

Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Estatística

Gabriel Melek dos Santos da Maia

**Análise da volatilidade do índice SMLL: um estudo de comparação
das metodologias GARCH e extensões.**

Curitiba

2024

Gabriel Melek dos Santos da Maia

**Análise da volatilidade do índice SMLL: um estudo de comparação
das metodologias GARCH e extensões.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina Laboratório B do curso de Graduação em Estatística da Universidade Federal do Paraná, como exigência parcial para obtenção do grau de Bacharel de Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Lucambio Pérez

Curitiba

2024

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	4
2. DEFINIÇÕES	5
2.1. VOLATILIDADE	5
2.2. MATERIAL	6
2.3. MÉTODOS	10
2.3.1. ARIMA	10
2.3.2. GARCH	11
2.3.3. EGARCH	12
2.3.4. TGARCH	12
2.3.5. TESTE KPSS	13
2.3.6. TESTE DE LJUNG-BOX	13
2.4. MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO	14
3. RESULTADOS E DISCUSSÕES	17
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	25
REFERÊNCIAS	26

1. INTRODUÇÃO

A gestão de portfólio busca otimizar a alocação de ativos, a fim de maximizar os retornos esperados e gerenciar o risco associado às decisões de investimento. A volatilidade desempenha um papel central nesse contexto, pois é um indicador fundamental da incerteza e do potencial de risco nos mercados financeiros. A compreensão da volatilidade é essencial para tomar decisões importantes e construir portfólios eficientes.

A Teoria de Markowitz, desenvolvida por Harry Markowitz em meados do século XX, revolucionou a gestão de portfólio ao introduzir o conceito de diversificação eficiente (MARKOWITZ, 1952). Segundo Harry, ao invés de simplesmente buscar os ativos com o maior retorno esperado, os investidores deveriam considerar também a relação entre os ativos em um portfólio e como eles interagem em termos de volatilidade. Essa abordagem introduziu o conceito de fronteira eficiente, que representa todas as combinações possíveis de ativos que oferecem o maior retorno esperado para um determinado nível de risco ou volatilidade.

Neste contexto, este trabalho se propõe a explorar a volatilidade do índice SMLL, que representa o mercado de Small Caps da Bolsa de Valores brasileira, e comparar de diferentes metodologias de análise de volatilidade. A escolha do índice SMLL é justificada por sua característica de representar empresas de menor capitalização, o que geralmente se traduz em uma menor liquidez e, na maior parte do tempo, uma maior volatilidade. A volatilidade desse segmento do mercado oferece uma oportunidade interessante para explorar a metodologias GARCH e algumas de suas extensões em um ambiente onde as flutuações de preços podem ser mais pronunciadas.

2. DEFINIÇÕES

2.1. VOLATILIDADE

A volatilidade é definida como uma medida de dispersão das cotações de um determinado ativo durante um determinado intervalo de tempo. Ela é, em grande parte das vezes, medida através da variância ou do desvio-padrão das cotações diárias, semanais ou mensais. Esta medida é também utilizada para quantificar o risco de um determinado ativo, de forma que quanto maior o valor, maior a volatilidade e, assim, maior o risco do ativo.

Existem três principais tipos de volatilidade: histórica, implícita e real (MARQUES, 2017). A volatilidade histórica mede a variação dos retornos passados de um ativo, e é geralmente utilizada como medida de risco total do ativo. Calculada com base no desvio-padrão dos retornos históricos, oferece uma visão retrospectiva do comportamento do ativo, sendo um ponto de partida para estimar a volatilidade futura. A volatilidade implícita reflete o que o mercado pensa sobre determinado ativo no momento, derivada dos preços dos contratos de opções. A volatilidade implícita é medida no mercado financeiro através do modelo de *Black-Sholes*, o qual tem o objetivo de modelar o preço justo das opções de compra e venda, utilizando como variáveis o preço atual do ativo subjacente, o preço de exercício da opção, o tempo até a expiração, a taxa de juros livre de risco e a volatilidade do ativo. Por fim, a volatilidade realizada é a medida de variação de preços que ocorreu durante um determinado período. É calculada usando os retornos reais do ativo durante esse período, geralmente em intervalos diários, semanais ou mensais, e fornece uma visão atualizada das flutuações de preços.

A volatilidade tem papel importante no mercado financeiro, influenciando diversas áreas, como a gestão de ativos, a precificação de derivativos e análise de risco. Na gestão de portfólios, por exemplo, a volatilidade é utilizada para avaliar o risco dos ativos individuais e do portfólio como um todo. A Teoria do Portfólio de Markowitz, já mencionada anteriormente, baseia-se na diversificação para minimizar a volatilidade para um determinado retorno esperado. Em resumo, a volatilidade é um indicador fundamental para ajudar na tomada de decisão em um ambiente incerto como o mercado financeiro.

2.2. MATERIAL

O SMLL é definido como o resultado de uma carteira de ativos, elaborada de acordo com uma série de critérios definidos pela B3, a bolsa de valores brasileira. O índice tem com objetivo ser o indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de uma carteira composta de empresas de menor capitalização, chamadas de Small Caps, conceito esse também definido pela B3. É classificado como um índice de retorno total, incorporando não apenas as variações de preços dos ativos, mas também os rendimentos provenientes de dividendos, juros sobre capital próprio (JCP) e direitos de subscrição. Essa característica é fundamental, uma vez que fornece uma visão abrangente do desempenho do mercado de Small Caps e considera o impacto desses rendimentos, tornando-o um indicador completo.

Uma vez que os valores são referentes ao fechamento diário do índice, faz-se necessário para o estudo a transformação dos dados para retornos e assim trabalhar com séries estacionárias. Será utilizada a transformação de log-retornos ao invés de retornos simples, uma vez que este apresenta uma série de vantagens estatísticas em séries financeiras, como estabilização da distribuição dos dados, redução da assimetria e aditividade ao longo do tempo (MADAN; WANG, 2021; QUIGLEY, 2008).

O log-retorno, ou retorno logarítmico, é uma medida estatística utilizada em finanças e análise de séries temporais para descrever a variação no valor de um ativo ao longo do tempo. Ele é calculado como o logaritmo natural da razão entre o valor atual e o valor anterior do ativo. O log-retorno r_t , em um determinado período t , para um ativo é definido como:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right),$$

onde P_t é o preço do ativo no tempo t , e P_{t-1} é o preço do ativo no período anterior $t - 1$.

O material utilizado no estudo foi extraído da página da B3. A coleta foi realizada através de dados abertos com os valores de fechamento diário do índice. O período dos dados é do dia 31 de agosto de 2005, desde a criação do índice, até 28 de dezembro de 2023.

Na Figura 1 abaixo, observamos a série histórica do índice.

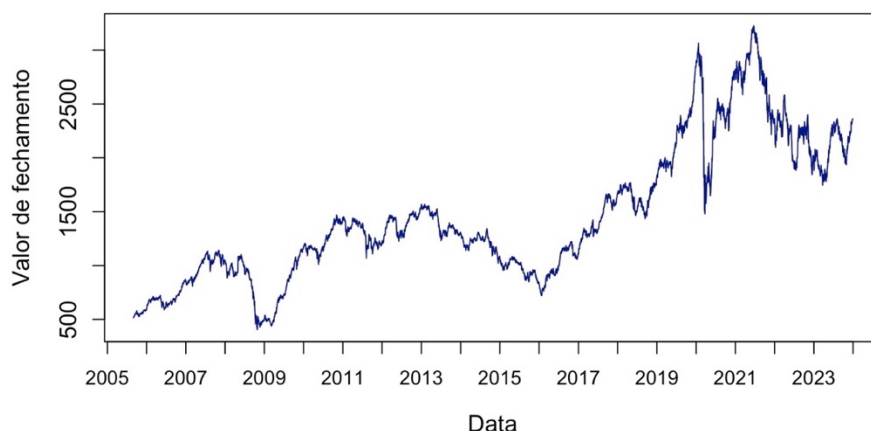


Figura 1

O índice SMLL inicia com um valor de R\$ 517,94, e termina no valor de R\$ 2.352,98, apresentando um crescimento de 354,3% durante o período observado. Apesar do crescimento, observa-se 4 grandes períodos de queda, que refletem a dinâmica complexa dos mercados financeiros e a interação entre uma série de fatores econômicos, políticos e externos.

O primeiro período de queda observado é em 2008 com a crise financeira global, desencadeada pela crise do subprime nos Estados Unidos. Originada no mercado imobiliário norte-americano, rapidamente atingiu todo o sistema financeiro global, resultando em uma recessão econômica mundial. No Brasil, os impactos foram a desaceleração econômica, redução do consumo, aumento do desemprego e uma queda acentuada nos preços dos ativos financeiros. O índice SMLL refletiu esse impacto, registrando uma queda acentuada durante este período de turbulência.

Entre os anos de 2013 e 2016, o índice SMLL apresentou o segundo período de queda. Este período foi marcado por uma desaceleração econômica, aumento da inflação, incertezas políticas e intervenções governamentais na economia. Esses fatores contribuíram para a deterioração do sentimento do investidor e resultaram em uma redução nos investimentos em ações, principalmente nas de menor capitalização, refletindo-se na queda do índice durante esse intervalo de tempo.

O ano de 2020, terceiro período de queda, foi marcado pela pandemia da COVID-19, que desencadeou uma crise de saúde. No Brasil, as medidas de distanciamento social adotadas para conter a propagação do vírus impactaram negativamente a atividade econômica, levando a uma recessão e incertezas generalizadas, derrubando mais uma vez o índice SMLL.

E por fim, o último período de queda observado do índice foi entre os anos de 2021 e 2023, e reflete uma série de desafios econômicos e políticos enfrentados recentemente pelo Brasil. Além das questões relacionadas a persistência da pandemia de COVID-19, incertezas em relação à política econômica do governo, tensões políticas internas e externas, vale ressaltar o impacto da política monetária nesse contexto. A alta taxa de juros, implementada como medida para conter a inflação e estabilizar a economia, também desempenhou um papel significativo na queda do índice. Isso ocorreu, uma vez que o custo da captação de recursos para investimento – altamente necessário para empresas menores que estão em crescimento – ficou muito alto. Além disso, com a taxa de juros no maior patamar dos últimos anos, investir em Small Caps não era muito atrativo para o investidor. Todos esses fatores influenciaram a queda do índice SMLL durante esse período.

Naturalmente, as empresas de menor capitalização já apresentam uma volatilidade maior do que as empresas maiores e mais consolidadas, uma vez que muitas delas são consideradas mais arriscadas e têm uma liquidez significativamente menor. Isso as torna mais sensíveis aos períodos de crises, como os observados anteriormente. Essa maior volatilidade é uma característica relevante para este trabalho, que consiste em comparar diferentes metodologias de séries temporais na análise da volatilidade.

Como mencionado anteriormente, ao lidar com análise de séries temporais, é necessário a transformação dos dados. A seguir, apresentamos o gráfico da transformação para log-retornos, que nos permite visualizar as mudanças percentuais diárias na escala logarítmica nos valores do índice SMLL.

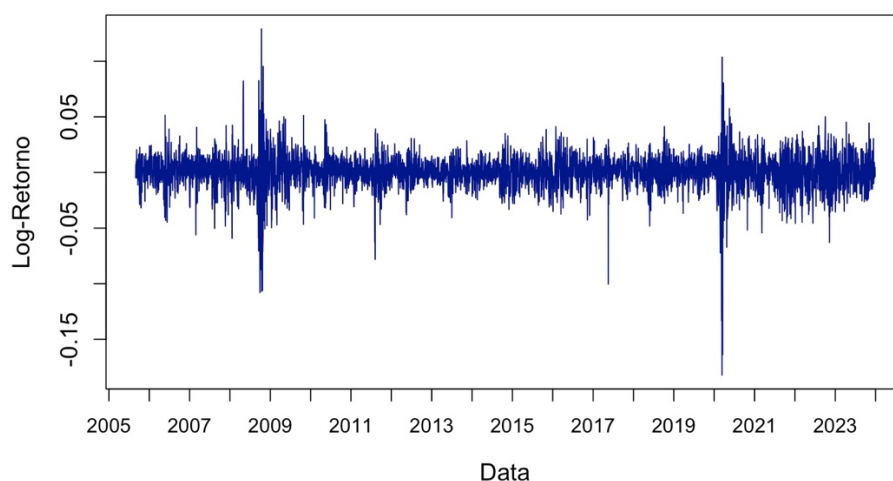


Figura 2

Na Figura 2, observamos a série temporal em log retornos do índice SMLL, onde é possível observar novamente diferentes movimentos da volatilidade ao longo dos anos. Em 2008, durante a crise financeira, a volatilidade é bem alta, com grandes oscilações nos retornos. Na crise de 2013 a 2016, a volatilidade já não é tão pronunciada no gráfico de log-retornos quanto nas demais crises. Este período foi marcado por uma série de problemas econômicos e políticos internos, mas como não foi uma crise aguda como a de 2008, as oscilações são menos acentuadas. O ano de 2020, marcado pela pandemia COVID-19, apresenta novamente uma alta volatilidade no gráfico. As oscilações são grandes, refletindo a forte incerteza e a reação dos mercados à crise de saúde global. E por fim, entre 2021 e 2023, observamos uma volatilidade mais frequente e persistente. Apesar de não haver uma queda tão acentuada quanto 2008 ou 2020, as incertezas econômicas e políticas, junto com uma alta taxa de juros, contribuem para uma volatilidade maior nos log-retornos do índice SMLL durante o período.

Para garantir uma análise abrangente e precisa da comparação dos modelos de séries temporais aplicados ao índice SMLL, é necessário dividir a base de dados em dois diferentes períodos: um período de treinamento e outro de teste.

O período de treinamento, que abrange de agosto de 2005 a dezembro de 2017, representa uma extensão significativa dos dados de aproximadamente 70%. Durante esse intervalo, os modelos serão ajustados com base nos dados observados no mercado ao longo desses anos. Teremos então dois períodos de queda na base de treinamento, o de 2008 e o de 2013 a 2016.

Por outro lado, o período de teste, que vai de janeiro de 2018 a dezembro de 2023, aproximadamente 30% da base, servirá para avaliar a capacidade dos modelos de generalizar e fazer previsões precisas em dados não observados. Teremos também 2 períodos de crise da série histórica presente na base de teste, o de 2020 e o de 2021 a 2023. Essa divisão entre os períodos de treinamento e teste é essencial para evitar o viés de ajuste excessivo, também chamado de *overfitting*, dos modelos aos padrões específicos dos dados de treinamento. Além disso, permite uma avaliação mais realista do desempenho dos modelos em condições de mercado mais recentes, contribuindo para uma análise mais abrangente e confiável.

2.3. MÉTODOS

A importação, análise dos dados e aplicação das metodologias estatísticas foram realizadas utilizando linguagem de programação R. Para a implementação do modelo ARIMA, foi utilizado a função *auto.arima* do pacote *forecast*. Para a implementação dos métodos GARCH e suas variações, foi utilizado o pacote *rugarch*, o qual possui diversas extensões do modelo GARCH e distribuições condicionais. Para este estudo foi utilizado a distribuição condicional normal padrão. Essas escolhas foram feitas devido à versatilidade e robustez dessas ferramentas em análise de séries temporais, proporcionando uma análise precisa e abrangente dos dados.

2.3.1. ARIMA

O modelo ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) proposto inicialmente por Box e Jenkins, é uma melhoria do modelo ARMA (AutoRegressive Moving Average). O modelo ARMA utilizado para análises de séries temporais estacionárias, combina dois componentes principais: autorregressão (AR) e médias móveis (MA). A parte autorregressiva do modelo captura a relação entre uma observação e um número específico de suas defasagens anteriores. Em um modelo autorregressivo de ordem p (AR(p)), o valor na série no tempo t é uma função linear de seus valores passados. A fórmula para um modelo AR(p) é dada por:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t,$$

onde Y_t é o valor da série temporal no tempo t , μ é uma constante, ϕ_p são os coeficientes autorregressivos e ϵ_t é o termo de erro no tempo t .

A componente de média móvel do modelo (MA) captura a relação entre uma observação e um número específico de termos de erros defasados. Um modelo de média móvel de ordem q (MA(q)) representa o valor da série como uma função linear dos termos de erro passado. A sua fórmula é dada por:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

onde μ é a média da série, θ_q são os coeficientes de média móvel e ϵ_t é o termo de erro no tempo t . O modelo ARMA é uma combinação dos dois componentes AR e MA, sendo representado como ARMA (p, q), onde p é a ordem de parte regressiva e q é a ordem de médias móveis.

O modelo ARIMA adiciona um componente de integração capaz de lidar com séries temporais não estacionárias. Representado por ARIMA(p, d, q), onde p e q são valores já conhecidos do modelo ARMA e d é o número de diferenciações necessárias para tornar a série estacionária. O processo consiste em subtrair valores sucessivos da série original, ajudando a estabilizar a média de uma série que apresenta tendência e padrões sazonais. A sua equação é dada por:

$$\Delta^d Y_t = \mu + \phi_1 \Delta^d Y_{t-1} + \phi_2 \Delta^d Y_{t-2} + \dots + \phi_p \Delta^d Y_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t,$$

onde $\Delta^d Y_t$ é a série temporal Y_t após d diferenciações para se tornar estacionária, μ é a constante do modelo, ϕ_p são os coeficientes autorregressivos AR, θ_q são os coeficientes de média móvel e ϵ são os termos de erro, que possuem esperança igual a zero e variância constante.

2.3.2. GARCH

O modelo ARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity*), proposto por Engle (ENGLE, 1982), parte do pressuposto de que os retornos financeiros apresentam volatilidade condicional, ou seja, a volatilidade é heterocedástica, variando ao longo do tempo. A ideia central do modelo ARCH é que a volatilidade atual está relacionada aos retornos passados, refletindo assim, a dependência temporal na variação da volatilidade. Ou seja, períodos de alta volatilidade no passado tendem a aumentar a volatilidade atual. O modelo ARCH(q) pode ser definido como

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2,$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t,$$

onde σ_t^2 é a variância condicional no tempo t , α_0 é uma constante positiva, α_i são os coeficientes do modelo, ϵ_t são os resíduos e z_t é um termo de erro com distribuição normal padrão.

Bollerslev expandiu o modelo de Engle (BOLLERSLEV, 1986), permitindo uma estrutura de defasagem muito mais flexível. O modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizada (GARCH), trata-se de uma generalização do modelo ARCH, em que a variância condicional no instante t passa a depender também de variâncias condicionais passadas, permitindo que o modelo seja mais parcimonioso. O modelo GARCH(p, q) é dado por

$$\epsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

onde,

$$\begin{aligned} p &\geq 0, q > 0 \\ \alpha_0 &> 0, \\ \alpha_i &\geq 0, i = 1, \dots, q, \\ \beta_j &\geq 0, j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Existem ainda diversas outras abordagens que surgiram a partir do modelo GARCH, desenvolvidas para acomodar incapacidades do modelo original. Esses modelos incorporam diferentes componentes na estrutura do modelo GARCH, buscando capturar diversos efeitos no qual o modelo inicial não é capaz sensibilizar. Dentre as opções de extensões do modelo GARCH, optou-se por utilizar as variações EGARCH e TGARCH, uma vez que estas são capazes de incorporar o efeito de assimetria presente nos dados, que será discutida posteriormente.

2.3.3. EGARCH

Como mencionado anteriormente, existem uma série de tipificações do modelo GARCH, proposto por Bollerslev, para acomodar suas limitações, como por exemplo a incapacidade de modelar o efeito de assimetria.

Uma dessas opções é o modelo, introduzido inicialmente por Nelson, EGARCH(p,q) – Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic (NELSON, 1991). O modelo permite capturar efeitos assimétricos da volatilidade, devido a logaritmização da variância condicionada, em que σ_t^2 é uma função assimétrica dos valores passados de μ_t . Sua equação é dada por:

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left(\frac{|\mu_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{i=1}^q \gamma_i \left(\frac{|\mu_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} \right),$$

onde σ_t^2 é a variância no instante t , α_i , β_j e γ_i são parâmetros do modelo e μ_{t-i} é o erro observado em $t - i$.

2.3.4. TGARCH

Essa outra generalização do modelo GARCH, desenvolvida por Zakoian, possui também como objetivo acomodar a assimetria na volatilidade (ZAKOIAN, 1994). O modelo TGARCH –

Threshold Generalized Autregressive Condicional Heteroscedastic, define que os movimentos negativos tenham um impacto maior na volatilidade do que os movimentos positivos. Sua equação é dada por:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i N_{t-i}) \mu_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

onde σ_t^2 é a variância no instante t , α_i , β_j e γ_i são parâmetros do modelo, μ_{t-i} é o erro observado em $t - i$ e N_{t-i} é uma variável indicadora, que assume valor 1 se $\mu_{t-i} < 0$ e 0 quando $\mu_{t-i} \geq 0$.

2.3.5. TESTE KPSS

A estacionariedade é uma propriedade importante de séries temporais. Uma série temporal é dita estacionária se suas propriedades estatísticas como média, variância e autocorrelação são constantes ao longo do tempo. A importância da estacionariedade é devido a parte dos modelos utilizados dependerem fortemente da suposição, o que simplifica a modelagem e permite que os modelos identifiquem e capturem padrões consistentes ao longo do tempo. Além disso, ela garante a estabilidade dos parâmetros estimados em um modelo.

Para avaliar a estacionariedade no estudo será utilizado o teste KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin), que tem como hipótese nula que a série é estacionária. Sua equação é dada por:

$$KPSS = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}^2},$$

onde S_t^2 é a soma dos resíduos e $\hat{\sigma}^2$ é a estimativa da variância dos resíduos e T é o número de observações da série temporal.

2.3.6. TESTE DE LJUNG-BOX

A autocorrelação refere-se à dependência estatística entre observações em uma série temporal, comprometendo a suposição de independência dos erros. O teste de Ljung-Box, desenvolvido por Greta Ljung e George Box, é uma ferramenta estatística usada para examinar a presença de autocorrelação na série. Ele testa a hipótese nula de que uma série temporal é independente e identicamente distribuída, ou seja, não apresenta autocorrelação até uma

determinada defasagem k . O teste Ljung-Box calcula uma estatística Q , que é a soma dos quadrados das autocorrelações dos resíduos até uma defasagem k :

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k},$$

onde n é o tamanho da amostra e $\hat{\rho}_k$ são as autocorrelações amostrais dos resíduos até a defasagem k .

A estatística Q é então comparada com os quantis da distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade para determinar se se rejeita ou não a hipótese nula de que não há autocorrelação nos resíduos até a defasagem k .

2.4. MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO

Para avaliar os ajustes dos modelos ARIMA, GARCH e suas extensões serão utilizados métodos que permitem selecionar os modelos e avaliar o desempenho do ajuste de cada um deles a novos dados.

A função *auto.arima* do pacote *forecast* utiliza a métrica AICc (Corrected Akaike Information Criterion) para selecionar a melhor combinação de parâmetros do modelo ARIMA. Após isso, para selecionar os parâmetros mais adequados de cada um dos modelos de volatilidade, utilizaremos os critérios de informação AIC (Akaike Information Criterion) e BIC (Bayesian Information Criterion). Os dois critérios são amplamente utilizados na seleção de modelos, pois permitem avaliar o equilíbrio entre a qualidade de ajuste do modelo e sua complexidade.

O AIC é uma medida utilizada para comparar a qualidade relativa de diferentes modelos estatísticos para um determinado conjunto de dados. Introduzido por Hirotugu Akaike em 1974, sua fórmula é dada por:

$$AIC = 2k - 2\ln(L),$$

onde k é o número de parâmetros estimados no modelo e L é o valor da função de verossimilhança maximizada. O objetivo é minimizar o valor de AIC, ou seja, um menor valor de AIC indica o modelo que melhor equilibra o ajuste aos dados e a complexidade do modelo.

O AICc é uma correção do modelo AIC, que leva em consideração o número de parâmetros do modelo e o tamanho da amostra, proporcionando uma avaliação mais precisa quando o número de observações é pequeno em comparação ao número de parâmetros. Sua fórmula é dada por:

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1},$$

onde AIC é o critério de informação de Akaike, k é o número de parâmetros do modelo e n é o tamanho da amostra.

O BIC, ou critério de informação de Schwartz, é um método também utilizado para a seleção de modelos, introduzido por Gideon Schwartz em 1978. É semelhante ao AIC, porém penaliza mais fortemente os modelos mais complexos. O BIC é obtido através da seguinte equação:

$$BIC = k \ln(n) - 2\ln(L),$$

onde k é o número de parâmetros estimados no modelo, n é o número de observações nos dados e L é o valor da função de verossimilhança maximizada.

Após a seleção dos parâmetros de cada um dos modelos utilizando os critérios de informação Akaike e Bayesiano, para selecionar o modelo mais adequado entre os diferentes métodos, testaremos a predição de cada um dos modelos na base de teste. Com este objetivo, serão utilizadas métricas como o Erro Quadrático Médio (MSE), o Erro Médio Absoluto (MAE) e o Erro Percentual Médio Absoluto (MAPE). Essas métricas são essenciais para avaliar a performance preditiva dos modelos na base de teste e comparar a precisão e eficiência das diferentes metodologias. Uma vez que medem o erro da predição em relação aos valores realizados, o modelo com os menores valores dessas métricas será considerado o mais adequado. A combinação dos critérios de informação e as métricas de avaliação devem proporcionar equilíbrio entre a qualidade do ajuste e a simplicidade do modelo.

O Erro Quadrático Médio é uma medida que calcula a média entre os valores previstos e os valores reais. Sua equação é dada por:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2,$$

onde Y_i são os valores reais, $\hat{Y}_i$ são os valores previstos e n é o número de observações. Uma vez que os erros são elevados ao quadrado, o MSE acaba penalizando valores maiores. Ou seja, quanto menor o valor do MSE, melhor o ajuste do modelo aos dados observados.

Já o Erro Médio Absoluto é definido como a média da diferença entre o valor real e o valor predito. O MAE é obtido através da seguinte equação:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i - \hat{Y}_i|,$$

onde Y_i são os valores reais $\hat{Y}_i$ são os valores previstos e n é o número de observações. Essa métrica não é afetada por valores discrepantes, uma vez que os seus valores não são elevados ao quadrado.

Por fim, o Erro Percentual Médio Absoluto é uma métrica que mostra a porcentagem de erro em relação aos valores reais. Isso facilita a compreensão do impacto de como os erros afetam os dados originais, trazendo uma visão mais abrangente do resultado do MAE. Sua equação é dada por:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{Y_i} \right| * 100\%$$

A utilização das diferentes métricas oferece uma visão ampla do desempenho dos modelos. Enquanto o MSE explora a magnitude dos erros, o MAE considera a média das diferenças absolutas e o MAPE traz uma perspectiva percentual. A combinação das medidas possibilita uma avaliação robusta dos ajustes dos modelos, dado que cada uma delas possui uma diferente abordagem e interpretação.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise descritiva dos dados oferece uma visão inicial das principais características da série. Através de estatísticas descritivas, obtemos uma compreensão da distribuição, variabilidade e forma dos dados. Para a série temporal de log-retorno do índice SMLL, as estatísticas descritivas calculadas são apresentadas na tabela abaixo.

Média	Mediana	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
0.0004	0.0007	0.0145	-0.1080	0.1290	-0.4543	8.9679

Tabela 1

A média dos log-retornos da série é de 0.0004, indicando que, em média, os retornos diários do índice SMLL são positivos, e uma mediana de 0,0007, próxima da média. O desvio padrão dos log-retornos de 0.0145 mede a volatilidade dos retornos diários. Esse valor elevado indica uma alta volatilidade da série, representando um alto risco do índice SMLL. Os valores de mínimo e máximo dos log-retornos, -0.1080 e 0.1290, respectivamente, mostram a amplitude das variações. Estes valores apresentam os maiores movimentos diários para baixo e para cima do período analisado.

A assimetria é uma medida estatística que descreve a simetria da distribuição dos dados em torno de sua média. Este valor negativo indica que a distribuição dos log-retornos é ligeiramente inclinada para a esquerda, ou seja, possui (-0,4543) uma cauda mais longa no lado esquerdo da distribuição.

Essa característica de assimetria negativa tem implicações importantes na modelagem dos dados. Modelos que assumem uma distribuição simétrica dos retornos, como parte dos modelos tradicionais de volatilidade, podem não capturar adequadamente o comportamento dos dados. A assimetria negativa indica que choques negativos (quedas no preço) tendem a ser mais severos do que choques positivos (subidas no preço), um fenômeno conhecido no mercado financeiro como “efeito alavancagem”. Esse efeito sugere que quedas nos preços dos ativos frequentemente resultem em aumentos mais significativos da volatilidade, quando comparado a aumentos no preço. Para lidar com isso pode ser necessário utilizar modelos que considerem a possibilidade de distribuições assimétricas.

A curtose dos log-retornos de 8.9679, indica uma distribuição com caudas pesadas, quando comparado com a distribuição normal, e uma maior probabilidade de observar retornos extremos.

Isso é esperado, uma vez que se trata de um índice com empresas de menor capitalização, o que o torna mais volátil.

A Figura 3 apresenta o histograma dos log-retornos da série. Ele exibe a frequência dos log-retornos dentro de diferentes intervalos, o que proporciona uma visualização da forma de sua distribuição.

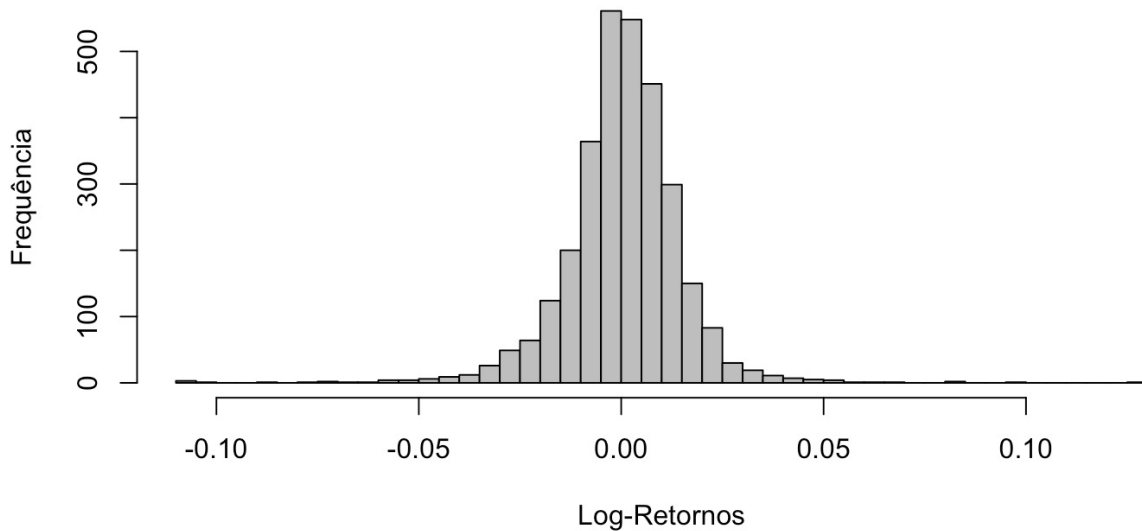


Figura 3

Nota-se uma concentração maior de valores positivos próximos a média, do que valores negativos. Porém, as caudas apresentam o contrário, uma concentração maior em valores negativos do que positivos. Essa assimetria é uma representação visual da assimetria negativa identificada na anteriormente, com o valor de -0.454. A característica da cauda mais pesada do lado negativo do histograma reforça a observação de que grandes perdas são mais comuns e mais severas do que grandes ganhos.

A Figura 4, que apresenta o gráfico de QQ plot dos log-retornos, reforça as conclusões anteriores. Os pontos se alinham bem com a reta no centro do gráfico, indicando uma distribuição aproximadamente normal em torno da média, porém se desviam nas extremidades, com um desvio mais pronunciado na extremidade inferior, dado pela assimetria negativa já identificada anteriormente.

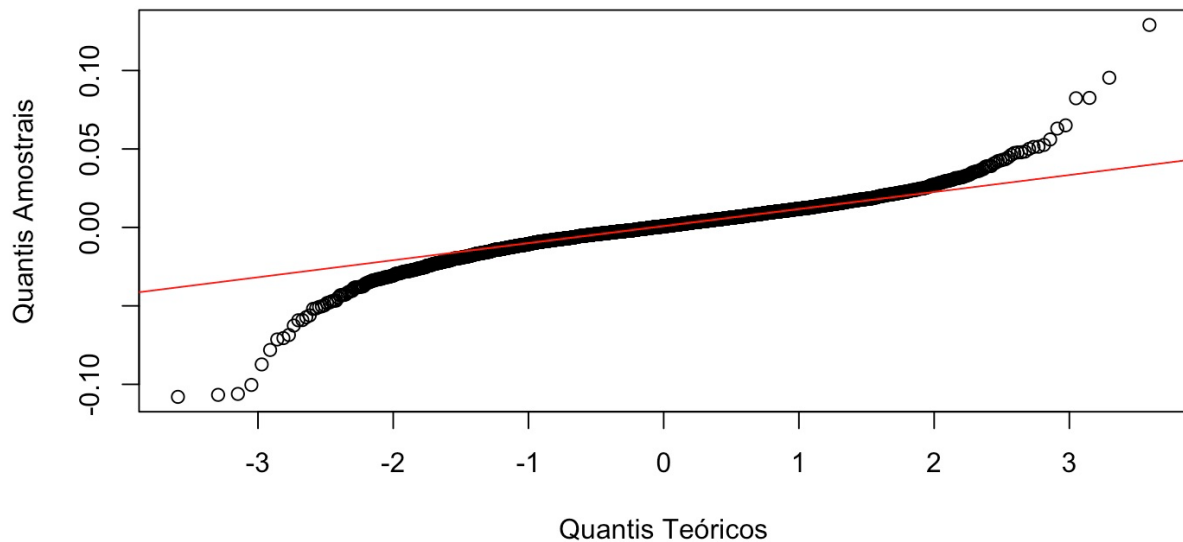


Figura 4

A observação do QQ plot complementa as análises anteriores, confirmando que a distribuição dos log-retornos não é perfeitamente normal e que os dados possuem características de caudas pesadas, especialmente na direção das perdas.

Em relação a estacionariedade, o resultado do teste KPSS aplicados aos dados de log-retornos indicam que a hipótese nula de estacionariedade não pode ser rejeitada ao nível de significância de 10%, ou seja, os dados podem ser considerados estacionários.

O teste de Ljung-Box, realizado para 10 defasagens, apresentou um p-valor extremamente pequeno de $7.623e-05$, indicando que a hipótese nula de independência é rejeitada. Ou seja, existe uma forte evidência de que há autocorrelação significativa na série temporal dos log-retornos até a décima defasagem. Isso sugere que os retornos não são independentes e que os valores passados têm uma relação estatisticamente significativa com os valores futuros.

Complementando a análise de autocorrelação, a Figura 5 apresenta o gráfico da função de autocorrelação (ACF), o que permite uma compreensão mais detalhada da estrutura de dependência presente nos dados.

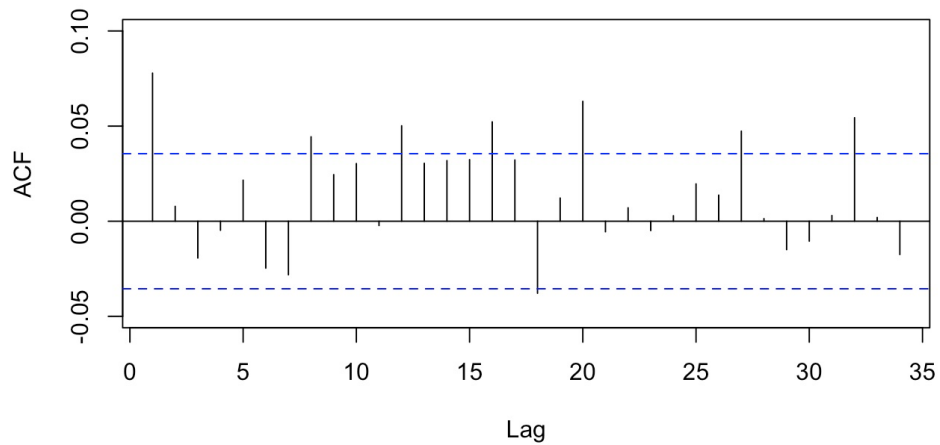


Figura 5

O gráfico ACF permite identificar a presença de autocorrelação em diferentes defasagens de uma série temporal. Conforme observado no gráfico ACF dos log-retornos, há uma autocorrelação significativa na defasagem de ordem 1. Isto sugere que os retornos de um determinado período estão correlacionados com os retornos de um período anterior. Essa dependência pode indicar a presença de um padrão temporal nos retornos que não é capturado por modelos simples de séries temporais. Além da autocorrelação de ordem 1, o gráfico apresenta autocorrelações significativas de ordens superiores. Ou seja, existem correlações estatisticamente significativa também em períodos mais distantes, como nas defasagens 8, 12, 16, 18, 20, 27 e 32.

A combinação das evidências do teste Ljung-Box e do gráfico ACF aponta para a necessidade de modelos que incorporem essas autocorrelações. Para lidar com essa estrutura de autocorrelação identificada, optou-se por ajustar um modelo ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average). O modelo ARIMA é amplamente utilizado na análise de séries temporais devido à sua capacidade de capturar tantos componentes autorregressivos (AR) quanto de média móvel (MA), além de incorporar diferenciações. Após a realização de testes e seleção de modelos, realizadas através da função *auto.arima*, resultou-se em um modelo ARIMA (2, 0, 3) com a seguinte equação:

$$Y_t = -0.2269Y_{t-1} - 0.8898Y_{t-2} + \epsilon_t + 0.3061\epsilon_{t-1} + 0.9234\epsilon_{t-2} + 0.04\epsilon_{t-3}.$$

Os coeficientes autorregressivos negativos (ar1 e ar2) sugerem uma relação inversa entre os retornos atuais e os retornos dos períodos imediatamente anteriores, ou seja, um retorno positivo de um ou dois períodos atrás tende a ser seguido por uma diminuição nos retornos atuais e vice-versa. Por outro lado, os coeficientes de média móvel (ma1, ma2 e ma3) indicam que os retornos

atuais são influenciados pelos termos de erro dos três períodos anteriores, com coeficiente α_2 mais alto, sugerindo uma maior influência do termo de erro do segundo período anterior sobre os retornos atuais.

Após ajuste do modelo ARIMA (2, 0, 3), os resíduos foram extraídos e submetidos ao teste Ljung-Box novamente para verificar se o modelo ARIMA capturou a autocorrelação presente na série dos log-retornos. O resultado do teste foi de um p-valor de 0.3713, significativamente maior do que os níveis de confiança usuais, sugerindo que não há evidência estatística para rejeitar a hipótese nula de que os resíduos são independentes.

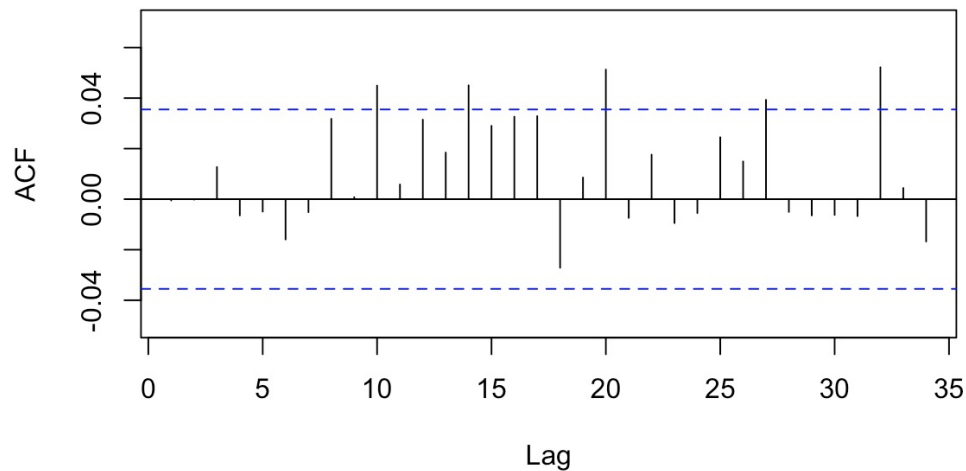


Figura 6

Apesar do teste de Ljung-Box não apresentar significância, indicando que não há autocorrelação significativa até a décima defasagem, observa-se na Figura 6 o gráfico da função de autocorrelação dos resíduos do modelo ARIMA ajustado, que apresenta autocorrelação em ordens mais elevadas, como nas defasagens 10, 14, 20, 27 e 32. Isso sugere que o modelo não captura completamente toda a estrutura de dependência temporal dos dados. Decidimos, mesmo assim, seguir com o modelo ARIMA (2, 0, 3) para a modelagem da volatilidade, reconhecendo as possíveis implicações da decisão.

Partindo para o ajuste dos modelos de volatilidade, foi realizada uma análise comparativa utilizando os modelos GARCH, TGARCH e EGARCH com diferentes combinações de parâmetros p e q , variando de 1 a 3. O objetivo foi identificar os modelos que melhor se ajustam aos dados com base nos critérios de informação Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC). Os modelos ajustados para cada uma das metodologias e seus respectivos valores de AIC e BIC são apresentados na Tabela 2

		GARCH		TGARCH		EGARCH	
p	q	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
1	1	18065.01	18070.79	18072.95	18080.93	18068.56	18072.80
1	2	18064.74	18070.52	18072.95	18080.93	18068.37	18072.60
1	3	18064.55	18070.33	18075.25	18083.37	18082.69	18086.92
2	1	18066.81	18072.56	18073.33	18082.45	18073.47	18077.82
2	2	18071.02	18076.62	18072.85	18080.50	18076.94	18079.58
2	3	18071.89	18077.52	18082.73	18086.38	18098.10	18102.06
3	1	18066.59	18072.33	18073.05	18081.27	18100.95	18106.32
3	2	18070.68	18076.28	18076.18	18073.36	18101.65	18107.02
3	3	18071.89	18077.52	18080.70	18078.23	18114.26	18120.29

Tabela 2

Para o modelo GARCH, o melhor ajuste foi com a especificação GARCH (1,3), que apresentou menor valor tanto de AIC, quanto de BIC. Este resultado sugere que a combinação de uma ordem autorregressiva de 1 e uma ordem de média móvel de 3 é a mais adequada para capturar a dinâmica da volatilidade. Para o modelo TGARCH, que incorpora os efeitos assimétricos na volatilidade, houve divergência entre os modelos com menor AIC e BIC. O modelo TGARCH (2, 2) apresentou menor AIC, com um valor de 18072.85, e BIC de 18080.50, enquanto o TGARCH (3, 2) apresentou um BIC de 18073.36. E por fim, para o modelo EGARCH, que também modela a assimetria na volatilidade, observa-se o modelo EGARCH (1, 2) com menor valor tanto de AIC, quanto de BIC. Assim, para análises subsequentes, foi selecionado estes quatro modelos distintos.

Para avaliar a precisão e qualidade de ajuste dos modelos de volatilidade selecionados, é necessário mensurar a capacidade de predição. Este processo foi realizado utilizando os dados previstos pelo modelo ARIMA, somado com os valores previstos pelos modelos de volatilidade (GARCH, TGARCH e EGARCH) multiplicados por valores aleatórios, segundo a teoria apresentada na Seção 2.3.1. Em seguida, foram calculadas as métricas de ajuste, como MSE (Mean Squared Error), MAE (Mean Absolute Error) e MAPE (Mean Absolute Percentual Error), para cada um dos modelos selecionados. O MSE permite avaliar a variabilidade dos erros quadráticos, enquanto o MAE avalia a magnitude média dos erros absolutos e o MAPE fornece uma interpretação percentual dos erros médios absolutos em relação aos valores observados. As

medidas de ajuste foram calculadas comparando os dados previstos pelos modelos e os valores observados na base de teste, que contempla o período de janeiro de 2018 a dezembro de 2023. Os resultados das métricas permitirão identificar qual modelo oferece uma melhor precisão e adequação aos dados. As métricas de avaliação calculadas são apresentadas na tabela a seguir:

Modelo	MSE	MAE	MAPE
GARCH (1, 3)	253360.5	373.9527	15.57517
TGARCH (2, 2)	250408.2	372.4332	15.57169
TGARCH (3, 2)	577242.4	620.1961	28.09216
EGARCH (1, 2)	259623.5	379.2704	15.69434

Tabela 3

Os resultados indicam que o modelo TGARCH (2, 2) apresenta o menor MSE (265191.2), MAE (372.4332) e MAPE (15.57169) indicando que o modelo possui o menor erro quadrático médio, erro absoluto médio e erro percentual, dentre os 4 modelos testados. Após o TGARCH, o modelo GARCH (1, 3) foi o que apresentou menores valores de MSE, MAE e MAPE, com valores bem próximos aos do modelo TGARCH (2, 2). Na sequência, o modelo EGARCH (2, 2) apresentou valores próximos aos dois modelos, também indicando um bom ajuste. Já o modelo TGARCH (3, 2), apesar de possuir um BIC inferior ao modelo TGARCH (2, 2), apresentou valores significativamente mais altos do que todos os demais modelos, indicando que o modelo não capturou adequadamente a volatilidade da série, refletindo em uma pior capacidade de predição.

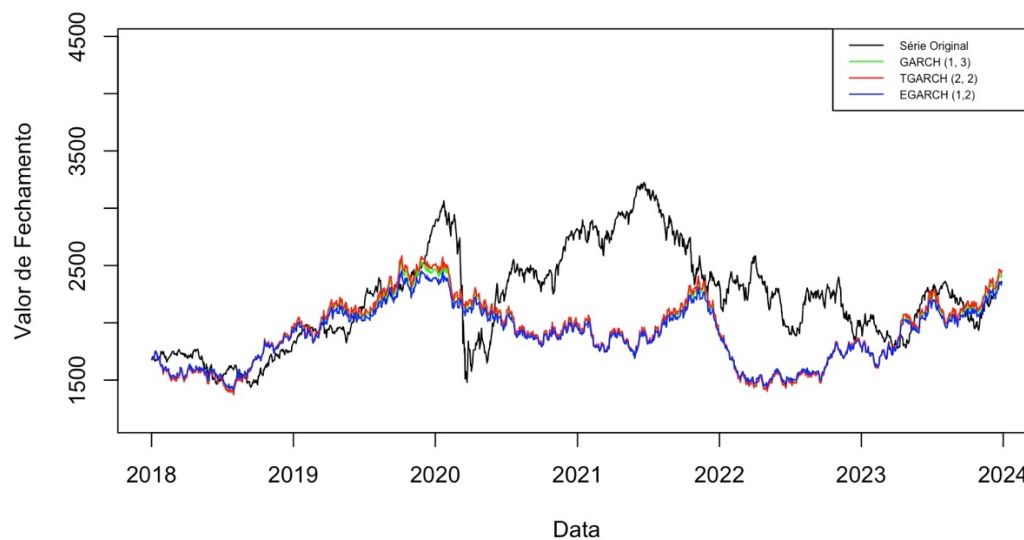


Figura 7

A Figura 7 ilustra a predição dos dados na base de teste, que contempla desde o período de janeiro de 2018 a dezembro de 2023, dos 3 modelos que tiveram as menores métricas (GARCH (1, 3), TGARCH (2, 2) e EGARCH (1, 2)). Observa-se que, em geral, os modelos são bem parecidos e conseguiram capturar relativamente bem os movimentos da série em alguns períodos específicos. Entre janeiro de 2018 a meados daquele mesmo ano, o modelo conseguiu predizer de forma razoável a tendência de queda que ocorreu no período. Após isso, observa-se uma forte alta no índice SMLL, entre meados de 2018 e início de 2020, que pode ser atribuída a uma série de fatores econômicos e de mercado. A aprovação da reforma da previdência e de outras reformas estruturais, redução da taxa Selic no período, inflação controlada, crescimento econômico, IPOs e outros fatores, tornaram o cenário mais atrativo e contribuíram significativamente para essa valorização do índice no período. Esse movimento de valorização também foi capturado pelos modelos até o início de 2020, quando os valores preditos começam a apresentar uma tendência de queda até meados de 2021. Durante esse período, o índice SMLL sofreu uma grande queda no início de 2020 devido a pandemia da COVID-19, até meados de 2020, quando voltou a apresentar uma tendência de alta até meados de 2021. De meados de 2021 até o final deste mesmo ano, os valores preditos pelo modelo apresentaram movimento oposto ao realizado no período, sugerindo uma forte alta, enquanto o índice iniciou uma tendência de queda causada por uma combinação de fatores, como o aumento da inflação, e, conseqüentemente, da taxa de juros e a instabilidade política. Os modelos voltam a capturar corretamente a tendência e a volatilidade do índice no início de 2023 até final desse mesmo ano, sinalizando corretamente uma alta no período.

Apesar das curvas preditas pelos modelos serem bem semelhantes, observa-se que a linha vermelha, representada pelos dados preditos do modelo TGARCH (2, 2), em geral, costuma estar um pouco mais próxima dos valores realizados pelo índice SMLL no período, do que as demais. Isso ilustra o fato de o modelo possuir o menor MSE, MAE e MAPE, indicando ser, entre os modelos analisados, o que melhor identifica e captura o comportamento da série no período.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como objetivo explorar a volatilidade do índice SMLL através dos modelos de volatilidade GARCH e algumas de suas extensões. Os resultados, ainda que de certa forma limitados, concluíram que para casos em que os dados apresentam uma volatilidade assimétrica, os modelos alternativos ao GARCH, que levam esse efeito em consideração, podem ser efetivos em acomodar essas distorções, proporcionando um melhor ajuste.

As limitações deste estudo que serão descritas a seguir, podem ser abordadas em trabalhos futuros para um melhor entendimento do comportamento dos modelos utilizados. A autocorrelação de ordens superiores não foi considerada e isso pode ter impactado de certa forma na modelagem da volatilidade. Modelos mais complexos podem ser capazes de absorver essas autocorrelações e produzir um melhor ajuste da volatilidade. Além disso, estudos de simulação são interessantes e podem ser realizados para que seja possível identificar um padrão de comportamento entre os modelos que estão sendo comparados e obter uma melhor conclusão a respeito de cada um deles.

Outras abordagens podem ser exploradas, como é o caso da inclusão de variáveis exógenas nos modelos. Como se pode observar, o índice SMLL muitas vezes está correlacionado com fatores econômicos, que podem ser incorporados no modelo através de variáveis que sensibilizem melhor os movimentos, proporcionando um melhor ajuste aos dados. Também, uma série de modelos podem ser analisados nesse mesmo contexto. Desde outras extensões do modelo GARCH, como o modelo com comutação markoviana MSGARCH, que permite capturar mudanças abruptas na volatilidade de séries temporais financeiras, até mesmo modelos mais complexos de aprendizado de máquina, como o modelo de redes neurais LSTM (Long Short-Term Memory), que se mostra eficiente para modelagem de séries temporais devido à sua capacidade de capturar padrões e dependências temporais complexas.

REFERÊNCIAS

BOLLERSLEV, T. **Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity** *Journal of Econometrics*. 1986.

ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, 1982.

MADAN, D. B.; WANG, K. The structure of financial returns. *Finance Research Letters*, v. 40, p. 101665, 1 maio 2021.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection Harry Markowitz. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, 1952.

MARQUES, M. I. G. **Aplicação dos modelos GARCH, EGARCH e TGARCH no DAX-30**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2017.

NELSON, D. B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, v. 59, n. 2, p. 347, mar. 1991.

QUIGLEY, L. **Statistical Analysis of the Log Returns of Financial Assets**. 2008.

ZAKOIAN, J.-M. Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 18, n. 5, p. 931–955, set. 1994.

B3 – Brasil, Bolsa, Balcão. **Metodologia do Índice Small Cap (SMLL)**. São Paulo, 2020.

Disponível em:

<https://www.b3.com.br/data/files/4C/70/8E/79/75B217102C51CE07DC0D8AA8/MetodologiaSMLL_PT.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2024.

B3 – Brasil, Bolsa, Balcão. **Manual de Definições e Procedimentos dos Índices da B3**. São Paulo, 2020. Disponível em: <

<https://www.b3.com.br/data/files/CA/A5/9F/28/14F35810F534EB48AC094EA8/Manual%20de%20defini%C3%A7%C3%B5es%20e%20procedimentos%20de%20%C3%8Dndices-PT.pdf>>.

Acesso em: 11 abr. 2024.