UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CAMILA BONINI ARAÚJO CASSOLI

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM ATIVIDADES ENCAMINHADAS DE ACORDO COM A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

JANDAIA DO SUL

2019

CAMILA BONINI ARAÚJO CASSOLI

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM ATIVIDADES ENCAMINHADAS DE ACORDO COM A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Graduação de Licenciatura em Ciências exatas, Campus de Jandaia do sul, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de licenciando em Ciências Exatas - Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Cândido Braz

JANDAIA DO SUL

2019

Cassoli, Camila Bonini Araújo
C345d O desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades encaminhadas de acordo com a teoria das situações didáticas: um estudo com alunos do Ensino Fundamental. / Camila Bonini Araújo Cassoli. – Jandaia do Sul, 2019.
82 f.

Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Cândido Braz
Trabalho de Conclusão do Curso (graduação) – Universidade Federal do Paraná. Campus Jandaia do Sul. Licenciatura em Ciências Exatas - Matemática.

1. Pensamento proporcional. 2. Ensino Fundamental. 3. Razão e proporção. 4. Teoria das Situações Didáticas. 5. Milieu. I. Braz, Bárbara Cândido. II. Título. III. Universidade Federal do Paraná.

CDD: 370.1

Sistema de Bibliotecas/UFPR, Biblioteca do Campus Jandaia do Sul
César A. Galvão F. Conde – CRB 9/1747

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PARECER Nº	**4/2019/UFPR/R/JA/CCLCEX**
PROCESSO Nº	23075.083229/2019-11
INTERESSADO:	@INTERESSADOS_VIRGULA_ESPACO@
ASSUNTO:	Termo de aprovação de Trabalho de Conclusão de Curso

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Título: O desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades encaminhadas de acordo com a Teoria das Situações Didáticas: um estudo com alunos do Ensino Fundamental

Autora: Camila Bonini Araújo Cassoli

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau no curso de Licenciatura em Ciência Exatas, aprovado pela seguinte banca examinadora.

- Bárbara Cândido Braz (orientadora)
- Lucilene Lusia Adorno de Oliveira (membro)
- Jair da Silva (membro)

Jandaia do Sul, 2 de dezembro de 2019.

Documento assinado eletronicamente por **BARBARA CANDIDO BRAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 02/12/2019, às 14:40, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **LUCILENE LUSIA ADORNO DE OLIVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 02/12/2019, às 14:44, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **JAIR DA SILVA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 02/12/2019, às 14:48, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida aqui informando o código verificador **2348263** e o código CRC **225D0C35**.

Essa monografia é dedicada aos meus pais, pilares da minha formação como ser humano, e incentivadores das realizações dos meus sonhos, que sempre me apoiaram nos momentos difíceis da graduação e me deram força para prosseguir e chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer imensamente as seguintes pessoas que foram muito importantes para minha formação e para o desenvolvimento da presente monografia:

Minha família, minha mãe Marilene, meu pai Valdecir e minha irmã Maria Heloisa, que sempre me deram apoio e me ajudaram a me manter firme.

Minha querida orientadora Bárbara Braz, que sempre foi minha inspiração e que desde o início me orientou com amor, carinho e dedicação não só na monografia, mas também durante toda minha graduação, além de ser uma grande incentivadora do meu trabalho e do meu futuro como professora.

Aos meus professores do curso, que fizeram parte da minha formação, e sempre me ensinaram com excelência e dedicação.

Aos meus queridos amigos do curso, que estiveram comigo desde o início, chorando, sorrindo, brincando, incentivando uns aos outros, desenvolvendo trabalhos e principalmente apoiando uns ao outros nos momentos mais difíceis. Sem vocês as coisas seriam muito mais difíceis, vou levar vocês para toda minha vida.

A minha querida amiga|irmã Thayná, que durante grande parte da graduação foi minha dupla perfeita, as Barbaretes, e sempre esteve comigo me incentivando, me mantendo firme, me reerguendo nos momentos difíceis, me fazendo rir nas horas mais improváveis, e conquistando seus sonhos junto comigo. Amiga irmã que Deus me deu para eu levar para toda minha vida.

As minhas queridas amigas Isadora e Nathalia que ingressaram junto comigo na universidade e vão continuar essa caminhada por mais um tempo, grandes incentivadoras e admiradoras da minha profissão, minhas confidentes, minhas psicólogas ,meu refugio, sempre estiveram comigo nos momentos difíceis aguentando meus desabafos e meus choros e nos bons momentos comemorando as conquistas e a nossa amizade.

Há muitas pessoas que conheci durante esse período e que contribuíram para o meu crescimento, gratidão por cada um de vocês.

É a paixão do professor por sua mensagem,

Por sua missão, por seus alunos,

Que assegura uma influência possivelmente salvadora,

A de acessar uma vocação.

Edgar Morin

RESUMO

Considerando as potencialidades da teoria das situações didáticas no desenvolvimento de atividades Matemáticas que se contrapõem a um modelo educacional tradicional, em que as práticas de sala de aula são centradas nas ações do professor e o aluno é um sujeito passivo, a presente pesquisa tem como objetivo analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional de alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, por meio de atividades embasadas na teoria das situações didáticas. Dessa forma, a pesquisa será de caráter qualitativo, já que busca identificar e esclarecer os fenômenos que estão por trás do desenvolvimento do raciocínio proporcional de acordo com as teorias explicitadas anteriormente. Por meio de alguns levantamos sobre o tema referido, tanto no Banco de Dissertações e Teses da Capes, como em revistas de qualis A1 e A2, como a Bolema, a Zetetiké e a EMR, foi possível perceber que a linha de pesquisa sobre o raciocínio proporcional no Ensino Fundamental é pouco estudada e debatida em trabalhos acadêmicos, e nenhuma delas unem o desenvolvimento desse pensamento com a teoria da situações didáticas, ainda que Guy Brosseau já tenha sistematizado situações que dão possibilidades para tanto. Os dados que serão apresentados na pesquisa foram analisados de acordo com as teorias citadas anteriormente e também com as teorias que embasam o desenvolvimento do pensamento proporcional, tais como os critérios indicados por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014): Medição Raciocínio Up and Down; Pensamento Relativo; Partilha e Comparação; Unitização; Fontes de significado para a/b. Portanto, o desenvolvimento da pesquisa evidenciou que as atividades embasadas na teoria das situações didáticas, planejadas para a investigação, se mostraram potencialmente significativas para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Na medida em que os estudantes eram convidados a investigar problematizar as situações matemáticas por meio das dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização, foi possível que esses estudantes levantassem hipóteses e desenvolvessem os indícios e conceitos necessários para o raciocínio proporcional, assim a orientação docente foi de extrema importância para que houvesse um momento de institucionalização desses conceitos de uma forma natural e menos técnica.

Palavras-chave: Pensamento Proporcional. Ensino Fundamental. Razão e proporção. Teoria das Situações didáticas. Milieu.

ABSTRACT

Considering the potentialities of the theory of didactic situations in the development of mathematical activities that oppose a traditional educational model, in which classroom practices are centered on the actions of the teacher and the student is a passive subject, this research aims to to analyze the development of proportional reasoning of seventh grade students in a public school, through activities based on the theory of didactic situations. Thus, the research will be qualitative, as it seeks to identify and clarify the phenomena that underlie the development of proportional reasoning according to the theories previously explained. Through some we raised about the theme mentioned, both in Capes Dissertation and Thesis Bank, as well as in A1 and A2 qualitative magazines, such as Bolema, Zetetiké and EMR, it was possible to realize that the line of research on reasoning Proportional education in elementary school is little studied and debated in academic work, and none of them unite the development of this thinking with the theory of didactic situations, although Guy Brosseau has already systematized situations that give possibilities for this. The data that will be presented in the research were analyzed according to the aforementioned theories as well as the theories that underlie the development of proportional thinking, such as the criteria indicated by Susan Lamon: Measurement Reasoning Up and Down; Relative thinking; Sharing and Comparison; Unitization; Sources of meaning for a / b. Therefore, the development of the research showed that the activities based on the theory of didactic situations, planned for the investigation, were potentially significant for the development of proportional reasoning. As students were invited to investigate problematizing mathematical situations through the dialectics of action, formulation, validation and institutionalization, it was possible for these students to raise hypotheses and develop the necessary clues and concepts for proportional reasoning, as well as the teaching orientation. It was extremely important that there was a moment of institutionalization of these concepts in a natural and less technical way.

Keywords: proportional reasoning, reason and proportion, didactic situations, milieu.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

TSD - Teoria das situações didáticas

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

DCE - Diretrizes Curriculares Estaduais

SUMÁRIO

1 CONTEXTUALIZANDO A INVESTIGAÇÂO

Por que o processo de generalização algébrica nos Ensinos Fundamental e Médio ainda parece não ser algo natural nas aulas de Matemática? Essa é uma questão que suscitou muitas outras perguntas a mim, futura professora da área de Ciências Exatas desde o segundo ano do curso de Licenciatura. No momento em que cursava o quarto semestre do curso e participava de um projeto de extensão, me deparei com as dificuldades de estudantes dos diferentes níveis de ensino para compreender situações que exigiam o uso do pensamento algébrico.

Mais especificamente, em uma das práticas de sala de aula em que eu e outros colegas atuamos como professores de um oitavo ano do Ensino Fundamental, em virtude da participação em um projeto extensionista, percebemos que os estudantes apresentavam dificuldades para resolver uma tarefa Matemática que exigia o conceito de razão e que isso dificultava o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ao mesmo tempo, esses mesmos estudantes afirmavam já conhecer a "regra de três". A partir desse momento nos questionamos: "por que, embora esses estudantes conheçam a regra de três, não conseguem resolver problemas que exigem sua aplicação?". Em discussão com outros colegas e a professora que nos orientava, percebemos que esses estudantes pareciam ainda não ter desenvolvido o raciocínio proporcional, ainda que tivessem memorizado algumas técnicas relacionadas a ele. Esse episódio foi essencial para que me interessasse em estudar o desenvolvimento do raciocínio proporcional de estudantes do Ensino Fundamental.

O desenvolvimento do raciocínio proporcional é relevante para a evolução do pensamento matemático do aluno visto que, além de ser utilizado em situações cotidianas, como em uma compra de supermercado e em diferentes áreas de conhecimento como na geografia, na química, dentre outras, ainda embasa o pensamento matemático no que se refere a conceitos mais complexos como o de funções e para o desenvolvimento do pensamento algébrico (CAI; SUN, 2004 *apud* CYRINO; ROCHA; PIRES; ROBERTO, 2014).

Considerando os apontamentos de Cai e Sun (2004), torna-se necessário então que, enquanto professores pensemos em situações Matemáticas que extrapolem a abordagem superficial e técnica de conceitos abarcados pelo desenvolvimento do raciocínio proporcional, como: a razão e a proporção. Nesse sentido, uma das propostas possíveis para que o professor organize um ambiente de aprendizagem de modo a torná-lo propício para o desenvolvimento de investigações Matemáticas que proporcionem discussões e sistematizações Matemáticas pertinentes ao raciocínio proporcional é por meio da teoria das situações didáticas, doravante TSD, sistematizada por Guy Brosseau.

No âmbito das Matemáticas, o francês Guy Brosseau é um dos responsáveis por desenvolver teoria que permite-nos compreender as relações entre o saber, os alunos e o professor na sala de aula bem como os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. De acordo com Paes (2001), Guy Brosseau assume que estudantes e professores são o cerne do processo de ensino e aprendizagem e se questiona sobre um elemento essencial: um ambiente criado pelo professor com a finalidade de produzir um conhecimento, o que ele denomina de *milieu*[1]. Para o pesquisador, todo o conhecimento matemático é determinado por uma situação, compreendida como uma ação entre duas ou mais pessoas em um determinado meio.

De acordo com Brousseau (1996), a situação mais favorável para a aprendizagem, ocorre quando o *milieu* oferece novos conhecimentos para os alunos que não se distanciam dos conhecimentos prévios que o aluno já tem ou já obteve em algum outro momento. Em outras palavras, podemos dizer que "um *milieu* dito adequado é aquele em que a distância entre o conhecimento almejado e o anterior seja alcançável, pelo menos em parte, pelo próprio esforço do aluno, pois ele assume o papel de sujeito-pesquisador" (SILVA; FERREIRA; TOZETTI, 2015, p.19953, grifos nossos).

Nesse sentido, Guy Brosseau estruturou algumas tarefas Matemáticas que embasam situações didáticas pertinentes ao desenvolvimento do pensamento matemático, de acordo com a TSD. Uma dessas tarefas, que chamaremos de "ampliação de um quebra-cabeça", permite a exploração de conceitos importantes para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, indo ao encontro do que indicam Maranhão e Machado (2011), como: a diferenciação de variáveis diretamente proporcionais e inversamente proporcionais; uso de multiplicação e divisão para resolução de problemas dessa natureza; comparações numéricas; ideia de covariação; a comparação sobre a razão entre duas grandezas.

---

[1] O conceito de milieu é abordado nas próximas seções de modo mais aprofundado.

Considerando esses apontamentos, desenvolvemos um estudo piloto com uma turma de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com idades entre sete e dez anos. Por meio do estudo foi possível perceber que as crianças desse nível de ensino não conheciam alguns conceitos necessários para o desenvolvimento da atividade como o conceito de razão, quando esse número não era natural, a comparação entre duas grandezas como $\frac{a}{b}$, dentre outros. Isso possibilitou que nós percebêssemos que não seria possível analisar alguns aspectos do raciocínio proporcional de acordo com os autores e as teorias escolhidas para a pesquisa, nesse nível de ensino. Além disso, notamos a necessidade de desenvolver uma atividade que antecedesse a investigação sobre a ampliação de um quebra-cabeça, para analisarmos o conhecimento prévio que os alunos têm sobre proporção e também ensinar abordar conceitos necessários para o desenvolvimento das atividades, como o de razão.

Partindo desse pressuposto, de acordo com os autores Cyrino, Rocha, Pires e Roberto (2014), mesmo que os documentos curriculares como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997,1998) e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática (PARANÁ, 2008) visem à necessidade e a importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional, esse assunto é pouco debatido e analisado. Isso interfere diretamente na elaboração de novas estratégias de ensino para a mobilização desses tipos de raciocínio dentro e fora da sala de aula. Devido a esse obstáculo que ainda permanece no ensino de Matemática, essa investigação está embasada na seguinte questão: Que elementos emergentes de atividades Matemáticas, que envolvem o conceito de proporcionalidade, encaminhadas de acordo com a TSD podem fundamentar o desenvolvimento do raciocínio proporcional?.

Levando em consideração a contextualização apresentada anteriormente, o presente trabalho tem como objetivo analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos educandos do sétimo ano do Ensino Fundamental, ao desenvolverem atividades embasadas na teoria das situações didáticas.

O desenvolvimento, a análise e os resultados da presente investigação serão apresentados em sete seções complementares, que compõem esse texto.

Na primeira seção apresentamos a contextualização do trabalho, contendo o objetivo geral e os motivos que nos levaram a investigá-lo fazendo o uso da teoria das situações didáticas.

A segunda seção é composta pelos procedimentos metodológicos que utilizamos para desenvolver a investigação com o público escolhido, ou seja, os caminhos e a caracterização da pesquisa.

A terceira seção apresenta a revisão bibliográfica realizada no Banco de dissertações e teses da Capes e em três revistas da área de Educação Matemática sendo elas: Bolema, Zetetiké e a Educação Matemática em revista (EMR), no intuito de saber o que já foi investigado sobre esse tema.

Ao longo da quarta e da quinta seção apresentamos as teorias que embasam a nossa pesquisa. Descrevemos como se dá e a importância do pensamento proporcional de acordo com alguns autores como, Behr, Lesh e Post (1998), também Cyrino, Rocha e Pires (2014) e a Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014). Além disso, detalhamos os principais conceitos da Teoria das situações didáticas que foram divididos em três subseções.

Posteriormente na sexta seção relatamos a descrição e a análise das atividades desenvolvidas com estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental de acordo com os pressupostos teóricos da pesquisa.

Por fim, na sétima seção apresentaremos as considerações finais, seguidas das referências.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Norteadas pela questão: Que elementos emergentes de atividades Matemáticas, que envolvem o conceito de proporcionalidade, encaminhadas de acordo com a TSD podem fundamentar o desenvolvimento do raciocínio proporcional? Essa investigação assume como objetivo geral analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional de alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, por meio de atividades sistematizadas de acordo com a TSD.

Para tanto, os seguintes objetivos específicos foram delineados:

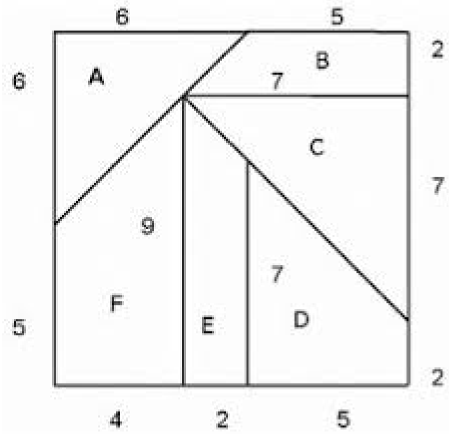
- Planejar e desenvolver, com estudantes de um sétimo ano do Ensino Fundamental, uma tarefa Matemática de acordo com a teoria das situações didáticas que possibilite investigar os significados para $\frac{a}{b}$.
- Desenvolver uma tarefa Matemática, sistematizada por Guy Brousseau, pautada na teoria das situações didáticas com estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental.
- Analisar os registros orais e escritos dos estudantes de acordo com as etapas indicadas por Brousseau (2010) na TSD.
- Investigar indícios do desenvolvimento do raciocínio proporcional, manifestados pelos estudantes utilizando os critérios indicados por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014): Medição Raciocínio Up and Down; Pensamento Relativo; Partilha e Comparação; Unitização; Fontes de significado para a/b.

Considerando a problemática e os objetivos de pesquisa, a primeira atividade desenvolvida com os estudantes foi uma adaptação de uma atividade de modelagem Matemática pautada nos pressupostos teóricos de Blum (2006), que tinha como objetivo abordar o conceito de razão entre duas medidas. Dessa forma, como um convite inicial foi apresentado aos alunos uma notícia de jornal sobre o sequestro de um filhote de cachorro e a única pista que eles tinham sobre o sequestrador era o tamanho da pegada do meliante. Logo após esse momento foi apresentado a seguinte problemática: como posso descobrir quem é o meliante, conhecendo apenas o tamanho do seu pé?

Dessa forma, os alunos começaram a levantar algumas hipóteses no intuito de responder à problemática, ou seja, os grupos começaram a pensar, como poderiam encontrar um número maior de características que ajudaria encontrar o meliante. Nesse momento eles tiveram muitas dificuldades, então na condição de professoras, começamos a indagá-los sobre as prováveis características do meliante. Os questionamentos ajudaram os grupos a concluírem que por meio do tamanho do pé era possível estimar a altura de uma pessoa, assim começaram a medir uns aos outros e comparar essas medidas. Partindo disso surgiram várias estratégias, por exemplo, alguns grupos resolveram por igualdade de duas frações, outros por regra de três, por média e comparação. Por fim cada grupo explicou a estratégia usada e foi institucionalizado o conceito de razão e de igualdade de duas frações no quadro.

Após o desenvolvimento da primeira atividade, em que foi possível institucionalizar o conceito de razão entre duas medidas e a igualdade de duas frações, com o objetivo de explorar algumas características concernentes ao raciocínio proporcional, propusemos uma segunda atividade intitulada a ampliação de um quebra-cabeça sistematizada por Guy Brousseau. Inicialmente foi feita uma discussão sobre quebra-cabeça, como um convite inicial para os alunos. Nessa discussão foi realizada a seguinte proposta: considerando um quebra-cabeça composto por seis peças, como mostra a Figura 1, se um lado da figura F mede 4 cm e quero ampliá-lo para 7 cm, quanto irão medir os outros lados dessa figura e das outras figuras?

FIGURA 1: QUEBRA-CABEÇA.



FONTE: BROUSSEAU, 2006, p. 7.

Todos os grupos tiveram tempo para traçar suas estratégias para ampliação, com orientação docente. Os grupos descreveram o processo percorrido por eles e explicaram no quadro a sua estratégia para resolver o problema apresentado.

É importante explicitar que cada um dos grupos foi responsável por ampliar uma peça. Dessa forma como havia 12 grupos foi possível montar dois quebra-cabeças. Isso porque se cada aluno ampliasse o quebra-cabeça inteiro poderia ajustar as medidas para que todas as peças se encaixassem, sem usarem os conceitos matemáticos esperados. Isso faria com que os alunos pulassem uma etapa muito importante da atividade, na qual de acordo com a TSD podemos intitular de formulação de hipóteses e a justificação dessas hipóteses.

Por meio das respostas que foram dadas montamos o quebra-cabeça com as peças ampliadas por eles e discutimos as estratégias formuladas com o objetivo de identificar elementos que nos permitiram fazer inferências sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Essa discussão foi encaminhada com vistas a sistematizar a noção de razão entre duas grandezas.

A coleta de dados foi realizada por meio dos registros orais e escritos dos alunos. Para registrar as discussões, usamos gravadores de áudio[2], que mostraram com mais detalhes o desenvolvimento dos alunos na atividade, bem como as negociações feitas entre os estudantes. Na seção 5 em que apresentamos as análises, transcrevemos algumas falas dos alunos, que nos auxiliaram durante esse processo.

Para que pudéssemos transcrever as negociações entre estudantes e entre professoras e estudantes, utilizamos o acordo para transcrição de falas, apresentado no Quadro 1, a seguir.

QUADRO 1: NORMAS DE TRANSCRIÇÃO DE FALAS.

Sinais	Normas de acordo com as transcrições de dados
...	Indica qualquer tipo de pausa
( )	Indica hipótese do que se ouviu
(( ))	Inserir comentário do pesquisador
::	Indica prolongamento de vogal ou consoante
/	Indica truncamento de palavras

[2] As gravações em áudio, assim como o desenvolvimento dessa investigação, foram autorizadas pelos estudantes, por seus responsáveis e pela escola.

<table>
<tr><td>- -</td><td>Silabação de palavras</td></tr>
<tr><td>Maiúsculas</td><td>Entonação enfática</td></tr>
<tr><td>(_____)</td><td>Falas sobrepostas</td></tr>
<tr><td>|_____|</td><td>Falas simultâneas</td></tr>
</table>

FONTE: adaptado de
file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/Regras%20de%20Transcri%C3%A7%C3%A3o%20(2).pdf .

As normas foram utilizadas para que o leitor possa compreender como o processo de negociação entre os participantes ocorreu, considerando suas pausas, ênfases, sobreposições de falas, dentre outros aspectos que podem interferir no processo analítico.

A análise foi pautada na teoria das situações didáticas e também nas teorias que embasam o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Além disso, foram levados em consideração apenas os registros dos alunos que participaram de todas as etapas de desenvolvimento da atividade. Neste trabalho foram escolhidos os registros que apresentaram diferentes estratégias para resolver as atividades, com a finalidade de investigar a pluralidade de conceitos matemáticos utilizados para resolver as tarefas propostas.

Partindo disso, as atividades descritas foram desenvolvidas com duas turmas de sétimos anos, sendo 7A e 7B de uma escola estadual de um município situado no Norte do Paraná. A escolha dessa escola se deu pela parceria que a escola já tinha com a UFPR, por meio de projetos de extensão e estágios supervisionados. Assim, uma aluna do curso de Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Matemática estava estagiando nas duas turmas de sétimos anos, o que possibilitou parte do desenvolvimento das atividades presentes na pesquisa com participação da estagiária. Dessa forma a atividade foi desenvolvida por cinco professores, sendo a professora|pesquisadora[3], a Professora 1 (estagiária), a Professora 2 (professora orientadora) e professora 3 (colega de turma) e o professor 4 (professor regente da turma).

Vale a pena ressaltar que as atividades foram desenvolvidas em um primeiro momento no 7B pela professora|pesquisadora com a ajuda dos outros professores, para que a professora 1 compreendesse os procedimentos metodológicos que

---

[3] Utilizaremos este termo, conforme sugerido por Campos e Araújo (2015) para nos referir a(o) pesquisador(a) que cumpre também papel de professor(a).

deviam ser tomados durante a atividade, a fim de abarcar os objetivos da pesquisa. E após esse momento as atividades foram desenvolvidas no 7A pela professora 1, a fim de desenvolver seu estágio e contribuir com a pesquisa.

No quadro a seguir apresentamos uma síntese das atividades realizadas, descritas nas páginas anteriores.

QUADRO 2: SÍNTESE DAS INFORMAÇÕES DAS ATIVIDADES.

	Atividade 1	**Atividade 2**
Objetivo da atividade	Trabalhar conceitos que envolvem a comparação entre duas medidas, ou seja, conceitos que envolvem $\frac{a}{b}$.	Ampliar proporcionalmente um quebra- cabeça.
Turma	7 A e 7B	7 A e 7B
Quantidade de aulas (ch)	2	2
Quantidade de alunos	39	39
Quantidade de grupos	9 grupos de 4 pessoas; 1 grupo de 3 pessoas	9 grupos de 4 pessoas; 1 grupo de 3 pessoas
Quem foram as professoras orientadoras	7 A: Professora 1 7B: Professora|pesquisadora	7 A: Professora 1 7B: Professora|pesquisadora

FONTE: Elaborado pela autora.

Partindo desse pressuposto, as características dessa investigação permitem qualificá-la como qualitativa, já que nosso objetivo é analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional de alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, por meio de atividades sistematizadas de acordo com a TSD, com foco no processo e não no resultado final e faremos isso por meio de descrições e sínteses analíticas.

De acordo com o autor Santos Filho (2009) a pesquisa qualitativa procura esclarecer e identificar fenômenos, ou seja, esse tipo de estudo não prioriza dados numéricos, pois não há uma preocupação com o tamanho dos dados, mas sim com a qualidade, a interpretação e a análise deles. No mesmo sentido, podemos afirmar que:

> A pesquisa qualitativa parece ser o tipo de estudo mais apropriado para tentar dar sentido ao fenômeno educacional, em termos dos significados que as pessoas aportam sobre ele. Por outro lado, a pesquisa qualitativa é um campo inerentemente político, formado por múltiplas posições éticas e políticas, o que permite olha para seus objetos de estudo com um foco multiparadigmático e possibilita um tratamento dos problemas que vão além do diagnóstico (SANTOS; GRECA 2013, p. 17).

É possível perceber que esse tipo de pesquisa ressalta discussões que favoreçam a compreensão de fenômenos educacionais. Para isso os autores Araújo e Borba (2012) ressaltam algumas características importantes apontados por Bogdan e Biklen (1994) para caracterizar uma pesquisa qualitativa. Nas próximas linhas, apresentamos essas características e as abordamos em termos da nossa investigação.

A) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.

Nessa primeira característica, os autores ressaltam a importância de o investigador estar em contato com o meio, o ambiente onde será desenvolvida a pesquisa. Por mais que faça o uso de instrumentos que facilitam a coleta de dados durante a pesquisa, como vídeos, entrevistas, áudios, registros escritos, entre outros, é necessário que o pesquisador tenha alguns conhecimentos sobre o ambiente em que a pesquisa será realizada.

Nesse sentido, em um momento anterior do desenvolvimento das atividades propostas, houve o contato entre os alunos e o pesquisador durante algumas aulas observadas, para que o pesquisador conhecesse o ambiente escolar, que no caso é o ambiente natural na qual o aluno está situado, para a possível coleta de dados e também para os alunos conhecerem a pesquisadora na condição de professora.

B) A investigação qualitativa é descritiva.

Em relação ao segundo aspecto, os autores relatam que os dados coletados estão em forma de imagens, vídeos, desenhos, gravações, palavras, entre outros, e não apenas em números como a pesquisa quantitativa. Esses dados coletados ajudam a reforçar a apresentação da pesquisa.

Nesta pesquisa, a descrição das atividades realizadas foi feita por meio, dos registros escritos, das fotos e das gravações em áudios. Optamos pelo áudio, pois os alunos foram organizados em grupos, e para não perder nenhuma discussão ou fala que poderia ser relevante para a análise da pesquisa optamos por esse registro.

C) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.

Esse aspecto se refere à questão norteadora da pesquisa, e qual o objetivo de análise. Assim, a questão que norteou essa pesquisa de cunho qualitativo é o processo de desenvolvimento do pensamento proporcional por meio de uma investigação pautada na teoria das situações didáticas. Desse modo não faz sentido que a essência seja o resultado final, mas sim todo o processo de desenvolvimento desse raciocínio.

D) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

De acordo com essa característica, os pesquisadores dão uma grande importância as diferentes perspectivas dos participantes da investigação, ou seja, como os sujeitos participantes, analisam, enxergam e percebem o meio em que eles estão inseridos, assim o pesquisador tenta entender os requisitos que estão sendo analisados de acordo com as percepções dos participantes.

Assim nesta pesquisa, mediante todos os instrumentos de coleta de dados, as teorias que embasam a investigação, o contato com o ambiente escolar dos sujeitos participantes, pretendemos investigar os sentidos atribuídos aos conceitos matemáticos relacionados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional pelos estudantes, sujeitos participantes dessa pesquisa.

3 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

O desenvolvimento do pensamento proporcional é visto como um requisito importante pelas Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná, DCE (2008) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Educação, PCN (1998) por fundamentar a compreensão dos alunos em outros conteúdos matemáticos, como funções, álgebra, trigonometria entre outros. Dessa forma é importante que esse pensamento seja desenvolvido com os alunos do Ensino Fundamental, para que ao avançar de etapa na escola, estejam preparados para conteúdos matemáticos aprimorados e complexos.

Nesse sentido, é necessário que o professor busque metodologias de ensino e atividades que permitam o desenvolvimento desse pensamento dos alunos do Ensino Fundamental. Diante disso, a busca por teorias de ensino e de aprendizagem que contribuam com processos mais investigativos e menos passivos para os alunos é essencial, e faz-se necessário encontrar mecanismos para que estes estudos alcancem as salas de aulas e também os professores.

Considerando que a TSD pode embasar o planejamento de situações que sejam ricas do ponto de vista da aprendizagem de Matemática, no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio proporcional e, com a finalidade de conhecer o terreno em que pesquisamos, realizamos um levantamento bibliográfico no Banco de Teses e dissertações da CAPES, bem como em alguns periódicos de impacto na área de Educação Matemática, para mapear e situar nossa investigação.

Dessa forma, para analisarmos os trabalhos já publicados sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional, recorremos ao Banco de Dissertações e teses da Capes, e à três revistas, sendo elas, a Bolema de qualis A1 , a Zetetiké e a Educação Matemática em revista (EMR) ambas de qualis A2, na intenção encontrar trabalhos que mostram sobre como se dá o desenvolvimento do raciocínio proporcional e de que maneira isso é analisado. Assim, iniciamos a pesquisa pela revista Bolema, buscando pelo termo “pensamento proporcional”, já que os aspectos que queríamos observar sobre o raciocínio proporcional também dizem a respeito ao pensamento proporcional. Partindo disso, obtivemos apenas dois resultados que estão representados no Quadro 3, a seguir. Já nas revistas Zetetiké e EMR não obtivemos nenhum resultado encontrado.

QUADRO 3: TRABALHOS DA REVISTA BOLEMA.

Título	T[4] D A	Autor	Universidade	Objetivo	Aporte teórico
Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional.	A	Cristina Maranhão[I]; Silvia Machado[II]	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Avaliar descritores utilizados em duas pesquisas, na análise de atividades sobre o pensamento proporcional.	Componentes do raciocínio proporcional divulgados por Post, Behr e Lesh
O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção	A	Alina Galvão Spinillo	Universidade Federal de Pernambuco	Examinar a possibilidade de que crianças possam aprender sobre proporções, usando esta estratégia de maneira sistemática, transferindo sua aplicação para outras tarefas de proporção consideradas difíceis.	Relação de primeira e segunda ordem do pensamento proporcional

FONTE: elaborado pela autora.

O primeiro artigo encontrado é intitulado como “Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional”. O objetivo central do trabalho era avaliar descritores utilizados em duas pesquisas, na análise de atividades sobre o pensamento proporcional. Para desenvolver a análise os autores partiram dos pressupostos teóricos de Post, Behr e Lesh (1988). Ao término da análise foi possível perceber uma comparação das pesquisas selecionadas em suas bases teóricas com outros referenciais teóricos propostos por Raymond Duval, Anna Sfard, Geraldo Ávila e Elon Lages de Lima.

Já o segundo artigo selecionado intitulado “O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção” investiga como as crianças podem aprender sobre proporções, usando a estratégia da metade de maneira sistemática, transferindo sua aplicação para outras tarefas de proporção consideradas difíceis. Para isso foi aplicado um pré-teste, uma intervenção e um pós-teste envolvendo questões de proporção para 180 crianças de aproximadamente 6 a 8 anos. Após a aplicação eles perceberam que as crianças haviam melhorado seu empenho no pós-teste após a intervenção, assim concluíram

[4] Usaremos as iniciais para representar, respectivamente – T: tese; D: dissertação; A: artigo.

que podemos ensinar as crianças a fazer julgamentos e questionamentos sobre proporção utilizando a estratégia da metade que auxilia a lidar com as quantidades e as relações cruciais ao raciocínio proporcional.

Partindo disso, os dois artigos citados anteriormente fazem referência ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, mais especificamente um analisa o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e o outro analisa o desenvolvimento desse raciocínio nos alunos do Ensino Fundamental.

Em relação ao primeiro artigo intitulado “Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional” analisa o desenvolvimento desse raciocínio nos professores do Ensino Fundamental, e apresenta aspectos que foram fundamentais para o desenvolvimento desse raciocínio, por exemplo, a utilização de conceitos que envolvem proporcionalidade, como a divisão e a multiplicação, utilizar a ideia de covariação, usar a proporção no momento em que for analisar os dados, entre outros. Assim é possível perceber que esses aspectos podem ser analisados de acordo com os critérios descritos por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), já que, esses aspectos também podem ser observados durante o desenvolvimento das atividades desenvolvidas para compor a presente pesquisa.

O segundo artigo intitulado “O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção”, assim como a presente pesquisa investiga como uma metodologia de ensino pode propiciar o desenvolvimento do raciocínio proporcional, no caso do artigo essa metodologia é conhecida como estratégia da metade. Além disso, ressaltam a importância das intervenções feitas pelos professores durante o desenvolvimento, já que, os grupos que tiveram a ajuda dos professores por meio de intervenções tiveram um melhor resultado nos testes aplicados. Isso nos mostra que o papel do professor é fundamental para o momento em que o aluno está formalizando conceitos que fazem parte desse raciocínio.

Após a pesquisa em revistas, partimos para o Banco de Dissertações e Teses da Capes. Por apresentar aproximadamente 90% dos trabalhos já publicados no país. Ao inserir o termo de busca “pensamento proporcional” obtivemos como resultado 38.201 trabalhos que possivelmente poderiam estar atrelados ao pensamento proporcional. Para restringir selecionamos como área de conhecimento o ensino de ciências e Matemática. Dessa forma limitamos para 119 trabalhos. Ao analisar cada título e resumo, conseguimos selecionar apenas 4 trabalhos que envolviam conceitos relacionados ao raciocínio proporcional no Ensino Fundamental, na qual estão representados no Quadro 4 a seguir, os outros trabalhos não foram selecionados, pois não faziam referência ao nível de ensino em que essa pesquisa foi desenvolvida.

QUADRO 4: TESE E DISSERTAÇÕES DO BANCO DA CAPES.

Título	TD	Autor	Universidade	Objetivo	Aporte teórico
Resolução de problemas multiplicativos e sua complexidade do ponto de vista da leitura	D	Raimundo Nonato Santana	Universidade Federal do Pará	Investigar se os alunos das séries iniciais lêem, compreendem e resolvem problemas de estrutura multiplicativa,também o uso da operação esperada na resolução dos problemas de multiplicação	Resolução de problemas, paradigma do exercício.
Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração	T	Rafael Factori Canova	Universidade Anhanguera de São Paulo	Investigar se o ensino de fração por meio de determinados problemas elaborados na situação parte-todo ou quociente	Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaut e os estudos de Nunes
Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática: Investigando os números racionais na forma fracionária	D	Paulo César Freire	Universidade Anhanguera de São Paulo	Verificar quais mudanças de raciocínio de alunos de 5ª série sobre números racionais na forma fracionária foram acarretadas pelo estudo desse conteúdo nessa série	Quadro teórico elaborado por David Tall (2004a, 2004b), intitulado Os Três Mundos da Matemática
Construção dos critérios de divisibilidade com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental por meio de situações de aprendizagem	D	Juliana de Lima Gregorutti	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Analisar o conhecimento de seis alunos da 5° série do Ensino Fundamental que surge a respeito do assunto: divisibilidade de números naturais, em que se visa a construção de um novo conceito	Teoria dos Registros de Representações Semióticas, proposta Duval (2003) e a engenharia Didática, proposto por Artigue (1996)

FONTE: elaborado pela autora.

O primeiro trabalho citado no Quadro é uma dissertação e tem como tema principal “Resolução de problemas multiplicativos e sua complexidade do ponto de vista da leitura”, dessa forma para investigar os problemas multiplicativos de acordo com os pressupostos teóricos de Huete e Bravo (2006), foi aplicado uma lista com 14 questões e 6 perguntas para 45 alunos da quarta série do Ensino Fundamental, assim eles buscaram analisar se os alunos leem, compreendem e resolvem problemas de estrutura multiplicativa. Diante desse pressuposto eles puderam perceber que os alunos que tinham problema com a leitura tiveram dificuldades na interpretação do problema, mostrando que “a leitura é um fator essencial na resolução de problemas multiplicativos”.

Dessa forma, é possível perceber que o objetivo da pesquisa foi analisar como os alunos raciocinam desde o momento da leitura de um problema que envolve conceitos multiplicativos, até o momento de resolução. Assim esse raciocínio que o aluno percorre, faz parte do raciocínio proporcional, pois como já dito em seções anteriores, quando se trata de proporcionalidade, não se restringe apenas aos conceitos de razão e proporção, mas também conceitos multiplicativos, fracionários, divisórios, entre outros.

A próxima pesquisa é uma tese de Rafael Factori Canova intitulada “Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração” tem como objetivo investigar se o ensino da fração mediante problemas que relacionam situações de parte-todo ou quociente contribui com a construção do conhecimento e do raciocínio de alunos que estão nos anos iniciais. Para isso foram elaboradas oito questões sendo que quatro delas envolvia a relação parte-todo e quatro envolviam o entendimento de quociente, para ser aplicado para 378 alunos de duas escolas de São Paulo. Após esse pré-teste os alunos foram divididos em grupos, parte deles ficaram com experiências de situações de parte-todo, e os outros ficaram com experiências de situações que envolviam o quociente. Assim eles puderam perceber que o grupo de quociente se beneficiou em relação às questões de raciocínio e o grupo parte-todo se beneficiou mais com as questões de nomear frações, fazendo com que cada tipo de situação favorecesse a aprendizagem dos alunos de maneira distintas.

Assim essa pesquisa analisou como o aprendizado de conceitos como fração e relação parte-todo pode contribuir para a construção do raciocínio matemático dos alunos dos anos iniciais, ou seja, alunos que estão começando a ter acesso a conhecimentos em envolvem proporcionalidade. Quando eles se referem ao raciocínio matemático que se desenvolve durante o ensino e a aprendizagem do conceito de fração, eles estão se referindo ao raciocínio proporcional. Para a Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) compreender a fração é o "ponta pé" inicial para a trajetória da compreensão do conjunto dos números racionais e de conteúdos mais aprimorados que abarcam esse conjunto. Dessa forma é de extrema necessidade que pesquisas como essas sejam desenvolvidas nos anos iniciais, já que é quando o aluno está começando sua trajetória na Matemática escolar, e ter raciocínios como o proporcional desenvolvido irá contribuir de maneira significativa para a compreensão de novos conceitos mais aprimorados.

Outro trabalho que foi selecionado por conter o raciocínio proporcional foi a dissertação de Paulo César Freire, intitulada "Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática: Investigando os números racionais na forma fracionária", na qual investigaram as mudanças dos raciocínios de alunos do quinto ano sobre números racionais na forma fracionária motivada após a aplicação do conteúdo. Para fazer essa investigação foi aplicado um questionário para 41 alunos como pré-teste, contendo treze questões que relacionavam a parte-todo, quociente, operador, medida, razão e probabilidade. Em seguida foi ensinado o conteúdo dos números na forma fracionária e aplicado novamente o mesmo questionário, e também uma entrevista com os alunos para saber como eles pensaram para resolver as questões. A análise dos dados foi embasada na teoria dos três mundos da Matemática e foi possível perceber que os alunos antes de estudarem o conteúdo na quinta série utilizavam características do mundo corporificado, depois da aprendizagem do conteúdo passaram a utilizar características do mundo simbólico.

O trabalho anterior analisa como o raciocínio do aluno sobre determinado conceito, muda após a aplicação do conteúdo que relaciona proporcionalidades como, operador, razão, quociente, entre outros. De acordo com a pesquisa, os alunos entendem e acertam muito mais quando não tem conceitos técnicos envolvidos, ou seja, quando usam a lógica ou apenas a interpretação. E quando ocorre a aplicação do conteúdo, gera uma dificuldade dos alunos de interpretar e utilizar esses conceitos, isso se dá de acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) pela dificuldade de entender os números racionais, e que a fração por mais que apresenta dois numerais (o numerador e o denominador), representa apenas um número que é parte de um inteiro.

Por último, podemos citar a dissertação da Juliana de Lima Gregorutti, que tem como tema: “Construção dos critérios de divisibilidade com alunos da quinta série do Ensino Fundamental por meio de situações de aprendizagem”. O intuito da pesquisa foi analisar o conhecimento de alunos do quinto ano a respeito da divisibilidade dos números naturais, para construir um novo conceito, o critério de divisibilidade para os números dois, três e cinco. Para isso foram aplicadas quatro atividades sendo duas delas de livros didáticos e duas lúdicas que envolviam jogos matemáticos. Por meio das análises desenvolvidas de acordo com os pressupostos da Engenharia Didática, proposto por Artigue (1996), perceberam que ao estabelecer os Critérios de Divisibilidade por 2, 3 e 5, os alunos rapidamente notaram o padrão numérico para os Critérios de Divisibilidade por 2 e 5, perceberam que, por 2 só era possível dividi-los por números pares e por 5 pelos números que terminam em zero ou cinco. No entanto, não conseguiram, de maneira autônoma, notar quando o número pode ser dividido por três. Além disso, melhorou a interação entre os alunos e o professor, deixando os alunos mais engajados.

A pesquisa apresentada no parágrafo anterior analisa o conhecimento que os alunos de um quinto ano têm em relação aos critérios de divisibilidade dos números naturais, ou seja, pretende investigar se os alunos tem o raciocínio proporcional desenvolvido para a divisão, para que eles consigam ensinar um novo conceito mais aprimorado que é o critério de divisibilidade para o 2, 3 e o 5. Isso ressalta o que já foi dito por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é fundamental para o aprendizado de conceitos mais aprimorados.

Por meio do levantamento bibliográfico, foi possível concluir que a linha de pesquisa sobre o raciocínio proporcional nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental é pouco estudada e debatida em trabalhos acadêmicos. Mediante isso não foi encontrado nenhum trabalho publicado que tenha utilizado a alternativa de trabalhar com atividades embasadas na teoria das situações didáticas como alternativa metodológica para o desenvolvimento do raciocínio proporcional de alunos que estão no Ensino Fundamental, ou seja, é um estudo que pode contribuir para a área de pesquisa da Educação Matemática, apresentando uma possibilidade de desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos durante as aulas de Matemática.

4 REFERENCIAIS TEÓRICOS

4.1 DESENVOLVIMENTO DO RACICIONIO PROPORCIONAL

4.1.1 Raciocínio e pensamento proporcional

Por mais que Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997,1998) visem o desenvolvimento do raciocínio proporcional como algo essencial para o pensamento matemático dos estudantes, no âmbito do ensino formal, pouco temos articulado outros conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento de conceitos relacionados à proporcionalidade para o desenvolvimento do pensamento proporcional, como a aprendizagem sobre frações e os números racionais, de forma mais ampla.

> *O ensino de conceitos relacionados aos diferentes registros e interpretações dos números racionais e às razões, como partes indispensáveis para o desenvolvimento do Raciocínio proporcional, deveriam oportunizar e encorajar alunos e professores* a desenvolverem suas próprias estratégias para resolução de tarefas, a levantarem hipóteses, predizerem resultados, a utilizarem os domínios da linguagem materna para justificar suas estratégias e raciocínio (...) (CYRINO; ROCHA; PIRES; ROBERTO, 2014, p. 60, grifos nossos).

Para a autora Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) existem algumas estruturas Matemáticas que contribuem positivamente para a mobilização de novas ideias e conceitos para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Um exemplo de estrutura é a fração, que pode ser o ponto de partida para vários outros conhecimentos, por exemplo, a compreensão do conjunto dos números racionais. Isso nos leva à ideia de que a proporcionalidade está relacionada aos diferentes significados que podem ser produzidos para o registro fracionário (CYRINO; ROCHA; PIRES; ROBERTO, 2014).

> O ensino do conceito de frações deve ter em conta uma ampla gama de fenômenos que podem ser representados por meio de símbolos fracionários, mas que tem interpretação e significados diferentes. *(...) é importante criar situações que possibilitem às crianças oportunidades para construir diversos significados para as frações, de modo que possam transitar e estabelecer conexões entre eles e compreender como os significados influenciam as operações* (CYRINO; ROCHA; PIRES; ROBERTO, 2014, p. 38, grifos nossos).

Compreender o conceito de fração e suas propriedades não é um processo rápido e simples, demanda tempo e um longo processo de ensino e de aprendizagem, já que muitos conceitos matemáticos estão envolvidos. Dentre esses conceitos podemos citar o significado da relação parte-todo na qual o todo é dividido em partes iguais e a unidade é representada na forma de uma figura contínua, por exemplo, o pedaço de uma corda, e também como um conjunto discreto, como certo número de balas.

Também podemos citar o significado de quociente que pode ser percebido quando certo número de objetos precisa ser repartido em grupos, ou seja, quando vamos repartir uma pizza de 8 pedaços para 4 pessoas. O significado de razão, na qual é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades que possuem a mesma unidade de medida, por exemplo, em uma sala de aula que tem 10 meninas e 20 meninos, podemos afirmar que a razão do número de meninas para o número de meninos é de ½ ou também pode ser escrito por 1:2. E por fim o significado de operador, compreendido como um arranjo multiplicativo de números racionais. Por exemplo, para calcular 1/3 do número 20, o operador primeiro faz uma divisão de 20 por 3 e depois multiplica por 1.

Além desses conceitos citados anteriormente, existem muitos outros conceitos envolvidos, como a multiplicação, a divisão a soma a subtração, entre outros. Neste momento na qual se começa a serem atribuídos os significados da fração para os alunos o papel do professor é muito importante, visto que é ele quem organiza o espaço e o tempo que garante a construção do raciocínio matemático, mais especificamente nesse caso o raciocínio proporcional, e a capacidade de lidar com novas ideias e conhecimentos importantes.

De acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), entender o que é fração e seus significados é o primeiro passo para compreender o estudo a respeito dos conjuntos dos números racionais. Porém para que haja a compreensão do conteúdo e o desenvolvimento desse raciocínio é necessário que o sujeito desenvolva a habilidade de trabalhar de forma autônoma, ou seja, que ele saiba interpretar, elaborar hipóteses, justificar as ideias, entre várias outras capacidades que contribuem para o processo de construção do conhecimento.

> (...) o raciocínio proporcional não deve ser tomado como um sinônimo de proporcionalidade, mas como uma condição necessária para que os indivíduos sejam capazes de compreender contextos e aplicações Matemáticas que envolvam proporção/ proporcionalidade (Lamon, 2012 apud CYRINO; ROCHA; PIRES; ROBERTO, 2014, p. 48).

Assim, para alguns autores como Behr, Lesh e Post (1998) o raciocínio proporcional é o ápice dos alunos na escola primária e o suporte para a continuação dos estudos em Matemática, dessa forma estimula alguns aspectos que podemos classificá-los como qualitativos e quantitativos. Os aspectos quantitativos relacionam-se com a capacidade de desenvolver a Matemática, ou seja, solucionar algoritmos de forma adequada, além de pensar em novas possibilidades numéricas de resolução. Podemos exemplificar esse caso com a seguinte igualdade (A-B = C-D), na qual, envolvem mais conceitos aditivos do que multiplicativos e sempre relacionando grandezas numéricas em termos relativos para encontrar uma relação constante. Já os aspectos qualitativos, estão ligados à capacidade de analisar a Matemática de forma com que o indivíduo consiga identificar e associar outros tipos de conhecimentos, interpretando os dados do problema resolvido, por exemplo, quando os alunos conseguem identificar uma relação entre quatro elementos de uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, assim nesse caso os alunos conseguem relacionar as grandezas de forma multiplicativa e diretamente/ inversamente proporcionais, na qual é uma das características dos aspectos qualitativos.

Esses aspectos podem ser observados nos problemas de proporcionalidade, porém as dificuldades dos alunos em compreender os diferentes tipos de representações e de interpretações que envolvem os problemas de proporção são evidentes, mesmo se os dois lados da proporção envolvam o mesmo sistema de representação. Isso ocorre devido algumas dificuldades na compreensão de certos conceitos relacionadas às frações. De acordo com a autora Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), uma dessas dificuldades é entender que apesar de uma fração ser escrita por dois números ela representa apenas um numeral, além de compreender questões do tipo 1/3 >1/7, entre outras situações.

> Os problemas sobre raciocínio proporcional baseados na vida real envolvem frequentemente comparações entre sistemas de representação. Descobrimos que estas tendem a ser surpreendentemente difíceis para a maioria dos alunos (LESH; BEHR; POST, 1987, p. 6).

O pensamento proporcional vai além da noção de igualdade, ou seja, da igualdade de duas razões, envolve comparação, representação dos dados, compreensão dos diferentes tipos de operações, entre outros. Por exemplo, a equação 9/3 = 5-2 não devia ser considerada uma proporção, por mais que o resultado de ambas as expressões sejam o mesmo porque os dois lados da equação não são estruturalmente iguais, já que o lado esquerdo da equação está estruturada na forma de $\frac{a}{b}$ em quanto a do lado direto não. As transformações, conceitos e regras da proporcionalidade devem ser vistos pelo professor com cuidado, já que é na apropriação destes conceitos que o aluno constrói seu raciocínio proporcional.

De acordo com os autores Behr, Lesh e Post (1998), os termos Pensamento Proporcional e Raciocínio Proporcional em diversas publicações na área da Educação Matemática, são vistos como sinônimos, com o objetivo de retratar o tipo de raciocínio que envolve as noções de comparações multiplicativas entre razões, e também, a capacidade de interpretar e processar várias informações motivando os aspectos quantitativos e qualitativos o pensamento. Porém existem alguns autores que assumem perspectivas diferentes em relação ao pensamento e ao raciocínio proporcional.

A autora Lopes (2012 apud CYRINO et al., 2014), apresenta a diferença existente, entre pensamento proporcional e raciocínio proporcional. O termo pensamento é compreendido, como algo que surge por meio de uma atividade, ou seja, aquilo que surge no intelecto, depois da abstração do conhecimento. Assim o pensamento pode originar uma série de ações racionais, como a análise, a síntese, a comparação, a generalização e a abstração de um determinado conhecimento.

Em contrapartida, o raciocínio é algo menos abrangente, surge quando está desenvolvendo uma operação lógica, por meio dele pode-se justificar ou defender uma determinada solução, e até mesmo criar estratégias para tal solução. Desse modo é possível observar que o raciocínio é uma condição para o desenvolvimento do pensamento. Assim neste trabalho iremos assumir a perspectiva do raciocínio proporcional.

4.1.2 Critérios de indícios do raciocínio proporcional

De acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), as ideias, estruturas, conceitos e formas de pensar sobre frações, devem fazer parte da trajetória escolar do aluno, para que possam ser estudadas e discutidas diversas situações que envolvem esse conceito fazendo com que haja um incentivo para que os professores e os estudantes comecem a raciocinar.

> A ideia de proporcionalidade está relacionada a um dos diferentes significados que podem ser produzidos para o registro fracionário $\frac{a}{b}$: a razão. Matematicamente a proporcionalidade é descrita por uma igualdade entre duas razões como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com b e d diferentes de zero (...) (CYRINO; ROCHA; PIRES; ROBERTO, 2014, p.47).

Também existem outros tipos de representações para a proporcionalidade, como as funções *y* = m.*x* e *x*.*y* = m, na qual representa relações multiplicativas que podem ser contextualizadas como diretamente e inversamente proporcionais. E como já dito nas seções anteriores, o raciocínio proporcional abre portas para novos conceitos e raciocínios, como o raciocínio algébrico. Partindo desse pressuposto a autora indica e relaciona elementos essenciais para a mobilização do raciocínio proporcional, na qual nomearemos de critérios de Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), sendo eles:

a) Medida / medição e o raciocínio relativo

A medida ou medição é a base para o amadurecimento do raciocínio proporcional, já que essa apresenta-se na construção dos significados das representações fracionárias. Dessa maneira existem diferentes significados para a notação $\frac{a}{b}$. Por exemplo: pode ser uma fração que faz relação com a parte-todo, uma razão que vai averiguar uma relação existente entre duas variáveis, uma taxa de variação, uma divisão em partes, entre outros.

Os entendimentos dos significados de medições estão atrelados a três princípios, sendo eles: 1) o princípio compensatório: quanto menor a unidade fracionária, maior a quantidade de unidades necessária para expressar algo; 2) o princípio de aproximação: uma medida nunca é um número exato, é sempre uma aproximação, dessa forma fica mais fácil manipular quando necessário as unidades de medida para torná-las precisas; 3) o princípio de partição recursiva: é possível subdividir uma unidade em partes menores iguais, quantas vezes forem preciso, para alcançar uma medida precisa.

Levando em consideração os princípios citados anteriormente sobre os significados de medição, é possível perceber que a medição está ligada com o conceito de raciocínio relativo, ou seja, o raciocínio que leva a percepção de variações de medidas, como a diferença entre a altura inicial de uma planta e a altura final resulta em uma medida numérica ou linear que pode ser determinada em metros, centímetros, milímetros essa variação é caracterizada como absoluta. Já quando a comparação definida entre a quantidade linear descrita pelo crescimento da planta é representada por uma taxa de crescimento que pode ser indicada por unidades como a porcentagem %, chamamos essa variação de relativa.

Portanto, o raciocínio relativo proporciona ao aluno capacidades para lidar com quantidades mais complexas, que muitas vezes não podem ser medidas diretamente com instrumentos específicos ou com o principio de contagem, já que são quantidades/ medidas fruto de comparações e relações de grandezas diferentes.

b) Quantidades e covariação:

Quando a autora indica as quantidades e a covariação como critério, ela se refere à capacidade das pessoas de reconhecer algumas quantidades e perceber como essas quantidades variam quando estão relacionadas. Dessa forma competências como estimar grandezas de modo direto e indireto, analisar quais dessas grandezas sofrem variações, ou seja, quais delas co-variam ou permanecem invariantes, identificar se a variação ocorre de maneira multiplicativa, diretamente ou inversamente proporcional potencializam o raciocínio proporcional, já que todas essas relações vão além da percepção obvia das situações analisadas.

c) Processos de unitização e raciocínio progressivo e regressivo

De acordo com a autora os processos de unitização e os raciocínios progressivos e regressivos são diretamente relacionados. Pois a unitização nada mais é do que o procedimento de reorganização das grandezas que estão sendo trabalhadas, ou seja, reagrupar essas grandezas de forma com que os subgrupos continuem representando as mesmas quantidades totais. E esse processo é elaborado por meio do raciocínio progressivo e regressivo, ou seja, é procedimento mental que calcula a partir de uma fração relações de proporcionalidade que são equivalentes a unidade referencial, e assim encontrar as relações proporcionais para outras frações dessa unidade referencial.

d) Partilha (divisão equitativa) e comparação

A ideia de grandezas na forma fracionária do tipo $\frac{a}{b}$ com b diferente de zero, vem da partilha, ou seja, vem do ato de dividir em partes uma unidade discreta ou contínua em sessões iguais e finitas, assim cada parte não se sobrepõe as outras que também são resultantes da partilha. É por meio, também, desse processo que é possível compreender as representações fracionárias e decimais dos números racionais, e também o conceito de equivalência entre duas ou mais frações. Portanto a ideia de dividir uma unidade podendo estabelecer comparações entre as partes, também está relacionada com o conceito de medição, mais especificadamente com o princípio de partição recursiva, que diz que uma unidade de medida pode ser subdividida em partes menores e iguais.

Partindo desse pressuposto, é possível perceber que os critérios nada mais são do que tipos de significados para a fração no contexto da proporcionalidade. Dessa forma, utilizaremos cada um dos cinco critérios apresentados para analisar se houve indícios do desenvolvimento do raciocínio proporcional, ao desenvolvermos as duas atividades aqui já mencionadas, pautadas na TSD.

4.2 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

4.2.1 Milieu

Para entender um pouco melhor essa teoria, vamos primeiramente nos ater aos significados dos termos: situação e didática. Situação é a interação existente entre o sujeito e o meio, ou melhor, é tudo o que está envolvido no processo de ensino do indivíduo.

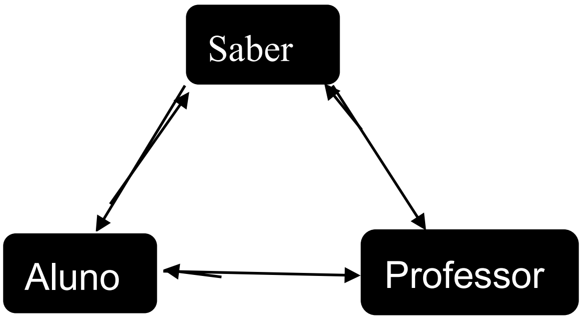
> (...) identificamos como situações Matemáticas todas aquelas que levam o aluno a uma atividade Matemática sem intervenção do professor. Reservamos o termo situações didáticas para os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno (BROUSSEAU, 1986, p. 21).

Por sua vez, a palavra didática tem origem grega e refere-se a ensinar, instruir, expor claramente, demonstrar, ou seja, podemos caracterizar a didática como a arte do ensino. Segundo o criador da didática moderna Comenius, a didática seria um método único que poderia ser utilizado em qualquer situação e matéria, sendo suficiente para a prática de ensino. Em contrapartida foi possível perceber que nem todos aprendem da mesma forma e com usando a mesma metodologia, e para contrapor esse pensamento Guy Brousseau (1986) definiu a didática como uma ligação própria entre os conteúdos de ensino, ou seja, a maneira como os alunos constroem seus conhecimentos e os procedimentos metodológicos seguidos pelo professor.

A partir disso Guy Brousseau criou a teoria das situações didáticas e propôs algumas situações para entender a relação entre professor, aluno e saber em sala de aula. Tal teoria se baseia no princípio: cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação, entre duas ou mais pessoas. Além disso, vale a pena ressaltar que um dos objetivos centrais dessa teoria é estudar os acontecimentos que interferem de algum modo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Uma das coisas indispensáveis que dá a base para esse conceito é o *milieu*, um conceito sistematizado por Brousseau para ajudar a analisar as relações existentes entre os alunos, o conhecimento e o saber, e também as relações entre os conhecimentos e as situações existentes em sala de aula.

Para que toda a análise ocorra, a teoria das situações didáticas se apoia em torno do *milieu*, na qual envolve o triângulo existente entre, o aluno, o professor e o saber, como já citado neste trabalho, na seção 1:

FIGURA 2: RELAÇÃO DO SABER.



FONTE: Adaptado de POMMER, Wagner Marcelo. Brousseau e a ideia de Situação Didática, 2008, p.2.

De acordo com Brousseau (1986), na primeira hipótese o aluno aprende adaptando-se a um *milieu* pautado em dificuldades, desequilíbrios e contradições. Destarte, esse saber que é consequência da adaptação do aluno nesse meio, surge por meio de novas respostas, que provam a aprendizagem. Essa hipótese é baseada na teoria de adaptação de Jean Piaget.

Já a segunda hipótese, nos diz que um *milieu* sem intenção didática é insuficiente para que ocorra o processo de aprendizagem na Matemática. Assim é necessário que o professor organize o *milieu* a partir de uma intencionalidade didática, na qual serão desenvolvidas situações passíveis de provocar a aprendizagem. Por último, a terceira hipótese enfatiza a importância de o *milieu* empregar fortemente os saberes matemáticos que envolvem o ensino e a aprendizagem.

Portando o *milieu* é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem do aluno, já que é por meio dele que os alunos conseguem interagir com o professor e o saber, ou seja, o *milieu* permeia-se em todas as situações que envolvem a sala de aula, tanto nas situações didáticas, quanto nas situações adidáticas, que serão os temas da próxima sessão.

4.2.2 Situação didática, adidática , não didática e o milieu

A teoria das situações, na qual abarcam as situações didáticas e adidáticas tem como finalidade mostrar um conjunto de relações estabelecidas entre os alunos, o *milieu* e também um sistema educativo (professor) para que possam adquirir um saber. Deste modo, o papel do professor é significativo, já que é ele que fornece todos os requisitos para que o aluno consiga chegar a um resultado coerente, que possa se transformar em um saber coerente e científico. Sem o professor pode até ocorrer uma situação de estudo, na qual envolve apenas o saber e o aluno, porém, a situação didática só ocorre quando os três elementos estão envolvidos no ambiente de sala de aula.

Sabe-se que um dos objetivos da educação Matemática é fornecer uma autonomia intelectual para os alunos entenderem e participarem, atuarem no mundo em que vivem. Mas existem situações que contribuem para a formação de conceitos e que não estão no domínio pedagógico do professor, podemos chamar de situações adidáticas, nas quais permitem compreender a relação existente entre o ambiente escolar, os conhecimentos do cotidiano e da imaginação do aluno.

Para Pais (2001), em uma situação didática, sempre haverá várias situações adidáticas, e o desafio de tentar entender essa interação mostra a grande intenção educacional da didática Matemática. Em uma situação adidática há a existência de alguns aspectos educacionais que não precisa do controle didático do professor, assim de acordo do Brousseau:

> Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática (BROUSSEAU, 1986, p. 21).

Nessa situação o aluno vai trabalhar sem a intervenção do professor, porém, o professor já pensou em tudo o que o aluno pode fazer, e nas dúvidas que podem surgir, há a intencionalidade do erro como trampolim para os novos passos da atividade. Já na situação didática, de acordo com Saddo (2010) há um jogo de interação entre os alunos com o problema dado pelo professor, assim o modo como o professor propõe esse problema ao aluno, pode ser chamado de devolução, na qual tem como objetivo gerar uma rica interação, possibilitando um desenvolvimento autônomo do aluno.

Normalmente o aluno não percebe, em um primeiro momento, se a situação que ele está envolvido é adidática ou didática, já que uma situação completa a outra. Para Brousseau:

> A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, por uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas. (BROUSSEAU, 1986, p. 49. Tradução feita por: Saddo Ag Almouloud).

Dessa forma é possível perceber que o processo de ensino e aprendizagem se fundamenta na noção de devolução, ou seja, fundamenta-se no convite que o professor faz para o aluno para determinada atividade e também as considerações que os alunos realizam após terem aceitado o convite, todo esse processo é considerado uma situação adidática. Dessa forma, o *milieu* adidático é um sistema antagonista ao sujeito, ou seja, o aluno é responsável pelo processo da sua aprendizagem.

No entanto, existe outro tipo de situação, que muitas vezes gera ambiguidade com a situação adidática, na qual é conhecida como situação não didática, onde o professor não tem intencionalidade pedagógica, ele escolhe um assunto qualquer, ou um problema qualquer, sem pensar nos passos, nas dúvidas que podem emergir, entre outros aspectos.

> Segundo a teoria Piagetiana, a criança aprende adaptando-se a um milieu, numa situação não didática. Brousseau (1986) salienta, porém, que o milieu sem intenções didáticas é manifestamente insuficiente para induzir no aluno todos os conhecimentos que se deseja que ele adquira. A relação didática tem por finalidade desaparecer, e o sujeito deverá então pode utilizar os conhecimentos assim construídos fora de todo contexto com intenção didática. Essas duas condições explicam a necessidade da noção de milieu na teoria das situações didáticas. (ALMOULOUD, 2010, p.35).

Por meio de todas as considerações de Almouloud (2010) e do Brousseau (1986) é possível perceber que o *milieu* que é construído pelo professor permeia-se em todas as situações e é o gradiente necessário para o desenvolvimento cognitivo dos alunos em sala de aula e também para o processo de devolução na qual o professor consegue fazer um auto avaliação do trabalho e também avaliar os alunos em cada momento de uma atividade.

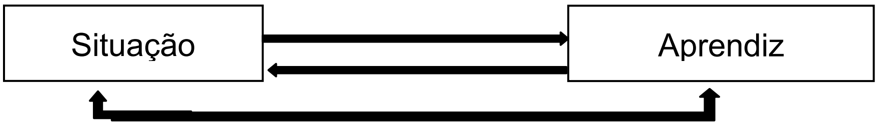
4.2.3 Tipos de situações didáticas

Existem várias situações que se iniciam com a escolha de problema compatível com o nível de pensamento matemático do aluno. Assim de acordo com Pais (2001) para que a escolha do problema seja válida é necessário que o professor tenha clareza dos passos que os alunos irão desenvolver. Para analisar esse processo Brousseau (1986) criou uma tipologia de situações, sendo elas: situação ação, situação formulação, situação validação e situação institucionalização. Essas tipologias foram caracterizadas por três tipos de interações fundamentais com o *milieu*, assim sendo: tomada de decisão, troca de informações em uma linguagem codificada, troca de argumentos.

a) Dialética ação:

Na situação ação, o aluno aceita o problema e cria hipóteses imediatas para tentar entender o que foi dado, ou seja, utiliza conhecimentos experimentais, sem a intenção de associar alguma teoria. Nesse caso o aluno fornece dados e informações corretas de um problema, mas não sabe explicar os argumentos que utilizou para chegar na resposta. Assim o professor tem o papel fundamental de traçar estratégias para fazer com que o aluno possa agir diretamente sobre o problema. É possível perceber essa interação no esquema 1 a seguir:

ESQUEMA 1: DIALÉTICADE AÇÃO- SADDO AG ALMOULOUD



FONTE: adaptado de ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**, 2010, p. 38.

Segundo Almouloud (2010), uma boa situação de ação deve permitir ao aluno julgar a resolução que ele chegou e ajustá-la se precisar, sem a intervenção do professor, graças à retroação do *milieu,* ou seja, o *milieu* volta a sua situação inicial sempre que necessário. Assim o aluno pode buscar melhorar ou abandonar o modelo criado, isso caracteriza uma aprendizagem por adaptação.

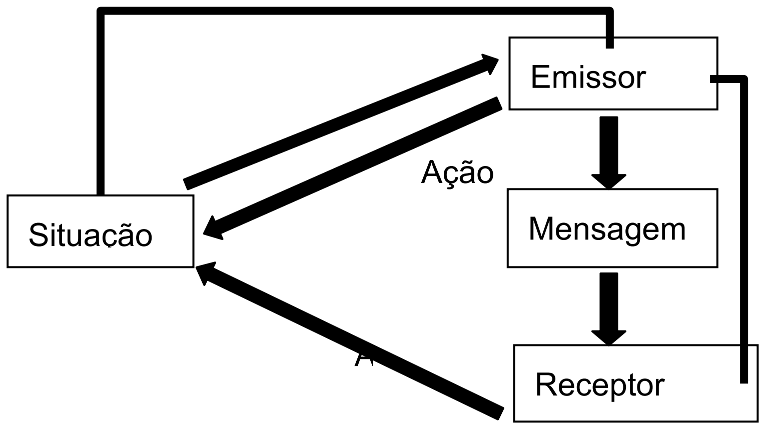
> Essa fase é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o milieu. Nela, as interações estão centralizadas na tomada de decisões, embora possa haver trocas de informações, (...) mesmo que não sejam necessárias á ação (ALMOULOUD, 2010, p. 38).

Nessa situação, os alunos desfrutam das mesmas informações, por isso, as decisões por eles tomadas são orientadas pelo *milieu* do momento, ou seja, pelo meio que o professor criou para que eles obtivessem as informações necessárias para o avanço na atividade.

b) Dialética formulação:

Na situação de formulação, o aluno começa a utilizar na resolução do problema algumas possíveis teorias, com um raciocínio um pouco mais elaborado do que na fase experimental, tornando-se necessário aplicar os dados coletados da situação ação. Nessa fase os alunos começam a trocar informações escritas e orais com os colegas que serão emissores e receptores das informações. Esse processo pode ser descrito pelo esquema 2 a seguir:

ESQUEMA 2: DIALÉTICADE FORMULAÇÃO- SADDO AG ALMOULOUD



FONTE: adaptado de ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**, 2010, p. 39.

Para Brousseau (1986) a Dialética formulação, consiste em proporcionar ao aluno condições para que ele construa gradativamente uma linguagem compreensível por todos envolvidos, ou seja, ele deve considerar os objetos e as relações Matemáticas envolvidas na situação trabalhada no momento. Assim ele pode mostrar para os colegas de forma segura as ferramentas que utilizou e a solução encontrada.

c) Dialética validação:

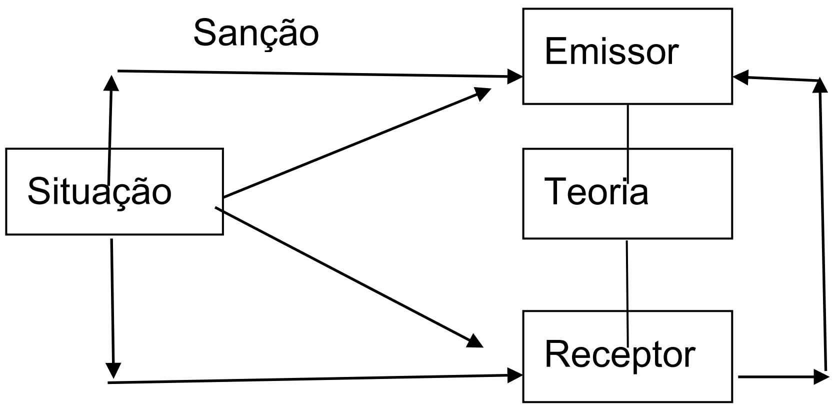
Na situação validação, o aluno já possui conhecimento para utilizar mecanismos de provas com fontes teóricas. Esse tipo de situação está relacionada a argumentação racional do aluno, voltado para a veracidade do conhecimento, é aqui que ele vai validar tudo o que ele pensou na situação ação e na situação formulação e se caso não conseguirem por não ser um processo linear eles podem voltar nas outras situações para formularem novas hipóteses que sejam verdadeiras.

> De um lado, o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor, por sua vez, pode

> pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição. Assim a teoria funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como milieu de estabelecer provas ou de refutá-las (ALMOULOUD, 2010, p. 39).

É possível perceber toda essa interação do *milieu* por meio do esquema 3 a seguir:

ESQUEMA 3: DIALÉTICADE FORMULAÇÃO- SADDO AG ALMOULOUD



FONTE: adaptado de ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática,** 2010 p.40.

Portanto, enquanto o objetivo da situação de formulação é a comunicação oral e escrita do que foi pensado, a Dialética de validação busca o debate das afirmações descobertas pelos alunos, ou seja, das afirmações que foram formuladas na situação ação e formulação, isso permite a organização das interações com o *milieu.*

d) Dialética institucionalização:

E por último temos a situação institucionalização é onde o aluno busca um caráter objetivo e geral do conhecimento estudado, nesse momento o aluno já utilizou o conhecimento obtido no problema de todas as formas e tenta aplicar isso em outras situações, tornando o conhecimento em algo histórico e científico. Uma vez o conhecimento que foi construído e validado começa a fazer parte da herança Matemática da classe.

Porém de acordo com Almouloud (2010), se feita muito cedo ela interrompe a construção do significado, fazendo com que o professor tenha dificuldade em dar continuação ao conteúdo e também traz problemas para o aluno compreender o restante do conhecimento que está sendo ensinado. Portando feita no momento adequado o saber torna-se verdadeiro e oficial para os alunos, que devem absorver esse conhecimento para utilizar na resolução de outros problemas.

Vale a pena ressaltar novamente que essas situações não são lineares, o sujeito pode ir e voltar quantas vezes forem necessárias até encontrar a veracidade do conhecimento ali proposto. Além disso, há um constante processo de devolução desde a situação ação até a institucionalização, na qual o professor sempre escolhe a melhor estratégia para que o aluno aceite o problema e o aluno sempre devolve o conhecimento de alguma forma que não seja por repetição ou memorização, mas sim com um raciocínio desenvolvido de forma autônoma.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISES DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Nessa seção apresentaremos e analisaremos as atividades desenvolvidas, a luz dos referenciais teóricos utilizados na investigação. Para isso consideramos os registros escritos dos alunos e algumas transcrições de suas falas durante o desenvolvimento da atividade.

Para cada atividade desenvolvida que será descrita, a atividade da pegada e a atividade da ampliação dos quebra-cabeças, apresentaremos detalhadamente os encaminhamentos de cada grupo escolhido para análise, seguido das reflexões realizadas com base nas Dialéticas apresentadas pela teoria das situações didáticas, apontadas por Guy Bousseau (1986), também com os critérios para o desenvolvimento do pensamento proporcional apontados por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), além de outros autores que fundamentam teoricamente nossa pesquisa.

Portanto não analisaremos todos os registros escritos que obtivemos durante as atividades, serão selecionados os registros dos grupos que: i) participaram das duas atividades; ii) que apresentaram estratégias Matemáticas que se diferiram entre si. Nesse segundo caso elegemos grupos que representam as diferentes estratégias que emergiram e que apresentam indícios do desenvolvimento do raciocínio proporcional. Dessa forma, não vamos diferenciar entre sétimo A e B, vamos analisar como um todo, embora assumamos que diferentes turmas e contextos conduzem a diferentes resultados e análises.

5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE DA PEGADA DE ACORDO COM A TSD

A atividade da Pegada foi à primeira atividade realizada com os alunos do sétimo ano e diferente da segunda atividade que já possui sua metodologia baseada na TSD, foi adaptada para que se tornasse uma atividade que envolvesse essa teoria. Dessa forma ela teve com o objetivo abordar o conceito de razão entre duas medidas e a igualdade de razões, por meio dos encaminhamentos da TSD. De acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) existem diversos tipos de representações para o conceito de razão e igualdade de razão, essas diferentes representações são evidentes nas hipóteses levantadas pelos alunos para a resolução do problema que será apresentado adiante.

Para isso levamos em consideração os apontamentos de Behr, Lesh e Post (1988) os quais ressaltam que o raciocínio proporcional vai além da noção de igualdade de duas razões, pois envolve comparação, representação e organização dos dados e operações e isso deve ser visto com rigidez pelos professores, já que é na apropriação desses conceitos que o aluno começa a construir seu raciocínio proporcional. Dessa forma pensamos nas melhores maneiras de conduzir os alunos a desenvolver essas habilidades, para que de alguma forma eles desenvolvessem o raciocínio proporcional e percebessem os diferentes tipos de representações que a proporcionalidade apresenta e demanda.

Para o desenvolvimento dessa atividade utilizamos uma carga horária de duas horas aulas. Então nossa primeira ação foi organizar a sala em grupos; como a turma tinha um total de trinta e nove alunos, organizamos nove grupos de quatro alunos e um grupo com três alunos, para facilitar a troca de informação entre eles, na qual, é uma das características da teoria das situações didáticas, a negociação para o levantamento de hipóteses e a validação delas. Ou seja, é aqui que ocorre o início da organização do *milieu*, onde ocorrerá a interação entre o saber, o aluno e o professor. É por meio desse *milieu* que os alunos vão se adaptar e interagir com o conhecimento a ser ensinado, com os desafios, a fim de construir o conceito/ conhecimento que está sendo proposto.

Logo após esse momento, como convite inicial para a atividade apresentamos aos alunos a noticia a seguir:

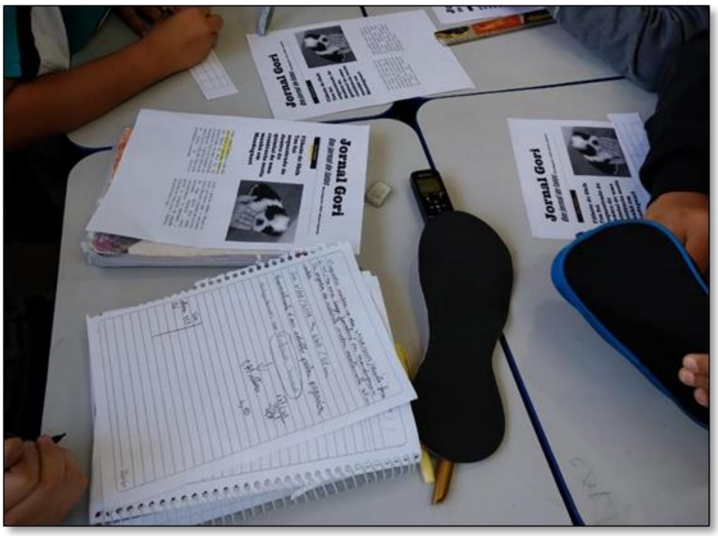
FIGURA 3: NOTÍCIA DO SEQUESTRO

Nesta quarta-feira por volta das seis horas e quarenta minutos, um filhote de Shih tzu foi sequestrado, em uma residência situada na Rua Luiz Zavatini em Mandaguari. A polícia militar do município foi acionada logo após os donos do cãozinho perceberem o ocorrido. Após a polícia militar chegar ao local percebeu que o meliante havia deixado pegadas no quintal da casa. Agora eles estão tentando descobrir mais características do meliante, a partir do tamanho da pegada deixada no local, com o objetivo de solucionar o caso.

FONTE: elaborado pela autora.

Assim o desafio apresentado a eles foi ajudar a polícia a descobrir quem era o sequestrador do cãozinho a partir da pegada do meliante, na qual foi a única pista encontrada. Para isso entregamos pegadas feitas de EVA, como a apresentada na imagem a seguir, com o tamanho de um pé real com 28 cm de comprimento, que poderia representar o tamanho do pé da pessoa fictícia apresentada no problema.

FIGURA 4: PEGADA.



FONTE: fotografado pela autora.

Essa fase da atividade de acordo com Guy Brousseau (1986) é denominada *Dialética ação*, na qual os alunos aceitaram o convite para a atividade e começaram a levantar hipóteses imediatas para tentar entender o que estava sendo proposto.

Nesse primeiro momento, a discussão entre os estudantes foi coletiva. Ainda que eles estivessem organizados em grupos, a negociação foi conduzida pelas professoras e estudantes no âmbito da turma toda. Logo em seguida, sob orientação docente, cada grupo iniciou o processo de resolução da tarefa dentro dos pequenos grupos.

Nesse momento os grupos começaram a pensar como descobrir outras características do meliante por meio do tamanho do pé. Alguns grupos pensaram em medir a largura do pé, outros a altura do pé. Foi nesse momento em condição de professoras que começamos a sistematizar algumas hipóteses junto com os alunos, fazendo as seguintes questões, comuns aos grupos:

I. Pelo tamanho do pé conseguimos saber a cor do cabelo ou do olho do meliante?
II. Pelo tamanho do pé conseguimos descobrir alguma característica física do meliante?
III. A altura se relaciona com o tamanho do pé?

Após esses questionamentos os grupos começaram a formular suas hipóteses e sentiram necessidade de coletar alguns dados reais, para que pudessem validá-las. Ou seja, eles quiseram medir o tamanho dos pés e as alturas das pessoas que estavam na sala, também começaram a fazer entrevistas com perguntas investigativas, como: a) Onde você estava no horário que ocorreu o sequestro?; b) Você gosta de cachorros de pequeno porte ou grande porte?; c) Com pelos curtos ou longos? De maneira com que ajudassem a encontrar outras características que poderiam levar ao suspeito.

FIGURA 5: MEDIÇÕES.

FONTE: fotografado pela autora.

A partir das estratégias pensadas pelos grupos, questionamos sobre a possibilidade de investigarmos características físicas do meliante, para compararmos com as respostas obtidas nas outras questões sobre o roubo. Dessa forma, orientamos aspectos da discussão para um caminho que possibilitasse o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Nesse processo, três estratégias iniciais foram delineadas pelos grupos:

I. Calcular a razão entre a medida da altura e o tamanho do pé de um dos integrantes do grupo e multiplicar a medida obtida pelo tamanho do pé do meliante (pegada);
II. Organizar os dados como uma igualdade entre duas frações, para assim encontrar a incógnita que no caso é a altura do meliante.
III. Investigar a situação utilizando comparações entre a medida da altura e a medida do comprimento do pé de alguns integrantes do grupo e/ou professores (cerca de cinco pessoas);
IV. Calcular a razão entre a medida da altura e o tamanho do pé de integrantes do grupo, calcular a média de altura e de tamanho de pé, calcular a razão entre essas médias e multiplicar a medida obtida pelo tamanho do pé do meliante (pegada).

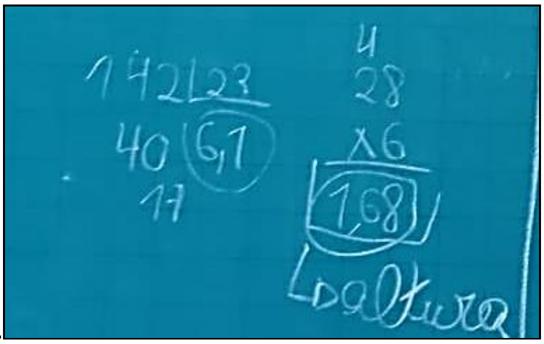
Em 5 grupos, os alunos organizaram certa quantidade de dados (entre quatro ou cinco), em que relacionavam a altura de uma pessoa e o tamanho (comprimento) do seu pé. A partir desse conjunto de dados, os grupos tentavam estimar a altura do meliante por meio dessa comparação de medidas. Quando o aluno organiza os dados e percebe que existe uma variação entre os valores desses dados e que esses valores podem ser comparados, para Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) os alunos estão desenvolvendo um raciocínio relativo, ou seja, o raciocínio que leva o aluno a perceber a variação. Isso leva a um amadurecimento do raciocínio proporcional de modo com que o raciocínio relativo facilita no processo de construção do significado do conceito de razão fazendo com que o aluno de alguma forma em um momento posterior consiga fazer representações fracionárias com esses dados.

Partindo das diferentes hipóteses levantadas pelos alunos, analisaremos a seguir os registros dos grupos, partindo dos critérios descritos por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014). De acordo com Guy Brousseau essa etapa em que os estudantes levantam hipóteses é conhecida como *Dialética formulação*, pois é aqui que o aluno começa a relacionar algumas teorias Matemáticas para solucionar o problema, ou seja, nessa etapa o aluno tanto começa a desenvolver um raciocínio mais aprimorado que tanto o conduz à *Dialética ação*, quanto permite que ela seja desenvolvida, na medida em que os dados coletados anteriormente são necessários nessa segunda etapa.

5.1.1 Estratégia I

A primeira estratégia (I) representa os caminhos seguidos pelos grupos que consideraram o cálculo da razão entre duas medidas para chegar a uma resposta. Ou seja, eles encontraram que a razão existente entre a altura e o tamanho do pé de um integrante do grupo era 6, então consideraram esse valor e multiplicaram-no pelo tamanho do pé do meliante, encontrando o valor de 1.68 *m*, como mostra a Figura 6.

FIGURA 6: ESTRATÉGIA DE RAZÃO.



FONTE: registro de um grupo.

Na Figura 6 podemos tomar conhecimento da resolução de um grupo que apresentou o processo percorrido por eles à turma. Enquanto descreviam os procedimentos matemáticos na lousa, os alunos 1 e 2 explicavam à turma o significado de cada variável considerada, como mostra o excerto a seguir:

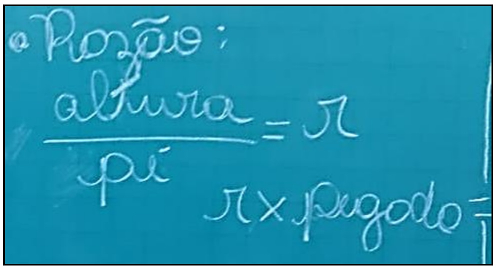
> **Aluno 1:** A ALTURA DO PÉ DELE é 28 cm ((ao se referirem à "altura do pé", os estudantes estão considerando, na verdade, a medida do pé entre o dedo maior e o calcanhar)).
> **Aluno 2**: É 28,3 cm!
> **Aluno 1:** É 28,3 , mas a gente arredondou. Daí a minha altura é 1,42... e daí o meu pé mede 23 cm...Dai eu dividi minha altura pelo meu pé... EU ARREDONDEI.
> **Professora|pesquisadora:** No caso a sua altura você colocou como centímetros também... Né então tira a virgula.
> **Aluno 1:** E aqui eu vou arredondar e fazer o resultado vezes o pé do meliante.

Nessa estratégia, podemos perceber que esse grupo ainda não consegue relacionar o método de divisão de “chaves’’ com a fração. Isso advém de diversas dificuldades, principalmente a de entender que uma divisão pode ser descrita da forma $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0 e que, nesse caso, apesar da divisão ser descrita por dois numerais, a operação representa um único número, a razão (LAMON, 2012 apud CYRINO et al., 2014). Isso não quer dizer que eles não apresentam indícios do desenvolvimento do raciocínio proporcional, já que, esse raciocínio não se restringe em apenas proporcionalidade, ele abrange conceitos multiplicativos, conceitos de divisão, entre outros. E como podemos observar, mesmo que eles não tenham representado em forma de fração, eles perceberam que existe uma razão entre as duas medidas escolhidas e que essa razão, multiplicada pelo tamanho do pé do meliante, daria o número pelo qual eles estariam procurando.

Isso se dá pelo critério de raciocínio relativo descrito pela Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), ou seja, ao comparar as medidas obtidas pelo grupo eles perceberam que existia uma razão entre essas duas medidas escolhidas e que depois essa razão poderia ser comparada com as demais de forma que ocorreria uma variação para cada medida obtida pelos integrantes. É esse raciocínio que leva a percepção de variação e consequentemente um amadurecimento do raciocínio proporcional.

Nesse momento, a partir das discussões empreendidas no âmbito da turma (por meio da apresentação desse grupo), enquanto professoras, sistematizamos no quadro o conceito de razão no contexto dessa atividade, utilizando a forma $\frac{a}{b}$, para que pudéssemos evidenciar que se tratava de um mesmo conceito, mesmo que com notação diferente.

FIGURA 7: SISTEMATIZANDO A RAZÃO



FONTE: registro da Professora|pesquisadora.

Além disso, esse grupo faz aproximações dos números decimais e também de unidades de medida que no caso como se trata de altura e tamanho do pé eles tinham que converter ambas as medidas em centímetros ou metros, como podemos perceber na seguinte parte da transcrição:

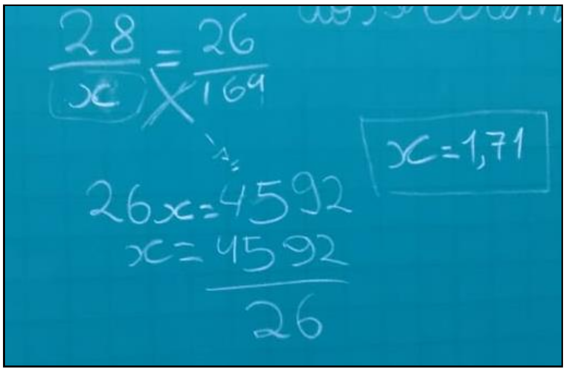
> **Aluno 2**: É 28,3 cm!
> **Aluno 1:** É 28,3, mais a gente arredondou. Daí a minha altura é 1,42... e daí o meu pé mede 23 cm...Dai eu dividi minha altura pelo meu pé... EU ARREDONDEI.
> **Professora|pesquisadora:** No caso a sua altura você colocou como cm também... Né então tira a vírgula.

Isso se dá, pelo critério de medição, na qual tem como base três princípios: princípio compensatório, princípio da partição recursiva e por fim o princípio da aproximação, sendo o terceiro princípio o que caracteriza essa ação dos alunos. Esse princípio leva em consideração que uma medida é sempre uma aproximação, e faz-se necessário manipular unidades de medidas para torná-las precisas. É exatamente isso que os alunos fazem nessa etapa, como a divisão resultou em um número decimal, eles fizeram uma aproximação (arredondaram) de 28,3 cm para 28 cm, de modo a facilitar os cálculos. E também transformaram a altura de metros para centímetros, em que era a mesma unidade de medida do tamanho do pé.

5.1.2 Estratégia II

A segunda estratégia (II) apresentada se utiliza da igualdade de frações (regra de três) para resolver o problema, ou seja, apresenta uma igualdade de frações, que foram organizadas da seguinte forma: o numerador sendo o tamanho do pé e o denominador a altura, assim por meio da regra de três, eles conseguiram encontrar o valor da variável desconhecida, representada na Figura 8 pela letra *x*, que no caso significa a altura do sequestrador.

FIGURA 8: ESTRATÉGIA 2.



FONTE: registro de um grupo.

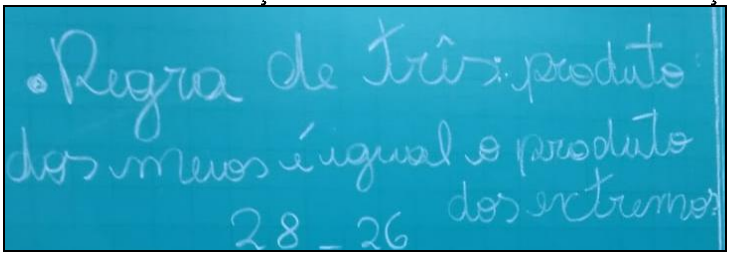
Ao apresentarem sua estratégia, o grupo também explicou à turma como procedeu:

> **Aluno 3:** Eu peguei a altura do pé do meliante... E a SUPOSTA altura dele...igual a altura do meu pé (a altura do meu pé) e a minha altura.. Daí eu fiz a multiplicação... TEM que fazer a multiplicação?
> **Professora|pesquisadora:** Tem, faz um X aqui ó...
> **Aluno 3:** a multiplicação... DAÍ eu passei “dividindo::.”.. Pode colocar o nome dele ((do meliante))?!
> **Professora|pesquisadora:** NÃO pode por o nome “não::” .

Nessa estratégia, é possível perceber que esse grupo já consegue relacionar o conceito de divisão com fração, ou seja, os estudantes entendem que uma divisão pode ser organizada como $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0 e ainda estabelecer uma igualdade de frações de modo com que consigam observar que as grandezas podem ser organizadas de maneira que seja possível encontrar uma medida ou um valor. Matematicamente, estar apto a raciocinar proporcionalmente inclui ainda a compreensão dos significados de representações fracionárias dos números racionais e das relações multiplicativas proporcionais do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com b e d ≠ 0 (CYRINO; ROCHA; PIRES; ROBERTO, 2014, p. 50).

Nesse momento, aproveitando a estratégia apresentada pelo grupo, foi possível institucionalizar matematicamente o conceito de igualdade entre duas razões, como indica a Figura 9, conforme indicado no parágrafo anterior. Essa sistematização do conceito foi desenvolvida com toda a turma participante da atividade.

FIGURA 9: SISTEMATIZAÇÃO DA IGUALDADE DE DUAS FRAÇÕES.



FONTE: registro da professora|pesquisadora.

Essa estratégia faz referência com o critério de Processos de unitização descrito por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) que está relacionado de forma direta com os raciocínios progressivos e regressivos e também ao conceito de equivalência de frações, o que caracteriza o processo realizado pelos alunos.

O processo de unitização, nada mais é do que a reorganização das grandezas com que se está trabalhando, ou seja, é quando o grupo decide organizar a fração com os tamanhos dos pés sendo o numerador da fração e as alturas, sendo o numerador da fração, como pode-se observar na figura 8. Unitizar essas quantidades de forma a manter a proporcionalidade é desenvolvido por meio do raciocínio progressivo e regressivo. Ou seja, raciocínios que ajudam a calcular por meio de uma fração qualquer, relações de proporcionalidade equivalentes ao inteiro e depois encontra ligações proporcionais para outras frações. Dessa forma os alunos poderiam usar esse método para qualquer medida obtida pelos integrantes do grupo.

5.1.3 Estratégia III

Alguns grupos optaram por utilizar técnicas não Matemáticas, como entrevistas, para encontrar os suspeitos. Porém queríamos que eles utilizassem técnicas Matemáticas para resolver o problema, assim enquanto professoras e levando em conta o objetivo da aula de Matemática, orientamos esses grupos para fazer uma análise da situação do ponto de vista matemático. Então os conduzimos a organizar esses dados de alguma forma a fim de facilitar a resolução do problema. Dessa forma, esses grupos pensaram em organizar os dados em uma tabela. Como já havíamos previsto essa possibilidade de estratégia, construímos a priori uma tabela, conforme o modelo a seguir, para que não houvesse prolongamentos do tempo que foi proposto para a atividade, e o disponibilizamos ao grupo.

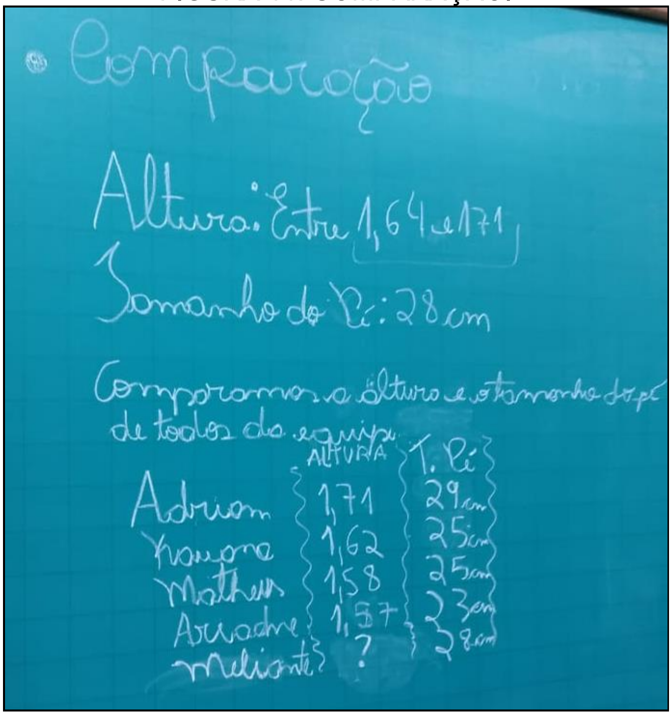
FIGURA 10: TABELA DE DADOS.

Nomes:	Stefani	Bárbara	Márcio	Mariana	Lino	Marcia	Camila
Altura:	164	1,42	1,71	1,60	1,39	1,71	1,61
Tamanho do pé:	28	28	28	25	23	28	25

FONTE: Registro de um grupo.

Partindo disso, a terceira estratégia foi resolver o problema por comparação, por meio da organização dos dados na tabela, que possibilitou uma visibilidade para a comparação entre as medidas e uma discussão sobre isso com os alunos. Assim chegaram a um intervalo de altura. Ou seja, de acordo com a comparação feita o meliante poderia ter de 1,64 m à 1,71 m de altura.

FIGURA 11: COMPARAÇÃO.



FONTE: registro de um grupo do 7B.

Após a apresentação da estratégia para a turma, foi explicado como procederam ao desenvolvimento da estratégia:

> **Aluno 4:** a gente mediu o valor da pegada.
> **Aluno 5:** FALA ALTO!
> **Aluno 4:** A GENTE MEDIU O VALOR DA PEGADA que deu 27.7... Aí a gente pegou a altura de cada um do grupo... então a gente achou que.
> **Aluno 5:** Dita pra mim!

> **Aluno 4:** A gente “comparou::” a altura (a altura), e o ta-ma-nho do pé
> **Aluno 5:** a gente comparou a altura do tamanho do pé de todos da equipe... ai vai ter que fazer a tabela... a altura de todo mundo “deu::”
> **Aluno 4:** 1,61...1,62...1,59; 1,58 e 1,49... deixa eu ver o do meliante... MEU DEUS!... coloca assim... 1,64 e 1,71.
> **Aluno 5:** NÃO! PÕE ENTRE!

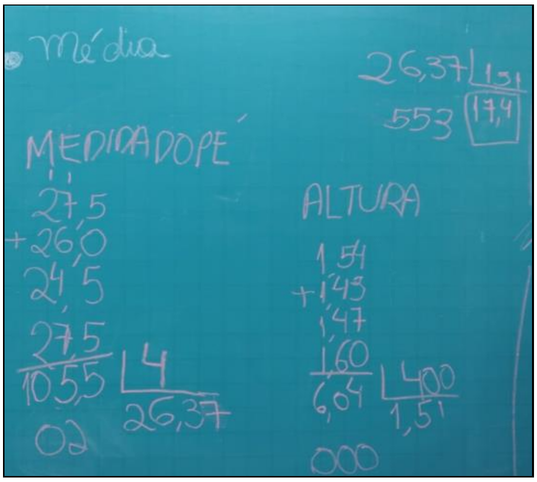
Nessa estratégia é possível perceber, que os alunos não conseguiram relacionar os dados nem com a divisão, nem com a multiplicação e nem com a forma fracionária. Porém conseguiram fazer uma organização do pensamento de forma com que observassem uma relação de ordem entre as medidas, para que conseguissem associar com o intervalo entre uma e outra medida. De acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), estabelecer essa relação de ordem entre dados, que são representados de forma decimal ou fracionária, é uma das grandes dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem sobre frações. Então não podemos afirmar que este grupo ainda não apresentou estratégias que utilizem conceitos matemáticos mais avançados, que ultrapassem a comparação de medidas, até esse momento.

Essa estratégia faz referência ao critério de quantidades e covariações descrito por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014). Assim esse critério está relacionado com a capacidade dos alunos de identificar e mensurar quantidades e perceber que elas variam. É possível observar que os grupos que levantaram essas hipóteses identificaram os dados e viram que eles estavam divididos entre duas grandezas, o tamanho do pé em centímetros e a altura em metros, e que essas quantidades variavam e poderiam ser organizadas de forma crescente e assim estabelecer uma relação de intervalo entre elas. O processo de identificar, quantificar grandezas, e analisar quais delas sofrem ou não alterações e de que forma essas alterações acontecem possibilita o desenvolvimento de formas mais poderosas de raciocínio que vão além da percepção de informações obvias nos contextos analisados (LAMON, 2012 apud CYRINO et al., 2014).

5.1.4 Estratégia IV

A quarta estratégia identificada envolve o conceito de média, na qual os grupos mediram os pés e as alturas de todos os integrantes do grupo, depois somaram os tamanhos dos pés e dividiram pela quantidade de integrantes do grupo e fizeram o mesmo processo para a altura. Logo após dividiram a razão encontrada com as alturas pela a razão encontrada pelo tamanho do pé, obtendo o resultado de 1,74m como a altura do meliante.

FIGURA 12: MÉDIA



FONTE: registro de um grupo do 7B.

Nessa estratégia é possível perceber que assim como na primeira estratégia os alunos não conseguiram representar a divisão estabelecida no formato $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$, porém utilizaram o conceito de média e de razão. Ou seja, eles somaram quatro medidas de pés e dividiram por quatro, que é a quantidade de elementos, essa partilha de certa quantidade em partes iguais é característica do critério de Partilha e comparação descrito por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014). Esse mesmo processo foi feito com as medidas das alturas, fazendo com que as duas razões encontradas pudessem ser comparadas.

Porém, os alunos não desenvolveram o processo de resolução da problemática de forma adequada, já que, eles dividiram a razão das alturas pela razão do pé, encontrando um numeral que não representa a altura do sequestrador. Isso não quer dizer que os grupos que levantaram essa estratégia, não desenvolveram o raciocínio proporcional, visto que eles se adequaram de hipóteses que envolviam conceitos de proporcionalidade, apenas erraram a técnica final da resolução.

Durante a *Dialética de formulação* fica evidente que os alunos organizaram todos os dados que foram encontrados na primeira parte da atividade, como as alturas e os tamanhos dos pés dos colegas e dos professores para começar a relacionar esses dados com os conteúdos que eles já haviam visto anteriormente, como a razão e a comparação de medidas, a caracterizar os passos dessa dialética.

Quanto a *Dialética validação* e da *institucionalização*, optamos por organizá-las nesse texto, da mesma forma como organizamos em termos de aulas desenvolvidas: de forma integrada. No momento da aula, as dialéticas de validação e institucionalização se deram no âmbito de toda a turma. Os grupos foram convidados a apresentar suas resoluções e validá-las junto aos outros grupos formados. A partir das discussões foi possível sistematizar conceitos matemáticos relacionados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Assim, após todos os grupos terem traçado uma estratégia para a resolução do problema na *Dialética formulação*, pedimos para que fossem ao quadro, escrever as estratégias utilizadas por eles, no intuito de validar as hipóteses levantadas de uma forma geral, para que a turma pudesse analisar as diferentes estratégias e identificar qual(is) seria(m) apropriada(s) para resolver o problema proposto. Essa etapa é conhecida como *Dialética da validação*, na qual o aluno consegue argumentar o que foi pensado utilizando teorias e tentando validar tudo o que ele pensou na *Dialética ação* e da *formulação*. É possível identificar isso por meio de algumas falas dos alunos, por exemplo:

> **Aluno 5:** a gente comparou a altura do tamanho do pé de todos da equipe... Ai vai ter que fazer a tabela... a altura de todo mundo "deu::"
> **Aluno 4:** 1,61...1,62...1,59; 1,58 e 1,49... Deixa eu ver o do meliante... MEU DEUS!... Coloca assim... 1,64 e 1,71.
> **Aluno 5:** NÃO! PÕE (um valor) ENTRE (essas duas medidas)!

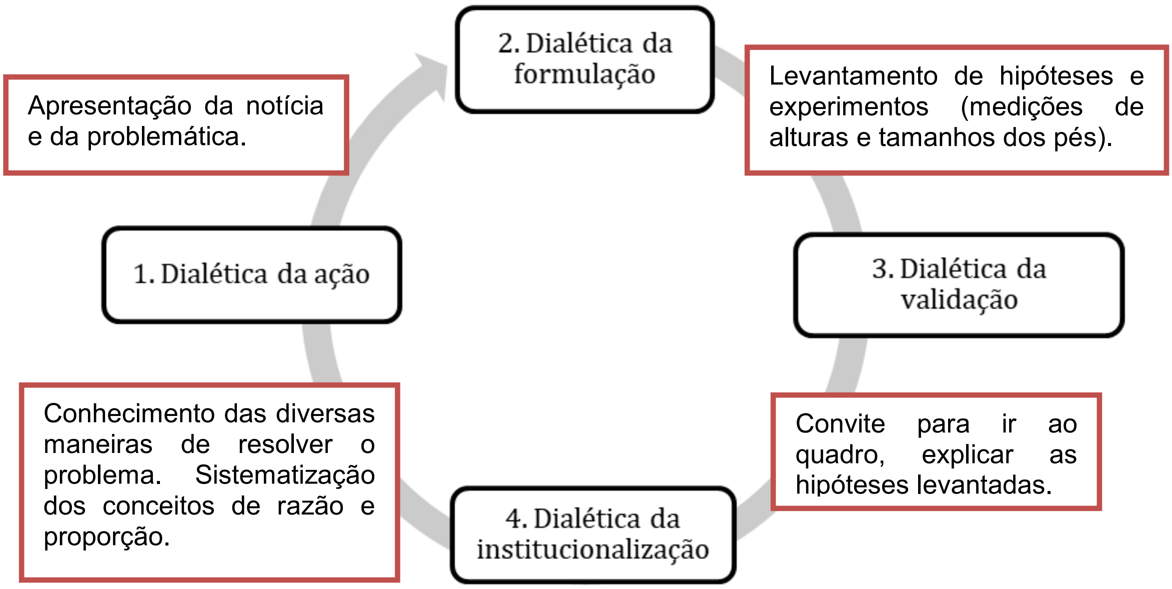
A correção feita pelo aluno 5 na última fala valida o conceito de intervalo, que se não fosse feita iria influenciar significativamente no resultado. Dessa forma essa etapa é fundamental para a validação e o entendimento de todo conhecimento ali proposto.

Ao final da apresentação dos grupos que aceitaram o convite para ir ao quadro expor suas resoluções, foi feita uma explicação, por nós professoras, de cada conceito, isto é, do conceito de razão, de comparação entre duas razões, de média, e da organização dos dados em tabela para fazer a comparação, como evidenciamos nas páginas anteriores. Assim os alunos puderam perceber que o problema proposto poderia ser resolvido de diversas formas e que cada uma delas era válida. Esse momento é caracterizado por Brouseau (1986) como *Dialética institucionalização*, em que o aluno busca um caráter geral para o conhecimento construído, tornando o conhecimento universal. Então, nessa etapa da atividade cada grupo conseguiu sistematizar cada conceito e perceber que todas as hipóteses eram válidas e cada um considerou para si uma forma mais ágil para se obter a altura do sequestrador, o que caracteriza essa dialética.

Portanto, foi possível perceber durante o desenvolvimento da atividade que a atividade pautada na TSD foi fundamental para desenvolver a autonomia do aluno, de maneira com que em algumas situações ou problemáticas eles consigam pensar e levantar suas hipóteses de resolução de forma autônoma, na qual é uma característica fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático e, nesse caso, do raciocínio proporcional. Essa institucionalização, no entanto, só foi possível por meio das orientações docentes. Isso evidencia a relevância do papel de mediador do professor em atividades com essa natureza.

No esquema a seguir, apresentamos uma síntese do desenvolvimento de toda a atividade de acordo com as dialéticas propostas por Brousseau (1986).

ESQUEMA 5: SÍNTESE DA ATIVIDADE DO SEQUESTRO DO CÃOZINHO



FONTE: elaborado pela a autora.

Nas caixas de diálogo com contorno em preto estão sendo apresentadas as quatro dialéticas que caracterizam a TSD e nas caixas de diálogo com contornos vermelhos estão descritos o momento em que cada Dialética ocorreu durante a atividade. Faz-se necessário aqui ressaltar que o esquema está exposto de forma circular, pois as dialéticas não ocorrem de forma retilínea e direta, mas sim, os alunos podem ir e voltar em cada Dialética quantas vezes forem necessáras para chegar a um resultado final.

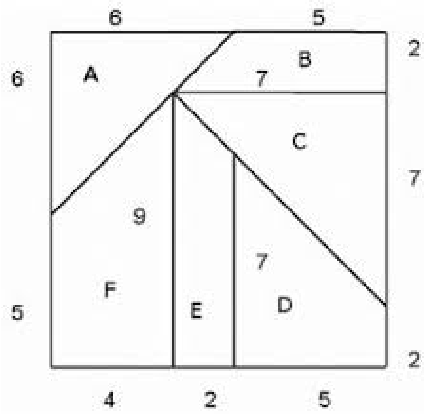
5.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE DA AMPLIAÇÃO DO QUEBRA-CABEÇA DE ACORDO COM A TSD

A atividade da ampliação do quebra-cabeça foi a segunda a ser desenvolvida e diferente da primeira atividade ela foi criada por Brousseau (1986) com o objetivo explorar o conceito de comparação entre duas medidas, por meio da razão e da proporção, ou seja, trabalhar com alguns conceitos próprios do raciocínio proporcional. De acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) se nós, na condição de professores soubermos explorar com os alunos algumas estruturas Matemáticas, como as diferentes interpretações dos registros de frações, contribuiremos significativamente para a mobilização de ideias, formas de pensar e conceitos que são a base do raciocínio proporcional.

Dessa forma nossa primeira ação, foi organizar o milieu em que os alunos estavam situados. Para isso pedimos para que os alunos reunissem os mesmos grupos da atividade anterior, para que facilitasse o processo de análise dos registros dos grupos e também para identificar em um momento posterior se houve indícios de desenvolvimento do raciocínio proporcional em um mesmo grupo no decorrer das duas atividades.

Como um convite inicial, iniciamos uma discussão sobre montagens de quebra-cabeças, para que os alunos se interessassem pelo tema e se sentissem acolhidos pela situação proposta. Assim para nortear a discussão entregamos uma folha impressa (ANEXO 1) que apresentava o quebra-cabeças, apresentado na Figura 9, e a seguinte problemática: “Sabendo que um lado da peça F mede 4 cm e quero ampliá-lo para 7cm, quanto medirão os outros lados da figura F e os lados das outras figuras?”.

FIGURA 13: QUEBRA-CABEÇA.



FONTE: BROUSSEAU, 2006 p. 7.

Antes de explicar a problemática, questionamos se já haviam ampliado alguma imagem no celular ou no computador no intuito de investigar se eles entendiam o conceito de proporcionalidade na ampliação de uma imagem. Todos afirmaram que já haviam ampliado uma imagem e mostraram o movimento descrito pela mão, de pinça, ao ampliar uma imagem no celular. Assim pedimos para que um dos alunos lesse em voz alta a problemática apresentada na folha impressa (ANEXO 1) e propusemos que os grupos pensassem sobre como resolver o problema.

Nesse momento separamos uma peça para cada grupo ampliar, já que se disponibilizássemos o quebra-cabeça inteiro os grupos poderiam manipular as medidas para que as peças se encaixassem, fazendo com que não percorressem as dialéticas da TSD e assim não alcançaríamos o objetivo delineado para a atividade, tampouco o objetivo de pesquisa. Como haviam muitos grupos, tivemos que ampliar dois quebra-cabeças para que cada grupo ficasse responsável pela ampliação de apenas uma peça. Os estudantes tiveram dificuldades para entender o problema, pois não estavam entendendo que a relação de aumento de 4 cm para 7 cm se dava para todos os lados de todas as figuras. Então pedimos para que todos observassem a peça F do quebra cabeça.

Professora 1: EU DEI UMA LETRA ((uma peça identificada por uma letra)) PARA CADA UM AUMENTAR CERTO? ENTÃO Ó, aqui no problema fala... a peça F, TODO MUNDO OLHA, a pecinha F... Todo mundo achou a pecinha F?

Alguns alunos: A F?

Professora 1: Ai ele fala, ESSE LADO mede 4cm, ele quer aumentar para 7cm. COMO VOU AUMENTAR TODO esse quebra “cabeça::”, agora cada um vai aumentar sua pecinha. De 4 aumentou para 7 entenderam?

Alguns alunos: NÃO!

Professora 1: Ó vou falar de novo PRESTA "ATENÇÃO::"... Olha aqui, todo mundo olhando para mim... Você vai pegar essa peça F, aliás, essa peça F é a nossa ideia inicial, é, é a nossa peça problema... eu quero aumentar ela, certo? Como eu aumento ela e aumento TODAS as "outras::" para que elas possam se encaixar?

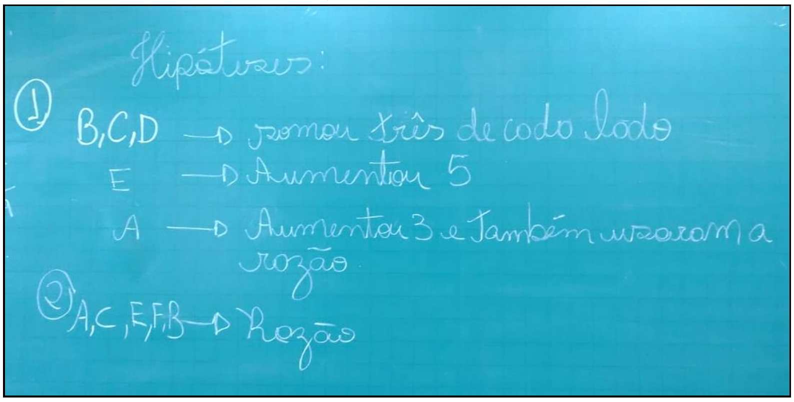
[...]

Professora|pesquisadora: Normalmente quando a gente quer ampliar uma peça no celular ou no computador a gente amplia pela "diagonal::" né?
Alguns alunos: É.
Professora|pesquisadora: Só que aqui no caso a gente vai ter que ampliar no papel... E o único dado que a gente tem é que um lado da peça mede 4 ele tá muito pequenininho, eu não quero pequenininho, quero medindo 7... A gente sabe que de 4 aumentou para 7, é um lado e um número que a gente escolheu..
Professora 1: Podia ser 10, podia ser 12..
Professora|pesquisadora: Quanto ele vai aumentar?
Alguns alunos: TRÊS!
Professora|pesquisadora: E os outros lados?

Após essa explicação, fizemos atendimentos individuais em cada grupo, de forma a amenizar as dúvidas sobre a problemática. De acordo com a teoria das situações didáticas essa etapa é caracterizada como *Dialética ação*, na qual é feito um convite ao aluno para participar da atividade, por meio de discussões que envolvam situações do cotidiano, e assim é apresentada uma problemática.

Partindo disso, os alunos começaram a pensar como aumentariam cada lado da figura, levando em consideração a relação de que quando o lado mede 4 cm aumenta para 7 cm, isso fez com que surgissem diferentes hipóteses, já que as peças possuíam tamanhos de lados diferentes. Para isso atribuímos um tempo de vinte a trinta minutos para que pudessem pensar nas estratégias a serem utilizadas. Em seguida, ao observarmos que todos os grupos haviam levantado as hipóteses pedimos para que cada grupo apresentasse suas primeiras estratégias à classe, para que pudéssemos analisá-las e sistematizá-las. Essas primeiras estratégias estão apresentadas na figura a seguir:

FIGURA 14: QUADRO DE HIPÓTESES.



FONTE: registro da Professora|orientadora.

Das hipóteses levantadas pelos grupos, como podemos observar na Figura 14 é possível identificar três estratégias:

I. Aumentar 3 cm de cada lado da peça, pois a diferença entre 4 cm e 7 cm é de 3 cm.
II. Aumentar a medida dos lados das peças para que elas meçam 7 cm, pois esse foi o novo tamanho da peça modelo ampliada.
III. Calcular a razão que representa a relação entre a medida da peça e seu novo tamanho e utilizar esse valor para ampliar todos os lados da figura. Ou seja, eles dividiram 7cm por 4cm e encontraram um valor de 1.75, e assim multiplicaram esse valor por todos os lados da figura.

Segundo Bousseau (1986) esse momento da atividade é caracterizado pela *Dialética formulação,* é aqui que o aluno começa a desenvolver um raciocínio mais aprimorado utilizando conceitos que fazem parte do seu repertório para a resolução da problemática, de tal modo que começam a trocar informações escritas e orais, com os colegas do grupo e os dos outros grupos.

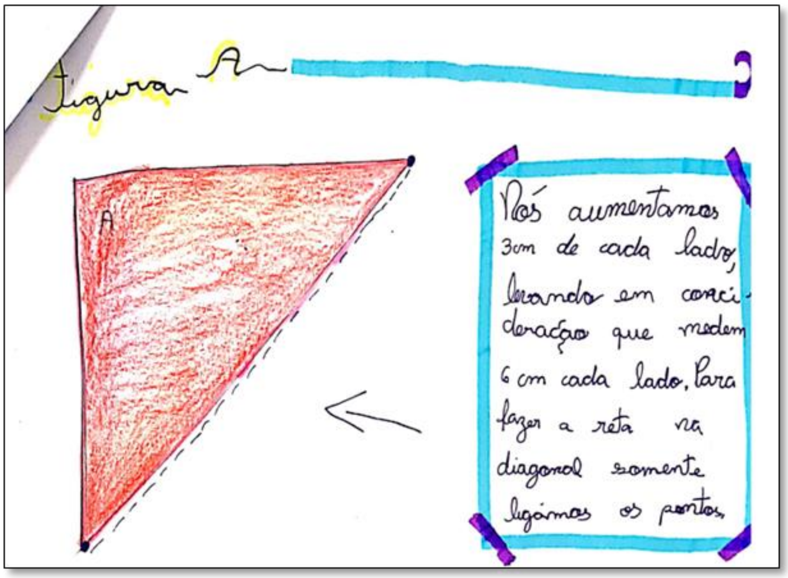
Partindo das diferentes hipóteses levantadas pelos alunos, analisaremos, a seguir, as estratégias seguidas pelos grupos na Dialética formulação, partindo dos critérios descritos por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014).

5.2.1 Estratégias I e II

Dentre os doze grupos formados em cada uma das turmas, 5 deles fizeram o uso da estratégia (I), ou seja, não utilizaram o conceito de razão entre dois segmentos para resolver o problema, isso porque de acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) eles não conseguiram se apropriar de forma adequada as diferentes interpretações do conceito de razão. Essa situação já era prevista, pois em estudos desenvolvidos por nós, anteriormente, essas mesmas estratégias já haviam sido mobilizadas por estudantes dos diferentes níveis de ensino. Além disso, o conceito de igualdade entre razões ainda não havia sido institucionalizado junto a esses estudantes. Esse era, aliás, o objetivo dessa atividade.

Considerando esses apontamentos os 5 grupos consideraram a diferença entre 4 cm e 7 cm, que no caso é de 3 cm, e assim somaram 3 cm em todos os lados da figura, como é possível observar na Figura 15 a seguir:

FIGURA 15: ESTRATÉGIA 1.



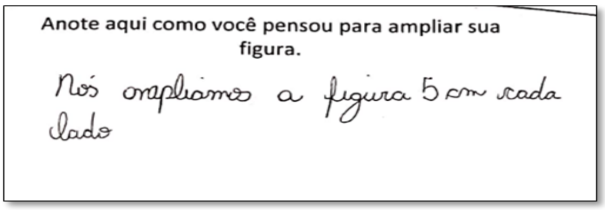
Nós aumentamos 3 cm de cada lado, levando em concideração (sic) que medem 6 cm de cada lado. Para fazer a reta na diagonal somente ligamos os pontos.

FONTE: registro de um grupo do 7B.

De acordo com Cyrino, Rocha, Pires e Roberto (2014), por mais que as orientações curriculares mostrem a importância do desenvolvimento do pensamento proporcional, dentro e fora da escola, pouco é discutido e elaborado para que ocorra a mobilização deste raciocínio, como já foi dito em seções anteriores. Assim, as dificuldades que surgiram no decorrer da atividade, como essa estratégia em que os alunos não conseguiram reconhecer a razão existente entre os segmentos, são resultado deste problema, ou seja, da forma como temos abordado de forma ainda muito tímida e técnica a abordagem de conceitos relacionados à proporcionalidade.

Na estratégia (II), apenas um grupo adotou esse princípio. Esse grupo estava responsável pela ampliação da peça E, cujas medidas dadas dos lados eram 2 cm, 7 cm e 9 cm. Considerando que um dos lados da peça media 2 cm e para chegar à 7 cm, precisavam aumentar 5 cm nesse lado da peça, o grupo optou por aumentar 5 cm também em outros dois lados da peça (o lado que medida 7 cm e o lado que media 9 cm), como mostra a Figura 16:

FIGURA 16: REGISTRO ESCRITO.


Anote aqui como você pensou para ampliar sua figura.

Nós ampliamos a figura 5 cm cada lado

FONTE: registro de um aluno do 7B.

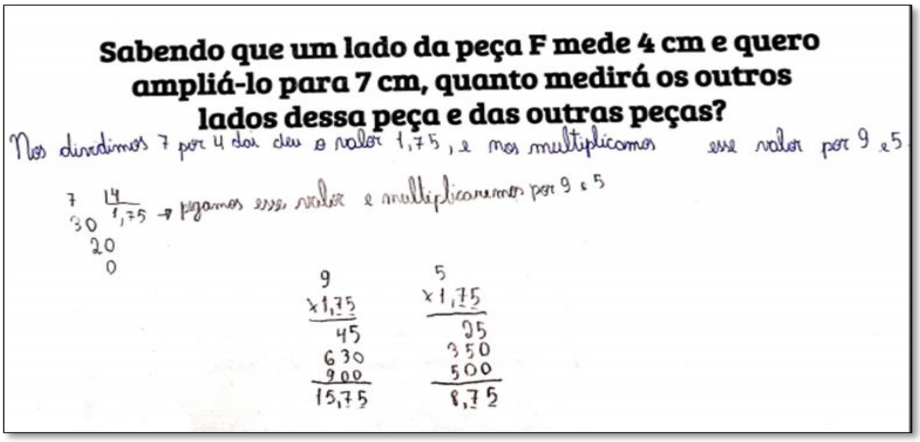
Para a estratégia (II) podemos atribuir a mesma justificativa da estratégia (I) pois eles também não conseguiram observar que o problema apresentou dois valores, e que por meio deles era possível encontrar uma razão e essa razão poderia ser atribuída para todos os lados de todas as figuras do quebra cabeça.

Partindo disso é possível perceber observando a figura F que dois de seus lados possuem medidas maiores que 7 cm, e apenas possui uma medida menor que 7cm então possivelmente em um primeiro momento o grupo pensou em manipular as medidas para que ambas atingissem 7cm. Como não foi possível observar de maneira clara essa estratégia nos registos, é uma hipótese que levantamos após analisar esse contexto. Dessa forma esse grupo pode ter mudado de estratégia aumentando o valor fixo de 5 cm em ambos os lados da figura após alguns questionamentos feitos por uma das professoras sobre os caminhos tomados por eles durante os atendimentos individuais. Portanto nesse contexto houve uma mudança de estratégia de valores manipuláveis para um único valor fixo.

5.2.2 Estratégia III

Na estratégia (III), 17 grupos considerando os vinte quatro formados nas duas turmas utilizaram o conceito de razão para ampliar as peças. Ou seja, os alunos dividiram 7 cm por 4 cm, encontrando o valor de 1,75, que no caso é a razão entre esses dois segmentos, e por fim, multiplicaram 1,75 por cada lado das figuras, ampliando proporcionalmente todos os lados, como podemos observar a seguir no registro de um grupo participante.

FIGURA 17: REGISTRO ESCRITO.



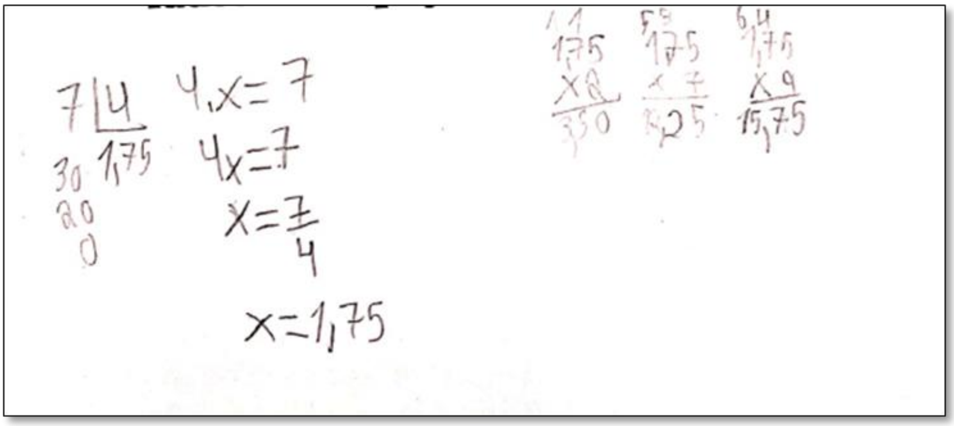
FONTE: registro de um aluno do 7B.

Nesse registro podemos perceber que os alunos não representaram a razão no formato $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0. Para Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) isso é reflexo das dificuldades existentes no contexto de aprendizagem de frações, ou seja, uma dessas dificuldades é entender que uma divisão pode ser descrita por $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0 e que por mais que seja representada por dois numerais, a e b, ela representa apenas um número que faz parte de um inteiro. Isso não quer dizer que eles não desenvolveram o raciocínio proporcional, já que, eles conseguiram perceber que existe uma relação entre os dois segmentos dados, e que essa relação nada mais é do que a razão que podemos encontrar para resolver o problema.

Essa estratégia faz relação com o critério de raciocínio relativo proposto por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014), ou seja, ao observar as medidas dos dois segmentos que aparecem no problema, o de 7cm e o de 4 cm, eles conseguiram perceber que existe uma razão entre esses segmentos e essa razão poderia ser atribuída de forma proporcional para todos os outros lados da figura, mostrando indícios do desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Além disso, surgiu outro tipo de representação para uma razão, que estabelece relações multiplicativas como mostramos na Figura 18:

FIGURA 18: REGISTRO ESCRITO.



FONTE: registro de um aluno do 7A.

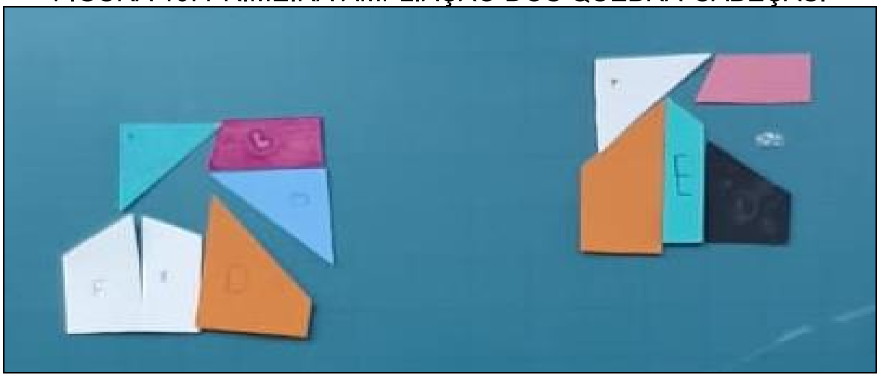
Para Cyrino; Rocha; Pires e Roberto (2014), a proporcionalidade se relaciona com os diferentes significados do registro fracionário $\frac{a}{b}$ como, a igualdade de frações $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e pela função *y*=*m*.x indicando relações multiplicativas diretamente ou inversamente proporcionais entre y e x que resulta em constantes proporcionais de

m. Por meio do registro anterior podemos perceber que os estudantes conseguiram representar a relação entre as medidas algebricamente, indicando a constante de proporcionalidade de 7 e 4 pela letra x. Isso evidencia alguns aprontamentos de Cai e Sun (2004) quando afirmam que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é um dos caminhos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Esse processo de identificar grandezas sejam elas diretas ou indiretas, e analisar quais delas sofrem alterações, sejam multiplicativas, diretamente ou inversamente proporcionais, possibilita o desenvolvimento do pensamento proporcional de forma mais rigorosa e está relacionado com o critério de quantidades e covariação da Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014).

Em um momento posterior entregamos uma folha de EVA para cada grupo para que desenhassem a peça que foi manipulada por eles, de forma que observassem de uma maneira mais clara a figura ampliada. Após todos terem desenhado e recortado às figuras nos EVAS coloridos, pedimos para que cada um deles identificassem a figura com a letra que ela representava no quebra cabeça, e assim solicitamos na ordem das letras do quebra-cabeça que um representante de cada grupo fosse até ao quadro levar a figura e montar o quebra-cabeça como podemos ver na Figura 19:

FIGURA 19: PRIMEIRA AMPLIAÇÃO DOS QUEBRA-CABEÇAS.



FONTE: fotografado pela autora.

Como havia doze grupos foi possível montar dois quebra-cabeças que ficaram diferentes entre si, isso possibilitou uma reflexão e uma discussão sobre o porquê as mesmas peças que foram ampliadas por grupos distintos ficaram diferentes. Dessa forma, indagamos os alunos sobre o porquê os quebra-cabeças não se encaixarem. Partindo disso os grupos começaram a comparar os formatos das peças e observaram que algumas das peças estavam desconfiguradas, ou seja, algumas delas não estavam parecidas com a peça original do quebra-cabeça. Alguns relataram que as peças estavam desconfiguradas devido os ângulos estarem diferentes e assim ao serem ampliadas as peças deveriam manter o tamanho do ângulo. Além disso, também perceberam que os grupos haviam levantado estratégias diferentes e isso poderia ter influenciado significativamente na montagem dos quebra-cabeças.

Essa etapa é reconhecida por Guy Brousseau como *Dialética validação.* É nesse momento que o aluno vai tentar validar tudo o que eles pensaram na *Dialética formulação* e na *Dialética ação.* Nessa etapa, os grupos procuraram validar suas estratégias recorrendo a alguns conhecimentos que eles já possuem como podemos perceber eles compararam o formato das peças que são figuras geométricas planas e utilizaram o conhecimento que eles tinham sobre os ângulos dessas figuras.

Como já dito anteriormente, as dialéticas podem ocorrer de forma cíclica, ou seja, os alunos podem ir e voltar quantas vezes forem necessárias. Como na etapa da validação os quebra-cabeças não se encaixaram, os alunos foram orientados a reformular as hipóteses. Para que eles pudessem fazer isso de uma maneira adequada, nós na condições de professoras retomamos o conceito de razão, por meio da atividade anterior, perguntando o que feles haviam feito com os dois segmentos que tinham (a medida da altura e medida do pé de pessoas dos grupos). A partir das respostas pra essa questão, pudemos abordar o conceito de razão, novamente. Assim fizemos da mesma forma no quadro, mas com os dados que tínhamos dessa atividade, ou seja, com os segmentos medindo 4 cm e 7 cm como podemos observar na imagem a seguir:

FIGURA 20: SISTEMATIZANDO A RAZÃO.

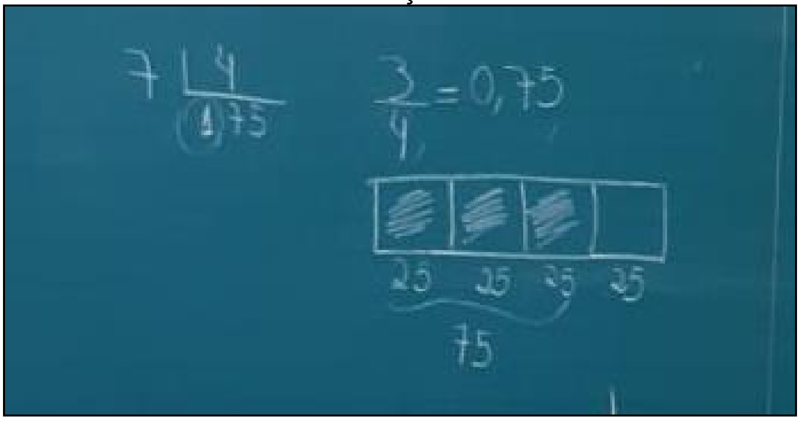
FONTE: registro da professora|pesquisadora.

É possível perceber que nesse momento nós professoras e os alunos retornamos à *Dialética ação* e da *formulação* para repensarmos no problema e traçar novas estratégias que pudessem satisfazer a ampliação dos quebra-cabeças de forma adequada. A partir disso todos utilizaram a razão para ampliar as peças proporcionalmente, e assim algumas outras estratégias de interpretação da razão surgiram durante essa etapa da atividade, por exemplo, um grupo observou a porcentagem que cada lado aumentou como mostra o excerto:

Professora 2: teve um grupo que fez uma observação bem legal... Vocês poderiam ler pra gente? Ou falar?
Aluno 6: O quatro cabe uma vez dentro do sete, ai sete menos quatro é igual a três e ao fazer três dividido por quatro temos 0,75, ou seja, numa porcentagem de 100 ela ((a figura)) foi ampliada 75 porcento de 100.
Professora 2: Vocês entenderam o que ela disse? Ainda não?
Alguns alunos: Não!
Professora 2: Vocês conseguem explicar o que eles escreveram ou alguém consegue explicar o que ela falou?
Aluno 6: a gente pegou primeiro o sete e dividiu por quatro e vimos que cabia uma vez dentro...
Professora 2: Então a gente tem o sete que é o tamanho que essa peça nova mede né, ou o tamanho desse seguimento e aí ((observando esse segmento)) quantas vezes o quatro cabe dentro do sete?
Alguns alunos: uma vez!
Professora|pesquisadora: Mas depois sobre um pouquinho.
Professora 2: o que eles fizeram... Eles olharam ali e tentaram perceber quantas "vezes::" o quatro cabe dentro do sete... Então cabe uma vez... Cabe duas vezes?
Alguns alunos: não!
Professora 2: Não né! Fica faltando alguma coisa aqui não é? Então cabe uma vez inteira e quando a gente faz aquela divisão de sete por quatro a gente chega a conclusão que cabe uma vez inteira e quando vocês continuam a divisão da 75 né, então esse um inteiro, um que fica antes da virgula quer dizer que o quatro cabe uma vez dentro do sete e sobra um restinho aqui ... Qual a relação entre esse resto e os 75 que tem aqui?

A sistematização desse conceito de porcentagem foi feita no quadro para que todos observassem e entendessem a relação que um dos grupos encontraram entre os segmentos como podemos observar na Figura 21.

FIGURA 21: SISTEMATIZAÇÃO DE PORCENTAGEM.



FONTE: registro da professora 3.

Durante a sistematização no quadro procuramos usar vários tipos de interpretações de razão, como o método de chaves, a razão no formato $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0 e como registro figural para que eles pudessem observar quanto vale 75% de um inteiro. Assim para mostrar essa porcentagem dividimos um retângulo em quatro partes que valiam 25% cada uma, na qual juntando as quatro partes seriam o 100% da figura e pintamos três partes na qual representavam 75% do inteiro.

Esse processo descrito pelo grupo e pelas professoras para o entendimento do conceito de porcentagem presente na situação da atividade, na qual, consideraram a ideia de particionar um inteiro em partes iguais, e os resultados dessa partilha fazem parte da unidade, de um inteiro que no caso é 100% está relacionada ao critério de partilha e comparação da Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014). Além disso, o processo de identificar quantas vezes o quatro cabe dentro do sete, de acordo com Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) também está relacionado com o critério de medição, ou seja, está relacionado às diferentes interpretações do registro facionário, como a relação parte todo, a noção de quociente, o significado de que uma fração pode ser uma medida ou uma taxa, entre outros.

Para Cyrino, Rocha, Pires, Roberto (2014) é fundamental criar um ambiente como esse que criamos, na qual, possibilita aos alunos oportunidade para construir diversos significados para a razão, já que, para que ocorra o desenvolvimento do raciocínio proporcional é necessário que o aluno entenda as diferentes formas de representação do número racional (porcentagem, decimal, frações) e também as interpretações para sua representação fracionária em diferentes contextos, como, a relação parte todo, quociente, razão, operador e etc.

Em um momento posterior pedimos para que os alunos, novamente desenhassem e recortassem a nova peça ampliada. Dessa vez utilizando os conceitos institucionalizados pelas professoras. Os quebra-cabeças construídos numa segunda etapa estão apresentados na Figura 22.

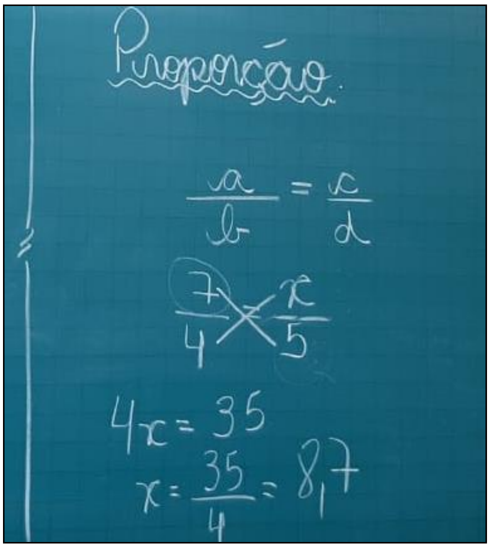
FIGURA 22: VERSÕES DOS QUEBRA-CABEÇAS.

FONTE: fotografado pela autora.

Nesse momento, os alunos puderam comparar o quebra cabeça anterior, com o novo e assim perceber que a melhor forma de se ampliar uma figura ou imagem é por meio da razão, usando a comparação entre razões (ou regra de três) mesmo que algumas não tenham se encaixado muito bem, o formato das peças dos novos quebra-cabeças é muito semelhante e próximo que o quebra-cabeça original. Apenas um erro técnico ao recortar a figura foi cometido, no entanto as operações e procedimentos matemáticos estavam adequados.

Levando em consideração que os alunos entenderam que uma figura ou imagem pode ser ampliada por meio da razão, institucionalizamos o conceito de proporção. Dessa forma sistematizamos no quadro como mostra a Figura 23, de forma a utilizar os dados que a atividade proporcionou.

FIGURA 23: SISTEMATIZANDO O CONCEITO DE PROPORÇÃO.



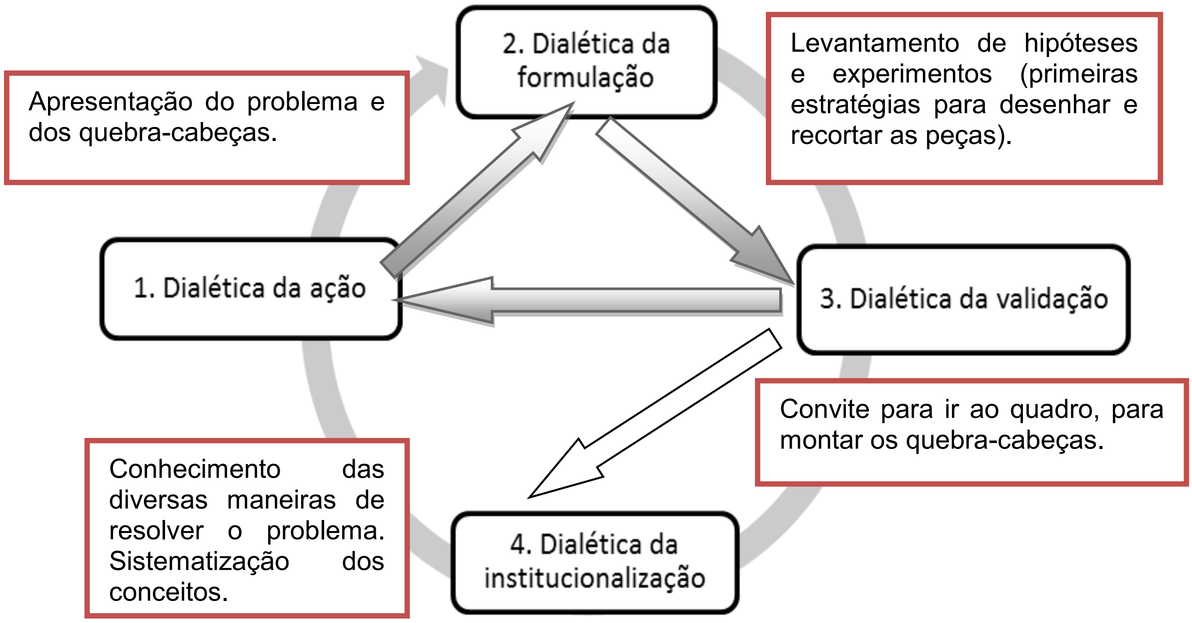
FONTE: registro da Professora 1.

O conceito de proporção, igualdade de duas frações, mais conhecido como regra de três faz referencia ao critério de processos de unitizarão e raciocínio progressivo e regressivo descrito por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014). Ou seja, é o processo de reorganização das grandezas as quais se trabalha. É possível identificar esse processo na Figura 23, quando organizamos a igualdade de frações de forma que a medida que desejo ampliar seja o denominador e a medida ampliada seja o numerador. Isso está diretamente relacionado com o raciocínio progressivo e regressivo, ou seja, o procedimento mental que contribui no cálculo, a partir de qualquer fração relações de proporcionalidades de um inteiro e logo após encontrar relações proporcionais para outras frações, por meio das relações já encontradas.

O momento em que os alunos entendem o conceito de razão e em seguida percebem que eles podem usar tanto o conceito de razão, quanto o de proporção para resolver problemas que envolvem ampliação de figuras e imagens é caracterizado por Brousseau (1986) como *Dialética institucionalização*, ou seja, é a etapa em que o aluno busca um caráter objetivo e geral para o conhecimento obtido.

No esquema a seguir, apresentamos uma síntese do desenvolvimento de toda a segunda atividade de acordo com as dialéticas propostas por Brousseau (1986).

ESQUEMA 6: SÍNTESE DA ATIVIDADE



FONTE: elaborado pela autora.

Nas caixas de diálogo que estão em quadros pretos estão sendo expostas as quatro dialéticas que caracterizam a TSD e nas caixas que estão em quadros vermelhos estão descritos o momento em que cada Dialética ocorreu durante a atividade. Faz-se necessário aqui ressaltar que o esquema está exposto de forma circular, e apresenta setas em seu centro, pois as dialéticas não ocorrem de forma retilínea e direta, mas sim, os alunos podem ir e voltar em cada Dialética quantas vezes for necessário para chegar a um resultado. As setas cinzas indicam o movimento circular, em que os grupos voltaram à dialética da ação, após a tentativa de validarem seus quebra-cabeças. A seta branca indica o caminho para a institucionalização dos conceitos.

É exatamente isso que ocorre, os alunos durante a atividade chegaram à Dialética *validação* e perceberam que as hipóteses levantadas não eram válidas, pois as peças não se encaixaram. Dessa forma eles voltaram para a Dialética ação para repensar no problema, e levantar novas hipóteses *(Dialética formulação),* para assim tentar validar novamente *(Dialética validação).*

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para dar início a conclusão dessa pesquisa, retornaremos o problema de pesquisa que conduziu a presente investigação. Em seguida, faremos uma síntese dos caminhos seguidos, de forma articulada às nossas considerações e, por fim, apresentamos possibilidades para pesquisas futuras.

A nossa inquietação inicial surgiu com uma experiência durante as atividades de um projeto de extensão, na qual percebemos dificuldades dos alunos em relação aos conceitos que envolviam proporcionalidade. A partir daquele momento começamos a nos questionar do por que o processo de institucionalização de alguns conceitos ainda não ser algo natural para os alunos.

Essas reflexões e questionamentos nos direcionaram ao estudo do desenvolvimento do raciocínio proporcional e também em alternativas metodológicas de ensino que possibilitassem o desenvolvimento desse raciocínio, guiadas pela seguinte questão de pesquisa: “Que elementos emergentes de atividades Matemáticas, que envolvem o conceito de proporcionalidade, encaminhadas de acordo com a TSD podem fundamentar o desenvolvimento do raciocínio proporcional?”.

Com o objetivo de investigar como as atividades embasadas na TSD possibilitam o desenvolvimento do raciocínio proporcional, as atividades aqui apresentadas foram desenvolvidas em duas turmas de sétimos anos, no intuito investigar como esse raciocínio está sendo desenvolvido nesse nível de ensino.

Diante das teorias que nós conhecíamos a que pareceu mais adequada era a Teoria das Situações Didáticas, pois queríamos avaliar tanto a investigação Matemática que os alunos desenvolviam, quanto as negociações que aconteciam de acordo com a configuração daquele ambiente de aprendizagem e o processo de institucionalização dos conceitos. Além disso, o raciocínio proporcional dos alunos foi analisado de acordo com os pressupostos teóricos da Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) e também de outros autores que tratam do desenvolvimento desse raciocínio como, Behr, Lesh e Post (1988) e também, Cyrino, Rocha, Pires e Roberto (2014).

Partindo disso, duas atividades embasadas na TSD intituladas “sequestro do cãozinho” e “ampliação do quebra-cabeça” foram desenvolvidas nas turmas de sétimos anos sendo que uma delas foi adaptada para que se transformasse em uma atividade embasada na TSD e a outra já havia sido feita e embasada de acordo com esses pressupostos para que a partir desses desenvolvimentos nós pudéssemos investigar o raciocínio proporcional dos estudantes.

Dessa forma, durante a desenvolvimento das atividades foi possível perceber que a forma de organização do *milieu* propiciou aos estudantes um trabalho com autonomia, em que as professoras mediaram os processos de ensino e de aprendizagem considerando as particularidades dos grupos no que se refere ao desenvolvimento e uso dos conceitos matemáticos envolvidos.

Em termos dessa pesquisa, foi no decorrer das dialéticas da validação e da institucionalização em que tivemos acesso a elementos mais evidentes acerca do desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes. Isso porque, foram nesses momentos que os grupos puderam expor à turma as suas estratégias – delineadas na Dialética ação e na Dialética formulação – e justificar aos demais alunos os motivos de terem-na construído. Nesse processo, os critérios indicados por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) foram evidenciados.

No decorrer da *Dialética da validação* os grupos por si só buscaram conhecimentos que já faziam parte do seu repertório e buscaram outras informações por meio de pesquisas e discussões para validar as hipóteses/ estratégias que eles levantaram. Por exemplo, nas atividades que foram desenvolvidas na etapa da validação alguns grupos perceberam que as hipóteses levantadas por eles não eram válidas, assim buscaram novas estratégias, e por meio das orientações que fizemos na condição de professoras, compreenderam que os conceitos que melhor respondiam às situações eram os conceitos institucionalizados pelas professoras nos momentos de aula, como: razão e proporção.

Nesse momento alguns grupos resolveram as tarefas usando diferentes conceitos matemáticos. Alguns grupos usando uma expressão algébrica, outros usando a propriedade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com b e d diferentes de 0, outros usando razão $\frac{a}{b}$, com a e b pertencentes aos reais e b diferente de 0, ocorrendo uma institucionalização de vários conceitos envolvidos pelo conceito de proporcionalidade.

Durante essas duas dialéticas, identificamos nas ações e registros dos alunos os critérios indicados por Lamon (2012 apud CYRINO et al., 2014) como necessários para a análise do desenvolvimento do raciocínio proporcional. Nas estratégias em que os alunos construíram foi possível identificar os seguintes critérios:

i) raciocínio relativo: comparar as medidas obtidas e perceber que existe uma razão entre essas medidas;

ii) processos de unitização e raciocínio progressivo e regressivo: reorganização das grandezas com que se está trabalhando, de forma a manter a proporcionalidade;

iii) critério de quantidades e covariações: identificar e mensurar quantidades e perceber que elas variam;

iv) critério de partilha e comparação: partilhar certa quantidade em partes iguais e perceber que essas partes divididas fazem parte de um todo.

O critério i), por exemplo, pôde ser identificado na atividade sequestro do cãozinho quando os grupos encontraram a razão existente entre o tamanho da pegada e assim perceberam que essa razão poderia variar de acordo com as medidas.

Já o critério ii), pôde ser identificado na atividade da ampliação do quebra-cabeça, no instante em que os grupos que levaram essa estratégia organizam os dados coletados em forma de igualdade de duas frações, para encontrar quanto a figura precisava ser ampliada de maneira proporcional.

O critério iii) pôde ser observado na atividade do sequestro do cãozinho, no momento em que os grupos começaram a organizar os dados em uma tabela, e comparar essas medida de forma a encontrar um intervalo entre elas, para assim estimar uma possível altura.

Por fim é possível identificar o critério iv) na atividade do sequestro do cãozinho, no instante em que os grupos em que levantaram essa estratégia, somaram as alturas e as medidas dos pés dos integrantes do grupo, e dividiram pela quantidade dos integrantes do grupo, ou seja, encontraram a média existente entre a altura e a medida do pé de uma pessoa.

Isso nos mostra, que o empreendimento de atividades alinhadas à TSD mostrou-se pertinente para superar um modelo de ensino técnico, que valoriza mais o treinamento do que o pensamento matemático. Nesse caso, o raciocínio proporcional. Esses resultados vão ao encontro do que indicam os documentos curriculares sobre o ensino de Matemática e se contrapõem a situações como várias que temos vivenciado sobre, por exemplo, ensinar regra de três de maneira técnica, desvinculada de outros conceitos que são necessários para o raciocínio proporcional.

Durante a atividade foi possível perceber que os alunos possuíam uma habilidade técnica para resolver multiplicações e divisões e não apresentaram dificuldades sobre o cálculo mental ou sobre o conhecimento da tabuada, por exemplo.

Ao mesmo tempo, na primeira atividade, na qual os grupos precisaram encontrar a altura do meliante, considerando o tamanho do seu pé, sem os nossos encaminhamentos, eles não conseguiriam resolver essa situação, e mesmo com nossa ajuda tiveram alguns grupos que usaram apenas comparações entre medidas, ou seja, tiveram dificuldades para determinar a razão e sistematizar esse conceito. Já na atividade do quebra-cabeça, a maior parte dos grupos conseguiu fazer o uso da razão, isso porque eles relembraram e institucionalizaram alguns conceitos da atividade anterior, no entanto não conseguiram fazer a igualdade de duas razões.

Logo a primeira atividade contribuiu para o desenvolvimento da segunda atividade em vários aspectos, assim é possível perceber que eles desenvolveram elementos do raciocínio proporcional de uma atividade para outra, isso ocorreu devido ao desenvolvimento da atividade anterior que possuía conceitos que envolviam razão, multiplicação, ou seja, conceitos que estavam presentes na segunda atividade, isso fica evidente nas estratégias que apresentamos na seção anterior.

Portanto, é importante para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos que estão nos anos finais do Ensino Fundamental, que os conceitos e conteúdos que envolvam interpretação e proporcionalidade, sejam revistos de forma contínua e utilizando alternativas metodológicas de ensino que atribuam autonomia e tempo para os alunos refletirem e discutirem sobre diversas hipóteses que podem surgir.

Assim a presente pesquisa pode contribuir com a prática pedagógica de professores que ensinam Matemática e para a área da pesquisa do ensino de Matemática, já que apresenta uma possibilidade para abordar conceitos intrínsecos ao raciocínio proporcional, priorizando a investigação em detrimento de cálculos técnicos e com referência apenas na Matemática.

Durante a pesquisa surgiram alguns questionamentos como: por meio da presente pesquisa identificamos critérios que contribuíram para saber como se dá o desenvolvimento do raciocínio proporcional nos anos finais do Ensino Fundamental. Partindo disso, é possível identificar como se dá o desenvolvimento do pensamento proporcional (algo mais abrangente) nesse nível de ensino?

O desenvolvimento dessa pesquisa ainda nos leva a querer investigar o desenvolvimento do pensamento proporcional de professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental (anos iniciais e finais). Considerando a complexidade desse pensamento e sua relevância para o pensamento matemático, muitas questões emergiram sobre a forma como esse trabalho vem sendo feito/encaminhado pelos professores que atuam nos diferentes níveis de ensino. Essa é uma pesquisa que pode ser desenvolvida nos próximos anos, pela pesquisadora.

7 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Editora UFPR, 2010.

BARBOSA, Gerson Silva. Teoria das situações didáticas e suas influências na sala de aula. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo. XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2016.

BOGDAN, Robert C. et al. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara Loiola de. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Ed. Autêntica**, p. 23-30, 2012.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. **Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF**, 1998.

BROUSSEAU, Guy. **Teoria das Situações Didáticas.** 1986.

BLUM, W.; FERRI, R. B. Modellieren – Schon in der Grundschule? In A. Peter-Koop, G. Lilitakis & B. Spindeler (Hrsg). Lernungebungen – ein weg zum kompetenzorientierten mathematikunterricht in der Grundschule., 2009, 142- 153. Offenburg: Mildenberger.

CANOVA, Raquel Factore. Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração. **Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo**, 2013.

CYRINO, MCCT et al. **Formação de Professores em Comunidades de Prática:** frações e raciocínio proporcional. Londrina: UEL, 2014.

DE CARVALHO BORBA, Marcelo; DE LOIOLA ARAÚJO, Jussara. **Pesquisa qualitativa em educação matemática: Nova Edição**. Autêntica Editora, 2019.

FREIRE, Paulo César. **uma jornada por diferentes mundos da matemática investigando os números racionais na forma fracionária**. 2011. 194 p. Dissertação (Mestrado) - UNIBAN, São Paulo, 2011.

GREGORUTTI, Juliana de Lima. **Construção dos critérios de divisibilidade com alunos de 5ª série do ensino fundamental por meio de situações de aprendizagem**. 2009. 147 p. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Raciocínio Proporcional. **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**, p. 1-21, 1988.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba, 2008.

MARANHÃO, Cristina; MACHADO, Silvia. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, n. 1, p. 141-156, 2011.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Autêntica, 2016.

SANTANA, Raimundo. **Resolução de problemas multiplicativos e sua complexidade do ponto de vista da leitura**. Orientador: Francisco Hermes Santos da Silva. 2008. 185 f. Dissertação (Mestrado) - UFPA, Belém, 2008. Disponível em: http://ppgecm.propesp.ufpa.br/index.php/br/teses-e-dissertacoes/dissertacoes/177-2008. Acesso em: 19 nov. 2019.

SANTOS FILHO, José Camilo dos. **Pesquisa quantitativa versus pesquisa qualitativa: o desafio paradigmático**. In: santos filho, José Camilo dos; GAMBOA, Silvio Sánchez. Pesquisa educacional: quantidade-qualidade. 7 ed. São Paulo: Cortez, 2009. p. 13-59.

SANTOS, Flávia Maria Teixeira dos; GRECA, Ileana María. **Metodologias de pesquisa no ensino de ciências na América Latina: como pesquisamos na década de 2000**. Ciênc. educ., Bauru, v. 19, n. 1, 2013. p.15-33.

SILVA, João Alberto; MARINHO, Julio Cesar Bresolin; FRANÇA, Giovanny Araújo. Consórcio entre pesquisas: possibilidades para o aprofundamento dos estudos qualitativos em educação. **ETD-Educação Temática Digital**, v. 15, n. 3, p. 443-454, 2013.

SILVA, N. A.; FERREIRA, MVV; TOZETTI, K. D. **Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau. In: CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES.** 2015. p. 19951-19961.

SPINILLO12, Alina Galvão. O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. **Psicología: reflexao e Critica**, v. 15, n. 3, p. 475-487, 2002.

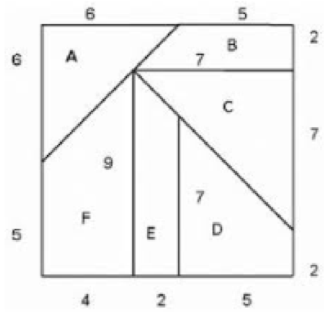
TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

APÊNDICE 1 – TAREFA DO QUEBRA-CABEÇA

ALUNO: ____

QUEBRANDO A CABEÇA

1-Observe o quebra cabeça abaixo resolva a seguinte questão:



Sabendo que um lado da peça F mede 4 cm e quero ampliá-lo para 7 cm, quanto medirá os outros lados dessa peça e das outras peças?

FONTE: elaborado pela autora