	Objetivo Geral	15
1.1.2	Objetivos Específicos	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1	SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS E DESAFIOS	16
2.2	MÉTODO DE EQUILÍBRIO HARMÔNICO	16
2.3	NÃO LINEARIDADE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	17
2.4	MODELAGEM POR MÍNIMOS QUADRADOS	18
3	PROPOSTA DO TRABALHO	19
3.1	GERAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA PARA O MODELO	19
3.2	APLICAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE QUADRÁTICA SOBRE OS SINAIS $x(t)$	19
3.3	CÁLCULO DOS COEFICIENTES HARMÔNICOS DA SAÍDA $y(t)$ USANDO MÍNIMOS QUADRADOS	19
3.4	CONSTRUÇÃO DA MATRIZ C DO MODELO CAIXA-PRETA	19
3.5	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO HB COM A NÃO LINEARIDADE VIA MATRIZ C	20
3.6	VALIDAÇÃO DO RESULTADO COM UM MODELO ANALÍTICO	20
4	ESTUDO DE CASO	21
4.1	DADOS DE ENTRADA	21
4.2	APLICAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE QUADRÁTICA E PROJEÇÃO HARMÔNICA	22
4.3	CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO EM 2 ABORDAGENS	24
4.3.1	Modelagem do Primeiro Caso	24
4.3.2	Modelagem do Segundo Caso	25
4.4	VALIDAÇÃO VIA PRODUTO MATRICIAL	26
4.5	APLICAÇÃO DO HARMONIC BALANCE NO CASO NÃO LINEAR	27
4.5.1	Representação da Não Linearidade via Vetor P	27
4.5.2	Formulação do Sistema de Equações Não Lineares	27
4.5.3	Solução Numérica	29
4.5.4	Reconstrução Temporal dos Sinais	29
4.6	RESULTADOS	30

4.6.1	Sinais Reconstruídos no Tempo	31
4.6.2	Análise dos Resultados	32
5	CONCLUSÃO	33
	Referências	34

1 INTRODUÇÃO

A simulação computacional é uma ferramenta indispensável no projeto e análise de circuitos elétricos, especialmente por permitir a antecipação de comportamentos e a validação de topologias antes da construção física. No entanto, circuitos com elementos não lineares — como transistores e indutores — impõem dificuldades adicionais à simulação, exigindo um grande número de equações diferenciais e consumo computacional elevado, especialmente em análises no domínio do tempo. Essa complexidade resulta em maior tempo de simulação e na necessidade de rotinas numéricas robustas, elevando o custo computacional do processo. Em contrapartida, técnicas que operam no domínio da frequência, como o método do equilíbrio harmônico (Harmonic Balance - HB), oferecem alternativas mais eficientes para análise de circuitos com não linearidades.

O método do equilíbrio harmônico se destaca por representar sinais periódicos como uma soma de componentes senoidais e cossenoidais, convertendo equações diferenciais em um sistema de equações algébricas no domínio da frequência. No HB tradicional, as dinâmicas do circuito são tratadas na frequência, enquanto as não linearidades são calculadas no domínio do tempo, a partir de transformações inversas. Esse processo, embora eficaz, ainda carrega as limitações inerentes à manipulação de sinais no tempo. O trabalho (Cordeiro, 2021) introduziu uma abordagem inovadora que desloca o tratamento de uma não linearidade quadrática também para o domínio da frequência, por meio de manipulações trigonométricas aplicadas a funções polinomiais. Essa técnica resultou em um erro quadrático médio (MSE) em comparação ao cálculo exato que diminuía conforme a quantidade de harmônicas aumentava, demonstrando maior fidelidade com o modelo exato à medida que se aumenta o número de harmônicas consideradas.

Neste contexto, o presente trabalho propõe uma extensão dessa linha de pesquisa ao utilizar o método dos mínimos quadrados (MMQ) para representar não linearidades quadráticas diretamente no domínio da frequência, sem a necessidade de manipulações trigonométricas aplicadas a funções polinomiais de segunda ordem. Com base em dados simulados de um circuito teste, busca-se ajustar um modelo em forma de caixa-preta, cujos coeficientes harmônicos descrevem a resposta não linear do sistema. Essa abordagem visa combinar a robustez do HB com a flexibilidade do MMQ, oferecendo uma metodologia alternativa para análise de circuitos com não linearidades, com potencial para reduzir os erros de aproximação e ampliar a aplicabilidade de ferramentas de simulação harmônica em contextos reais, onde o modelo físico completo não é facilmente obtido ou não é viável. .

1.1 OBJETIVOS

Definiram-se os seguintes objetivos para o presente estudo:

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é representar não linearidades quadráticas no domínio da frequência, utilizando o método de equilíbrio harmônico (Harmonic Balance - HB), como proposto por (Cordeiro, 2021), e integrar essa abordagem ao método dos mínimos quadrados para identificar coeficientes harmônicos em um modelo de caixa-preta.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Estudar e implementar o método de equilíbrio harmônico (HB), compreendendo sua formulação no domínio da frequência e adaptando-o para representar não linearidades quadráticas, com base na abordagem proposta por (Cordeiro, 2021).
- Gerar sinais periódicos e aplicar mínimos quadrados para estimar os coeficientes harmônicos da saída quadrática, a partir de sinais compostos por combinações senoidais no tempo.
- Construir uma matriz que combina os coeficientes de entrada do sinal, incluindo seus quadrados e multiplicações entre eles, para representar como diferentes partes do sinal se influenciam entre si. Essa matriz serve para descrever o comportamento não linear do sistema de forma matemática, mesmo sem conhecer os detalhes do circuito.
- Desenvolver o modelo caixa-preta em frequência, ajustando uma matriz de coeficientes que relacione entradas e saídas, e integrando esse modelo ao método HB.
- Implementar e resolver o sistema de equações não lineares, utilizando métodos numéricos para encontrar a solução harmônica do circuito com base no modelo caixa-preta.
- Validar o modelo proposto, comparando seus resultados com métodos tradicionais e com a abordagem analítica anterior, avaliando a precisão.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica a seguir tem como objetivo apresentar os principais conceitos, métodos e estudos relacionados à análise de circuitos não lineares periódicos, com ênfase no método de equilíbrio harmônico (HB) e nas abordagens alternativas para representação de não linearidades diretamente no domínio da frequência. São discutidos os fundamentos teóricos da simulação de circuitos, os desafios associados ao tratamento de não linearidades e as contribuições recentes que embasam o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS E DESAFIOS

A simulação computacional de circuitos é uma etapa essencial no desenvolvimento de sistemas eletrônicos. Ela permite prever o comportamento de um circuito antes da montagem física, economizando recursos e acelerando o processo de projetos. A depender da complexidade do circuito e do modelo utilizado, a simulação pode exigir alto custo computacional, especialmente quando envolve componentes não lineares, que exigem abordagens matemáticas mais sofisticadas. Segundo Mehl (1990), simulações bem elaboradas, baseadas em modelos matemáticos coerentes, aumentam significativamente a confiabilidade dos resultados práticos obtidos em laboratório.

Existem diversas técnicas de simulação, como a análise em regime transitório, a análise em regime permanente, a análise fasorial e métodos baseados em transformadas. Em circuitos sujeitos a sinais periódicos e contendo não linearidades, a análise no tempo pode ser lenta e apresentar limitações quanto à convergência. Nesses casos, o método de equilíbrio harmônico (Harmonic Balance – HB) tem sido amplamente adotado devido à sua capacidade de representar sinais periódicos por séries de Fourier e reduzir sistemas diferenciais a sistemas algébricos (Steer, 2013).

2.2 MÉTODO DE EQUILÍBRIO HARMÔNICO

O HB é um método numérico que parte do princípio de que qualquer variável periódica, como uma tensão ou corrente em um circuito, pode ser descrita como a soma de componentes senoidais com diferentes frequências, as harmônicas. O número de harmônicas H é um parâmetro pré-definido que limita a complexidade espectral do sistema. As variáveis são representadas como:

$$x(t) = X_0 + \sum_{h=1}^H X_{hs} \cdot \sin(h\omega_c t) + X_{hc} \cdot \cos(h\omega_c t) \quad (2.1)$$

Essa transformação converte as equações diferenciais que descrevem o circuito no tempo em um sistema de equações algébricas no domínio da frequência, onde os coeficientes X_0 , X_{hs} e X_{hc} são constantes a serem encontradas. Com isso, é possível realizar simulações mais rápidas e com menor instabilidade numérica para sinais periódicos (Maas, 2003).

No HB tradicional, no entanto, a não linearidade presente no circuito ainda é avaliada no domínio do tempo. Isso significa que o sinal harmônico reconstruído é aplicado a um modelo da componente não linear no tempo, e sua resposta é então reconvertida para o domínio da frequência, normalmente por transformada discreta de Fourier (DFT). Esse processo de ida e volta requer um esforço e está sujeito a perdas por aliasing, além de exigir um alto volume de amostragem (Oliveira & Lima, 2016).

2.3 NÃO LINEARIDADE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Para superar essas limitações citadas anteriormente, o trabalho de Letícia Cordeiro (2021) propôs uma abordagem alternativa: representar a não linearidade diretamente no domínio da frequência. Em seu estudo, foi adotada uma não linearidade polinomial de segunda ordem, cujo quadrado do sinal harmônico $x(t)^2$ foi analisado utilizando manipulações trigonométricas. Com isso, a resposta

$$y(t) = x(t)^2 \quad (2.2)$$

foi expressa como uma nova combinação de senos e cossenos, mantendo a estrutura harmônica e dispensando o uso de DFT. A análise mostrou que, para duas harmônicas, o erro quadrático médio (MSE) foi 50%, já com quatro harmônicas, o MSE foi 11% em relação à resposta exata.

A Figura 1 ilustra a corrente $I_L(t)$ obtida para um circuito teste analisado com $H = 2$, comparando os resultados obtidos com o tratamento da não linearidade no domínio do tempo (linha azul) e no domínio da frequência (linha preta). É possível observar que as formas de onda diferem entre os métodos, evidenciando o impacto do domínio de tratamento da não linearidade na resposta simulada.

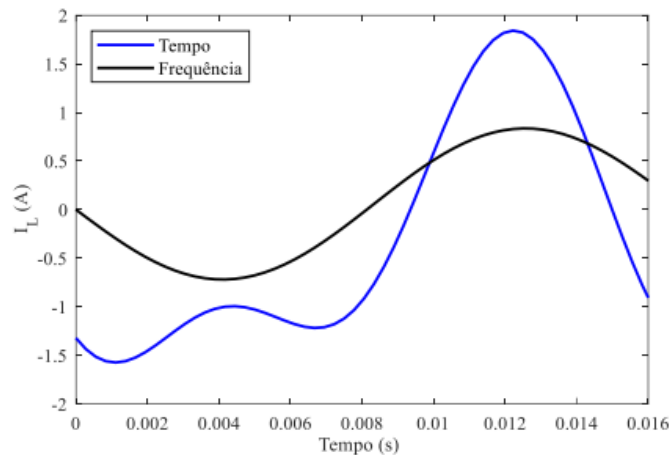


FIGURA 1 – Comparação entre as formas de onda da corrente I_L obtidas pelos métodos no tempo e na frequência com $H = 2$.

Essa abordagem se mostrou vantajosa ao evitar transformações entre domínios e permitiu expressar a saída como uma função quadrática dos coeficientes harmônicos de entrada. O modelo proposto também apresentou comportamento previsível e flexível para ordens polinomiais superiores.

2.4 MODELAGEM POR MÍNIMOS QUADRADOS

A modelagem empírica de sistemas não lineares no domínio da frequência pode ser conduzida por meio da técnica de mínimos quadrados, permitindo estabelecer relações entre sinais de entrada e saída sem a necessidade de um modelo físico explícito. Essa abordagem consiste em gerar vetores de coeficientes harmônicos de entrada, os quais representam diferentes composições espectrais, e aplicar sobre eles uma não linearidade no domínio do tempo. O sinal resultante é então projetado novamente sobre uma base harmônica, de modo a extrair os coeficientes correspondentes à saída no domínio da frequência. Para sistematizar essa relação, constrói-se uma matriz de regressão composta por combinações quadráticas e cruzadas entre os termos do vetor de entrada, permitindo aproximar a saída como uma função linear dessas combinações. A matriz de coeficientes obtida nesse processo pode ser interpretada como um modelo tipo caixa-preta, cuja aplicação é vantajosa em cenários onde a não linearidade é complexa ou não totalmente conhecida, mantendo-se compatível com os métodos clássicos de Harmonic Balance (FAIFER et al., 2018; POMILIO, 2017).

3 PROPOSTA DO TRABALHO

Este capítulo apresenta a proposta de desenvolvimento de uma abordagem alternativa para a análise de circuitos com não linearidades quadráticas, utilizando o método de equilíbrio harmônico (HB) e técnicas de regressão por mínimos quadrados. A proposta se desdobra em seis etapas principais, descritas a seguir, que orientaram o desenvolvimento do trabalho.

3.1 GERAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA PARA O MODELO

A primeira etapa consiste na geração de um conjunto de vetores $\mathbf{X} \in R^{1 \times (2H+1)}$, representando coeficientes harmônicos correspondentes a sinais periódicos com até H harmônicas. Esses vetores seriam definidos com valores arbitrários, compondo diferentes combinações entre valor médio, senos e cossenos de ordens 1 e 2. O objetivo seria construir entradas variadas o suficiente para permitir o treinamento de um modelo empírico robusto no domínio da frequência.

3.2 APLICAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE QUADRÁTICA SOBRE OS SINAIS $x(t)$

Em seguida, cada vetor $\mathbf{X}$ seria utilizado para gerar um sinal no tempo $x(t)$, reconstruído Como combinação de senos e cossenos, com uma quantidade pré-determinada de amostras N_t , para uma frequência fixa definida a priori. Sobre esses sinais, será aplicada a não linearidade quadrática, obtendo $y(t) = x(t)^2$. O resultado seria um novo conjunto de sinais contendo harmônicos adicionais, oriundos da interação não linear entre os componentes de $x(t)$.

3.3 CÁLCULO DOS COEFICIENTES HARMÔNICOS DA SAÍDA $y(t)$ USANDO MÍNIMOS QUADRADOS

A terceira etapa consiste em projetar os sinais $y(t)$ obtidos sobre uma base harmônica $\mathbf{H} \in R^{N_t \times 2H+1}$, composta por $\{1, \sin(\omega_c t), \cos(\omega_c t), \sin(H\omega_c t), \cos(H\omega_c t)\}$. Será utilizado o método dos mínimos quadrados para ajustar, para cada sinal, um vetor de coeficientes $\mathbf{Y} \in R^{1 \times 2H+1}$, que represente a resposta quadrática no domínio da frequência.

3.4 CONSTRUÇÃO DA MATRIZ C DO MODELO CAIXA-PRETA

Na etapa seguinte, será construída uma matriz regressão $\mathbf{P} \in R^{C_{2H+1,2} \times C_{2H+1,2}}$, composta por todos os produtos quadráticos e cruzados possíveis entre os elementos

de $\mathbf{X}$, como $x_0^2, x_0x_{1s}, x_{1s}^2, \dots, x_{Hs}x_{Hc}, x_{Hc}^2$. Com isso, se aplica novamente o método dos mínimos quadrados para encontrar uma matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(2H+1) \times C_{2H+1,2}}$, capaz de mapear $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Y}$ de forma empírica, criando um modelo caixa-preta que representaria o efeito da não linearidade diretamente no domínio da frequência.

3.5 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO HB COM A NÃO LINEARIDADE VIA MATRIZ $\mathbf{C}$

Uma vez obtida a matriz $\mathbf{C}$, a proposta seria integrá-la a um sistema HB, substituindo o tratamento tradicional da não linearidade no tempo por uma aplicação direta da matriz $\mathbf{C}$ sobre um vetor $\mathbf{X}$ estimado. Dessa forma, o sistema HB passaria a incorporar a não linearidade diretamente por meio de produtos quadráticos $\mathbf{P}$, mantendo toda a análise no domínio da frequência. A resolução do sistema seria feita numericamente, utilizando métodos como o `fsolve`.

3.6 VALIDAÇÃO DO RESULTADO COM UM MODELO ANALÍTICO

Por fim, os resultados obtidos seriam comparados com os resultados analíticos obtidos na abordagem de Letícia Cordeiro (2021), que utiliza manipulações trigonométricas para calcular a saída $y(t) = x(t)^2$ diretamente no domínio da frequência. A comparação incluiria métricas como o erro quadrático médio (MSE), permitindo avaliar a precisão do modelo caixa-preta em relação ao modelo analítico e ao HB tradicional.

4 ESTUDO DE CASO

O presente estudo de caso foi desenvolvido com o objetivo de validar a proposta de modelo caixa-preta no domínio da frequência detalhada no Capítulo 3, baseado no método de HB, e representar uma não linearidade quadrática de forma precisa e eficiente. As etapas descritas a seguir foram organizadas de modo sequencial, conduzindo desde a geração dos dados até a validação do modelo por meio de comparações com uma abordagem analítica de referência.

4.1 DADOS DE ENTRADA

A primeira etapa consistiu na criação de 15 vetores $\mathbf{X} \in R^{1 \times 5}$, que representam coeficientes harmônicos para sinais periódicos contendo até duas harmônicas. Cada vetor inclui os seguintes termos: componente constante (DC), seno e cosseno da frequência fundamental (ω_c), e seno e cosseno da segunda harmônica ($2\omega_c$).

Os valores atribuídos aos coeficientes harmônicos foram definidos de forma a excitar individualmente cada componente do vetor $\mathbf{X} \in R^{1 \times 5}$, permitindo a análise isolada de suas contribuições na resposta do sistema. Foram utilizados valores de amplitude $\pm 0,1$, totalizando 15 vetores distintos. Os cinco primeiros vetores contêm combinações positivas de 0,1, seguidos por cinco vetores com valores negativos de $-0,1$, e os cinco últimos vetores apresentam uma distribuição mista entre as componentes. Essas configurações resultam em diferentes padrões harmônicos de entrada, conforme ilustrado na Tabela 1.

TABELA 1 – Vetores de coeficientes harmônicos utilizados na etapa de entrada do modelo

Vetor	Componentes $\mathbf{X} \in R^{1 \times 5}$
Vetor 0	[0.1, 0, 0, 0, 0]
Vetor 1	[0, 0.1, 0, 0, 0]
Vetor 2	[0, 0, 0.1, 0, 0]
Vetor 3	[0, 0, 0, 0.1, 0]
Vetor 4	[0, 0, 0, 0, 0.1]
Vetor 5	[-0.1, 0, 0, 0, 0]
Vetor 6	[0, -0.1, 0, 0, 0]
Vetor 7	[0, 0, -0.1, 0, 0]
Vetor 8	[0, 0, 0, -0.1, 0]
Vetor 9	[0, 0, 0, 0, -0.1]
Vetor 10	[0.2, 0, 0, 0, 0]
Vetor 11	[0, 0.2, 0, 0, 0]
Vetor 12	[0, 0, 0.2, 0, 0]
Vetor 13	[0, 0, 0, 0.2, 0]
Vetor 14	[0, 0, 0, 0, 0.2]

4.2 APLICAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE QUADRÁTICA E PROJEÇÃO HARMÔNICA

A segunda etapa da metodologia consistiu na aplicação da não linearidade quadrática sobre os sinais reconstruídos a partir dos vetores harmônicos $\mathbf{X} \in R^{1 \times 5}$, descritos anteriormente. Para isso, foi construída uma matriz de base harmônica $\mathbf{H} \in R^{50 \times 5}$, onde cada linha representa um instante de tempo ao longo de um ciclo de 100 Hz, discretizado em $N_t = 50$ amostras uniformemente distribuídas, com um intervalo de amostragem de Δt segundos.. As colunas dessa matriz correspondem às funções: constante (DC), $\sin(\omega_c t)$, $\cos(\omega_c t)$, $\sin(2\omega_c t)$ e $\cos(2\omega_c t)$, com $\omega_c = 2\pi f$, sendo $f = 100$ Hz.

Cada vetor $\mathbf{X}$ foi então multiplicado pela matriz $\mathbf{H}$, gerando um sinal no tempo $x(t)$, representado por um vetor $\mathbf{B} \in R^{50 \times 1}$. Em seguida, a não linearidade quadrática foi aplicada ao elevar ponto a ponto os valores de $x(t)$, produzindo o sinal de saída $y(t) = x(t)^2$, contendo componentes harmônicas adicionais provenientes da interação dos termos senoidais. Nas Figuras 2 a 4, apresentam-se os gráficos correspondentes à aplicação da não linearidade quadrática $y(t) = x(t)^2$ sobre os sinais reconstruídos a partir dos vetores harmônicos $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$. Para cada caso, é exibido o sinal não linear resultante $y_i(t)$, bem como sua aproximação no domínio harmônico obtida via projeção $\hat{y}_i(t) = \mathbf{H}\beta_i$, com $i = 0, 1, 2$. Observa-se que a aproximação se mostra relativamente precisa, com erro quadrático médio inferior a 3×10^{-4} em todos os casos.

Observa-se nas Figuras de 2 a 4 que o sinal exato possui componentes de terceira e quarta harmônicas (visíveis pela quantidade de picos nas curvas em azul) que não estão sendo modelados pelas projeções indicadas em cor laranja, que são limitadas a componentes de segunda harmônica. Uma possibilidade para reduzir os erros entre as projeções e os sinais exatos seria aumentar o $\mathbf{H}$, uma vez que as amplitudes das componentes harmônicas reduzem a medida em que a sua ordem aumenta, e as projeções são incapazes de reproduzir componentes a partir de $\mathbf{H} + 1$. A proposta apresentada neste trabalho é válida para qualquer $\mathbf{H}$ e nesse estudo de caso optou-se por manter $\mathbf{H} = 2$ pela simplicidade na sua descrição e também porque sua precisão foi considerada adequada para fins de prova de conceito.

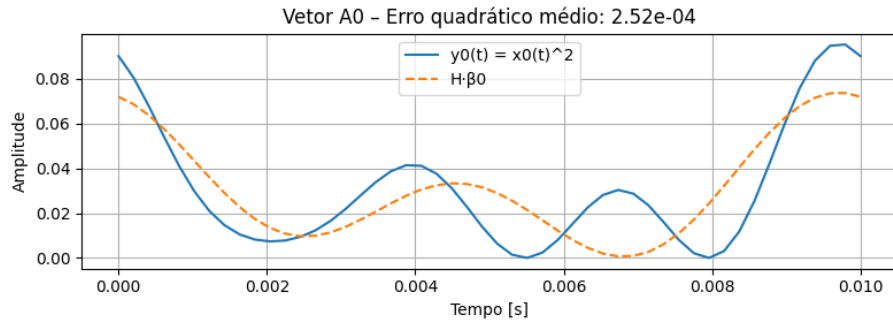


FIGURA 2 – Gráfico comparativo entre os sinais $x(t)$ e $y(t) = x(t)^2$ obtidos para o vetor de entrada $\mathbf{X}_0$.

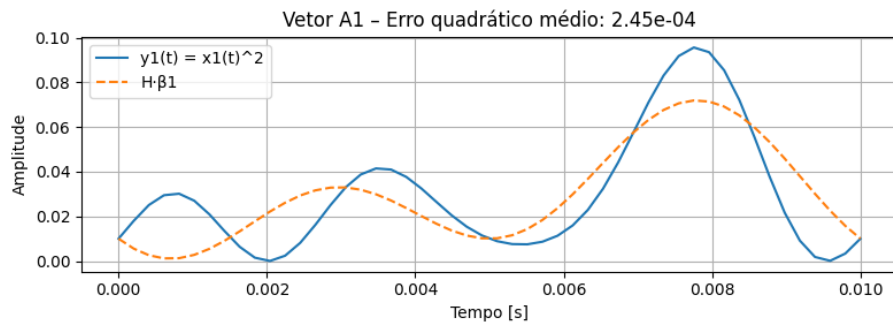


FIGURA 3 – Gráfico comparativo entre os sinais $x(t)$ e $y(t) = x(t)^2$ obtidos para o vetor de entrada $\mathbf{X}_1$.

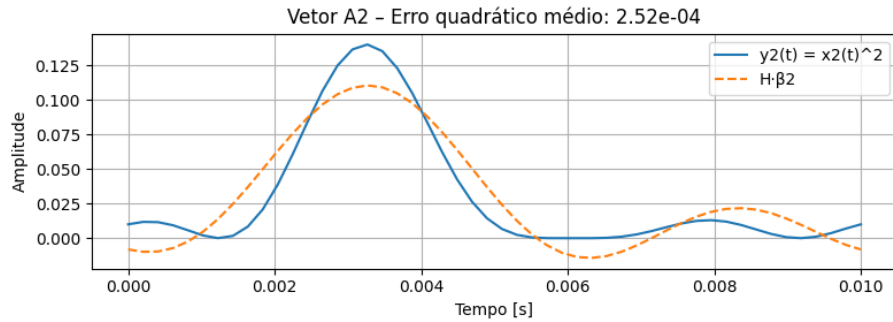


FIGURA 4 – Gráfico comparativo entre os sinais $x(t)$ e $y(t) = x(t)^2$ obtidos para o vetor de entrada $\mathbf{X}_2$.

O sinal $y(t)$, agora incrementado por essas novas componentes, foi então projetado novamente sobre a base harmônica $\mathbf{H}$, utilizando o método dos mínimos quadrados. Isso permitiu estimar, para cada vetor $\mathbf{X}$, um novo vetor de saída $\mathbf{Y} \in R^{1 \times 5}$, que representa a resposta do sistema não linear no domínio da frequência. Na Figura 5, observa-se a estrutura lógica da metodologia adotada, na qual os vetores de entrada $\mathbf{X} \in R^{1 \times 5}$ são convertidos em sinais temporais $x(t)$, passam pela aplicação da não linearidade quadrática e, posteriormente, são projetados novamente sobre a base harmônica para obtenção dos coeficientes de saída $\mathbf{Y} \in R^{1 \times 5}$.

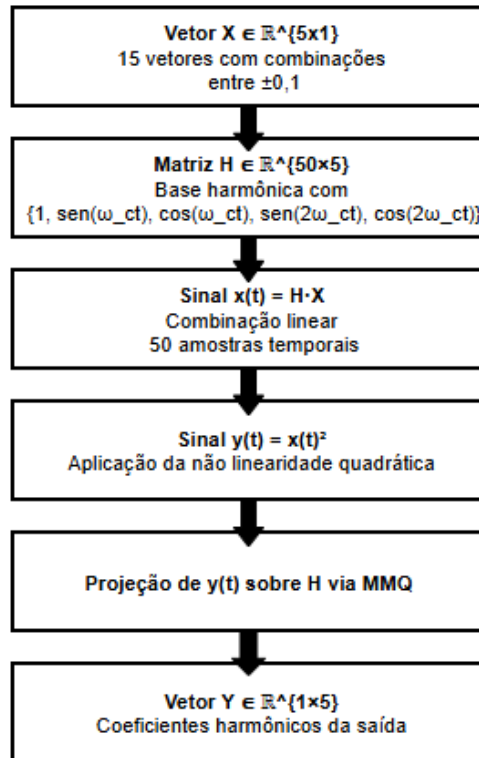


FIGURA 5 – Diagrama de blocos representando o fluxo de processamento da etapa: $X \rightarrow x(t) \rightarrow x(t)^2 \rightarrow Y$.

Esse procedimento foi repetido para os 15 vetores distintos de entrada, de X_0 até X_{14} , gerando uma matriz final $Y \in \mathbb{R}^{15 \times 5}$, contendo os coeficientes harmônicos resultantes da saída quadrática para cada entrada testada. Os valores obtidos refletem as alterações no espectro introduzidas pela não linearidade e servem como base para a construção do modelo tipo caixa-preta.

4.3 CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO EM 2 ABORDAGENS

Nesta etapa da metodologia, o objetivo foi criar e testar dois modelos matemáticos distintos capazes de representar, no domínio da frequência, a resposta de um sistema não linear do tipo quadrático aplicado a sinais harmônicos com até a segunda harmônica ($H = 2$). A base harmônica utilizada é composta pelos termos:

$$\{1, \sin(\omega_c t), \cos(\omega_c t), \sin(2\omega_c t), \cos(2\omega_c t)\}.$$

4.3.1 Modelagem do Primeiro Caso

Inicialmente, foi gerada uma representação reduzida da não linearidade quadrática, utilizando um subconjunto de termos quadráticos e mistos construídos a partir dos coeficientes harmônicos:

$$X = [x_0, x_{1s}, x_{1c}, x_{2s}, x_{2c}].$$

Por exemplo, o modelo resultante para a componente CC de saída quadrática considera os seguintes produtos:

$$\{x_0^2, x_{1s}^2, x_{1c}^2, x_{1s} \cdot x_{1c}, x_{2s}^2, x_{2c}^2, x_{2s} \cdot x_{2c}\}.$$

Adicionalmente, foram estimados vetores separados de coeficientes para cada componente harmônica (senoidal e cossenoidal), por meio da técnica de mínimos quadrados (MMQ) aplicados à projeção da saída não linear sobre a base harmônica. Assim, obtiveram-se coeficientes para:

- X_{SEN1} : estimativas de termos como $x_0 \cdot x_{1s}$, $x_{1s} \cdot x_{2s}$, $x_{1s} \cdot x_{2c}$, entre outros;
- X_{COS1} : estimativas para os produtos entre x_0 e x_{1c} , bem como $x_{1c} \cdot x_{2c}$, entre outros;
- X_{SEN2} e X_{COS2} : projeções dos termos da saída quadrática nos harmônicos de segunda ordem.

Essa primeira abordagem gerou uma matriz parcial, com foco nos termos de maior influência esperada. A matriz final do modelo, denotada por C , possui dimensão 5×15 , onde cada linha representa um conjunto harmônico estimado (DC, $\sin(\omega_c t)$, $\cos(\omega_c t)$, $\sin(2\omega_c t)$, $\cos(2\omega_c t)$) e cada coluna representa um termo não linear composto pelos coeficientes harmônicos.

4.3.2 Modelagem do Segundo Caso

Na segunda abordagem, foi adotado um modelo matemático mais completo, envolvendo todos os 15 produtos quadráticos e cruzados possíveis entre os elementos do vetor X . Os termos considerados foram:

$$\{x_0^2, x_0 x_{1s}, x_0 x_{1c}, x_0 x_{2c}, x_0 x_{2s}, x_{1s}^2, x_{1s} x_{1c}, x_{1s} x_{2s}, x_{1s} x_{2c}, x_{1c}^2, x_{1c} x_{2s}, x_{1c} x_{2c}, x_{2s}^2, x_{2s} x_{2c}, x_{2c}^2\}.$$

Para este modelo, foram novamente utilizados os mínimos quadrados (MMQ) para estimar os coeficientes associados a cada componente harmônica. Assim, foi construída uma matriz $C \in R^{5 \times 15}$, onde cada linha contém os coeficientes estimados para uma componente específica da base harmônica: termo DC, seno de $\omega_c t$, cosseno de $\omega_c t$, seno de $2\omega_c t$ e cosseno de $2\omega_c t$.

Este modelo permite aplicar diretamente a matriz C sobre um vetor contendo os 15 produtos quadráticos extraídos de qualquer vetor X , resultando em uma predição harmônica completa da saída $y(t)$ no domínio da frequência.

4.4 VALIDAÇÃO VIA PRODUTO MATRICIAL

Para validar a coerência do modelo matemático construído, foi selecionado de modo arbitrário o seguinte vetor de entrada:

$$X = [0.1, 0.1, 0.1, -0.1, 0.1],$$

representando uma das possíveis entradas entre os 15 vetores utilizados anteriormente.

Etapas do Teste:

a) Geração de produtos não lineares:

Foi construído um vetor $A_0 \in R^{15 \times 1}$, contendo os 15 produtos quadráticos e cruzados extraídos do vetor X .

b) Aplicação do modelo:

O vetor A_0 foi multiplicado pela matriz $C \in R^{5 \times 15}$, resultando em um vetor $B \in R^{5 \times 1}$, o qual contém os coeficientes harmônicos da saída não linear estimada.

c) Reconstrução temporal:

Multiplicou-se a matriz harmônica $H \in R^{50 \times 5}$ pelo vetor B , produzindo um vetor $\hat{y}(t) \in R^{50 \times 1}$, que representa a resposta no tempo do modelo.

d) Comparação com a saída real:

Simultaneamente, a resposta real no tempo foi obtida pela multiplicação do vetor X pela matriz H , seguida da aplicação da não linearidade $y(t) = x(t)^2$, gerando $y_{\text{real}}(t)$. Ambas as respostas foram comparadas graficamente e são mostradas na Figura 6, revelando uma boa aproximação entre modelo e realidade, com erro quadrático médio inferior a 3×10^{-4} .

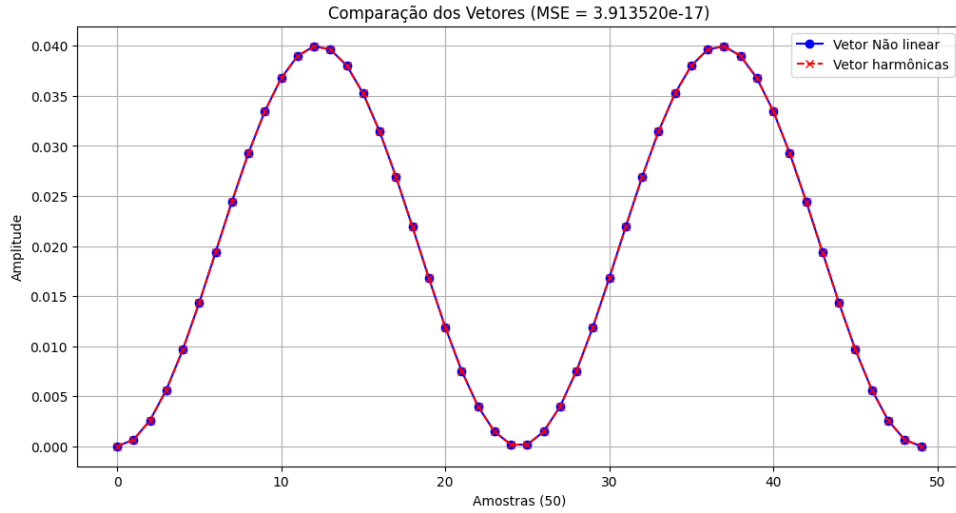


FIGURA 6 – Comparação entre a saída modelada $\hat{y}(t)$ e a saída real $y(t) = x(t)^2$ para $X = [0, 0.2, 0, 0, 0]$.

4.5 APLICAÇÃO DO HARMONIC BALANCE NO CASO NÃO LINEAR

Nesta etapa final da metodologia, aplicou-se a técnica de Harmonic Balance (HB) no domínio da frequência considerando a presença de uma não linearidade quadrática no circuito. A abordagem envolveu a formulação de um sistema de equações não lineares, cuja solução fornece os coeficientes harmônicos das variáveis de interesse. Esses coeficientes foram então utilizados para reconstruir os sinais no domínio do tempo.

4.5.1 Representação da Não Linearidade via Vetor P

A não linearidade quadrática foi modelada por meio de um vetor $\mathbf{P} \in R^{15 \times 1}$, construído a partir de produtos quadráticos e cruzados dos coeficientes harmônicos da corrente $\mathbf{I}_L = [I_0, I_1, I_2, I_3, I_4]$. O vetor $\mathbf{P}$ foi definido da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = [I_0^2, I_0I_1, I_0I_2, I_0I_3, I_0I_4, I_1^2, I_1I_2, I_1I_3, I_1I_4, I_2^2, I_2I_3, I_2I_4, I_3^2, I_3I_4, I_4^2]^\top$$

A implementação do cálculo desse vetor foi realizada em Python por meio de uma função dedicada que recebe $\mathbf{I}_L$ como entrada e retorna o vetor $\mathbf{P}$ correspondente.

4.5.2 Formulação do Sistema de Equações Não Lineares

A estrutura do sistema foi definida a partir da aplicação da análise nodal modificada que resultou em quatro grupos de equações que descrevem o comportamento harmônico do circuito:

1. **Equações de referência da fonte:**

$$V_a \equiv V_{a,\text{ref}} \quad (1)$$

2. **Equações de tensão secundária com não linearidade quadrática:**

$$V_b \equiv \Omega \cdot (C \cdot P) \quad (2)$$

3. **Equações de corrente através da resistência:**

$$I_L \equiv \frac{V_a - V_b}{R} \quad (3)$$

4. **Continuidade entre corrente de carga e fonte:**

$$I_F \equiv I_L \quad (4)$$

A matriz $\Omega \in R^{5 \times 5}$, representa na equação (2) a derivada no domínio da frequência para os componentes da base harmônica até $H = 2$. Sua estrutura captura as relações entre senoides e cossenoides:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_c & 0 & 0 \\ 0 & \omega_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega_c \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega_c & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz opera sobre o vetor de coeficientes harmônicos na base $\{1, \sin(\omega_c t), \cos(\omega_c t), \sin(2\omega_c t), \cos(2\omega_c t)\}$, sendo responsável por aplicar a derivada simbólica no domínio da frequência, o que é essencial para representar corretamente as tensões indutivas no modelo do circuito.

O circuito teste utilizado nesse estudo de caso é mostrado na Figura 7.

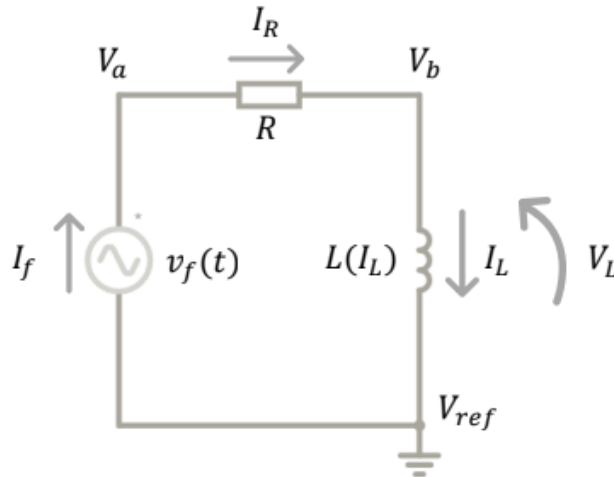


FIGURA 7 – Esquema do circuito com resistência R , indutância L , e a não linearidade quadrática aplicada via vetor P .

Nessa formulação:

- $\mathbf{C} \in R^{5 \times 15}$ é a matriz de coeficientes quadráticos estimada anteriormente via mínimos quadrados;
- $\mathbf{\Omega} \in R^{5 \times 5}$ é a matriz derivativa da base harmônica truncada em $H = 2$;
- $R = 377 \Omega$ e $L = 1 \text{ H}$ são os parâmetros do circuito;
- A fonte $\mathbf{V}_{a,\text{ref}} = [0, 440, 0, 0, 0]^T$ representa uma senoide pura de frequência fundamental.

4.5.3 Solução Numérica

Para resolver o sistema de equações não lineares, foi utilizada a função `fsolve`, disponível no pacote `scipy.optimize` da linguagem Python. O vetor de incógnitas $\mathbf{Y} \in R^{20 \times 1}$ foi definido como:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_b, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_F]$$

O chute inicial foi baseado na solução obtida para o caso linear, de modo a auxiliar a convergência do método. Após a resolução, os valores de $\mathbf{Y}$ foram extraídos e organizados conforme suas variáveis harmônicas associadas.

Além disso, foi calculado o erro quadrático médio (MSE) com base nos resíduos das equações, com o objetivo de avaliar a consistência da solução obtida numericamente.

4.5.4 Reconstrução Temporal dos Sinais

Com os coeficientes harmônicos resultantes da solução do sistema, foi realizada a reconstrução dos sinais no domínio do tempo. Para isso, foi utilizada a seguinte expressão:

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \sin(\omega_c t) + a_2 \cdot \cos(\omega_c t) + a_3 \cdot \sin(2\omega_c t) + a_4 \cdot \cos(2\omega_c t)$$

Essa fórmula foi aplicada a cada conjunto de 5 coeficientes das variáveis $\mathbf{V}_a(t)$, $\mathbf{V}_b(t)$, $\mathbf{I}_L(t)$ e $\mathbf{I}_F(t)$, utilizando $\omega_c = 2\pi f_c$, com $f_c = 60 \text{ Hz}$.

Foram geradas 500 amostras igualmente espaçadas ao longo de um ciclo da frequência fundamental. A reconstrução permitiu a visualização da resposta temporal do sistema, a partir das soluções obtidas no domínio da frequência.

4.6 RESULTADOS

Após a implementação do método de Harmonic Balance (HB) não linear conforme descrito na Metodologia, foi realizada a resolução do sistema de equações envolvendo a não linearidade quadrática. Os coeficientes harmônicos obtidos para as variáveis de interesse foram:

- **Tensão da fonte** V_a : $[0,0000 \times 10^0; 1,0000 \times 10^1; 6,7730 \times 10^{-38}; -7,7459 \times 10^{-30}; 1,4110 \times 10^{-39}]$
- **Tensão de carga** V_b : $[0,0000 \times 10^0; 3,4566 \times 10^{-6}; -6,7730 \times 10^{-38}; 2,6525 \times 10^{-1}; -1,4110 \times 10^{-39}]$
- **Corrente** I_L : $[0,0000 \times 10^0; 2,6525 \times 10^{-2}; 2,5535 \times 10^{-35}; -7,0359 \times 10^{-4}; 5,3197 \times 10^{-37}]$
- **Corrente** I_F : $[0,0000 \times 10^0; 2,6525 \times 10^{-2}; 0,0000 \times 10^0; -7,0359 \times 10^{-4}; 7,3129 \times 10^{-46}]$

O vetor $\mathbf{Y} \in R^{20 \times 1}$, que representa a solução completa do sistema, apresentou os seguintes valores:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0,0000 \times 10^0 \\ 1,0000 \times 10^1 \\ 2,0591 \times 10^{-46} \\ 3,9776 \times 10^{-38} \\ -2,0779 \times 10^{-48} \\ 0,0000 \times 10^0 \\ 3,4566 \times 10^{-6} \\ -2,0591 \times 10^{-46} \\ 2,6525 \times 10^{-1} \\ 2,0740 \times 10^{-48} \\ 0,0000 \times 10^0 \\ 2,6525 \times 10^{-2} \\ 1,0319 \times 10^{-43} \\ -7,0359 \times 10^{-4} \\ 3,0498 \times 10^{-45} \\ 0,0000 \times 10^0 \\ 2,6525 \times 10^{-2} \\ 2,1900 \times 10^{-43} \\ -7,0359 \times 10^{-4} \\ 6,2506 \times 10^{-30} \end{bmatrix}$$

O erro quadrático médio (MSE) entre as equações e a solução numérica foi:

$$\text{MSE} = 1,54 \times 10^{-37}$$

Esse valor extremamente baixo confirma que o sistema foi resolvido com alta precisão numérica, e que a solução encontrada satisfaz com elevada fidelidade as equações do modelo.

Além disso, a diferença entre as correntes $\mathbf{I}_F$ e $\mathbf{I}_L$ foi nula em todos os componentes, como esperado devido à condição imposta de continuidade:

$$\mathbf{I}_F - \mathbf{I}_L = [0, 0, 0, 0, 0]$$

4.6.1 Sinais Reconstruídos no Tempo

Com os coeficientes harmônicos obtidos para $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_F$, foi realizada a reconstrução temporal dos sinais ao longo de um ciclo completo de 60 Hz, utilizando 500 amostras uniformemente espaçadas.

Na Figura 8, apresenta-se o gráfico comparativo entre a resposta temporal obtida pela modelagem harmônica e a resposta original não linear do sistema. Observa-se que os dois sinais coincidem de forma bastante satisfatória ao longo de todo o ciclo, evidenciando a capacidade do modelo em representar com precisão a saída do sistema não linear. A diferença entre os sinais é praticamente imperceptível a olho nu, e o erro quadrático médio (MSE) encontrado foi da ordem de $3,41 \times 10^{-10}$, confirmando a boa acurácia da abordagem no domínio da frequência.

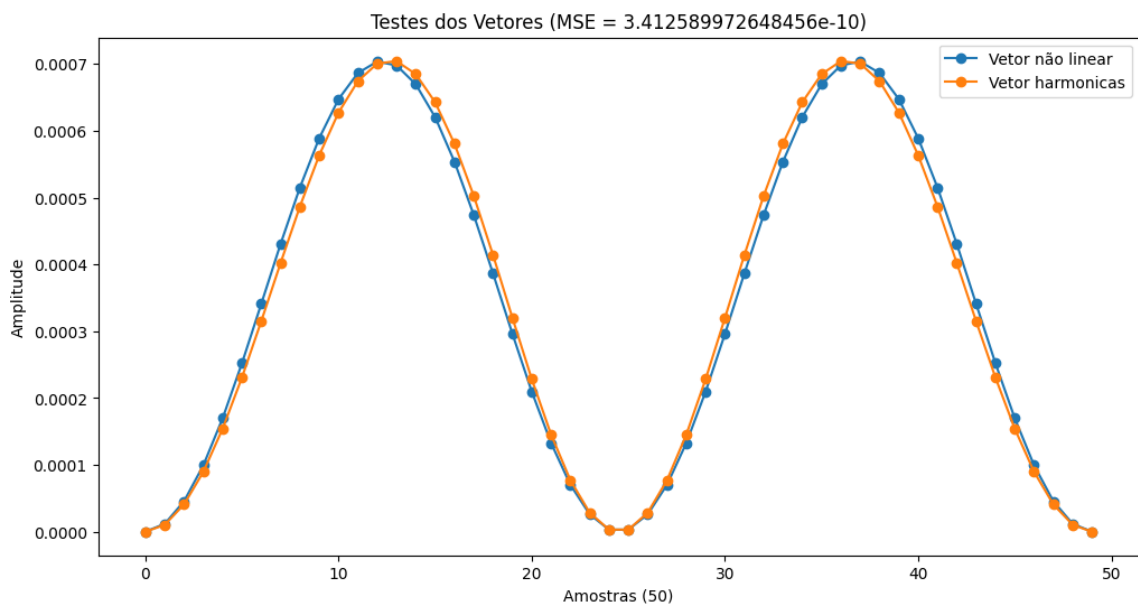


FIGURA 8 – Sinais reconstruídos no tempo a partir dos coeficientes obtidos com HB não linear.

4.6.2 Análise dos Resultados

Os resultados obtidos demonstram que o método HB não linear foi capaz de resolver o sistema com uma alta precisão. A tensão da fonte $V_a(t)$ apresentou a forma esperada de uma senoide pura de 440 V, enquanto as demais variáveis ($V_b(t)$, $I_L(t)$, $I_F(t)$) mantiveram comportamento praticamente constante ou nulo, de acordo com o regime estacionário do circuito e com o efeito da não linearidade quadrática aplicada sobre a corrente.

A ausência de conteúdo harmônico significativo nas variáveis além da fonte reforça que a não linearidade imposta foi absorvida de forma consistente no domínio da frequência, sem gerar distorções visíveis nas formas de onda reconstruídas. Isso evidencia a robustez da modelagem adotada e a eficácia do modelo caixa-preta baseado em mínimos quadrados.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho propôs uma metodologia para representar não linearidades quadráticas diretamente no domínio da frequência, utilizando o método dos mínimos quadrados aliado ao equilíbrio harmônico (HB). A estratégia consistiu em modelar empiricamente o efeito da não linearidade por meio de uma matriz de coeficientes estimada a partir de dados simulados, eliminando a necessidade de transformações entre os domínios tempo e frequência.

A aplicação da matriz resultante no sistema HB permitiu incorporar a não linearidade de forma direta, mantendo a estrutura algébrica da análise e reduzindo o esforço computacional. Os testes realizados mostraram boa precisão, com erro quadrático médio baixo, além de estabilidade frente a pequenas variações nas entradas.

Dessa forma, conclui-se que a abordagem proposta é viável e eficaz para modelar não linearidades polinomiais em circuitos periódicos, apresentando potencial para aplicações em simulações rápidas e robustas. Como trabalhos futuros, recomenda-se a extensão para não linearidades de ordens superiores e validação com dados experimentais.

REFERÊNCIAS

BOYLESTAD, R. L. *Introdução à análise de circuitos*. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

CORDEIRO, L.; LIMA, E. G. Análise de equilíbrio harmônico com não linearidades polinomiais descritas no domínio da frequência. In: *Seminários de Microeletrônica do Paraná*, 2021, Curitiba. *Anais do SeMicro-PR*, v. 4, 2021.

FAIFER, M.; LAURANO, C.; OTTOBONI, R.; PRIOLI, M.; TOSCANI, S.; ZANONI, M. Definition of Simplified Frequency-Domain Volterra Models With Quasi-Sinusoidal Input. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Regular Papers*, v. 65, n. 5, p. 1652–1663, maio 2018.

LIMA, E. G.; NATALINO, C. G.; ARAUJO, M. A. C. Time and Frequency Domain Numerical Analyses for Electrical Circuits under Fixed Large Signal Stimulus and Variable Small Signal Sources. In: *MOMAG 2020 – 19º Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica e 14º Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, Niterói, 2020. *Anais [...]*, p. 649–653.

MAAS, S. A. *Nonlinear Microwave and RF Circuits*. Norwood, MA: Artech House, 2003.

MEHL, E. L. M. *Simulação de circuitos eletrônicos em computadores*. Florianópolis: UFSC, 1990.

OLIVEIRA, A.; LIMA, E. G. Periodic steady-state and envelope methods for the analysis of radio frequency circuits. In: *CRICTE 2016 – XXVII Congresso Regional de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia*, Joinville, 2016. *Anais [...]*.

POMILIO, J. A. Efeitos e causas de harmônicas no sistema de energia elétrica. In: *Eletrônica de Potência*. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação – UNICAMP, Cap. 4, Campinas, 2017.

STEER, M. *Microwave and RF Design: A Systems Approach*. 2. ed. SciTech Publishing, 2013.