

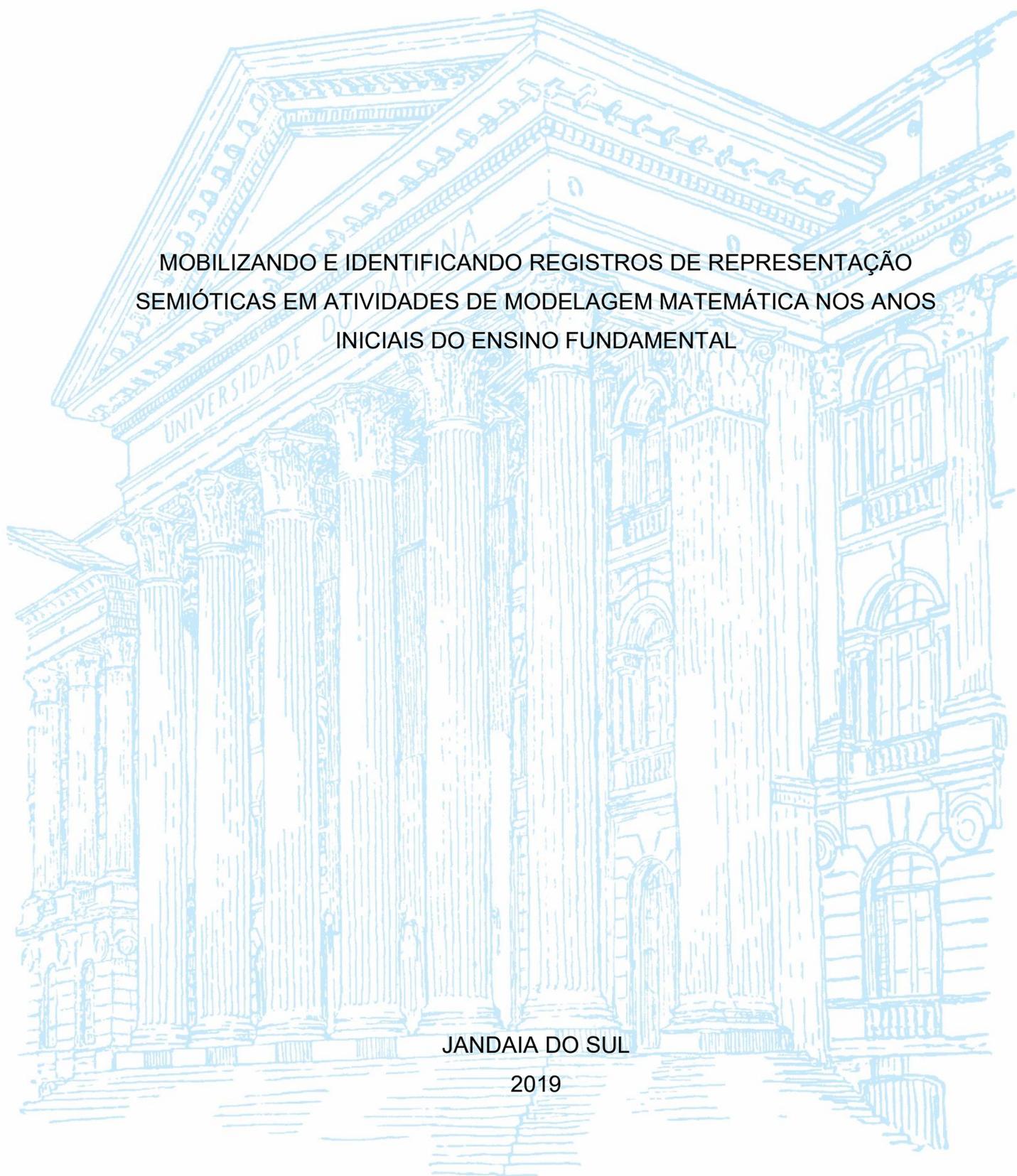
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THAYNÁ FELIX DOS SANTOS

MOBILIZANDO E IDENTIFICANDO REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO  
SEMIÓTICAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS  
INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

JANDAIA DO SUL

2019



THAYNÁ FELIX DOS SANTOS

MOBILIZANDO E IDENTIFICANDO REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO  
SEMIÓTICAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS  
INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Monografia apresentada como exigência para a conclusão do Curso de Licenciatura em Ciências Exatas – Matemática, na Universidade Federal do Paraná – Campus Avançado de Jandaia do Sul.

Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Cândido Braz

JANDAIA DO SUL

Santos, Thayná Felix dos  
S237m Mobilizando e identificando registros de representação semióticas em  
atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino  
Fundamental. / Thayná Felix dos Santos. – Jandaia do Sul, 2019.  
118 f.

Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Cândido Braz  
Trabalho de Conclusão do Curso (graduação) – Universidade Federal do  
Paraná. Campus Jandaia do Sul. Licenciatura em Ciências Exatas -  
Matemática.

1. Modelagem matemática. 2. Registro de representação semiótica. 3.  
Anos Iniciais do Ensino Fundamental. 4. Educação matemática. 5.  
Perspectiva sociocrítica. I. Braz, Bárbara Cândido. II. Título. III. Universidade  
Federal do Paraná.

CDD: 370.1



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

**PARECER Nº** 5/2019/UFPR/R/JA/CCLCEX  
**PROCESSO Nº** 23075.083229/2019-11  
**INTERESSADO:** @INTERESSADOS\_VIRGULA\_ESPACO@  
**ASSUNTO:** TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

### TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Título: Mobilizando e identificando Registros de Representação Semióticas em atividades de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Autora: Thayná Felix dos Santos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau no curso de Licenciatura em Ciência Exatas, aprovado pela seguinte banca examinadora.

- Bárbara Cândido Braz (orientadora)
- Janete de Paula Ferrareze Silva (membro)
- Marcelo Valério (membro)

Jandaia do Sul, 3 de dezembro de 2019.



Documento assinado eletronicamente por **BARBARA CANDIDO BRAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/12/2019, às 10:05, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **MARCELO VALERIO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/12/2019, às 10:09, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **JANETE DE PAULA FERRAREZE SILVA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/12/2019, às 10:09, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **2350360** e o código CRC **008A7BB2**.

Aos meus pais, Adenilson e Rosineis, que apesar de todas as dificuldades enfrentadas ao longo dos quatro anos de graduação, me apoiaram e me incentivaram desde o princípio a concretizar esse curso, pelo apoio nos momentos de vitórias e derrotas.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida.

Agradeço a minha mãe, Rosineis, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis de desânimo e cansaço. Agradeço ao meu pai, Adenilson, que apesar das dificuldades nunca deixou de acreditar em meu potencial. Agradeço aos meus irmãos, Isabella e Thiago, a meu afilhado, Arthur, minhas primas, Gabriela e Maria Eduarda e a meus tios/padrinhos, Roseli e Marcio, as minhas amigas Andressa, Bruna e Victória, que nos momentos de minha ausência dedicados a minha formação inicial do ensino superior, sempre entenderam esse meu sonho. Agradeço de uma forma geral a minha família e amigas, pela contribuição valiosa de palavras e carinhos recebidos em dias de tristeza e de alegrias.

Agradeço a minha orientadora, Bárbara Braz, pela orientação, apoio e confiança não só no Trabalho de Conclusão de Curso, mas ao longo de minha graduação, por todo incentivo e dedicação de seu tempo ao meu projeto e minha formação. Agradeço por compartilhar suas ideias, por me orientar, por ser amiga, ser compreensiva e paciente nos momentos de grandes frustrações dentro da Universidade. Agradeço por me incentivar sempre a ser alguém melhor e sempre buscar aperfeiçoar meu conhecimento.

Agradeço aos amigos que ganhei na Universidade, Camila Cassoli, Ana Suellen e Daiara Blasques, que dividiram comigo angústias, alegrias, crescimentos e informações. Agradeço pelo incentivo, pelo apoio, pelas trocas de informações e principalmente por não me permitirem cair, por sempre acreditarem em mim e acreditarem em meu potencial. Em especial, a minha Barbarete, que atura minhas crises diárias, compreende os meus surtos, que segura e contorna os meus abismos, que abraça e aperta forte, como um porto seguro, amizade que partilha, que se iguala e principalmente que soma. Amizades essas, que vão além do mundo acadêmico.

Agradeço a meu companheiro, que apesar da minha rotina e mudanças de humor contínuas, sempre esteve ao meu lado, me apoiando e me incentivando a ser alguém melhor, a acreditar em mim. Agradeço pelos incentivos, pelos abraços, pelo carinho, e acima de tudo, pela paciência, pelas broncas e pelo ombro amigo.

Agradeço aos meus professores, por terem contribuído de forma tão positiva em minha formação acadêmica e profissional.

Agradeço aos projetos de extensão que participei, que me proporcionaram experiências incríveis.

Amigos, familiares, professores, a todos que direta e indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada. Vocês foram o meu apoio.

“Não é possível refazer este país, democratizá-lo, humanizá-lo, torná-lo sério, com adolescentes brincando de matar gente, ofendendo a vida, destruindo o sonho, inviabilizando o amor. Se a educação sozinha não transforma a sociedade sem ela tampouco a sociedade muda. Se a nossa opção é progressista, se estamos a favor da vida e não da morte, da equidade e não da injustiça, do direito e não do arbítrio, da convivência com o diferente e não de sua negação, não temos outro caminho senão viver plenamente a nossa opção. Encarná-la, diminuindo assim a distância entre o que dizemos e o que fazemos. Desrespeitando os fracos, enganando os incautos, ofendendo a vida, explorando os outros, discriminando o índio, o negro, a mulher não estarei ajudando meus filhos a ser sérios, justos e amorosos da vida e dos outros.”

(PAULO FREIRE, 2000).

## RESUMO

Considerando a relevância dos primeiros anos escolares quanto ao processo de alfabetização Matemática, torna-se necessária a busca por alternativas metodológicas que se pautam em cenários investigativos em detrimento de aulas embasadas no desenvolvimento de exercícios pragmáticos nesse nível de ensino. Isso porque atividades investigativas tendem a contribuir com o desenvolvimento do pensamento matemático e fundamentar o processo de aprendizagem da Matemática, na medida em que possibilitam que os estudantes disponham de diferentes representações Matemáticas para tratar de problemáticas, com referência tanto na Matemática quanto em outras áreas de conhecimento, por meio de procedimentos de problematização e investigação. De acordo com Raymond Duval, a coordenação entre dois ou mais registros de representação semióticas dão indícios sobre a aprendizagem do sujeito. Nesse sentido, a pesquisa, ora apresentada, tem por objetivo analisar que representações Matemáticas são desenvolvidas em atividades de Modelagem Matemática por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nessa perspectiva, esse estudo assume uma abordagem metodológica qualitativa, pois os dados serão construídos, coletados e analisados com foco no processo e não o resultado final da investigação. Para tanto, desenvolvemos atividades de Modelagem Matemática com uma turma de estudantes com idade entre oito e dez anos de uma escola pública do município de Mandaguari, no período contraturno, nas dependências da UFPR/JA e da escola em que os alunos estudavam. Os registros escritos dos estudantes, bem como os registros em áudio e em diário de campo constituíram o material analisado nessa pesquisa. As análises desenvolvidas evidenciaram que a natureza das atividades de Modelagem Matemática propiciou a emergência de registros de representação em outras linguagens que aquelas que normalmente aparecem nas aulas de Matemática, como a numérica, e fundamentaram discussões para além das matemáticas, nesse ambiente de aprendizagem. Os resultados das análises sobre as atividades desenvolvidas nessa investigação, mostraram que os registros numéricos e na língua natural emergem de forma espontânea para os estudantes, enquanto o registro geométrico, o registro numérico tabular e o geométrico emergem com a orientação docente.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Registros de Representação Semiótica. Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Educação Matemática. Perspectiva sociocrítica.

## ABSTRACT

Considering the relevance of the early school years as for mathematical literacy, it becomes necessary the search for methodological alternatives, which take place in investigative backdrops to the detriment of classes based on the development of pragmatic exercises in this teaching level. That is because investigative activities tend to contribute to the development of the mathematical thinking and subsidize the math learning process as they enable students to dispose of different mathematical representations to deal with different issues. According to Raymond Duval, the coordination between two or more registers of representation establish clues about the subject's learning. Furthermore, the research now presented objectifies to investigate those mathematical representations emerge from development of mathematical modeling activities by elementary school students. In this perspective, this study assumes a qualitative methodological approach, because the data will be constructed, collected and analyzed focusing on the process and not in the investigation's final results. To this end, we developed Mathematical Modeling activities with a group of students aged between eight and ten years old from a public school in the city of Mandaguari, without contract period, in the facilities of UFPR / JA and the school where the students studied. The registers written by the students, as well as the audio and field diary registers, will constitute the analyzed material in this research. The analyzes involved showed that the nature of mathematical modeling activities led of representations in other languages than those that normally appear in mathematics classes, such as numeric, and based discussions beyond mathematics in this learning environment. The results of the analysis of the activities developed in this investigation showed that the numerical and natural language registers emerge spontaneously for the students, while the geometrical register, the tabular and the geometric registers emerge from the teacher's guidance.

Keywords: Record of Semiotic Representation. Mathematical Modeling. Early Years of Elementary School. Mathematical Education.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA .....	34
FIGURA 2 – ESBOÇO DA PRÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA .....	39
FIGURA 3 – EXEMPLO DE REGISTRO GEOMÉTRICO .....	48
FIGURA 4 – EXEMPLO DE TRATAMENTO E DE CONVERSÃO.....	50
FIGURA 5 – MEDINDO A SALA .....	64
FIGURA 6 – INDIANO COM 9 METROS DE UNHA .....	65
FIGURA 7 – EXEMPLO DE REGISTRO DOS ALUNOS .....	67
FIGURA 8 – REGISTRO NUMÉRICO DOS ALUNOS .....	67
FIGURA 9 – EXEMPLO DE REGISTRO DOS ALUNOS, GRÁFICO .....	69
FIGURA 10 – TABELA DA QUANTIDADE QUE A UNHA CRESCEU .....	70
FIGURA 11 – ALUNA APRESENTANDO .....	71
FIGURA 12 – TABELA DA ATIVIDADE DA BELEZA.....	76
FIGURA 13 – ALUNOS SE MEDINDO E TABELA DA BELEZA.....	77
FIGURA 14 – DEMONSTRAÇÃO DE DIVISÃO POR MEIO DE UM BARBANTE ....	78
FIGURA 15 – REGISTRO LÍNGUA NATURAL – BELEZA.....	79
FIGURA 16 – QUADRO DA BELEZA .....	80
FIGURA 17 – EXEMPLO DE REGISTRO NUMÉRICO – DIVISÃO .....	81
FIGURA 18 – RODA DE CONVERSA .....	81
FIGURA 19 – MOMENTO DA CORRIDA.....	88
FIGURA 20 – TABELA DA VELOCIDADE .....	89
FIGURA 21 – POSSIBILIDADE DE REPRESENTAÇÃO DE DIVISÃO .....	90
FIGURA 22 – ATIVIDADE DA COPA DO MUNDO FEMININA.....	94
FIGURA 23 – EXEMPLO DE POSSIBILIDADES FEITO POR LUANA.....	96
FIGURA 24 – MULTIPLICAÇÃO COM LÁPIS.....	97

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – CNMEM – ATIVIDADES DE MODELAGEM NOS DIFERENTES NÍVEIS DE .....	22
GRÁFICO 2 – EXEMPLO DE REGISTRO GRÁFICO (QUANTIDADE TOTAL DE PELE X PESO) .....	48

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – IDENTIFICAÇÃO DOS TRABALHOS PUBLICADOS NAS CNMEMS SOBRE MODELAGEM NOS ANOS INICIAIS.....	23
QUADRO 2 – IDENTIFICAÇÃO DOS TRABALHOS PUBLICADOS NAS CNMEMS SOBRE RRS E MODELAGEM.....	26
QUADRO 3 – ROTAS DE MODELAGEM.....	38
QUADRO 4 – POSSIBILIDADES DE CONDUÇÃO PARA UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	40
QUADRO 5 – QUAIS SÃO OS TIPOS DE REGISTROS SEMIÓTICOS.....	47
QUADRO 6 – TRATAMENTO E CONVERSÕES DE UMA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA .....	50
QUADRO 7 – ATIVIDADES PROPOSTAS.....	56
QUADRO 8 – RESUMO EXPLICATIVO DE ALGUNS SINAIS DE NORMAS DE TRANSCRIÇÕES.....	60
QUADRO 9 – REGISTROS QUE EMERGIRAM NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	102

## LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

CC	- Comunicação Científica
CNMEM	- Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática
CM	- Centímetro
L	- Litro
MC	- Minicurso
ML	- Mililitro
MODELAGEM	- Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática
RE	- Relato de Experiência
PO	- Poster
RRS	- Registro de Representação Semiótica

## SUMÁRIO

<b>1 PRIMEIRAS PALAVRAS</b> .....	<b>15</b>
<b>2 MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: O QUE TEMOS INVESTIGADO?</b> .....	<b>20</b>
<b>3 MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DOS ANOS INICIAIS</b> .....	<b>31</b>
3.1 A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES E OS ASPECTOS DA MODELAGEM ...	31
3.2 CONCEPÇÕES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	33
3.3 ROTAS DE MODELAGEM NOS ANOS INICIAIS .....	37
3.4 O QUE É UM MODELO MATEMÁTICO? NOSSAS PERCEPÇÕES .....	41
<b>4 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL</b> .....	<b>45</b>
<b>5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> .....	<b>52</b>
5.1 O OBJETIVO DA PESQUISA E A ESCOLHA METODOLÓGICA.....	52
5.2 O CONTEXTO E OS SUJEITOS PARTICIPANTES DESSA PESQUISA .....	55
5.3 AS ATIVIDADES PROPOSTAS .....	56
5.4 COMO IREMOS ANALISAR? .....	59
<b>6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES</b> .....	<b>61</b>
6.1 ATIVIDADE DO CRESCIMENTO DAS UNHAS: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE. ....	61
6.1.1 Atividade do crescimento das unhas: registros .....	72
6.2 ATIVIDADE SOBRE A MEDIDA DA BELEZA: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE. ....	75
6.2.1 Atividade sobre a medida da beleza: registros .....	82
6.3 ATIVIDADE SOBRE A VELOCIDADE: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE. ....	85
6.3.1 Atividade sobre velocidade: registros .....	90
6.4 ATIVIDADE SOBRE A COPA DO MUNDO FEMININA: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE. ....	92
6.4.1 Atividade sobre a copa do mundo feminina: registros .....	99
6.5 QUAIS REGISTROS SURTIRAM NAS ATIVIDADES? .....	102
<b>7 CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES FINAIS</b> .....	<b>106</b>
<b>8 REFERÊNCIAS</b> .....	<b>111</b>
<b>APÊNDICE 1 – ATIVIDADE DAS UNHAS</b> .....	<b>115</b>

<b>APÊNDICE 2 – ATIVIDADE DA BELEZA .....</b>	<b>116</b>
<b>APÊNDICE 3 – ATIVIDADE DA VELOCIDADE .....</b>	<b>117</b>
<b>APÊNDICE 4 – ATIVIDADE DA COPA DO MUNDO FEMININA .....</b>	<b>118</b>

## 1 PRIMEIRAS PALAVRAS

“As crianças contam pedrinhas; organizam folhas pela forma, pelo tamanho; contam pétalas; observam as formas das nuvens; percebem as regularidades dos pingos de água de uma torneira [...] acompanham o ritmo dos pés de uma centopeia” (RUIZ; BELLINI, 2001, p. 12), matematizam, intuitivamente, o mundo em que vivem. Ao mesmo tempo, na mesma proporção nos parece familiar o discurso escolar de que a Matemática se assemelha a um monstro (LINS, 2004) e de que ela é para poucos.

Não é preciso se esforçar muito para perceber que a disciplina de Matemática tem se apresentado como uma das mais temidas pelos estudantes, principalmente nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, como evidenciam as pesquisas de Cardoso e Benevides-Pereira (1990), ao tratarem especificamente da relação afetiva dos estudantes com a Matemática. Nesse sentido, Santos, França e Santos (2007, p. 9) afirmam que os estudantes possuem dificuldade de aprendizagem na disciplina de Matemática e que, por sua vez, alguns alunos se sentem incapazes, já que a disciplina de Matemática é vista como algo que somente pessoas ditas com alto nível de inteligência têm capacidade para aprender. Ainda de acordo com os mesmos autores, essa dificuldade provoca sentimentos negativos, de baixa autoestima e de rejeição, causados pelos insucessos escolares.

De acordo com os autores citados anteriormente, nossa experiência como professoras têm evidenciado que o interesse pela Matemática no ambiente escolar parece decrescer na medida em que os estudantes avançam pelos anos escolares. É nessa perspectiva que argumentamos que aproveitar a curiosidade inerente das crianças é importante e fundamental para estimular a criatividade e o espírito investigativo no ensino de Matemática desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Por esses motivos, ensinar Matemática a uma criança pode ser um desafio, pois é preciso que utilizemos situações que permitam tanto a exploração (investigação) Matemática quanto a relação entre os conceitos matemáticos e situações não, necessariamente, Matemáticas, possibilitando a diversidade de estratégias para a interpretação das variadas situações. Ou seja, o desafio consiste, justamente, no fato de estimular a criatividade e senso de investigação de situações

diversas sem deixar de lado a exploração e sistematização de conceitos matemáticos.

Considerando esses apontamentos, uma possibilidade para ensinar Matemática nesse nível de ensino consiste na Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática<sup>1</sup> (SILVA; KLUBER, 2012; LUNA; SOUZA, 2012; TORTOLA, 2012; 2016), pois ela oportuniza ao aluno explorar situações não necessariamente Matemáticas, por meio do ferramental matemático (BARBOSA, 2001; 2004; 2007). Em linhas gerais, podemos compreender a Modelagem como uma alternativa de ensino em que os alunos problematizam e investigam situações com referências em temas não matemáticos, usando conceitos matemáticos. Na medida em que trazemos à baila questões não Matemáticas para as aulas dessa disciplina tornamos possível aos alunos a discussão sobre outras temáticas e abrimos possibilidades para que alunos que normalmente não são reconhecidos como “bons em Matemática”, sejam percebidos como líderes ou como importantes para aquela aula, na medida em que conhecem o tema da atividade (BRAZ, 2014).

Em uma aula, por exemplo, em que os alunos precisam investigar a quantidade de suco que uma laranja tem, diversas discussões sobre o tema poderão emergir. Então aquele aluno que já esteve presente em algum ambiente que havia uma laranjeira ou aquele aluno que mora na área rural e/ou trabalha com esses frutos serão percebidos durante a aula, e não somente quando compreendem, de imediato, o conceito matemático que está por detrás da problemática, mas por conta da temática escolhida que o aluno compreende muito bem.

Considerando, então, que diversas são as possibilidades de encaminhamentos e prioridades numa atividade de Modelagem (a discussão sobre o tema, o conceito matemático, dentre outros) diferentes são as concepções sobre o que seja Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática. Nessa investigação, considerando suas características, adotamos a concepção de Barbosa (2007, p. 161), para o qual “a Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência da realidade”. Nesse processo investigativo, modelos matemáticos são construídos para representar uma situação

---

<sup>1</sup> Doravante ao usarmos o termo “Modelagem” estaremos nos referindo à Modelagem Matemática na Educação Matemática.

de estudo. O Modelo Matemático<sup>2</sup>, portanto pode ser compreendido como uma *representação* da situação estudada (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Desta forma, a Modelagem Matemática possibilita que o aluno possa inquirir sobre determinado assunto pautado em situações reais permitindo-lhe que levante hipóteses, colete os dados, apresente uma solução ao problema posto e verifique se todo esse processo é válido e pertinente. Tudo isso sob orientação do professor, que pode ensinar novos conceitos matemáticos necessários para a resolução dos problemas que emergem nessa investigação e/ou orientar sobre o uso de conceitos já conhecidos pelos estudantes.

Nesse processo, como os estudantes descrevem matematicamente situações não Matemáticas, diversas representações podem emergir. Esse fato é bastante importante, pois conforme Duval (1988 apud FLORES, 2006 p. 3) o processo de aprendizagem de um conceito matemático ocorre na medida em que, dentre outros aspectos, os estudantes conseguem representar um mesmo conceito usando diferentes registros, como: língua natural; registro numérico, dentre outros, que abordaremos nas próximas seções.

Sobre esse aspecto, é relevante considerar que de acordo com Raymond Duval os conceitos matemáticos são abstratos e só temos acesso a eles por meio de representações, e em todo caso o objeto matemático que tende a ser estudado são os conceitos, propriedades, estruturas, axiomas, teorias entre outros. Assim sendo, durante a Educação Básica nos Anos Iniciais diversos são os objetos matemáticos que podem ser descritos pelos estudantes, por meio de representações como: um desenho, um gráfico, uma tabela, símbolos, dentre outras representações que poderão ter seus sentidos ampliados e/ou aprofundados ao longo do processo educacional.

Nessas circunstâncias, as análises das atividades de Modelagem Matemática empreendidas foram desenvolvidas à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS)<sup>3</sup> de Raymond Duval. De acordo com o pesquisador, a coordenação entre diferentes registros de representação possui papel fundamental no processo de aprendizagem da Matemática. Para Duval, um conceito matemático é, de fato,

---

<sup>2</sup> Esse conceito será tratado nas próximas seções.

<sup>3</sup> Doravante consideraremos no decorrer da pesquisa Registros de Representação Semiótica apenas como RRS.

compreendido, se formos capazes de coordenar, pelo menos, dois tipos de registros sobre esse conceito.

Em virtude disso, essa investigação é fundamentada na seguinte questão: que representações Matemáticas são construídas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?

Para discorrer sobre a questão de pesquisa, o texto foi organizado em seções e subseções, com o objetivo de possibilitar a compreensão sobre a apresentação do desenvolvimento da pesquisa. Desse modo, os procedimentos e os resultados dessa investigação serão apresentados em sete seções.

A seção intitulada de *Primeiras palavras* consiste nessa seção, em que apresentamos o contexto em que o interesse por essa pesquisa surgiu e os motivos para realizá-la, bem como o problema de pesquisa.

A seção denominada de *Modelagem Matemática nos anos iniciais: o que temos investigado?* tem por objetivo identificar, descrever e relatar algumas informações acerca de trabalhos que já foram desenvolvidos usando, ao menos, um dos referenciais adotados nessa investigação (Modelagem Matemática e a teoria dos Registros de Representação Semiótica) no contexto educacional, possibilitando delimitar o espaço no qual a problemática se insere.

A seção está intitulada *Modelagem Matemática no contexto dos Anos Iniciais* visa apresentar aspectos sobre a Modelagem que embasaram nossa pesquisa. Apresentaremos nossa justificativa e entendimento de situações acerca da Modelagem Matemática.

Nos *Registros de Representação Semiótica de Duval*, apresentamos algumas concepções e conceitos que foram utilizados para realizar as análises.

A seção denominada de *Procedimentos metodológicos* apresentaremos quais ferramentais foram utilizados para a produção, coleta e análise dos dados, além da apresentação das atividades (criadas e adaptadas) desenvolvidas e do contexto dos sujeitos participantes dessa pesquisa.

A seção denominada de *Descrição e análise das aulas* tem por objetivo discutir e analisar as atividades elaborados pelos sujeitos participantes da pesquisa ao longo do desenvolvimento desse trabalho, tecendo algumas considerações, discussões e resultados alcançados.

Na seção denominada de *Considerações e reflexões finais* apresentamos que percepções e conclusões obtivemos com essa pesquisa, quais resultados foram alcançados e quais reflexões pudemos considerar e analisar. Além disso, apresentamos perspectivas para trabalhos futuros, que precisam ser desenvolvidos.

## **2 MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: O QUE TEMOS INVESTIGADO?**

Na trajetória histórica da educação no Brasil, observamos e compreendemos que a luta por uma educação de qualidade envolveu o desenvolvimento de teorias e práticas pedagógicas que têm relação direta com a compreensão sobre os processos de ensino e de aprendizagem e modos de efetivá-los na prática docente. Embora avanços significativos para o processo de ensino e aprendizagem tenham ocorrido, essa luta de educadores em prol da melhoria e da qualidade de ensino não termina.

Nessa perspectiva, podemos mencionar a busca pela sistematização de procedimentos pedagógicos que fundamentem a ciência como uma construção humana. Em termos da ciência Matemática, a emergência de teorias que fundamentam práticas pedagógicas mais significativas, principalmente a partir de meados dos anos de 1970 no Brasil, contribuem para que nossos estudantes percebam essa área do conhecimento como algo mais humano e menos pragmático. Dentre as tendências metodológicas que vão ao encontro desse objetivo, podemos mencionar a Modelagem Matemática.

No final dos anos de 1970, diversas discussões sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática emergiram, fato esse que ao final das duas últimas décadas do século XX impulsionou diversos pesquisadores a se alinharem a tal movimento, possibilitando debates sobre o uso e aplicações de Modelagem Matemática na Educação Matemática que, até aquele momento era utilizada apenas no campo da Matemática Aplicada. Desde então, a comunidade de Modelagem Matemática na Educação Matemática vem se ampliando, dando margem a abertura de criações de espaços e eventos que fomentem o entendimento sobre o uso da Modelagem no ensino. O principal evento nacional sobre esse contexto é a Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). Esse evento teve sua primeira edição em 1991, ocorrendo a cada dois anos, e no ano de 2019 completou sua décima primeira edição.

Face ao exposto, recorreremos aos anais das edições das CNMEMs, para identificar e analisar que tipos de atividades e pesquisas vêm sendo desenvolvidas sobre Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Além

disso, buscamos trabalhos que envolvessem a Modelagem Matemática e os Registros de Representação Semiótica nos diferentes níveis de ensino. Isso com o objetivo de conhecer de modo mais profundo nosso campo de pesquisa.

Nesse sentido, selecionamos os anais de todas as edições da CNMEM que já foram realizadas, com exceção da segunda conferência, cujos anais não foram encontrados, e da 11ª CNMEM, realizada em novembro de 2019. É importante ressaltar que olhamos para todos os trabalhos publicados em todas as modalidades nos anais da conferência: as comunicações científicas (CC), relatos de experiência (RE), posters (PO) e minicursos (MC).

A primeira edição da CNMEM, é composta apenas por CC, e a partir da terceira edição da conferência os trabalhos são organizados em CC, RE e PO. Somente a partir da oitava edição a modalidade de MC foi incluída. Considerando essas delimitações e esse olhar mais geral sobre os anais da conferência, demos início à leitura e busca pelos textos que satisfizessem nossos critérios. Lemos todos os títulos e as palavras-chaves dos trabalhos e, quando necessário, lemos os resumos e selecionamos os trabalhos que tinham relação com a problemática da nossa investigação.

Na medida em que selecionávamos os trabalhos que nos interessavam: aqueles que tratam da Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e aqueles que usavam a teoria dos Registros de Representação Semiótica nos diferentes níveis de ensino, a investigação nos anais de cada edição da CNMEM mostrava a escassez de pesquisas com Modelagem ou com Modelagem e Registros de Representação Semiótica desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, sentimos a necessidade de contabilizar quantos eram os trabalhos desenvolvidos em cada nível de ensino, pois parecia-nos escassos os trabalhos que tratavam do Ensino Fundamental, de forma geral. Saber sobre os trabalhos desenvolvidos com estudantes do Ensino Fundamental era importante, pois a faixa etária dos estudantes estava próxima, dependendo do ano de estudo (quinto e sexto ano, por exemplo).

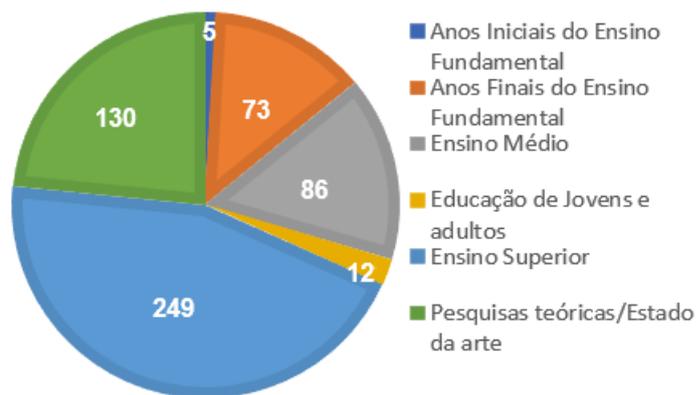
Para tanto, construímos categorias de trabalhos, na medida em que líamos os títulos, palavras-chave e resumos dos textos. Desse processo emergiram as seguintes categorias, mais abrangentes: 1) trabalhos que relatam, de alguma forma, práticas de sala de aula e 2) trabalhos teóricos, tais como os de estado da arte.

Dentro da categoria 1) que nos interessa, ainda podemos organizar os textos (independente da modalidade de submissão) nas seguintes subcategorias:

- 1.1 Educação de Jovens e adultos.
- 1.2 Anos Iniciais do Ensino Fundamental.
- 1.3 Anos Finais do Ensino Fundamental.
- 1.4 Ensino Médio.
- 1.5 Ensino Superior.

A quantidade de trabalhos emergentes em cada uma das categorias e subcategorias está discriminada no Gráfico 1 a seguir:

GRÁFICO 1 – CNMEM - ATIVIDADES DE MODELAGEM NOS DIFERENTES NÍVEIS DE ENSINO



FONTE: Elaborado pela autora.

É importante ressaltar que dentre os trabalhos que foram lidos, os que possuíam propostas de atividades que ainda não foram desenvolvidas em sala de aula, foram consideradas como trabalhos em “Pesquisas teóricas/Estado da arte”. Os trabalhos que foram realizados por meio de levantamentos bibliográficos em eventos ou que foram pesquisas teóricas também fazem parte dessa categoria.

Neste sentido, foram abertos cerca de 555 trabalhos das nove edições da CNMEM, porém nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental foram encontrados apenas cinco trabalhos desse total. Esse dado mostra, por si só, que as pesquisas nesse nível de ensino, quanto a Modelagem Matemática, ainda são incipientes e que a preocupação sobre essa temática ainda é bastante recente.

A partir desses dados coletados, vamos discutir quem foram os autores, qual a temática e os objetivos dos trabalhos, com a finalidade de identificar quais foram as práticas e as análises feitas dentro de sala de aula dos Anos Iniciais e quais as percepções sobre estes trabalhos nesse nível de ensino.

Para auxiliar esse debate, apresentamos no Quadro 1, a seguir, um resumo das informações sobre os cinco trabalhos publicados nos anais das CNMEMs, que versam sobre o uso da Modelagem nos Anos Iniciais.

QUADRO 1 – IDENTIFICAÇÃO DOS TRABALHOS PUBLICADOS NAS CNMEMS SOBRE MODELAGEM NOS ANOS INICIAIS

Edição da CNMEM/ano	Modalidade do trabalho	Autores	Título	Problema/Objetivo
VI – 2009	RE	DIAS, Josete Leal; CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque.	Diálogos Com/Na Modelagem Matemática Nas Séries Iniciais	Apresentar os resultados de uma experiência de atividade de Modelagem com estudantes do 3ºsérie/4º ano.
VII – 2011	CC	SOUZA, Larissa Borges de; SANTIAGO, Ana Rita Cerqueira Melo; LUNA, Ana Virginia de Almeida.	Uma Análise Sobre O Comportamento Dos Motoristas No Trânsito Numa Perspectiva Transdisciplinar	Possibilitar aos estudantes vivenciarem a Matemática de forma funcional, reflexiva e crítica a partir de situações da realidade que envolvam outras áreas do conhecimento.
IX – 2015	CC	GEROLÔMO, Ângela Maria Lourenção; MILANI, Cíntia da Silva; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de.	Indícios De Aprendizagem Significativa Em Atividade De Modelagem Matemática Nos Anos Iniciais Do Ensino Fundamental	Buscar indícios de aprendizagem significativa em atividades desenvolvidas nos Anos Iniciais
IX – 2015	CC	BUTCKE, Daiane Aparecida Pego; TORTOLA, Emerson.	Por Que A Maioria Das Embalagens Tem Formato De Paralelepípedo? Uma Investigação Por Meio Da Modelagem Matemática Nos Anos Iniciais	Discutir como ocorre a formalização de conhecimentos matemáticos no âmbito de uma atividade de Modelagem Matemática.
X – 2017	RE	PINHEIRO, Gabriel de Souza;.	Análise Combinatória: Um Estudo De	Investigar como construir o pensamento combinatório com alunos

		SANT'ANA, Marilaine de Fraga.	Investigação Nos Anos Iniciais	dos Anos Iniciais em ambiente investigativo.
--	--	-------------------------------------	-----------------------------------	---

FONTE: Elaborado pela autora.

Ao analisarmos o primeiro trabalho, descrito no Quadro 1, de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais dos autores Josete Leal Dias e Maria Isaura de Albuquerque Chaves, que possui como título “Diálogos Com/Na Modelagem Matemática Nas Séries Iniciais”, verificamos que ele se inicia apresentando argumentos favoráveis de se utilizar a Modelagem de acordo com os referenciais de alguns autores (os mesmos utilizados nessa investigação). Além disso, mesmo não sendo o objetivo do trabalho, as autoras fazem um pequeno respaldo sobre a quantidade de trabalhos nesse nível de Ensino, nos seguintes locais: CNMEM, ENEM, EBEM e Banco de Dissertações e Teses, apresentando então que são muito incipientes os trabalhos de Modelagem nos Anos Iniciais. que foram pesquisados até o ano de 2008.

Com relação a atividade, ela foi desenvolvida de acordo com o tema que os alunos escolheram, no caso Pirataria e Qualidade de Vida. Tal atividade, permitiu que os alunos problematisassem e investigassem essa temática através de enquetes realizadas pelas crianças na comunidade escolar. No decorrer da atividade a primeira autora relatou os desafios quanto a maneira de orientação e organização dos dados para a construção do modelo matemático, que tinha por objetivo introduzir o conceito de Tratamento da Informação. Em suma, esse trabalho é um tanto quanto relevante para a nossa pesquisa pois a visão das autoras referente ao registro utilizado (mesmo não sendo o objetivo da pesquisa analisar os registros de acordo com a teoria dos RRS) no caso o tratamento da informação, possibilitou ao educando acesso a outros tipos de registros e até mesmo a tratamentos para uma melhor organização e visualização da representação do registro. Além de que são registros (gráficos e figurais) que também foram construídos pelos sujeitos participantes da nossa pesquisa.

Além desse Relato de experiência, a CC da IX edição da CNMEM, do trabalho dos autores Daiane Aparecida Pego Butcke e Emerson Tortola, também tem o mesmo caráter de pesquisa do trabalho citado anteriormente. Visto que os autores comentam um pouco sobre a escassez de trabalhos nesse nível de ensino e

posteriormente realizam atividades de Modelagem de acordo com o tema que surgiu por curiosidade dos alunos. O objetivo do trabalho era discutir a sistematização de conceitos matemáticos, ensinados por meio de uma atividade de Modelagem. O trabalho mostra como a Modelagem pode ser usada para introduzir novos conceitos, ao invés de abordar apenas o conhecimento matemático que os alunos já têm. O texto conclui que inserir Modelagem Matemática nos Anos Iniciais, constitui uma estratégia de ensino e aprendizagem, de maneira rica e que explora a criatividade dos alunos, fazendo com que se sintam valorizados em sala de aula. Além de que a atividade em específico sobre o formato das embalagens, funcionou como uma ponte para considerar os conhecimentos matemáticos que os alunos já possuíam, permitindo que a professora formalizasse e discutisse novos conceitos matemáticos.

Os demais trabalhos (VII, IX, X edição da CNMEM), apresentaram também aspectos positivos para a nossa investigação, pois discutem a construção de modelos matemáticos em conjunto com os alunos, de maneira que os autores percebem que os modelos matemáticos surgem a partir das discussões no decorrer da atividade de Modelagem. Além de que tais discussões, mostram que as atividades de Modelagem demandam que os envolvidos se inteirem de assuntos sociais, o que apresenta o seu caráter interdisciplinar e transdisciplinar, permitindo que discussões reflexivas emergjam. Além disso, apresentam características da utilização de Modelagem Matemática como uma facilitadora da aprendizagem e apresentam, quando mostram resoluções de estudantes, uma riqueza e diversidade do uso de diferentes registros para se solucionar um mesmo problema. Ou seja, mesmo que os trabalhos não tenham o objetivo de observar e analisar os registros que são criados pelos alunos, eles apresentam essa diversidade ao relatarem episódios de sala de aula.

Dentre todos os trabalhos encontrados nas edições da CNMEM no que se refere ao uso da teoria dos Registros de Representação Semiótica, faz-se necessário registrar que não foi encontrado nenhum trabalho sobre o uso da teoria nos Anos Iniciais. No entanto encontramos trabalhos que utilizam esse referencial teórico em outros níveis de Ensino, sendo todas as submissões na modalidade de Comunicações Científicas. Diante disso, segue no Quadro 2, a identificação dos

trabalhos cujo termo “registros de representação semióticas” aparecem ou no título ou nas palavras-chave<sup>4</sup>.

QUADRO 2 – IDENTIFICAÇÃO DOS TRABALHOS PUBLICADOS NAS CNMEMS SOBRE RRS E MODELAGEM MATEMÁTICA

Edição da CNMEM	Autores	Título
IV – 2005	VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Maria de Almeida.	Modelagem Matemática e registros de representação semiótica: um exemplo abordando o trabalho infantil no Brasil.
V - 2007	VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Maria de Almeida.	O uso de diferentes registros em atividades de Modelagem Matemática
VI – 2009	SILVA, Karina Alessandra Pessoa da; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de.	Modelagem Matemática e semiótica: algumas relações.
VI – 2009	SOUZA, Ednilson Sergio Ramalho de; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito.	O objeto modelo matemático e suas diversas representações semióticas: uma concepção de Modelagem Matemática.
VI – 2009	ROSA, Claudia Carreira de; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de.	O fenômeno de congruência em registros de representação semiótica: análise de uma atividade de modelagem matemática.

FONTE: Elaborado pela autora.

O primeiro trabalho foi publicado na IV edição da CNMEM, tem autoria de Rodolfo Eduardo Vertuan e Lourdes Maria Werle de Almeida, tem como título “Modelagem Matemática e registros de representação semiótica: um exemplo abordando o trabalho infantil no Brasil”, e por objetivo promover um ensino no qual os próprios alunos construam conhecimento sobre determinados objetos matemáticos e sobre a realidade que os cerca, investigando e refletindo tanto a respeito das habilidades cognitivas e das estratégias que mobilizam em uma atividade, quanto o meio social em que vivem, além de utilizar diferentes registros de representação para os conceitos matemáticos envolvidos no decorrer de uma atividade de Modelagem Matemática.

<sup>4</sup> Não consideraremos aqui os trabalhos que utilizem a teoria dos RRS e cujo termo não apareceu no título ou palavras-chave. Caso considerássemos isso, outros trabalhos deveriam ser considerados no nosso estudo. Entendemos que se o termo não aparece no título ou palavras-chave essa não é uma teoria central para a pesquisa.

Mesmo não considerando este trabalho como sendo parte integral do objetivo de estudo dessa pesquisa, o olhar do autor perante a Modelagem e os RRS ajudamos a compreender o que seria cada teoria e qual a relação que uma teoria tem com a outra. Nesse texto, é perceptível a visão crítica que os autores – que eram também os professores orientadores da atividade proposta – têm em relação ao processo de ensino de Matemática. Isso porque, o texto apresenta uma situação problema em que os alunos são convidados a investigar um problema real e se questionarem sobre ele. Para tanto, utilizaram diferentes representações Matemáticas que permitiram compreender os conceitos abordados. Por exemplo, ao se questionarem sobre o tema da atividade, os alunos utilizaram a linguagem natural<sup>5</sup>. Para explorar a situação foi necessário passar da linguagem natural para a linguagem Matemática, ocasionando o que Raymond Duval chama de conversão, como explicaremos adiante, para então discutir o problema social em questão: trabalho infantil.

O segundo trabalho, publicado nos anais da V edição da CNMEM, também foi escrito pelos autores Rodolfo Eduardo Vertuan e Lourdes Maria Werle de Almeida e tem por título “O uso de diferentes registros em atividades de Modelagem Matemática”. Tal atividade foi desenvolvida por um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Os autores tinham por objetivo analisar diferentes registros em diversas atividades desenvolvidas neste grupo em específico.

A atividade de Modelagem que foi desenvolvida pelos estudantes de Licenciatura em Matemática iniciou com a curiosidade dos alunos pelo tema de “relacionamentos” e de uma matéria da revista VEJA. Visando isso, os alunos discutiram, investigaram e criaram um modelo matemático para descobrir qual “a probabilidade de uma pessoa não se casar diante da idade que tem”. A leitura desse trabalho contribuiu para a construção da nossa pesquisa, em muitos aspectos. Primeiro, porque contribuiu para o planejamento das atividades que desenvolvemos, ao pensarmos, por exemplo, na forma como as questões seriam postas aos estudantes, e como poderíamos orientar, quando necessário, a mudança de um registro para outro. Segundo, porque nos mostrou uma possibilidade para analisar os registros dos alunos em atividades de Modelagem Matemática, de acordo com a teoria dos RRS.

---

<sup>5</sup> Esse conceito será abordado na seção sobre a teorias dos registros de Representações semióticas.

Na VI edição foram encontrados três trabalhos que fazem referência aos registros de representação semiótica, sendo o primeiro trabalho desta edição escrito pelas autoras Karina Alessandra Pessôa da Silva e Lourdes Maria Werle de Almeida, que tem por título “Modelagem Matemática e semiótica: algumas relações”. Nesse texto são apresentados alguns resultados da pesquisa de Mestrado da primeira autora, que foi fundamentada nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e relações entre a Semiótica de Peirce e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Neste sentido, o trabalho tem por objetivo apresentar as análises que foram feitas de uma atividade de Modelagem Matemática que faz uso de diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático “volume do cilindro”.

O trabalho apresentou algumas considerações teóricas mediante a atividades de Modelagem Matemática, além da relação entre a teoria dos RRS e a Semiótica de Pierce. Utilizaram uma atividade publicada nos anais da CNMEM de 2007 para realizar as análises com base nessas três teorias. Neste sentido, a maneira como as autoras olharam para a resolução da atividade para identificar as etapas de Modelagem pela teoria de Kehle Cunningham e as considerações para identificar se houve um entendimento do estudo por meio dos registros, mostrou uma maneira de como poderíamos proceder nas análises.

O segundo trabalho, é dos autores Ednilson Sergio Ramalho de Souza e Adilson Oliveira do Espírito Santo, que tem como título “O objeto modelo matemático e suas diversas representações semióticas: uma concepção de Modelagem Matemática”, assim o trabalho tem por objetivo propor a incorporação dos estudos de Duval ao processo de Modelagem Matemática, buscando responder à seguinte questão de pesquisa: como favorecer significado à diversidade de representações Matemáticas aplicadas durante o processo de ensino-aprendizagem de Matemática?.

O artigo, inicia com uma reflexão sobre onde podemos encontrar a Matemática, e que as equações Matemáticas podem ser representadas como ferramentas para o auxílio na aprendizagem do estudante, tanto em aulas de Matemática, quanto em aulas de física e química. Neste sentido, os autores procuram incorporar qual a diferença entre uma representação e um modelo matemático, sendo que “Todo modelo matemático é uma representação, mas nem

toda representação constitui em um modelo” (SOUZA; SANTOS, 2009) tentando assim incorporar os modelos e representações Matemáticas com a teoria de Duval.

Tomando como referência essa discussão, podemos afirmar também que nem toda representação é um registro de representação semiótica, pois para que ela seja compreendida como tal, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 34) são essenciais três condições: 1) a representação precisa ser identificável; 2) o tratamento, que consiste em transformar um registro de um objeto matemático dentro do mesmo registro, como por exemplo simplificar uma fração; 3) a conversão, que consiste em converter um registro, ou seja realizar uma mudança de registro. Nesse trabalho, portanto, assumimos, tal como Almeida, Silva e Vertuan (2012) que os modelos são representações e que nas atividades de Modelagem, os modelos matemáticos são aqueles que podem ser reconhecidos como RRS. Ou seja, que satisfazem as três condições indicadas nesse parágrafo.

O terceiro trabalho, das autoras Claudia Carreira da Rosa e Lourdes Maria Werle de Almeida, que tem como título: O fenômeno de congruência em registros de representação semiótica: análise de uma atividade de modelagem matemática, visa investigar os Registros de Representação Semiótica emergentes em atividades de Modelagem no Ensino Médio, associado as conversões de fenômenos de congruência. Além disso, é possível analisar e perceber nesse trabalho uma discussão acerca das orientações e maneiras que o professor dispõe de suas aulas para que emerjam conversões.

As autoras discutem a importância das representações semióticas, além da distinção do que seria uma representação e o que seria uma representação semiótica. Distinção essa que também é considerada na nossa investigação. Acredito, que tal trabalho, contribui de forma significativa para nosso estudo sobre o tema, pois as autoras discutem também os processos de tratamentos e conversões, o que é o nosso foco perante os registros que surgiram nas quatro atividades desenvolvidas nos Anos Iniciais. Ademais, as autoras utilizam a perspectiva de Lourdes Werle de Almeida que considera a Modelagem Matemática, como sendo “uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não essencialmente matemático”. Face o exposto, as autoras concluem que as atividades de Modelagem Matemática favorecem a aprendizagem dos alunos, na qual os mesmos possuem uma postura mais reflexiva

em relação ao objeto matemático que visa ser estudado, no caso das autoras, os fenômenos de congruência.

Ao analisar o Gráfico 1 e os Quadros 1 e 2, é possível perceber que a preocupação em usar Modelagem desde os Anos Iniciais é recente, visto que o primeiro trabalho encontrado que foi realizado nos Anos Iniciais foi somente em 2009 e mesmo se passando dez anos são incipientes os trabalhos que foram desenvolvidos neste Nível de Ensino em específico. Esse fato pode estar relacionado, dentre outros motivos, ao fato de que os cursos de Licenciaturas que formam professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, como os cursos de Pedagogia, ou mesmo a formação de professores em nível médio, não têm a Modelagem incorporada aos seus currículos. Ao mesmo tempo, os cursos que a incorporam (como as Licenciaturas em Matemática e em Ciências Exatas) não formam professores que podem atuar nos Anos Iniciais.

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DOS ANOS INICIAIS

Nessa seção, discutimos sobre a concepção de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática que norteou nossa investigação. Inicialmente teceremos considerações quanto aos aspectos da formação de professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais e algumas perspectivas do que seja Modelagem, posteriormente tecemos considerações sobre o que compreendemos por modelo matemático e as rotas de Modelagem que são propostas por Barbosa (2006), para analisarmos o ambiente de aprendizagem gerado por atividades de Modelagem na sala de aula.

#### 3.1 A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES E OS ASPECTOS DA MODELAGEM

Na sala de aula, a dificuldade dos estudantes quanto a compreensão do uso da Matemática fora do contexto escolar é enfrentada pelos professores ao longo dos anos e níveis de ensino, na qual estão presentes questões como “Professora, para que eu preciso estudar isso? Onde eu vou usar isso?”. De certo modo, tais questões são levantadas por dificuldades que os estudantes enfrentam ao longo de sua vida escolar, seja pelas particularidades de cada aluno, pela metodologia de ensino que o professor utiliza em suas aulas, pela forma como o professor entende o que seja Matemática, dentre outros motivos.

Segundo Nacarato et al (2009), observa-se que as professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em sua maioria possuem uma formação no curso de formação de docentes em Nível Médio (antigo magistério) e/ou no curso de graduação em Pedagogia. Além disso, de acordo com a mesma autora, as disciplinas que compõem esses cursos são ainda centradas em processos metodológicos, desconsiderando fundamentos da Matemática para o seu desenvolvimento.

Pensando nisso, Carvalho (1990), analisa tal situação de duas maneiras, a primeira é em relação a concepção de Matemática que norteia o ensino dessa disciplina e a segunda é o desgosto por essa área do conhecimento que geralmente é manifestada por pessoas que procuram o curso de habilitação ao Magistério.

O primeiro aspecto, segundo Carvalho (1990) é a concepção de que a Matemática é uma área de conhecimento pronta, acabada e perfeita. Tendo como consequência dessa visão dentro da sala de aula, uma imposição autoritária do conhecimento da Matemática, na qual o professor é o transmissor do conhecimento para um aluno passivo, incapaz de construir conceitos matemáticos. Além disso, outra consequência dessa visão é a de que o aluno que possui uma nota boa em Matemática é considerado inteligente, com habilidades superiores já que é uma ciência dita como nobre e perfeita, na qual só pode ser entendida por mentes brilhantes e o aluno que não obtém boas notas é considerado incapaz.

Além disso, no que diz respeito ao segundo aspecto, Carvalho (1990) afirma que é importante refletir, que os alunos de Habilitação ao Magistério, muitas vezes não puderam compreender, de fato, ao longo de seus anos escolares a Matemática que já é conhecida por eles. De fato, é essencial que o professor com formação polivalente tenha uma visão ampla e estruturada da disciplina para que o mesmo seja capaz de ministrar e ensinar os conceitos de Matemática nos Anos Iniciais.

A respeito do professor polivalente, de acordo com Cruz e Neto (2012) esse é o professor que domina as áreas do conhecimento do currículo nacional dos Anos Iniciais, além de que desenvolve trabalhos interdisciplinares, ou seja, é aquele profissional que contribui com a construção do conhecimento dos seus alunos, buscando desenvolver a escrita, a leitura e a contagem.

Considerando essas indicações, torna-se necessário tanto o desenvolvimento de pesquisas que tratem da formação de professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, no que se refere à Modelagem, quanto o desenvolvimento de investigações com estudantes nesse nível de ensino, para compreendermos como a Modelagem se efetiva nesse contexto.

Os alunos precisam aprender desde cedo a se comunicar matematicamente, se valer da linguagem Matemática, para serem capazes de interpretar e produzir escritas numéricas, levantar hipóteses e observar as regularidades de determinados conceitos matemáticos, utilizando-se da linguagem oral, dos seus registros e propriamente dito da linguagem Matemática, para registrar resultados de experiências e comunicá-los de modo a ser compreendido (BRASIL, 1997). Tal compreensão fundamenta a maneira como o aluno irá olhar para a Matemática.

Nesse contexto, a Modelagem Matemática na Educação Matemática pode oportunizar aos estudantes, o desenvolvimento de habilidades necessárias para lidar com a Matemática fora do contexto escolar, pois permite que analisemos diversas situações por meio desse ferramental. Embora essa seja uma ideia comum às diversas concepções de Modelagem Matemática, as formas diversas de compreendê-la conduzem a formas também diversas de efetivá-las na prática pedagógica. Na próxima subseção, apresentamos e discutimos algumas concepções de Modelagem, com ênfase na que norteou esse trabalho.

### 3.2 CONCEPÇÕES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para Bassanezi (2004, apud TORTOLA, 2016, p. 91), fazer Modelagem Matemática é como montar um quebra-cabeça, porém, nesse quebra-cabeça as peças não são determinadas a priori, elas são construídas no decorrer do caminho. Isso porque analisar situações-problema em busca de explicações sobre um fenômeno não é um procedimento linear e bem delimitado, os caminhos possíveis não se limitam a um só. Por um lado, um modelador pode levantar hipóteses diferentes e ser conduzido a encaminhamentos distintos; por outro lado diferentes modeladores podem adotar diferentes abordagens Matemáticas e obter, ainda que diferentes, resultados que se aproximam.

Esse pensamento orienta sobre as diversas possibilidades de se trabalhar com atividades pautadas na Modelagem Matemática, nos dando ideias de vários caminhos que podemos desenvolver com as crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Dentre essas possibilidades, Barbosa (2001) apresenta a Modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a questionar e ou investigar situações com referências na realidade por meio da Matemática.

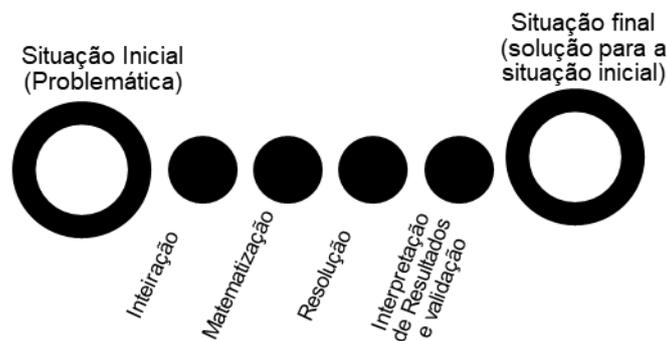
Essa proposta, requer a interação e o questionamento de temáticas que vão gerar atividades a ser realizadas em sala de aula, orientadas pelo professor, partindo do conhecimento que o aluno tem e de um tema que seja do seu interesse.

Nesse sentido, o uso da Modelagem parece bastante pertinente, pois, para Almeida, Silva e Vertuan (2012), atividades de Modelagem Matemática permitem a construção de modelos matemáticos através de problemas não essencialmente

matemáticos, ou seja, uma forma de mostrar como ideias Matemáticas são utilizadas em situações com referência na realidade; como podemos representar diferentes situações, por meio de conceitos matemáticos e também nos permite questionar a “exatidão” Matemática, já que nessas situações, lidamos com aproximações o tempo todo e outros fatores influenciam as respostas para uma situação matemática.

Ainda nesse contexto, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012) a atividade de Modelagem Matemática envolve um conjunto de procedimentos, que são descritos como uma situação-inicial, uma situação desejada e um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para a situação final. Sendo que esse conjunto de procedimentos compreende: inteiração, matematização, resolução e interpretação de resultados e validação, conforme ilustra a Figura 1:

FIGURA 1 – FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA



FONTE: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012).

A adaptação da Figura 1 foi feita pensada, no sentido de que as fases da Modelagem não são lineares. Neste sentido, me aventuro a dizer que o caminho percorrido por meio de círculos demonstra que as fases vêm e vão, não possuindo uma sequência de passos a ser seguida. Na figura original, as etapas dos procedimentos são guiadas por uma seta, denotando uma direção que deve ser seguida (ainda que imaginemos que não tenha sido a intenção dos autores ao lermos o livro), entendendo assim, que a atividade se inicia com a situação inicial e durante o caminho percorrido até a situação final, somente será de ida.

No que diz respeito a inteiração, podemos considerar como uma etapa que representa um primeiro contato do professor e dos estudantes com uma situação-

problema, na qual tem por finalidade conhecer as características e especificidades da situação a ser estudada. Ou seja, se “inteirar” sobre o tema. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para a construção e resolução final do problema. Além de que as informações são coletadas por meio de dados qualitativos e quantitativos.

A primeira etapa é identificada e estruturada por meio de uma linguagem natural e não diretamente Matemática, gerando assim a necessidade de uma transformação de uma representação (língua natural) para outra (linguagem Matemática). Essa linguagem Matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido. Na qual, se origina a segunda etapa da Modelagem Matemática, a Matematização, que é caracterizada pelos processos de transformação de linguagem, ou seja, da linguagem natural (entendida aqui como uma linguagem que não utiliza registros numéricos, algébricos, gráficos) para a linguagem Matemática, que por sua vez são realizadas a partir de formulação de hipóteses, de seleção das variáveis e a simplificações das informações obtidas.

A terceira fase, consiste na construção de um modelo matemático, que tem por finalidade descrever, analisar e responder às questões formuladas sobre o problema investigado. A última fase diz respeito a interpretação de resultados e validação das respostas dadas à situação de estudo. Essa fase, resume-se a capacidade de avaliar os modelos e todo o processo percorrido, a fim de analisar se as respostas obtidas para o problema são coerentes.

Considerando, portanto, as concepções de Modelagem Matemática apresentadas anteriormente, a saber: a de Bassanezi (2004); Barbosa (2001) e de Almeida, Silva e Vertuan (2012), nesta investigação, pelas características pedagógicas que assume, optamos por seguir as orientações de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e as de Barbosa (2001; 2004; 2007).

Independente da concepção de Modelagem Matemática adotada, Almeida, Silva e Vertuan (2012) indicam alguns motivos favoráveis ao uso da Modelagem na sala de aula. De acordo com os autores, atividades de Modelagem Matemática tendem a favorecer: a ativação de aspectos motivacionais e relações com a vida fora da escola; a viabilização de recursos tecnológicos dentro da sala de aula; a realização de trabalhos cooperativos; o desenvolvimento do conhecimento crítico e

reflexivo; o uso de diferentes registros de representação; a ocorrência de aprendizagem significativa.

É perceptível que muitos alunos possuam desavenças com a disciplina de Matemática por não conseguirem enxergar relevância, não conseguirem enxergar aplicações do que se foi estudado, visto que muitas vezes ela é concebida sem um contexto. É nesse sentido que Almeida, Silva e Vertuan (2012) justificam a importância da visualização da aplicação dos conceitos, como uma estratégia para o sucesso nas aulas de Matemática. Numa aula de Matemática, conduzida de acordo com os pressupostos da Modelagem, por exemplo, os estudantes podem ser convidados a analisar o efeito de um analgésico no organismo humano. Os estudantes, orientados pelo professor, podem descrever por meio de uma função matemática o tempo de duração e efeito de um analgésico quanto se ingere um comprimido a cada oito horas. A partir dessa problematização, é possível ainda, discutir sobre as consequências da ingestão de remédios sem prescrição médica, evidenciando o papel sociocrítico da Matemática.

Outro aspecto que favorece os alunos em atividades de Modelagem, é “a viabilização de recursos tecnológicos dentro da sala de aula”. Pesquisas sobre Modelagem no ensino têm mostrado a relação entre Modelagem e uso de tecnologias (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2019). Essas pesquisas mostram que o uso de softwares, como GeoGebra, permitem a visualização de diferentes registros de representação, ao mesmo tempo: representações gráficas, algébricas e tabulares. Isso, de acordo com Raymond Duval, sustenta a aprendizagem de Matemática. Por meio de um software, por exemplo, o estudo da sequência de Fibonacci pode ser mais abrangente, aprofundado, pois o software permite a visualização de diferentes registros de representação e com maior quantidade de termos dela.

Em atividades de Modelagem, todo esse processo é percorrido por professor e estudantes, normalmente organizados em grupos, o que facilita as discussões e negociações de significados entre os participantes da atividade para a elaboração de representações matemáticas que a descrevam.

Além disso para Almeida, Silva e Vertuan (2012), os conhecimentos, as discussões, a organização e a resolução de um determinado problema são advindos da construção de uma variedade de representações, além de que a solução final de

uma atividade de Modelagem associa-se a uma representação Matemática. Podendo esta, ser um gráfico, uma tabela, uma equação, um desenho entre outros. Ou seja, um modelo matemático.

### 3.3 ROTAS DE MODELAGEM NOS ANOS INICIAIS

Pensando de um ponto de vista sociocultural, as atividades de Modelagem Matemática tentam potencializar debates e tomadas de decisões em ambientes sociais, a fim de contribuir com a construção do pensamento crítico e matemático, pois é possível utilizar tais intervenções matemáticas em problemas do cotidiano.

Quando nos referimos as atividades de Modelagem, várias hipóteses são levantadas e analisadas pelos alunos participantes, conduzindo-os a diferentes interpretações sobre uma mesma situação. E, de acordo com Barbosa (2007), não podemos prever todas as hipóteses que os alunos irão levantar ao tentar solucionar a situação-problema de uma atividade de Modelagem. No entanto, quando pensamos em atividades de Modelagem nos Anos Iniciais, podemos tentar antever que conceitos matemáticos os alunos podem utilizar, de acordo com o repertório matemático que eles já têm ou que pode ser construído por meio dessa atividade. Nesse nível de ensino, de acordo com Tortola (2012), é possível prever alguns conceitos matemáticos que poderão ser usados pelos estudantes e algumas hipóteses que podem emergir.

Nesse sentido, o professor antes de iniciar sua aula, pode e, no nosso entendimento, deve pensar em quais podem ser as possibilidades de resolução que os alunos irão tentar usar, com o objetivo de preparar materiais necessários para auxiliá-los, sejam eles materiais didático manipuláveis ou de outra natureza. Assim, o ambiente de aprendizagem constituído pode ser mais rico devido a interação e discussão dos sujeitos participantes da atividade, pois de acordo com Barbosa (2004, p. 3)

Toda atividade escolar oferece condições sob as quais os alunos são convidados a atuar. Isso refere-se à noção de ambiente de aprendizagem apresentada por Skovsmose (2000). No caso de Modelagem, são colocadas algumas condições que propiciam determinadas ações e discussões singulares em relação a outros ambientes de aprendizagem (BARBOSA, 2004, p. 3).

Barbosa (2007), ao analisar o ambiente de aprendizagem gerado por uma atividade de Modelagem tem como foco as ações e discussões que emergem no decorrer da atividade. Para isso, os espaços de interações são caracterizados pelas discussões entre o aluno e professor e entre os alunos. Ao desenvolver diferentes tipos de discussões, como técnicas, matemáticas, reflexivas e paralelas, os estudantes constituem o que Barbosa (2007) denominou de *Rotas de Modelagem*.

Além dessas três discussões, relacionadas à construção de modelos matemáticos, ainda surgem durante a prática, no espaço de interação, as discussões paralelas. Sendo que as discussões paralelas não se referem aos conceitos matemáticos ou modelos matemáticos que auxiliam na resolução da problemática, mas sim à temática da atividade.

O conceito de Rotas de Modelagem, é empregado para denotar quais serão os procedimentos realizados pelos alunos nas atividades de Modelagem. De fato, as rotas de Modelagem nos fazem refletir sobre o modo de pensar dos alunos, levando-nos a analisar como as práticas discursivas são desenvolvidas e empregadas pelos estudantes e como se relacionam à construção de modelos matemáticos.

Para afunilar as noções de discussões que emergem durante uma atividade de Modelagem, Barbosa (2007) associa a das rotas de Modelagem com quatro tipos de discussões: Matemáticas, reflexivas, técnicas e paralelas.

As discussões Matemáticas referem-se aos conceitos e as ideias integralmente pertencentes a disciplina Matemática. As discussões técnicas, ao processo de matematização da situação em estudo. E, por sua vez, as discussões reflexivas referem-se a conexão entre os pressupostos utilizados na construção do modelo matemático e os resultados, bem como a utilização desses últimos na sociedade (BARBOSA, 2007, p.165).

Inspirado em Barbosa (2006), apresentamos no Quadro 3, uma síntese sobre as discussões que podem ser desenvolvidas durante a prática da atividade de Modelagem constituindo Rotas de Modelagem:

QUADRO 3 – ROTAS DE MODELAGEM

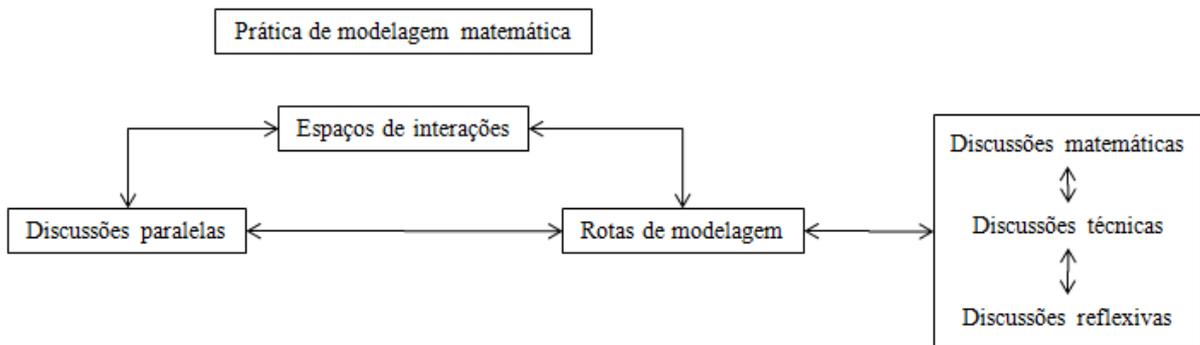
<b>Discussões Matemáticas</b>	<b>Discussões Técnicas</b>	<b>Discussões Reflexivas</b>
-------------------------------	----------------------------	------------------------------

Referem-se, estritamente, aos conceitos e algoritmos Matemáticos.	Referem-se aos processos de simplificação e matematização da situação-problema;	Referem-se à reflexão sobre os critérios utilizados na construção do modelo matemático e seu papel na sociedade.
---	---	--

FONTE: Adaptado de Barbosa (2006).

Considerando essas discussões, o espaço de interação gerado pelo desenvolvimento de atividades de Modelagem, pode ser esquematizado conforme a Figura 2:

FIGURA 2 – ESBOÇO DA PRÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA



FONTE: Adaptado de Barbosa (2007, p. 171).

De acordo, com Barbosa (2007), a Figura 2, coloca como foco a prática dos alunos no ambiente de Modelagem, e analisa o ambiente por meio das rotas de Modelagem.

Para exemplificar as discussões técnicas, matemáticas, reflexivas e paralelas, descrevemos, em linhas gerais, uma atividade que foi desenvolvida pelas alunas da disciplina de Prática Pedagógica de Matemática II, no curso de Licenciatura em Ciências Exatas, na UFPR/Jandaia do Sul, no segundo semestre de 2018, com os mesmos estudantes participantes da pesquisa deste trabalho, na qual os alunos deveriam responder a seguinte questão: Quanto de suco tem uma laranja?.

Os alunos foram convidados a analisar os tamanhos de cinco laranjas de qualidades diferentes, do tipo pêra e do tipo bahia. Para responder à questão problema, os estudantes, organizados em grupos, cortaram as laranjas, espremeram seus sucos, mediram a quantidade de suco de cada laranja (em ml), pesaram o

bagaço das laranjas (em gramas) e concluíram que a laranja mais cara (bahia) e menor, possuía mais suco do que a laranja mais barata e maior.

Neste sentido, quando o aluno inicia uma discussão sobre a maneira de como pode encontrar essa quantidade de suco de uma laranja, discussões técnicas emergem, pois a turma procurava encontrar um caminho para responder ao problema, ou seja, construía uma estratégia de resolução. Por meio dessas discussões, eles concluíram que precisariam pesar as laranjas, cortá-las, medir seu suco e pesar suas cascas e bagaços. Já quando o aluno se utilizava de conceitos matemáticos e utensílios para medir a quantidade de suco, discussões Matemáticas emergem, pois eles mediram a quantidade de suco, pesaram, compararam a quantidade de suco de cada laranja entre si e compararam as unidades de medida – quilogramas e miligramas.

Com relação a discussão reflexiva, ela surgiu quando os estudantes consideraram a laranja bahia sendo a melhor para se comprar, pois mesmo sendo a laranja mais cara, a quantidade de suco dela era maior que a da laranja mais barata. Além dessas discussões, as discussões paralelas também emergiram, e mesmo tal discussão não fazendo parte da construção de respostas Matemáticas, elas foram essenciais para a participação dos alunos.

E de acordo com alguns autores, alunos que são concebidos como sendo “maus” em Matemática, passam ser percebidos como “bons”, justamente pelo conhecimento que têm sobre a temática da atividade e não pelo procedimento e/ou conceito matemático explorado.

Contudo, é importante ressaltar que a forma como o professor orienta sua prática em sala de aula, interfere significativamente nas discussões que irão emergir e em que modelos serão (ou poderão ser) construídos pelos estudantes.

No âmbito da sala de aula, Barbosa (2004) indica que durante uma atividade de Modelagem Matemática, existem três possibilidades para organização desse ambiente de aprendizagem, nos quais as atribuições de professor e estudantes são diferentes, como mostra o Quadro 4:

QUADRO 4 – POSSIBILIDADES DE CONDUÇÃO PARA UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
--	--------	--------	--------

Formulação do problema	Professor	Professor	professor/aluno
Simplificação	Professor	professor/aluno	professor/aluno
Coleta de Dados	Professor	professor/aluno	professor/aluno
Solução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

FONTE: Barbosa (2004, p. 5).

De acordo com Barbosa (2004), no caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação, ou seja, o aluno com orientação do professor apenas solucionará o problema.

No caso 2, cabe ao professor a tarefa de formular o problema, enquanto os alunos deverão investigar o problema, coletar os dados, analisar e solucionar a problemática proposta, porém todas as etapas que couberam ao aluno neste caso terão orientação do professor.

Já no caso 3, trata-se do desenvolvimento de uma atividade que vai partir de um tema "não-matemático" que será escolhido pelos alunos juntamente com o professor. Além de que a formulação do problema, a coleta dos dados e a solução serão feitas por responsabilidades dos alunos com orientação do professor.

Dessa forma, do caso 1 ao caso 3, as responsabilidades dos estudantes vão sendo ampliadas nas aulas, bem como sua autonomia para desenvolver as tarefas. Independente da forma como o ambiente se estrutura, cabe ao professor orientar o processo para que modelos matemáticos que utilizem conceitos matemáticos já conhecidos ou que serão ensinados sejam construídos e/ou utilizados.

### 3.4 O QUE É UM MODELO MATEMÁTICO? NOSSAS PERCEPÇÕES

Quando olhamos o que significa modelo no dicionário<sup>6</sup> encontramos a seguinte definição: Aquilo que serve de objeto de imitação, e indo além encontramos como expressão de modelo matemático: Representação Matemática de um fenômeno físico humano etc., feita para que se possa melhor estudar o original.

---

<sup>6</sup> A definição de modelo, foi encontrada no seguinte link: <https://www.dicio.com.br/modelo/>.

Considerando essa definição e, no contexto dessa pesquisa, entendemos que o modelo matemático é a representação de um fenômeno que embora conheçamos, não temos acesso a ele, senão por via dessas representações. Por meio desses registros de representação, os modelos matemáticos, é possível construir um sistema que explique determinado fenômeno. Ou seja, é por meio do modelo matemático que conseguimos compreender, analisar, realizar previsões e explicar um determinado fenômeno, do ponto de vista matemático. A construção de modelos matemáticos é parte importante do processo de alfabetização Matemática, pois ele demanda que os estudantes reflitam, organizem e sistematizem seu pensamento para que possam representá-los por meio de conceitos matemáticos, conhecidos a priori ou não.

Face ao exposto, os modelos matemáticos são compreendidos por Almeida, Silva e Vertuan (2012) como um registro de representação semiótica. Assim, um modelo matemático pode ser “qualquer representação Matemática em estudo” como coloca Barbosa (2007, p.161), podendo ser a representação de um desenho, de um gráfico, símbolos, tabelas, equações, entre diversas outras notações, desde que representem, de alguma forma a situação de estudo. Entendemos que para que esses modelos sejam compreendidos como representações semióticas eles devem estar impregnados de intencionalidade (por parte do aluno).

Ou seja, é por meio do modelo matemático que conseguimos analisar uma série de dados que são construídos e coletados no decorrer de uma atividade de Modelagem. Acerca do conjunto de dados de referência é importante salientar que o olhar de cada aluno para eles é diferente, dependendo do repertório matemático e do nível de escolaridade do estudante. Então uma mesma atividade que é desenvolvida nos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental pode apresentar diferentes resultados, ainda que os dados disponíveis para os diferentes níveis de ensino sejam os mesmos.

Diante disso, o modelo matemático que pode surgir nos Anos Finais do Ensino Fundamental, provavelmente será construído de acordo com os conceitos matemáticos previstos no currículo escolar, podendo surgir representações de diagramas, tabelas, gráficos, equações, desenhos, entre outras. Já nos Anos Iniciais, podemos dizer que os estudantes “representam seus modelos matemáticos por meio da linguagem, mediante o uso de diferentes representações, seja por meio

de uma linguagem natural, numérica, tabular, gráfica ou figural, as quais podem servir como ponte para o uso de outras linguagens, como a geométrica e a algébrica” (TORTOLA, 2012, p.152). Nos Anos Iniciais, normalmente, os modelos construídos não permitem que façamos previsões sobre os fenômenos, como os modelos construídos por aqueles que têm um repertório matemático que inclui conhecimentos de natureza algébrica.

A atividade sobre a quantidade de suco de uma laranja, por exemplo, quando desenvolvida com alunos dos Anos Iniciais é analisada usando apenas as operações elementares (soma, subtração, multiplicação e divisão) e unidades de medida (grama e mililitros). Quando desenvolvida por alunos do Ensino Médio, eles podem calcular a quantidade de suco da laranja por meio do seu volume, sem precisar cortá-la. Podem ainda, descrever uma função que represente a quantidade de suco dela em função do peso, por exemplo.

Ainda que os modelos matemáticos, entendidos aqui como representações matemáticas que descrevem situações de diversas áreas do conhecimento, possam não ser passíveis de permitir previsões, quando considerados nos Anos Iniciais, é preciso que eles se façam presentes desde esse nível de escolaridade. Isso porque, as representações matemáticas de diferentes situações podem permitir que o aluno compreenda e argumente a respeito de diferentes temas, usando referencial matemático para isso.

Para a produção do modelo matemático diferentes conhecimentos matemáticos podem ser utilizados, e, nesse empreendimento, ganha espaço a criatividade. Um espaço para soluções e procedimentos variados, em que estruturas Matemáticas são construídas em conformidade com o que os sujeitos sabem e/ou procuram aprender para resolver a situação-problema; para que, no âmbito da sala de aula, os modelos produzidos por uns possam ser comparados com os produzidos por outros; para que a utilidade dos modelos possa ser discutida e avaliada. Nesse momento o sujeito produz interessantes insights, exemplos, aproximações, teoremas, algoritmos, que devem ser traduzidos de volta para a situação do mundo real, para que uma solução para o problema que orienta a investigação seja apresentada (POLLAK, 2012 apud TORTOLA 2016, p. 47).

Assim sendo, os processos matemáticos que permeiam a construção do pensamento matemático, lógico e crítico é primordial, diante disso faz-se necessário que seja contemplado desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental tais construções, pois nessa fase as crianças demonstram interesse em aprender

conceitos, técnicas e métodos que envolvem a sociedade em que está inserida, permitindo um maior interesse na Matemática.

É preciso que, além da diversidade de registros matemáticos construídos, as crianças possam operar dentro desse mesmo registro e compreender que diferentes representações referem-se a um mesmo conceito matemático. Essas ideias são discutidas na próxima seção.

#### 4 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

Para o empreendimento dessa pesquisa, consideraremos alguns conceitos, a saber: registros, tratamento e conversão, da teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, com o objetivo de desenvolver as análises dos registros dos estudantes, quanto aos modelos matemáticos construídos. Não é nosso objetivo discutir o processo de aprendizagem de Matemática dos estudantes, por meio dessa teoria, tampouco explorá-la nessa seção, pois trata-se de uma teoria complexa, que exige o estudo de outros conceitos que a constituem e que exigiria demasiado grupo de dados para as análises, com foco na aprendizagem.

O pesquisador Raymond Duval foi um filósofo e psicólogo francês, que buscou na psicologia cognitiva, contribuir com a Educação Matemática. E uma de suas contribuições diz respeito a obra intitulada "Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels", na qual ele investiga a aprendizagem Matemática por meio da teoria de RRS.

De acordo com Duval (2013), a dificuldade na compreensão em Matemática vem do uso "confuso" das diversas representações semióticas que são utilizadas para a compreensão da Matemática. Assim, os RRS são estudados e pesquisados a priori para a compreensão de diferentes usos de registros matemáticos, já que o processo de aprendizagem sobre um conceito matemático, só ocorrerá se for possível coordenar dois ou mais registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Em Matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático (DAMM, 2015, p. 167 apud TRAVASSOS, 2018 pg.61).

A aprendizagem na disciplina de Matemática apresenta características próprias, pois é uma ciência que necessita de representações para a sua compreensão. Os conceitos matemáticos são abstratos, são construções humanas que não podem ser percebidas pelo olfato, pelo tato, pela audição, etc... apenas por meio das suas representações. Então, é necessário recorrer a uma diversidade de representações, para que ocorra uma construção do conhecimento matemático.

Pois para representar uma quantidade, por exemplo uma quantidade de “dois” elementos, precisamos de uma representação, sejam ela numérica (como o número 2), em forma de desenho, em barra, em linha, etc, e essa característica é uma das grandes dificuldades no processo de ensino e também no de aprendizagem da Matemática. Pois diferente da física, botânica, geografia, etc, a Matemática não se descobre por meio de uma observação e da reflexão de um fenômeno por exemplo, então é necessário que busquemos representações para termos acesso a um objeto matemático.

Sendo assim, é primordial que o aluno busque não somente um tipo de representação para solucionar um determinado problema, mas que o professor apresente diversas representações Matemáticas de um mesmo objeto matemático, para que o aluno tenha uma diversidade de representações e possa compreender que possui diversas formas para se expressar um mesmo objeto matemático, e quanto mais registros for compreendido, maior será a apropriação da construção do conhecimento matemático. De acordo com Raymond Duval, essa diversidade de representações para um mesmo objeto matemático é essencial para que o o sujeito não confunda o conceito com a sua representação. Por exemplo, para que o estudante entenda que “2” é apenas uma das possíveis representações para o conceito “dois”, e não o conceito matemático em si, é preciso que ele reconheça em 2 gravetos, em 2 dedos, em “xx” o conceito matemático “dois”.

Face o exposto, ao considerar a necessidade de se reconhecer diferentes representações para que haja uma compreensão de um objeto matemático, Duval (2009 apud TRAVASSOS, 2018, p. 62), expressa que “[...] não se pode ter compreensão em Matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação”, pois como os objetos matemáticos não são acessíveis, procuramos por representações semióticas para ter acesso a esses objetos matemáticos.

Faz-se necessário então que o professor tenha clareza do que é um objeto matemático, pois para Damm (2008, apud BARRETO; OLIVEIRA, 2014) utilizar diferentes registros semióticos favorece a construção do conhecimento quando o professor contextualiza esses registros, pois serão essenciais para o empreendimento da utilização desses registros.

Mas, quais registros surgem em uma atividade de Matemática? Nessa investigação, consideramos os seguintes tipos de RRS, como representações matemáticas compreendidas como modelos matemáticos:

QUADRO 5 – QUAIS SÃO OS TIPOS DE REGISTROS SEMIÓTICOS

TIPO DE REGISTRO	O QUE É
Registro Língua Natural	Define-se como a língua que o estudante tem “afinidade”, é a que normalmente utilizamos para comunicação.
Registro Algébrico	Define-se como a expressão de relação entre números e variáveis.
Registro Numérico	É a representação composta somente por números, sejam eles: números decimais, fracionários, binários, etc. Consideraremos ainda que os registros que são específicos em tabelas, também serão considerados numéricos.
Registro Gráfico	É um formato de registro visual, podendo ser feito por meio de: barras, pizzas, plano cartesiano etc.
Registro Geométrico	Define-se como o registro de figuras geométricas planas ou em perspectiva, como por exemplo: uma reta numérica.

FONTE: Adaptado de Travassos (2018).

Além dos registros que estão expressos no Quadro anterior, consideraremos ainda o Registro em Língua Natural Oral, que será o registro falado pelos alunos durante as discussões no desenvolvimento das atividades.

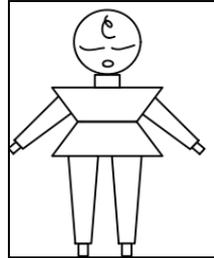
Com a finalidade de pensarmos sobre os registros indicados no Quadro 5, vamos pensar por exemplo, no seguinte problema de Modelagem: Qual é a quantidade total de tecido epitelial que reveste o corpo? Em outras palavras, quanto de pele você tem?

Como podemos observar, trata-se de uma questão que envolve cálculos de aproximação, podendo este ser resolvidos a partir das áreas de sólidos geométricos, uma função Matemática, entre outros. Neste sentido, sua solução pode envolver diferentes registros de representação semiótica<sup>7</sup>:

- Registro Geométrico:

<sup>7</sup> As representações apresentadas são apenas ilustrativas, produzidas pela pesquisadora, para exemplificar os tipos de registros que podem surgir em uma atividade de Modelagem Matemática.

FIGURA 3 – EXEMPLO DE REGISTRO GEOMÉTRICO:



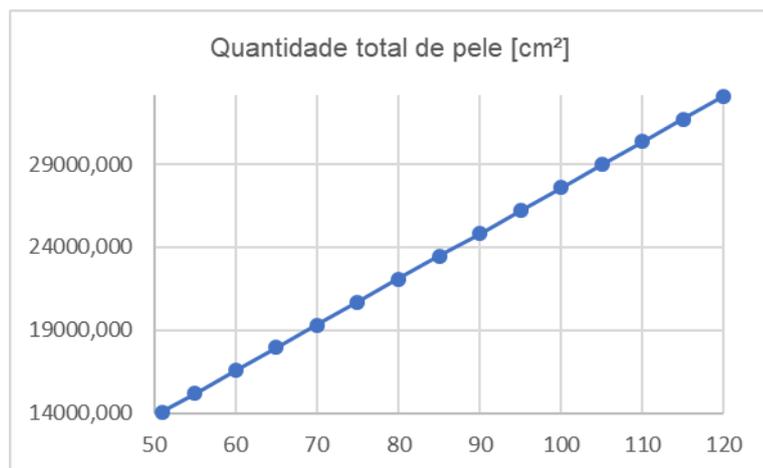
FONTE: Atividade de MM realizada pelo Matemática Multimídia<sup>8</sup>

- Registro na Língua Natural:

*Para determinar a quantidade de pele que uma pessoa tem, podemos considerar cada parte do seu corpo como sendo uma figura geométrica e a partir disso calcularmos quais as áreas de cada parte e assim por final, somamos a área de cada parte do corpo para descobrir quanto de pele a pessoa tem.*

- Registro Gráfico:

GRÁFICO 2 – EXEMPLO DE REGISTRO GRÁFICO (QUANTIDADE TOTAL DE PELE X PESO)



FONTE: Elaborado pela autora.

- Registro Numérico:

<sup>8</sup> Link do site: [https://m3.ime.unicamp.br/dl/1\\*DPKJzA0\\_MDA\\_116ef\\_](https://m3.ime.unicamp.br/dl/1*DPKJzA0_MDA_116ef_).

*Cabeça* → 962,11

*Pescoço* → 224

*Pé* → 506

....

*Corpo* → 14077,11

$$55 + 224 + 506 + \dots + 250 = 14077,11$$

- Registro Algébrico:

$$P = Q1 + Q2 + Q3 + Q4 + Q5 + Q6 + Q7$$

Onde:

*P* = quantidade total de pele

*Q1* = quantidade total de pele da cabeça

*Q2* = quantidade total de pele do pescoço

*Q3* = quantidade total de pele do tronco

*Q4* = quantidade total de pele do braço

*Q5* = quantidade total de pele da perna

*Q6* = quantidade total de pele do pé

*Q7* = quantidade total de pele da mão

Face o exposto, fica evidente que o uso de diferentes registros em uma mesma atividade favorece a percepção do aluno, favorece a construção do conhecimento matemático. É importante ressaltar, que durante uma atividade pode-se compartilhar os registros com a turma para que os demais colegas compreendam outras formas, outras possibilidades de resolução de um determinado problema.

O ensino de Matemática pautado nas ideias defendidas por Duval parece contribuir para uma efetiva aprendizagem Matemática no sentido de possibilitar ao aluno a valorização da utilizando de diversas formas que um conceito pode ser representado e, conseqüentemente, apreendido (BARRETO; OLIVEIRA, 2014).

Sabendo que uma atividade pode conter dois ou mais tipos de registros, é possível transformar um registro em outro. E essas transformações, são denominadas de tratamento e de conversões. No que diz respeito ao tratamento, Duval (2011a, p. 16 *apud* TORTOLA, 2012, p. 56), afirma que são transformações de uma determinada representação que permanece no mesmo registro, como por

exemplo a resolução de um sistema de equações. Já conversões, são procedimentos que transformam determinadas representações em um outro tipo de registro, conservando o objeto denotado, como por exemplo passar de uma representação algébrica (uma equação), para um gráfico.

Em suma, tais distinções podem ser melhor compreendidas no Quadro 6 descrito por Duval (2003 *apud* ROSA; ALMEIDA, 2009):

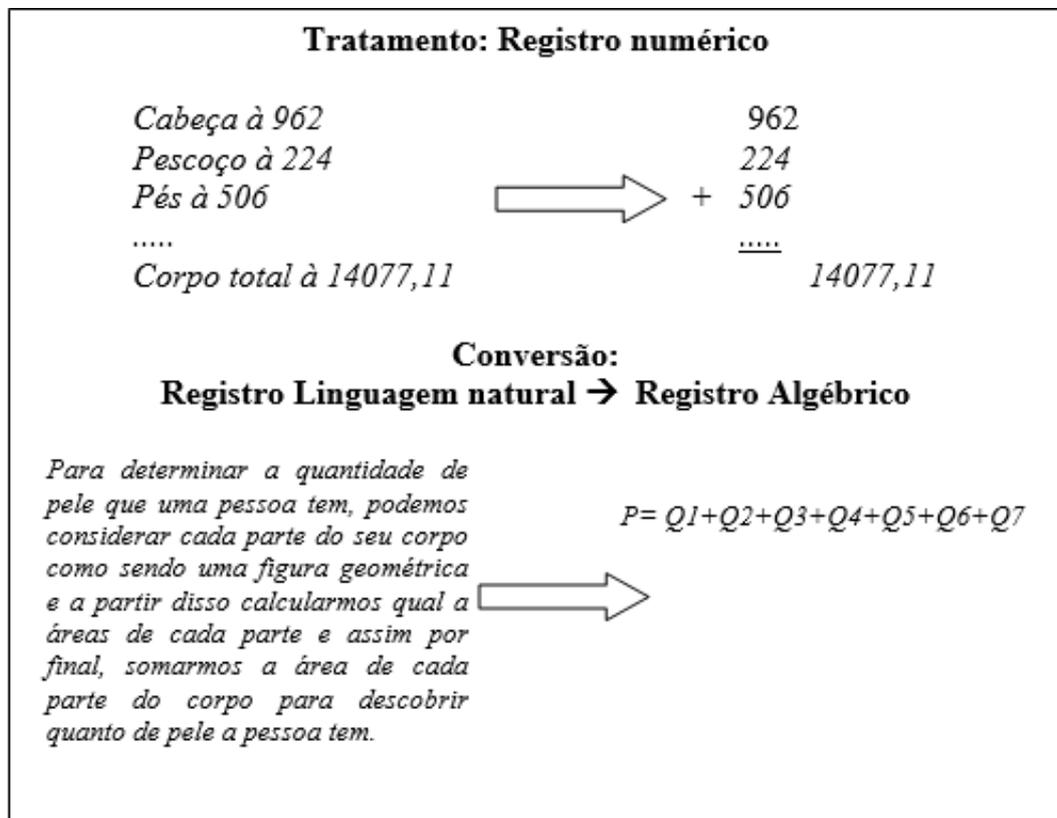
QUADRO 6 – TRATAMENTO E CONVERSÕES DE UMA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Tratamento	Conversão
O registro permanece no mesmo sistema. Sendo este procedimento correspondente a justificação	O registro muda de sistema, mas conserva a referência aos mesmos objetos. Este tipo de transformação enfrenta fenômenos de não-congruência.

FONTE: Adaptado de Rosa e Almeida (2009).

Na Figura 4 exemplificamos o que seria um tratamento e uma conversão.

FIGURA 4 – EXEMPLO DE TRATAMENTO E CONVERSÃO



FONTE: Elaborado pela autora.

É comum que muitas pessoas confundam os reais significados de tais transformações semióticas apresentadas anteriormente, porém essa confusão deve ser evitada, pois se trata de transformações distintas. E essas condições, que darão acesso a representação Matemática apresentada. No caso do tratamento, a representação semiótica sempre permanecerá em um mesmo sistema, enquanto que para que haja uma conversão é necessária uma mudança de sistema.

De maneira que, dominar diferentes registros de representação semiótica, pode implicar no domínio da resolução de um determinado problema. Já que, ter a capacidade de identificar e desenvolver os tratamentos e conversões de cada registro, mobiliza o aprendizado de um conceito matemático.

Para as atividades que são propostas neste trabalho, não tínhamos como objetivo analisar o processo de aprendizagem de um conceito matemático específico, mas analisar que modelos emergem em atividades de Modelagem e como poderíamos orientar a construção de modelos que utilizassem outras representações que permitissem compreensões matemáticas. Considerando, no entanto, o repertório matemático dos alunos, sujeitos dessa investigação, dois conceitos surgiram de forma mais significativa: adição e multiplicação. A adição, envolve relações com partes e seu todo, pois ao somar as partes encontramos o seu todo. Como por exemplo: somar a quantidade de lápis de cor de um determinado estojo, permitindo com que a criança esteja envolvida em um conjunto de ações.

E no momento que a criança já aprendeu o conceito da adição é possível que ela perceba que a quantidade de vezes que separou o lápis, diz respeito a quantidade de vezes que este lápis foi somado, ou seja é o produto de dois números (quantidade de lápis pela quantidade que foi separado).

## 5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta seção tem como objetivo apresentar os objetivos, a natureza dessa pesquisa, o contexto dos sujeitos participantes e as atividades desenvolvidas. Assim, na primeira subseção retomaremos o objetivo da pesquisa e discutiremos qual a natureza e o caráter da pesquisa. Na segunda subseção apresentaremos os sujeitos participantes dessa pesquisa. Na terceira subseção apresentaremos quais atividades foram desenvolvidas, quais foram as cargas horárias, as datas e os locais de cada atividade. Por fim, descrevemos a forma como analisamos os dados da investigação.

### 5.1 O OBJETIVO DA PESQUISA E A ESCOLHA METODOLÓGICA

O objetivo geral desse trabalho consistiu em analisar que representações Matemáticas são desenvolvidas em atividades de Modelagem Matemática por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para que esse objetivo fosse alcançado, desdobramo-los nos seguintes objetivos específicos:

- Planejar atividades de Modelagem que abordem os conceitos matemáticos pertinentes aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental;
- Identificar os registros construídos pelos estudantes nas atividades, por meio da teoria dos Registros de Representação Semiótica e;
- Analisar que tratamentos e conversões são desenvolvidos pelos estudantes no decorrer das atividades.
- Analisar os registros, tratamentos e conversões de acordo com cada ambiente de aprendizagem.

Nesse sentido, considerando as finalidades dessa investigação e as suas características, ela se insere no campo da pesquisa qualitativa.

Para Borba e Araújo (2004) a pesquisa de cunho qualitativo na Educação Matemática não é algo novo, porém para Bogdan e Biklen (1994 *apud* BORBA; ARAÚJO, 2004), as reflexões que são feitas por meio desta investigação têm sido pouco discutidas. Ainda que tenhamos avançado sobre as discussões sobre a pesquisa qualitativa da data da publicação de Bogdan e Biklen (1994) para cá, essa continua sendo uma referência na área de ensino de Matemática.

Borba e Araújo (2004), diferenciam a pesquisa quantitativa de qualitativa pela maneira que sua questão problema será exposta e pelos objetivos que sua pesquisa têm, “[...] pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada.” (BICUDO, 1993 *apud* BORBA; ARAÚJO, 2004, p. 24). No nosso caso, a pesquisa qualitativa enfatizará os procedimentos de descrições, permitindo que o pesquisador tenha uma visão mais abrangente quanto o processo da coleta de dados referente a seu estudo. Além disso, a caracterização do que é uma pesquisa qualitativa para esses autores, é embasada em Bodgan e Biklen (1994).

Segundo Bodgan e Biklen (1994), a caracterização de uma pesquisa qualitativa pode ser empreendida de acordo com quatro argumentos, de tal maneira que nem toda pesquisa nesta abordagem deve conter todas elas. Sendo elas: 1) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigados o instrumento principal; 2) A investigação qualitativa é descritiva; 3) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; e 4) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Apresentadas cada característica como sendo: a, b, c e d.

*a) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;*

Esse primeiro aspecto, desencadeia um processo de busca, pois mesmo o pesquisador recolhendo os dados da pesquisa, com instrumentos como: vídeos, registros de áudio e registros escritos, é necessário que haja complementações dessas informações, por meio do contato direto com o ambiente.

Com relação ao ambiente dessa pesquisa, o coletivo pensante é constituído por uma turma de estudantes com idade entre oito e dez anos de uma escola pública do município de Mandaguari/Paraná. Nesse contexto, a presença da pesquisadora no locus dessa pesquisa é de extrema importância e relevância, pois nessa pesquisa a autora atuou como professora|pesquisadora<sup>9</sup>. Então, enquanto professora|pesquisadora, contribui com a construção dos dados dessa pesquisa.

---

<sup>9</sup> Utilizaremos este termo, conforme sugerido por Campos e Araújo (2015) para nos referir a(o) pesquisador(a) que cumpre também papel de professor(a).

*b) A investigação qualitativa é descritiva;*

Com relação as características dessa perspectiva, pode-se dizer que os dados que são recolhidos, em forma de imagens, palavras, escritas, etc., não apenas registros com números, constituem o corpo que permite os resultados da investigação.

As descrições do desenvolvimento de todas as atividades que incorporam esse trabalho, foram realizadas por meio de transcrições e observações das aulas, que foram obtidas através dos registros em áudio e escritos. Além de que, de acordo com os autores, pesquisar não se resulta apenas a coleta dos dados que serão analisados, mas ao quadro teórico que responde a cada pergunta dada.

Face o exposto, é essencial que analisemos de forma rica e detalhada, e que não descartemos nenhum registro, pois “[...] o “vale-qualquer-coisa” e criticar a rigidez, mesmo dentro da pesquisa qualitativa, que toalha o *insight* e as ideias do pesquisador é o desafio da pesquisa qualitativa” (BODGAN; BIKLEN, 1994 apud BORBA; ARAÚJO, 2004). Sendo assim, consideraremos também a maneira como o aluno se porta perante os colegas e a professora, a forma como os alunos se manifestaram e se posicionaram durante as aulas.

*c) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;*

Nosso foco nessa investigação é analisar os modelos matemáticos que emergem no decorrer das atividades de Modelagem. Esses modelos são influenciados pelas discussões, hipóteses, significados que surgiram no decorrer das atividades e como eles se comportam quando a prática é em grupo (mesmo que um único grupo). Então toda a estratégia formulada pela professora|pesquisadora e os alunos envolvidos foram levadas em consideração, e não somente os resultados finais (registros escritos).

*d) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.*

Fica claro que para os autores, a preocupação emergente de uma pesquisa qualitativa, é tentar perceber e compreender as perspectivas e concepções dos sujeitos participantes da pesquisa. No nosso caso, nossa preocupação, que foi encaminhada de acordo com nosso referencial teórico, é considerada para

interpretar os significados, as discussões e os registros que os participantes atribuíram aos modelos que construíram no desenvolvimento da pesquisa e os significados que atribuímos às suas ações e escolhas.

## 5.2 O CONTEXTO E OS SUJEITOS PARTICIPANTES DESSA PESQUISA

No decorrer do segundo semestre do ano de 2018, duas professoras que trabalham com os Anos Iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública situada na região norte do Paraná, entraram em contato com o curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, campus avançado de Jandaia do Sul (UFPR/JA), para discutir uma possibilidade de parceria concernente a atividades de Matemática diferentes de aulas ditas como tradicionais.

Diante disso, a professora regente da disciplina de Prática Pedagógica do Ensino de Matemática II, sabendo do objetivo da disciplina, que visa, estudar alternativas metodologias para o ensino de Matemática, propôs que alunos e professora planejassem e desenvolvessem três atividades pautadas na Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

Acreditamos que diante de todas as alternativas metodológicas para se atender as demandas das professoras, a Modelagem era a mais adequada, pois a demanda era desenvolver novas competências e habilidades nas aulas de Matemática, e o uso de Modelagem na sala de aula favorece essa demanda.

É importante deixar claro, que a turma que essas professoras trabalham é uma turma de sala de altas habilidades<sup>10</sup> com nove crianças entre sete e dez anos, e elas nos explicaram que duas das crianças possuíam habilidades nas áreas de ciências exatas, enquanto as outras crianças em outras áreas do conhecimento. Nessa perspectiva, acreditamos que a Modelagem não só favorece essas crianças que tem habilidades nessa área, como também pode potencializar e até mesmo me aventuro em dizer, motivar, os estudantes que têm mais afinidades com outras áreas de conhecimento, pois podemos abordar temas que sejam do seu interesse. Essas atividades foram desenvolvidas com resultados bastante positivos em 2018.

---

<sup>10</sup> Não é nosso objetivo discutir a denominação atribuída à turma, tampouco as habilidades diagnosticadas quanto aos estudantes da turma.

Por isso, durante o primeiro semestre de 2019 reestabelecemos a parceria com essa mesma escola, a pedido das professoras, para desenvolver atividades nessa mesma perspectiva. Quatro das atividades desenvolvidas (todas as de Modelagem) são consideradas nessa pesquisa.

Nas análises dessa investigação consideramos os materiais produzidos por quatro estudantes: Luana, Daniel, Ricardo e Maicon, pois eles participaram das quatro atividades de Modelagem. Esses estudantes têm idades diferentes, entre oito e dez anos, e estão em séries diferentes (entre o terceiro e quarto ano). O uso dos dados foi autorizado pela escola em que estudam, pelos seus responsáveis legais e pelas próprias crianças.

As atividades foram desenvolvidas durante quatro semanas, às segundas e terças-feiras. Às segundas as atividades foram desenvolvidas na UFPR/Jandaia do Sul e às terças-feiras na escola em que as crianças estudavam, sempre no período da manhã, entre as 8h00 e 10h00.

### 5.3 AS ATIVIDADES PROPOSTAS

O encaminhamento para a introdução de uma atividade de Modelagem com alunos que ainda não estão familiarizados pode não ser um processo simples, pois de certa forma o aluno sairá de sua zona de conforto. Por este motivo, Almeida, Silva e Vertuan (2012) indicam que a inserção de atividades de Modelagem na sala de aula, se deriva de forma a propiciar a familiarização com a atividade de Modelagem de forma gradativa. Porém como os estudantes já haviam participado de atividades de Modelagem em 2018, consideramos que eles já estavam familiarizados com o ambiente que a metodologia de Modelagem Matemática propicia.

Diante disso, as atividades foram planejadas de acordo com as regiões de possibilidades indicadas por Barbosa (2004), sendo o caso 1, o caso 2 e o caso 3. Nessa perspectiva, foram desenvolvidas quatro atividades de Modelagem, encaminhadas de acordo com os três casos, cujos títulos e problemáticas apresentamos no Quadro 7 a seguir:

#### QUADRO 7 – ATIVIDADES PROPOSTAS.

<b>Atividade</b>	<b>Problemática</b>	<b>Estudantes participantes</b>	<b>Encaminhamento de MM (casos)</b>	<b>Carga hr (em horas)</b>
Crescimento das unhas	Quanto crescem suas unhas ao longo dos meses, caso você não as corte?	Luana, Daniel, Ricardo e Maicon	Caso 2	3
A medida da beleza	Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?	Luana, Daniel, Ricardo e Maicon	Caso 2	4
A velocidade dos jogadores	Qual a minha velocidade em 10m?	Daniel, Ricardo	Caso 3	4
Copa do Mundo de Futebol Feminina	Quantos jogos compõem a Copa do Mundo de Futebol Feminina?	Luana, Daniel, Ricardo e Maicon	Caso 1	4

FONTE: Elaborado pela autora.

As atividades foram orientadas por mim, pela professora orientadora desse trabalho e por uma colega de turma de graduação. Além disso, as duas professoras regentes da turma também participaram observando e até mesmo orientando as atividades.

A primeira atividade escolhida foi sobre o crescimento das unhas, adaptada de Tortola (2016) em sua tese de Doutorado. Essa atividade, tem como objetivo descobrir quanto nossa unha cresce em um dia e em um ano. Tal proposta, foi encaminhada de acordo com o caso 2 que Barbosa (2004) sugere, na qual a situação-problema foi sugerida pela professora, porém todos os passos foram realizados pelos alunos com orientação da professora.

Como o tema foi escolhido pela professora, é natural que alguns alunos não queiram aceitar inicialmente o convite para a atividade, então cabe ao professor buscar por estratégias, para que o aluno se envolva na discussão e queira participar.

Pensando nisso, a atividade iniciou-se com uma discussão sobre quais cuidados devemos ter com as unhas e quais os riscos de se ter unhas grandes no mundo esportivo. Em seguida, apresentamos um trecho de um programa infantil,

que está disponibilizado no YouTube, no canal Quintal da Cultura<sup>11</sup>, que tem como objetivo discutir a necessidade de se cortar as unhas.

Mediante o exposto, foi então aberto novamente uma discussão para que os alunos comentassem sobre o que eles acharam sobre o vídeo, quais as perspectivas quanto a necessidade de se cortar as unhas. Assim, pretendíamos que os alunos levantassem hipóteses quanto ao intervalo de tempo em que as unhas devem ser cortadas, para assim entregarmos uma folha que contém algumas informações e curiosidades sobre o crescimento das unhas (APÊNDICE 1).

A segunda atividade desenvolvida foi sobre a medida da beleza, adaptada da atividade realizada por Tortola (2012). Essa atividade também está pautada no caso 2 de Barbosa (2004), pois a formulação do problema foi feita pelo professor e coube aos alunos investigar e coletar os dados com orientação do professor para solucioná-lo.

Iniciamos a atividade questionando o que é belo para os alunos, para que assim os alunos se envolvessem em uma discussão. Em seguida, apresentamos um vídeo do YouTube do Pato Donald no País da MateMágica, porém como o vídeo é um tanto quanto longo selecionamos somente a parte que nos interessava, no caso a Razão Áurea<sup>12</sup>.

Como o vídeo mostra algumas razões que podem considerar uma pessoa bonita, questionamos: Será que é possível medir a beleza de uma pessoa? Assim, entregamos uma folha (APÊNDICE 2) em que os alunos deveriam encontrar algumas medidas e analisar se existia algum número que indicava a beleza de uma pessoa.

Diferente das duas primeiras atividades, a terceira atividade foi uma atividade encaminhada de acordo com o caso 3 de Barbosa (2004), na qual todas as etapas da atividade de Modelagem foram realizadas pelos alunos com orientação da professora. Assim sendo, a atividade que foi desenvolvida foi sobre: Qual a velocidade dos alunos num percurso de 10m? na qual tal problemática foi construída no decorrer da atividade pelos alunos e professoras.

---

<sup>11</sup> Para mais informações sobre o vídeo, segue o link: <https://www.youtube.com/watch?v=FSToendzvsj>.

<sup>12</sup> Link do vídeo do YouTube do Pato Donald e a Razão Áurea: <https://www.youtube.com/watch?v=58dmCj0wuKw>.

Durante as duas primeiras atividades, observamos que os alunos gostariam que realizássemos algumas atividades que falassem sobre futebol, pois era algo que os interessava. Por analogia, propusemos uma atividade que se iniciou discutindo sobre quais as características que os jogadores de futebol devem ter para participar de uma Copa do Mundo. Em seguida, apresentamos um vídeo do Youtube sobre Velocidade dos Jogadores Nessa Copa do Mundo<sup>13</sup> impressiona. Levando aos alunos quererem comparar a sua velocidade com a velocidade da jogadora Marta Vieira da Silva<sup>14</sup>.

A última atividade foi encaminhada de acordo com o caso 1 de Barbosa (2004), pois a formulação do problema, a coleta de informações e a simplificação dos dados foram obtidas pela professora e coube somente aos alunos solucionarem o problema com orientação. Essa atividade tinha como objetivo determinar quantos jogos ocorreram na Copa do Mundo Feminina.

Para que os alunos pudessem responder, foi necessário que utilizassem o princípio fundamental da contagem, pois precisavam encontrar quantos jogos teria em cada fase da Copa, sendo elas: fase de grupos, oitavas de final, quartas de final, semifinais, disputa pelo 3º lugar e final.

Como essa atividade ocorreu no período da Copa do Mundo Feminina de 2019, então foi iniciada com uma discussão sobre as jogadoras e quais as funções de cada uma nesta copa, além de algumas informações e curiosidades sobre a primeira Copa do Mundo de Futebol Feminina. Para que assim, pudéssemos entrar na questão problema que foi sugerida pela professora.

#### 5.4 COMO IREMOS ANALISAR?

Por meio dos instrumentos de pesquisa, sendo: imagens, registros em áudio e registros escritos, buscamos responder a questão de pesquisa à luz do referencial teórico apresentado anteriormente. Nesse sentido, a cada aula dada foi necessário utilizar um diário de campo para que assim as descrições fossem mais abrangentes.

---

<sup>13</sup> Link do vídeo: [https://www.youtube.com/watch?v=9\\_3B9Gb1yel](https://www.youtube.com/watch?v=9_3B9Gb1yel)

<sup>14</sup> Futebolista brasileira que atua como atacante na seleção Brasileira, Marta consegue superar 10m em 1s69.

Inicialmente, transcrevemos algumas falas registradas pelos gravadores seguindo os passos: a) Ouvir cada áudio e selecionar trechos significativos quanto aos procedimentos matemáticos e discussões desenvolvidas; b) Organizar as transcrições com os demais materiais produzidos durante as atividades; c) Analisar as transcrições de acordo com o referencial adotado.

Com relação as transcrições, utilizamos algumas das normas de transcrições indicadas por Eduardo José Manzini:

QUADRO 8 – RESUMO EXPLICATIVO DE ALGUNS SINAIS DE NORMAS DE TRANSCRIÇÕES

Sinais	Descrição da categoria
... ou /.../	O uso de reticências no início e no final de uma transcrição indica que se está transcrevendo apenas um trecho. Reticências entre duas barras indicam um corte na produção de alguém.
( )	Quando não se entender parte da fala, marca-se o local com parênteses e usa-se a expressão inaudível ou escreve-se o que se supõe ter ouvido.
(( ))	Usa-se essa marcação no local da ocorrência ou imediatamente antes do segmento a que se refere.
::	Dependendo da duração os dois pontos podem ser repetidos.
/	Esse sinal pode ser utilizado quando alguém é bruscamente cortado pelo interlocutor.
MAIÚSCULA	Sílaba ou palavras pronunciadas com ênfase ou acento mais forte que o habitual.
Negrito	Simultaneidade de fala oral e expressão com gestual, com o corpo.

FONTE: Adaptado pela Autora<sup>15</sup>.

Feito isso, separamos o material por aluno e atividade desenvolvida, na qual será discutido na próxima seção.

<sup>15</sup> A tabela completa, encontra-se disponível em: [http://www.oneesp.ufscar.br/texto\\_orientacao\\_transcricao\\_entrevista](http://www.oneesp.ufscar.br/texto_orientacao_transcricao_entrevista). Acesso: 20/09/2019.

## 6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Nessa seção, direcionamos nosso olhar para o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática e os modelos que dela emergiram. Nesse sentido, apresentamos e analisamos os encaminhamentos seguidos em cada atividade de Modelagem proposta nessa investigação, sendo elas intituladas: Crescimento das unhas; Medida da beleza; Velocidade e Copa do Mundo de futebol feminino.

Para tanto, descrevemos o desenvolvimento de cada atividade e olhamos os registros escritos e as transcrições das falas dos sujeitos participantes. Elucidaremos a linguagem utilizada, por meio dos referenciais teóricos adotados e posteriormente detalhamos os encaminhamentos de cada aluno quanto aos modelos construídos, os tratamentos e conversões desenvolvidos. Ao fim de cada atividade apresentaremos um Quadro geral, que apresentará os registros que foram apresentados como forma de resolução do problema por cada estudante.

Para classificar qual professora cuja fala está transcrita consideraremos: A professora|pesquisadora como *Professora 1*, a professora orientadora deste projeto como *Professora 2* e minha colega e professora como *Professora 3*.

### 6.1 ATIVIDADE DO CRESCIMENTO DAS UNHAS: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE.

A atividade do crescimento das unhas foi a primeira atividade desenvolvida com os alunos, que ocorreu no dia 13 de maio de 2019. Sendo essa atividade desenvolvida na Universidade Federal do Paraná no Campus Avançado de Jandaia do Sul. Nesse sentido, em conversa com a equipe pedagógica e com as professoras regentes da turma, ficou acordado que desenvolveríamos uma carga horária de duas horas/aulas dentro da universidade e posteriormente duas horas/aulas na própria escola para cada atividade a ser desenvolvida.

No que diz respeito a essa atividade, pode-se dizer que se adequa ao segundo caso apontado por Barbosa (2003), pois foi um tema escolhido pela professora|pesquisadora, e o desenvolvimento da atividade foi orientada pela mesma. Já que inicialmente gostaríamos de verificar qual o repertório matemático

que eles possuem, possibilitando então que fosse uma atividade que pudesse ser resolvida por meio das operações elementares.

Como os sujeitos participantes dessa pesquisa, já haviam experienciado atividades de Modelagem Matemática no segundo semestre de 2018, por meio de práticas que estiveram vinculadas às disciplinas da área de ensino de Matemática do curso de Licenciatura em Ciências Exatas da UFPR/JA, a professora iniciou a aula questionando os alunos se eles lembravam das atividades que participaram no ano anterior conosco, a fim de tentar descobrir o que os alunos gostariam de aprender esse ano e uma das hipóteses levantadas pelos quatro estudantes seria trabalharmos algo relacionado ao futebol, já que todos os alunos mesmo não sabendo jogar bola gostariam de alguma atividade que envolvesse esse tema. Além do fato, de que uma das alunas gostaria de discutir sobre o tema, pois em sua escola meninas não podem jogar com meninos, o que acarretou um enorme desconforto na aluna e a ideia da discussão desse tema por meio da atividade que chamamos de Copa do mundo feminina 2019.

Nesse momento observamos que muitas discussões paralelas surgiram e por meio disso conseguimos levá-los a pensar sobre alguns esportes que envolviam bola e mãos, como é o caso do voleibol, essas conversas paralelas nos levaram ao tema da atividade, pois em práticas esportivas coletivas os atletas não podem ter unhas compridas, já que poderiam machucar outras pessoas. Percebe-se, então, que o *convite* (BARBOSA, 2004) foi posto aos alunos, na qual é caracterizado pelo momento em que o professor se incumbe de cativar os seus alunos a participarem da atividade, pois é nesse momento que os alunos se sentiram cativados e interessados a participar. Percebemos logo que o convite foi aceito, permitindo que prosseguíssemos com discussões sobre o tema principal da atividade.

Em meio a essas discussões, as professoras disseram que dentro do voleibol os jogadores devem cortar suas unhas para evitar acidentes dentro das partidas e ainda comentou que na escola o próprio professor de Educação Física também pede para que os alunos cortem suas unhas a fim de evitar acidentes também. Nesse sentido, os alunos falaram que além desse ponto é necessário cortar as unhas para que não se acumule bactérias.

**Luana:** Ah... a minha nem precisa porque eu já roo tudo.

**Professora 2:** Não acredito que você faz isso, e pode roer as unhas?

**Luana:** Não.

**Professora 1:** Por que não pode?

**Daniel:** Porque se a gente engolir fica enroscado na garganta.

**Luana:** e também pega bactérias.

**Professora 2:** E isso também é perigoso né!

O interessante dessas falas dos alunos, nos faz pensar que esse é um dos propósitos que a atividade de Modelagem propicia, mesmo não tendo apresentado um modelo matemático nessas respostas (o que nem deveria ter, pois é uma discussão do tema), essa discussão é de extrema importância para o engajamento na aula. Esse momento de discussões sobre o tema é o processo de *inteiração* dos estudantes com o tema proposto, sendo esse o primeiro momento com a situação-problema (unhas) que visa ser investigado.

Além disso, essas discussões podem ser consideradas como discussões reflexivas, não as que Barbosa (2004) propõe, pois não são Matemáticas, mas são discussões em que os alunos estão discutindo sobre o assunto, permitindo que um comunique ao outro o seu pensamento quanto o fato de uma pessoa roer suas próprias unhas.

Aqui já havíamos apresentado o convite e definido o tema (unhas). Após essa discussão, apresentamos um vídeo do Youtube do Quintal da Cultura que discute sobre problemas de brincar de bola com unhas grandes. Como estamos trabalhando com crianças é natural que os alunos gostem de contar suas trajetórias e acontecimentos em suas vidas, e após o vídeo a Luana contou sobre histórias que envolviam se machucar e suas unhas.

Assim, questionamos: “As unhas de vocês estão grandes?”, “Vocês roem as unhas?”, “Vocês costumam cortar as unhas?”, “De quanto em quanto tempo vocês cortam suas unhas?”. Como os alunos tinham bebês nas famílias, por comentários deles, perguntamos: “E as unhas de bebês também crescem?” e obtivemos como respostas que “sim” e que se não cortássemos as unhas dos bebês ficariam gigantescas e isso seria ruim por que pegariam muitas bactérias e até mesmo arranhariam si próprios.

**Professora 1:** O que aconteceria se a gente não cortasse as unhas?

**Luana:** Iria acumular muita bactéria e iria ficar gigantesca!

**Professora 1:** De que tamanho?

**Luana:** Mais ou menos **essa sala inteira** se você não cortasse.

**Ricardo:** Uma sala inteira seria muito exagerada e deve chegar a **mais ou menos assim** ((tamanho de uma régua)).

Os alunos levantaram hipóteses sobre os tamanhos que a unhas poderiam atingir, considerando medidas bastante destoantes: 30 cm ou 7m, que é o tamanho do comprimento da sala de aula. Esse momento foi importante para trabalharmos/discutirmos noções de tamanhos e de medidas. Por isso, com auxílio de um trena medimos o comprimento da sala em que estávamos para que todos tivessem uma noção do quanto mede 7 metros.

FIGURA 5 – MEDINDO A SALA



FONTE: Arquivo da pesquisa.

Sendo possível questioná-los: “Será que tem alguém com unha muito grande?”, “Vocês já viram pessoas com as unhas grandes?”, “Quem foi?”.

Nesse momento apresentamos algumas imagens de pessoas que possuíam unhas bem grandes, e os alunos ficaram bem interessados e surpresos com o tamanho das unhas daquelas pessoas, no entanto todos acharam falta de higiene. Diante das imagens e das informações das pessoas que possuíam unhas grandes, indagamos os alunos a pensarem no tamanho daquelas unhas (das pessoas cujas unhas mostramos nos slides) e questionamos sobre o tempo que eles acreditavam ter se passado sem que aquelas pessoas cortassem as unhas.

Uma das imagens apresentadas é a da Figura 6:

FIGURA 6 – INDIANO COM 9 METROS DE UNHA



FONTE: Página da RedeTv<sup>16</sup>.

Os estudantes se questionavam sobre a quantidade em metros que encontrariam caso somassem os tamanhos das 5 unhas do indiano. Ou seja, estavam se valendo de conceitos matemáticos, noções de espaço, tempo, metros e estimativa. Nesse instante os alunos estavam conduzindo uma discussão Matemática, potencializando seu conhecimento matemático e até mesmo seu repertório matemático, culminando no conhecimento de espaço e de tempo para o crescimento das unhas.

Para tirar essa dúvida, a professora, mostrou em uma fita métrica quanto seria essa medida, pois em um primeiro momento os alunos acreditavam que as unhas representavam 15 cm e ao observar essa medida na fita métrica eles viram que era muito pequeno, levantando assim novas hipóteses.

Os alunos levantaram como hipótese que o Indiano que foi apresentado nos slides nunca havia cortado suas unhas (Figura 6), já que ele possui 9 metros de unhas e possuía 78 anos. Nesse momento, um dos alunos disse que esse Indiano, teria deixado suas unhas crescerem por 50 anos:

**Daniel:** 78 anos ele deixou crescer.

**Professora 2:** Então ele deixou crescer desde bebê?.

**Ricardo:** Desde bebê? Mas a mãe dele não cortava não?

**Professora 2:** É verdade ne::

**Ricardo:** Eu acho que ele deixou uns 50 anos.

**Luana:** Deixou uns 28 anos eu acho.

---

<sup>16</sup> Disponível em: <<https://www.redetv.uol.com.br/jornalismo/da-para-acreditar/indiano-com-unhas-de-9-metros-entra-para-o-livro-dos-records>>. Acesso em set. 2019.

Face ao exposto, entregamos uma folha (APÊNDICE 1) com algumas curiosidades sobre o Indiano e a problemática da atividade, sendo ela: “Você sabia que suas unhas crescem 0,01mm por dia?”, “Quanto crescem suas unhas ao longo dos meses, caso você não as corte?”, “Em um mês quanto sua unha crescerá?”, “E em um Ano?”, “De quanto em quanto tempo você deve cortar suas unhas para evitar problemas de saúde?”.

Nesse momento, o *problema* (BARBOSA, 2004) formulado foi proposto pela professora. Os alunos precisavam, então, coletar os dados para conseguir resolver a problemática. Diante disso, várias dúvidas surgiram, pois os alunos ainda não tinham compreensão do que seriam os milímetros, então as professoras explicaram o que seria 0,01mm observando a régua.

**Professora 1:** A sua unha (cresce) tem 0,01 milímetro (em um dia) certo, em um dia, então a sua unha tem isso aqui, então 31 dias tem quanto?

**Maicon:** tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... 31 milímetros.

**Professora 1:** E você sabe mostrar isso aqui na régua?

**Maicon:** Hum, não.

**Professora 1:** Vamos lembrar então **que isso aqui tem 0,01** ((mostrando o milímetro dividido)).

**Maicon:** AHHHH, péra então vai 31 desse tamanho aqui. ((O aluno mostra na régua o tamanho de 3 mm)).

Para resolver esse problema, os alunos precisavam calcular quanto as unhas cresciam em 30 dias. Maicon preferiu fazer o cálculo para 31 dias. Nesse momento os alunos discutiram entre si. Como eram poucos os alunos, eles debatiam e utilizavam a mesma estratégia.

**Luana:** Se ela cresce 1 milímetro por dia então:: em 31 dias ela vai crescer 31 milímetros.

**Professora 1:** Será? Por quê?

**Luana:** por que o mês que a gente tá tem 31 dias e como ela cresce em 1 dia, 1 milímetros então nesse mês vai crescer 31 milímetros.

**Professora 1:** Mas será que a gente consegue fazer uma continha pra isso? Vou lhe mostrar na régua.

**Ricardo:** Podemos fazer uma multiplicação de 31 dias pelo tamanho da unha que cresce por dia.

**Maicon:** Eu não sei fazer multiplicação desse jeito, eu só sei fazer tipo 2 vezes 2, 3 vezes 3, mas com virgula desse jeito não.

**Daniel:** Eu sei o que é multiplicação, que é a quantidade de vezes que a unha vai crescer por um mês, mas eu não aprendi ainda, eu não sei fazer essa continha.

No âmbito dessa discussão, é importante ressaltar aqui, que os estudantes apresentam uma incompreensão Matemática, já prevista pelas professoras. Pois os



O presente registro, pode ser classificado como um registro numérico, pois é uma representação composta somente por números, esse é o modelo matemático que foi criado para encontrar quanto a unha crescia em um mês. Essa Matemática foi um tanto quanto complexa (e nova) para os alunos, pois nos registros de língua natural e o registro numérico, apresentado anteriormente, pois ainda não compreendiam a multiplicação, a soma de números decimais e a unidade de medida, milímetro. Tanto que a operação apresenta um erro quanto ao uso da vírgula. Esse cálculo, no entanto, teve sentido para os estudantes, quanto observavam essa relação na régua graduada.

Todo esse procedimento se refere ao processo de *matematização* e *resolução*, pois são criados modelos matemáticos na tentativa de se solucionar o problema que foi posto anteriormente. Observamos que novas discussões sobre as informações dadas foram postas.

No excerto a seguir, perguntamos aos alunos qual seria o tamanho que as unhas estariam se não as cortássemos por um ano. Para isso, nós enquanto professoras pensamos nas possibilidades de resolução para esta questão, e propor um material didático facilitaria uma possível resolução. Como estamos trabalhando com milímetros, decidimos então utilizar uma folha milimetrada, pois dependendo do material utilizado (sulfite ou papel quadriculado de 0,7mm ou 1cm, por exemplo), seu uso poderia confundir os alunos nas resoluções.

Entregamos folhas milimetradas com o objetivo de favorecer a construção de registros matemáticos pelos estudantes, para solucionar o problema de Modelagem. Como as folhas são milimetradas em 0,1mm, alguns alunos mediram suas unhas e desenharam quanto as unhas cresceriam em um ano. Neste momento a Luana e o Maicon utilizaram a soma para conseguir resolver a problemática e desenhar a quantidade que suas unhas haviam crescido, já o Ricardo utilizou o conceito de multiplicação para realizar tais cálculos.

**Luana: Um dia cresce isso, um mês cresce isso** ((Luana estava mostrando na régua)), ainda bem que eu não vou contar por um ano por que vai demorar muito.

**Professora 3:** Agora me explica na régua.

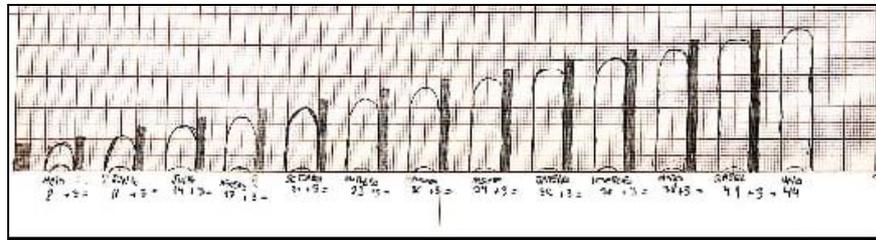
**Luana: minha unha cresce isso aqui.**

**Professora 3:** O Ricardo e o Daniel estão desenhando o tamanho das unhas deles aqui no papel milimetrado, e agora eles vão desenhar para o mês de junho, julho, agosto, até o mês de maio do ano que vem, vamos fazer isso também?

Acredito que nós enquanto professoras, também tenhamos induzido os outros dois alunos a desenharem no papel por conta dos registros que o Ricardo e Daniel se propuseram a fazer, na tentativa de que os alunos atribuíssem sentido aos seus cálculos, por meio da representação matemática em um registro gráfico.

No momento em que os alunos estavam discutindo e se propuseram a realizar as operações Matemáticas de soma e multiplicação para confirmar o que haviam dito, os alunos já estavam analisando e representando matematicamente suas ideias.

FIGURA 9 – EXEMPLO DE REGISTRO DOS ALUNOS, GRÁFICO



FONTE: Arquivo da pesquisa.

Nesse momento todos os alunos quiseram medir a parte fixa da unha, pois a porção livre da unha é a quantidade que irá crescer que eles mediram.

**Luana:** Essas unhas vão passar meu aniversário.

**Professora 2:** É? E quando é?

**Luana:** é dia 28, se fosse ano bissexto talvez não faltaria mas não tenho certeza, as unhas da minha mãe são bem grandes.

**Daniel:** AH:: ... da minha mãe também, e quando ela corta as unhas dela ela também corta as minhas.

Mesmo essa discussão sendo uma discussão paralela que não irá interferir na resolução desse problema, ela foi importante, pois podemos discutir outros assuntos, como a relação temporal, permitindo relacionar o crescimento da unha com o tempo, e também a questão de ano bissexto. Fazendo com que a Luana se sentisse mais engajada por perceber quanto sua unha cresceria até o seu aniversário.

**Daniel:** Olha como ficou:: o meu desenho ((desenho da unha)).

**Ricardo:** Legal, ficou colorido .

**Larissa:** Se eu tiver uma unha desse tamanho ai eu vou machucar alguém!!

**Daniel:** Mas:: eu acho que ta difícil de entender né:: ? Eu vou escrever aqui do lado qual o mês de cada cor!

**Professora 3:** Você vai fazer uma legenda para o seu desenho?

Para que os alunos conseguissem sistematizar o que eles desenharam na folha milimetrada, entregamos uma folha com uma tabela que possuía duas colunas, uma com o mês e a outra com “quanto a unha cresceu”.

FIGURA 10 – TABELA EVIDENCIANDO O CRESCIMENTO DA UNHA

Mês	Quanto a unha cresceu
maio	3
junho	$3+3=6$
julho	$3+3+3=9$
agosto	$3+3+3+3=12$
setembro	$3+3+3+3=15$
outubro	$3+15=18$
novembro	$3+18=21$
dezembro	$2+21=23$
januário	$3+24=27$

Mês	Quanto a unha cresceu
fevereiro	$3+27=30$
março	$3+30=33$
abril	$3+33=36$
maio	$3+36=39$
junho	$3+39=42$

FONTE: Arquivo da pesquisa.

O gráfico, desenhado pelos estudantes e representado na Figura 9, assim como a tabela apresentada na Figura 10, constituem modelos matemáticos que representam a situação de estudo e respondem ao problema matemático de Modelagem que foi proposto. No primeiro caso, o modelo está representado por um registro gráfico. O estudante desenhou o tamanho da unha mês a mês aumento de um mês para o outro, 3 mm. Já a tabela da Figura 10, cuja forma foi pensada e proposta pelas professoras, constitui registro numérico (tabular). A passagem do gráfico para a tabela, portanto, representa uma conversão entre os RRS.

A tabela, no entanto, permite aos estudantes avançar no desenvolvimento do pensamento abstrato matemático. Por meio da tabela e da representação numérica o estudante consegue observar e representar o padrão matemático do crescimento das unhas.

**Daniel:** Mas como eu vou fazer isso?

**Professora 1:** Exatamente do jeito que você fez pra desenhar, no mês de maio cresceu 0,30 milímetros, então no mês de junho cresceu mais 0,30 milímetros!

**Daniel:** Então vai ser esse, mais esse, mais esse nesse ((3 + 3 + 3)) mês de julho e faço isso nos outros meses?!

**Professora 1:** Isso.

Diante disso, os alunos estão tentando *interpretar seus resultados e validar as respostas* que haviam encontrado, já que desenharam suas unhas e foram contando de três em três no papel milimetrado, é nesse momento que os alunos conseguem evidenciar se a sua resposta é adequada ao problema.

Normalmente, em atividades de Modelagem, ao fim das tarefas solicitamos que os estudantes apresentem aos demais colegas os procedimentos seguidos nas atividades. Nesse caso, como os estudantes trabalharam todos juntos, essa discussão foi sendo feita no decorrer da atividade. Ao longo da tarefa os alunos puderam negociar, levantar e validar hipóteses, a fim de responder ao problema posto.

No dia seguinte, iniciamos a aula retomando o que fizemos na aula passada, e muitos alunos conseguiram recordar todos os passos que fizemos na atividade e todos os modelos matemáticos construídos para encontrar quanto a unha cresceria em 1 ano, como explicou Luana:

**Luana:** Primeira coisa estávamos vendo fotos de pessoas que tinham as unhas gigantes e a gente tava pensando quantos anos elas deixaram as unhas crescendo para ficar daquele tamanho, ai:: eles perguntaram para a gente quanto nossa unha cresce por mês?... Ai eu peguei e fiz uma conta de vezes e deu 3 milímetros por que se um dia cresce ((menos que)) 1 milímetro... ai eles pediram para fazermos este papel e até junho do ano que vem nossa unha estaria esse tamanho, mas nas fotos tinha gente com a unha maior que isso, tinha com um a unha de 9 metros, e daí aqui era para anotar quanto cresceu nossa unha ((estava mostrando o desenho que fez)).

FIGURA 11 – ALUNA APRESENTANDO



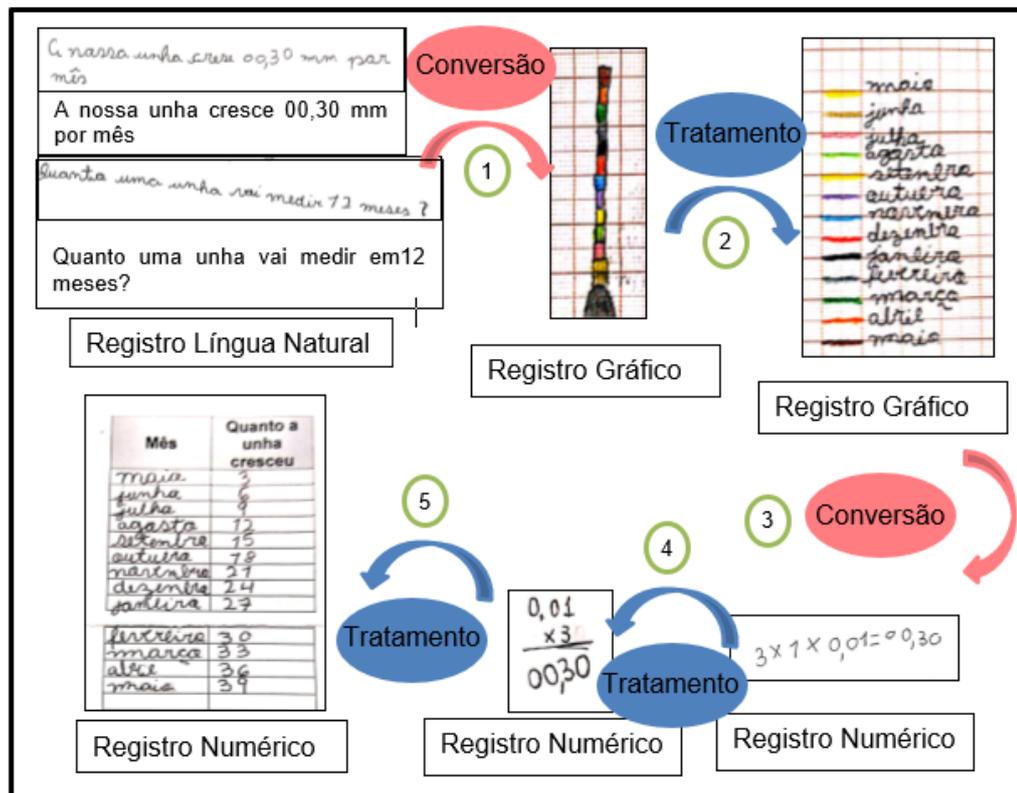
FONTE: Arquivo de registro.

Podemos considerar ainda, esse momento, como sendo de socialização, pois os alunos discutiram no decorrer da apresentação da aluna Luana sobre como procederam no desenvolvimento da atividade.

### 6.1.1 Atividade do crescimento das unhas: registros

Para analisar os registros de cada aluno no decorrer da atividade, separamos os registros por aluno para uma melhor compreensão. Além disso, as setas azuis indicam os *Tratamentos* e as setas rosas as *Conversões* desenvolvidas.

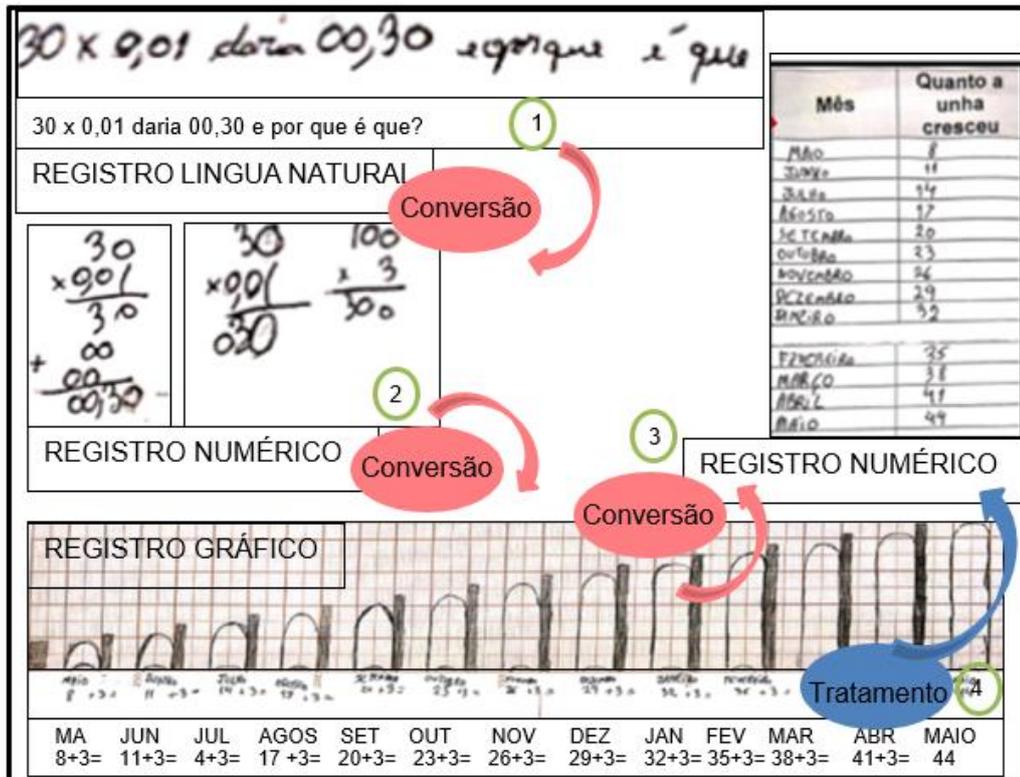
- Registros do Daniel:



No decorrer da atividade 1, observamos que os registros que surgiram foram: tabular, gráfico, língua natural e numérico. O mais interessante nos registros de Daniel foram os tipos de conversões que ele realizou em seus registros para que não só ele, mas os colegas e as professores compreendessem o que ele havia proposto. Quando ele utilizou do registro gráfico percebeu que estava um tanto quanto confuso, sendo necessário fazer um outro tipo de registro (legendas) para compreender o que ele havia pensado.



- Registros do Ricardo:



Ao observar o registro do Ricardo, é possível perceber que dentro do seu registro gráfico, ocorre uma conversão do registro gráfico (desenho das unhas) para o registro numérico (quantidade que a unha cresceria por mês) que pode ser considerado como uma legenda para o seu registro.

É possível perceber que o tema da atividade proporcionou e demandou que os alunos utilizassem diferentes registros de representação para solucionar/resolver o problema. No caso dos quatro estudantes percebemos a necessidade do uso de mais de um registro para que pudessem compreender melhor o que estavam fazendo e expondo aos colegas. Foi necessário realizar tratamentos, além de que em todos os casos os mesmos conseguiram coordenar mais de um registro (conversão).

Além disso, a Matemática que emergiu durante a atividade (multiplicação de números racionais), abarcou conceitos que os alunos ainda não conheciam o que ensejou a busca das professoras por orientar a construção de modelos que usassem outros registros que pudessem auxiliá-los a compreender os conceitos e a situação de estudo.

## 6.2 ATIVIDADE SOBRE A MEDIDA DA BELEZA: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE.

Com o objetivo de introduzirmos o tema da próxima atividade de Modelagem, (beleza), perguntamos para os estudantes se aquelas fotos que eles haviam visto das pessoas com as unhas grandes (na atividade do crescimento das unhas) apresentava pessoas bonitas.

Diante disso discutimos a questão do padrão de beleza que é imposto socialmente, permitindo que perguntássemos o que eles achavam bonito, nesse momento foi possível realizar o *convite* (BARBOSA, 2004) para participar da atividade.

A proposta dessa atividade de Modelagem foi discutir sobre a razão áurea. Para que os alunos se inteirassem sobre o tema e conhecessem as especificidades e características dos motivos que estávamos propondo essa atividade, apresentamos uns slides com algumas imagens com coisas, pessoas e animais considerados bonitos. Nesse momento, várias discussões paralelas surgiram e apresentamos um vídeo do Youtube do Pato Donald e a Razão Áurea, esse podemos considerar como o momento de inteiração sobre o tema da atividade.

Como o vídeo fazia referência a algumas medidas do mundo, perguntamos o que eles haviam mais gostado no vídeo, possibilitando que um dos alunos, Daniel, respondesse que a parte que mais o interessou foi quando o Pato Donald tentou entrar dentro de um Pentágono, e isso nos permitiu apresentar a questão problema.

**Professora 1:** Será que existe alguma medida para a beleza?

**Daniel:** Não sei hein.

**Professora 2:** Vocês observaram no vídeo do Pato Donald, então no vídeo por exemplo, vocês conseguiram ver que, por exemplo, é bem difícil que alguém ache uma flor feia, então dependendo de algumas pessoas ou algumas coisas, quando olhamos sempre vamos achar bonita, e o pato Donald diz que existe um número que diz respeito a essa medida, e a Matemática ela consegue responder isso.

**Daniel:** Só se tiver bravo, aí a pessoa fica feia.

Nesse momento, quando colocamos a questão problema da atividade, trouxemos o aluno para o ambiente que propusemos, para que assim o "convite" fosse aceito. Na medida em que houve um envolvimento dos alunos devido o interesse pelo tema (aula), é possível observar que os alunos realmente aceitaram o convite para a atividade.

A partir desse momento, os alunos estavam convidados a indagar e investigar o tema da atividade: é possível medir a beleza de uma pessoa? Importante ressaltar ainda, que esse processo de indagação, de acordo com Paulo Freire, é o próprio caminho para a educação, pois o início do conhecimento advém do ato de indagar, questionar. Inclusive, o ato de problematizar e indagar, na concepção de Paulo Freire, inspirou a construção da concepção de Modelagem de Barbosa (2004), que subsidia nossa pesquisa.

Entregamos, assim, uma folha contendo uma tabela, como na Figura 12 a seguir, para que os alunos preenchessem com algumas medidas, pois criar uma tabela exige tempo e queríamos que os alunos conseguissem observar que os quocientes determinados em cada divisão eram próximos. Em outras palavras, a organização dos dados na forma tabular foi orientada pelas professoras, considerando o objetivo da tarefa, que consistia nos alunos perceberem que existe um número que expressa a relação entre as medidas de partes do corpo humano e que esse padrão independe do peso, da cor e de outras características físicas de uma pessoa. Esse número, conhecido como phi tem o valor de, aproximadamente, 1,618.

FIGURA 12 – TABELA DA ATIVIDADE DA BELEZA

<b>Medidas</b>	<b>Nome do estudante 1:</b>	<b>Nome do estudante 2:</b>	<b>Nome do estudante 3:</b>	<b>Nome do estudante 4:</b>
1) DA ALTURA DO SEU CORPO				
2) DO UMBIGO ATÉ O CHÃO				
<b>QUOCIENTE</b>				
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS				
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS				
<b>QUOCIENTE</b>				

FONTE: Elaborado pela autora.

Assim para que conseguissem medir os comprimentos solicitados na tabela: altura do corpo; altura do umbigo até o chão (pé); comprimento do queixo até a raiz

dos cabelos e o comprimento do queixo até as sobrancelhas, levamos fitas métricas. Os próprios alunos mediram um ao outro.

Eventualmente, quando os alunos estavam se medindo, várias discussões surgiram, principalmente quando às unidades de medida e a forma de se medir cada comprimento requerido. Após, eles coletarem todos os dados, perguntamos o que estava faltando na tabela para se completar e se era possível completá-la a partir dos dados coletados e assim encontrar um valor que representasse a medida da beleza.

FIGURA 13 – ALUNOS SE MEDINDO E TABELA DA BELEZA



Medidas	Nome do estudante 1:	Nome do estudante 2:	Nome do estudante 3:	Nome do estudante 4:
1) DA ALTURA DO SEU CORPO	143 cm	131 cm	137 cm	132 cm
2) DO UMBIGO ATÉ O CHÃO	84 cm	75 cm	85 cm	81 cm
QUOCIENTE	1,7	1,75	1,52	
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS	23 cm	20 cm	23 cm	24 cm
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS	12 cm	12 cm	14 cm	18 cm
QUOCIENTE	1,9	1,6	1,6	1,6

FONTE: Arquivo de registro.

Quando os alunos começaram a medir e completar a tabela (registro numérico), todos os alunos disseram que não sabiam o que significava o termo “Quociente”, mas afirmaram saber realizar as operações básicas (soma, subtração, multiplicação, divisão). Dessa forma, para relembrar o conceito, escrevemos no quadro a operação  $4:2$ , usando para isso o processo com a chave. Juntos efetuamos a operação e mostramos o que eram o divisor, o dividendo e o quociente.

Face ao exposto, os alunos deveriam dividir uma medida (medida da altura, por exemplo) pela outra (medida da altura do pé ao umbigo) e encontrar o quociente, porém Daniel, Luana e Maicon disseram que não seria possível realizar essa divisão, pois não sabiam como proceder nessa operação Matemática com valores grandes e com resultados com vírgulas.

Por consequência, mostramos uma outra possibilidade para que eles compreendessem o que seria a divisão, nesse momento pegamos novamente, duas, fitas métricas, e perguntamos: Quantas vezes 84 cabe dentro de 143 (medidas do estudante 1)? Para prosseguirmos, recortamos dois barbantes, um com 84cm e

outro com 143cm. A partir disso, conseguimos mostrar aos alunos que 84 cabe 1 vez dentro de 143, e cabe parte do 84cm. Permitindo que os alunos conseguissem observar que 143 dividido por 84 seria aproximadamente 1,7.

FIGURA 14 – DEMOSTRAÇÃO DE DIVISÃO POR MEIO DE UM BARBANTE



FONTE: Arquivo de registro.

Nesse momento, nós enquanto professoras, tivemos que pensar em uma possibilidade de como mostrar o significado do resultado dessa divisão, dispondo de outras representações que não fossem feitas com lápis e papel, mas com um material que pudesse ser manipulável e menos abstrato. Esse é um desafio enfrentado quando trabalhamos com atividades de Modelagem, pois por ser um ambiente de aprendizagem aberto, os estudantes podem requerer usar conceitos ou formular estratégias ainda não pensadas pelo professor, fazendo com que pensemos em caminhos alternativos no momento de aula, reconhecendo as habilidades e respeitando o que o aluno já sabe e o que o aluno ainda irá aprender, e poder assim contribuir com o seu conhecimento matemático.

**Luana:** É não coube 2 vezes esse barbante ((mostrando o barbante com 84cm)).

**Professora 1:** Olha gente, então o que isso significa?

**Daniel:** Coube quatro vezes.

**Professora 2:** Mas olha se fosse quatro, olha só coube uma, duas já não caberia, três também não ((estávamos contrapondo um barbante sobre o outro)).

**Maicon:** Entendi::

**Professora 3:** Então conseguimos chegar a conclusão que a divisão entre esse valores é aproximadamente 1,7, agora vocês conseguem fazer a divisão dos outros valores? ((divisão da medida da altura do Ricardo pela medida da altura do seu umbigo até o seu pé)).

Por conseguinte, esta é a parte de uma das discussões Matemáticas entre os alunos e as professoras, pois referem-se ao conceito matemático que será explorado para prosseguir a atividade. Nesse momento, ajudamos os alunos a realizarem as outras divisões, o Ricardo conseguiu fazer a conta direta, enquanto o restante dos alunos utilizou as fitas métricas e o barbante para encontrar o quociente.

FIGURA 15 – REGISTRO LINGUA NATURAL – BELEZA

Medidas	Nome do estudante 1:
1) DA ALTURA DO SEU CORPO	143 cm
2) DO UMBIGO ATÉ O CHÃO	84 cm
QUOCIENTE	1,7
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS	23 cm
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS	12 cm
QUOCIENTE	1,91
<p>Parque as 11 cm que é possível  12 cabe  uma vez  em 23  e ainda  sobra  11 cm</p>	

FONTE: Arquivo de registro.

À medida que os alunos foram construindo o registro numérico e encontrando o quociente de cada divisão, foi necessário realizar uma conversão de registro em alguns momentos para uma melhor compreensão e visualização do motivo do quociente ter dado aquele resultado, já que eles não estavam familiarizados a realizarem operações de divisão que não resultassem em números inteiros.

Fica evidente que houve um significado equivocado pelos alunos do que seria o resto da divisão e o que seria o seu quociente, de fato os centímetros que sobraram na divisão (11 cm) são o resto, mas não são o quociente da divisão de  $23/12$ .

Importante ressaltar que este foi um processo que demorou bastante, pois os alunos não estavam completamente familiarizados com o conceito de número decimal. Logo após, pedimos para que nos falassem quais valores foram encontrados, e assim colocar no quadro e observarem que todos encontraram valores próximos, como: 1,4; 1,6; 1,61; 1,7.

FIGURA 16 – QUADRO DA BELEZA

altura	1,46	1,43	1,31	1,37	1,32
	88	84	75	85	81
divisão	1,61	1,61	1,56	1,52	1,6
	22	23	20	23	24
	14	12	12	14	17
buscanti	1,6	1,9	1,7	1,5	1,6

FONTE: Arquivo de registro.

Mesmo colocando tais valores no quadro, foi um tanto quanto difícil conseguir fazer com que os alunos observassem que esses valores eram próximos, nesse sentido, foi preciso mostrar esses tais valores em uma régua, para que assim eles compreendessem que esses valores que eles encontraram são muito próximos.

Queríamos que eles observassem que existe uma relação entre essas medidas, pois mesmo tendo alturas diferentes, o valor da divisão realizada é próximo, já que é o valor da razão áurea (aproximadamente 1,6). Então pedimos para que eles medissem outras partes do corpo para observarem que esse valor se repetia.

Após isso, dois dos alunos continuaram utilizando o barbante para conseguirem realizar a conta, porém nesse momento os alunos quiseram realizar as contas por meio da operação de divisão, com orientação nossa. Diante disso, os alunos estavam tentando descobrir, por exemplo, que número multiplicado por 84 nos daria 143.

FIGURA 17 – EXEMPLO DE REGISTRO NUMÉRICO – DIVISÃO.

... que o possível concluir a partir dos dados que você coletou?

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 143 \\ \overline{) 84} \\ -84 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 1 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2312 \\ \overline{) 12} \\ -12 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 1 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \end{array}$$

FONTE: Arquivo de registro.

Em suma, os alunos estão construindo o modelo matemático que irá responder nossa situação problema, ou seja, estão interpretando, analisando e resolvendo um problema matemático.

Após encontrarem todos os valores, quiseram ainda verificar se os seus quocientes estavam corretos validando suas respostas por meio de uma divisão com barbante. Feito isso, pedimos para que os alunos formassem uma roda para que pudéssemos conversar sobre essa atividade. Nesse momento os alunos disseram que os valores deram parecidos pois as alturas dos alunos eram parecidas. Propusemos então que eles calculassem a altura de uma das professoras e encontrassem o valor do quociente entre sua altura e a medida do seu umbigo até o pé.

FIGURA 18 – RODA DE CONVERSA.



FONTE: Arquivo de registro.

Nessa etapa de discussões, estávamos desenvolvendo a última etapa da atividade de Modelagem Matemática, interpretando, analisando todo o desenvolvimento da atividade e validando o modelo matemático que foi construído.

**Professora 2:** Temos medidas bem diferentes, eu tenho uma, a outra professora tem outra, a Luana tem outra, o Ricardo escreveu algo bem interessante no papel dele.

**Ricardo:** Quase todos os resultados deram 1,6 e os que não deram deu bem próximo de 1,6.

**Professora 1:** E vocês concordam com isso? Observem que a diferença é bem pouca, o que podemos concluir com isso então? Podemos concluir que quem tem esse valor é bonito! Então essa é a medida da beleza.

**Luana:** Nossa, imagina se a gente fizer com a flor.

**Professora 2:** Se a gente fizer com a flor, também irá dar certo.

**Daniel:** Ontem quando eu fui almoçar a minha mãe me perguntou o que eu fiz lá em Jandaia, e eu disse que com a Matemática a gente consegue ver o quanto de beleza a gente tem, e ela não entendeu nada.

**Professora 3:** Agora você consegue explicar isso para ela né, mas como a gente explica para a mãe do Daniel como a gente acha essa medida?

Nesse momento, apresentamos outros exemplos de onde esse número de beleza pode ser considerado, e em outros locais do corpo que também pode ser encontrado, inclusive a própria natureza segue esse padrão.

Alguns minutos antes do término da aula, a mãe do Daniel apareceu na escola para que pudesse levá-lo para casa, porém seu filho pediu para que nós medíssemos sua mãe para verificar o seu número de beleza. Quando Daniel mediu sua mãe todos os outros alunos participaram e contaram para ela o que eles estavam fazendo. A mãe de Daniel, nos contou exatamente o que ele havia contado e ainda acrescentou: Viu Daniel, agora eu sei como se calcula, agora eu entendi.

Esse momento explicita a forma como a turma compreendeu, resolveu e se engajou no problema proposto.

### 6.2.1 Atividade sobre a medida da beleza: registros

Assim como na atividade sobre o crescimento das unhas, analisaremos os registros de cada aluno separando seus registros, e indicando o *Tratamento* por setas azuis e as *Conversões* por setas rosas.

• Registros do Daniel:

REGISTRO NUMÉRICO

Medidas	Nome do estudante 1:	Nome do estudante 2:	Nome do estudante 3:	Nome do estudante 4:
1) DA ALTURA DO SEU CORPO	143 cm	134 cm	134 m	132 m
2) DO UMBIGO ATÉ O CHÃO	84 cm	75 cm	85 cm	81 cm
QUOCIENTE	1,4	1,56	1,52	
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS	23 cm	20 cm	23 cm	24 cm
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS	12 cm	12 cm	14 cm	18 cm
QUOCIENTE	1,9	1,6	1,9	1,6

REGISTRO LINGUA NATURAL

1 Conversão

REGISTRO NUMÉRICO

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

2) possível concluir a partir dos dados que você coletou?

84 x 1 = 84

84 x 2 = 168

84 x 3 = 252

84 x 4 = 336

84 x 5 = 420

84 x 6 = 504

84 x 7 = 588

84 x 8 = 672

84 x 9 = 756

84 x 10 = 840

3 Conversão

Para 75 cabe uma vez em 1,31 e ainda sobre 56

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

2) possível concluir a partir dos dados que você coletou?

72 x 1 = 72

72 x 2 = 144

72 x 3 = 216

72 x 4 = 288

72 x 5 = 360

72 x 6 = 432

72 x 7 = 504

72 x 8 = 576

72 x 9 = 648

72 x 10 = 720

• Registros do Maicon:

Medidas	Nome do estudante 1:	Nome do estudante 2:	Nome do estudante 3:	Nome do estudante 4:
1) DA ALTURA DO SEU CORPO	1,43 m	1,31 m	1,37 m	1,32 m
2) DO UMBIGO ATÉ O CHÃO	84 cm	75 cm	85 cm	81 cm
QUOCIENTE	1,4			
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS	23 cm	20 cm	23 cm	24 cm
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS	12 cm	12 cm	14 cm	18 cm
QUOCIENTE	1,9	1,5	1,9	1,3

1 Tratamento

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

REGISTRO NUMÉRICO

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

12 cabe uma vez em 23 e ainda sobre 11cm

• Registros da Luana:

Medidas	Nome do estudante 1:	Nome do estudante 2:	Nome do estudante 3:	Nome do estudante 4:
1) DA ALTURA DO SEU CORPO	1,43 m	1,31 m	1,37 m	1,32 m
2) DO LARGO ATÉ O CHÃO	84 cm	75 cm	85 cm	82 cm
QUOCIENTE	161	156	152	151
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS	23 cm	20 cm	23 cm	24 cm
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS	12 cm	12 cm	14 cm	18 cm
QUOCIENTE	1,9	1,7	1,8	1,6

**Tratamento**

$1,43 \text{ m} = 143 \text{ cm}$

$143 \div 84 = 1,7023809523809524$

$1,7023809523809524 \times 100 = 170,23809523809524$

$\approx 170,24$

**REGISTRO NUMÉRICO**

$143 \div 84 = 1,7023809523809524$

$1,31 \div 75 = 1,7466666666666667$

$1,37 \div 85 = 1,6117647058823529$

$1,32 \div 82 = 1,6097560975609756$

• Registros do Ricardo

Medidas	Nome do estudante 1:	Nome do estudante 2:	Nome do estudante 3:	Nome do estudante 4:
1) DA ALTURA DO SEU CORPO	1,43 m	1,31 m	1,37 m	1,32 m
2) DO LARGO ATÉ O CHÃO	84 cm	75 cm	85 cm	82 cm
QUOCIENTE	161	156	152	16
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS	23 cm	20 cm	23 cm	24 cm
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS	12 cm	12 cm	14 cm	18 cm
QUOCIENTE	1,9	1,7	1,5	1,6

**Tratamento**

$1,43 \text{ m} = 143 \text{ cm}$

$143 \div 84 = 1,7023809523809524$

$1,7023809523809524 \times 100 = 170,23809523809524$

$\approx 170,24$

**REGISTRO NUMÉRICO**

$143 \div 84 = 1,7023809523809524$

$1,31 \div 75 = 1,7466666666666667$

$1,37 \div 85 = 1,6117647058823529$

$1,32 \div 82 = 1,6097560975609756$

Ao refletirmos sobre os registros dos estudantes e suas discussões, podemos afirmar que a Matemática utilizada para solucionar a problemática, ainda não era utilizada pelos estudantes de forma natural, precisando que buscássemos um material manipulável (barbante e régua) para a compreensão sobre os conceitos e a consequente descrição de um modelo matemático. Nesse caso, o modelo matemático está descrito em termos de um registro de representação semiótico numérico, o quociente da divisão. Esse registro numérico, que representa o modelo matemático construído está representado tanto de forma tabular quanto na forma de operação da divisão, indicando um tratamento entre os registros.

Por fim, os alunos quiseram validar esse registro numérico por meio do material manipulável (barbante), o que se configura a passagem do registro numérico para um registro da língua natural oral.

Diante disso, o tema e a Matemática utilizada, propiciou e demandou que os alunos utilizassem apenas registros numéricos, pela dificuldade que tinham na manipulação da conta. Face o exposto, a Matemática que emergiu dessa atividade (divisão com números decimais) possibilitou que trabalhássemos conceitos de multiplicação e de adição em números decimais, já que essa Matemática (divisão em números racionais) não era conhecida pelos estudantes, permitindo que buscássemos outras alternativas para auxiliá-los.

### 6.3 ATIVIDADE SOBRE A VELOCIDADE: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE.

De acordo com Barbosa (2004) E Almeida, Silva e Vertuan (2012), o início de uma atividade de Modelagem é caracterizada tanto pelo convite à atividade quanto pela relação que estabelecemos com o cotidiano dos alunos. Considerando esses apontamentos, para introduzirmos o tema da atividade, sobre o qual já sabíamos que era de interesse desses alunos, devido a conversas e encontros anteriores, iniciamos uma discussão com o objetivo de mencionar o tema “futebol”, foco do nosso interesse naquele momento.

Iniciamos a aula interagindo com os alunos, perguntando a eles o que haviam feito no fim de semana, alguns disseram que passearam, foram a festas, andaram de bicicleta e jogaram futebol. Através, das respostas dos alunos, foi possível

convidá-los para participar da atividade, pois é uma atividade que envolve futebol. Permitindo então que outras discussões paralelas surgissem.

**Professora 1:** Quando vocês jogam futebol, o que vocês precisam?

**Daniel:** Ah de uma bola, de uma chuteira, de um gol:: de camiseta.

**Professora 3:** Hum, e de habilidades?

**Ricardo:** Sim, coisa que eu não tenho.

**Professora 1:** Mas você joga outra coisa?

**Ricardo:** Ah:: ... eu gosto de jogar xadrez.

**Professora 1:** hum eu também gosto de jogar xadrez, mas que habilidades precisamos ter para jogar futebol?

**Daniel:** Concentração...

**Ricardo:** Velocidade.

**Daniel:** Força...Não pode ter mão de alface para defender.

**Ricardo:** E nem pé torto.

Nesse momento os alunos pareceram aceitar o *convite* (BARBOSA, 2004) que propusemos, pois é possível perceber que houve uma interação dos alunos com o tema, mostrando interesse na atividade. Importante ressaltar ainda, que tal ambiente, é posto aos alunos como forma de convite, mas não significa que os alunos irão aceita-lo, porém como estamos tratando de uma atividade de Modelagem o desenvolvimento em grupos, assim como mencionado por Almeida, Silva e Vertuan (2012), pode motivar os alunos na disciplina e no interesse da atividade pela interação com os colegas e a professora. Além disso, a maneira que o ambiente se dispõe e o não aceite do convite do aluno para participar da atividade pode se tornar como uma aula tradicional (ZAWOJESKI; LESH; ENGLISH, 2003 apud BRAZ, KATO, 2014), na medida em que o professor precisa orientar os estudantes de forma direta, apontando o que devem fazer em cada momento da atividade.

Partindo disso, questionamos: o que é ser rápido?. Apresentamos então, algumas imagens que se associam a rapidez: raio, ferrari, Bolt supercão, Usain Bolt, guepardo, falcão, águia. Procedendo do que seria algo rápido, queríamos verificar o que os alunos compreendiam por velocidade. Para isso perguntamos: Quem é mais rápido um guepardo ou um carro? Essa pergunta foi feita para que pudéssemos analisar se os alunos entendiam que ao falar sobre velocidade precisaríamos falar sobre distância e sobre tempo. Dessa forma, questionamos também, qual era a distância entre Jandaia do Sul e Mandaguari e qual o tempo de viagem de Mandaguari à Maringá.

A partir desses questionamentos, percebemos que os estudantes tinham noção de que a velocidade dependeria da distância e do tempo, mas que tinham pouca noção de distância e tempo. Afirmaram, por exemplo, que a distância entre Mandaguari e Maringá era de 100 quilômetros. Como observamos que os alunos gostavam muito de futebol, e com o objetivo de explorar esses conceitos, apresentamos uma reportagem do Jornal Nacional sobre a velocidade dos jogadores na Copa do Mundo Masculina de 2014.

Além desse vídeo, também apresentamos um vídeo sobre a velocidade do homem mais rápido do mundo, Usain Bolt.

**Daniel:** Ainda bem que sou criança, pois se eu quiser ser corredor, eu não vou competir com ele, por que só tenho 7 anos e ele já é um adulto.

**Ricardo:** Será que ele é mais rápido que um carro?

**Daniel:** E de uma moto?

**Professora 2:** Será que o carro é mais rápido ou mais devagar que o Bolt? Vamos pensar, se a gente sair daqui até Maringá com um carro e o Bolt correndo, quem vai chegar mais rápido?

**Ricardo:** O carro né?

**Professora 3:** Mas e se a gente for mais devagar?

**Daniel:** Ah depende do estado do rápido também né, e as pessoas que dirigem, por que pelo amor de deus existem aquelas pessoas idosas que...

**Daniel:** ... será que a polícia alcança o Bolt?

**Professora 2:** Então a velocidade permitida, para não levar multa ou acidente:: é aproximadamente igual a velocidade do guepardo ((112 km/h)).

Quando apresentamos alguns slides sobre animais, pessoas e carros que são rápidos, além dos vídeos sobre a velocidade os alunos estavam se inteirando do assunto, compartilhando experiências quanto a questões de velocidade e permitindo que vislumbrassem algumas informações que podem ser necessárias para o desenvolvimento da atividade.

Partindo disso, apresentamos as velocidades de alguns jogadores, como as de Neymar e de Marta. O que de fato chamou bastante atenção dos alunos, pois a Marta corre 10 metros em menos de 2 segundos. Então os alunos quiseram saber se eles correriam mais ou menos rápido que a jogadora Marta. Nesse sentido, formularam o seguinte problema de Modelagem: Qual a minha velocidade em uma distância percorrida em 10 metros?. Como os próprios alunos escolheram o tema e problematizaram a situação, podemos afirmar que essa atividade se adequa ao caso 3 (BARBOSA, 2004).

A priori, como os alunos já haviam medido a sala, seus corpos, etc, não foi um problema para eles medir e marcar a distância de 10 metros no chão. Porém os alunos começaram a discutir como iriam contar os segundos que foi percorrido. Sugerimos e permitimos, então, que utilizassem nossos aparelhos telefones para cronometrar o tempo que cada aluno percorria em na distância de 10m.

FIGURA 19 – MOMENTO DA CORRIDA



FONTE: Registro da pesquisa.

Logo após os alunos retornaram para as carteiras para que pudessem discutir sobre esses tempos.

**Daniel:** É o Ricardo é mais veloz que a gente.

**Professora 2:** Mas o Ricardo é:: maior que vocês não é? Será que isso tem alguma relação? Será que quanto mais alto a pessoa mais veloz ela será?

**Daniel:** Eu não sei...

**Professora 1:** Bom vamos colocar esses valores que vocês encontram no quadro.

Nesse momento, colocamos no quadro uma tabela contendo o tempo e o percurso da corrida, permitindo que os alunos percebessem que algo estava faltando na tabela, que precisávamos encontrar o valor da velocidade para complementarmos a tabela.

FIGURA 20 – TABELA DA VELOCIDADE

Nome	Distância	Tempo	Velocidade
Gustavo	10m	3s	3,33m/s
Rhaimé	10m	2s	5m/s
Darri	10m	3s	3,33m/s
Thayná	10m	2s	5m/s

Bolt = 44 km/h <sup>divisão</sup>  
 Neymar = 35 km/h

FONTE: Registro da pesquisa.

Assim, os alunos começaram a pensar que tipo de Matemática eles poderiam utilizar para encontrar esse valor e verificar quem é mais rápido. Para isso, começaram a pensar que tipos de contas Matemáticas eles utilizaram nas aulas anteriores. De modo, que a situação-problema já estava posta aos estudantes, este momento pode se caracterizar como o momento de resolução do problema elaborado por meio da etapa da matematização, pois estavam tentando buscar uma maneira de resolver esse problema.

**Professora 1:** Gente, vocês lembram como estava o valor da velocidade do Bolt?

**Ricardo:** 44, ele tem a velocidade de 44.

**Daniel:** Estava km por hora.

**Professora 1:** E o que significa isso ((colocamos no quadro km/hora)).

**Ricardo:** É a divisão... entre o percurso e o tempo que ele percorreu.

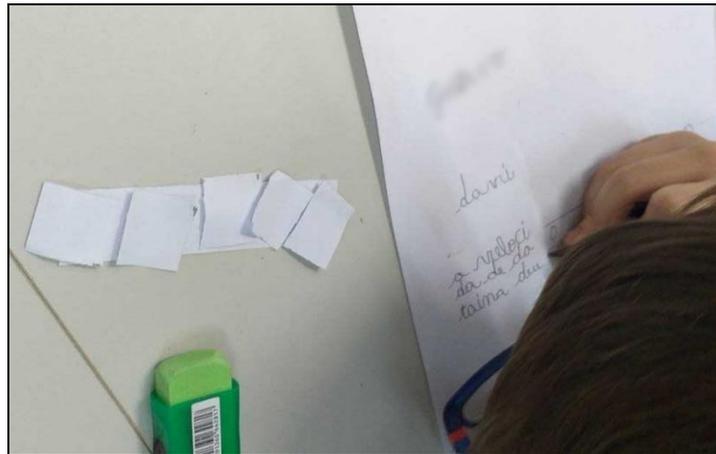
**Daniel:** Hum::, então precisamos dividir todos esses valores.

**Ricardo:** Sim, ai encontramos os valores e completamos a tabela.

Além de terem escolhido e determinado a problemática, ainda conseguiram sistematizar a equação  $\text{Velocidade} = \text{Distância} / \text{Tempo}$ . Como os alunos estão nos Anos Iniciais, ainda não estão familiarizados com algoritmos, mas a partir do momento que os alunos discutiram entre si, e definiram que o modelo matemático que eles precisavam encontrar utilizava-se a divisão (percurso pelo tempo) isso já pode ser considerado como um registro da língua natural e depois, isso foi sistematizado usando um registro numérico. Além disso, oralmente, ao argumentar que velocidade pode ser calculada pela expressão “velocidade dividida pelo tempo”, Ricardo dá indícios do desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Mediante o exposto, como a divisão era de números naturais, para o Ricardo a conta Matemática estava compreensível, porém foi preciso auxiliar o Daniel de outra forma. Como naquele momento não estávamos (nós professoras) com barbantes em mãos, propusemos outro material didático (folha de sulfite, régua e tesoura) para que desse apoio na hora de se resolver a divisão.

FIGURA 21 – POSSIBILIDADE DE REPRESENTAÇÃO DE DIVISÃO



FONTE: Registro da pesquisa.

Como queriam dividir  $10/2$ , propusemos que recortassem um papel de 10cm e questionamos: Quantos papezinhos de 2cm caberia dentro do papel de 10 cm?, sendo possível então perceber que caberia 5 papezinhos dentro do 10.

Diante disso os alunos conseguiram encontrar suas velocidades e completar a tabela que estava desenhada no quadro. Os estudantes concluíram que suas velocidades eram de, aproximadamente, 5 metros por segundo. Uma velocidade inferior à da jogadora Marta.

### 6.3.1 Atividade sobre velocidade: registros

• Registros do Daniel:

REGISTRO NUMÉRICO

REGISTRO LINGUA NATURAL

$10 \frac{2}{5}$

Conversão

Eu medir de 2 em 2 e coube 5 vezes o número 2 em 10  
 O número 5 significa a velocidade da [redacted] que é 5 m/s.

Eu medi de 2 em 2 e coube 5 vezes o número 2 em 10. O número 5 significa a velocidade do Ricardo que é 5m/s

• Registros do Ricardo:

REGISTRO NUMÉRICO

REGISTRO LINGUA NATURAL

$10 \text{ m}$   
 $3,33 \text{ m/s}$   
 $\frac{10}{3}$   
 $3$

Conversão

1

Eu peguei o Espaço e dividi pelo tempo que o resultado é 3,33, que é a velocidade do Daniel.

Eu peguei o espaço e dividi pelo tempo, que o resultado é 3,33, que é a velocidade do Daniel.

$10 \text{ m}$   
 $5,00$   
 $\frac{10}{2}$   
 $5$

Conversão

2

Eu peguei o Espaço e dividi pelo meu tempo que o resultado é 5,00m, que é a minha velocidade.

Eu peguei o espaço e dividi pelo meu tempo, que o resultado é 5,00m, que é minha velocidade.

$5,00 \text{ m/s}$   
 $- 3,33 \text{ m/s}$   
 $\hline 1,67 \text{ m/s}$   
 $3,33 \text{ m/s}$   
 $+ 1,67 \text{ m/s}$   
 $\hline 5,00 \text{ m/s}$

Essa é a diferença.

Essa é a diferença

Essa é a prova que está certa a questão.

Essa é a prova que está certo a questão

Ao analisarmos os modelos construídos pelos alunos para solucionar a problemática e retomando os encaminhamentos dados no decorrer da atividade, podemos afirmar que os estudantes precisavam de uma ferramenta, de um material manipulável, para auxiliar na visualização e compreensão da divisão feita. Para tanto, por meio de papéis procuramos mostrar quantas vezes o 2 caberia em 10. Embora esse não seja um modelo matemático, é um registro que permite a compreensão de conceitos necessários para a sua construção e para a resolução do problema de Modelagem.

E por meio da discussão desenvolvida, os alunos conseguiram na língua natural oral, sistematizar o modelo matemático construído por eles, indicando o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois concluíram que para se encontrar a velocidade era preciso dividir o espaço pelo tempo. Esse fato evidencia como o trabalho de orientação docente é essencial em ambientes de aprendizagem investigativos. Foi por meio da orientação das professoras e da organização de dados numéricos na forma tabular que os alunos puderam perceber um padrão existente entre os cálculos e generalizar essas operações. Esses passos dizem respeito ao processo de investigação matemática em atividades de Modelagem. É por meio dele que discussões matemáticas emergem em meio a outros tipos de negociações que permitem que o aluno atribua significado às suas ações (nesse caso correr) e aos conceitos matemáticos, nesse caso a divisão e a relação entre medidas (espaço e tempo).

#### 6.4 ATIVIDADE SOBRE A COPA DO MUNDO FEMININA: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE.

Durante a descrição e o desenvolvimento da atividade tiveram momentos que citei um aluno, chamado Guilherme (nome fictício), pois sua presença (com a visão que tem/tinha) permitiu vários debates dentro da aula. Devido a isso, acho importante citá-lo em alguns momentos, no entanto, seus registros não foram considerados no processo de análise.

A quarta atividade sobre a Copa do Mundo Feminina, é pautada no caso 1 de Barbosa (2004), dito isso, todos os passos da atividade foram realizados com orientação das professoras, apresentamos a problemática já definida aos alunos, a

simplificação e a coleta dos dados, e coube aos alunos somente solucionar a problemática. Como a Luana e o Maicon haviam faltado nos dias de desenvolvimento da atividade sobre a velocidade, perguntamos aos alunos se eles haviam contado para os colegas o que haviam feito.

**Ricardo:** eu contei que nós estava calculando a velocidade:: ... dentro de 10 metros, que eu tinha perguntado, dai a gente foi lá fora, e eu ia falar:: o nome da jogadora de futebol, mas eu tinha esquecido e falei que ela corria 1s em 10 metros, ai a gente encontrou a nossa velocidade nesse percurso.

**Professora 1:** E como você fez para achar essa velocidade?

**Ricardo:** A gente dividiu o tempo e o espaço.

**Professora 2:** O espaço pelo tempo né?

**Daniel:** A gente mediu pela corrida.

Nesse momento, retomamos alguns aspectos sobre a atividade passada aos alunos que haviam faltado (pediram para que assim que acabasse a aula, realizássemos o passo a passo para verificar a velocidade deles). Diante dessa conversa, lembramos que estávamos em época de Copa do Mundo Feminina, e no dia anterior as jogadoras da seleção brasileira haviam jogado.

Apresentamos toda a seleção brasileira e em quais posições elas jogam (atacante, meia, goleira, zagueira) o que gerou uma enorme discussão e abrangeu outros tipos de discussões, como: a questão de mulheres serem proibidas de jogar futebol até a década de 1970; a comparação entre Neymar e Marta (feita pelos alunos); o racismo; copa do mundo de jogadores com síndrome de down; jogos paraolímpicos. Diante disso, percebemos que os alunos haviam aceitado o convite (BARBOSA, 2004) de participar dessa atividade e estavam se inteirando sob o tema.

**Daniel:** É todo mundo pode jogar oxe.

**Guilherme:** É negro pode jogar.

**Luana:** Claro que pode jogar, existem negros excelentes no futebol.

**Professora 2:** Existia uma época que as pessoas negras não podiam utilizar o mesmo ônibus que pessoas brancas, e o que vocês acham sobre isso?

**Ricardo:** Um absurdo.

**Daniel:** Completamente errado.

**Luana:** Não importa a cor da pessoa, ela pode ir onde quiser, pode jogar o que quiser, e inclusive tem jogadores negros de futebol muitos bons.

**Professora 2:** Então durante uma época as pessoas achavam isso normal, e olha que absurdo, porque nossa raça, nossas características físicas não distinguem ninguém. Igual quando eu comentei sobre as mulheres jogarem bola, então isso é muito recente, fazem somente 40 anos ((que nós éramos proibidas de jogar futebol)).

**Luana:** Ai, se eles me matassem eu não estaria nem ai, por que isso é uma coisa muito errada.

**Professora 2:** E nessa época tinham várias pessoas que eram igual você, e que foram atrás, então independe da cor da gente, se a gente joga é por conta dessas lutas...

**Luana:** E isso ocorreu também quando as mu/... mulheres não podiam trabalhar né?!

Esse foi um momento enriquecedor não só para nós professoras, quanto para os alunos, pois uma aula que é de Matemática, nos permitiu e permite discutir sobre assuntos sociais no momento da aula, e isso só foi possível pelo caráter da atividade. Além disso, podemos categorizar essa discussão, como uma discussão reflexiva, não é uma discussão Matemática, mas ela faz uma reflexão que tem caráter social. Além disso, é uma questão reflexiva porque permitiu que os estudantes compreendessem, num momento posterior, o motivo da estrutura de jogos e de chaves na copa do Mundo feminina de 2019, devido à falta de incentivo às seleções femininas de futebol, como veremos adiante.

FIGURA 22 – ATIVIDADE DA COPA DO MUNDO FEMININA

GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C
FRANÇA	ESPAÑA	BRASIL
NORUEGA	ALEMANHA	ITÁLIA
NIGÉRIA	CHINA	AUSTRÁLIA
COREIA DO SUL	ÁFRICA DO SUL	JAMAICA

GRUPO D	GRUPO E	GRUPO F
INGLATERRA	HOLANDA	SUÉCIA
ARGENTINA	CANADÁ	ESTADOS UNIDOS
JAPÃO	NOVA ZELÂNDIA	CHILE
ESCÓCIA	CAMARÕES	TAILÂNDIA

Quantos jogos tem ao todo nas fases de grupo? Quantos jogos tem ao todo na Copa Do Mundo Feminina?

FONTE: Elaborado pela autora.

Logo após essa discussão, apresentamos todos os grupos que compunham essa Copa do Mundo Feminina de 2019. O que nos permitiu apresentar nossa problemática: Quantos jogos haverá na primeira fase da Copa do Mundo de 2019?. Nesse momento os alunos contaram todos os grupos e um primeiro momento nos disseram que haveria 24 jogos.

**Ricardo:** Tem 4 times em cada grupo, por isso tem 24 jogos.

**Luana:** Eu acho que ele está certo.

**Ricardo:** Por que 4 multiplicado por 6 me dá 24 e se eu somar cada time também irá me dar 24.

**Professora 1:** E quantos jogos tem em cada um desses grupos?

**Luana:** 4.

**Professora 1:** Mas olha o grupo do Brasil, ele vai jogar contra quem?

**Luana:** contra 3.

Nesse momento os alunos começaram a debater quantos jogos teriam em um único grupo. E dois chegaram a conclusão, a priori, que teria 2 jogos, levantando a hipótese de que 4 seleções seriam divididas em 2 jogos (com 2 times por jogo), enquanto que os outros dois alunos concluíram que seria 3 jogos, pois um time jogaria contra os outros três times. Esse momento é caracterizado por uma discussão matemática e uma discussão técnica. Trata-se de uma discussão técnica porque eles delimitam como resolver o problema e de uma discussão matemática na medida em que tratam de conceitos matemáticos, como multiplicação e combinação. Diante disso, pedimos para que eles pensassem então como ficariam esses jogos e registrassem nas suas folhas, para logo em seguida debaterem entre eles.

**Ricardo:** Brasil vai jogar duas vezes, Brasil e...

**Luana:** Agora eu estou com dúvida.

**Maicon:** eu acho que vai ser três, porque daí vai ficar Brasil com Jamaica, Itália com Austrália e Itália com Jamaica.

**Ricardo:** É será três, por que se o Brasil ganhar, e a Itália ou a Jamaica ganhar vai jogar com o Brasil.

**Professora 1:** Então o Brasil joga com a Jamaica e a Austrália e ele não joga com a Itália?

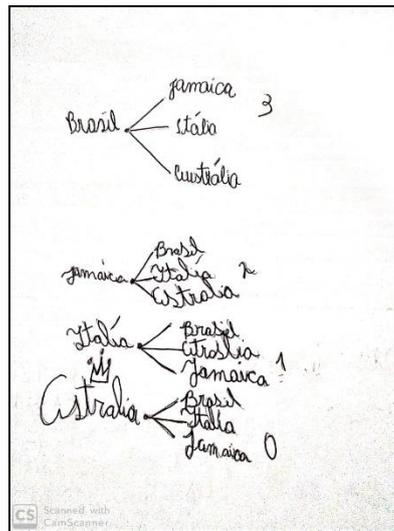
**Maicon:** Não. Depende se a Austrália ganhar vai contra o Brasil, se a Itália ganhar vai contra o Brasil.

**Professora 2:** Mas porque o Brasil não joga logo de início com a Itália ou a Austrália?

**Maicon:** Porque é regra né, ontem o jogo foi do Brasil contra a Jamaica.

Face o exposto, uma das alunas (Luana) estava um tanto quanto dispersa. A aluna afirmou não ser boa em Matemática e que não queria resolver o problema. Essa fala mostra que ela não havia mais aceitado o convite para a atividade. No entanto, no papel de professoras, refizemos o convite para o trabalho, propondo que ela resolvesse o problema montando esquemas. Propusemos que ela organizasse esses jogos por meio da combinação na árvore de possibilidades, o que fez com que chamasse atenção da aluna que, de pronto, se engajou na resolução da sua tarefa.

FIGURA 23 – EXEMPLO DE POSSIBILIDADES FEITO POR LUANA.



FONTE: Registro da pesquisa.

Ainda, podemos considerar esse registro, como um registro gráfico. Após isso, um dos alunos quis apresentar o que havia pensando aos colegas.

**Luana:** Olha eu fiz assim óh:: ((estava mostrando o seu registro)), está vendo esses risquinhos, eu vou colocar quem o Brasil pode jogar, sabendo que temos 4 times, **então ele vai contra a Jamaica, vai contra a Itália e depois ele vai contra a Austrália.** Ai::

**Professora 1:** Então quantos jogos teve ai Luana?

Aqui teve três jogos. Agora eu vou fazer a Jamaica, aqui é a Jamaica, então ela vai contra o Brasil, a Itália, e também vai contra depois, sabe quem? a Austrália. Beleza, ai aqui eu vou colocar o da Itália.

**Maicon:** Ela vai colocar todos os times?

**Luana:** A Itália vai contra o Brasil, contra a Jamaica e aí por último vai contra a Austrália.

**Professora 2:** Bom agora a gente tem que entender isso aí, quantos jogos teve?

**Luana:** Quantos jogos diferentes teve aqui ((a primeira árvore de combinação partindo do Brasil)).

**Ricardo:** Jamaica, Itália e Austrália.

**Luana:** E aqui?

**Professora 1:** Gente, a Luana perguntou quantos jogos vai ter nessa segunda parte que sejam diferentes do primeiro?

**Luana:** Eu vou riscar os jogos que já ocorreram.

**Professora 2:** Olha gente, o Brasil já jogou com a Jamaica nessa primeira parte?

**Luana:** Já, pois é a mesma coisa, entenderam? Então de diferente tem apenas dois jogos.

Podemos classificar essa discussão como sendo uma discussão Matemática, além de que os alunos estavam analisando e avaliando por meio de um momento social entre os estudantes, para verificar outras possibilidades de se resolver a questão problema.

Por meio dessa discussão, os alunos conseguiram responder que na primeira fase da Copa do Mundo Feminina, ocorrerá 6 jogos em cada grupo. Logo após, apresentamos as seis fases: Fase de grupo; Oitavas de Final; Quartas de final; Semi-final; Disputa pelo terceiro lugar; Final.

**Dan:** Não estou assistindo a Copa Feminina, pois é feminina demais.

**Professora 2:** Você não gosta?

**Professora 3:** Você sabia que a Marta já fez mais gols que o Pelé?

**Dan:** Como assim? Ela é uma perna de pau!

**Professora 3:** A marta até agora fez 103 gols, passou de muito homem bom.

Acho importante ressaltar esse Dan, assim como o Guilherme, pois as discussões foram relevantes não só para o aluno, mas para a turma. Pois permitiu que debatêssemos outro aspecto social.

A partir disso, os alunos precisavam descobrir quantos jogos teriam em cada uma das seis fases. Seria necessário então, que os alunos multiplicassem a quantidade de jogos por grupos (6 jogos) pela quantidade de grupos (6 grupos). Porém, não estava fazendo tanto sentido para alguns alunos utilizar essa Matemática, então nós professoras tivemos que pensar em uma maneira que os alunos conseguissem enxergar essa multiplicação.

Nesse sentido, nós, professoras, juntamos as carteiras, pegamos alguns lápis coloridos e tentamos explicar por meio dos lápis (cada cor representa um time) como funcionaria os jogos na fase de grupos.

FIGURA 24 – MULTIPLICAÇÃO COM LAPIS



FONTE: Registro da pesquisa.

Isso chamou bastante a atenção dos alunos, e fez com que eles compreendessem por que seria preciso utilizar multiplicação e como se dá a organização dos times em grupos e, dentro de cada grupo, quem joga contra quem.

Feito isso, os alunos conseguiram assim calcular quantos jogos existiriam na primeira fase: 36 jogos. A partir disso, os estudantes deveriam determinar quantos jogos ocorreriam nas demais fases, e quantos jogos ocorreria no total.

Ao analisarem a fase de grupos e concluírem que essa etapa era composta por 36 jogos, os estudantes prosseguiram suas análises para as oitavas de final, o primeiro e segundo colocado em cada grupo.

Por meio de uma pesquisa, tivemos acesso à informação que na fase de grupos o primeiro e o segundo colocados de cada grupo prosseguiria para as oitavas de final. Etapa essa, composta por 8 jogos, em que cada time disputa um só jogo. Com essas informações, a turma concluiu que precisaríamos de 16 seleções nas oitavas de final. No entanto, como a fase de grupos foi composta por 6 grupos dos quais 2 seleções avançariam na competição, nos questionamos: como 8 jogos ocorreriam com apenas 12 seleções?

Essa pergunta nos conduziu a outra investigação. Junto aos estudantes tivemos acesso à informação que por conta da falta de incentivo ao futebol feminino não foi possível montar 8 grupos para a primeira fase da Copa, como ocorre com a Copa de futebol masculina. Dessa forma foi preciso que os 4 melhores terceiro lugar da fase de grupos avançasse para as oitavas de final. Assim, era possível que tivéssemos 8 jogos.

Essa discussão e investigação sobre o tema suscitou discussões matemáticas, reflexivas e técnicas sobre o problema de Modelagem. Permitiu que discutíssemos sobre as mulheres no futebol e o preconceito nesse esporte. Essas negociações fizeram com que os estudantes se engajassem para finalizar o estudo desse problema. Para analisar a quantidade de jogos das semifinais e da final, portanto, os alunos já estavam familiarizados tanto com o tema estudado quanto com as ferramentas matemáticas que utilizavam. Não foi difícil, para eles, concluir que as semifinais seriam compostas por 2 jogos (com as 4 seleções vencedoras das oitavas de final); que a final seria composta por 1 jogo (com as 2 seleções vencedoras das semifinais) e que ainda teríamos a disputa pela terceiro lugar, com as seleções que perderam as semifinais.

## 6.4.1 Atividade sobre a copa do mundo feminina: registros

- Registros do Daniel:

REGISTRO LINGUA NATURAL

Cada grupo tem 6 jogos, ou seja na fase de grupos ira ter 36 jogos, nas oitavas de final tem 8 jogos. Juntando todos os grupos ficam 52 jogos.

COPAS - CUPA DO MUNDO FEMININA 2015

GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C
FRANÇA	ESPAÑA	BRASIL
NORUEGA	ALEMANHA	ITÁLIA
NIGERIA	CHINA	AUSTRÁLIA
COREIA DO SUL	ÁFRICA DO SUL	JAMAICA

GRUPO D	GRUPO E	GRUPO F
INGLATERRA	HOLANDA	SUÉCIA
ARGENTINA	CANADÁ	ESTADOS UNIDOS
JAPÃO	NOVA ZELÂNDIA	CHILE
ESCÓCIA	CAMARÕES	TAILÂNDIA

→ Fase de grupos  
→ Oitava de final  
→ Quarta de final  
→ Semi-final  
→ Disputa pelo 3º lugar  
→ Final

Cada grupo tem 6 jogos  
ou seja na fase de grupos  
ira ter 36 jogos.  
nas oitavas de final tem  
8 jogos.  
Juntando todos  
os grupos ficam  
52 jogos



CS Scanned with CamScanner

- Registros do Maicon:

REGISTRO NUMÉRICO

Conversão

REGISTRO LINGUA NATURAL

GRUPO C - CON DE MUNDO UNICA/2014		
GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C
FRANÇA	ESPAÑA	BRASIL - 6 1 3
NORUEGA	ALEMANHA	ITALIA - 6 1 2 3
NIGERIA	CHINA	AUSTRALIA - 1 2 4
COREIA DO SUL	AFRICA DO SUL	JAMAICA - 1 1 4

GRUPO D	GRUPO E	GRUPO F
INGLATERRA	HOLANDA	SUECIA
ARGENTINA	CANADA	ESTADOS UNIDOS
JAPÃO	NOVA ZELANDIA	CHILE
ESPANHA	CAMARÕES	TAILANDIA

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 6 \\ \hline 24 \end{array}$$

JOGOS  
ITALIA VC

BRASIL VC  
JAMAICA

italia  
Brasil & Jamaica

- Registros da Luana:

REGISTRO LINGUA NATURAL

10 Brasil com Jamaica 1

9 Brasil com Italia 3

6 Jamaica com Australia 4

6 Italia com Australia 2

Brasil

- Jamaica 3
- Italia
- Australia

Jamaica

- Brasil
- Italia 2
- Australia

Italia

- Brasil
- Australia
- Jamaica 1

Australia

- Brasil
- Italia
- Jamaica 0

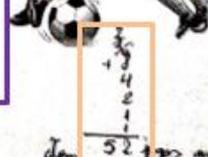
- Registros do Ricardo:

REGISTRO LINGUA NATURAL

Es aida que vai ser 4 jogos, Brasil e França e Itália com Austrália  
 e que Itália ganhar Brasil vai jogar com ela mas que Austrália ganhar  
 Exemplo: Brasil jog com a Austrália, mas que Austrália se itaba perde vai jogar com a  
 Brasil ganhar  
 Itália  
 Austrália) - ou seja algum deles ganhar, Brasil vai jogar com quem ganhar



Tem 36 jogos no total de fase de grupo  
 Es aida que tem 2 times em cada grupo para se jogar  
 Não vai ter 16 jogos para as outras de final e mais 4 times.  
 Nos 16 jogos de final tem 4 jogos  
 semi-final 2 jogos  
 e o vencedor com 3 jogos tem 1 jogo  
 e no final tem 1 jogo



Jan 

36
+ 3
4
2
1
1
52 jogos no Copa do Mundo

Conversão

REGISTRO NUMERICO

Ao analisar quais registros que emergiram no decorrer dessa atividade, é possível perceber que o registro na língua natural surgiu de maneira espontânea para todos os alunos. Talvez isso se deva ao caráter do problema proposto, pois ele não apresentava dados numéricos e nem remetia a dados numéricos de forma tão explícita. As primeiras tentativas dos alunos consistiram em estudar que jogos ocorreriam entre quais seleções. Essa estratégia, que foi permeada por discussões técnicas, foi o caminho que encontramos para apresentar uma ferramenta que era propícia para resolver o problema: a árvore de possibilidades. Por meio desse modelo os estudantes poderiam usar os mesmos registros que estava usando (a língua natural), no entanto, com uma estrutura matemática que conduziria a uma análise num formato mais simples, devido à forma de organização dos dados.

Por meio da árvore das possibilidades os estudantes compreenderam e calcularam quantos seriam os jogos em cada grupo, combinando as seleções e excluindo jogos repetidos. Após concluírem que cada grupo teria 6 jogos, os alunos

usaram a multiplicação para determinar quantos jogos seriam realizados ao todo nessa etapa.

Além disso, os registros numéricos se fizeram presente por todos os alunos, pois quando discutiram e utilizaram os lápis para analisar a fase de grupo, isso os auxiliou para prosseguirem com o registro numérico.

Como surgiram apenas dois registros, os alunos convertiam o registro língua natural para o registro numérico, e vice-versa. Com essa atividade se deveu de acordo com caso 1, a interpretação, mesmo com todos os dados já entregue aos estudantes, a problemática foi uma das mais difíceis de se solucionar, pois em um primeiro momento eles não haviam compreendido o motivo de se utilizar multiplicação, além disso a árvore de possibilidades era uma ideia desconhecida, que precisou ser introduzida pelas professoras. Outro aspecto importante nessa atividade foi a necessidade de dispormos de outras representações, usando lápis de cor para representar os times, com um estudante que não conseguiu compreender a situação estudada por meio das ferramentas que apresentamos (árvores das possibilidades e multiplicação).

## 6.5 QUAIS REGISTROS SURGIRAM NAS ATIVIDADES?

Ao desenvolver as quatro atividades que foram propostas nessa investigação, com o objetivo de analisar quais seriam os registros semióticos que surgiriam em atividades de Modelagem Matemática por estudantes dos Anos Iniciais, fica evidente que alguns registros surgiram de forma natural, enquanto outros registros somente surgiram por orientação das professoras, com o objetivo de fundamentar o desenvolvimento do pensamento matemático.

Diante disso, apresentamos no Quadro 9 quais registros, tratamentos e conversões emergiram no decorrer das quatro atividades, com a finalidade de sintetizar as descrições apresentadas na seção anterior.

QUADRO 9 – REGISTROS QUE EMERGIRAM NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

<b>Atividade (título)</b>	<b>Organização do ambiente de aprendizagem</b>	<b>Registros que emergiram (modelos matemáticos)</b>	<b>Tratamentos</b>	<b>Conversões</b>
Crescimento das unhas	Caso 2	- Registro Língua Natural;	- Dentro do Registro Numérico.	- Do Registro Língua Natural para o Registro Gráfico e Registro Numérico;

		- Registro Numérico; - Registro Gráfico.		- Do Registro Gráfico para o Registro Numérico.
Medida da Beleza	Caso 2	- Registro Numérico; - Registro Língua Natural.	- Dentro do Registro Numérico;	- Do Registro Numérico para o Registro Língua Natural; - Do Registro Língua Natural para o Registro Numérico.
Velocidade	Caso 3	- Registro Língua Natural; - Registro Numérico.	Não ocorreu tratamento nessa atividade	- Do Registro Língua Natural para o Registro Numérico; - Do Registro Numérico para o Registro Língua Natural.
Copa do Mundo Feminina	Caso 1	- Registro Língua Natural; - Registro Numérico.	Não ocorreu tratamento nessa atividade	- Do Registro Língua Natural para o Registro Numérico; - Do Registro Numérico para o Registro Língua Natural.

FONTE: Elaborado pela autora.

Tomando essas informações, foi possível perceber na primeira atividade (Crescimento das unhas) que o registro língua natural surgiu de forma natural para os alunos, pois ao mesmo tempo que discutíamos durante a atividade o modelo matemático já estava sendo elaborado, o mesmo ocorre com as demais atividades. Isso pode se dever ao fato de que parece uma prática natural nos Anos Iniciais a construção de registros escritos e textos explicativos nas aulas de Matemática. Nas aulas em que os alunos resolvem problemas matemáticos, por exemplo, eles são incentivados a descreverem os cálculos que realizam e também a dar uma resposta ao problema, na língua natural. Essa pode ser uma das razões pelas quais esses dois registros, numérico e na língua natural, mais aparecem nas atividades. Assim como as conversões entre elas.

Outro ponto a se explicitar é que costumamos lidar com a conversão do registro numérico para a língua natural nas aulas de Matemática como a descrita no parágrafo anterior, mas não o contrário (registro na língua natural para o numérico). Normalmente é assim que os livros didáticos de Matemática apresentam respostas para problemas. Nas atividades de Modelagem, no entanto, como os problemas ou não estão elaborados ou são reelaborados, é preciso registrá-los e pensá-los do ponto de vista da língua natural para então resolvê-los. Isso pode explicar o que aconteceu nas atividades desenvolvidas nessa investigação.

Na atividade sobre o crescimento das unhas, os caminhos que os alunos trilharam para encontrar uma representação que respondessem a problemática

aconteceu por meio do registro gráfico e mesmo que o registro tenha sido o mesmo entre os alunos, a maneira como cada aluno interpretou o seu gráfico foi diferente. E isso foi importante, pois contribuiu para que diferentes formas de interpretação e resolução fossem apresentadas pelos estudantes e mostrasse à eles que diferentes representações, modelos matemáticos, respondem ao mesmo problema. Esse fato mostra que a Matemática não é uma ciência cujas respostas são exatas, quando estamos lidando com problemas reais, mas sim lida com aproximações e modelos que podem descrever de forma apropriada essas situações.

Ao mesmo tempo, nos parece que o registro gráfico nesse momento só surgiu porque nós professoras entregamos as folhas milimetradas para que facilitasse a compreensão dessa unidade de medida, permitindo então que os alunos desenhasssem suas unhas. Nesse sentido, será que o registro gráfico teria surgido naturalmente pelos estudantes nessa atividade? É fato que enquanto professoras precisamos orientar e sempre apresentar possibilidades de resolução aos nossos alunos, e nos parece que desenhos surgem de forma natural nesse nível de ensino, no entanto é preciso orientação docente para que esses registros tornem-se modelos matemáticos, ou seja, que sejam passíveis de serem compreendidos, que permitam a realização de tratamentos e de conversões, como indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012). Na condição de professores, foi que buscamos fazer no decorrer dessa e das outras atividades: indicar possibilidades com diversas representações para que modelos que descrevessem as situações fossem construídos e permitissem a interpretação dos problemas.

Diante disso, observa-se que os alunos tinham sempre a necessidade de matematizar a problemática utilizando a conta de adição ou multiplicação por meio de um registro numérico. E isso fica evidente ao analisarmos quais os tratamentos e conversões que emergiram nessas atividades, pois todos os alunos sempre convertiam seus registros para o registro numérico a priori, e por que esses registros surgem de forma natural para os alunos? E por que os outros registros semióticos não emergiram de forma natural? Por que a conversão sempre se dava para o registro numérico?. Nos arriscamos a afirmar que isso acontece porque as operações de soma e de multiplicação são ferramentas para os alunos. Ou seja, esses conceitos fazem parte do repertório matemático dos estudantes. Já outros conceitos, como o de divisão apareceram como objeto de aprendizagem, pois foi

preciso que ensinássemos o algoritmo ou formas de desenvolver essa ideia, em cada atividade.

Face o exposto, é possível afirmar que o mesmo acontece nas outras três atividades, pois os registros que emergiram em todas as atividades foi o registro numérico e registro língua natural, talvez porque eles já tenham se apropriado desses registros. Porém, na segunda atividade (Medida da Beleza), fica evidente ao analisar os registros, que os alunos ainda possuíam bastante dificuldade mediante aos conceitos matemáticos que foram utilizados, pois quase não ocorreram conversões de registros, apenas tratamentos do registro numérico. O que é considerável, pois os alunos ainda não haviam sido apresentados ao conceito de divisão quando o resultado eram números decimais.

Nas duas últimas atividades, é possível perceber ao analisar as falas dos estudantes, que os alunos tinham a necessidade de sistematizar o conceito por meio de um registro numérico, e me aventuro a dizer, que na atividade da velocidade, o registro algébrico emergiu na língua oral de um dos alunos, quando o mesmo disse “Velocidade é igual ao espaço pelo tempo” para poder sistematizar a problemática.

É fato que o nosso objetivo aqui não era analisar o processo de aprendizagem da multiplicação dos alunos, porém fica claro que em todas as quatro atividades foi possível discutir as questões por meio de conceitos de adição, e ao longo das atividades por meio do conceito da multiplicação.

## 7 CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES FINAIS

Em fase de considerações finais sobre a pesquisa desenvolvida e apresentada nesse texto, retomamos o objetivo que a norteou para que possamos tecer reflexões finais sobre os caminhos percorridos.

O objetivo dessa pesquisa consistiu em analisar que representações Matemáticas são desenvolvidas em atividades de Modelagem Matemática por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Objetivo esse gerado pelas nossas inquietações, enquanto professoras, quanto a escassez de pesquisas que tratam sobre Modelagem Matemática nesse nível de Ensino e pelo nosso interesse em investigar o contexto de aprendizagem de Matemática nessa etapa de escolarização.

A busca pela análise de como os estudantes desenvolvem investigações alinhadas à natureza da Modelagem Matemática nesse nível de ensino, nos direcionou ao uso de uma teoria que permitisse com que analisássemos os modelos matemáticos construídos pelos alunos, em termos das suas naturezas. Dessa forma, nos embasamos na teoria dos Registros de Representação Semiótica, pois trata-se de uma teoria que permite, justamente, analisar as representações Matemáticas, concebidas aqui como modelos matemáticos, desenvolvidas pelos sujeitos e a relação entre essas construções e o processo de aprendizagem da Matemática. No caso da nossa pesquisa, não foi nosso objetivo analisar o processo de aprendizagem da Matemática de modo aprofundado, devido ao tempo disponível para o desenvolvimento dela e a complexidade da teoria dos RRS.

Tais atividades foram orientadas de acordo com a concepção de Modelagem Matemática que a concebe como um ambiente de aprendizagem pautado nos processos de problematização e investigação de temas não, necessariamente, matemáticos, usando para isso ferramentas matemáticas. Considerando essa concepção, diferentes maneiras de organizar o ambiente da aula de Matemática, considerando a forma como a tarefa é construída e proposta, e as ações dos alunos e do professor, podem ser desenvolvidas. A essas configurações, Barbosa (2004) chama de casos. Essas configurações foram utilizadas para elaborar, planejar e orientar os alunos no percurso das atividades.

É importante discutir aqui, que durante o planejamento das atividades, nos deparamos com dificuldades para criar e adaptar atividades de Modelagem Matemática, visto que enquanto professoras, precisamos pensar nas possibilidades e alternativas de conduzir os alunos com o objetivo de favorecer a compreensão da problemática, além do fato de que o caráter da atividade permite que em uma mesma atividade diferentes registros surjam pelos alunos e isso de fato também deve ser levado em conta durante o planejamento das atividades.

No que diz respeito a construção/adaptação da primeira atividade “Crescimento das unhas”, foi preciso pensar primeiro em um tema em que o aluno se sentisse envolvido com a atividade, nesse caso a temática unhas. Após a escolha da temática, um novo passo precisava ser pensado e adaptado, nós enquanto professoras pensamos em quais conceitos matemáticos poderiam ser utilizados para que fosse possível resolver a problemática e quais possíveis conceitos matemáticos surgiriam no decorrer da atividade. Nesse sentido, tivemos que pensar como os conceitos matemáticos que surgiram no decorrer da atividade influenciariam na forma que os alunos escolheriam e conduziram o uso de diferentes registros matemáticos. Diante disso, pensamos então na utilização de um material didático (papel milimetrado), que auxiliou os alunos no processo de construção do modelo matemático, nesse caso permitindo que um registro gráfico emergisse. Podemos considerar ainda que conceitos de medida e organização de dados em tabelas foram apresentados pelos alunos no decorrer dessa atividade por meio do registro numérico.

Face ao exposto, a atividade do Crescimento das unhas foi encaminhada e elaborada de acordo com o caso 2, na qual o tema e a problemática foram elaboradas pela professora e coube aos alunos, simplificar, levantar hipóteses, coletar os dados e validar. Pode-se dizer que essa atividade não foi tão desafiadora para conduzir, talvez pela temática, pois os alunos ficaram bem interessados em participar das atividades todo o momento da aula e, também, por conta dos registros que eles construíram, em que não apresentaram dificuldades de compreensão e indicaram, inclusive, que já conseguiam pensar sobre o crescimento das unhas, sem a necessidade do registro gráfico, ao fim da atividade, quando conseguiram organizar os dados na tabela e perceberam a regularidade no crescimento.

A segunda atividade “Medida da Beleza”, também desenvolvida de acordo com o caso 2, foi pensada em uma temática que extrapolasse o repertório matemático que os alunos haviam desenvolvido até aquele momento, pois conceitos de números decimais e divisão deveriam ser levados em conta. Perante a atividade e as discussões que culminaram, outros conceitos matemáticos emergiram, permitindo que trabalhássemos com outros conceitos matemáticos. Observa-se que durante a atividade da “Medida da Beleza”, os alunos apresentaram dificuldades no desenvolvimento da construção do modelo matemático, o que demandou que nós professoras orientássemos a resolução do problema procurando ensinar, de uma forma não algoritmizada o processo de divisão, pois alguns alunos relataram que aquela Matemática trabalhada (divisão com números decimais) não era conhecida por eles.

Nesse momento, o registro numérico emergiu com orientação nossa, exatamente pelo fato de que os alunos ainda não sabiam resolver essas divisões. Dando oportunidade, para que utilizássemos um material didático (barbante e régua) para que os alunos compreendessem essa divisão, permitindo assim que o registro língua natural oral emergisse de forma mais natural.

Além disso, ao realizar os cálculos matemáticos para encontrar o quociente da divisão, levamos as tabelas já prontas, orientando os alunos para aquele registro matemático, registro numérico tabular, pois nosso objetivo era que os alunos observassem a aproximação dos números decimais encontrados na divisão. Então, levamos a tabela, que é um registro numérico.

Posteriormente, a atividade da “Velocidade” orientada de acordo com o caso 3, teve responsabilidade da problematização atribuída aos alunos, então o ambiente que foi criado e a condução da atividade se deveu devido a participação ativa dos alunos com orientação das professoras. Nesse sentido, coube aos alunos investigar a problemática que eles mesmo discutiram, debateram e formularam então a questão problema. O tema da atividade foi proposto pelos alunos nas aulas anteriores e coube a nós professoras pensarmos em uma maneira de conduzir essa atividade que levasse ao mesmo objetivo de aprendizagem das atividades anteriores

Para que os alunos construíssem a problemática, nós professoras levamos o tema que fazia referência ao futebol e a velocidade dos jogadores. Nesse momento, quando o problema surge, os alunos iniciaram seu registro por meio da língua

natural oral para depois realizar apenas conversões do registro língua natural para o registro numérico, que foi calculado para encontrar a velocidade de cada estudante em um percurso de 10 metros.

No desenvolvimento da atividade da “Copa do Mundo Feminina” de acordo com o caso 1, coube aos alunos solucionarem o problema. O tema e a forma como foi conduzida a atividade levou a diversas discussões acerca da temática proposta, permitindo então que o aluno fizesse parte da construção do processo da atividade. O engajamento no momento da construção do modelo matemático foi um tanto quanto difícil para alguns alunos, fazendo com que novamente propuséssemos o convite para que pudessem se inteirar novamente e participar da atividade e assim conseguir prosseguir e interagir de forma a cooperar com o seu aprendizado e na construção do modelo matemático.

Importante ressaltar aqui, que enquanto professoras temos o trabalho de orientar nossos alunos para que surjam tratamentos e conversões no decorrer de atividades de Modelagem Matemática, e isso denota o papel da Modelagem, papel de usá-la para ensinar novos conceitos matemáticos e não só usar conceitos já conhecidos pelos alunos, como ferramentas. Pode ser que se tivéssemos utilizado a Modelagem apenas para tratar de conceitos matemáticos que já fazem parte do repertório dos alunos, talvez somente tratamentos teriam emergido. Isso considerando que se já conseguimos prever que matemática resolve o problema, normalmente não recorremos a outras representações matemáticas que nos permitam compreender a situação por outros caminhos.

De modo geral, a investigação possibilitou a criação e adaptação de quatro atividades que vislumbrassem conceitos de divisão, multiplicação e adição, conceitos esses (multiplicação e adição) que estavam presentes em todas as atividades. Além da possibilidade de abranger as discussões acerca de outros conceitos matemáticos, como por exemplo: espaço, tempo, medidas de comprimento e contagem.

De acordo com as análises das atividades, percebemos que todas as discussões: Matemáticas, reflexivas, técnicas e paralelas surgiram em todas as atividades, ou seja, percebemos que independentemente da orientação que as professoras seguiram, todas as discussões emergiram, o que diferencia uma da outra é o objetivo da atividade e do professor. Tais discussões, permitiram a

negociação das atividades e culminaram na criação de diferentes registros, pois em uma aula dita como tradicional, os alunos não seriam ativos, não teriam a possibilidade de discutir com a professora e seus colegas sobre maneiras e possibilidades distintas de se resolver um mesmo problema.

Portanto, considerando o objetivo desse trabalho que consistiu em investigar que representações emergem em atividades de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais, entendemos que os registros língua natural e numéricas apareceram de forma natural, mas registros numéricos de forma tabular e registros gráficos que subsidiaram o início do desenvolvimento do pensamento algébrico não emergiram de forma natural e o trabalho das professoras nesse momento foi fazer com que outros registros surgissem, permitindo com que o aluno conseguisse converter esses registros.

Diante disso, as atividades de Modelagem Matemática nos proporcionou estimular o aprendizado da Matemática, e irei me aventurar em dizer, até mesmo o gosto pela disciplina de Matemática, possibilitando que os sujeitos participantes demonstrassem interesse pela Matemática no decorrer das atividades. Interesse este, que foi demonstrado por falas dos estudantes, pais e professoras. Além disso, possibilitou que diferentes registros emergissem no decorrer de cada atividade proposta, possibilitou uma melhor interação entre os sujeitos participantes e o levantamento e debate de questões sociais e Matemáticas em uma mesma situação.

Ao fim dessa pesquisa, a partir das considerações e dos resultados alcançados dessa investigação, outras questões se colocam. Dentre essas questões no questionamos: como ocorre o processo de aprendizagem sobre conceitos de multiplicação nos Anos Iniciais em atividades de acordo com a Modelagem Matemática? De acordo com os resultados obtidos nessa investigação, vislumbramos na teoria dos registros de representação semiótica um caminho para que respostas para a questão colocada possam ser construídas.

## 8 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In J. C. Barbosa, A. D. Caldeira, e J.L. Araújo (Eds.), **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais** (p.161-174). Recife, Brasil: SBEM, 2007.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CDROM

BARRETO, M. C.; OLIVEIRA, B. P. Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica para o ensino de matemática. In.: Didática e a prática de ensino na relação com a escola. Maria Socorro Lucena Lima... [et al.] (Org)– Fortaleza: CE: EdUECE, 2015. (recurso digital) (Coleção Práticas Educativas). Disponível em <<http://www.uece.br/endipe2014/ebooks/livro1/174-%20CONTRIBUI%C3%87%C3%95ES%20DA%20TEORIA%20DOS%20REGISTROS%20DE%20REPRESENTA%C3%87%C3%83O%20SEMI%C3%93TICA%20PARA%20O%20ENSINO%20DE%20MATEM%C3%81TICA.pdf>> Acesso em 20 mai 2019.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRAZ, Bárbara C. **Contribuições da Modelagem Matemática na constituição de Comunidades de Prática Locais**: Um estudo com alunos do Curso de Formação de Docentes. 2014, 185f. Dissertação (Mestrado em Educação para o Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

BRAZ, B. C.; KATO, L. A. **O processo de constituição de comunidades de Prática Locais no ambiente da Modelagem Matemática**. In: X EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2014, Campo Mourão. Anais... Campo Mourão: X EPREM, 2014. CD-ROM.

BUTCKE, D. A. P; TORTOLA, E; Por que a Maioria das Embalagens tem Formato De Paralelepípedo? Uma Investigação por meio da Modelagem Matemática nos Anos Iniciais. In. **CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA**

**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 9.,2015, São Carlos. Anais... São Paulo: UFSCar, 2015. p. 1-14.

CAMPOS, I.; ARAÚJO, J. L. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: problematizando a dialética pesquisador|professor. **Acta Scientiae**, Canoas, v.17, n..2, p. 324-339 maio/ago. 2015.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 1990.

CRUZ, Shirleide Pereira da Silva; BATISTA NETO, José. A polivalência no contexto da docência nos Anos Iniciais da escolarização básica: refletindo sobre experiências de pesquisas. **Rev. Bras. Educ.** [online]. 2012, vol.17, n.50, pp.385-398.

DIAS, M. R.; ALMEIDA, L. W. Modelagem Matemática em cursos de formação de professores. In J. C. Barbosa, A. D. Caldeira, e J.L. Araújo (Eds.), **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais** (p.161-174). Recife, Brasil: SBEM, 2007.

DIAS, J. L. CHAVES, M. I. A. **Diálogos com/na Modelagem Matemática nas Séries Iniciais**. In. CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2009, Londrina. Anais... Pará: UFPA, 2009. p. 1- 17.

DIONIZIO, F. A.; BANDT, C. F. O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da Matemática. **Proceedings of the IX Seminário de pesquisa em Educação Matemática da região sul**, p. 2-15, 2012.

FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática** [online] de 2006, 19 (PY): [Acessado em: 09 de março de 2019] Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221866005>

GEROLÔMO, A.M.L; MILANI, C.S, ALMEIDA, L.M.W; Indícios de Aprendizagem Significativa em Atividade de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. In. **CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 9.,2015, São Carlos. Anais... São Paulo: UFSCar, 2015. p. 1-15.

LINS, R. C.. Matemática, monstros, significados e educação Matemática. In: M. A. V. Bicudo, M. C. Borba. (Org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez Editora, 2004.

LUNA, S. O Falso conflito entre tendências metodológicas. **Cadernos de Pesquisa**, n.66, p.70-4, ago. 1998.

MEYER, João Frederico da Costa A.; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 142 p.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglioni. **A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. S. C.; SALCEDOS, R. R. C. A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de sistemas de equações VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA – ULBRA, Canoas, 2017 algébricas lineares. In: **VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA.** 2013, Canoas. Anais... UBRA, 2013. P. 5.

PINHEIRO, G. de. S.; S`ANTANA, M. de. F. **Análise Combinatória: Um estudo de investigação nos anos iniciais.** CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá – PR. Anais...Paraná: UEM, 2017. p.1-12.

ROSA, C. C. da; ALMEIDA, L. M. W. de. **O fenômeno de congruência em registros de representação semiótica: análise de uma atividade de modelagem matemática.** Londrina: VI CNMEM - Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, 2009, 18p.

RUIZ, A. R. BELLINI, Luzia Marta. **Matemática: Epistemologia Genética e Escola.** Londrina: UEL. 2001.

SANTOS, Josiel Almeida ; FRANÇA , Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia S. B. dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática.** 2007. Trabalho de conclusão de curso (Licenciado em Matemática) - Centro Universitário Adventista de São Paulo.

SILVA, K.A.P. **Modelagem matemática e semiótica: algumas relações.** 2008. 212 f. 2008. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SILVA, Vantielen da Silva; KLUBER, Thiago Emanuel. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do ensino fundamental: Uma investigação Imperativa. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCAR, v. 6, no. 2, p. 228-249, nov. 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br>.

SOUZA, E. S. R. de; ESPÍRITO SANTO, A. O. do. **O objeto modelo matemático e suas diversas representações semióticas: uma concepção de Modelagem Matemática.** Londrina: VI CNMEM - Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, 2009, 16p.

SOUZA, L.B; SANTIAGO, A. R. C. M; LUNA, A. V. A; **Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: Uma Análise Sobre o Comportamento dos Motoristas no Trânsito numa Perspectiva Transdisciplinar.** In. CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7.,2011, Belém. Anais... Pará: UFPA, 2011.p.1-13.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, Emerson. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

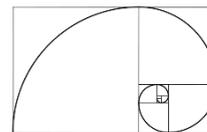
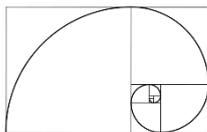
TRAVASSOS, Willian Barbosa. **UM ESTUDO SOBRE O CONCEITO DE INEQUAÇÃO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA**: contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática.) - Universidade Estadual de Maringá, [S. l.], 2018.

VERTUAN, Rodolfo E.; ALMEIDA, Lourdes M. W. **O uso de diferentes registros em atividades de Modelagem Matemática**. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática — CNMEM, 5, Universidade Federal de Ouro Preto/Universidade Federal de Minas Gerais, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto, 2007.

VERTUAN, R. E.; ALMEIDA, L. M. W. de. **Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica**: um exemplo abordando o trabalho infantil no Brasil. Bahia: IV CNMEM - Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, 2005, 12p



## APÊNDICE 2 – ATIVIDADE DA BELEZA



SERÁ QUE É POSSÍVEL MEDIR A BELEZA DE UMA PESSOA?

Medidas	Nome do estudante 1:	Nome do estudante 2:	Nome do estudante 3:	Nome do estudante 4:
1) DA ALTURA DO SEU CORPO				
2) DO UMBIGO ATÉ O CHÃO				
<b>QUOCIENTE</b>				
1) DO QUEIXO ATÉ A RAIZ DOS CABELOS				
2) DO QUEIXO ATÉ AS SOBRANCELHAS				
<b>QUOCIENTE</b>				

O que é possível concluir a partir dos dados que você coletou?

### APÊNDICE 3 – ATIVIDADE DA VELOCIDADE



Nome:

Qual seria sua velocidade se percorresse 10 metros correndo? E em 5 metros?

Qual seria sua velocidade se percorresse 10 metros andando? E em 5 metros?



O que podemos concluir a partir dos dados coletados?

Velocidade	Tempo	Distância

## APÊNDICE 4 – ATIVIDADE DA COPA DO MUNDO FEMININA

### GRUPOS - COPA DO MUNDO FEMININA/2019:

GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C
FRANÇA	ESPAÑA	BRASIL
NORUEGA	ALEMANHA	ITÁLIA
NIGÉRIA	CHINA	AUSTRÁLIA
COREIA DO SUL	ÁFRICA DO SUL	JAMAICA

GRUPO D	GRUPO E	GRUPO F
INGLATERRA	HOLANDA	SUÉCIA
ARGENTINA	CANADÁ	ESTADOS UNIDOS
JAPÃO	NOVA ZELÂNDIA	CHILE
ESCÓCIA	CAMARÕES	TAILÂNDIA

Quantos jogos tem ao todo nas fases de grupo? Quantos jogos tem ao todo na Copa Do Mundo Feminina?

