

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO OLIVEIRA DA CUNHA

APLICAÇÃO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO: UMA INTRODUÇÃO A FINANÇAS

JANDAIA DO SUL

2022

EDUARDO OLIVEIRA DA CUNHA

APLICAÇÃO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO: UMA INTRODUÇÃO A FINANÇAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura em Ciências Exatas , Setor
do Campus Jandaia do Sul, da Universidade
Federal do Paraná, como requisito parcial à
obtenção do título de licenciado em Ciências
Exatas .

Orientador: Prof. Dr. Jair da Silva

JANDAIA DO SUL

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA JANDAIA DO SUL

Cunha, Eduardo Oliveira da

Aplicação de modelos de otimização de carteiras de investimento:
uma aproximação para a educação financeira. / Eduardo Oliveira da
Cunha. – Jandaia do Sul, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Paraná,
Campus Jandaia do Sul, Licenciatura em Ciências Exatas - Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Jair da Silva.

1. Modelo de otimização de investimentos. 2. Educação financeira.
3. Modelo média variância. 4. Modelo de precificação de ativos. 5.
Fronteira eficiente. I. Silva, Jair da. II. Universidade Federal do
Paraná. III. Título.

CDD 370.1

Bibliotecário: César A. Galvão F. Conde - CRB-9/1747



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PARECER Nº 2/2022/UFPR/R/JA
PROCESSO Nº 23075.057773/2022-11
INTERESSADO: JAIR DA SILVA

Título: APLICAÇÃO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO: UMA INTRODUÇÃO A FINANÇAS

Autor: EDUARDO OLIVEIRA DA CUNHA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau no curso de Licenciatura em Ciência Exatas, aprovado pela seguinte banca examinadora.

Jair da Silva (orientador)

Simão Nicolau Stelmastchuk (membro)

Valter Soares de Camargo (membro)

Jandaia do Sul, 15 de setembro de 2022.



Documento assinado eletronicamente por **SIMAO NICOLAU STELMASTCHUK, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 15/09/2022, às 15:31, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **JAIR DA SILVA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 15/09/2022, às 15:31, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Valter Soares de Camargo, Usuário Externo**, em 14/10/2022, às 10:38, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **4895788** e o código CRC **EBD9E363**.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmão, que sempre me apoiaram e ajudaram quando foi necessário e que contribuíram para a realização deste trabalho, sendo a eles também que nos momentos difíceis dessa caminhada compreenderam a minha ausência. Agradecer também pela saúde, pois boa parte desse estudo foi realizado durante a pandemia (Covid-19) tendo em vista que muitas pessoas não usufruíram de boas condições para realizar tal feito por diversos motivos. Aos amigos e colegas que mesmo de longe auxiliaram de alguma forma ou simplesmente compreenderam o motivo do afastamento. Aos colegas do curso com quem convivi intensamente esses últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências, que me fizeram evoluir como pessoa. Ao professor Jair da Silva, por ter me orientado durante o trabalho e ter desempenhado sua função com dedicação. Aos professores do curso pela paciência e ajuda que guiaram o meu aprendizado.

Matemática Financeira, é assim...

*Mas que conta maluca,
Fiz, refiz e quase fundo a cuca!
Se é prá menos ou prá mais,
Não interessa, tanto faz!
Entrei no vermelho, novamente,
Por um cheque especial, quente,
Onde usei o limite, descompensado,
E me ferrei, igual um danado!
O cartão fora bloqueado
E o meu ímpeto, todo quebrado,
Resultado da minha incapacidade,
De reverter, essa "irresponsabilidade!"
Todo mundo tem cartão,
E também um problemão:
Como gastar sem se enrolar?
(Léa Marinho).*

RESUMO

Além de diligenciar dois modelos que otimizam a alocação de portfólios de investimentos, o modelo de Markowitz e o de Sharpe, esta monografia também tem a pretensão de auxiliar na divulgação de conhecimentos sobre finanças fundamentados e sem viés comercial, sobre os produtos financeiros mais comuns, que uma grande massa da população tem acesso através dos bancos e corretoras. No decorrer do trabalho foi apresentado de maneira clara vários conceitos sobre finanças como, tipos de investimentos, Sistema Financeiro Nacional e as instituições que fazem parte, a teoria moderna de portfólio, os modelos de otimização de portfólio e indicadores financeiros mais comuns. Foram realizadas duas aplicações dos modelos de otimização de portfólio, na primeira foi utilizado 2 ativos e na segunda 7 ativos, em ambas aplicações foi notado que os modelos auxiliam os investidores a tomar melhores decisões, ou pelo menos, a tomar decisões olhando para o risco-retorno do seu investimentos. Para finalizar foi proposta duas atividades para a educação básica sobre conceitos de finanças, uma sobre variações percentuais e a outra, uma aplicação do modelo média variância, neste caso, mostrando o uso das matrizes de covariância. Ambas as atividades estão ancoradas nos seguintes documentos, para conteúdos curriculares usou-se a Base Nacional Comum Curricular e o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná, e a perspectiva de educação financeira, a escolhida foi a adotada pelo Brasil.

Palavras-chave: modelo de otimização de investimentos; educação financeira; modelo média variância; modelo de precificação de ativos; fronteira eficiente.

ABSTRACT

In addition to working on two models that optimize the allocation of investment portfolios, Markowitz's and Sharpe's models, this monograph also intends to help in the dissemination of knowledge on finance without commercial bias, on the most common financial products, that a large mass of the population has access through banks and brokers. In the course of the work, several concepts about finance were clearly presented, such as types of investments, the National Financial System and the institutions that are part of it, modern portfolio theory, portfolio optimization models and the most common financial indicators. Two applications of the portfolio optimization models were carried out, in the first 2 assets were used and in the second 7 assets, in both applications it was noticed that the models help investors to make better decisions, or at least to make decisions looking at risk -return on your investments. Finally, two activities were proposed for basic education on finance concepts, one on percentage variations and the other, an application of the mean variance model, in this case, showing the use of covariance matrices. Both activities are anchored in the following documents, for curricular content, the National Common Curricular Base and the Curricular Reference for High School in Paraná were used, and the perspective of financial education, the one adopted by Brazil.

Keywords: investment optimization model; financial education; mean variance model; asset pricing model; efficient frontier.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 - EFEITOS DA TAXA SELIC	33
FIGURA 02 - A TAXA SELIC	34
FIGURA 03 - SÍNTESE DA ESTRUTURA DO SISTEMA FINANCEIRO NACIONAL	37
FIGURA 04 - REMUNERAÇÃO DO INTERMEDIADOR	39
FIGURA 05 - REMUNERAÇÃO DO INTERMEDIADOR	40
FIGURA 06 - CORRELAÇÃO POSITIVA	49
FIGURA 07 - CORRELAÇÃO NEGATIVA	49
FIGURA 08 - CORRELAÇÃO NULA	50
FIGURA 09 - RELAÇÃO ENTRE RISCO SISTÊMICO E NÃO SISTÊMICO	51
FIGURA 10 - FRONTEIRA EFICIENTE E A LINHA DE MERCADO DE CAPITAIS	55
FIGURA 11 - FRONTEIRA EFICIENTE	62
FIGURA 12 - FRONTEIRA EFICIENTE SEM ATIVOS LIVRE DE RISCO	64
FIGURA 13 - FRONTEIRA EFICIENTE SEM ATIVOS DE RISCO	65
FIGURA 14 - RELAÇÃO ENTRE O RETORNO ESPERADO E O BETA	67
FIGURA 15 - VISÃO GERAL DA PÁGINA DA WEB DO GOOGLE COLAB	70
FIGURA 16 - VISÃO GERAL DO GOOGLE COLAB	71
FIGURA 17 - FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ	76
FIGURA 18 - HISTOGRAMA DOS 7 ATIVOS	90
FIGURA 19 - COVARIÂNCIA ENTRE ATIVOS	94
FIGURA 20 - CORRELAÇÃO ENTRE ATIVOS	95
FIGURA 21 - FRONTEIRA EFICIENTE PARA UM CENÁRIO DE 7 ATIVOS	96
FIGURA 22 - COMPARATIVO DOS RETORNOS ENTRE BOVA11 E SABESP	99
FIGURA 23 - TAREFA 1 - COMO GESTORES DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CALCULAM A VARIAÇÃO PERCENTUAL DE ATIVOS	114

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 01 - COMPARATIVO DAS MARGENS LÍQUIDAS DOS ÚLTIMOS 10 ANOS	79
GRÁFICO 02 - A MÉDIA DE DIVIDENDOS QUE CADA EMPRESA PAGOU NOS ÚLTIMOS 10 ANOS	79
GRÁFICO 03 - DIVIDENDOS PAGO TODO ANO	80
GRÁFICO 04- MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA	81
GRÁFICO 05 - DIVIDENDOS NA ÚLTIMA DÉCADA	82
GRÁFICO 06 - MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA	83
GRÁFICO 07 - MÉDIA DE DIVIDENDO PAGOS NA ÚLTIMA DÉCADA	83
GRÁFICO 08 - MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA	84
GRÁFICO 09 - PAGAMENTO DE DIVIDENDO SETOR DE SEGUROS	85
GRÁFICO 10 - MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA	86
GRÁFICO 11 - DIVIDENDOS NA ÚLTIMA DÉCADA	87
GRÁFICO 12 - COMPARATIVO DO PREÇO HISTÓRICO DAS AÇÕES	91
GRÁFICO 13 - COMPARATIVO DA CARTEIRA E O BOVA	93
GRÁFICO 14 - COMPARATIVO ENTRE AS MODALIDADES DE INVESTIMENTO: CARTEIRA OTIMIZADA, INVESTIMENTO NA TAXA SELIC E CARTEIRA	100

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - EVOLUÇÃO DA TEORIA DO PORTFÓLIO	40
--	----

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - RETORNO DO ATIVO E DO PORTFÓLIO	73
TABELA 2 - DADOS ESTATÍSTICOS DOS DOIS ATIVOS E DO PORTFÓLIO	74
TABELA 3 - RETORNO DO ATIVO E DO PORTFÓLIO	74
TABELA 4 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA	78
TABELA 5 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA	80
TABELA 6 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA	82
TABELA 7 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA	84
TABELA 8 - ATIVOS SELECIONADOS DO SETOR TELECOMUNICAÇÕES	86
TABELA 9 - DADOS HISTÓRICOS DOS ATIVOS	89
TABELA 10 - DADOS ESTATÍSTICOS DOS ATIVOS	90
TABELA 11 - RETORNO MÉDIO ANUAL DE CADA ATIVO	93
TABELA 12 - RETORNO MÉDIO ANUAL DE CADA ATIVO	94
TABELA 13 - PORCENTAGENS DAS TAXAS DE PARTICIPAÇÃO	95
TABELA 14 - RETORNO DOS ATIVOS	101
TABELA 15 - DADOS DA OBSERVAÇÃO DAS AÇÕES BBAS3 E VALE 3	118

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

IES	- INSTITUTO DE ENSINO SUPERIOR
SELIC	- SISTEMA ESPECIAL DE LIQUIDAÇÃO E CUSTÓDIA
IPCA	- ÍNDICE NACIONAL DE PREÇOS AO CONSUMIDOR AMPLO
CDB	- CERTIFICADO DE DEPÓSITO BANCÁRIO
FGC	- FUNDO GARANTIDOR DE CRÉDITO
STN	- SECRETARIA DO TESOURO NACIONAL
B3	- BOLSA DE VALORES OFICIAL DO BRASIL
LTN	- LETRAS DO TESOURO NACIONAL
LFT	- LETRAS FINANCEIRAS DO TESOURO
NTN	- NOTAS DO TESOURO NACIONAL
ML	- MARGEM LÍQUIDA
TEV	- TOTAL ENTERPRISE VALUE
EBITDA	- EARNINGS BEFORE INTEREST AND TAXES AND AMORTIZATION
ROI	- RETURN ON INVESTMENT
CDI	- CERTIFICADO DE DEPÓSITO INTERBANCÁRIO
PIB	- PRODUTO INTERNO BRUTO
CMN	- CONSELHO MONETÁRIO NACIONAL
CNSP	- CONSELHO NACIONAL DE SEGUROS PRIVADOS
CNPC	- CONSELHO NACIONAL DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR
BCB	- BANCO CENTRAL DO BRASIL
SFN	- SISTEMA FINANCEIRO NACIONAL
SUSEP	- SUPERINTENDÊNCIA DE SEGUROS PRIVADOS
PREVIC	- SUPERINTENDÊNCIA NACIONAL DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR
CAPM	- CAPITAL ASSET PRICING MODEL
OCDE	- ORGANIZAÇÃO PARA A COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO
ENEF	- ESTRATÉGIA NACIONAL DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA
FBEF	- FÓRUM BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA
BNCC	- BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

DCNEM - DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO
MÉDIO

LISTA DE SÍMBOLOS

Σ - somatório de números

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 OBJETIVOS	18
1.1.1 Objetivo geral	19
1.1.2 Objetivos específicos	19
1.2 JUSTIFICATIVA	19
2 REFERENCIAL TEÓRICO	21
2.1 CONCEITOS DE FINANÇAS	21
2.1.1 Tipos de Investimentos	22
2.1.1.1 Tipos de investimento em renda fixa	23
2.1.1.1.1 Certificado de depósito bancário	23
2.1.1.1.2 Caderneta de Poupança	24
2.1.1.1.3 Títulos Públicos	25
2.1.1.2 Tipo de investimento em renda variável	25
2.1.1.2.1 Ações	26
2.1.1.2.2 Fundos de Investimentos em renda variável	26
2.1.1.2.3 Derivativos	27
2.1.2 Indicadores	28
2.1.2.1 Indicadores de renda variável	29
2.1.3 Estrutura do Sistema Financeiro Nacional	35
2.1.3.1 Remuneração dos Intermediadores Financeiros	38
2.2 TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO	40
2.2.1.1 O Retorno no Modelo de Otimização Média Variância	45
2.2.1.2 Variância e Covariância	46
2.2.1.3 Coeficiente de Correlação	49
2.2.1.4 Risco Diversificável e Não Diversificável	52
2.2.1.5 Fronteira Eficiente e a linha de mercado de capitais	53
2.2.1.6 Índice Sharpe	57
2.2.1.7 Modelo média variância	59
2.2.1.8 Modelo de precificação de ativos financeiros(CAPM)	62
3 MATERIAIS	69
3.1 MATERIAIS	69
4 APLICAÇÃO DOS MODELOS	72
4.1 APLICAÇÃO EM UM CENÁRIO COM 2 ATIVOS	72
4.2 APLICAÇÃO EM UM CENÁRIO COM 7 ATIVOS	77
4.3 APLICAÇÃO - MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS O CAPM	98
4.3.1 Considerações finais sobre as aplicações dos modelos	101

4.4 POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO DOS MODELOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA	102
4.4.1 Considerações iniciais sobre educação financeira	103
4.4.2 Perspectiva de educação financeira adotada pelo Brasil	103
4.4.2 CONTEÚDOS CURRICULARES PRESENTES NA EDUCAÇÃO BÁSICA E OS RESPECTIVOS DOCUMENTOS QUE OS ALICERÇAM	106
4.4.2.1 Ensino de números e de probabilidade e estatística na educação básica	107
4.4.2.2 Ensino de matrizes na educação básica	109
4.4.3 PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA	113
4.4.3.1 Tarefa variações percentuais na educação básica.	113
4.4.3.2 Aplicação da matriz de covariância na educação básica	116
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	122
5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	123

1 INTRODUÇÃO

Todo país tem um sistema financeiro, que desenvolveu-se muito ao longo das últimas décadas, o Brasil não é diferente. Devido a este desenvolvimento, o qual é o resultado de se atender às demandas que surgem das necessidades da sociedade, o que leva a se pensar no futuro dos cidadãos e, assim, planejar o que é necessário e será necessário de produtos financeiros no decorrer das vidas dos cidadãos para compor uma poupança sustentável, além da previdência pública e da previdência privada. Estas mudanças trazem em seu cerne grandes alterações sociais, que tornam a vida em sociedade mais confortável para alguns do que para outros, muitas vezes por conta da assimetria que há no acesso a informações que são cruciais no percurso da vida. Muitas dessas informações podem ser sintetizadas nos conceitos de finanças que estão inseridas no sistema financeiro, pois, nos dias atuais os cidadãos têm que lidar com as instituições financeiras, ou seja, através delas é por onde recebem seus salários, executam o pagamento de despesas, dessa maneira, é necessário aprenderem a fazer a gestão de suas receitas. Todo este processo de gestão das receitas está relacionado às finanças pessoais, e este por sua vez se divide em dois ramos, a finanças técnica que trata de aspectos voltados aos números, métodos, e, conseqüentemente, de modelos que auxiliarão na tomada de decisão, e, o outro ramo é a finanças comportamentais que procura entender como os sentimentos se relacionam com a tomada de decisões.

As finanças técnicas tratando-se de investimento, o que recai em tópicos essenciais nas finanças que são os tipos de investimentos, nisso, atualmente encontra-se um catálogo de variedades de aplicações financeiras, cada qual habitando seu mercado próprio, podendo ser no mercado de capitais o qual se divide em valores mobiliários de renda fixa: poupança, certificado de crédito bancário, títulos públicos; e os valores mobiliários de renda variável: ações, fundos de investimentos, mercado futuro e entre outros. Vários desses produtos são encontrados em diversas instituições que fazem parte do sistema financeiro, podendo ser bancos comerciais, corretoras de investimentos que atuam no atendimento aos clientes, que tendo esta estrutura recebe o nome de operadores.

Acima dos operadores estão as instituições supervisoras como o Banco Central e a Comissão de Valores Mobiliários e acima estão os órgãos normativos que neste caso é representado pelo Conselho Monetário Nacional que atua no setor de moeda, crédito, valores e câmbio. Dentro do sistema encontram-se outros setores como o de seguros privados e previdência fechada os quais possuem seus respectivos órgãos normativos, supervisores e seus respectivos operadores.

Devido a complexidade do sistema financeiro e os produtos existentes, há uma dificuldade das pessoas em decidir quais são os tipos de investimentos que serão escolhidos, ou seja, quais são as aplicações financeiras que serão escolhidas para compor um portfólio, que também, pode ser chamada de carteira de investimento. Isto levou a criação de metodologias de análise, se preocupando em fazer análise dos demonstrativos financeiros, que é mais voltado à área contábil, assim, fazendo uso de indicadores para avaliar o crescimento de empresas, isto se tratando de renda variável, pois, é o lugar em que pode-se encontrar empresas, e esta forma de análise ficou conhecida como análise fundamentalista. Neste sentido, uma metodologia bastante utilizada é a metodologia de Barsi que faz uso de conceitos da análise fundamentalista para escolher investimentos que possuem potencial de crescimento e que são tido por ele de perenes, pois mantêm margens de lucros ao longo do tempo sólidas.

No entanto, sempre existiu alguns questionamentos que continuamente eram feitos: como devem ser avaliados os ativos reais e os ativos financeiros?; as formas de financiamento da empresa alteram ou não seu valor?; o que significa a palavra risco, e como pode ser incorporado no processo de tomada de decisões?; e assim, surgiram teorias que buscavam elaborar determinados princípios para a escolha de produtos e responder aos questionamentos, com o objetivo de auxiliar investidores. Assim, em 1952, Harry Max Markowitz apresentou um trabalho pioneiro na área de finanças com os modelos de otimização de portfólio, denominado de modelo média-variância. Esta teoria propõe que ao tomar decisões sobre a seleção de investimentos. Estas devem ser ancoradas com base na relação risco-retorno. O modelo proposto permite que seja calculado o risco de uma carteira de investimento, além disso, por meio do modelo proposto é possível elaborar uma carteira de

investimento em que o risco desta carteira seja menor que o ativo de menor risco dentro dela.

Foi o modelo que engendrou toda uma área muito bem consolidada atualmente. Posterior a teoria de Markowitz, surge Sharpe que apresenta o Modelo de Precificação de Ativos e o aparecimento de mais uma maneira de mensurar o risco, através do conceito beta. Não somente isso, Sharpe também foi pioneiro em relacionar e considerar a existência de uma taxa livre de risco no mercado para o cálculo do retorno, pois dessa forma, poderia avaliar o que foi chamado de prêmio de risco.

Sharpe de determinadas premissas, a saber, se há à existência de uma taxa livre de risco e há ativos que remuneram nela, e também, considerando a premissa de risco-retorno e que o investidor é racional. Desta forma o mínimo que qualquer ativo deve pagar pelo risco que seria a taxa livre de risco acrescido do prêmio de risco. Além de Sharpe, John Lintner também trabalhou na criação do modelo que atualmente gestores de recursos fazem uso, por conseguirem estratificar perfis de risco de portfólio e selecionar ativos.

Desta maneira a presente monografia visa investigar conceitos de finanças e os respectivos modelos que são fundamentais e que alicerçam toda a área de finanças. Além disso, será proposto a aplicação dos respectivos modelos e o auxílio da metodologia de Barsi com a finalidade de nortear a escolha de ações(empresas).

Esta monografia procura responder às seguintes perguntas:

- a) Quais são os conceitos de finanças?
- b) Como é o sistema financeiro atual e quais são as instituições financeiras e como elas obtêm lucro?
- c) Quais são as aplicações financeiras disponíveis (tipos de produtos financeiros)?
- d) Como é o funcionamento dos modelos de otimização e de que forma eles contribuem para a tomada de decisão, os investidores?

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Investigar os seguintes conceitos: conceito de finanças, Teoria Moderna de Portfólio, os tipos de investimento mais comuns, o funcionamento do Sistema Financeiro Nacional e as instituições que fazem parte, modelos de otimização de portfólio e indicadores financeiros mais comuns.

1.1.2 Objetivos específicos

- a) Elaborar aplicações com os modelos de otimização (modelos de otimização de portfólio) e, assim, demonstrar o funcionamento destes modelos e que contribuem para a melhora na tomada decisão;
- b) Elaborar uma tarefa e uma aplicação para a Educação Básica.

1.2 JUSTIFICATIVA

Pesquisando em literatura especializada, observou-se que nos últimos anos houve uma entrada massiva de pessoas no mercado financeiro, podendo ser citado uma pesquisa da bolsa de valores (B3). Entre os trimestre de 2021 versus o 1 trimestre de 2022, houve um aumento de 41% em número de CPF listados na Bolsa de valores, contabilizando cerca de 5,03 Milhões. Em outro documento da mesma instituição, de 2020, trás o seguinte dado: o valor do primeiro investimento das pessoas físicas caiu 58%, saindo de R \$1.916,00, em outubro de 2018, para R \$660,00, em outubro de 2020. Além disso, o Raio X do investidor corrobora com esta afirmação, pois:

Dentre os brasileiros que economizaram em 2020, 53% colocaram o dinheiro em produtos financeiros, ou 11 pontos percentuais a mais do que o levantamento anterior. Pela primeira vez, essa opções ultrapassou a soma de todos os outros destinos dados às economias, alcançando uma população estimada em 20 milhões de brasileiros.ANBIMA(2020, p.14).

A Estratégia Nacional de Educação Financeira, já apontava para esta crescente quantidade de pessoas que tornavam-se investidores individuais na BM & FBovespa. Segundo Brasil/ENEF ([2011],p 54) ao final de 2008, a Bolsa de Valores,

Mercadorias e Futuros(BM & FBovespa) registrava mais de 530 mil contas de investidores pessoas físicas, um avanço de cerca de 17% em relação ao ano anterior. A ENEF traz uma síntese para a implementação da Educação Financeira, ou seja, norteados alguns tópicos de educação financeira a serem trabalhados, e um dos pontos a serem trabalhado dentro do planejamento financeiros a fim de melhorar a educação financeira dos cidadãos brasileiros, é sobre os investimentos, e nesta seção, assim como em outras, é pontuado quais são os desafios para a educação financeira. E na estratégia é colocada que:

[...] os mercado financeiros e de capitais vêm desenvolvendo novos produtos, muitos deles complexos e de mais risco, exigindo que o público investidor esteja adequadamente informado a respeito de suas características e capacitado para compreender os risco e as oportunidades de investimento, formulando decisões adequadas ao seu perfil e aos objetivos de vida.(BRASIL/ENEF, 2011], p.57).

Desta forma o presente estudo tem a pretensão de auxiliar na divulgação de conhecimentos sobre finanças e investimento, sendo fundamentados e sem viés comercial, sobre os produtos financeiros mais comuns, que uma grande massa da população tem acesso por meio dos bancos e corretoras.

Nos próximos capítulos a monografia está estruturada da seguinte maneira, capítulo 2, trataremos do referencial teórico, nele objetiva-se o comprimento do objetivo geral que foi o de investigar sobre conceito de finanças, teoria moderna do portfólio e entre outros conceitos importantes. No capítulo 3 descrever-se-á os materiais utilizados nesta monografia, no capítulo 4 as aplicações dos modelos, primeiro uma aplicação envolvendo dois ativos para mostrar a fronteira eficiente e posteriormente uma aplicação com sete ativos, com uma metodologia de escolha de ativos e por fim a utilização do modelo de precificação de ativos para classificar a carteira e os ativos com o ativo que é considerado como portfólio de mercado.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O objetivo principal deste capítulo, conforme o objetivo geral, é de investigar os seguintes conceitos: conceitos de finanças, a Teoria Moderna de Portfólio, os tipos de investimento mais comuns, o funcionamento do Sistema Financeiro Nacional e as instituições que fazem parte, modelos de otimização de portfólio e indicadores financeiros mais comuns. Além disso, neste capítulo procurou-se as respostas aos seguintes questionamentos: Quais são os conceitos de finanças? Quais são as instituições financeiras e como elas obtêm lucro? Quais são as aplicações financeiras disponíveis (tipos de produtos financeiros)? Também encontram-se conceitos necessários para a compreensão dos modelos, os quais serão utilizados no capítulo 4 que tem como título: aplicação dos modelos.

2.1 CONCEITOS DE FINANÇAS

Atualmente estamos imersos por conceitos de finanças dos mais diferentes tipos: dinheiro, cartão de crédito, taxa de juros, impostos, gastos empenhados para a subsistência, câmbio e assim por diante. As instituições financeiras possuem e oferecem um cardápio de ativos para investir, oferecem crédito e pode-se receber o salário por estas instituições.

O termo finanças trata-se disso, como que indivíduos, governos e empresas empenham o dinheiro, e nisso entram os instrumentos financeiros que podem ser usados para auxiliar na relação entre indivíduos, empresas e governos, o que depende de quais mercados estão inseridos. Assim, compreendemos que todos os indivíduos terão que tomar decisões financeiras. Logo, é necessário entender de assuntos financeiros e tomar as melhores decisões, as que forem mais corretas. De acordo com Bitencourt (2004, apud Calovi, R. W., 2017, p.15), conhecer fundamentos financeiros determinará quais decisões os cidadãos irão adotar no dia a dia financeiro e o conhecimento ou desconhecimento da ciência financeira irá gerar hábitos completamente diferentes no que diz respeito a essas decisões.

A área que ocupa-se de entender como as pessoas organizam-se é a finanças pessoais. As finanças pessoais podem ser divididas em duas categorias: as finanças comportamentais e as finanças técnicas, a primeira procura entender como fatores emocionais e comportamentais interferem na forma como o indivíduo decide, ou seja, em que locais empenham o dinheiro; já as finanças técnicas segundo FREITAS (2021, p.08) “é dedicada a estudar sobre dívidas, financiamento e investimentos, aproximando-se mais a números e conceitos do que à psicologia por trás das decisões”.

É nas finanças técnicas que estão centrados os estudos que possibilitam avaliar, criar estratégias de investimento para otimizar seus lucros, e também é nessa parte das finanças que é necessário ter um nível de aprofundamento de conhecimento sobre como investir, se ter um planejamento e seguir este até atingir o objetivo que busca-se conseguir.

Bodie, Kane e Marcus (2010,p.1 apud Radaelli, F. 2018, p.21), definem que “ com a tentativa de obter benefícios futuros, investimento é o compromisso presente de dinheiro ou outros recursos”. Disso, investir também pode ser colocado como aplicação de dinheiro poupado em algum tipo de ativo financeiro que trará rentabilidade futuras e assim conseguirá atingir seu objetivo. Na seção seguinte dissertaremos sobre os tipos de investimentos mais comuns e de fácil acesso a pessoas físicas.

2.1.1 Tipos de Investimentos

O sistema financeiro brasileiro oferece uma gama de produtos financeiros, os quais podem ser selecionados para investir, cada um tem suas particularidades: valores, prazos, frequência e entre outros.

De acordo com Mishkin(2000, apud COSTA, J. DA C.; MARTINS, L. A. DA S.; GONÇALVES, R. B.; MASCARENHAS, M. P.; MARÇAL, S. A, 2018, p.247) “os investimentos financeiros podem ser divididos em dois grupos, a saber: os investimentos no mercado de renda fixa e os realizados no mercado de renda variável”.

O mercado de renda fixa é caracterizado por ter rentabilidade pré-definida se for em títulos pré-fixados, pois o investidor tem a possibilidade a priori de saber a remuneração que obterá nesse investimento em um período definido. Entretanto, há uma questão a ser pontuada, caso contrate-se uma taxa de juros fixa e a inflação acumulada no período em que for fazer o resgate for superior a rentabilidade, o ganho real será negativo, ou seja, a rentabilidade contratada no início não acompanhou a inflação. Já os títulos pós-fixados estão ancorados em um benchmark, que significa que é uma base de compração. Nesse tipo de título o investidor saberá a remuneração pela contratação de tal título ao fim da aplicação, como exemplo, podemos citar a taxa Selic ou o IPCA, este último é o índice de preço ao consumidor amplo, mede a inflação da economia brasileira, caso escolhermos um título que tem como indexador o IPCA receberemos ao final de um determinado período a variação do IPCA.

O mercado de renda variável, é diferente, não há garantias prévias de que terá rendimento futuro. Neste tipo de mercado há investimento que possuem maior nível de risco e claro, diferente da renda fixa, por não ter garantias de rentabilidade pré definidas o que tem é a possibilidade de maiores ganhos posterior ou perdas totais do que foi investido.

2.1.1.1 Tipos de investimento em renda fixa

A seguir será apresentado alguns investimentos, iniciando por aqueles presentes na renda fixa.

2.1.1.1.1 Certificado de depósito bancário

O certificado de depósito bancário é um título privado. Segundo Manique, P. H. E.; Bered, R.(2020, p.225) o principal objetivo é captar recursos que serão repassados para operações de crédito, na maioria das vezes. Pois parte da necessidade do banco em movimentar seu mercado, então devido à necessidade de dinheiro ele emite estes títulos. Estas operações são casuais no dia a dia financeiro

de grandes instituições, e, é bem explicada por Melo e Polidório como ocorre e quem está envolvido nessa operação:

Basicamente estão presentes nessa relação os investidores que tem disponibilidade de dinheiro, a sociedade que por alguma razão necessitar de dinheiro, e os bancos comerciais que é o intermediário da relação captando recurso do investidor oferecendo em contrapartida uma taxa de juros prefixada sobre o investimento, e com esse dinheiro em mãos o banco repassa como um empréstimo à sociedade cobrando-os em contrapartida juros do tomador do empréstimo. (MELO; POLIDÓRIO, 2018, não paginado).

Além disso, há o prazo deste tipo de aplicação que varia entre 30 e 180 dias ou até mais que isso, podendo ser de anos. Outro ponto a ser destacado é o resgate do rendimento, segundo Manique, P. H. E.; Bered, R.(2020, p.225) pode ser feito antes do seu vencimento, mas vale destacar que o banco emissor não tem obrigação de recomprar o CDB antes do prazo, a menos que tenha assumido algum compromisso com o cliente.

Neste tipo de investimento encontra-se o CDB pré-fixado e o pós-fixado, como mencionado anteriormente, o pré-fixado a definição da remuneração, a taxa de juros, ocorre no ato da aplicação, e na pós-fixada a remuneração só é definida após o vencimento.

Já em relação ao risco deste tipo de investimento, são baixos, segundo Manique, P. H. E.; Bered, R. (2020, p.226), “eles consistem somente no risco de crédito, caso a instituição que emitiu o título venha a quebrar e não consiga arcar com seus compromissos”. Contudo, de acordo com os autores, os riscos presentes no CDB são atenuados, motivo, há a garantia do fundo garantidor de crédito(FGC), segundo as normas do FGC ele cobre perdas até o valor de R\$ 250.000,00 por cliente.

2.1.1.1.2 Caderneta de Poupança

De acordo com Fortuna(2008, p.314 apud RAMBO, 2014, p.35) a caderneta de poupança tradicional é uma aplicação simples e tradicional, que permite aplicação de pequenas somas e liquidez. Um ponto a se pontuar é que a perda de

rentabilidade neste investimento ocorre quando são feitos saques fora da data de aniversário do investimento e também permite isenção de imposto de renda.

Para Assaf Neto(2003, p.134 apud COSTA, J. DA C.; MARTINS, L. A. DA S.; GONÇALVES, R. B.; MASCARENHAS, M. P.; MARÇAL, S. A, 2018, p.248) a caderneta de poupança é uma alternativa de aplicação bastante conservadora, oferecendo segurança, já que o governo garante os depósitos até certo limite e baixa remuneração comparado a outros tipos de ativos no mercado.

2.1.1.1.3 Títulos Públicos

São papéis emitidos pelo Tesouro Nacional, segundo PINTO(2020, p.4) nele os investidores emprestam dinheiro para o governo, que é uma maneira de refinarçar a dívida pública e financiar seu déficit orçamentário, com isso o investidor recebe em troca uma determinada rentabilidade. De acordo com Berger (2015 , p.25 apud FERREIRA 2016, p.18) complementa que é a secretaria do tesouro Nacional (STN) a autorizada a administrar e emitir os títulos da dívida pública, os quais são de responsabilidade do Tesouro Nacional.

O tesouro direto é um programa do tesouro nacional desenvolvido em parceria com a Brasil Bolsa Balcão (B3) para venda de títulos públicos federais para pessoas físicas. Além disso, temos os principais títulos da dívida pública que são : Letras do Tesouro Nacional (LTN), as Letras Financeiras do Tesouro (LFT) e as Notas do Tesouro Nacional (NTN). Estes títulos possuem objetivos,que segundo FERREIRA(2016, p.18) são: as duas primeiras são emitidas preferencialmente para o financiamento de curto e médio prazo, enquanto a terceira é emitida preferencialmente para o financiamento de médio e longo prazo.

2.1.1.2 Tipo de investimento em renda variável

Logo abaixo estão os produtos financeiros mais comuns de renda variável.

2.1.1.2.1 Ações

De acordo com PINTO (2020, p.4) ações são pequenas partes de uma empresa, ou seja, quando a empresa tem ações vendidas, o seu patrimônio é dividido em várias partes, que são compradas por investidores. Para ASSAF NETO(2003, p.222 apud COSTA, J. DA C.; MARTINS, L. A. DA S.; GONÇALVES, R. B.; MASCARENHAS, M. P.; MARÇAL, S. A, 2018, p.249) são títulos representativos da menor fração do capital social de uma empresa (sociedade anônima, sociedade por ações ou companhia).

Segundo Piazza(2010 apud COSTA, J. DA C.; MARTINS, L. A. DA S.; GONÇALVES, R. B.; MASCARENHAS, M. P.; MARÇAL, S. A, 2018, p.249) as ações são títulos negociáveis que representam uma parcela do patrimônio líquido de uma empresa de capital aberto, ou seja, uma organização do tipo Sociedade Anônima (S.A).

De acordo com RAMBO (2014, p.43) as ações podem ser classificadas como preferenciais ou ordinárias. As ordinárias conferem ao detentor da ação o direito de voto, podendo eleger a diretoria, decidir sobre o destino de lucros, etc. As preferenciais, para RAMBO (2014 , p.44) não permitem direito a voto aos titulares, porém, dão preferências ao titular ao recebimento de dividendo prioridade no reembolso de capital no caso de dissolução da empresa.

2.1.1.2.2 Fundos de Investimentos em renda variável

São uma modalidade de produto financeiro, neste a única diferença dos demais é a delegação da tomada de decisão, ao invés de ser o investidor será um gestor, assim ocorre a união de vários investidores com suas respectivas reservas de valor, então temos uma forma de investimento coletivo. Sendo uma junção de vários investidores, e neste universo de fundos é denominado de cotistas os investidores de produto financeiro. Segundo Assaf Neto(2003, p.386 apud COSTA, J. DA C.; MARTINS, L. A. DA S.; GONÇALVES, R. B.; MASCARENHAS, M. P.; MARÇAL, S. A, 2018, p.249) fundo de investimento é uma importante alternativa

para pessoas que querem participar do mercado de capitais, trazendo benefícios principalmente ao investidor com baixo volume individual de capital disponível para a aplicação.

2.1.1.2.3 Derivativos

São uma classe de ativos que nas últimas décadas se desenvolveram muito no mercado financeiro. Gestores e tesoureiros fazem uso de diferentes tipos de derivativos, como contrato a termo e opções. Segundo Hull(2016, p.01) “derivativo pode ser definido como um instrumento financeiro cujo valor depende(ou deriva) dos valores de outras variáveis subjacentes mais básicas”. Ou seja, como por exemplo a opção depende do preço de um ativo que neste caso é de uma ação, a ação é uma variável subjacente, pode ser a ação da Petrobras, assim terá opções da Petrobras.

Nas alíneas a e b discorrer-se-á sobre contrato a termo e as opções, ambos os derivativos presentes na bolsa de valores do Brasil.

- a) contrato a termo: é um derivativo relativamente simples. A diferença dele para um contrato de compra a vista, é que o contrato a termo está relacionado a compra ou venda de um ativo em uma data futura. O ativo podendo ser uma ação ou contrato de câmbio. Regularmente este contrato é feito entre instituições, neste caso uma das partes assume a compra e a outra instituição assume a contraparte a venda. Segundo Hull(2016, p.7) “os contratos a termo podem ser usados para proteger o risco de câmbio”;
- b) opções: segundo Hull(2016, p.227) “as opções são fundamentalmente diferentes dos contratos a termo e futuros. Uma opção dá ao titular o direito de fazer algo, mas ele não precisa exercitar esse direito.” Para exemplificar esta definição, supomos que um investidor comprou uma opção que tem como ativo subjacente à ação da Vale, este investidor pode escolher comprar o ativo subjacente ou não, ou seja, dá o direito a ele e neste caso, a decisão de exercer ou não. As opções são negociadas em bolsas, atualmente existem dois tipos de opções, as

opções americanas e opções europeias. Segundo Hull (2016, p.9) as opções americanas “podem ser exercidas em qualquer momento até a data de expiração”. O termo empregado exercício se refere ao ato de finalizar o período vigente da opção, neste caso é exercida. Já as opções europeias so podem segundo Hull (2016, p.9) “ ser exercidas na data de seu vencimento”. Há alguns termos técnicos, existem as opções do tipo call e as do tipo put, às opções de comprar(call) concede ao titular o direito de comprar o ativo subjacente até uma data determinada por um preço específico. As opções do tipo put são similares, porém esta concede ao titular o direito de vender o ativo subjacente até uma data determinada e há um preço pré definido. O preço desse contrato é definido como preço de exercício ou strike price e também existe a data, que é denominado de data de expiração ou vencimento.

2.1.2 Indicadores

Para se obter uma rentabilidade acima da média necessita-se de alguma maneira, estratégia ou método que auxilie na tomada de decisão. Nesta sessão constará alguns indicadores que serão utilizados no capítulo 4 para selecionar ativos (ações), com a finalidade de se montar uma carteira para não poupar de forma improdutiva, como de acordo com Cerbasi (2008 apud RADAELLI, F 2018, p.21) “entende de que nada adianta fazer esforço para poupar e poupar de forma improdutiva, definindo que um dos aspectos mais importantes para ganhar dinheiro é a rentabilidade, que deve multiplicar o dinheiro investido com valia”.

Portando para se avaliar empresas no mercado de capitais e mais específico no de ações, necessitar-se-á de indicadores que auxiliaram na escolha. Dependendo do perfil de investidor e do objetivo que se tem, poderá optar na escolha por produtos de renda fixa para ter uma diversificação. Assim, com o objetivo de construir uma carteira de investimento poderá analisar empresas e produtos da renda fixa.

Para selecionar empresas necessitamos de indicadores, pois eles possuem o objetivo de apontar um resumo do que está ocorrendo em determinado local. De acordo com Freitas (2021, p.10) os indicadores financeiros são ferramentas que funcionam como métricas de desempenho de um negócio.

2.1.2.1 Indicadores de renda variável

Os indicadores financeiros que serão apresentados são: Patrimônio líquido, dividendo, Margem líquida (ML), Total enterprise value (TEV), Earnings Before Interest and taxes and amortization (EBITDA), Return On Investment (ROI) e a liquidez corrente. E alguns desses indicadores serão utilizados na sessão da aplicação dos modelos, para auxiliar na escolha de empresas.

De acordo com o site [status_invest](#) (2020) o patrimônio líquido é um indicador contábil que indica a relação entre os ativos e passivos financeiros de uma empresa. Ou seja, é um indicador que representa o total de bens que uma empresa ou companhia que realmente são de posse de seus acionistas. De acordo com o site, o patrimônio líquido só pode ser encontrado a partir do cálculo dos ativos e passivos de uma companhia. Os ativos de uma empresa são os bens e direitos que possui em determinado período, ou seja, tudo o que pode ser convertido em um valor monetário, como: caixa disponível, estoque, equipamentos, imóveis e veículos. Já aqueles que são considerados como passivos, são as obrigações financeiras que a empresa possui com outros, podendo ser dívidas (como empréstimos e financiamentos), salário de funcionários, pagamento de tributos e contas gerais. De acordo com a Lei 6404/76 coloca que a estrutura do patrimônio líquido de uma empresa é composto por contas, que de acordo com statu invest (2020) são chamadas de subdivisões, a saber:

- capital social;
- ações de tesouraria;
- reservas de lucros e de capital;
- ajustes de avaliação patrimonial.

O capital social é todo recurso aplicado na empresa pelos sócios no momento de sua criação. As ações em tesouraria são um componente importante do patrimônio, ou seja, são “[...] os papéis emitidos que nunca foram emitidos ao público[...]”([satus invest](#) (2020)). Também as ações recompradas no mercado entram para esta categoria. A reserva de lucros e capital, de acordo com [status invest](#) (2020), são uma parte dos lucros gerados pela operação da empresa que são destinados à reservas por motivos específicos. E por fim, o ajuste de avaliação patrimonial, de acordo com [status invest](#) (2020), demonstra os ajustes necessários para avaliar os ativos da companhia de acordo com seus valores justos.

Os dividendos de acordo com o site [status invest](#) (2020) representam uma parcela dos lucros de uma empresa listada na bolsa que é distribuída entre os seus acionistas ao final do exercício social. Ou seja, é uma parcela dos lucros que a empresa obteve em determinado período que é pago aos acionistas. Normalmente, dependendo da empresa, ela segue uma política de distribuição que encontra-se no estatuto social.

A Margem Líquida (ML), esse indicador é utilizado para aferir qual é a parte do lucro de cada venda que efetivamente sobra para a empresa, neste cálculo é descontado todas as despesas da empresa e os impostos. De acordo com Blatt (2001 apud Rosa, M. R. ; Bared, R. , 2018, p.133), o coeficiente de margem líquida mede a eficiência da empresa em controlar os custos em relação aos níveis de vendas.

$$M arg em líquida (ML) = \frac{Lucro Líquido}{Total de Vendas}$$

O próximo indicador é o Total Enterprise Value (TEV). Para Freitas (2021, p.10) é um indicador que mostra o quanto um comprador deve pagar para adquirir uma empresa. É consituído soma do valor de mercado (o quanto a empresa vale) e a sua dívida líquida (dívida menos o caixa).

$$TEV = Valor de mercado + Dívida Líquida$$

De acordo com Martelanc, Pasin e Pereira (2010 apud Rosa, M. R. ; Bared, R. , 2018, p.135), os múltiplos do EBITDA eliminam os impactos decorrentes dos principais itens que não influenciam o caixa, que são os juros, impostos, depreciação e amortização. É um indicador muito utilizado para fins de avaliação de empresas, para calcular esse indicador é necessário de algumas informações:

$$EBITDA = \text{receita líquida} - \text{custos de produtos vendidos} - \text{despesas de atividades} + \text{depreciação no período} + \text{amortização acumulada no período}$$

Segundo Braga (2009 apud apud Rosa, M. R. ; Bared, R. , 2018, p.135) o EBITDA torna-se importante se considerarmos que uma empresa pode ter um lucro mais elevado e com baixa capacidade operacional ao mesmo tempo em que a outra pode apresentar um baixo lucro, no entanto ter maior eficiência.

E por último o Return on investment (ROI) também denominado de retorno sobre investimento, é um indicador que calcula o desempenho e mostra o quanto perde-se ou ganha com um investimento. Para FREITAS (2021, p.10) o ROI é utilizado como um indicador de retorno de investimento, comparando os ganhos de investimento com os custos de investimento que ocorreram no processo. Segue a fórmula matemática:

$$ROI = \frac{(\text{Ganho do investimento} - \text{custos do investimento})}{\text{Custos do investimento}}$$

Um conceito importante é liquidez, que pode ser entendido como a facilidade que um ativo pode ser transformado em dinheiro sem perdas em seu valor. Esse conceito para FREITAS (2021, p.10) refere-se à agilidade com que um investidor consegue desfazer-se de um investimento para voltar a ter dinheiro em reais e ter que assumir um grande prejuízo. Já a liquidez corrente é um indicador utilizado para analisar a situação de crédito de uma empresa, ou seja, verificar se a empresa possui recursos para cumprir com a quitação de suas obrigações com os credores. Indica a capacidade de pagamento da empresa e calcula-se:

$$\text{Liquidez Corrente} = \frac{\text{Ativo Circulante}}{\text{Passivo Circulante}}$$

Segundo FREITAS (2021, p.10) ativo circulante corresponde aos bens e direitos da empresa de curto prazo, como caixa e disponibilidades, já o passivo circulante remete aos valores de capital a terceiros de curto prazo. Então, o quanto a empresa tem de dívidas no período.

Um outro grupo de ativos no mercado são os índices de mercado, que são utilizados para verificar o desempenho no caso o mercado de ações. Os índices de mercado conseguem refletir o que aconteceu no passado, alguns também conseguem apontar o comportamento geral do mercado financeiro no futuro. Devido refletem as questões políticas, econômicas e sociais do passado e do presente que compõem sua formação no atual momento e no futuro podem mudar a tendência de alta para baixa e vice-versa. Normalmente, alguns índices de mercado dependendo de sua composição podem ser utilizados como parâmetro para avaliar se determinado ativo é uma boa opção ou não. Ainda levando em consideração os índices de mercado, podem ser utilizados como referência para encontrar ações que possuem desempenhos acima da média. Segundo FREITAS (2021, p.10) a análise desses indicadores pode ser feita observando uma única empresa e considerando sua posição em relação a alguns parâmetros ou, ainda, comparando duas ou mais empresas entre si.

Agora dissertaremos sobre alguns desses indicadores que são escolhidos como referência no mercado brasileiro. Assim será destacado os seguintes indicadores: Taxa Selic, o Certificado de Depósito Interbancário (CDI), a taxa de câmbio entre Dólar e Real, IBOVESPA e o índice nacional de preços ao consumidor amplo (IPCA).

Iniciaremos descrevendo o Índice Bovespa que segundo Fortuna (2005 apud FABRIS 2011, p.25) representa não só o comportamento médio dos preços das principais ações, como também o perfil das negociações à vista observadas no pregão na Bovespa. E também segundo os autores o Ibovespa tem como objetivo

espelhar o seu desempenho médio dos negócios que são comercializados nos pregões da Bovespa.

Além de ser um dos tipos de investimento mais comuns, também utilizados como parâmetro de desempenho, é o Certificado de Depósito Interbancário (CDI) que segundo Scribd (2011 apud FABRIS 2011, p.32) são títulos de emissão das instituições financeiras monetárias e não monetárias, que são utilizados como garantia nas operações no mercado interbancário com a função de transferir recurso de uma instituição para outra. Também pode ser definido como de acordo Assaf Neto(2006 apud FABRIS 2011, p.33) são títulos que lastreiam operações do mercado interbancário.

A Taxa SELIC, segundo o site do Banco Central do Brasil(BCB) o acrônimo SELIC vem da sigla que significa Sistema Especial de Liquidação e de Custódia. Tal sistema é uma infraestrutura do mercado financeiro administrada pelo Banco Central do Brasil(BCB). Nele são transacionados títulos públicos federais. A partir do cálculo da taxa média ajustada dos financiamentos diários apurados neste sistema é que corresponde à taxa Selic(Banco Central do Brasil).

Nas figuras 01 e figuras 02 encontram-se imagens que ilustram como ocorre a mudança na taxa. Segundo FREITAS (2021, p.11) é a taxa básica de juros da economia brasileira, criada em 1979 e utilizada pelo Banco Central para manipular a inflação e o Produto Interno Bruto (PIB), como um instrumento das chamadas políticas monetárias, servindo como base para os empréstimos interbancários. Na figura 01 há o esquema que mostra os efeitos dessa mudança, ou seja, a priori, a partir das decisões do comitê de política monetária, se decidirem que há necessidade em aumentar para conter a inflação, proceder-se-á como apresentado no esquema.

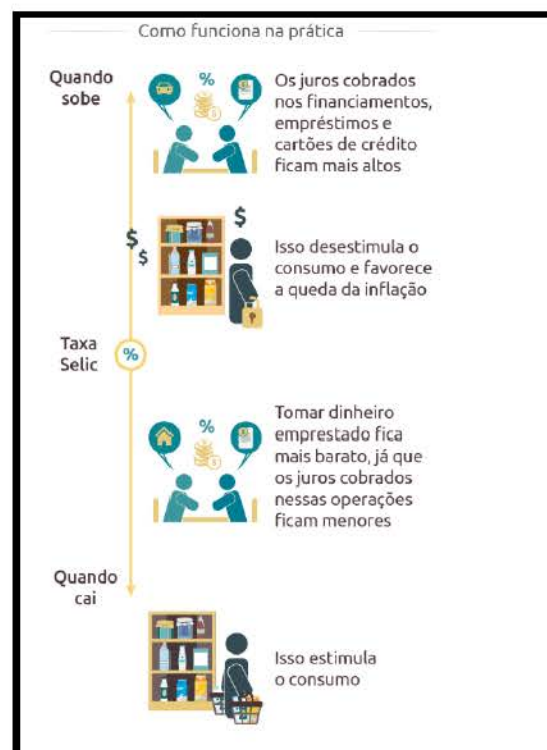
FIGURA 1 - EFEITOS DA TAXA SELIC



FONTE: Banco Central (2022)

Na figura 02 ilustra como funciona o instrumento de controle da inflação, ou seja, dependendo do aumento ou redução afetará a vida da população.

FIGURA 2 - A TAXA SELIC



FONTE: Banco Central (2022).

Além disso, a taxa SELIC é o ancoradouro e guia para todas as taxas cobradas pelos bancos, os intermediários do Sistema Financeiro, pois os mesmos usam esta como referência para seus produtos financeiros: linhas de créditos, financiamento e nos cartões de crédito, etc. Além disso, existe um outro enquadramento para uma taxa tão importante, que é bem colocada por FREITAS.

“Taxas que possuem uma rentabilidade esperada em um investimento com risco muito baixo são chamadas de taxa livre de risco, que servem de referência no universo do mercado financeiro, e das finanças em geral, para comprar diferentes opções de investimento”.FREITAS (2021, p.11).

Um conceito importante no mercado financeiro é o termo volatilidade, que segundo FREITAS (2021, p.11) é uma das ferramentas mais importantes para quem atua no mercado de ações. A interpretação dela está na relação com que o preço de uma ações varia em um determinado período de tempo. Dependendo de determinado mercado que possua determinados ativos, terá um perfil de volatilidade, o qual pode ser caracterizado como baixa volatilidade ou alta volatilidade, ou seja, por exemplo: “pensem em uma ação X que tem um preço y, neste mês, o preço não valorizou e nem se desvalorizou, ou seja, houve pouca volatilidade neste período”. É possível constatar esse fato ao observar o que é denominado de dados históricos ou séries históricas. Isso significa que ativos que possuem negociação em bolsa, possuem em sua vigência ao longo do tempo, o registro do preço que seus papéis oscilaram durante um tempo, podendo ser: mês, dias, horas e assim por diante.

Um dos objetivos de usar índices e indicadores para escolher ou comparar, é que ao escolher um determinado ativo, esse teria como fim performar igual o índice em questão, e neste caso fazendo uso de dados históricos podem ser utilizados em um uso prático, como afirma FREITAS:

Os dados históricos podem ter uso prático de serem usados como teste de estratégia para superar indicadores ou índices em questão, pois a escolha de uma estratégia baseada em dados pode fazer a diferença no retorno esperado.FREITAS(2021, p.11).

2.1.3 Estrutura do Sistema Financeiro Nacional

Os ativos financeiros são diversos e são disponibilizados por determinadas instituições no mercado financeiro. De acordo com Cavalcante (2002 apud SILVA, S. W. et al, 2016, p.1015) o sistema financeiro é o conjunto de instituições e instrumentos financeiros que possibilita a transferência de recursos dos ofertadores finais aos tomadores finais. Logo, é o local em que acontecem negociações diárias entre superavitários e deficitários os que necessitam capitalizar-se para fazer investimentos em seus respectivos projetos.

Com o desenvolvimento da economia nos últimos dois séculos o Brasil saiu de um país sem nenhuma instituição financeira que fizesse a intermediação, para um país com uma boa quantidade de instituição financeira que fizesse a intermediação. Tudo se iniciou com a chegada da família real no Brasil, segundo SILVA, S. W. et al (2016, p.1015) o surgimento da intermediação financeira no Brasil coincide com a transferência da família real para o Brasil em 1808. E com as relações econômicas mais dinâmicas com países europeus cria-se o Banco do Brasil, o primeiro intermediador financeiro.

Em cada momento da história de um país engendrou-se instituições necessárias para modernizar e adequar os países às necessidades daquele momento. Então, de acordo com a ARENHART:

O Sistema Financeiro Nacional pode ser entendido como um conjunto de instituições financeiras e instrumentos financeiros que visam, em última análise, transferir recursos dos agentes econômicos (pessoas, empresas, governo) superavitários para os deficitários. ARENHART (2020 , p.18)

Que pode ser entendido, que no mercado de capitais ocorre essa transação, entre o superavitário e o deficitário. A estrutura que faz a mediação, necessitou de determinados produtos os quais podem ser encontrados na Brasil Bolsa Balcão (B3) que estão divididos em valores mobiliários: como ações, moedas nacionais e de mercadorias, exemplo: commodities, e outros.

Esse sistema financeiro é organizado e dividido da seguinte maneira: o setor normativo, o setor supervisor e setor dos operadores. Também pode encontrar a classificação de acordo com Assaf Neto.

O Sistema Financeiro Nacional pode ser dividido em duas partes distintas : subsistema de supervisão e subsistema operativo. O subsistema de supervisão se responsabiliza por fazer regras para que se definam parâmetros para transferência de recursos entre uma parte e outra, além de supervisionar o funcionamento de instituições que façam atividade de intermediação monetária. O subsistema operativo, também chamado de intermediação, é composto por todas as demais instituições financeiras, monetárias ou não, oficiais ou não, como também demais instituições auxiliares, responsáveis, entre outras atribuições, pelas intermediações de recursos entre poupadores e tomadores ou pela prestação de serviços. Assaf Neto (2012 apud Silva et al, 2016 apud ARENHART, 2020 p.19).

As instituições que compõem o Sistema Financeiro Nacional do Brasil e que intermediam as relações entre poupadores e tomadores são as que se encontram na figura 03, a síntese da estrutura do sistema financeiro nacional .

FIGURA 03 - SÍNTESE DA ESTRUTURA DO SISTEMA FINANCEIRA NACIONAL



FONTE : Banco Central do Brasil (2022).

O setor normativo é formado pelas seguintes instituições: (CMN) conselho monetário nacional, o (CNSP) conselho nacional de seguros privados e o (CNPC) conselho nacional de previdência complementar. Estes órgãos têm a competência de legislar sobre o sistema, traçar as diretrizes, metas, zelar pelo pleno emprego, realizando o planejamento do governo. O CMN é responsável por estabelecer as diretrizes gerais das políticas monetária, cambial e creditícia, o CNSP é o órgão responsável por legislar a política de seguros privados, o CNPC tem a função de regular o regimento de previdência complementar operada pelas entidades fechadas.

O setor supervisor tem como objetivo e responsabilidade verificar cumprimento das normas do setor normativo. O Banco Central do Brasil (BCB) tem por finalidade a execução, o acompanhamento e o controle das políticas monetária, cambial, disciplina e fiscalização do SFN, assim como o BCB. As seguintes instituições tem por finalidade verificar o cumprimento das normas em seus respectivos setores de atuação, o que compete segundo seus regimentos internos, portanto temos as seguintes instituições: a CVM, o SUSEP e a PREVIC. E em último temos o setor de operadores, neste setor temos a comercialização dos produtos e serviços financeiros, sejam privados ou públicos.

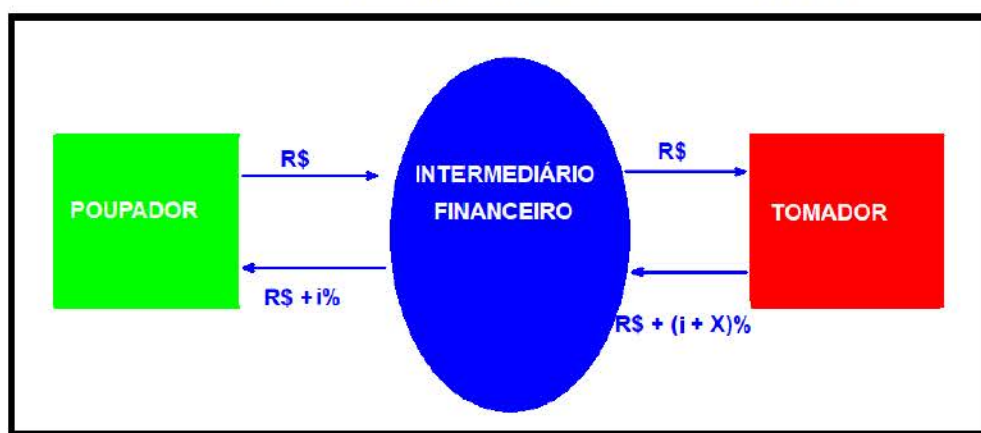
2.1.3.1 Remuneração dos Intermediadores Financeiros

Segundo FREITAS (2021, p.09) o lucro dos agentes envolvidos dá-se por taxas de juros, valores de corretagem, diferenças vindas da flutuação dos mercados, entre outros. E também para o autor as transações que ocorrem entre os investidores são intermediadas por instituições como: Banco Central, bancos estatais e privados, corretoras de valores, distribuidoras de títulos, fundos de investimento e bolsa de valores.

No caso de empresas que fazem a intermediação por meio de empréstimos, neste caso quem toma o risco é a empresa que está fazendo a intermediação, pois é ela que fará a operação, captando recursos dos poupadores e os emprestando aos tomadores. Na figura 04, encontra-se o esquema desta operação. E também na

figura 04, acontece a seguinte operação, o poupador empresta seu capital ou poupança ao intermediador que será um banco e receberá seu capital acrescido de uma taxa ($i\%$) paga pelo intermediador, na outra ponta, o tomador, ele recebe o dinheiro emprestado, acordando de pagar o dinheiro recebido acrescido da taxa (i) mais um valor (x), que será a taxa total paga pelo tomador representada por $(i + x)\%$.

FIGURA 04 - REMUNERAÇÃO DO INTERMEDIADOR.



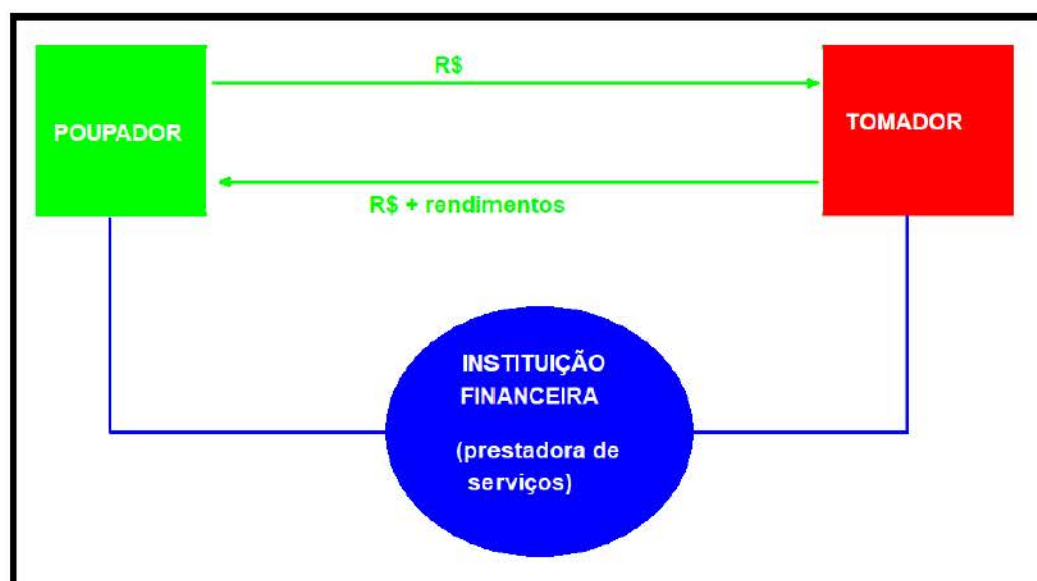
FONTE: adaptado de MOBILIÁRIOS (2014).

Outra operação que ocorre entre os intermediários e que também tem uma remuneração é a que ocorre no mercado de capitais, neste caso é classificado como um serviço, na operação anterior, acontecia no mercado de crédito, em que a instituição ficava a cargo de todo o risco. Neste modelo de intermediação a instituição não fica com todo o risco.

Na figura 05, encontra-se o esquema desta operação que é a síntese da estrutura da operação, neste caso, a instituição atua principalmente como prestadora de serviço, ou seja, de acordo com MOBILIÁRIOS (2014, p.34) assessorando na formação de preços, oferecendo liquidez, captando clientes, distribuindo os valores mobiliários no mercado, entre outros trabalhos. Podendo ser citado como exemplo a compra de ações, pensando na seguinte hipótese, há uma empresa que necessita capitalizar-se para fazer um investimento, deste forma ela fará o que é uma das opções que tem, a abertura de capital, que é quando a empresa vende uma parte dela no mercado de capitais a investidores, ou seja, é o

momento em que encontrará os poupadores que tem esse recurso, ao intermediar este encontro entre as partes por determinado instrumento no mercado de capitais, através do produto denominado ação, a instituição receberá por prestar esse serviço, que pode ser a corretagem.

FIGURA 05 - REMUNERAÇÃO DO INTERMEDIADOR



FONTE : adaptado de MOBILIÁRIOS(2014).

2.2 TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO

Para Santos, A., Tessari, C. (2012, p.370) a abordagem da otimização de carteiras, proposta inicialmente por Markowitz (1952) em seu artigo “Portfolio Selection”, deu origem ao que hoje é popularmente conhecido como Teoria Moderna de Portfólio e também a análise média-variância de carteiras de investimento, revolucionando assim, o processo de alocação de ativos. No QUADRO 1, encontra-se um referencial inicial das principais publicações que estruturam o que hoje é conhecido como a teoria moderna do portfólio.

QUADRO 1 - EVOLUÇÃO DA TEORIA DO PORTFÓLIO.

Nome	Autor/ ano das publicações	Resumo da produção	Título	Prêmio

Harry Max Markowitz	Markowitz (1952, 1959)	“Apresentou um modelo para se construir e selecionar ativos com base no desempenho futuro esperado dos investimentos, e no risco que o investidor deseja. Oferece meios para se calcular a fronteira eficiente, ou seja, como diversificar a carteira para que ela possa ter o maior retorno possível, com o menor risco, ou caso o investidor queira um maior retorno, teria que correr mais risco”.(Lehmkuhl, Schnorrenberger e Flach 2022, p.582)	Títulos: 1º) artigo publicado na revista The Journal of Finance com o título : " Portfolio Selection; 2º) E em 1959 faz a defesa da monografia 1959 com o título : "Portfolio Selection - efficient diversification of investments , instituição : Cowles Foundation for research in economics at Yale University.	1º) Prêmio Teoria John Von Neumann de 1989; 2º) Prêmio de ciências econômicas em memória de Alfred Nobel de 1990.
William Forsyth Sharpe	Sharpe (1964)	“Por meio dos estudos da fronteira eficiente, introduziu nas carteiras os ativos livres de risco, estabelecendo que os retornos das carteiras diversificadas serão uma reta linear entre o retorno esperado e o desvio padrão. Apresentou o conceito de risco sistêmico”.(Lehmkuhl, Schnorrenberger e Flach 2022, p.582)	Título: CAPITAL ASSET PRICES: A THEORY OF MARKET EQUILIBRIUM UNDER CONDITIONS OF RISK publicado na The journal of finance em 1964. acessado em 17/04/2022 (https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x)	Prêmio de ciências econômicas em memória de Alfred Nobel de 1990. Sharpe e Markowitz foram os ganhadores deste ano, junto e mais outra pessoa.
John Virgil Lintner	Lintner (1965)	“Explorou conceitos de alavancagem, considerando vendas a descoberto, e a possibilidade de empréstimos a taxa livre de risco para montagem de portfólio. Além de apresentar cinco fatores determinantes para avaliar se o investimento compensaria: a taxa livre de risco, o risco do preço do mercado, a variância do dinheiro trazido a valor presente, os projetos agregados no presente valor e o total das covariâncias dos outros projetos incluídos no orçamento”.(Lehmkuhl, Schnorrenberger e Flach 2022, p.582)	Título : " Security, risk, and maximal and gains from diversification" publicado na The journal of finance, vol .XX, n.4 em Dezembro de 1965	

Jan Mossin	Mossin (1966)	“Discorreu sobre a tomada de decisão dos indivíduos, e como equilibrar os portfólios, a partir do momento que o investidor chega no mercado com sua carteira de ativos, querendo comprar e vender, como atender a oferta e demanda? Como equilibrar? O autor cita que o equilíbrio na alocação dos ativos será um ótimo Pareto, ou seja, uma vez que um ativo terá mais peso, outro perderá peso na carteira. Ao final, lembra que a linha de mercado serve apenas para resumir o resultado do comportamento racional dos indivíduos”.(Lehmkuhl, Schnorrenberger e Flach 2022, p.582)	Título : " Equilibrium in a capital Asset Market". Econometrica , vol.34, n.4 (octubre, 1966). Acessado em 17/04/2022 : https://www.jstor.org/stable/1910098?seq=1	Prêmios Alexander Henderson Award
Eugene "Gene" Francis Fama	Fama (1970, 1991)	“Introduziu a ideia de mercado eficiente, no qual os preços dos ativos vão sempre refletir as informações que se tem disponível, e uma forma de defender este ponto de vista, é o fato que os preços dos ativos oscilam constantemente, refletindo a cada instante as novas informações de mercado, e não sendo possível estimar qualquer retorno futuro do mercado que “caminha de forma aleatória” (the random walk). Fama atualizou seus estudos estabelecendo que no sentido extremo não tem como o mercado ser eficiente, pois os ativos só vão refletir totalmente as novas informações se os operadores do mercado entenderem que há espaço para lucrar, considerando o custo da informação e os custos das operações para se adquirir ativos”.(Lehmkuhl, Schnorrenberger e Flach 2022, p.582)	Titulo: " Efficient Capital Markets: A review of theory and empirical work". publicado em : The Journal of Finance, vol.25, n.02, maio 1970. Acessado em 17/04/2022 : https://www.jstor.org/stable/2325486?seq=1 Titlo : " Efficiente Capital Markets II.Publicadona The Journal of Finance em December de 1991 , volume 46, n.5. acesso em 17/04/2022 no link : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04636.x	1º) Prêmio Nobel de Ciências Econômicas de 2013; 2º) Deutsche Bank Prize in Financial Economics (2005) ; 3º)Morgan Stanley American Finance Association Award for Excellence in Finance (2007) 4º) Onassis Prize in finance (2009) . acessado em 17/04/2022 : https://www.chicagobooth.edu/faculty/directory/f/eugene-f-fama

FONTE : elaborado pelo autor (2022).

Foi através dessa abordagem, revolucionária, que mudou a forma como fazia-se análise de investimento e da seleção de ativos individuais, passando para uma seleção que tinha como premissa a diversificação de acordo com Santos, A. A. P. ; Tessari, C. (2012, p.370) colocando pela primeira vez em bases sólidas e matemáticas a relação entre risco e retorno, mostrando que o risco da carteira não depende apenas do risco associado a cada ativo, mas da covariância entre ativos individuais.

Segundo MARCOLIN, A. F. (2013, p.19) a proposta de Markowitz estabelece uma estratégia de investimento que busca maximizar o retorno para determinado risco admitido, ou o contrário, minimizar o risco para um retorno pré-estabelecido. Ou seja, a teoria alicerça-se no trade off risco-retorno que um investidor deverá considerar para escolher quais são os melhores ativos para compor sua carteira.

De acordo com Markowitz (1952 apud MARCOLIN, A. F. 2013, p.20) o objetivo da análise do portfólio é encontrar as carteiras que melhor convêm aos objetivos do investidor. O Markowitz colocou em bases matemáticas sólidas uma possível explicação do motivo que leva os investidores a fazerem a diversificação em sua carteira e que, o investidor considerará o retorno esperado e sua variância, assim seria possível elaborar um modelo capaz de explicar a diversificação, e para OLIVEIRA (2013, p.20) bem como um processo decisório para a seleção de carteiras ótimas segundo as preferências de cada investidor.

De acordo com Guerrard Jr. (2010 apud MARCOLIN, A. F. 2013, p. 20) às premissas nas quais Markowitz se apoiou para a fundamentação de seu artigo, sinteticamente são:

- I. Os investidores avaliam as carteiras apenas com base no retorno esperado e no desvio padrão dos retornos sobre o horizonte de tempo de um período;
- II. Os investidores são avessos ao risco. Se instados a escolher entre duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolhem a de menor risco;

- III. Os investidores estão sempre insatisfeitos em termos de retorno. Confrontados a escolher entre duas carteiras de mesmo risco, sempre escolhem a de maior retorno;
- IV. Seria possível dividir continuamente os ativos, ou seja, ao investidor seria permitido comprar mesmo frações de ações;
- V. Todos os impostos e custos de transação são considerados irrelevantes;
- VI. Todos os investidores estão de acordo em relação à distribuição de probabilidade das taxas de retorno dos ativos. Isto significa que somente existiria um único conjunto de carteiras eficientes.

De acordo com as premissas expostas acima, reparamos que o autor tem uma preocupação em estabelecer uma linha evolutiva de raciocínio no desenvolvimento. Da mesma forma é feito na relação desvio-padrão e correlação que para MARCOLIN, A. F. (2013, p.21) como a relação entre os desvios-padrão dos retornos de ativos individuais, as correlações entre esses títulos e o risco do portfólio, cada uma dessas variáveis é tratada sistematicamente, inicialmente são considerados dois ativos, posteriormente, abrangendo-se para vários ativos.

De acordo com FREITAS (2021, p.13) o método da teoria moderna de portfólio permite a aquisição de carteiras de variância mínima para cada nível de retorno média esperado (retorno esperado). Assim, para calcular o retorno, deve-se utilizar os dados históricos do ativo ou dos ativos e, para cada nível de retorno esperado, os portfólios eficientes construídos, devem minimizar o risco, e para verificar, fazer-se-a uso das medidas de variância ou desvio padrão dos retornos passados calculados por meio dos dados históricos.

O investidor que faz uso desta teoria deve considerar o retorno esperado algo desejável, e a variância dos retornos algo indesejável. Isto é verificado na premissa I, em que temos: I - Os investidores avaliam as carteiras apenas com base no retorno esperado e no desvio padrão dos retorno sobre o horizonte de tempo de um período Guerrard Jr. (2010 apud MARCOLIN, A. F. 2013, p. 20).

Portanto, para FREITAS (2021, p.13) temos a relação entre retorno esperado do portfólio $E(R_p)$ e a sua variância total (ν), a qual corresponde ao risco

total do portfólio construído. Além disso, na teoria do portfólio mostra-se que é possível, dado um nível de retorno esperado, escolher um portfólio que tenha menor risco, neste caso, usar-se-á o princípio da diversificação, que é encontrar ativos que possuam baixa correlação ou correlação negativa e adicionar a carteira, desta forma irá atenuar o risco total da carteira.

Nas próximas seções discutiremos sobre o modelo de Otimização de Portfólio, porém, antes, será discutido alguns dos conceitos como: retorno, variância, correlação, diversificação, risco e fronteira eficiente.

2.2.1.1 O Retorno no Modelo de Otimização Média Variância

De acordo com MARCOLIN, A. F. (2013, p.21) o retorno esperado de uma carteira é dado como uma variável aleatória, ou seja, incapaz de ser efetivamente reconhecido até sua observação. Logo, constatamos a dificuldade em delimitar o retorno esperado o que exige um cuidado, segundo MARCOLIN, A. F. (2013, p.21) exige o devido preparo e cuidado para que as decisões de investimento considerem as potencialidade e fraquezas dos ativos selecionados, podendo, desta forma, formular a melhor confecção. Além disso, há uma dificuldade, porque, os retornos serem incertos, porém não invalida o processo de análise da carteira.

Segundo Heiji (2004 apud MARCOLIN, A. F. 2013, p.22) uma variável aleatória (doravante v.a) é aquela cujo valor é desconhecido até sua observação efetivamente. Então, os valores de uma variável aleatória de acordo com OLIVEIRA (2013, P.21) “são resultados de experimento e não podem ser preditos com exatidão. Assim, para calcular o retorno usaremos a forma intuitiva.”

De acordo com MARCOLIN, A. F. (2015, p.11) a abordagem mais intuitiva para o cálculo dos retornos no mercado de capitais é a taxa percentual referente à diferença entre o preço atual e o do mês (dia, ano) anterior.

$$Ri = \frac{P(t) - P(t-1)}{P(t-1)}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (1)$$

ou podendo utilizar a seguinte fórmula para ao cálculo do retorno

$$Ri = \frac{P(t)}{P(0)} - 1$$

Para calcular o retorno individual (R_i) de um ativo, necessita-se dos dados históricos dos preços do ativo em um determinado período. O $P(0)$ significa o preço no início da série e o $P(t)$ é o preço em um tempo futuro. O (t) pode fixado em dias, meses, trimestres, semestre e em anos. E para FREITAS(2021, p.14) o retorno da carteira pode ser representado pela média dos retornos obtidos ao longo do tempo, sendo portanto igual ao valor esperado do dado histórico disponível. O que entra em acordo com OLIVEIRA :

Um das formas mais usuais, mas não exclusiva, de estimação de risco e retorno esperados dos ativos é utilizar dados passados. Numa série histórica, pode-se apenas presumir o retorno futuro dos ativos e da carteira. O chamado retorno esperado é resultado da esperança matemática dos retornos observados. Na referida análise, os retornos dos ativos apresentam a mesma probabilidade de ocorrência, isto é, são equiprováveis, portanto o valor esperado dos títulos é igual à média dos retornos observados. O retorno esperado da carteira, portanto, é dado pela média ponderada dos retornos esperados dos ativos que a integram (OLIVEIRA 2013, p.24).

Para calcular o Retorno individual de um ativo (R_i), a partir do cálculo do (R_i) fixar-se-a ele, como sendo $E(R_i)$, fazer-se-a uma média dos retornos, e interpretará esta média dos retorno como a esperança futura de replicar o retorno passado, e para o retorno esperado do portfólio, utilizar-se-á a média do retorno $E(R_i)$ é o *retorno esperado*, multiplicado pela sua respectiva taxa de participação na carteira, e, dependendo da quantidade de ativos, somaram-se-a as respectivas taxas de participação (w_i) multiplicado pelos respectivos retornos esperados $E(R_i)$, usa-se a equação de $E(R_p)$:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_i),$$

em que $E(R_p)$ é o retorno esperado do portfólio, (w_i) representa a taxa de participação de cada ativo selecionado para compor a carteira e $E(R_i)$ representa o retorno individual médio esperado do ativo i , ou seja, calculado a partir da média do retorno esperado na série de retorno individual.

2.2.1.2 Variância e Covariância

A análise do risco no modelo de Markowitz é dado pela variância do portfólio

que considera a variância do retorno (σ_i^2) de cada ativo e a covariância entre os pares de ativos do portfólio (σ_{ij}). Como aponta MARCOLIN, A. F.:

“Uma das formas de calcular o risco de um portfólio formado pelos títulos A e B é expresso através da variância dos retornos, ou seus desvio padrão (que nada mais é do que a raiz quadrada da variância). A variância da carteira é encontrada pela esperança matemática dos quadrados dos desvios dos retornos observados em torno do seu retorno esperado. Adicionalmente, tem-se que o risco de uma carteira composta por dois ativos depende de seus riscos individuais (expressos por suas variâncias), assim como do grau de associabilidade entre os retornos dos títulos (expressa pela covariância). Quanto maior a associabilidade entre os títulos, portanto, quão maior sua covariância, maior o risco da carteira”. MARCOLIN, A. F. 2013, p.25).

O retorno é obtido a partir do dado histórico de retorno de cada ativo (R_i), ou seja, depende da quantidade de ativos, e seus respectivos retornos individuais, em que T corresponde a um período de tempo, podendo ser anos, meses, semanas, dias. O ρ_{1N} representa o retorno do respectivo ativo na coluna, então, cada coluna representa um determinado ativo e nas linhas o retorno do ativo no período T. Logo, os dados podem ser representados por uma matriz do tipo S:

$$S = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{T1} & \dots & \rho_{TN} \end{bmatrix}$$

em que,

ρ_{TN} , $N = 1, 2, \dots, N$ é retorno do ativo ;

$T = 1, 2, \dots$; é o período de observação.

Dado um histórico de retorno de cada ativo, quanto maior a variância (σ_i^2) da série, maior será o risco de i, portanto, cada ativo contribui para compor o retorno esperado do portfólio e também contribui para compor o risco total do portfólio. Então a partir do dado histórico, define-se a variância (σ_i^2) dos ativos :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\rho_{ti} - \overline{\rho_i})^2$$

Como estamos levando em consideração que a média de retorno para um ativo em particular, é o retorno esperado $E(R_i)$, logo a equação pode ser reescrita da forma abaixo:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\rho_{ti} - E(R_i))^2$$

Outro conceito importante é a covariância entre dois ativos i e j , então:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\rho_{ti} - E(R_i)) (\rho_{tj} - E(R_j))$$

em que $E(R_i)$, $E(R_j)$ é o retorno médio esperado. De acordo com FREITAS (2021, p.15) a matriz das covariâncias, que corresponde à covariância entre todos os pares de ativos é representada por:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Disso, podemos fazer essa avaliação e prever o quão relacionado estão dois ativos. Faremos esta avaliação para determinar o grau de correlação, pois, ativos com alto grau de correlação com determinadas oscilações, ou seja, investimentos do mesmo ramo, estarão sujeitos às mesmas adversidades econômicas. Portanto, devemos priorizar a busca pela diversificação dos investimentos do portfólio, visando minimizar o efeito mencionado.

De acordo com FREITAS (2021, p.15) a relação ou não entre ativos de uma carteira irá determinar a minimização do risco. E segundo o autor a principal variável para determinar a melhor relação entre os ativos foi denominada por Markowitz de correlação, que mensura o risco. Para calcular a correlação faremos uso da seguinte equação:

$$\text{corr}(R_i, R_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

em que,

σ_{ij} = covariância entre ativos;

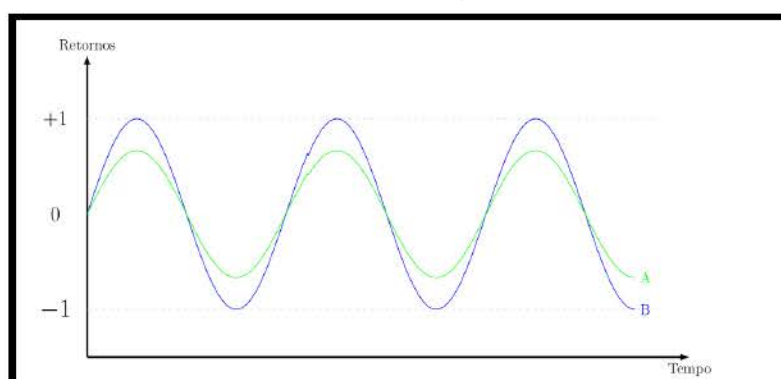
$\sigma_i \sigma_j$ = produto dos desvios dos retornos dos ativo

Aqui calcularemos um coeficiente de correlação entre dois ativos que medirá o grau de variação entre eles. Assim quanto maior sua tendência a caminhar juntos, simultaneamente, mais alto será o coeficiente de correlação.

2.2.1.3 Coeficiente de Correlação

Nesta subseção encontra-se uma exemplificação do coeficiente de correlação entre dois ativos. Então se a correlação entre dois ativos for 1, é considerada positiva e perfeita. Na figura 06, há a representação geométrica da correlação positiva e perfeita entre dois ativos A e B. Lembrando que a correlação varia de -1 a 1.

FIGURA 06 - CORRELAÇÃO POSITIVA

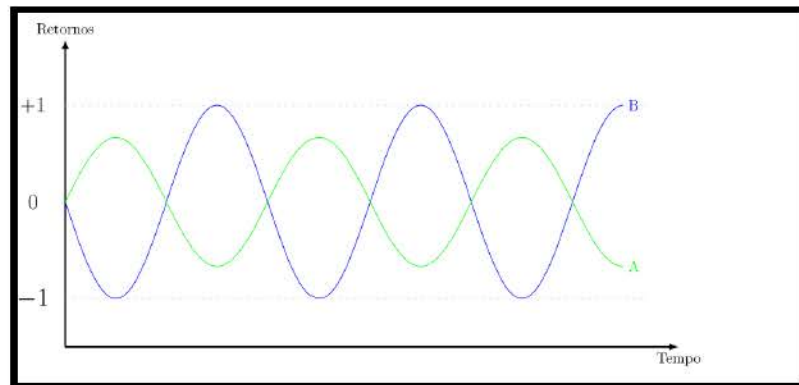


FONTE: FREITAS (2021).

A correlação positiva perfeita ocorre devido os ativos serem de setores próximos ou serem do mesmo setor, assim reagem juntos às adversidades que ocorrem. Sobre a correlação quando é negativa ou -1 como o da figura 07, neste caso, é o que procuramos para montar uma carteira, pois, assim, pode-se atenuar o risco da carteira a zero e manter o retorno. Ocorre devido os ativos muitas vezes

serem de setores diferentes, que dependendo da adversidade setorial respondem de forma oposta.

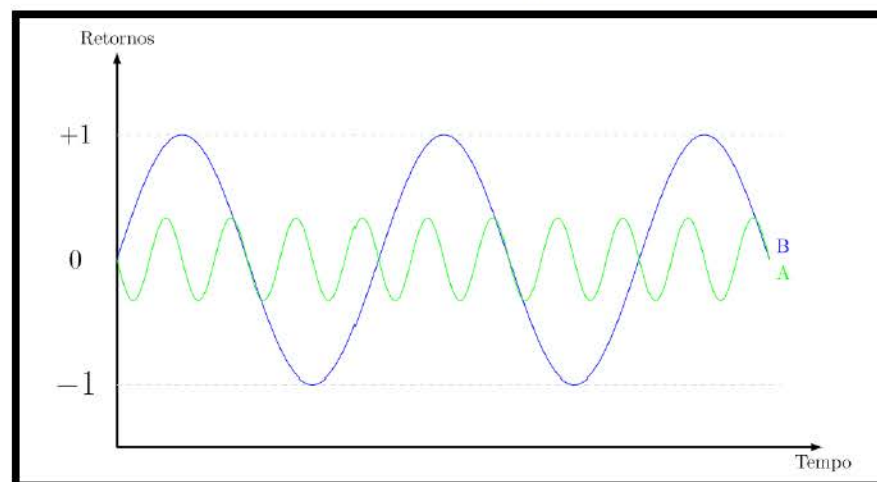
FIGURA 07 - CORRELAÇÃO NEGATIVA.



FONTE: FREITAS (2021).

Como buscamos a diversificação para a redução de risco e manter o retorno, não interessa ativos que não estejam correlacionados, pois, nesse caso não haverá redução no risco, assim, ativos com correlação nula não interessa, a figura 08 ilustra a correlação quando a mesma é nula.

FIGURA 08 - CORRELAÇÃO NULA



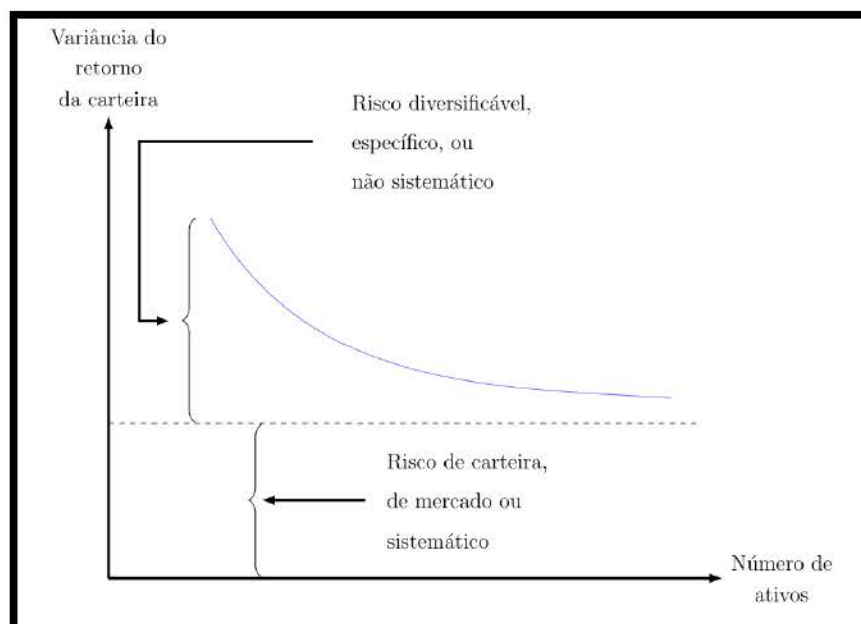
FONTE: FREITAS (2021).

Assim, verifica-se, que é possível, através dessa análise, a atenuação do que é definido como risco não sistêmico, a zero, pois, com a inclusão de mais ativos na carteira, pode-se conseguir essa redução, portanto, verifica-se um dos princípios

da teoria do portfólio, que a inclusão de ativos auxilia na redução do risco. Disso, temos que a desvalorização ou queda do preço de um ativos seria neutralizada pela alta concomitantemente do outro, então contribuindo para reduzir uma parte do risco diversificável, à medida que adicionar-se-á ativos. Na próxima seção o conceito de risco diversificável e não diversificável será melhor sintetizado.

Nota-se, quanto mais inclui ativos a carteira, ampliando a diversificação, o risco total decresce em função da eliminação do risco não sistêmico, ou seja, aquele risco relacionado à empresa, que podem ser derivados de problemas de ordem interna da empresa. Mas, há também o risco sistêmico, este ainda permanece, pois a medida em que adiciona ativos a uma gradual redução no risco não sistêmico, mas o risco sistêmico ainda permanece linear, como na figura 09, em que no eixo x tem o número de ativos e no eixo y a variância do retorno da carteira, e quando acrescenta-se ativos o risco diversificável ou não sistêmico decresce, mas até certo ponto.

FIGURA 09 - RELAÇÃO ENTRE RISCO SISTÊMICO E NÃO SISTÊMICO



FONTE: FREITAS (2021).

Portanto, por meio da diversificação pode-se reduzir o risco diversificável, pois, este, está relacionado a empresa, entretanto, quando trata-se do risco sistêmico, não pode-se fazer muito, pois isso está relacionado a variáveis globais,

que não podem ser previstas. Portanto, o indicado é primar pela diversificação, é a maneira teórica para que o investidor possa vir a diminuir os riscos, é a maneira pela qual o investidor faz uso da diligência para dividir seus recursos em setores e ações que estão nesses setores.

2.2.1.4 Risco Diversificável e Não Diversificável

O risco é visto como uma possibilidade de que no futuro algum acontecimento prejudique desfavoravelmente o investimento. Para Zhu, Li e Sun (2010 apud Lehmkuhl, Schnorrenberg e Flach 2022, p.583) preconizaram que para o investidor entender de forma mais simples a diversificação de risco, utiliza-se do dito popular, não devem ser colocados todos os ovos na mesma cesta. Assim, abaixo teremos algumas ponderações acerca de risco diversificável e não diversificável.

De acordo com Damodaran (2006 apud MARCOLIN, A. F. 2013, p.23) o risco pode ser agrupado em duas categorias: as específicas da empresa e as de todo o mercado. Também podemos encontrar na literatura a seguinte definição, no mercado financeiro, pode ocorrer dois tipos de risco: um é o sistêmico e o outro é o não-sistêmico. O sistêmico é aquele que tem fatores macroeconômicos, políticos, socioeconômicos e ambientais, o risco não sistêmico é aquele relacionado a uma empresa, a uma classe de ativos, também podem ser denominados como risco diversificado e não diversificado.

De acordo com FREITAS (2021, p.09) o risco diversificável refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas, ou seja, podem estar ligados a variáveis que afetam a empresa, como problema na produção, perda de algum gestor de extrema relevância a empresa, consequentemente afetará o desempenho do valor da empresa no mercado financeiro e assim levar a uma desvalorização dos seus papéis. De acordo com OLIVEIRA (2013, p.23) o risco que surge de medidas específicas da empresa podem ser classificados conforme alguns critérios:

Existe o risco de que uma empresa possa ter julgado mal a demanda de seus clientes por um bem ou serviço, a esse risco denomina-se risco de projeto; há o risco originado de os concorrentes provando ser mais forte ou mais fracos do que previsto, chama-se esse risco de risco competitivo; verifica-se ainda o risco que pode afetar todo um setor, mas restrito ao setor

específico, a este risco chama-se risco de setor. (MARCOLIN, A. F. 2013, p.23).

Para FREITAS (2021, p.09) o risco não diversificável, ou risco de mercado, refere-se a fatores externos que têm impacto sobre o mercado de ações em geral, ou seja, variáveis macroeconômicas, crises políticas, crise sanitária e problemas ambientais. O que entra em acordo com MARCOLIN, A. F. (2013, p.23) “existe outro tipo de risco, mais difuso, que afeta muitos, quando não todos, os investimentos. A esse risco denomina-se risco de mercado”.

Tanto o risco não diversificável como o risco sistêmico é um dos pontos mais importantes, devido que quando ocorre algo de magnitudes globais, afeta o mercado como um todo. Logo a preocupação que devemos ter é em mensurar o risco, que para MARCOLIN, A. F. (2013, p. 23) afinal apenas o risco pode ser mensurado, avaliado e ter um acompanhamento quantitativo. Segundo o autor, também existem muitas maneiras de mensurar o risco, entre elas podemos citar: variância e o desvio padrão.

Assim a diversificação pode contribuir para atenuar os prejuízos, mas somente para o risco diversificável ou também denominado de não sistêmico. Pois na formação de uma carteira de investimento, a diversificação é um ponto extremamente importante, pois, a partir do conceito, há o entendimento que empresas de um mesmo setor podem sofrer consequências iguais, ligadas a problemas setoriais, porém ao optar por incluir ativos de setores diferentes e que possuem um menor risco. Portanto, assim poder-se-á reduzir o risco geral ou prejuízo de um ativo proporcional a valorização do outro.

2.2.1.5 Fronteira Eficiente e a linha de mercado de capitais

De acordo com FREITAS (2021, p.18) por meio da teoria de Markowitz, os investidores podem determinar todas as carteiras ótimas, no sentido risco e retorno, e formar uma fronteira eficiente. Disso, tendo que levar em conta as preferências do investidor, e sua aversão ao risco. Há a existência de três comportamentos de investidor frente ao risco: os neutros, os avessos ao risco e os que preferem o risco, este último pode ser caracterizado como amantes do risco.

O mercado passou por várias mudanças em seu desenvolvimento, é sabido que surgiu um cardápio enorme de ativos, ou seja, oportunidades para fazer aplicações financeiras. No mercado de capitais encontram-se não só ativos com risco, também há ativos sem risco (ou ativos que remuneram a taxa SELIC). Um dos pontos ressaltados pelo Sharpe foi em supor que investidores tendo as mesmas condições, tendo as mesmas informações e também podendo contratar ou fazer financiamento (empréstimo) a taxa livre de risco. O investidor teria uma gama maior de oportunidades, podendo criar novas carteiras que tenham não só ativos com risco, mas que também teria uma porcentagem no ativo livre de risco.

O que geraria carteiras de investimento e, conseqüentemente, geraria-se a fronteira eficiente? Dependendo de um conjunto de ativos, que nada mais é do que, ter a possibilidade de gerar uma quantidade de porcentagens diferentes em cada ativo escolhido, procurando aquela combinação que possua o melhor retorno dado o menor risco, assim, a combinação, formar-se-á em várias carteiras. Para BRUM(2008, p.25) a fronteira eficiente pode ser descrita como o melhor conjunto possível de carteiras, ou seja, todas as carteiras têm o mínimo nível de risco para dado nível de retorno.

Além disso, Sharpe fez outra suposição, se existe um ativo que sintetiza-se todos os ativos com risco existentes no mercado e, a partir dos pressupostos da fronteira eficiente, que é na fronteira que encontram-se as melhores carteiras que são eficientes e tem a melhor relação risco retorno. Considerando o investidor sendo avesso ao risco e primando pela diversificação, optaria por investir neste ativo, pois estaria diversificado. Porém a existência desse ativo é só teórica, na realidade a única classe de ativos que poderia ter tal semelhança, seria os índices de mercado, no Brasil é o Ibovespa e, nos EUA, seria o S & P-500. Assim, ficou denominado de portfólio de mercado a estes ativos.

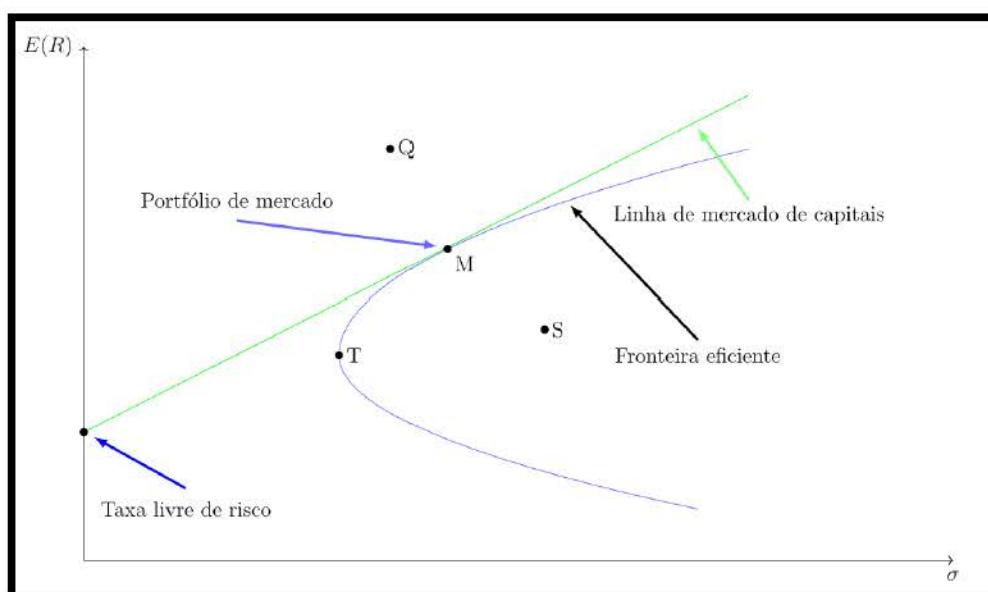
Na figura 10 encontra-se a interpretação geométrica, que ilustra as oportunidades que um indivíduo pode optar ao investir, podendo escolher somente ativos com risco, representado pela fronteira eficiente, que é a curva em azul. Entretanto, como no mercado não existe exclusivamente ativo com risco, temos no ponto sobre a ordenada a taxa livre de risco e, a reta que tem como origem a

taxa livre de risco até interceptar o ponto M, este segmento de reta possui uma diversificação, na porcentagem de que pode-se investir em ativos com risco e sem risco. Considera-se o plano cartesiano com as coordenadas x e y , representando o risco, e o retorno esperado respetivamente.

Além disso, na figura 10, ilustra também as oportunidade que o investidor pode optar dependendo de suas preferência e sua aversão ao risco. À esquerda do ponto M, representa-se composições com menor risco e aquelas que têm maior participação do ativo livre do risco. Assim, conforme se desloca para à esquerda aplicara um percentual maior no ativo livre de risco. E quando chegar no ponto que está sobre a ordenada ($E(r)$), aplicará cem por cento de sua poupança somente no ativo livre de risco.

Caso o indivíduo busque maiores retornos, se deslocara à direita do ponto M, nessa parte da linha encontra-se a seguinte operação: o investidor contratará um empréstimo para investir em ativos somente de risco, para que isso seja possível, deve existir um tipo de produto financeiro no qual seja possível contratar um valor na taxa de juros, e o investimento que permite isso é o contrato a termo, assim o investidor poderá aplicar no portfólio M, desta forma, o seu risco crescerá concomitantemente ao retorno.

FIGURA 10 - FRONTEIRA EFICIENTE E A LINHA DE MERCADO DE CAPITAIS



FONTE: FREITAS(2021).

Síntese da nomenclatura do estudo de fronteira eficiente:

- Para Freitas (2021, p.18) portfólios de variância mínima são chamados de portfólios de média-variância.
- A união de todos os portfólios média-variância é denominada de fronteira eficiente.
- Para Freitas (2021, p.18) adicionando o ativo livre de risco, a fronteira eficiente se torna uma linha reta no sistema de coordenadas retorno esperado/risco(desvio-padrão). Esta linha é chamada de linha de mercado de capitais.
- O ponto de tangência de acordo com Freitas (2021, p.18) na fronteira eficiente com somente ativos de risco e a linha de capitais de mercado é chamado portfólio tangente ou portfólio de mercado.

A fronteira eficiente sendo uma curva que contém carteiras com a melhor relação risco retorno, auxilia a encontrar a melhor carteira que se adequa ao perfil de risco do investidor, pois dentro dela está a mensuração destas carteiras. Assim a curva traz as melhores carteiras para diferentes perfis de risco. Segundo Freitas (2021, p.18) a grande maioria dos investidores está interessada em manter sempre o retorno desejado.

De acordo com Freitas (2021, p.19) pode-se dizer que o modelo de Markowitz, recomenda que o retorno esperado para um conjunto de ativos é a média ponderada dos retornos esperados para cada ativo individual. Em relação ao risco dos ativos não seria a média dos riscos dos ativos individuais, pois na formação e na escolha dos ativos levamos em consideração a variância individuais de cada ativo, ou seja, seria segundo Freitas (2021, p.19) “uma função das variâncias individuais de cada ativo e de uma parcela das covariâncias entre os ativos, calculado dois a dois”.

Um dos empecilhos da aplicação da teoria naquela época era a dificuldade dos cálculos necessários para a sua aplicação, assim, segundo Freitas (2021, p.19) levou Sharpe a desenvolver um modelo simplificado.

2.2.1.6 Índice Sharpe

O índice sharpe é uma forma de comparar carteira e selecionar as que possui melhor relação entre retorno e risco e segundo BRUM(2008, p.33) é um dos mais utilizados na avaliação de fundos de investimento, pois ele define de forma numérica a relação Risco X Retorno de uma carteira de ativos ou fundo de investimento. De acordo com VARGA(2001, p.229) formulado por Sharpe(1966), “o IS se encaixa na teoria de seleção de carteira, mais especificamente no modelo CAPM, apontando as carteiras ótimas na linha de mercado de capitais(LMC)”. E esse modelo difere do de Markowitz porque parte do princípio de que a volatilidade do ativo tem relação com o portfólio de mercado, o que em Markowitz é utilizado a covariância, que postula que ativos têm retornos correlacionados.

Sharpe traz o que denominou de índice beta, este sendo empregado no modelo de precificação de ativos, entretanto, pode ser adaptado para analisar apenas ativos, assim comparando o ativo com a taxa livre de risco, o índice beta segundo FREITAS (2021, p.19) utiliza-se a variação conjunta da rentabilidade do investimento com o mercado, calculando a covariância entre estes dois rendimentos, dividido pela variância do mercado. Segundo SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S.(2015, p. 88) o coeficiente β é uma medida do nível de risco sistemático ou não-diversificável presente no investimento, risco que é inerente ao mercado e não pode ser controlado pelo investidor.

De acordo com FREITAS (2021, p.19) e Blum(2008, p.33) em 1966, William F. Sharpe desenvolveu o que é hoje conhecido como índice sharpe. Segundo SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S.(2015, p.91) este índice fornece o quanto de retorno adicional se tem em uma carteira para cada risco adicional, comparando-se com ativo livre de risco, “medindo desta forma, remuneração obtida por unidade de exposição”. O índice mensura a comparação entre retornos,

De acordo com SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S.(2015, p.87) o índice expressa a relação entre retorno e o risco de um ativo específico e informa se o mesmo oferece rentabilidade compatível com o risco a que expõe o investidor. Ou seja, caso tenha escolhido outro ativo com menos risco em

comparação com um mais arriscado, assim há um desconto, o que mensura a opção de investimento, é mais rentável ou não, dada a existência de ativos livres de risco.

Segundo FREITAS (2021, p.19) para fazer essa comparação, o índice sharpe, baseia-se no retorno do ativo (R_i), no rendimento do investimento com a taxa livre de risco (R_f) que é a base da comparação e na volatilidade do ativo (σ_i) que se deseja analisar. Com essas variáveis pode-se calcular com a fórmula:

$$I_{Sharpe} = \frac{R_i - R_f}{\sigma_i}$$

Para analisar o índice sharpe proceder-se-á da seguinte forma, se há um valor alto no índice isso indica que o ativo compromete a superar o desempenho médio de outras aplicações correndo pouco risco. Entretanto, caso tenha um valor baixo, isso significa que o ativo tenha uma gestão passiva e para FREITAS (2021, p.19) pouco preocupada em fazer com que seus investidores correm menos risco.

Na época Sharpe fez uso de seu índice e adaptou ele para o modelo de precificação de ativos, no modelo é denominado de beta, entretanto segundo SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S.(2015, p.87) apesar de sua importância prática, a sua utilidade depende da correta estimação dos parâmetros a serem utilizados, como por exemplo, retorno esperado do mercado, retorno esperado do ativo livre de risco. Disso, o modelo matemático que faz uso dessas variáveis, é o Capital Asset Pricing Model(CAPM) em tradução o Modelo de Precificação de Ativos Financeiro, que também é conhecido como modelo unifatorial por conta do beta que é a única medida de risco que o modelo utiliza, que segundo SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S.(2015, p.87) além dos indicadores do modelo CAPM(Capital Asset Pricing Model), o β , que consiste em uma medida do nível de risco sistemático ou risco não-diversificável.

Para FREITAS (2021, p.19) este modelo busca calcular um equilíbrio entre o risco e a rentabilidade e, com isso, atribui uma precificação dos ativos com risco de uma carteira de investimentos. Ou seja, por conta do modelo relaciona a taxa livre de risco, adicionado a uma medida de risco que é o beta, e a diferença dos retornos

da taxa livre de risco e do portfólio de mercado. Portanto, ele reporta uma precificação de quando se ganhará se investir neste ativo, considerando que o portfólio de mercado é a representação do mercado.

O modelo também permite analisar e quantificar o valor de um projeto em processo produtivo. Pois o cálculo considera os riscos do investimento e relaciona com a parte livre de risco, ou aquela parte que possui um risco mais atenuado

$$E(R) = R_f + \beta (E(R_m) - R_f)$$

em que:

- $E(R)$: retorno esperado;
- R_f : taxa livre de juros livre de risco;
- β : Índice beta;
- $E(R_m)$: retorno do indicador de mercado.

Nesse modelo, busca-se encontrar o retorno esperado com a relação R_f que é a taxa de juros livre de risco que no caso do Brasil é a SELIC, para FREITAS (2021, p.19) relaciona a direção que um investimento toma conforme variações no mercado, ou seja, o risco do investimento comparado a variações na bovespa e o $E(R_m)$ é o retorno do indicador de mercado.

2.2.1.7 Modelo média variância

O modelo média variância é a abordagem básica para a construção de carteiras, segundo MARCOLIN(2015, p.12) o modelo *mean variance*(média variância) foi o trabalho pioneiro no campo da Teoria Moderna do Portfólio e recebeu esse nome pois utiliza-se o retorno esperado médio como medida de desempenho e a variância como medida de risco. De acordo com Santos, A. A. P., Tessari, C(2012, p.373) a suposição básica por trás desse modelo é a de que as preferências de um investidor podem ser representadas por uma função(função de utilidade) dos retornos esperados e da variância da carteira.

Para Santos (2010 apud Santos, A. A. P., Tessari, C., 2012, p.373) ressalta que a escolha entre o prêmio de risco desejado (retorno esperado acima do CDI) depende da tolerância do investidor ao nível de risco. Dependendo do investidor, caso seja menos avesso ao risco pode estar disposto a aceitar mais volatilidade em sua carteira com o fim de obter um maior retorno ou prêmio de risco, por outro lado investidores mais avessos ao risco aceitarão uma menor volatilidade mas penalizam o retorno esperado.

Assim a partir dos conceitos da seção anterior de variância e o conceito de média, é possível formular o modelo de Markowitz para a otimização, segue a formulação matemática do modelo, iniciando pelo retorno esperado de cada carteira, sendo dado pela seguinte equação:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_i) \quad (1.2)$$

em que :

- w_i — é o peso de cada ativo;
- $E(R_i)$ — retorno esperado de cada ativo.

Sujeito a condição,

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (1.3)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

Descrição acerca das equações, equação (1.2) apresenta o retorno esperado do portfólio, e segundo MARCOLIN (2015, p.13) podemos notar que o retorno esperado de uma carteira nada mais é do que uma média ponderada dos retornos individuais. A equação (1.3) esta indica a taxa de participação w_i de cada investimento que deve totalizar 100% do investimento, ou igual a 1. E por último, a equação (1.4) que impõe a não-negatividade ao conjunto de investimento w_i .

A variância da carteira pode ser escrita na seguinte formulação matemática:

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j \quad (1.5)$$

e a equação 1.5 calcula a variância total do portfólio.

Para FREITAS (2021, p.19) o problema de média-variância pode ser formulado como um problema de otimização não-linear, cujo objetivo é obter o valor mínimo de variância para determinado nível de retorno desejado. Assim, a equação (1.5) será a função a ser minimizada e a equação (1.2) será a restrição, fixado como retorno mínimo desejado por $E(R_0)$. Portanto temos as seguintes formulações em equações matemática:

$$\text{Minimizar} \quad V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j \quad (1.6)$$

$$\text{Sujeito a :} \quad \sum_{i=1}^N w_i E(R_i) \geq E(R_0) \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$$

Outro ponto a se considerar para conseguir efetivamente montar o modelo de otimização é, fazer agora maximização, fixado a função retorno esperado (1.2), como a função objeto, então maximiza-se o retorno esperado, e é óbvio que estará sujeitos a um nível máximo de risco e que estará disposto a ocorrer no caso o investidor. Logo a função (1.5) será a função de restrição de risco. Portanto, chegamos às seguintes formulações matemáticas das equações. Temos então

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{i=1}^N w_i E(R_i)$$

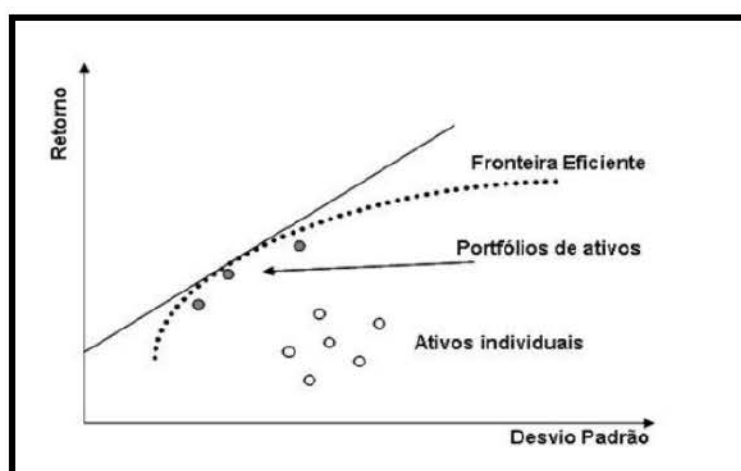
$$\text{Sujeito a :} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j \leq V$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1;$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$$

Resolvendo-se o problema diversas vezes, obtendo níveis de retorno esperado diferentes devido a taxa de participação de cada investimento, associando a cada nível de retorno obteremos a composição do portfólio de menor risco. E assim poderemos traçar uma curva, que tem em seus eixos o risco e retorno, a qual já foi denominado em seções anteriores e a fronteira eficiente, na figura 11.

FIGURA 11 - FRONTEIRA EFICIENTE.



FONTE: MARCOLIN (2015).

Assim o investidor poderá escolher qual carteira quiser, sempre calcando a decisão com base no risco-retorno desejável. Além disso, reparamos que o desempenho da carteira calcado nesses fundamentos é superior a proposta de individualização, segundo MARCOLIN (2015, p.15) devido a diversificação nos investimentos. Segundo Markowitz apud MARCOLIN (2015, p.15) quando dois ativos poucos relacionados compõem um portfólio obtém-se um risco menor do que a média ponderada dos riscos individuais, sendo em alguns casos menos que o do ativo de menor risco com um retorno maior que o deste ativo.

2.2.1.8 Modelo de precificação de ativos financeiros(CAPM)

O CAPM, de acordo com Araújo, E. A. T.; Oliveira, V. C.; Silva, W. A. C (2012, p.97) considera que, em situações de equilíbrio, a expectativa de retorno de

um ativo seria igual ao retorno de um ativo livre de risco, somado a um prêmio pelo risco assumido. Assim, conclui-se que no portfólio o investidor deve levar em consideração a precificação do ativo e do prêmio de risco. No decorrer desta seção dissertaremos acerca deste fato, primeiramente falar-se-á sobre as premissas, e assim por diante.

Todo modelo assume determinadas premissas, este não é diferente, de acordo com Assaf Neto(2008 apud SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S. 2015, p.88) :

- Aversão dos investidores ao risco;
- Decisões de investimento baseadas no retorno esperado e na volatilidade da carteira;
- Ausência de imposto e taxas;
- Grande eficiência informativa do mercado, de forma a prover as mesmas informações simultaneamente a todos os investidores;
- Investidores possuem expectativas homogêneas quanto ao retorno dos ativos;
- Existência de taxa de juros livre de risco.

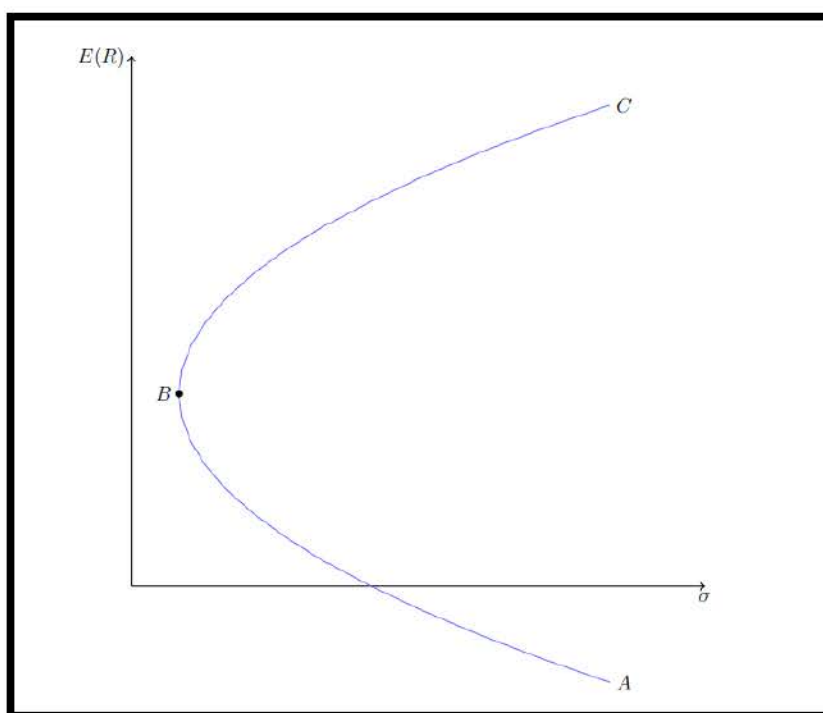
Copeland, Weston e Shastri(2005 apud SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S. (2015, p.88) “ destacam ainda como hipóteses assumidas pelo modelo a existência de um ativo livre de risco, onde investidores podem captar ou emprestar quantias ilimitadas à taxa livre de risco e por fim, que existe uma quantia fixa de ativos, sendo que todos são negociáveis e divisíveis”.

Atualmente há um mercado financeiro que possui ativos com e sem risco, o investidor pode construir carteiras que tenham ou não ativos livre de risco. Então a fronteira eficiente será, como afirma FREITAS:

em um portfólio onde não é notável a presença de ativos com e sem risco, a fronteira de cada investidor será levada em conta seus níveis de aversão ao risco, de maneira que cada investidor apresentará uma fronteira eficiente. (FREITAS (2021, p.19)).

Assim, na figura 12 ilustra-se a fronteira eficiente sem ativos livre de risco, representada pela curva BC, e o arco ABC é o conjunto de carteiras de variação mínima.

FIGURA 12 -FRONTEIRA EFICIENTE SEM ATIVOS LIVRE DE RISCO

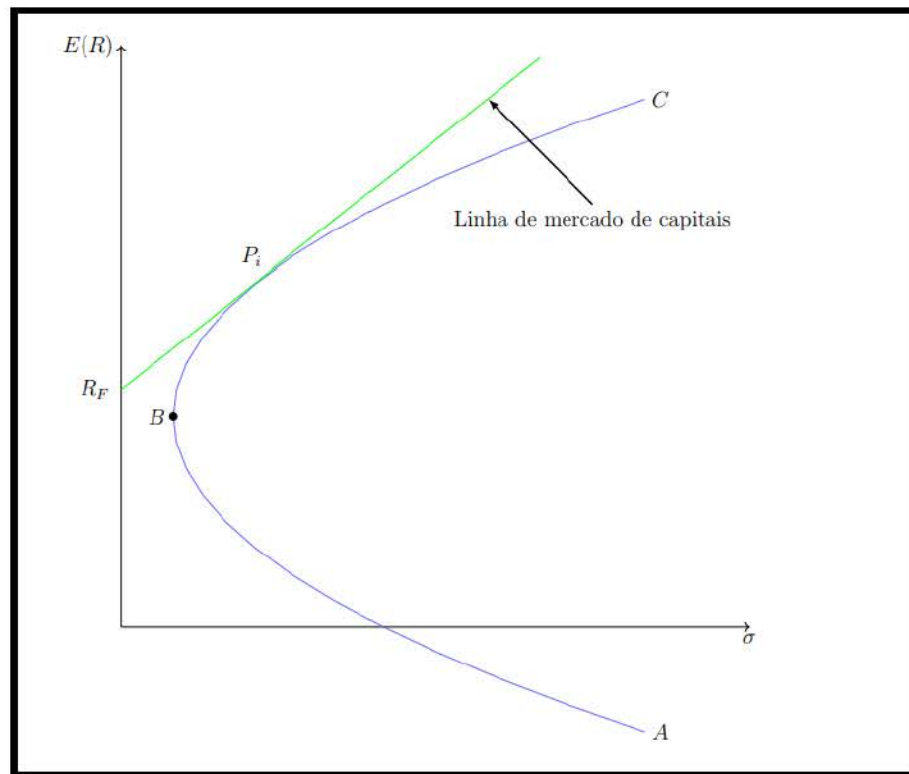


FONTE: FREITAS(2021).

No mercado financeiro há possibilidades de montar carteiras com ativos livres de risco. Como cada investidor possui um nível de aversão ao risco, logo havendo ativos que são classificados como livres de risco, o investidor poderá optar por colocar parcelas maiores de seu capital nesses ativos ao invés de alocar apenas em ativos com risco, claro, dependendo da preferência ao risco. Para FREITAS (2021, p.19) este portfólio encontra-se no ponto de tangência P_i entre a fronteira eficiente de ativos original e na reta que passa pelo retorno sem risco R_f (no eixo vertical) e pelo ponto de tangência P_i .

Na figura 13 pode ser visto P_i é portfólio de risco do investidor. Dependendo de cada investidor, fazem a combinação de ativos livres de risco e com risco que é representado pelo ponto P_i .

FIGURA 13 - FRONTEIRA EFICIENTE SEM ATIVOS DE RISCO



FONTE: FREITAS(2021).

Caso todos os investidores tenham ativos com taxas de retorno idênticas e as expectativas futuras em relação ao mercado. Assim terão a fronteira eficiente como o da FIGURA 13. Segundo FREITAS (2021, p.19) o portfólio de ativos de risco (P_i) de qualquer investidor será idêntico ao portfólio de ativos de risco de qualquer outro investidor. Neste caso, se todos os investidores mantêm o mesmo portfólio de risco, então é o portfólio de mercado M ou também denominada de carteira de mercado M.

A reta na FIGURA 13 se denomina de linha de mercado de capitais. Isto representa que em algum ponto ao longo da reta investidores acabaram tendo uma carteira, e também, todas as carteiras eficientes segundo FREITAS (2021, p.22) estariam ao longo da linha de mercado de capitais.

Logo, podemos definir a função do Modelo de Precificação de Ativos (CAPM), que é:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i (E(R_m) - R_f)$$

em que :

- $E(R_i)$ - retorno esperado;
- R_f - retorno do ativo livre de risco;
- $E(R_m)$ - retorno do indicador de mercado;
- β_i - risco sistemático ou coeficiente de volatilidade do ativo em relação ao mercado.

O coeficiente β segundo SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S. (2015, p.88) revela o grau de influência das variações globais do mercado no desempenho de um ativo específico. Partindo-se de uma premissa feita por Sharpe(1964), se todos os investidores mantêm o mesmo portfólio; e se este portfólio é uma representação de todos os ativos de risco e livres de risco, é denominado de portfólio de mercado, porém é uma conclusão teórica. Na realidade, um ativo similar que poderá ser usado como carteira de mercado, no Brasil, é o índice Ibovespa. Outro ponto para se considerar um portfólio de mercado seria a de que os investidores tendo as mesmas esperanças em relação a esse ativo, podendo ser um índice de mercado, e manterem ele em suas carteiras. Logo esse ativo poderá ser considerado um portfólio de mercado, além disso, ao adquirir ele o investidor estará diversificado, pois ele é uma síntese dos ativos existente no mercado.

Na subseção fronteira eficiente e linha de capitais há uma explicação mais acurada, a partir daqueles fatos erigiu-se o modelo. Aqui ater-se-á a fazer a ponte entre a descrição daquela subseção e explanar o modelo. Portanto, Sharpe delimitou a elaboração de carteiras, pois, é sabido que todas as carteiras de ativos com e sem risco, menos aquelas que são eficientes, serão encontradas abaixo da linha de mercado de capitais. Assim, para encontrar a carteira eficiente e que mescle ativos com e sem risco, pode ser sintetizado no seguinte teorema.

Teorema 1.1. Existe um único valor P_i de ativos tal que qualquer portfólio eficiente pode ser construído como uma combinação do valor P_i e do ativo livre de risco.

Demonstração:

Consideremos um ponto qualquer na região eficiente, construa uma reta entre o ativo livre de risco e aquele ponto. Denota-se o ângulo entre a linha traçada e o eixo horizontal por θ .

Então, para qualquer portfólio M de ativos de risco, a tangente do ângulo θ é dada por:

$$\tan \theta = \frac{\overline{R}_M - R_f}{\sigma_M}$$

Onde :

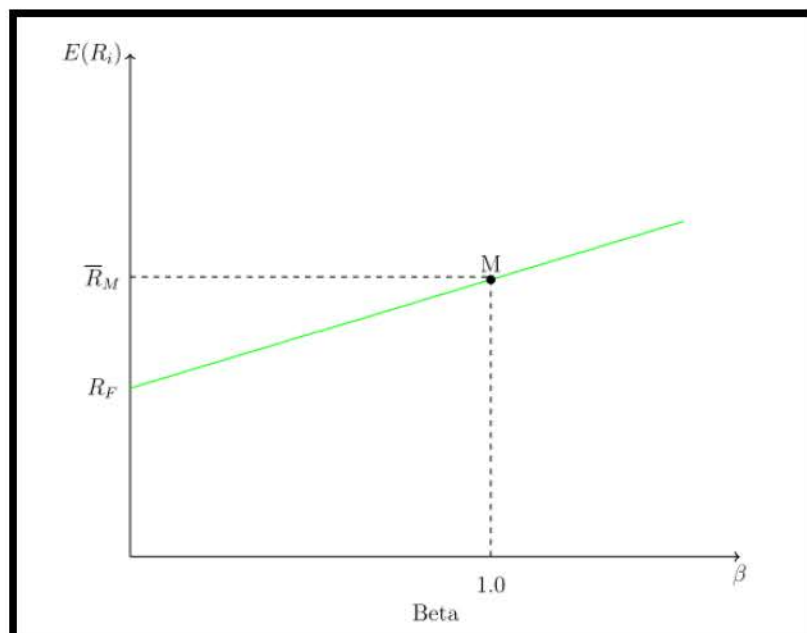
$\overline{R}_M$ - retorno médio esperado do portfólio M;

R_f - retorno esperado do ativo livre de risco;

σ_M - desvio padrão do portfólio M.

A representação gráfica disto, é possível na figura 14, nela podemos ver a relação linear entre β e o retorno.

FIGURA 14 - RELAÇÃO ENTRE O RETORNO ESPERADO E O BETA



FONTE: FREITAS(2021).

Além disso, há as propriedades do modelo, segundo Alcântara(1981, p.62) quando $\beta = 1$, isso significa que há uma correlação perfeita entre os retorno da ação e os retornos do mercado como um todo. Segundo o autor quando $\beta > 1$ o ativo pode ser considerado agressivo, pois, quando o mercado fizer uma performance de 10%, o ativo em questão performará mais que 10%. Por outro lado, se o $\beta < 1$, de acordo com o autor é considerado defensivo, ou seja, se há um ativo com um $\beta = 0.6$, é o mercado sofre uma baixa de 10%, o ativo irá sofrer uma baixa de aproximadamente de 6% e se for uma alta, apenas uma alta de 6%.

Portando, o CAPM segundo FREITAS (2021, p.23) diz que o retorno é igual à taxa sem risco, acrescido de um prêmio pelo risco de se investir neste ativo, de modo que se observa uma relação linear positiva entre o risco sistemático e a rentabilidade esperada.

3 MATERIAIS

O objetivo deste capítulo é descrever os materiais que foram utilizados no próximo capítulo, ou seja, encontram-se todas as ferramentas e uma descrição de cada uma delas.

3.1 MATERIAIS

O Google Colaboratory (google colab), é um ambiente de desenvolvimento Python executado no navegador usando o Google Cloud que permite ler, desenvolver e rodar códigos que agrupam células de códigos, chamados de notebooks, compartilhá-los com outros programadores, fazer modificações e manter salvo online.(FREITAS, 2021, p.05).

Além disso, outra grande facilidade é a possibilidade de processar dados gratuitamente, pois, a execução do software, onde escreve-se os códigos, por ser em uma nuvem de computadores do Google, denominada de Google Cloud. Segundo Freitas

O Google colab é hospedado pelo Jupyter Notebook, um software de código aberto que também disponibiliza um ambiente online para a utilização de notebooks e é quem possibilita o modo de como os códigos, as anotações e as marcações são organizadas e dispostas no colab. FREITAS (2021, p.05).

A principal diferença entre o colab e o Jupyter é que com o colab, não há a necessidade de usar o próprio laptop, o que em muitas vezes é limitado pela configuração do sistema operacional, o que não ocorre no colab. As vantagens que pode ser enunciadas a cerca do colab são, de acordo com DA SILVA(2020, p.69):

1. Suporte para linguagem Python;
2. Aceleração de GPU grátis;
3. Bibliotecas pré-instaladas: todas as principais bibliotecas Python, como TensorFlow, o Scikit-learn, o Matplotlib, entre muitas outras, estão pré-instaladas e prontas para serem importadas;
4. Construído com base no Jupyter Notebook;
5. Recursos de colaboração(funciona com uma equipe igual ao Google Docs): permite que os desenvolvedores usem e compartilhem o

Jupyter notebook entre si sem precisar baixar, instalar ou executar qualquer coisa que não seja um navegador;

6. Suporte a comandos bash;

7. Os notebooks do Google Colab são armazenados no drive.

Para FREITAS (2021, p.05) o Google colab foi construído com o objetivo de incentivar a pesquisa e o estudo de tecnologias voltadas à inteligência artificial, Machine Learning e ciências de dados.

O google colab pode ser facilmente acessado, para isso é necessário possuir uma conta no Google e acesso a internet, e acessar no seguinte endereço do navegador :

https://colab.research.google.com/?utm_source=scs-index#scrollTo=GJBs_flRovLc,

logo em seguida que abrir a página, será possível visualizar um guia com algumas informações sobre a funcionalidade do Google Colab, segue na figura 15.

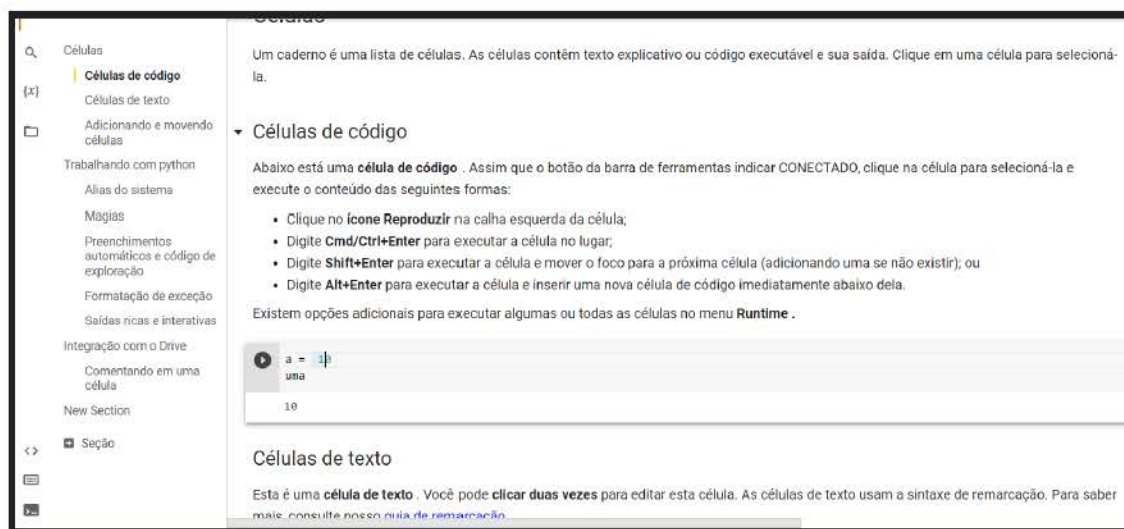
FIGURA 15 - VISÃO GERAL DA PÁGINA DA WEB DO GOOGLE COLAB



FONTE: elaborado pelo autor(2022).

De acordo com DA SILVA(2020, p.69) uma particularidade do colab é o mecanismo de dividir blocos de texto e de código no mesmo arquivo. Mais uma funcionalidade é a de fazer comentários no código e também a compilação do código que por ser modularizada ou separada, ou seja, gera uma clareza e organização, na figura 16 é a visão geral do Google Colab, uma célula com texto e outra com código para execução.

FIGURA 16 - VISÃO GERAL DO GOOGLE COLAB



FONTE: elaborado pelo autor(2022).

Segundo FREITAS(2021, p.05) no colab é possível acessar bibliotecas pré-instaladas, com isso reduz o tempo de importação e facilita o aproveitamento de recursos. No colab há as seguintes bibliotecas instaladas: o Tensor Flow, o Scikit-learn, o Matplotlib, Numpy, Pandas, etc. Nesta monografia foram requeridas as seguintes bibliotecas para a implementação das aplicações: Pandas, numpy, matplotlib, seaborn, plotly.express.

Além do Google Colab, também foi usado o Yahoo Finanças, o objetivo foi conseguir acesso aos dados dos históricos das ações, o que pode ser feito com uma integração entre o colab e o Yahoo finanças disponibilizada em : https://colab.research.google.com/drive/1Nmfh0XLQXc_yH_CQLEed8GZQvyaRv9P.

Nas próxima seção os materiais descritos aqui, serão utilizados para apresentar na aplicação dos modelos, como o google colab que foi a ferramenta escolhida para a implementação do modelo média variância.

4 APLICAÇÃO DOS MODELOS

Nas duas primeiras seções do capítulo abordar-se-á o modelo Média-Variância de Markowitz, na primeira seção, será feita a implementação prática do modelo, para mostrar a fronteira eficiente. Na segunda aplicação será utilizado uma metodologia para auxiliar na seleção de empresas para compor a carteira de investimento. E a mesma será comparada com o índice BOVA11 e também com uma aplicação em renda fixa e uma carteira aleatória(supondo que um investidor tenha escolhido qualquer taxa de participação), a fim de demonstrar o funcionamento do modelo e que pode auxiliar na escolha das melhores taxas de participação possível. Na seção do modelo de precificação de ativos, o principal motivo é precificar o nosso risco e quantificar o retorno com o mercado da carteira.

4.1 APLICAÇÃO EM UM CENÁRIO COM 2 ATIVOS

Um dos pontos iniciais desta aplicação foi a utilização dos dados históricos dos ativos, pois a partir desses dados, são utilizados para estimar os retornos e riscos esperados, fazendo com que atenuem-se a subjetividade e a dificuldade em fazer-se estas previsões. Partindo do pressuposto de que dados passados são relevantes na determinação dos futuros. Nesta aplicação foi utilizado dados históricos de ações de duas empresas de capital aberto que estão registradas na Bolsa de Valores do Brasil(B3), os dados foram selecionados e adquiridos da base de dados do google finance as análises foram feitas diariamente, no período de um ano com início em 02 de janeiro de 2020 a 29 de dezembro de 2020.

A Fronteira Eficiente de Markowitz entre dois ativos foi elaborada através do editor de planilhas do Libreoffice Calc, em que umas das planilhas foi armazenado os dados referentes às cotações dos ativos do Banco do Brasil SA (BBAS3) e da Vale S.A (Vale3). Para a elaboração desta aplicação seguimos os seguintes passos:

- a) Usamos a planilha do google planilhas com a seguinte função para extrair dados do google finance (`=GOOGLEFINANCE (B3; "price"; "2/1/2020"; "31/12/2020"; "DAILY")`);

- b) Montados em outra planilha(aba) uma base com os retornos usamos a seguinte equação para calcular os retornos $R_i = \frac{\text{cotação recente}}{\text{cotação dia anterior}} - 1$, como neste exemplo : $\frac{53,71}{53,80} - 1 = -0,17\%$ em que o R\$: 53,71 é a cotação do dia 03 de janeiro de 2020 e a cotação R\$: 53,80 é do dia 02 de janeiro de 2020, do ativo Banco do Brasil S.A.
- c) Fazemos o download da planilha e abrindo-a no Libreoffice;
- d) Calculou-se a média dos retornos diários, a variância dos retornos, o desvio padrão dos retornos e a covariância e a correlação entre os ativos.

O retorno do portfólio diário foram calculados com uma taxa de participação de 50% de cada ativo no período analisado, na tabela 1 encontra-se o retorno do ativo BBAS3 e do ativo VALE3 e do portfólio, os W_a e W_b são as respectivas taxas de participação de cada ativo.

TABELA 1 - RETORNO DO ATIVO E DO PORTFÓLIO

BBAS3(BANCO DO BRASIL S.A.)	VALE3(VALE S.A.)	Portfólio		W_a 50,00%	W_b 50,00%
-0,17%	-0,74%	-0,45%			
-1,32%	-0,59%	-0,96%			
-0,75%	0,73%	-0,01%			
-0,91%	0,02%	-0,45%			
-2,03%	-1,31%	-1,67%			
-2,35%	0,11%	-1,12%			
1,12%	3,64%	2,38%			
-0,54%	0,61%	0,04%			
-1,83%	-0,32%	-1,08%			
0,45%	-0,52%	-0,04%			
1,35%	3,32%	2,34%			
-0,64%	0,63%	0,00%			
-2,89%	-2,32%	-2,61%			
0,79%	0,48%	0,63%			
5,62%	-1,42%	2,10%			
-1,32%	-3,06%	-2,19%			
-0,98%	-6,12%	-3,55%			
0,82%	1,37%	1,09%			
-2,46%	-0,88%	-1,67%			
0,69%	1,48%	1,08%			
-2,53%	-2,39%	-2,46%			
0,49%	1,27%	0,88%			
-1,09%	2,67%	0,79%			

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Na tabela 2, encontram-se os dados estatísticos necessários para a elaboração desta aplicação, e para traçar a fronteira eficiente. Logo, foi calculado as seguintes estatísticas: a média dos retornos dos ativos, a variância dos retornos, o desvio padrão dos retornos, a covariância entre os retornos e a correlação.

Para calcular a variância do portfólio, usar-se-á a seguinte equação:

$$\sigma_c^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2(w_A w_B) \sigma_{A,B}$$

em que os sub índices são:

c = carteira ou portfólio;

A = ativo BBAS3;

B = ativo Vale3;

σ_c^2 = variância do portfólio/carteira;

$\sigma_{A,B}$ = covariância entre A e B.

TABELA 2 - DADOS ESTATÍSTICOS DOS DOIS ATIVOS E DO PORTFÓLIO

	BBAS3(BANCO DO BRASIL SA)	VALE3(VALE S.A.)	Portfólio
Média	-0,06%	0,25%	0,10%
Variância	0,15%	0,12%	0,11%
Desvio Padrão	3,92%	3,49%	3,34%
Covariância	0,09%		
Correlação	62,67%		

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Para construir o gráfico da fronteira eficiente, foram feitas variações na taxa de participação de cada ativo de 1% em 1%, posteriormente, foi calculado a média, a variância e o desvio padrão, porém agora não isolados, mas em suas respectivas porcentagens em cada carteira, na tabela 3, constam os valores da média, da variância e do desvio padrão, são representados em suas respectivas colunas.

TABELA 3 - RETORNO DO ATIVO E DO PORTFÓLIO

Variação na taxa de participação de cada ativo		Média	Variância	Risco
BBAS3	VALE3	Média	Variância	Desvio Padrão
0,00%	100,00%	0,253%	0,0012209	3,494%
1,00%	99,00%	0,250%	0,0012137	3,484%
2,00%	98,00%	0,247%	0,0012068	3,474%
3,00%	97,00%	0,244%	0,0012001	3,464%
4,00%	96,00%	0,240%	0,0011936	3,455%
5,00%	95,00%	0,237%	0,0011872	3,446%
6,00%	94,00%	0,234%	0,0011811	3,437%
7,00%	93,00%	0,231%	0,0011752	3,428%
8,00%	92,00%	0,228%	0,0011696	3,420%
9,00%	91,00%	0,225%	0,0011641	3,412%
10,00%	90,00%	0,222%	0,0011588	3,404%
11,00%	89,00%	0,219%	0,0011538	3,397%
12,00%	88,00%	0,216%	0,0011489	3,390%
13,00%	87,00%	0,213%	0,0011443	3,383%
14,00%	86,00%	0,210%	0,0011398	3,376%
15,00%	85,00%	0,207%	0,0011356	3,370%
16,00%	84,00%	0,203%	0,0011316	3,364%
17,00%	83,00%	0,200%	0,0011278	3,358%
18,00%	82,00%	0,197%	0,0011242	3,353%
19,00%	81,00%	0,194%	0,0011208	3,348%
20,00%	80,00%	0,191%	0,0011176	3,343%
21,00%	79,00%	0,188%	0,0011146	3,339%
22,00%	78,00%	0,185%	0,0011118	3,334%
23,00%	77,00%	0,182%	0,0011093	3,331%

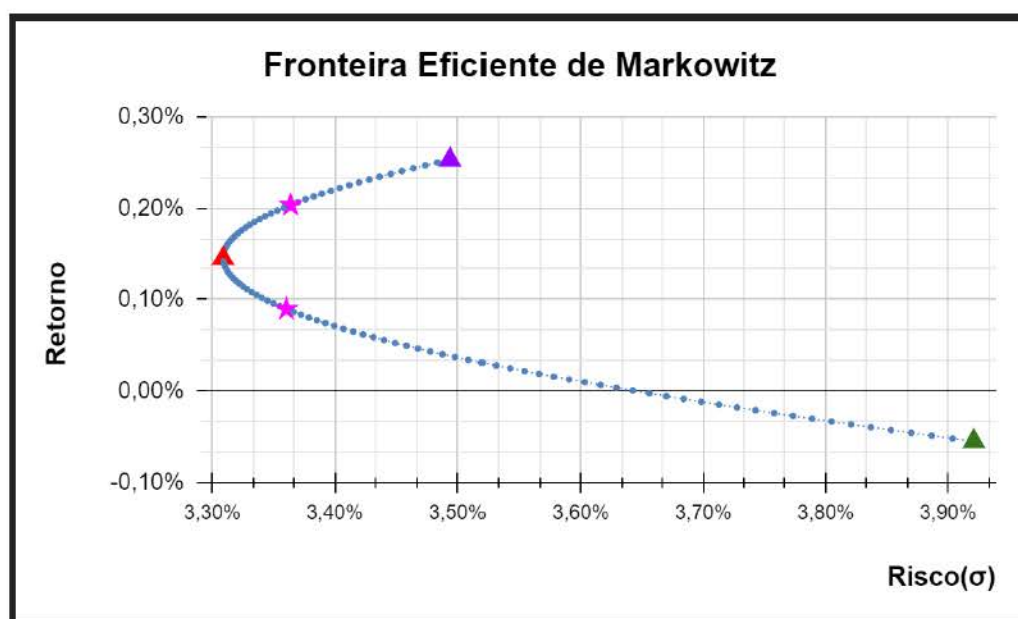
FONTE: elaborado pelo autor (2022).

A figura 17, é o gráfico gerado a partir da TABELA 3, em que temos a Fronteira Eficiente de Markowitz, no eixo x é risco e no eixo y é o retorno esperado, observa-se que no ponto representado pelo triângulo roxo é o ativo VALE3, supondo que escolhe-se investir 100% do capital neste ativo, portanto, teria um retorno diário esperado de 0,25% com um risco de 3,49%, ou seja, temos um retorno maior, mas estamos sujeitos a absorver um risco maior em seus retorno, por outro lado, se optasse por investir 100% do capital no ativo que é identificado pelo triângulo verde, que é a BBAS3, teria um retorno de -0,055% com um risco de 3,92%, ou seja, se aplicar o dinheiro somente neste ativo terá um retorno negativo para o risco que estará correndo.

Na figura 17, a fronteira eficiente de Markowitz, teoricamente é a que começa no ponto do triângulo vermelho e estende-se até o triângulo roxo. Pois, a curva que encontra-se do ponto que tem triângulo vermelho até o triângulo verde, pode ser descartada, pois ao longo dela encontram-se valores de retorno negativo e o risco é crescente, além disso, segue a seguinte comparação, nos pontos

representado pelas estrelas, dado um mesmo nível de risco encontram-se um retorno esperado melhor.

FIGURA 17 - FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ.



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

O portfólio de risco mínimo é aquele que consegue minimizar o risco e gerar um retorno maior dentre as combinações das taxas de participação o portfólio indicado seria o triângulo em vermelho que possui as seguintes taxas de participação: 36% do ativo BBAS3 e 64% do ativo Vale3, com um retorno esperado de 0,142% e com um risco de 3,309%, ou seja, posso ter esta rentabilidade de 0,142% futura, porém estarei disposto a absorver a oscilação dos retornos em 3,309% ante a média que é de 0,142%, como os valores são diários, para comparar em uma perspectiva anual, anualizar-se-a o retorno e o risco, portanto, multiplica-se-á por 246(é a média de dias que bolsa de valores trabalha ao longo do ano).

Portanto, ao anualizar os dados conseguirá visualizar o possível retorno e risco anual, no caso da aplicação em um cenário com dois ativos, dado a média do retorno diário, ao multiplicar por 246, chega-se que anualmente espera-se ter uma

performance de 34,42 % de retorno e o risco será de 51.90% em seus retornos ante a média.

4.2 APLICAÇÃO EM UM CENÁRIO COM 7 ATIVOS

A partir da aplicação anterior, com dois ativos, ao adicionar ativos encontra-se uma dificuldade em escolher as respectivas taxas de participação, ou seja, a escolha tornar-se-á paulatinamente mais custosa, pois a quantidade de cálculos necessários são maiores.

Assim, buscando-se por uma maneira de facilitar os cálculos, foi selecionado o *Google Collaboratory*. Esta ferramenta permite escrever códigos em python no navegador e também, não há necessidade de ter ele pré-instalado em sua máquina de trabalho, então a implementação do modelo média - variância torna-se mais prático.

Considerando o cenário com 7 ativos, usar-se-á para a escolha dos ativos a estratégia de investimento de Luiz Barsi, o maior investidor pessoa física do Brasil, que faz uso da análise fundamentalista para examinar empresas, ou seja, analisa o histórico de dividendos e a saúde financeira, a perspectiva do setor e também o comprometimento do gestor. De acordo com Freitas(2021, p.27) os principais pontos para a escolha de uma boa ação são:

- Setores cujos produtos ou serviços são consumidos por longos períodos de tempo, que são considerados setores perenes dentre eles estão o setor bancário, transmissão e distribuição elétrica[...];
- Empresas lucrativas e que tenham boa gestão;
- Empresas que distribuem dividendos regularmente.

Para escolher as ações, de acordo com Barsi que sintetizou em um acrônimo 'BEST', que simplifica os setores que são tido por Barsi, setores perenes, ou seja, os produtos/serviços prestados serão sempre demandados a longo prazo. O acrônimo significa, a letra "B" são os bancos que encontram-se dentro do setor financeiro, "E" é o setor de energia, o "S" são dois setores o de saneamento e seguros e, por fim, o "T" que é o setor de telecomunicações.

Para organizar e auxiliar na escolha das empresas, foi utilizado o google sheets(planilhas), sendo a base de dados para selecionar as melhores empresas. A partir dos indicadores: patrimônio líquido, margem líquida e dividendos. O levantamento foi feito no período da última década, ou seja, de 2011 a 2021 e, também foi incluído o ano de 2022, mas dependendo da empresa, algumas apenas fizeram o lançamento da data do pagamento de proventos(dividendo), assim optou-se em analisar o ano fechado de empresas que fizeram isto.

Iniciando pelo sub setor, o bancário, encontram-se 50 ticker, o ticker a saber, são o nome dos códigos das ações, conforme apareceu na busca na base de dados da status invest, selecionou-se, a saber, na tabela 4 os ativos e também encontram-se, o patrimônio líquido de cada ativo e a média da margem líquida, que são.

TABELA 4 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA

TICKER	Patrimonio liquido	Margem liquida
Bradesco BBDC4	153,777.736 B	13,93%
Banco Itau unibanco ITUB4	152,866,000 B	13,38%
Banco do Brasil BBAS3	148,305,951 B	10,90%
SANTANDER SANB4	105,976.958 B	14,88%
ITAUSA ITSA4	65,555B	
BTG BPAC11	39,299,530B	

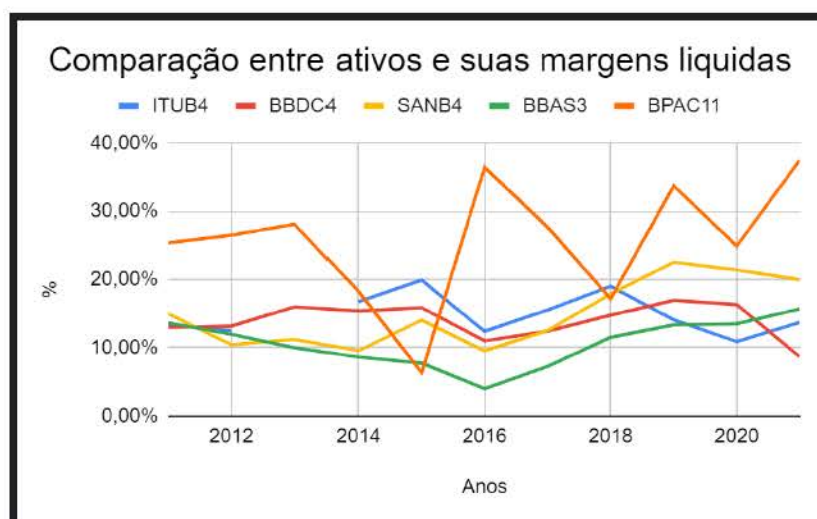
FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Outro ponto a se ressaltar na estratégia do Barsi é que ele opta por empresas líderes no setor, logo para definir esta característica de ser líder, considerando que a empresa tem um grande capital líquido, o que demonstra que ela ao longo de sua história de atuação conseguiu entre outras se sobressair e ganhar espaço e o patrimônio líquido é a representação de ter sobressaído ao longo das décadas e ter se consolidado, ou seja, é uma empresa consolidada no setor.

Assim partimos para o próximo indicador a margem líquida, coletada nos últimos 10 anos, presente no gráfico 1. Analisando o BTG(BPAC 11), há uma grande oscilação em sua margem líquida e a ITSA4 saiu fora da escala do gráfico,

tendo valores de 200%, já os demais, ficam em um mesmo nível, entre 10% a 20%, demonstrando linearidade e tendência para manter lucros no longo prazo.

GRÁFICO 1 - COMPARATIVO DAS MARGENS LÍQUIDAS DOS ÚLTIMOS 10 ANOS



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

No gráfico 2, é a média de pagamentos dos dividendos nos últimos 10 anos, neste caso, o Banco do Brasil na média, pagou R \$1,72 por ação ao ano para cada detentor de suas ações.

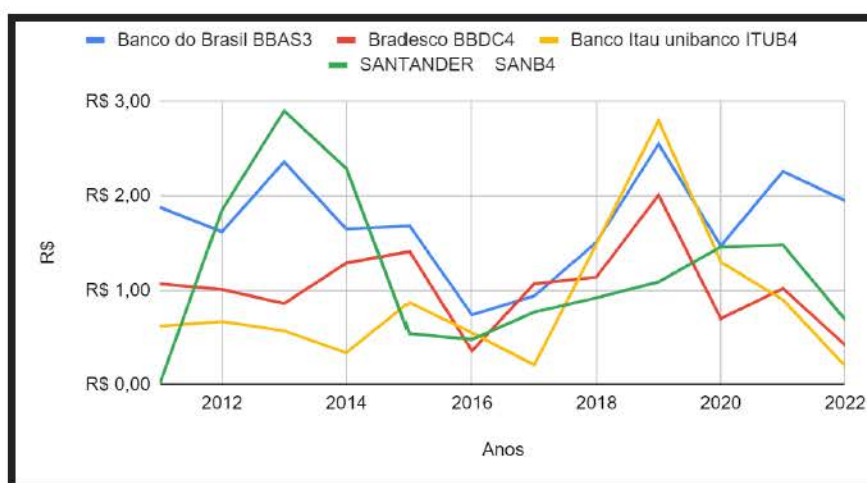
GRÁFICO 2 - A MÉDIA DE DIVIDENDO QUE CADA EMPRESA PAGOU NOS ÚLTIMOS 10 ANOS



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

No gráfico 3, encontra-se a oscilação do valor de pagamento do dividendo que cada banco fez entre os anos de 2011 a 2022. Há uma oscilação anualmente variando entre R\$ 1,00 real a R\$ 3,00 reais, porém o setor é perene em efetuar o pagamento anualmente mesmo havendo uma rise em meados de 2016.

GRÁFICO 3 - DIVIDENDO PAGO TODO ANO



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Assim, desse setor foram selecionados 2 ativos, o Banco do Brasil (BBAS3) e Banco Itaú Unibanco (ITUB4).

Continuando, no setor de energia, foi selecionado os seguintes ativos presente na base de dados do status invest, na tabela 5 a saber, são os tickers selecionados.

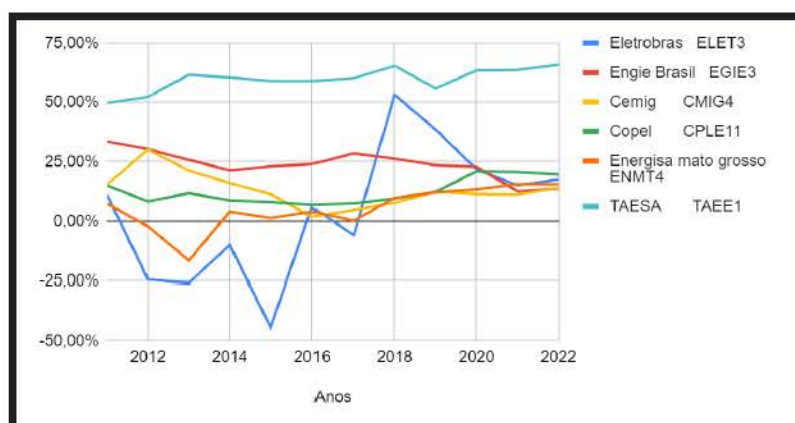
TABELA 5 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA

TICKER	Patrimonio liquido
ELET3	78,816,099 B
EGIE3	8,359,300 B
CMIG4	20,666,993 B
CPL11	22,175,235 B
ENMT4	3,014,688 B
TAEE1	7,244,803 B

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao patrimônio líquido dessas empresas, estão iguais, exceto a Eletrobras (ELET3), que possui ativos bem acima das demais. Porém, quando analisa-se as margens líquidas ao longo desses últimos 10 anos, a ELET3 e a ENMT4 em alguns anos contraíram prejuízos. No gráfico 4 consta a variação da margem líquida ao decorrer de cada ano nos últimos 10 anos.

GRÁFICO 4 - MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA

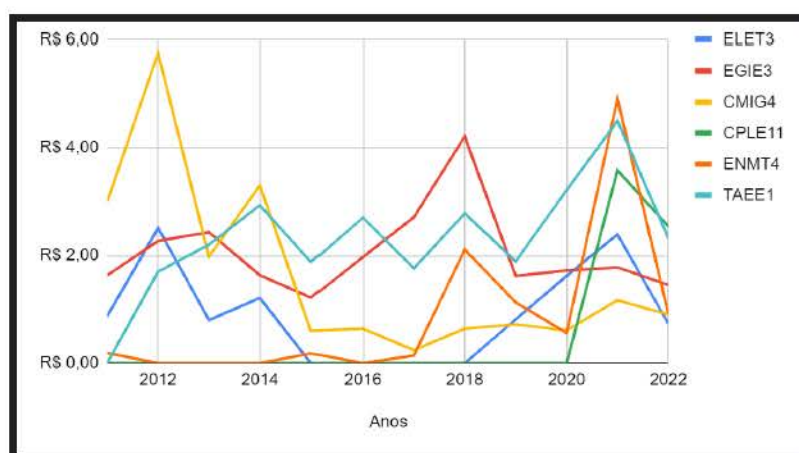


FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Quando analisa-se o pagamento dos proventos na última década, algumas empresas, como a CPL11 identificou um pagamento prematuro de proventos, que

iniciou-se há apenas 3 anos. A ELET3 nos anos de prejuízo não conseguiu honrar com o pagamento, igualmente a ENMT 4. No gráfico 5, encontram-se os pagamentos de proventos feitos nos últimos 10 anos.

GRÁFICO 5 - DIVIDENDOS NA ÚLTIMA DÉCADA



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Desse setor foi escolhida a EGIE 3, por sua perenidade no setor, tanto em margem líquida como em pagamento de dividendo anualmente.

No setor de saneamento, apareceram 10 tickers, selecionado, apenas 4 empresas. Presente na tabela 6.

TABELA 6 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA

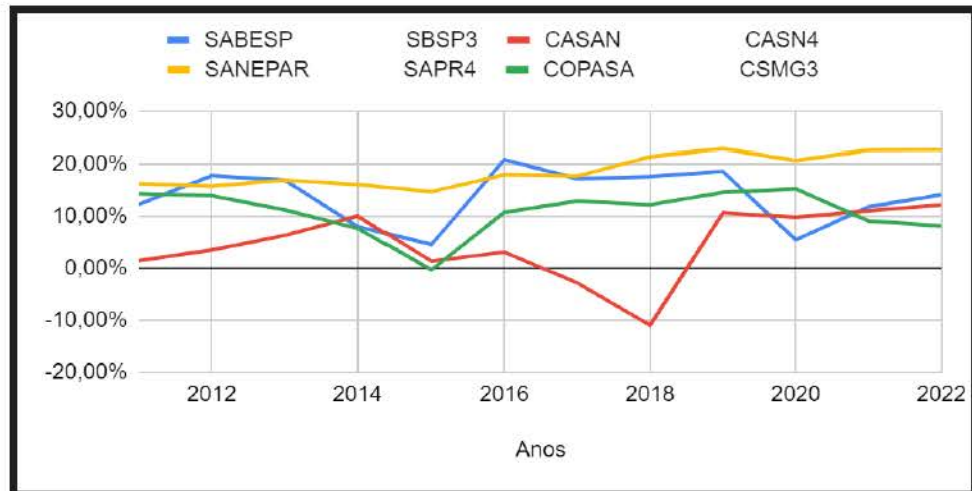
TICKER		Patrimonio liquido	
SABESP	SBSP3	25,907,398	B
CASAN	CASN4	1,733,183	B
SANEPAR	SAPR11	8,118,286	B
COPASA	CSMG3	6,893,609	B

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

A SABESP é a que tem maior patrimônio líquido, além disso, quando analisa-se a margem líquida, a CASAN apresenta margem líquida negativa em um

ano, nesse período dos últimos 10 anos, a CASAN é a linha vermelha, presente no gráfico 6.

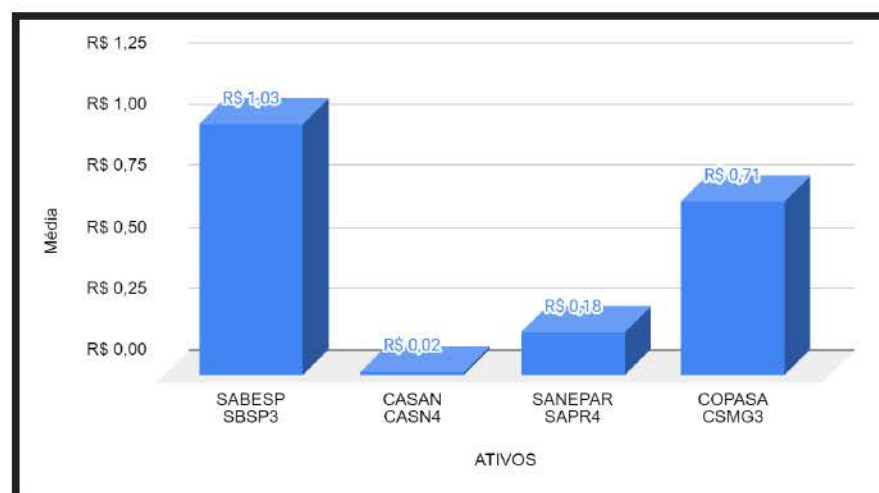
GRÁFICO 6 - MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Seguindo a estratégia de Barsi, por ter empresas perenes, a CASAN estaria de fora, devido à margem líquida em 2018. Porém em relação aos dividendos, a SABESP se destaca neste setor. Quando analisa-se a média de dividendos que estas empresas pagaram aos seus acionistas, a SABESP, como exemplo, em média pagou R \$1,03 por ação, ao ano, entretanto há uma variação ao longo da década, porém em média girou em torno dos seguintes valores, presentes no gráfico 7.

GRÁFICO 7 - MÉDIA DE DIVIDENDO PAGOS NA ÚLTIMA DÉCADA



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Nesse setor, optou-se por escolher a SABESP para a carteira. No setor de seguros foram encontradas cerca de 15 tickers, dos quais escolheram-se 4 empresas para comparar e selecionar ao menos uma delas, toda a escolha a priori iniciou pelo patrimônio líquido, escolhendo aquelas empresas que possuísem maior patrimônio líquido. Na tabela 7, encontram-se as empresas com seus respectivos patrimônios líquidos.

TABELA 7 - ATIVOS SELECIONADOS PARA COMPOR A CARTEIRA

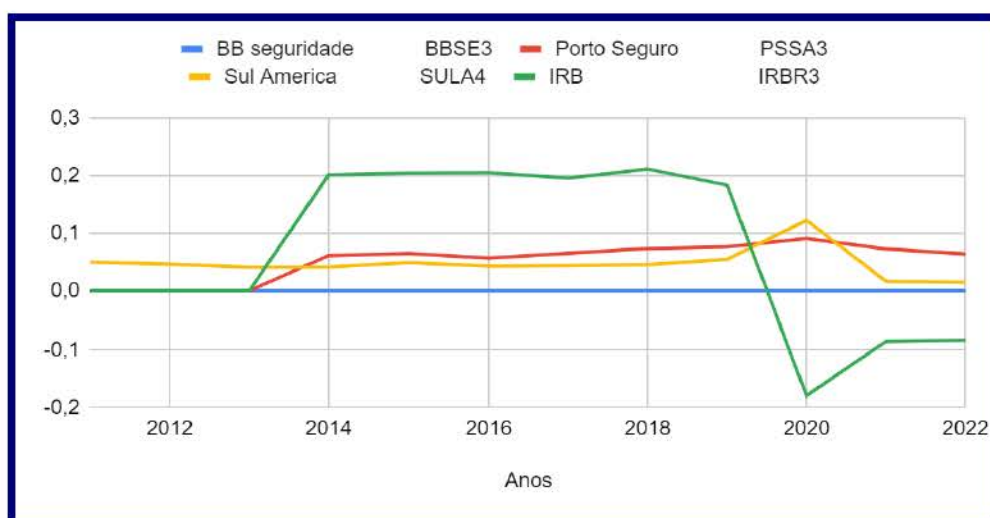
TICKER		Patrimonio liquido
BB seguridade	BBSE3	8,445,015 B
Porto Seguro	PSSA3	9,296,642 B
Sul Amaerica	SULA4	8,150,848 B
IRB	IRBR3	3,693,410 B

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Analisando a tabela 7, as empresas em termos de patrimônio líquido, são bem igualitárias. Entretanto, em relação às margens líquidas, uma delas é negativa, a IRB, já a BB Seguridade, não encontra-se na base do status invest dados sobre sua margem líquida.

No gráfico 8 há as margens líquidas da última década dessas empresas, a IRB está negativa, a Sul America e a Porto Seguro são perenes, já em relação a BB Seguridade, devido a falta de dados na base, não foi possível comparar.

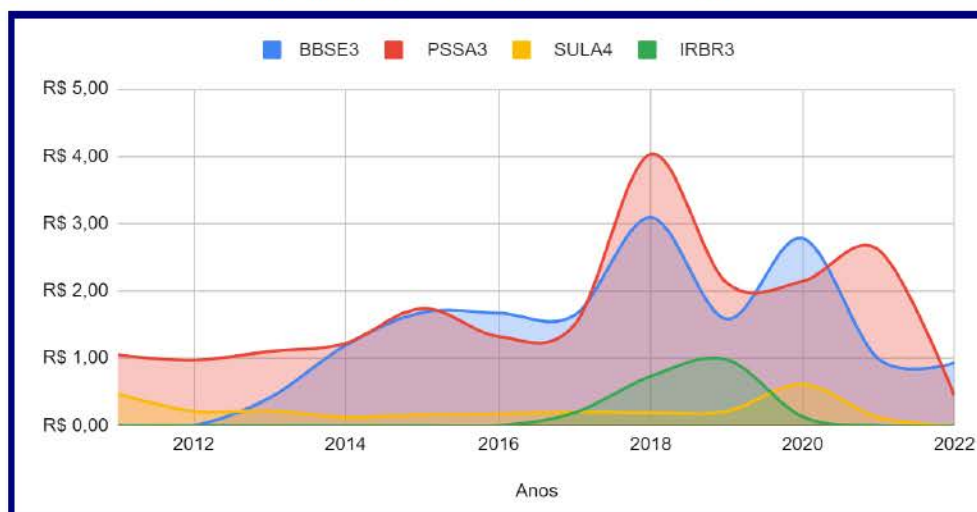
GRÁFICO 8 - MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Já em relação aos dividendos pagos, a BB Seguridade também tem uma perenidade, no gráfico 9 encontram-se as demonstrações dos pagamentos de dividendo na última década.

GRÁFICO 9- PAGAMENTO DE DIVIDENDO SETOR DE SEGUROS



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Além disso, optou-se por escolher a BB Seguridade, pois em termos de patrimônio líquido é umas das maiores e, em pagamento de dividendo, também é perene e também faz parte do Banco do Brasil.

No setor de telecomunicação foram selecionadas 3 empresas, pois as outras duas, eram empresas com menos de 2 anos de existência, na tabela 8 há o demonstrativo do patrimônio líquido.

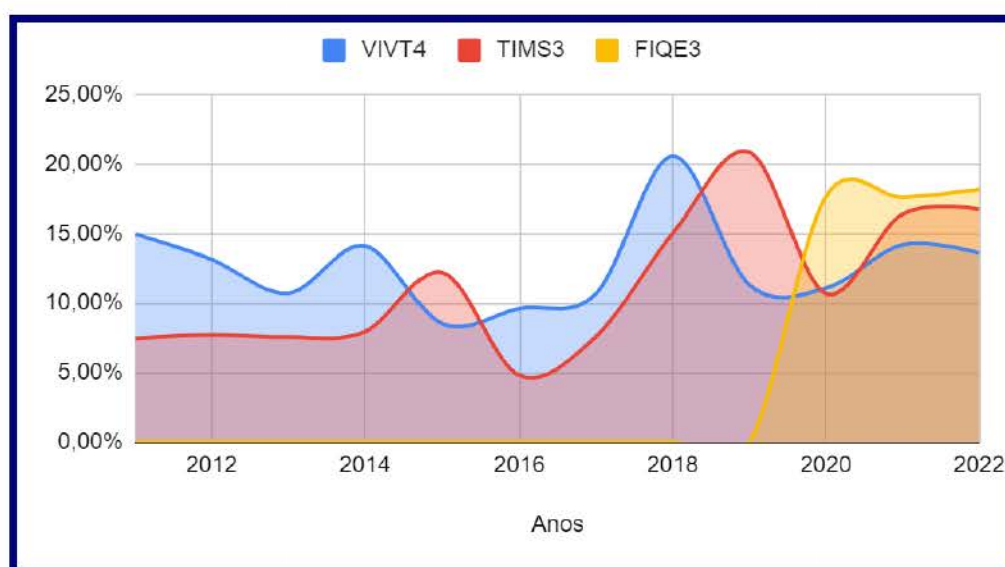
TABELA 8 - ATIVOS SELECIONADOS DO SETOR TELECOMUNICAÇÕES

TICKER		Patrimonio líquido
VIVO	VIVT4	79,1 B
TIM	TIMS3	31.3 B
unifone telecomunicações S.S.	FIQE3	972,414,000 M

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Em termos de patrimônio líquido, o maior é a VIVT4, porém para escolher uma empresa necessita de mais alguns dados acerca dela, assim, comparar-se-á a margem líquida destas empresas. Estará presente no gráfico 10, uma comparação entre as margens líquidas destas empresas.

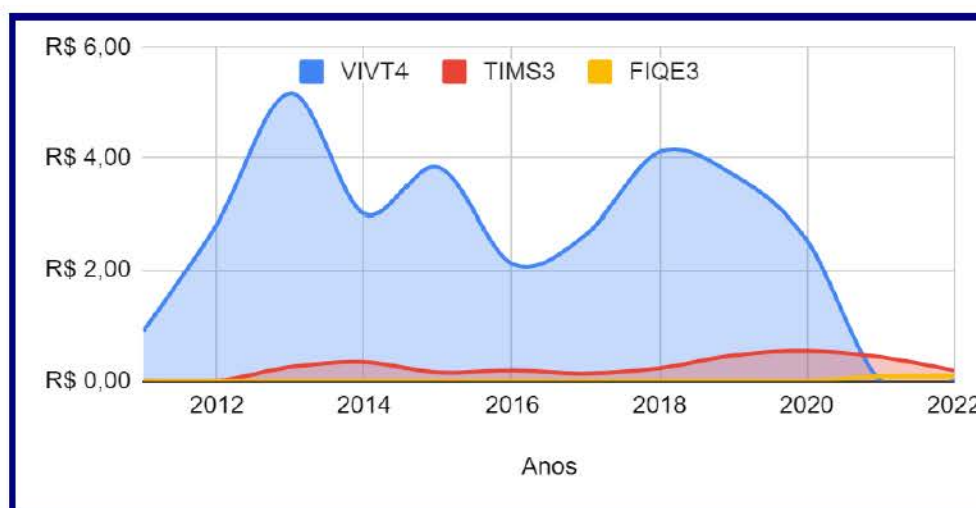
GRÁFICO 10 - MARGEM LÍQUIDA NA ÚLTIMA DÉCADA



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Neste caso, ambas as empresas demonstram perenidade no setor, solidez e margens líquidas positivas. Porém, quando analisa-se o pagamento de dividendo de ambas as empresas, a VIVT4 oferece valores melhores ao ano, gráfico 11.

GRÁFICO 11 - DIVIDENDOS NA ÚLTIMA DÉCADA



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Outro ponto a se relatar, é que na base onde foi coletado os dados, estava faltando os dois últimos pagamentos de dividendo pela VIVT4, porém ao olhar direto no site da empresa, no informativo do relacionamento com o investidor, informa os respectivos valores, girando em torno da média de R \$3,00 reais ao ano. Portanto, optou-se por selecionar a VIVT3 desse setor.

Assim, as ações escolhidas foram: SBSP3, BBSE3, VIVT3, EGIE3, BBAS3, ITUB4 e BOVA11. Abordar-se-á um panorama de cada empresa selecionada, iniciando-se pela SBSP3, é a Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo, segundo o site infomoney é uma empresa brasileira que detém a concessão dos serviços públicos de saneamento básico no Estado de São Paulo, foi criado em 1973 com o objetivo de implementar as diretrizes do Governo brasileiro estabelecidas no Plano Nacional de Saneamento. Após, em 2002, em que foi aberto capital, tornou-se uma empresa de sociedade de economia mista que atua na área de saneamento, é responsável pelo fornecimento de água, coleta e tratamento de esgotos de 370 municípios do Estado de São Paulo. A companhia atende cerca de 27,9 milhões de pessoas com abastecimento e 22,8 milhões com tratamento de esgoto.

A BBSE3, BB Seguridade é uma empresa de participações(holding) de capital aberto que investe em sociedades que atuam nos setores de seguros,

previdência aberta, títulos de capitalização e planos odontológicos, bem como em negócios que intermediam a venda desses produtos. Segundo o próprio site da empresa, a constituição da BB Seguridade ocorreu em 20 de dezembro de 2012, dado o art.1º da lei nº 11.908/09, que confere certa autonomia e autoridade ao Banco do Brasil a constituir subsidiárias integrais e controladas com vistas ao cumprimento das atividades previstas em seu objeto social. Segundo o site da instituição, a criação foi o resultado do processo de reorganização na área de seguros, previdência aberta e títulos de capitalização realizado pelo Banco do Brasil entre os anos de 2008 a 2011.

A VIVT3, Telefônica Brasil S.A, é uma companhia de telecomunicações, é conhecida pela marca VIVO e, é parte de uma das maiores companhias de telecomunicações no mundo, com presença em 12 países da Europa e América Latina. Segundo o portal InfoMoney, a empresa ao final de 2018 contabilizava 95 milhões de clientes, também segundo o portal a cobertura de 4G alcança quase 90% da população, em 3100 cidades.

A ENGIE3, é a empresa Engie que é a maior empresa privada de energia do país, atuando em geração, comercialização e transmissão de energia elétrica, transporte de gás e soluções energéticas. Também de acordo com o site da empresa, atualmente conta com uma capacidade instalada própria de 10 Giga Watt distribuídas em 69 usinas, isto em termos percentuais representa 6% da capacidade nacional. Outro ponto a se pontuar é que a empresa possui 97% de sua capacidade instalada proveniente de fontes renováveis e com baixa emissões de gases de efeito estufa, e tem usinas hidrelétricas, eólicas, solares e a biomassa.

A BBAS3 é o Banco do Brasil, criado em 1808, também é a primeira instituição bancária a operar no país. Segundo o portal infomoney ocupa as primeiras colocações entre os maiores bancos da América Latina e Caribe, com mais de R \$1,4 trilhões em ativos. Possui uma imensa capilaridade atingindo 99% dos municípios brasileiros, com uma rede de mais de 4,7 mil agências. Além disso, o banco também está presente em outros países, atingindo cerca de 100 países. Outro fato importante é que o banco está listado na bolsa de valores desde 1906.

O ITUB4, Itaú Unibanco, é um dos maiores banco do Brasil, segundo o portal infomoney possui uma história de mais de 95 anos, além disso possui cerca de 4 700 agências. Segundo o portal, entre as atividades principais, destaca-se a área de veículos, a carteira de veículos para pessoa física é de mais de R \$17 bilhões. Além disso, na área de seguros, possui uma associação com a Porto Seguro.

O BOVA11 é Ishares Ibovespa Fundo de Índice, foi criado em 2008. Segundo o portal infomoney é administrado pela gestora americana BlackRock e procura replicar a carteira do Ibovespa, principal índice de ações da bolsa brasileira. Além disso, de acordo com o portal, é o fundo índice mais importante do mercado.

Para montar esta aplicação foi necessário adquirir dados históricos, para este fim usou-se a base de dados do Yahoo finanças, no período de 01 de abril de 2016 a 01 de junho de 2022, contendo um total de 1535 dados (linhas) de cada ativo presente em cada coluna. Presente na tabela 9.

TABELA 9 - DADOS HISTÓRICOS DOS ATIVOS

	SBSP3.SA	BBSE3.SA	VIVT3.SA	EGIE3.SA	BBAS3.SA	ITUB4.SA	BOVA11.SA
Date							
2016-04-01	23.950001	29.400000	37.709999	29.768000	19.770000	19.036364	49.119999
2016-04-04	23.299999	28.430000	36.020000	29.000000	18.650000	18.369696	47.330002
2016-04-05	23.520000	28.559999	35.900002	28.775999	18.350000	18.406059	47.360001
2016-04-06	22.770000	28.360001	35.689999	28.288000	18.180000	17.878786	46.820000
2016-04-07	22.910000	29.090000	35.470001	28.472000	18.740000	18.072727	47.049999
...	...	...	...	...	...	...	...
2022-05-25	48.419998	25.650000	52.349998	45.169998	37.570000	25.700001	106.660004
2022-05-26	48.130001	25.570000	51.980000	44.110001	37.459999	26.020000	108.019997
2022-05-27	47.580002	25.930000	51.540001	43.700001	37.049999	26.160000	107.900002
2022-05-30	46.599998	26.610001	51.529999	43.220001	36.070000	25.920000	106.919998
2022-05-31	45.779999	26.879999	51.049999	43.900002	36.619999	26.160000	107.180000

1535 rows × 7 columns

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

A partir dos dados coletados na api do Yahoo, foi gerado um arquivo csv em que foi salvo a base de dados, pois caso ocorra algum problema na comunicação dos dados, alguma alteração nas bibliotecas ou alteração do nome do código do ativo, estaria salvo neste arquivo. Na tabela 10 há os dados estáticos das cotações dos ativos, contém a quantidade de dados de cada ativo observado, média, desvio padrão, o valor máximo e mínimo de cada ativo.

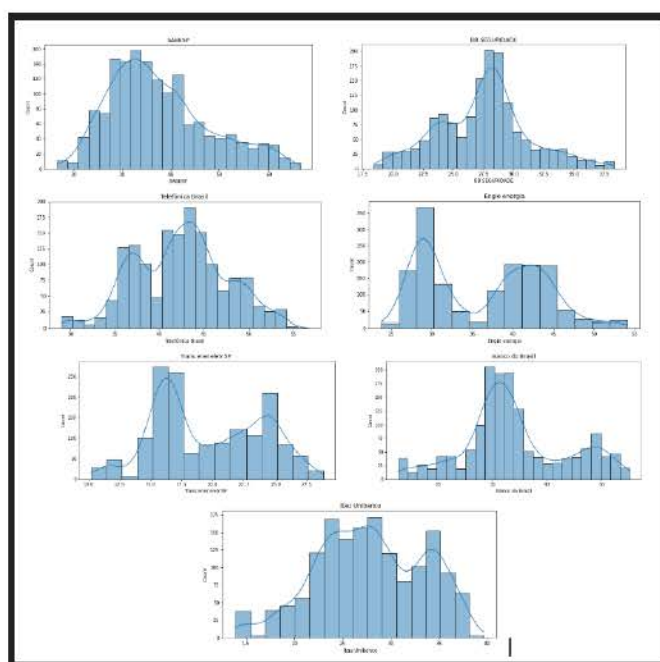
TABELA 10 - DADOS ESTATÍSTICO DOS ATIVOS

	SABESP	BB SEGURIDADE	Telefônica Brasil	Engie energia	Banco do Brasil	Itau Unibanco	BOVA
count	1535.000000	1535.000000	1535.000000	1535.000000	1535.000000	1535.000000	1535.000000
mean	38.515127	27.566332	43.037003	36.683321	34.722195	28.217156	86.574184
std	9.861498	3.719598	4.925498	7.045914	8.749535	5.048147	20.581594
min	22.500000	18.400000	32.860001	26.167999	15.640000	16.957575	46.820000
25%	30.799999	25.125000	38.910000	29.352000	29.400000	24.266666	69.755001
50%	36.410000	27.760000	43.099998	38.500000	32.820000	27.730000	90.000000
75%	44.639999	29.345000	46.000000	42.769999	39.445000	32.830002	103.400002
max	66.470001	38.320000	56.740002	54.099998	55.180000	39.689999	125.750000

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Os dados presentes na tabela 9 foram usados de subsídio para gerar alguns gráficos para análise dos dados. O primeiro gráfico gerado foi do tipo histograma, neste tipo de gráfico podemos verificar a frequência com que as cotações do ativo oscilaram no decorrer do período analisado, ou seja, verificar o intervalo de preço em que o ativo mais oscilou. Assim no eixo x tem-se o valor das cotações de cada ativo e no eixo y tem-se a contagem de quantas vezes cada faixa de valores mais aparecem no período em que está sendo analisado. Na figura 18 encontram-se os ativos em seus respectivos histogramas.

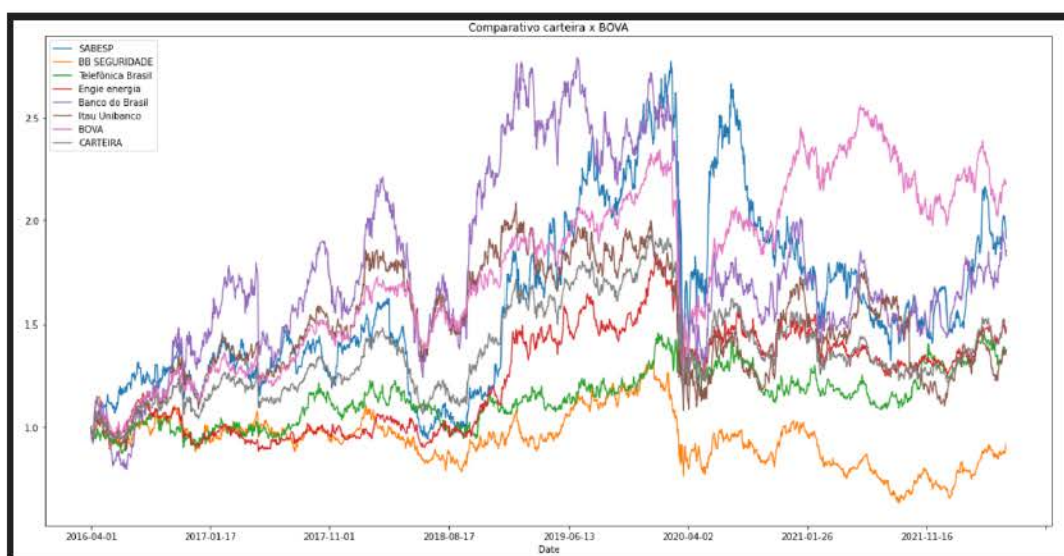
FIGURA 18 - HISTOGRAMA DOS 7 ATIVOS



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

O próximo gráfico utilizado foi o gráfico de linhas, o qual encontra-se o histórico dos preços das ações. Para comparar o desempenho ou crescimento proporcional de cada ativo escolhido, foi necessário normalizar os valores das ações. Para tal fim, calculou-se o retorno anual de cada ativo, multiplicando o retorno médio diário por 246(é a média de dias em que a bolsa de valores funciona), obtendo assim o retorno médio anual da carteira, foi somado o retorno dos ativos exceto o BOVA11 e dividindo por 6, para comparar se a composição da carteira tem um melhor ou pior desempenho que o índice. O gráfico 12 é o comparativo das ações e seus respectivos crescimento no preço.

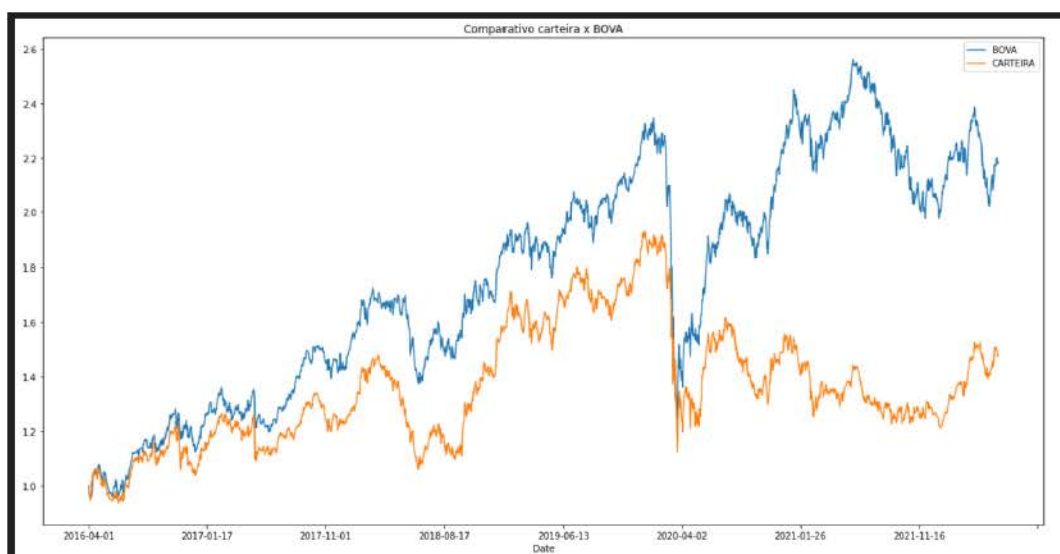
GRÁFICO 12 - COMPARATIVO DO PREÇO HISTÓRICO DAS AÇÕES



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Entretanto, a carteira montada pelos ativos não superou o desempenho do BOVA11, uma explicação plausível, seria que devido a composição do índice tendo como maiores percentuais a VALE e a Petrobras, respectivamente 13,92% e 7,50%, que foram empresas que nos últimos meses performaram muito acima da média, devido a estarem em setores de commodities e terem insumos básicos para economias. Como o petróleo, que é o insumo básico que a Petrobras trabalha e é necessário em qualquer economia, o preço do ativo sofreu um inflacionamento, portanto, pode ter impacto no preço do BOVA11, elevando ele acima do preço justo. No próximo gráfico 13, há a comparação entre a carteira e o BOVA11.

GRÁFICO 13 - COMPARATIVO DA CARTEIRA E O BOVA



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Para finalizar, ao fim dos cálculos o maior retorno foi do Banco do Brasil e o pior retorno foi a BB Seguridade. Na tabela 11, temos os retornos anuais de cada um dos ativos.

TABELA 11 - RETORNO MÉDIO ANUAL DE CADA ATIVO.

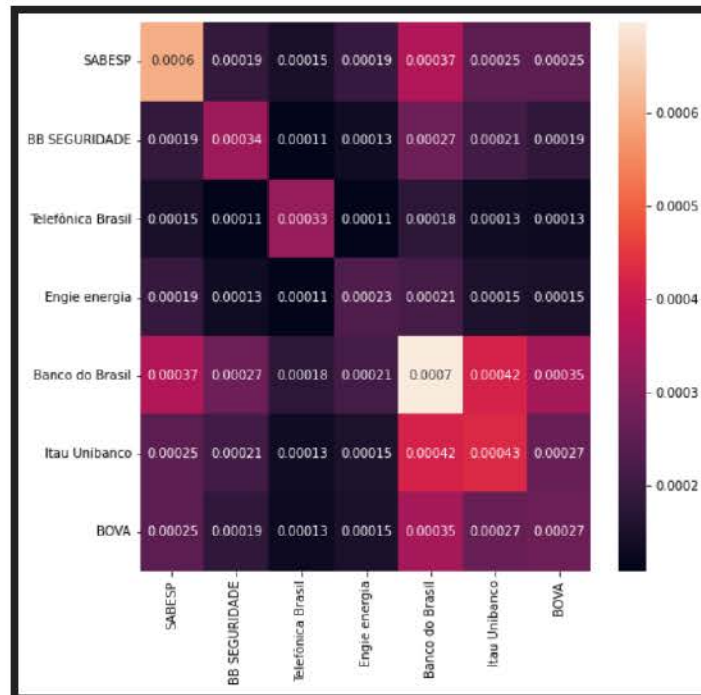
Ativos	Retorno %
SABESP	17.812274
BB SEGURIDADE	2.744653
Telefônica Brasil	8.916427
Engie energia	9.079834
Banco do Brasil	18.490663
Itau Unibanco	10.426988
BOVA	15.895602

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Além das taxas de retorno anuais, foi calculado a variância dos ativos, a covariância e a correlação. A covariância está visível na figura 19, ela mensura o grau de interdependência entre duas variáveis, ou seja, se há uma variância positiva encontra-se uma tendência de ambas as variáveis variarem na mesma direção, e caso seja negativo, variam em direções opostas. No caso da figura 19, quanto mais

próxima do valor 0.0002 ou do preto, menor risco encontra-se no par de ativos que neste caso seria a BB Seguridade e Telefônica Brasil.

FIGURA 19 - COVARIÂNCIA ENTRE ATIVOS



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Outra maneira de visualizar as covariâncias seria pela tabela 12.

TABELA 12 - RETORNO MÉDIO ANUAL DE CADA ATIVO.

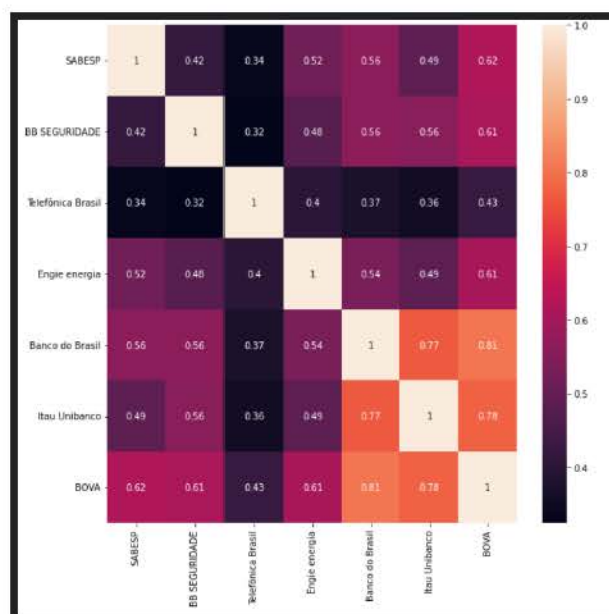
	SABESP	BB SEGURIDADE	Telefônica Brasil	Engie energia	Banco do Brasil	Itau Unibanco	BOVA
SABESP	0.000603	0.000190	0.000150	0.000194	0.000365	0.000249	0.000250
BB SEGURIDADE	0.000190	0.000339	0.000108	0.000134	0.000274	0.000213	0.000185
Telefônica Brasil	0.000150	0.000108	0.000330	0.000111	0.000179	0.000134	0.000128
Engie energia	0.000194	0.000134	0.000111	0.000232	0.000215	0.000155	0.000152
Banco do Brasil	0.000365	0.000274	0.000179	0.000215	0.000695	0.000420	0.000350
Itau Unibanco	0.000249	0.000213	0.000134	0.000155	0.000420	0.000430	0.000266
BOVA	0.000250	0.000185	0.000128	0.000152	0.000350	0.000266	0.000272

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

A interpretação da correlação é a medida que mensura a relação de risco, e deve-se dar preferência por correlações negativas, pois neste espectro de valores

haverá a redução do risco diversificável, e terá a diversificação. Valores mais próximos a 1 indicam correlação positiva e perfeita, ou seja, ambos os ativos se deslocam conjuntamente. Na figura 20 encontram-se as correlações entre os ativos da carteira, quando mais próximo de 0.4, há menores riscos, isto ocorre entre os ativos BB Seguridade e Telefônica Brasil.

FIGURA 20 - CORRELAÇÃO ENTRE ATIVOS



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Primeiramente será montando uma carteira com valores aleatórios, portanto considerou-se a escolha pelo pequeno investidor em alocar sua poupança nesta carteira com estes ativos selecionado acima, ou seja, a escolha das taxas de participação são feitas aleatoriamente, e posterior a mesma carteira com os mesmos ativos será compara com uma carteira otimizada, procurando selecionar as melhores taxas de participação e também será comparado com investimento na taxa selic. Assim, supondo que o pequeno investidor tenha uma poupança de R \$5.000,00 para investir, e escolha aleatoriamente determinadas porcentagens para alocar seus recursos, e seleciona as seguintes porcentagens presentes na tabela 13.

TABELA 13 - PORCENTAGENS DAS TAXAS DE PARTICIPAÇÃO

	Ações	Pesos
0	SABESP	23.468226
1	BB SEGURIDADE	2.087979
2	Telefônica Brasil	22.552477
3	Engie energia	18.918883
4	Banco do Brasil	2.879421
5	Itau Unibanco	13.276130
6	BOVA	16.816884

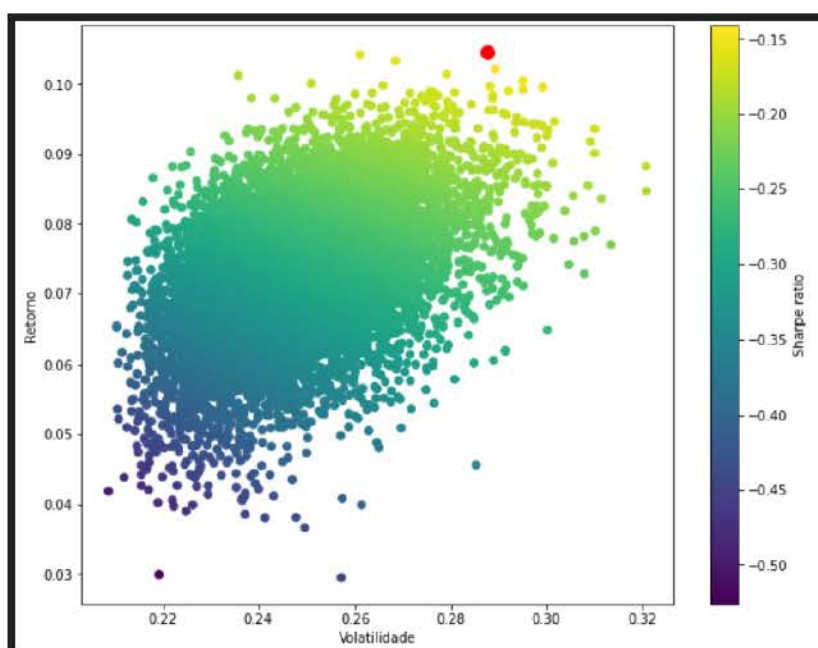
FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Supondo que um investidor tenha escolhido as taxas de participação presente na tabela 13, os R \$5.000,00 ao final do período investido teria rentabilizado R \$ 8.273,56, se houvesse optado por um investimento no tesouro direto, e rentabilizado a taxa SELIC, o mesmo capital inicial, teria rentabilizado R \$8.080,77.

Porém, os valores e as respectivas taxas de participação, não é a melhor rentabilidade, logo utilizando o modelo de otimização para gerar a carteira eficiente, foi necessário produzir 10000 carteiras randômicas que possuíam diversas taxas de participação e calcular o Índice Sharpe de cada carteira gerada utilizando a Taxa Selic de meados de 2016 a meados de 2022.

Disso, obtemos o gráfico dos portfólios na figura 21, em que os pontos no gráfico representam cada uma das 10000 carteiras produzidas, no eixo x temos a volatilidade esperada, ou seja, representa o risco e no eixo y o retorno esperado de cada carteira. Para diferenciar a melhor carteira, esta encontra-se representada pelo ponto vermelho, além disso, esta é a carteira de risco mínimo e a que apresenta o melhor índice sharpe entre todas. Portanto, temos o retorno esperado de aproximadamente 10,46% e uma volatilidade esperada de 28,74 %.

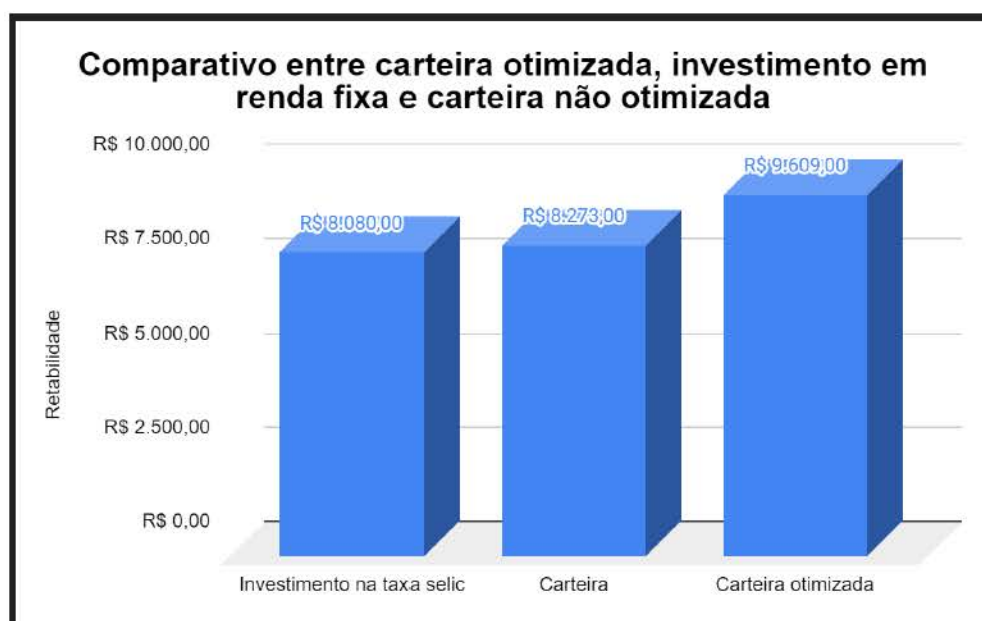
FIGURA 21 - FRONTEIRA EFICIENTE PARA UM CENÁRIO DE 7 ATIVOS



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Descrevendo melhor a carteira de risco mínimo, teria-se as seguintes taxas de participação de cada ativo: SABESP: 31.60%, BB Seguridade: 0,88%, Telefônica Brasil: 2,93%, Engie energia: 6,14%, Banco do Brasil: 23,17%, Itaú Unibanco 2,37% e Bova: 31,87%. O gráfico 14 é o comparativo das rentabilidades entre a carteira aleatória, investimento na taxa selic e na carteira otimizada, supondo que o investidor tenha um capital inicial de R \$5.000,00 para investir. Portanto, ao final desse período, se uma pessoa física tivesse optado por investir na carteira otimizada, o valor final seria de R \$9.609,40 aproximadamente.

GRÁFICO 14 - COMPARATIVO ENTRE AS MODALIDADES DE INVESTIMENTO: CARTEIRA OTIMIZADA, INVESTIMENTO NA TAXA SELIC E CARTEIRA.



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Os códigos que foram utilizados aqui, nesta seção, estão disponíveis no anexo 1 e também encontra-se o link para acessar o código direto no google colaboratory.

4.3 APLICAÇÃO - MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS O CAPM

Na aplicação desta seção usar-se-á o Modelo de Precificação de Ativos (CAPM). A base de dados utilizada é a mesma da seção 4.2 - aplicação em um cenário com 7 ativos, em que há os seguintes ativos: SABESP, BB Seguridade, Telefônica Brasil, Engie energia, Banco do Brasil, Itaú Unibanco, no período de meados de 2016 a meados de 2022.

O objetivo desta aplicação é comparar o portfólio com o índice BOVA11, aqui usar-se-á o modelo de precificação de ativos para avaliar o prêmio de risco, ou seja, dada a existência de uma taxa livre de risco qual seria o prêmio que poderá receber para compensar o risco ao investir neste portfólio.

A partir dos estudos de Sharpe e Lintner, os quais conseguiram expressar na fórmula do modelo de precificação de ativos que permite identificar o prêmio de risco de um ativo individual como sendo o prêmio de risco do mercado, ponderado

pelo risco do mercado, que neste caso será representado pelo ativo BOVA11 que é o ativo similar ao ibovespa.

Para o desenvolvimento desta aplicação, primeiramente calculou o índice beta para todas as ações que compõem a carteira, uma das formas para encontrar o índice beta é usando a Regressão Linear ou pela covariância e variância dos ativos com o BOVA11.

Para determinar o índice beta, primeiro pela regressão linear, é uma maneira através de técnicas estatística para comparar a taxa de retorno de um ativo com o BOVA11, que é representado por uma reta. Como exemplo, calculou-se entre BOVA11 X SABESP, a reta que representa a aproximação dos dados de retornos, é

$$y = 0.921573108005815x + 0.0001285062595675491$$

Na figura 22 há a representação da reta e o BETA do ativo SABESP é 0.921573108005815.

FIGURA 22 - COMPARATIVO DOS RETORNO ENTRE BOVA11 E SABESP



FONTE: elaborado pelo autor (2022).

A outra maneira de calcular o beta da empresa SABESP é através

$$\beta_{sabesp} = \frac{\text{Covariância entre SABESP e BOVA11}}{\text{Variância do BOVA11}}$$

Logo,

$$\beta_{sabesp} = \frac{0.061542214792633235}{0.066779525420185} = 0.9215731080058152$$

Após encontrar o Beta de ação, o próximo passo foi calcular o retorno esperado de cada ativo. Na tabela 14 está disposto o retorno esperado de cada empresa.

TABELA 14 - RETORNO DOS ATIVOS

Ativo	Retorno Ri %
SABESP CAPM: 15.77806262629527	
BB SEGURIDADE CAPM: 15.450099982730855	
Telefônica Brasil CAPM: 15.162407640874337	
Engie energia CAPM: 15.283269166064283	
Banco do Brasil CAPM: 16.27992339318636	
Itau Unibanco CAPM: 15.855779289939322	

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

Nota-se que os retornos estão em igualdade a aproximadamente 15%, menos o Banco do Brasil que por possuir um beta de 1.28 é um ativo que tem um retorno de 28% acima do BOVA11, que quer dizer que o Banco do Brasil em algum momento houve valorizações acima do BOVA11 em 28%, é um ativo classificado como agressivo, que se valoriza ou desvaloriza mais rápido que o BOVA11.

No caso dos demais ativos, que ficaram com um retorno em torno de aproximadamente 15%, um dos motivos disso ocorrer, é devido aos valores de seus retornos serem pequenos e a Risk Free, que é a taxa livre de risco também estar neste intervalo de valor. Ou seja, tanto a taxa livre de risco como o retorno dos ativos ficaram nivelados. Isto é verificado nos cálculos, a Risk Free é de 14,51% = 0.1451. Para exemplificar melhor o fato do nivelamento entre o retorno do ativo e a risk free, segue os cálculos.

Para a Sabesp, o Ri:

$$R_i = (0.1451) + (0.921573108005815) * (0.15885246721917654 - 0.1451) = 15.77$$

Para BB Seguridade

$$R_i = (0.1451) + (0.6816019567300676) * (0.15885246721917654 - 0.1451) = 15.45$$

Para Telefônica Brasil

$$R_i = (0.1451) + (0.4710966938800169) * (0.15885246721917654 - 0.1451) \\ = 15.16$$

Então, por fim o cálculo do CAPM da carteira eficiente da seção 4.2, é realizada com a equação:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i (E(R_m) - R_f)$$

em que:

- $E(R_i)$ - retorno esperado;
- R_f - retorno do ativo livre de risco;
- $E(R_m)$ - retorno do indicador de mercado;
- β_i - risco sistemático ou coeficiente de volatilidade do ativo em relação ao mercado.

Assim, é só substituir as taxas de participação do portfólio eficiente:

$$E(R_i) = [(0.3160) * (0.1577)] + [(0.0088) * (0.1545)] + [(0.0293) * (0.1516)] + \\ [(0.0613) * (0.1528)] + [(0.2317) * (0.1627)] + [(0.0237) * (0.1585)] = 10.65\%$$

Portanto, o portfólio eficiente tem um ganho 10.65% de retorno compensado pelo risco de se investir nessa carteira.

O código que foi utilizado aqui, nesta seção, está disponível no anexo 2 e também encontra-se o link para acessar o código direto no google colaboratory.

4.3.1 Considerações finais sobre as aplicações dos modelos

Após fazer as aplicações e analisar os resultados, em um cenário com dois ativos, conclui-se que o modelo média-variância e a fronteira eficiente, podem auxiliar o investidor a encontrar a melhor carteira, a carteira eficiente, aquela, a qual dada a preferência do investidor e sua aversão ao risco pode ser selecionada, e assim, ter o melhor ajuste a seus interesses e nas respectivas taxas de participação.

Na seção aplicação em um cenário com sete ativos, conclui-se que ao adicionar ativos, encontra-se uma dificuldade em encontrar as melhores taxas de participação, e também, dependendo do tamanho da série histórica que está sendo usada, pode ficar quase impossível usar o google planilhas devido a limitação de linhas que pode ter ao armazenado os dados. Assim, para fazer a implementação foi

feito uso do google colab, excelente para executar códigos e, sem limitações para armazenar os dados das séries históricas. A implementação dos modelos foi feita em python que gera uma facilidade. Quando usa-se o modelo média variância aliado a uma estratégia para selecionar um determinado conjunto de ativos de risco, há uma facilitação em selecionar, pois, usar-se-a uma metodologia para escolher empresas que serão rentáveis e perenes e o modelo média variância contribui para auxiliar o investidor na escolha das melhores taxas de participação, sempre procurando uma carteira que tenha melhor retorno a uma taxa de risco.

Ao comparar o modelo supondo que um investidor escolhe-se as taxas de participação aleatoriamente, foi verificado que o investidor pode não ter o melhor retorno, ou seja, pode estar até correndo maior risco por um retorno não tão favorável ou compensatório. Dessa forma o modelo média variância contribui significativamente auxiliando o investidor a escolher as melhores taxas de participação e sempre buscando comparar o binômio risco-retorno.

O modelo de precificação de ativos (CAPM) contribui da seguinte forma, por conseguir comparar o ativo(escolhido) com o portfólio de mercado(IBOV). A escolha se pauta em procurar uma rentabilidade acima da taxa livre de risco(Selic). Que dependendo do investidor e de suas preferências, através do modelo de precificação de ativos, pode-se elaborar carteiras, ou seja, ao classificar os ativos por este modelo, conclui-se que ele nos dá indicações de quando o ativo é considerado agressivo, neutro e defensivo. Caso for um portfólio, pode ser agressivo, neutro ou defensivo.

Assim concluímos que ambos os modelos podem auxiliar o investidor a estratificar o risco e retorno. Portanto, caso o investidor for um que usa a intuição para fazer aplicações financeiras, ambos os modelos podem contribuir ao nortear a decisão desse investidor, dando uma clareza acerca dos risco que estão envolvidos, e aos prejuízos, pois às vezes dependendo do ativo ou carteira, pode vir a ser mais vantajoso optar por ativos da renda fixa.

4.4 POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO DOS MODELOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Nas subseções seguintes encontra-se a descrição da perspectiva sobre educação financeira que o Brasil adotou. Posteriormente, investigou nos documentos basilares da educação básica conteúdos curriculares que pudessem ser trabalhados em consonância com os conteúdos de finanças a fim de ter tarefas mais contextualizadas, assim os estudantes puderam interagir com o conteúdo curricular estudado.

4.4.1 Considerações iniciais sobre educação financeira

Um dos pontos de partida que iniciaram os estudos sobre Educação Financeira em escala internacional, veio em 2003 com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) colocou em pauta de discussão a temática da Educação Financeira. Segundo Silva; Powell(2013, p.2) o programa de trabalho da OCDE, aprovado pelo conselho para o biênio 2003-2004 elaborou um projeto intitulado *Projeto Educação Financeira* que deveria ser desenvolvido nos anos seguintes.

E neste caso o Brasil sendo um país não membro, mas com estreitas relações com a OCDE passaram a ser orientados, em suas ações, como de acordo com Silva; Powell (2013, p.2) com o objetivo de educar financeiramente seus cidadãos.

No caso específico do Brasil, tendo a relação estreita com a OCDE e diante da tendência que constituiu-se, o governo toma a decisão de constituir um grupo de trabalho, como aponta Silva, Powell(2013, p.9) em maio de 2007, um grupo de trabalho com o objetivo de desenvolver uma proposta de estratégia nacional de educação financeira. E posteriormente, após, a elaboração em pleno diálogo com os representantes do governo, a iniciativa privada e da sociedade civil e também para sua implementação. No ano de 2010, ocorre o decreto presidencial que institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira(ENEF), na subseção intitulada Educação Financeira na Educação Básica, perspectiva adotada pelo Brasil, dissertaremos melhor sobre.

4.4.2 Perspectiva de educação financeira adotada pelo Brasil

Na última década houve grande movimentação da sociedade brasileira para a construção, consolidação e aplicação da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) que foi criada através do decreto Federal 7.397/2010 , e no ano de 2020 foi renovado pelo decreto nº 10.393. O motivo desse empenho, se deve a grande quantidade e ao rápido acesso que a população têm aos recursos financeiros, e tem como finalidade promover a educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal no país.

Segunda Freitas(2020, p.02) a nova ENEF reúne representantes de 8 órgãos e entidades governamentais, que juntos integram o Fórum Brasileiro de Educação Financeira(FBEF). Os programas da ENEF são orientados pelo Plano Diretor, sua deliberação e seus anexos, documentos que consolidam a atuação da ENEF.

O programa da estratégia nacional de educação financeira é norteadada pelo plano diretor, sua deliberação e seus anexos. As ações da nova ENEF são compostos pelos programas transversais e setoriais, coordenados de forma descentralizada, mas executados de modo centralizado, ou seja, as decisões são tomadas de forma centralizada no ente federal e a execução, esta ocorre descentralizada em seus respectivo ente : municipal, estadual ou federal.

Um pouco sobre os programas, iniciando pelos setoriais, são os programas e as ações desenvolvidas pelos membros do Fórum Brasileiro de Educação Financeira - FBEF e que estão alinhados às diretrizes propostas pela ENEF. Esses programas são regidos pelos objetivos e papéis desempenhados por cada instituição : Banco Central do Brasil, CVM- comissão de valores mobiliários e PREVIC - Superintendência Nacional de Previdência Complementar, etc.

Os programas transversais são as ações de educação financeira da nova ENEF que, pelo público beneficiário ou temática financeira priorizada, não são de responsabilidade exclusiva de determinado órgão ou entidade. Seus objetivos requerem a conjugação de diversos temas como proteção, planejamento financeiro, poupança, investimento, crédito e defesa do consumidor. Temos os seguintes

programas: Programa Educação Financeira nas Escolas, Programa Educação Financeira de Adultos e Semana Nacional de Educação Financeira.

No documento orientação para educação financeira nas escolas os objetivos, conteúdos, orientações pedagógicas para a introdução da educação financeira e também, encontra-se a definição do que é educação financeira.

A definição de educação financeira é o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessárias para se tornarem mais conscientes das oportunidades e dos riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda, adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. OCDE(2005 apud Brasil 2010, p.57).

Dessa forma, a educação financeira é extremamente importante para o desenvolvimento do cidadão na sociedade moderna, e que as pessoas possam através das competências adquiridas por meio da educação financeira solucionar seus desafios, problemas cotidianos e alcançar as metas de seu planejamentos. Além disso, o documento plano diretor coloca a seguinte estrutura: introdução, objetivos, conteúdos, orientações pedagógicas e considerações finais. Em relação aos objetivos, estes estão divididos em duas esferas: espacial e temporal, os conteúdos na seguinte divisão: âmbito individual e social.

Acerca dos objetivos, temos, de acordo com a proposta, argumenta-se que o cotidiano sempre está transcorrendo em um espaço e um tempo determinado, a dimensão espacial está relacionado com determinados conceitos da educação financeira que pautam no impacto das ações individuais sobre o contexto social, ou seja, das partes com o todo e vice versa, e também abarca os seguintes níveis: individual, local, regional, nacional e global, ou seja, encontram-se organizados de modo inclusos. Já a dimensão temporal os conceitos são abordados com base na noção de que as decisões tomadas no presente podem afetar o futuro. Segundo Feitas(2020, p.3) os espaços são atravessados por essa dimensão conectando passado, presente e futuro cujos objetivos são: ensinar a planejar a curto, médio e longo prazo, desenvolver a cultura da prevenção e possibilitar a mudança da condição atual.

Em relação aos conteúdos de educação financeira, são agrupados em dois âmbitos que pertencem à dimensão espacial, são individual e social. E que a dimensão temporal está relacionada à maneira como as ações e decisões são tomadas em determinado tempo. De acordo com Brasil(2010, p.69) o âmbito individual é aquele em que o indivíduo é o centro do processo de tomada de decisão e exerce controle ativo sobre o equilíbrio de suas próprias práticas de consumo e poupança. Assim, busca-se o equilíbrio entre consumo e poupança, para este fim, deve-se desenvolver alguns comportamentos, de acordo com FREITAS.

Comportamentos de consciência e cidadania a serem desenvolvidos no âmbito individual são: planejar a vida financeira e viver de acordo com esse planejamento, pagar impostos e contribuições, compreender e exercitar os cinco Rs do consumo consciente.FREITAS(2021, p.3).

Portanto, segundo o Brasil (2010, p.72) o consumo consciente responsável e sustentável é aquele que demanda dos consumidores as atitudes de refletir, recusar, reduzir, reutilizar e reciclar. Também deve-se tomar decisões de compra, consistindo no critério pelos quais se opta por adquirir ou não um bem, serviço ou direito. Além disso, há a poupança, segundo Brasil.

é o acúmulo de capital para o uso posterior, com ou sem rendimento. Então é necessário que compreenda o funcionamento e as opções de investimento disponíveis. São necessários os conteúdos relativos à tomada de decisão de investimento, aos objetivos estabelecidos no planejamento e ao grau de disposição ao risco do indivíduo. BRASIL(2010,p.74-75).

O âmbito social de acordo com Brasil(2010, p.77) é aquele em que o indivíduo não tem controle ativo sobre as variáveis que impactam sua vida financeira, mas pode se planejar ante elas. E de acordo com Brasil(2010, p.80) as principais condutas de cidadania consciente e responsáveis que devem resultar dos estudos relativos ao âmbito social são : exigir nota fiscal, das preferência de compra a estabelecimentos regularizados; manusear responsavelmente o dinheiro.

4.4.2 CONTEÚDOS CURRICULARES PRESENTES NA EDUCAÇÃO BÁSICA E OS RESPECTIVOS DOCUMENTOS QUE OS ALICERÇAM

O objetivo desta seção foi o de investigar alguns conteúdos curriculares e a inserção da educação financeira e também coletar conteúdos que após a investigação do referencial teórico, usar-se-á como alicerce na elaboração de tarefas que sejam mais contextualizadas, assim como indica os documentos e que também sejam voltadas ao respectivo nível na educação básica, assim estarão em pleno acordo aos documentos que norteiam a educação na atualidade.

4.4.2.1 Ensino de números e de probabilidade e estatística na educação básica

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativos que para Freitas(2021, p.4) define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. A BNCC é orientada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, que dão subsídios e princípios éticos, políticos e estéticos, assim a Base soma-se aos propósitos que dão o caminho a educação brasileira, para atingir um fim, a formação humana integral e o que refletirá em uma construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Devido às particularidades do Brasil, há a necessidade de atender a demanda da população, assim temos, segundo Brasil(2018, p.16) BNCC e currículos têm papéis complementares para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica. Portanto, é uma atuação conjunta de ambos, a BNCC e currículo, o primeiro alicerça os conteúdos e o segundo se materializa na adaptação, no real, no contexto em que se encontra o aluno, assim as aprendizagens de acordo com Brasil(2018,p.16) só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação. Assim, essas decisões devem abarcar em sua organização as modalidades de ensino, para o Brasil.

consideradas a organização de currículos e propostas adequadas às diferentes modalidade de ensino(Educação Especial, Educação de Jovens e Adultos, Educação do Campo, Educação Escolar indígena, Educação Escolar Quilombola, Educação a Distância), atendendo-se às orientações das Diretrizes Curriculares Nacionais. BRASIL(2018,p.17).

Por ter um sistema de ensino que está no cerne do estado e o mesmo possui esferas de poder, logo há uma necessidade de se ter uma flexibilidade, uma

autonomia a cada esfera de poder, o que implica ter competência para trabalhar de forma colaborativa, e a cada esfera de poder, compete incorporar aos currículos as propostas pedagógicas e a inserção de temas contemporâneos que impactam a vida cotidiana, podendo ser em escala local, regional e global, para Freitas (2021, p.04) preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre os temas que impactam a vida cotidiana das pessoas, estão a saúde, vida familiar e social, educação para o consumo, educação financeira e fiscal, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural(Parecer CNE/CEB nº 11/2010 e Resolução CNE/CEB nº 7/2010. Segundo Freitas (2021,p.04) na BNCC, essas temáticas são contempladas em habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas, de acordo com suas especificidades, tratá-las de forma contextualizada.

A BNCC considera que os diferentes campos da matemática reúnem um conjunto de conceitos fundamentais que produzem articulações: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Para Freitas(2021, p.5) “essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento”.

Encontra-se na BNCC o que denomina-se de unidades temáticas, foi proposto cinco unidades temáticas, e entre elas está a unidade números e probabilidade e estatística, estas unidades orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do ensino fundamental.

Segundo Freitas (2021, p.5) a unidade temática sobre números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. E dentro desta temática encontra o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, o que contribui para a educação financeira dos estudantes. Logo, os conceitos fundamentais que podem ser ensinados em sala de aula, podem ser taxas de juros, inflação, aplicações financeiras(rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Assim poder-se-á favorecer um estudo interdisciplinar dialogando entre dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da economia, e também podendo fazer discussões sobre

questões de consumo, trabalho e dinheiro.

Na unidade temática probabilidade e estatística, é investigado segundo Brasil(2018, p.274) a incerteza e o tratamento de dados. De acordo com Freitas(2021, p.5) propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Logo os cidadãos necessitam desenvolver competências e habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, para que possa analisar e fazer julgamentos fundamentados e tomar as decisões mais adequadas.

Assim poder-se-á incluir que deverá fazer uso de conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e antecipar fenômenos. E como auxílio para a resolução desses problemas pode ser usado tecnologias como calculadoras, planilhas eletrônicas, esta podem auxiliar os alunos no processo de organização dos dados e na construção de gráficos e também nos cálculos das medidas de tendência central.

4.4.2.2 Ensino de matrizes na educação básica

Analizando os documentos com a finalidade de buscar os princípios que orientam o ensino, para que posterior na proposta de atividades/tarefas estejam em pleno acordo com os documentos norteadores da educação básica, e nesta subseção temos o objetivo de investigar em que local se insere o sistema de equações lineares e matrizes.

Pois a partir do uso de tecnologias como o google planilhas, pode-se montar tarefas/atividades que requeiram o uso de propriedade das matrizes, como a multiplicação entre matrizes, como de acordo com FONSECA (2013, p.36) com a planilha eletrônica podemos realizar certas operações com matrizes, como soma, multiplicação, obtenção da matriz transposta, inversa de matrizes e cálculo do determinante.

Um dos documento que norteiam a educação básica e que definiu nova direção/caminho, veio com a implementação da nova Base Nacional Comum

Curricular, ocorrerá mudanças significativas na organização dos currículos, tendo iniciado em 2018 que, segundo PARANÁ(2021, p.23) em 2018, o Conselho Estadual de Educação do Paraná elaborou a Deliberação n.03/2018, que estabelece as Normas Complementares que instituem o Referencial Curricular do Paraná da Educação Infantil e do Ensino Fundamental. E em meados de 2018, é publicada a resolução n.3 do MEC/CNE, esta vem para atualizar as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio(DCNEM), que de acordo com PARANÁ(2021, p.26) normatiza os vários aspectos da proposta de reforma do Ensino Médio. Um dos pontos a destacar-se segundo PARANÁ(2021, p.26) os princípios pedagógicos, estrutura curricular, as formas de oferta e demais inovações apresentadas na Lei n 13.415/2017.

No inciso IV do art.8, temos, quais aspectos o estudante deverá demonstrar ao fim da educação básica, logo na alínea b) do inciso IV do art. 8, trás que o estudante deverá dominar princípios científicos e tecnológicos que estão presentes na produção moderna. Ou seja, objetiva investigar os conceitos de finanças, para que entre em acordo com a alínea b) do inciso IV do art. 8, e que auxilie o educando ao longo do percurso educativo a desenvolver-se integralmente. A partir de determinados presentes na princípios, os estados da federação deverão nortear suas propostas curriculares para o ensino médio, o que está presente em uma série de documentos.

Segundo PARANÁ(2021, p.09) com a publicação da Lei Federal nº 13.415, são estabelecidos novas premissas para a oferta do Ensino Médio, dentre essas a reorganização curricular. No caso específico do Paraná, foi elaborado o Referencial Curricular para o Ensino Médio, o caminho para a produção deste documento que passou por duas consultas públicas e a colaboração de profissionais da educação básica e superior.

Segundo PARANÁ(2021, p.09) o referencial curricular, tem como principal objetivo orientar e subsidiar as redes e instituições escolares na elaboração de suas propostas pedagógicas curriculares. Também neste documento se ancora no pressuposto da estratificação por competências e habilidade. O Referencial Curricular está organizado em áreas do conhecimento, são:

- Linguagens e suas tecnologias;
- Matemática e suas tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas tecnologias;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas(Paraná, 2021, p.09).

Segundo PARANÁ(2021, p.09) a organização de cada uma das áreas ocorre por meio dos componentes curriculares que as constituem; seus respectivos objetos de conhecimento; considerando como princípios organizadores a interdisciplinaridade e a contextualização.

Na grande área Matemática e suas tecnologias, temos o compromisso social, que está além do papel formativo que encontra-se em seus saberes específicos, teóricos e conceituais. De acordo com BRASIL a matemática ainda deve dialogar com as outras áreas além do seu papel formativo e o compromisso social, para que, assim, os estudantes tenham mais conexões com a realidade, como observado em BRASIL.

é possível que a Matemática expanda em inter-relações permitindo a resolução de problemas em um contexto mais próximo do real, no qual “os estudantes devem utilizar conceitos, procedimento e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los,descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional(BRASIL,2018,p.470).

Desta forma, a matemática como área do conhecimento e integrando a outras áreas, fará com que seja expandido as inter-relações, ou seja, permitirá a aprendizagem mais contextualizada, assim o trabalho por competências e habilidade, segundo PARANÁ(2021, p.152) busca garantir ao estudante o desenvolvimento, a construção e a aplicação do conhecimento, a construção de argumentos e a comunicação em Matemática, bem como chegar à formalização e demonstração.

Para que seja alcançado o desenvolvimento do estudante, o trabalho por competência e habilidades irá delinear, auxiliar o sistema educacional e seus profissionais (professores) para que isto ocorra, pois, de acordo com BRASIL, tem o seguinte entendimento sobre competência, que é:

Competência, “a mobilização de conhecimento(conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para

resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p.8).

A definição de competência adotada no documento do Paraná é a que se encontra na BNCC, colocada acima. A organização do ensino com as respectivas competências; as habilidades, os objetos de aprendizagem; os objetos de conhecimento; e as possibilidades de conteúdo que orientam o processo, estão disponíveis em quadros organizadores.

Analizando o quadro organizador para identificar quais são as competências, habilidades, objetivos de aprendizagem, objetos de conhecimento e as possibilidades de conteúdos, sobre o ensino de sistemas de equações lineares e matrizes. Temos a seguinte descrição:

Competência: 3. utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;

Habilidades: (EM13MAT301) resolver e elaborar problemas do cotidiano, da matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvam equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com e sem apoio de tecnologias;

Objetos de aprendizagem: representar por meio de sistemas lineares situações do cotidiano e solucionar sistemas lineares explorando diferentes métodos algébricos e gráficos com ou sem uso de recursos tecnológicos;

Utilizar o cálculo matricial na resolução de sistemas lineares por escalonamento.

Objetos do conhecimento: sistemas de Equações Lineares; Matrizes;

Possibilidades de conteúdos: operações com matrizes; classificação de um sistema linear; matriz associada a um sistema linear; escalonamento de sistemas lineares. Representação gráfica da resolução de um sistema linear.

No que tange ao ensino de sistemas lineares e matrizes na educação básica, estes objetos de conhecimento aparecem na grade curricular do Ensino médio, não específico em qual série aparece, pois o documento analisado é uma versão experimental, ou seja, deve sofrer alterações ao longo do tempo. Porém, um ponto a se ressaltar é o propósito de desenvolver as habilidades e competências dos

discentes, o professor neste caso segundo PARANÁ(2021, p.176) “a mediação feita pelo professor(observação do termo ‘professor’ foi utilizado aqui por se tratar de um citação direta de um documento de estado) assume papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem ao desenvolver o trabalho em sala de aula de modo a mobilizar saberes para a resolução de problemas do mundo contemporâneo, por meio da interdisciplinaridade e da participação ativa do estudante”.

Assim, na elaboração de atividades/tarefas serão utilizados estes princípios, competências e habilidades, para que estas atividades/tarefas, estejam em acordo com estes documentos norteadores da educação básica, além disso, ambas as subseções se complementam.

4.4.3 PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Aqui será apresentado algumas tarefas que podem ser trabalhadas na educação básica a fim de despertar no estudante a curiosidade por aprender mais sobre investimentos, e também, segundo a BNCC(p.274) de que “todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas”. Disso, concluímos que há a necessidade de que todo futuro cidadão deverá aprender em seus anos escolarização a fazer julgamentos bem fundamentados e também coletar, organizar, apresentar e interpretar dados. Ou seja, a elaboração de tarefas que contextualizam determinados cenários em que seja requerido estas habilidades, deverá auxiliar na aprendizagem. E pelo objetivo de divulgar a cultura dos investimento a estudantes, poderá ser de mais valia a auxiliar no desenvolvimento dessas habilidades.

4.4.3.1 Tarefa variações percentuais na educação básica.

Esta tarefa tem a finalidade de mostrar o primeiro conceito que é utilizado por analistas e gestores para escolher ações e também de outros instrumentos

financeiros, pois, para se calcular a variação percentual é necessário fixar um período para se analisar se o preço daquele ativo subiu ou desceu.

Na aplicação de dois ativos na seção 4.1 aplicação em um cenário com 2 ativos, foi descrito em passos a elaboração da aplicação, e em um dos passos que no caso é o passo b, foi utilizado este conceito para calcular as variações percentuais no preço da ação, da seguinte forma:

- 1) Após escolher os ativos e montar na planilha(aba) o que foi definido de base de dados com os retornos
- 2) Foi utilizado a seguinte equação para calcular os retornos $R_i = \frac{\text{cotação recente}}{\text{cotação dia anterior}} - 1$.

Como neste exemplo: $\frac{53,71}{53,80} - 1 = -0,17\%$ em que o R\$: 53,71 é a cotação do dia 03 de janeiro de 2020 e a cotação R\$: 53,80 é do dia 02 de janeiro de 2020, do ativo Banco do Brasil S.A.

O conceito de variações percentuais é importante e é o primeiro passo na aplicação do modelo, que é calcular os retornos dos ativos para posterior calcular as matrizes de variância e covariância e a média dos retornos.

No ensino médio é mostrado a seguinte fórmula:

$$J = \frac{V_t}{V_0} - 1 \quad \text{ou} \quad J = \frac{V_t - V_0}{V_0}$$

em que

$R_i = J = \text{variação percentual};$

$V_t = \text{valor em uma data futura};$

$V_0 = \text{valor na data zero}.$

Que entrariam no ensino de número e estatística na educação básica. Este conceito é importante para se calcular a variação de qualquer preço, este aumentando ou reduzindo o seu valor e, fixado o período que está analisando poderá calcular.

Na figura 23, encontra-se a proposta de atividade para trabalhar variação percentual com os estudantes.

**FIGURA 23 - TAREFA 1 - COMO GESTORES DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
CALCULAM A VARIAÇÃO PERCENTUAL DE ATIVOS**

Como gestores de fundos de investimento calculam a variação percentual de ativos.

Dentro do mundo das finanças há gestores de fundos que se utilizam do cálculo das variações percentuais para escolher ou eliminar ativos de suas carteiras de investimento, uma carteira de investimento é basicamente um conjunto de ativos que se escolhe para se aplicar neles e assim buscar uma rentabilidade futura de sua poupança ou do seu capital que você separou e guardou.

Gestores de investimentos procuram elaborar carteira de investimento para seus clientes, escolhendo ativos que tiveram uma valorização acima da média no passado e buscam selecionar estes ativos, acreditando que retorno passado podem ser reproduzido no futuro.

Na tabela abaixo temos o seguinte produto financeiro, três ações, uma ação é a fração de uma empresa que abriu capital na bolsa de valores, neste caso, a bolsa de Valores é a do Brasil. Na tabela temos duas empresas, o Banco do Brasil(BBAS3) que é o banco mais antigo do país e o primeiro intermediador financeiro sendo fundado em 1808, além disso, é uma empresa sólida, ou seja tem geração de lucro, e, do outro lado a empresa Vale(VALE3) que é a maior empresa de mineração do Brasil, que consequentemente o minério por seu um produto que é um recurso escasso na economia, faz com que ela tenha lucros acima da média o que é refletido no preço de seus papéis. E a última empresa é Magazine Luiza (MGLU3) é uma empresa grande do setor de varejo e que nos últimos anos ela devido a seus lucros líquidos ela foi escolhida.

De que forma podemos calcular a variação dos preços dessas ações com o objetivo de escolhê-la para compor nossa carteira? Caso escolha, justifique o motivo de sua escolha matematicamente.

BBAS3(Banco do BRASIL)		VALE3(VALE S.A.)		MGLU3(MAGAZINE LUIZA)	
Date	Close	Date	Close	Date	Close
21/07/2022	R\$ 34,91	21/07/2022	R\$ 68,57	09/03/2022	R\$ 6,23
22/07/2022	R\$ 34,67	22/07/2022	R\$ 69,21	10/03/2022	R\$ 5,96
25/07/2022	R\$ 35,20	25/07/2022	R\$ 70,49	11/03/2022	R\$ 5,69
26/07/2022	R\$ 35,32	26/07/2022	R\$ 70,36	14/03/2022	R\$ 5,33
27/07/2022	R\$ 35,55	27/07/2022	R\$ 70,52	15/03/2022	R\$ 4,87
28/07/2022	R\$ 36,21	28/07/2022	R\$ 70,69	16/03/2022	R\$ 5,13
29/07/2022	R\$ 35,97	29/07/2022	R\$ 69,75	17/03/2022	R\$ 5,54
01/08/2022	R\$ 35,68	01/08/2022	R\$ 68,08	18/03/2022	R\$ 5,82
02/08/2022	R\$ 36,16	02/08/2022	R\$ 70,25	21/03/2022	R\$ 5,72
03/08/2022	R\$ 36,41	03/08/2022	R\$ 67,52	22/03/2022	R\$ 5,81
04/08/2022	R\$ 37,10	04/08/2022	R\$ 67,13	23/03/2022	R\$ 6,00
05/08/2022	R\$ 37,79	05/08/2022	R\$ 68,00	24/03/2022	R\$ 6,60
08/08/2022	R\$ 38,98	08/08/2022	R\$ 68,58	25/03/2022	R\$ 6,54
09/08/2022	R\$ 39,63	09/08/2022	R\$ 70,00	28/03/2022	R\$ 6,47
10/08/2022	R\$ 39,97	10/08/2022	R\$ 70,05	29/03/2022	R\$ 7,00
11/08/2022	R\$ 41,74	11/08/2022	R\$ 72,49	30/03/2022	R\$ 6,87
12/08/2022	R\$ 44,10	12/08/2022	R\$ 69,80	31/03/2022	R\$ 6,82
15/08/2022	R\$ 42,99	15/08/2022	R\$ 68,30	01/04/2022	R\$ 7,35
16/08/2022	R\$ 43,20	16/08/2022	R\$ 69,82	04/04/2022	R\$ 7,19
17/08/2022	R\$ 42,81	17/08/2022	R\$ 68,23	05/04/2022	R\$ 6,91
18/08/2022	R\$ 41,82	18/08/2022	R\$ 67,72	06/04/2022	R\$ 6,62
19/08/2022	R\$ 41,05	19/08/2022	R\$ 66,96	07/04/2022	R\$ 6,56
22/08/2022	R\$ 41,47	22/08/2022	R\$ 65,98	08/04/2022	R\$ 6,13

FONTE: elaborado pelo autor (2022).

A tarefa proposta acima tem o caráter de promover o estudo do cálculo da variação percentual, sendo que os alunos deverão escolher a forma de se calcular,

ou seja, deverão definir o período, qual ativo será o selecionado, se um deles não for selecionado, deverá justificar o motivo da não escolha. A solução desta tarefa encontra-se no anexo 3.

4.4.3.2 Aplicação da matriz de covariância na educação básica

De acordo com a BNCC(p.274) “todos os cidadão precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, apresentar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. A segunda tarefa trabalhará os conceitos de média, matriz, variância e covariância a fim de promover o envolvimento dos estudantes para que consigam desenvolver habilidades como: organizar, apresentar, interpretar e analisar dados. Conceitos que são ensinados normalmente no ensino médio, no conteúdo de estatística e, para a proposta da tarefa serão apresentados os conceitos para compreender a matriz de covariância

Iniciando pela covariância ou também chamada de variância conjunta é a média do grau de interdependência linear entre duas variáveis. Para o cálculo da covariância usa-se a seguinte fórmula

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

em que x_i e y_i são os dados históricos de x e y definido em um dado momento de i .

Os valores representado por $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as médias dos respectivos dados das séries de x e y , n na fórmula representa a quantidade de dados que existe na série de dados e por fim $\sigma_{x,y}$ que é denominado de covariância entre x e y .

A covariância é utilizada para compreender a relação entre duas variáveis, ou seja, qual é seu comportamento em relação uma à outra, portanto a partir da covariância poder-se-á analisar a direção da relação entre as variáveis que está se analisando. E a compreensão que deverá ter do resultado é, se os valores da variância forem positivos, isto significa que valores acima da média de uma variável estão associados a valores acima da média da outra variável que está analisando e caso sejam abaixo dos valores médios são igualmente associados. E se os valores

da variância forem negativos, isso significa que de acordo com FREITAS(2021, p.39) “valores acima da média de uma variável estão associados com valores médios abaixo da outra variável.”

No mundo das finanças, compreender o cálculo da covariância é essencial, pois é através dele que se pode entender como duas variáveis estão se relacionando. Isto significa que é compreender o que acontece com o preço do ativo x em relação ao preço do ativo y, quando aumenta ou diminui. E isto é verificado da seguinte maneira, quando há uma covariância positiva entre ativos, isto indica que um ativo acompanha a movimentação do outro e caso tenha uma covariância negativa entre ativos, isto indica que os ativos se movimentam em direções opostas, ou seja, se um subir o outro deve fazer o movimento ao contrário e vice versa.

Ao organizar os dados dos preços dos ativos selecionados, com um total de 7 observações, o próximo passo é definir a variância e covariância entre os ativos, denominados de x e y, primeiro a variância dos ativos x e y são dadas, respectivamente pela fórmula

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{7} \sum_{t=1}^7 (\rho_{tx} - \bar{\rho}_x)^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{7} \sum_{t=1}^7 (\rho_{ty} - \bar{\rho}_y)^2$$

E a covariância entre os ativos x e y no período de observações selecionados, é dado pela fórmula

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{7} \sum_{t=1}^7 (\rho_{tx} - E(R_x))(\rho_{ty} - E(R_y))$$

em que $E(R_x)$ e $E(R_y)$ representam o retorno médio esperado (podendo ser anualizado, bastando apenas multiplicar por 246 (número de dias que há funcionamento da bolsa)) dos ativos x e y.

E por fim, pode-se organizar a covariância e a variância entre os ativos x e y na estrutura de uma matriz, a qual é denominada de matriz de covariâncias, onde os elementos das diagonais contém as variâncias dos ativos, e os elementos fora da diagonal contém as covariâncias entre os ativos x e y, representada por:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x,y} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

Para a construção da matriz de covariâncias entre 2 ativos, foram selecionados os ativos Banco do Brasil(BBAS3), um dos maiores bancos do Brasil e a Vale(VALE3) que é a maior mineradora do Brasil. Os dados históricos foram coletados do google finance e armazenados em uma planilha, o período de análise escolhido foi o diário, compreendido entre as seguintes datas 21/07/2022 a 29/07/2022. As 7 observações foram organizadas na tabela 15.

TABELA 15 - DADOS DA OBSERVAÇÃO DAS AÇÕES BBAS3 E VALE3

BBAS3(Banco do BRASIL)		VALE3(VALE S.A.)	
Date	Close	Date	Close
21/07/2022	R\$ 34,91	21/07/2022	R\$ 68,57
22/07/2022	R\$ 34,67	22/07/2022	R\$ 69,21
25/07/2022	R\$ 35,20	25/07/2022	R\$ 70,49
26/07/2022	R\$ 35,32	26/07/2022	R\$ 70,36
27/07/2022	R\$ 35,55	27/07/2022	R\$ 70,52
28/07/2022	R\$ 36,21	28/07/2022	R\$ 70,69
29/07/2022	R\$ 35,97	29/07/2022	R\$ 69,75

FONTE: elaborado pelo autor(2022).

Considerando o ativo BBAS3 sendo o (x) e o ativo VALE3 sendo o (y) foi calculado a variação percentual, média das variação porcentual, a variância e a covariância entre os ativos.

Primeiro o cálculo da variação percentual, com a seguinte fórmula

$$J = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

em que

$R_i = J = \text{variação percentual};$

$V_t = \text{valor em uma data futura};$

$V_0 = \text{valor na data zero}.$

Calculando a primeira variação percentual da BBAS3, temos o seguinte valor:

$$j = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{34,67}{34,91} - 1 = -0,00687$$

a segunda variação

$$j = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{35,20}{34,67} - 1 = -0,01529$$

e assim sucessivamente, até o final, para o ativo BBAS3

$$j = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{35,32}{35,20} - 1 = 0,00341$$

$$j = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{35,55}{35,32} - 1 = 0,00651$$

$$j = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{36,21}{35,55} - 1 = 0,01857$$

$$j = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{35,97}{36,21} - 1 = -0,00663$$

Após, calcular para BBAS3 o retorno e para VALE3, poderá passar para a próxima etapa, cálculo da média dos retornos, pois, este valor, é que será considerado o retorno futuro, dado o retorno passado, é uma esperança de que aconteça.

Denominadores de $\bar{x}$ = BBAS3, é a média dos retornos Da BBAS3, e $\bar{y}$ = VALE3, é a média dos retornos da VALE3.

Iniciando pela média dos retorno de BBAS3, temos:

$$\bar{x} = \frac{((-0,00687)+0,01529+0,00341+0,00651+0,01857+(-0,00663))}{6} = 0,00505$$

E do outro lado, a média dos retorno de VALE3, temos:

$$\bar{y} = \frac{(0,00933+0,01849+(-0,00184)+0,00227+0,00241+(-0,01330))}{6} = 0,00290$$

no próximo passo, é calcular a variância para ambos os ativos, primeiro para BBAS3 = x, temos a seguinte fórmula:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{7} \sum_{t=1}^7 (\rho_{tx} - \bar{\rho}_x)^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = \sigma_{x,x} &= \frac{1}{6} \sum_{t=1}^6 [((-0,00687) - 0,00505)^2 + (0,01529 - 0,00505)^2 + \\ &((0,00341) - 0,00505)^2 + (0,00651 - 0,00505)^2 + (0,01857 - 0,00505)^2 \\ &((-0,00663) - 0,00505)^2] = 0,00009514 \end{aligned}$$

e agora calcularemos para os valores da VALE3

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{7} \sum_{t=1}^7 (\rho_{ty} - \bar{\rho}_y)^2$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y,y} = \frac{1}{6} \sum_{t=1}^6 [((-0,00933) - 0,00290)^2 + (0,01849 - 0,00290)^2 + (-0,00184 - 0,00290)^2 + (0,00227 - 0,00290)^2 + (0,00241 - 0,00290)^2 + ((-0,01330) - 0,00290)^2] = 0,000095012$$

e por último calcula-se a covariância entre os ativos, com a fórmula, a saber:

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{7} \sum_{t=1}^7 (\rho_{tx} - E(R_x))(\rho_{ty} - E(R_y))$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x,y} = \sigma_{y,x} &= \frac{1}{6} [((-0,00687) - 0,00505)(-0,00933) - 0,00290) + \\ & (0,01529 - 0,00505)(0,01849 - 0,00290) + (0,00341 - 0,00505) \\ & (-0,00184 - 0,00290) + (0,00651 - 0,00505)(0,00227 - 0,00290) + \\ & (0,01857 - 0,00505)(0,00241 - 0,00290) + (-0,00663 - 0,00505) \\ & (-0,01330 - 0,00290)] = \frac{1}{6} [(-0,01192)(0,00644) + (0,01024)(0,01560) + \\ & (-0,00164)(-0,00474) + (0,00147)(-0,00062) + (0,01352)(-0,00048) + \\ & (-0,01167)(-0,01619)] = \frac{1}{6} [(-0,0000767) + (0,0001598) + (0,0000078) + \\ & (-0,0000009) + (-0,0000066) + (0,0001890)] = 0,0000454 \end{aligned}$$

Logo, a matriz de covariância:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00009514 & 0,0000454 \\ 0,0000454 & 0,00009501 \end{bmatrix}$$

Para finalizar, ter ativos com covariâncias positivas na carteira representa um risco maior. A melhor maneira para reduzir o risco seria ter ativos com covariância negativa, pois, assim, o ganho de um ativo pode compensar a desvalorização de outro. E primar pela organização das informações é justamente fazer um gerenciamento do risco do portfólio de investimento que está sendo construído.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No referencial teórico foi construído um arcabouço com os conceitos de finanças, a estrutura do sistema financeiro nacional, os tipos de produtos financeiros que há atualmente disponíveis e que são mais comuns no mercado financeiro, com o intuito de apresentá-los de forma clara.

Na seção de teoria moderna de portfólio vários conceitos essenciais foram construídos, como o retorno, variância, correlação, diversificação e a fronteira eficiente, para depois formalizar o modelo média variância que foi proposto por Markowitz. Este modelo se tornou um pilar para área de finanças e permitiu a construção de portfólio otimizado ancoradas relação risco-retorno. Posteriormente falamos do modelo de precificação de ativos financeiros apresentado por Sharpe. Foi Sharpe o primeiro a considerar a existência de uma taxa livre de risco, assim o mínimo que qualquer ativo deve pagar pelo risco de se investir nele é a taxa livre de risco acrescido do prêmio de risco.

Foram realizadas duas aplicações, a primeira com dois ativos foi para ilustrar toda matemática e o funcionamento do modelo de média - variância de Markowitz. No segundo com sete ativos, tanto o modelo de Markowitz quanto o de Sharpe foram utilizados. Conforme a quantidade de ativos aumentou foi visível a dificuldade de se trabalhar com a quantidade de informação necessária para o modelo de Markowitz. Ao analisar os resultados, em um cenário com 7 ativos, conclui-se que o modelo média-variância, pode auxiliar o investidor a encontrar a melhor carteira dada a preferência do investidor e sua aversão ao risco, e assim, ter o melhor ajuste a seus interesses. Também foi realizada uma simulação de comparação entre o modelo de média-variância e um investidor que escolhe as taxas de participação aleatoriamente. Foi verificado que o investidor(a) escolhendo aleatoriamente pode não ter o melhor retorno, ou seja, pode estar até correndo maior risco por um retorno não tão favorável ou compensatório. No modelo de precificação de ativos (CAPM) a escolha se pauta em procurar uma rentabilidade acima da taxa livre de risco(Selic). Dependendo do investidor e de suas preferências, pode escolher ativos que é considerado agressivo, neutro e defensivo.

Caso for um portfólio, pode ser agressivo, neutro ou defensivo. Assim podemos concluir que ambos os modelos podem auxiliar o investidor a estratificar o risco e retorno de seus investimentos.

Para finalizar propomos duas atividades relacionadas aos conceitos de finanças. A primeira para trabalhar as variações percentuais, as variações percentuais são conteúdos do ensino básico e a atividade relaciona estas variações aos conceitos de finanças, mais precisamente a variação do preço de uma ação. A segunda aplicação é sobre matrizes. Nesta atividade relacionamos alguns conceitos de estatística para construir a matriz de covariância. A variância e a covariância desempenham um papel central em finanças, são elas que ajudam a entender o conceito de risco.

5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como trabalhos futuros, possibilidades em desenvolver tarefas ancoradas na perspectiva de Educação Financeira Escolar, a qual não foi trabalhada neste trabalho, porém, verifica-se que há possibilidade de elaborar tarefas afim dos alunos serem inseridos no mundo das finanças, além de se avaliar as tarefas, a fim de se verificar a sua eficiência em sala de aula e se é necessário fazer ajuste, a qual não foi feito neste estudo. Mas ao se elaborar tarefas desta estrutura, os estudantes são levados a produzirem significados ancorados na matemática, e, a elaboração destas tarefas, deverá levar o estudante a produzir significados sobre o sistema financeiro nacional, os produtos financeiros existentes atualmente e como o mercado financeiro funciona.

REFERÊNCIAS

Alcântara, J. C. G. O modelo de avaliação de ativos (capital asset pricing model) aplicações. **Revista de Administração de empresas**, Rio de Janeiro, v.20, n.3, p.31-41 - 65, jan/mar. 1981. Disponível em : < <https://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rae/article/view/39604> >. Acesso em junho de 2022.

ANBIMA. **Raio X do investidor Braileiro**. 3.ed.2020.

ARENHART, S. G.. **Investimento em títulos públicos do tesouro direto: características e especificidades na relação risco-retorno**. Orientador: Prof. Fabiano Geremia. 76p. Monografia (curso de Administração), Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2020.

Araujo, E. A. T.; Oliveira, V. C.; Silva, W. A. C. CAPM em estudos brasileiros: uma análise da pesquisa. **Revista de contabilidade e Organizações**, São Paulo, v.6, n.15, o.95-122, 2012.

BRASIL, BOLSA, BALCÃO [B]³. **A descoberta da bolsa pelo investidor brasileiro**. Dezembro/2020. Disponível em: < https://www.b3.com.br/data/files/69/75/42/A0/36ECA71068C61CA7AC094EA8/Pesquisa%20PF_vf%20dez.20_.pdf >. Acesso em: nov de 2021

BRASIL/ENEf. Estratégia Nacional de Educação Financeira - Plano Diretor da ENEf. [2011]. Disponível em: <https://www.vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2017/08/Plano-Diretor-ENEf-Estrategia-Nacional-de-Educacao-Financeira.pdf> . acesso em: janeiro de 2021.

BRASIL/ENEf. Estratégia Nacional de Educação Financeira - Plano Diretor da ENEf: anexos. [2011]. Disponível em: <https://www.vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2017/08/Plano-Diretor-ENEf-Estrategia-Nacional-de-Educacao-Financeira.pdf> . acesso em: janeiro de 2021.

BRUM, F. M.. **Aplicação da teoria de Markowitz e Índice de Sharpe em clube de investimento**. Orientador: Prof. Oscar Galli. p.62. TCC (especialista em mercado de capitais)- Escola de administração, especialização em mercado de capitais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

CALOVI, R. W. **Finanças Pessoais: um estudo sobre a prática do planejamento financeiro de estudantes universitários de Porto Alegre**. Orientador: Prof. Dr. André Luís Martinewski. 91p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em administração) - Departamento de Ciências Administrativas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

COSTA, J. DA C.; MARTINS, L. A. DA S.; GONÇALVES, R. B.; MASCARENHAS, M. P.; MARÇAL, S. A. Conhecimento/investimento no mercado financeiro dos alunos de

uma IES. **LIBERTAS: Revista de Ciências Sociais Aplicadas**. Belo Horizonte, v. 8, n. 1, p. 245-257, 5 jul. 2018.

DA SILVA, Martony Demes. Aplicação da Ferramenta Google Colaboratory para o Ensino da Linguagem Python. *In: ESCOLA REGIONAL DE ENGENHARIA DE SOFTWARE (ERES)*, 4. , 2020, Evento Online. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2020 . p. 67-76. DOI: <https://doi.org/10.5753/eres.2020.13717>.

Dividendos. Status Invest, 2020. Disponível em: < <https://statusinvest.com.br/termos/m/margem-liquida> >. acesso em: novembro de 2021.

FABRIS, G.. **Estudo Comparativo do índice bovespa X Certificado de depósito Interbancário(CDI), visando identificar qual dos dois teve variação maior no período compreendido entre 2005 e 2010**. Orientador:Prof. Msc. Ângelo Natal Périco. 51p. Monografia (Curso de Pós- Graduação Especialização MBA em gerência financeira), Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2011.

FERREIRA, L. V. B.. **Investimento em títulos públicos: uma análise de investimento em títulos públicos do tesouro nacional em um cenário de crise econômica**. Orientador: Prof. Me. Roberto Lamb.113p. Monografia(escola de Administração departamento de ciências administrativas), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

FONSECA, M. A. M. **O uso da planilha e correio eletrônico como recursos didáticos no ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares: uma experiência com alunos do ensino médio**. Orientadora:Prof.^a Dr.^a Maria Deusa Ferreira da Silva.p.107.Dissertação(mestre em Matemática)-Mestrado profissional em matemática em rede nacional, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, vitória da Conquista,2013.

FREITAS, F.R. . **Aplicações de modelos de otimização de portfólios**. Orientador: Prof^a. Dr^a.Rubia Mara de Oliveira Santos.64p.Dissertação (Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2021.

HULL, J. C. **Opções, futuros e outros derivativos**. 9.ed.Porto Alegre: Bookman, 2016.

Infomoney. Sabesp(SBSP3. Disponível em: < <https://www.infomoney.com.br/cotacoes/b3/acao/sabesp-sbsp3/> >. Acesso em: jul de 2022.

Infomoney. Telefônica Brasil (VIVT3). Disponível em: < <https://www.infomoney.com.br/cotacoes/b3/acao/telef-brasil-vivt3/> >. Acesso em: jul de 2022.

Infomoney. Itaú Unibanco(ITUB4). Disponível em: < <https://www.infomoney.com.br/cotacoes/b3/acao/itau-unibanco-itub4/> >. Acesso em: jul de 2022.

Infomoney. ETFs(bova11). Disponível em: < <https://www.infomoney.com.br/cotacoes/b3/etf/etf-bova11/> >. Acesso em: jul de 2022.
Lehmkuhl, R. F. A ; Schnorrenberger, D. ; Flach, L.. Teoria Moderna do Portfólio: a busca por uma carteira de investimento adequada. **Revista Controladoria e Gestão - RCG**.Itabaiana, Vol.3, Nº1, p.578-594, Jan/Jun. 2022.

Manique, P. H. E.; Bered, R. O investimento em ativos de renda fixa para acadêmicos do curso de ciências contábeis da FACCAT: uma análise comparativa de acordo com o perfil do investidor. **Revista eletrônica de ciências contábeis**. Taquara, v.9, n.2, jan - jun -2020

MARCOLIN, A.F.. **Otimização de Portfólio: Uma aplicação ao Mercado Acionário Brasileiro**. Orientador: Prof. Dr. Marcio Valk.33p. Monografia(Instituto de Matemática e Estatística), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

Margem Líquida. Status Invest, 2020. Disponível em: < <https://statusinvest.com.br/termos/m/margem-liquida> >. acesso em: outubro de 2021.

MELO, I. F. ; POLIDORIO, G. R. S. Investimento em renda fixa e renda variável. **Encontro de iniciação científica (ETIC 2016)**. v. 14, n. 14, 2018.

MOBILIÁRIOS, C. V. **O mercado de valores mobiliários brasileiro**.3.ed.Rio de Janeiro:Comissão de Valores Mobiliários, 2014.

OLIVEIRA, F. A. S..**Desempenho da Otimização Robusta de Carteira no Mercado Acionário Brasileiro**.Orientador: Prof. Dr. Robert Aldo Iquiapaza Coaguila.115p. Dissertação(Centro de Pós-graduação e pesquisa em Administração da Faculdade de Ciências Econômicas), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

PARANÁ. **Referencial Curricular para o ensino médio do Paraná**.V.1, Curitiba: SEED/PR, 2021.ISBN: 978-85-8015107-7.Disponível em : < https://professor.escoladigital.pr.gov.br/sites/professores/arquivos_restritos/files/documento/2022-02/ensino_medio_referencial_curricular_vol1_vf.pdf >. Acesso em: janeiro de 2022.

PARANÁ. **Currículo para o ensino médio da Rede Estadual do Paraná**. [Curitiba]: [SEED/PR], 2021. Disponível em: < https://professor.escoladigital.pr.gov.br/sites/professores/arquivos_restritos/files/documento/2021-12/ensino_medio_curriculo_geral.pdf >. Acesso em: janeiro de 2022.

Patrimônio Líquido. Status Invest, 2020. Disponível em: < <https://statusinvest.com.br/termos/m/margem-liquida> >. acesso em: novembro de 2021.

PINTO, D. L. C.. Investimentos - Risco X Retorno. **Revista Tecnológica da FATEC-PR**, v.1, n.11, p.58-67, jan/dez, 2020.

RADAELLI, F. **Estudo sobre as finanças pessoais dos alunos de ciências contábeis de uma instituição de ensino superior do vale do taquari**. Orientador: Pro. Gabriel Machado Braidó. 57p. Monografia(Bacharel em Ciências contábeis) - Curso de ciências contábeis, Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES, Lajeado, 2018.

RAMBO, A. C.. **O perfil do investidor e melhores investimentos: da teoria à prática do mercado brasileiro**. Orientador: Ronivaldo Steingraber.85p. Monografia(Curso de Graduação em ciências econômicas), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

Rosa, M. R; Bered, R.. A importância da análise fundamentalista para avaliar o preço das ações de companhias listadas na bolsa de valores.**Revista eletrônica de ciências contábeis**. Taquara, v.7, n.2, 2018.Disponível em: <<https://seer.faccat.br/index.php/contabeis/article/view/749#:~:text=Diante%20dos%20dados%20analisados%2C%20concluiu.o%20seu%20investimento%20em%20a%2C3%A7%C3%B5es>>. Acesso em: janeiro de 2022.

SANTOS, A. A. P; TESSARI, C. Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro. **Revista Brasileira de Finanças**. Rios de Janeiro: Sociedade Brasileira de Finanças, v. 10, n.3, p. 369 - 393, 2012.

Sharpe, W. F. Mutual fund performance. **The journal of business**, v. 39, n. 1, p.119 - 138. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2351741>. Acesso em : abril de 2022.
Sharpe, W. F. A simplified model for portfolio analyses. **Management science**, v.9, n. 2, p.277 - 293, 1963. Disponível em: <<https://www.theinquisitiveinvestor.org/blog/wp-content/uploads/2020/07/A-Simplified-Model-for-Portfolio-Analysis-William-Sharpe.pdf>>. Acesso em abril de 2022.

SILVA, A. M. ; POWELL, A. B. Um programa de Educação Financeira para a Matemática escolar da Educação Básica. In: Anais do 11º Encontro Nacional de Educação Matemática, p 1-17. Curitiba: SBEM,2013.

SILVA, A. M. ; POWELL, A. B. Educação financeira na escola: A perspectiva da organização para cooperação e desenvolvimento econômico. **Boletim GEPEM**, n.º66, p 3-19, jan- jun, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2015.024> . Acesso em: fevereiro de 2022.

SILVA, B. A. O.; NOGUEIRA, S. G.; RIBEIRO, K. C. .S.. Aplicação prática do índice de sharpe na determinação de um portfólio ótimo de ativos. **Revista eletrônica de Administração(online)**. ISSN:1679-9127. Franca, v.14, n.1, ed.26, jan-jun, 2015.

SILVA, S. W. et al. O sistema financeiro nacional brasileiro: contexto, estrutura e evolução. **Revista da Universidade Vale do Rio Verde**, Três corações, v. 14, n. 1, p. 1015-1029, 2016.

VARGA, G. Índice de Sharpe e outros indicadores de performance aplicados a fundos de ações brasileiros. **Revista de Administração Contemporânea**, v. 5, n.3, p.215-245, Set/Dez. 2001.

ANEXO 1 – CÓDIGO APLICAÇÃO EM UM CENÁRIO DE 7 ATIVOS

Para acessar o arquivo com o código no caderno do google colaboraty, e acessar o link :

https://colab.research.google.com/drive/1386UHAzg4SMrZQVtmRL4NoI0wuM_7MBz?usp=sharing .

link colab com google drive

```
from google.colab import drive
drive.mount('/content/drive')
#só rodar o código e selecionar a pasta drive => mydrive => pasta ações
```

Montar base de dados

```
import pandas_datareader.data as web
import pandas as pd
import datetime as dt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import plotly.express as px

!pip install yfinance --upgrade --no-cache-dir
import yfinance as yf
yf.pdr_override()
```

```
acoes = ['SBSP3.SA', 'BBSE3.SA', 'VIVT3.SA', 'EGIE3.SA', 'BBAS3.SA', 'ITUB4.
...SA', 'BOVA11.SA']
```

```
] acoes_df = pd.DataFrame()
for acao in acoes:
    acoes_df[acao] = web.get_data_yahoo(acao, start='2016-04-01',
    <→end='2022-06-01')['Close']
acoes_df
```

```
[] acoes_df = acoes_df.rename(columns={'SBSP3.SA': 'SABESP', 'BBSE3.SA': 'BB_
...SEGURIDADE', 'VIVT3.SA': 'Telefônica Brasil', 'EGIE3.SA': 'Engie_
...energia', 'BBAS3.SA': 'Banco do Brasil', 'ITUB4.SA': 'Itau Unibanco', 'BOVA11.
...SA': 'BOVA' })
```



```

[] acoes_df.head()
[] acoes_df.isnull().sum()
[] acoes_df.shape
[]

]: acoes_df = pd.DataFrame()
  for acao in acoes:
    acoes_df[acao] = web.get_data_yahoo(acao, start='2016-04-01', _
    ↪end='2022-06-01')['Close']
acoef_df

```

```

[] acoes_df = acoes_df.rename(columns={'SBSP3.SA': 'SABESP', 'BBSE3.SA': 'BB _
  ↪SEGURIDADE', 'VIVT3.SA': 'Telefônica Brasil', 'EGIE3.SA': 'Engie _
  ↪energia', 'BBAS3.SA': 'Banco do Brasil', 'ITUB4.SA': 'Itau Unibanco', 'BOVA11.
  ↪SA': 'BOVA' })

```

```

[] acoes_df.head()
[] acoes_df.isnull().sum()
[] acoes_df.shape
[] acoes_df.dropna(inplace=True)
[] acoes_df.shape
[] acoes_df.isnull().sum()
[] acoes_df.to_csv('8acoes.csv')

```

```

[] acoes_df = pd.read_csv('/content/8acoes.csv')
acoef_df

#acoes_df = pd.read_csv('/content/aplicacao7ativossemBOVA.csv')
#acoes_df
#acoes_df = pd.read_csv('/content/acoestcc1portfolio3at.csv')

```

```

[] acoes_df.columns[1:]
[] acoes_df.describe()
[] sns.histplot(acoes_df['SABESP'])

```

```

[] plt.figure(figsize=(10,50))
  for i in np.arange(1, len(acoes_df.columns)): plt.subplot(9, 1, i +
  1) sns.histplot(acoes_df[acoes_df.columns[i]], kde=True)
  plt.title(acoes_df.columns[i])

```

```
acoes_df.plot(x = 'Date', figsize = (15, 7), title = 'Histórico do Preço das_
ações')
```

```
acoes_df_normalizado = acoes_df.copy()
for i in acoes_df_normalizado.columns[1:]:
    acoes_df_normalizado[i] = acoes_df_normalizado[i] / acoes_df_normalizado[i][0]
```

```
acoes_df_normalizado
```

```
acoes_df_normalizado.plot(x = 'Date', figsize = (15, 7), title = 'Histórico do_
Preço -normalizado')
```

```
figura = px.line(title = 'Histórico de Preço -normalizado')
for i in acoes_df_normalizado.columns[1:]: figura.add_scatter(x
    = acoes_df_normalizado['Date'], y =_
    acoes_df_normalizado[i], name = i)
figura.show()
```

TAXA DE RETORNO SIMPLES

```
dataset= pd.read_csv('/content/8acoes.csv')
```

```
dataset.shape
```

```
dataset
```

```
len(dataset)
```

```
((dataset['SABESP'][len(dataset)- 1]- dataset['SABESP'][0])/_
dataset['SABESP'][0]) * 100
```

```
((dataset['BB SEGURIDADE'][len(dataset)- 1]- dataset['BB SEGURIDADE'][0])/_
dataset['BB SEGURIDADE'][0]) * 100
```

```
((dataset['Telefônica Brasil'][len(dataset)- 1]- dataset['Telefônica_
Brasil'][0])/ dataset['Telefônica Brasil'][0]) * 100
```

```
((dataset['Engie energia'][len(dataset)- 1]- dataset['Engie energia'][0])/_
dataset['Engie energia'][0]) * 100
```



```
[ ((dataset['Banco do Brasil'][len(dataset)-1]- dataset['Banco do Brasil'][0])/
  ...dataset['Banco do Brasil'][0]) * 100
```

```
[ ((dataset['Itau Unibanco'][len(dataset)-1]- dataset['Itau Unibanco'][0])/
  ...dataset['Itau Unibanco'][0]) * 100
```

```
[ ((dataset['BOVA'][len(dataset)-1]- dataset['BOVA'][0])/ dataset['BOVA'][0]) *
  ...100
```

```
[ dataset['Retorno Simples SABESP']= (dataset['SABESP']/ dataset['SABESP'].
  ...shift(1))-1
dataset['Retorno Simples BB SEGURIDADE']= (dataset['BB SEGURIDADE']/
  ...dataset['BB SEGURIDADE'].shift(1))-1
dataset['Retorno Simples Telefônica Brasil']= (dataset['Telefônica Brasil']/
  ...dataset['Telefônica Brasil'].shift(1))-1
dataset['Retorno Simples Engie energia']= (dataset['Engie energia']/
  ...dataset['Engie energia'].shift(1))-1
#dataset['Retorno Simples TransmeleSP']= (dataset['TransmeleSP']/
  ...dataset['TransmeleSP'].shift(1))-1
dataset['Retorno Simples Banco do Brasil']= (dataset['Banco do Brasil']/
  ...dataset['Banco do Brasil'].shift(1))-1
dataset['Retorno Simples Itau Unibanco']= (dataset['Itau Unibanco']/
  ...dataset['Itau Unibanco'].shift(1))-1
dataset['Retorno Simples BOVA']= (dataset['BOVA']/ dataset['BOVA'].shift(1))-1
```

```
[ dataset
```

```
[ dataset['Retorno Simples SABESP'].plot(figsize = (12,5));
```

```
[ (dataset['Retorno Simples SABESP'].mean() * 246)* # aqui estamos
  ...a média dos retornos diários, quando multiplicamos por 246 temos a média de
  ...retorno anual é :
```

```
[ (dataset['Retorno Simples BB SEGURIDADE'].mean() * 246)* 100
```

```
[ (dataset['Retorno Simples Telefônica Brasil'].mean() * 246)* 100
```

```

[] (dataset['Retorno Simples Engie energia'].mean() * 246)* 100

```

```

[] (dataset['Retorno Simples Banco do Brasil'].mean() * 246)* 100

```

```

[] (dataset['Retorno Simples Itau Unibanco'].mean() * 246)* 100

```

```

[] (dataset['Retorno Simples BOVA'].mean() * 246)* 100

```

```

[] dataset = pd.read_csv('/content/8acoes.csv')
   dataset

```

```

[] dataset_normalizado = dataset.copy()
   for i in dataset_normalizado.columns[1:]:
       dataset_normalizado[i] = (dataset_normalizado[i] / dataset_normalizado[i][0])

```

```

[] dataset_normalizado

```

```

[] dataset_normalizado.plot( title= 'Variação do preço das Ações- normalizadas
   '
   ,x = 'Date', figsize=(15, 7));

```

```

[] dataset_normalizado.drop(labels=['Date'], axis=1, inplace=True)

```

```

[] retorno_carteira = (dataset_normalizado / dataset_normalizado.shift(1)) - 1
   retorno_carteira.head()

```

```

[] retorno_anual = retorno_carteira.mean() * 246
   retorno_anual

```

```

[] retorno_anual = retorno_anual * 100
   retorno_anual

```

```

[] print(' Ativos          Retorno
   retorno_anual          #plot(title = 'Comparativo carteira x
   ,x = 'Date', figsize=(20,10))

```

```

[] pesos_carteira1 = np.array([0.16666, 0.16666,0.16667,0.16667, 0.16667,0.16667,
   ,0.0])

```



```

[] pesos_carteira1.sum()

[] np.dot(retorno_anual, pesos_carteira1)

[] pesos_carteira2 = np.array([0.5, 0.1,0.1, 0.1, 0.1,0.1, 0.0])

[] pesos_carteira2.sum()

[] np.dot(retorno_anual, pesos_carteira2)

```

Gráfico carteira X BOVA

```

[] dataset = pd.read_csv('/content/8acoes.csv')

[] dataset_normalizado = dataset.copy()
   for i in dataset_normalizado.columns[1:]:
       dataset_normalizado[i] = (dataset_normalizado[i] / dataset_normalizado[i][0])

[] dataset_normalizado['CARTEIRA'] = (dataset_normalizado['SABESP'] +
   ...dataset_normalizado['BB SEGURIDADE'] + dataset_normalizado['Telefônica_
   ...Brasil'] + dataset_normalizado['Engie energia'] +
   dataset_normalizado['Banco_
   ...do Brasil'] + dataset_normalizado['Itau Unibanco']) / 6

   dataset_normalizado

[] dataset_normalizado.plot(title = 'Comparativo carteira x BOVA', x = 'Date',
   ...figsize=(20,10))

[] dataset_normalizado.drop(['SABESP', 'BB SEGURIDADE', 'Telefônica Brasil','Engie_
   ...energia','Banco do Brasil' , 'Itau Unibanco' ], axis= 1, inplace= True)

   dataset_normalizado

[] dataset_normalizado.plot(title='Comparativo carteira x BOVA', x = 'Date',
   ...figsize= (20,10));

```

```
dataset_normalizado.plot(title='Comparativo carteira x BOVA', x = 'Date', ...
...figsize= (20,10))
```

Taxa de retorno

```
import datetime as dt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt import
seaborn as sns
import plotly.express as px
```

```
!pip install yfinance --upgrade --no-cache-dir
```

```
import yfinance as yf
yf.pdr_override()
```

```
#dataset_12 = pd.read_csv('/content/acoessemobovaparatcc13 (1).csv')
#dataset_12

#dataset_aplicacao8at = pd.read_csv('/content/aplicacao8ativos.csv') #dataset_aplicacao8at

#dataset_aplicacao7at = pd.read_csv('/content/aplicacao8ativossemBOVA.csv')
```

```
#dataset_aplicacao7at

#dataset_aplicacao7at = pd.read_csv('/content/aplicacao7ativossemBOVA.csv')

dataset_aplicacao7at = pd.read_csv('/content/8acoes.csv')
dataset_aplicacao7at
```

```
dataset_aplicacao7at.describe()
```

```
dataset_aplicacao7at.drop(labels= ['Date'], axis=1, inplace=True)
dataset_aplicacao7at
```

```
taxa_retorno_aplicacao7at = (dataset_aplicacao7at / dataset_aplicacao7at.
...shift(1)) - 1
taxa_retorno_aplicacao7at
```

```
taxa_retorno_aplicacao7at.std() * 100
```

```
taxa_retorno_aplicacao7at.std() * math.sqrt(246) # colocar em anualização
```

```
sns.boxplot(x =acoes_df['Banco do Brasil'])
```



```

[] sns.boxplot(x =acoes_df['SABESP'])

[] sns.boxplot(x =acoes_df['BB SEGURIDADE'])

[] sns.boxplot(x =acoes_df['Telefônica Brasil'])

[] sns.boxplot(x =acoes_df['Engie energia'])

[] sns.boxplot(x =acoes_df['Banco do Brasil'])

[] sns.boxplot(x =acoes_df['Itau Unibanco'])

```

Correlação e Covariância entre as ações

```

[] taxa_retorno_aplicacao7at

[] taxa_retorno_aplicacao7at.var()

```

VARIÂNCIA

```

[] taxa_retorno_aplicacao7at.var()

```

Covariância

```

[] taxa_retorno_aplicacao7at.cov()

[] plt.figure(figsize=(8,8))
   sns.heatmap(taxa_retorno_aplicacao7at.cov(), annot=True)

```

Correlação

```

[] taxa_retorno_aplicacao7at.corr()

[] plt.figure(figsize=(10,10))
   sns.heatmap(taxa_retorno_aplicacao7at.corr(), annot=True)

In [ ]:

[] import pandas as pd
   import numpy as np
   import math
   import matplotlib.pyplot as plt

```

```
import plotly.express as px
import seaborn as sns
from scipy import stats
```

```
dataset = pd.read_csv('/content/8acoes.csv')
dataset
```

```
dataset.describe()
```

```
dataset["SABESP"][dataset["Date"]=="2016-04-01"], ...
...dataset["SABESP"][dataset["Date"]=="2016-12-28"]
```

```
dataset["BB SEGURIDADE"][dataset["Date"]=="2016-04-01"], dataset["BB ...
...SEGURIDADE"][dataset["Date"]=="2016-12-28"]
```

```
np.log(29.4/27.99) * 100
```

```
dataset["SABESP"][dataset["Date"]=="2017-01-02"], ...
...dataset["SABESP"][dataset["Date"]=="2017-12-28"]
```

```
np.log(28.37/34.33) * 100
```

Alocação aleatória de ativos, sem usar o modelo de Markowitz

```
len(dataset.columns) - 1
```

```
dataset.loc[len(dataset) - 1 ]["BOVA"]
```



```

def alocao_ativos(dataset, dinheiro_total, seed = 0, melhores_pesos = []):
    dataset = dataset.copy()

    if seed != 0:
        np.random.seed(seed)

    if len(melhores_pesos) > 0:
        pesos = melhores_pesos
    else:
        pesos = np.random.random(len(dataset.columns) - 1)
        #print(pesos, pesos.sum())
        pesos = pesos / pesos.sum() #print(pesos, pesos.sum())

    colunas = dataset.columns[1:]
    #print(colunas)
    for i in colunas:
        dataset[i] = (dataset[i] / dataset[i][0])

    for i, acao in enumerate(dataset.columns[1:]):
        #print(i, acao)
        dataset[acao] = dataset[acao] * pesos[i] * dinheiro_total
        dataset['soma_valor'] = dataset.sum(axis = 1)
        datas = dataset['Date']
        #print(datas)

    dataset.drop(labels = ['Date'], axis = 1, inplace = True)
    dataset['Taxa retorno'] = 0.0

    for i in range(1, len(dataset)):
        dataset['Taxa retorno'][i] = ((dataset['soma_valor'][i] / dataset['soma_
        _valor'][i - 1]) - 1) * 100

    acoes_pesos = pd.DataFrame(data = {'Ações': colunas, 'Pesos': pesos * 100})

    return dataset, datas, acoes_pesos, dataset.loc[len(dataset) - 1]['soma_
    _valor']

```

```

[] dataset,datas, acoes_pesos, soma_valor = alocao_ativos(pd.read_csv('/content/
...8acoes.csv'), 5000, 500)

```

```

[] dataset

```

```

[] datas

```

```

[] acoes_pesos

```

```

[] soma_valor

```

Visualização dos dados da alocação aleatória de ativos, sem usar o modelo de Markowitz

```

[] figura = px.line(x = datas, y = dataset["Taxa retorno"], title = 'Retorno_
...diário do portfólio')
figura.show()

```

```

[] figura = px.line(title = 'Evolução do patrimônio')
for i in dataset.drop(columns = ['soma valor', 'Taxa retorno']).columns:
    figura.add_scatter(x = datas, y = dataset[i], name = i)
figura.show()

```

```

[] figura = px.line(x = datas, y = dataset['soma valor'], title = 'Evolução do_
...Patrimônio investido')
figura.show()

```

Mais cálculos do portfólio - Taxa livre de risco (SELIC)

```

[] dataset.loc[len(dataset) - 1]['soma valor'] / dataset.loc[0]['soma valor'] - 1

```

```

[] dataset["Taxa retorno"].mean()

```

Desvio padrão

```

[] dataset["Taxa retorno"].std()

```

Sharpe ratio

```

[] (dataset["Taxa retorno"].mean() / dataset["Taxa retorno"].std()) * np.sqrt(246)

```

Alocação no ativo livre de risco

```

[] dinheiro_total = 5000

```

```

[] soma_valor - dinheiro_total

```

```

[] taxa_selic_2010 = 0 (obs= colocar o periodo da taxa selic)
taxa_selix_2011 = 0

```

```

[] valor_2010 = dinheiro_total + (dinheiro_total * taxa_selic_2010 / 100)
valor_2010

```



```
valor_2011 = valor_2010 + (valor_2010 * taxa_selic_2011 / 100)
valor_2011
```

```
valor_2022 = valor_2021 + (valor_2021 * taxa_selic_2022 / 100)
valor_2022
```

☐ repetir todos os comandos até o final.

```
rendimentos = valor_2021 - dinheiro_total
rendimentos
```

```
ir = (rendimentos * 15) / 100
ir
```

```
rendimento_tesouroselic10 = valor_2021 - ir
print('O lucro ao fim de 10 anos fazendo o investimento no tesouro Selic ou ...similar deduzindo o IR: ', rendimento_tesouroselic10)
```

```
taxa_selic_historico = np.array([14.25, 12.25, 6.50, 56.25, 2.0, 9.25, 1.13])
taxa_selic_historico.mean() / 100
```

```
((dataset['Taxa retorno'].mean() - taxa_selic_historico.mean() / 100) / ((dataset['Taxa retorno'].std() * np.sqrt(246)))
```

Markowitz _ Otimização de portfólio - randômico

```
import sys
1 - sys.maxsize
```

```

def alocacao_portfolio(dataset, dinheiro_total, sem_risco, repeticoes):
    dataset = dataset.copy()
    dataset_original = dataset.copy()

    lista_retorno_esperado = []
    lista_volatilidade_esperado = []
    lista_sharpe_ratio = []

    melhor_sharpe_ratio = 1 - sys.maxsize
    melhores_pesos = np.empty(0)
    melhor_volatilidade = 0
    melhor_retorno = 0

    for _ in range(repeticoes):
        pesos = np.random.random(len(dataset.columns) - 1)
        pesos = pesos / pesos.sum()

        for i in dataset.columns[1:]:
            dataset[i] = dataset[i] / dataset[i][0]

        for i, acao in enumerate(dataset.columns[1:]):
            dataset[acao] = dataset[acao] * pesos[i] * dinheiro_total

        dataset.drop(labels = ['Date'], axis = 1, inplace=True)

        retorno_carteira = np.log(dataset / dataset.shift(1))
        matriz_covariancia = retorno_carteira.cov()

        dataset['soma_valor'] = dataset.sum(axis = 1)
        dataset['Taxa retorno'] = 0.0

        for i in range(1, len(dataset)):
            dataset['Taxa retorno'][i] = np.log(dataset['soma_valor'][i] / dataset['soma_valor'][i - 1])

            #* 100

            #sharpe_ratio = (dataset['taxa retorno'].mean() - sem_risco) / dataset['taxa retorno'].std() * np.sqrt(246)
            retorno_esperado = np.sum(dataset['Taxa retorno'].mean() * pesos) * 246

```



```

volatilidade_esperada = np.sqrt(np.dot(pesos, np.dot(matriz_covariancia * _
--246, pesos)))
sharpe_ratio = (retorno_esperado - sem_risco) / volatilidade_esperada

    if sharpe_ratio > melhor_sharpe_ratio:
        melhor_sharpe_ratio = sharpe_ratio
        melhores_pesos = pesos
melhor_volatilidade = volatilidade_esperada melhor_retorno =
    retorno_esperado

lista_retorno_esperado.append(retorno_esperado)
lista_volatilidade_esperada.append(volatilidade_esperada)
lista_sharpe_ratio.append(sharpe_ratio)

dataset = dataset_original.copy()

return melhor_sharpe_ratio, melhores_pesos, lista_retorno_esperado, _
--lista_volatilidade_esperada, lista_sharpe_ratio, melhor_volatilidade, _
--melhor_retorno

```

```

[] sharpe_ratio, melhores_pesos, ls_retorno, ls_volatilidade, ls_sharpe_ratio, _
--melhor_volatilidade, melhor_retorno = alocao_portfolio(pd.read_csv('/
--content/8acoes.csv'), 5000, taxa_selic_historico.mean() / 100, 10000)

```

```

[] sharpe_ratio, melhores_pesos

```

```

[] _, _, acoes_pesos, soma_valor = alocao_ativos(pd.read_csv('/content/8acoes.
--csv'), 5000, melhores_pesos=melhores_pesos)

```

```

[] acoes_pesos, soma_valor

```

```

[] print(ls_retorno)

```

```

[] melhor_retorno, melhor_volatilidade

```

```

[]
plt.figure(figsize=(10,8))
plt.scatter(ls_volatilidade, ls_retorno, c = ls_sharpe_ratio)
plt.colorbar(label = 'Sharpe ratio')
plt.xlabel('Volatilidade') plt.ylabel('Retorno')
plt.scatter(melhor_volatilidade, melhor_retorno, c = 'red', s = 100)

```

ANEXO 2 – CÓDIGO DO MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS

Para acessar o arquivo com o código no caderno do google colaboraty, e acessar o link :
https://colab.research.google.com/drive/1386UHAzg4SMrZQVtmRL4NoI0wuM_7MBz?usp=sharing.

CAPM(capital asset pricing model)

```
import pandas as pd
import numpy as np
import plotly.express as px
```

```
dataset_capm = pd.read_csv('/content/8acoes.csv')
dataset_capm
```

```
dataset_capm.drop(labels = ['Date'], axis= 1 , inplace= True)
```

```
dataset_capm_normalizado = dataset_capm.copy()
for i in dataset_capm.columns:
    dataset_capm_normalizado[i] = dataset_capm[i] / dataset_capm[i][0]
dataset_capm_normalizado
```

```
dataset_capm_taxa1_retorno = (dataset_capm_normalizado
    ↪dataset_capm_normalizado.shift(1)) - 1
data_capm_taxa1_retorno
```

```
dataset_capm_taxa1_retorno.fillna(0, inplace=True)
dataset_capm_taxa1_retorno.head()
```

```
dataset_capm_taxa1_retorno.mean() * # Como estamos trabalhando
    ↪valores diários, teremos uma taxa de retorno médio diário de valor X, porém,
    # se quisermos saber o valor dessa
    ↪taxa anual, a taxa de retorno anual, necessitamos multiplicar
    # por 246, que é o número de dias
    ↪médio que a bolsa trabalha, assim chegamos nas taxas de retorno anual.
```

```
figura = px.scatter(dataset_capm_taxa1_retorno, x = 'BOVA', y = 'SABESP',
    title
    ↪ 'Bova X SABESP')
figura.show()
```

```
beta, alpha = np.polyfit( x = dataset_capm_taxa1_retorno['BOVA'], y =
    ↪dataset_capm_taxa1_retorno['SABESP'], deg = 1)
print( 'beta:', beta, 'alpha:', alpha, 'alpha (%)', alpha * 100)
```



```

[]  figura = px.scatter(dataset_capm_taxal_retorno, x = 'BOVA', y = 'SABESP',
    title = 'BOVA X SABESP' )
    figura.add_scatter(x = dataset_capm_taxal_retorno['BOVA'], y = beta *
    dataset_capm_taxal_retorno['BOVA'] + alpha)
    figura.show()

```

```

[]  matriz_covariancia = dataset_capm_taxal_retorno.drop(columns=[ 'BB
    SEGURIDADE',
    'Telefônica Brasil', 'Engie energia', 'Banco do Brasil', 'Itau Unibanco']).
    cov() * 246
    matriz_covariancia

```

```

[]  cov_bova_sabesp = matriz_covariancia.iloc[0, 1]
    cov_bova_sabesp

```

```

[]  variancia_bova = dataset_capm_taxal_retorno['BOVA'].var() * 246
    variancia_bova

```

```

[]  beta_sabesp = cov_bova_sabesp / variancia_bova
    beta_sabesp

```

```

[]  matriz_covariancia = dataset_capm_taxal_retorno.drop(columns=[ 'SABESP',
    'Telefônica Brasil', 'Engie energia', 'Banco do Brasil', 'Itau Unibanco']).
    cov() * 246
    matriz_covariancia

```

```

[]  cov_bova_BB = matriz_covariancia.iloc[0, 1]
    cov_bova_BB

```

```

[]  variancia_bova = dataset_capm_taxal_retorno['BOVA'].var() * 246
    variancia_bova

```

```

[]  beta_BBS = cov_bova_BB /
    variancia_bova
    beta_BBS

```

Cálculo do CAPM para a ação SABESP

□ `beta_sabesp`

□ `rm = dataset_capm_taxa1_retorno['BOVA'].mean() * 246 # retorno médio anual,
 ↳ caso eu investi-se na ETF bova11, teria esses retorno médio anual
 rm`

□ `rm * 100`

□ `taxa_selic_historico = np.array([14.25, 12.25, 6.50, 56.25, 2.0, 9.25, 1.13])
 = taxa_selic_historico.mean() / 100
 rf`

□ `capm_sabesp = rf + (beta_sabesp * (rm - rf))
 capm_sabesp
 # Se alguém investir na Sabesp, ganhar 15,9% de retorno para ser compensando
 ↳ pelo risco de investir nessa empresa.`

Cálculo do BETA para todas as ações

□ `betas = []
 alphas = []
 for ativo in dataset_capm_taxa1_retorno.columns[0:-1]:
 #print(ativo)
 beta, alpha = np.polyfit(dataset_capm_taxa1_retorno['BOVA'],
 ↳ dataset_capm_taxa1_retorno[ativo], 1)
 betas.append(beta)
 alphas.append(alpha)`

□ `betas`

□ `alphas`

□ `def visualiza_betas_alphas(betas, alphas):
 for i, ativo in enumerate(dataset_capm_taxa1_retorno.columns[0:-1]):
 #print(i, ativo)
 print(ativo, 'beta:', betas[i], 'alphas:', alphas[i] * 100)`

□ `visualiza_betas_alphas(betas, alphas)`

Cálculo CAPM para o portfólio

```
[] rf
```

```
[] rm
```

```
[] capm_empresas = []
for i, ativo in enumerate(dataset_capm_taxa1_retorno.columns[0: -1]):
    #print(i, ativo)
>[] capm_empresas
```

```
[] def visualiza_capm(capm):
    for i, ativo in enumerate(dataset_capm_taxa1_retorno.columns[0: -1]):
        print(ativo, 'CAPM:', capm[i] * 100)
```

```
[] print('Ativo', 'Retorno Ri')
visualiza_capm(capm_empresas)
```

```
[] pesos = np.array([0.3160, 0.0088, 0.0293, 0.0613, 0.2317, 0.0237]) # quantidade de
    ↳ empresas no portfolio é o valor de que vc investiu em porcentagem em cada
    ↳ ativo
    #pesos = np.array([0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666])
```

```
[] capm_portfolio = np.sum(capm_empresas * pesos) *
100 capm_portfolio

# Exemplo de interpretação: "se investir nesse portfolio, vc ganhara 18.06%
    ↳ retorno para ser compensado pelo risco que vc esta correndo em investir
    ↳ nesse portfolio"
```

ANEXO 3 – RESOLUÇÃO DA TAREFA VARIAÇÕES PERCENTUAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Como gestores de fundos de investimento calculam a variação percentual de ativos

A resolução dependerá do aluno, caso o aluno selecione primeiramente o valor inicial e final de cada ativo ficará desta forma.

Fixando o valor inicial em BBAS3, VALE3, MGLU3. Com os seguintes valores

BBAS3:

$$V_0 = 34,91;$$

VALE3:

$$V_0 = 68,57;$$

MGLU3:

$$V_0 = 6,23.$$

E os valores posterior como $V_t = \text{valor em uma data futura}$:

BBAS3:

$$V_t = 41,47;$$

VALE3:

$$V_t = 65,98;$$

MGLU3:

$$V_t = 6,13.$$

Posteriormente fixado estes valores, usar-se-á a seguinte equação de variação percentual para calcular:

$$J = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

Resolvendo para

BBAS3:

$$J = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{41,47}{34,91} - 1 = 0,1879 = 18,79\%$$

VALE3:

$$J = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{65,98}{68,57} - 1 = -0,0377 = -3,77\%$$

MGLU3:

$$J = \frac{V_t}{V_0} - 1 = \frac{6,13}{6,23} - 1 = -0,01605 = -1,605\%$$

Analisando os valores neste período, que foi uma amostra pequena que foi coleta, e o número de ativos analisados é pequeno também porém, pode-se inferir que a ação da BBAS3 no mesmo período performou muito acima das outras duas ações, ou seja, o gestor poderia optar em escolher este ativos, pois o preço é uma demonstração de que a empresa está conseguindo gerar valor, riqueza a seus acionista e isto reflete no preço, valorizando. Neste caso houve a variação percentual positiva, e nas outras duas ações é uma variação percentual negativa. Desta forma a escolha seria na ação da BBAS3 seria escolhida para compor o portfólio, e as outras duas podem ser desclassificadas