

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MOZART FAYAN MICHEL

USO DE MODELAGEM NUMÉRICA COMO FERRAMENTA EXPLORATÓRIA
DE CONCEITOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS: SIMULAÇÃO DE
ESCOAMENTO LIVRE EM CANAL RETANGULAR COM OPENFOAM

CURITIBA

2025

MOZART FAYAN MICHEL

USO DE MODELAGEM NUMÉRICA COMO FERRAMENTA EXPLORATÓRIA
DE CONCEITOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS: SIMULAÇÃO DE
ESCOAMENTO LIVRE EM CANAL RETANGULAR COM OPENFOAM

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Ambiental, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Recursos Hídricos.

Orientador: Prof. Dr. Tobias Bleninger

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Michel, Mozart Fayan

Uso de modelagem numérica como ferramenta exploratória de conceitos da mecânica dos fluidos: simulação de escoamento livre em canal retangular com OpenFOAM / Mozart Fayan Michel. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Ambiental.

Orientador: Tobias Bleninger

1. Mecânica dos fluidos. 2. OpenFOAM (Programa de computador). 3. Modelo numérico. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Ambiental. III. Bleninger, Tobias. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA DE RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **MOZART FAYAN MICHEL**, intitulada: **Uso de modelagem numérica como ferramenta exploratória de conceitos da mecânica dos fluidos: simulação de escoamento livre em canal retangular com OpenFOAM.**, sob orientação do Prof. Dr. TOBIAS BERNWARD BLENINGER, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Abril de 2025.

Assinatura Eletrônica

25/04/2025 13:40:39.0

TOBIAS BERNWARD BLENINGER
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

25/04/2025 14:00:56.0

MAURÍCIO FELGA GOBBI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

26/04/2025 08:38:04.0

ANDRE LUIZ TONSO FABIANI
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

28/04/2025 08:49:29.0

MARCOS CRISTIANO PALU
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças ao apoio e contribuição de diversas pessoas e instituições, às quais registro aqui minha mais sincera gratidão.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, essencial para o desenvolvimento desta pesquisa.

À Universidade Federal do Paraná (UFPR), minha gratidão pelos esforços contínuos em oferecer uma universidade pública de qualidade, fiel à sua missão institucional. Agradeço também pelo apoio aos seus professores e colaboradores, que fazem da UFPR um ambiente acolhedor, transformativo e comprometido com a formação de excelência.

Ao meu orientador, Tobias Bleninger, agradeço pela orientação cuidadosa, pela confiança e pela dedicação ao longo de todo o processo. Seu apoio acadêmico e pessoal foram fundamentais para o amadurecimento deste trabalho e da minha formação como pesquisador.

Aos membros da banca examinadora, minha sincera gratidão por aceitarem o convite para participar deste momento tão importante da minha trajetória. Agradeço pela atenção dedicada à leitura deste trabalho e pelo suporte prestado por meio de correções, sugestões e observações, que certamente contribuirão de forma significativa para o meu crescimento acadêmico e profissional.

Aos meus colegas do laboratório, expresse meu apreço pela convivência diária, com risadas e idéias novas que pelo companheirismo tornam a jornada de pesquisa, um percurso mais leve e enriquecedor.

Agradeço também aos colegas pesquisadores de outros países com quem tive a oportunidade de trocar informações por e-mail. Suas contribuições foram valiosas e ajudaram a aprofundar discussões e superar obstáculos técnicos ao longo do caminho.

Um agradecimento especial a Joel Guerrero e à equipe da Woldynamics, por disponibilizarem materiais excepcionais atualizados que, sem eles, a curva de aprendizado seria ainda mais ingrime.

À minha família, deixo o mais profundo agradecimento pelo suporte incondicional, por investirem nos meus sonhos e me consolarem quando no fracasso. A paciência e o amor de vocês foram fundamentais para que eu pudesse seguir vivo, mesmo quando as dificuldades se acentuaram.

RESUMO

A prática de ensaios experimentais no currículo do ensino em engenharia visa dinamizar o processo de ensino e aprendizagem. No entanto, o investimento e manutenção da infraestrutura costumam ser relegados à segundo plano e os novos currículos simplificados tendem a escolher práticas paliativas como substitutos. De maneira a enfrentar essas restrições, a modelagem numérica encontra-se acessível e tem potencial para simular as práticas laboratoriais através de modelos desenvolvidos em OpenFOAM, uma ferramenta livre e com uma comunidade de desenvolvedores sólida e ampla. Esse conjunto de bibliotecas é utilizado em muitas indústrias, e já ganhou notoriedade e credibilidade no meio acadêmico. Com os modelos definidos, as investigações pelos alunos podem ser executadas com computadores pessoais, em sala ou extra sala, possibilitando ampliar análise e exploração de dados em conjunto com os ensaios. Neste sentido, parte-se da hipótese de que é possível representar numericamente em OpenFOAM a hidrodinâmica do canal físico presente em laboratório, segundo a determinação do conjunto de estratégias numéricas referentes aos modelos que resultam simular o escoamento do canal. Como objetivo geral, pretende-se criar um modelo numérico hidrodinâmico representativo do canal físico com ferramentas de código aberto e passível de ser utilizado enquanto recurso didático na aprendizagem da mecânica dos fluidos no contexto do ensino superior. Após a criação do modelo, pode-se comparar os resultados numéricos com valores medidos em ensaio no canal, e com isso acessar a capacidade disso, obter valores bem próximos dado o potencial do OpenFOAM. O modelo superou em representar os fenômenos hidráulicos de ressalto hidráulico e vertimento.

Palavras-chave: Modelo numérico. OpenFOAM. Ensino de mecânica dos fluidos.

ABSTRACT

The use of experimental procedures in engineering education aims to enhance the teaching and learning process. However, the high cost of investment and maintenance of laboratory infrastructure is often overlooked, leading to the adoption of palliative alternatives in modern curricula. In this context, numerical modeling emerges as a viable, accessible, and effective approach to simulate laboratory practices, particularly through the use of OpenFOAM, an open-source tool widely recognized in both industry and academia.

This dissertation is based on the hypothesis that it is possible to numerically represent, with fidelity, the hydrodynamics of a physical laboratory channel using OpenFOAM. The main objective is to develop a representative numerical model of the channel that can serve as an educational resource for teaching fluid mechanics in higher education.

Two experimental tests were conducted in the laboratory to obtain validation data. The numerical model was then developed and simulated based on the experimental conditions. The numerical results showed good agreement with the measured data, especially in representing the hydraulic phenomena of hydraulic jump and overflow. The discrepancy between the simulated and observed profiles was minimal, demonstrating the potential of OpenFOAM as a teaching and numerical validation tool. It is concluded that the developed model is suitable for educational purposes and can expand students' access to hydrodynamic analysis beyond the physical laboratory.

Keywords: Numerical model. OpenFOAM. Teaching Fluid Mechanics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema do ressalto em canais retangulares por (Melo Porto, 2006).	22
Figura 2 – Classificação de ressalto hidráulico segundo (Chow, 1959).	23
Figura 3 – Aproximação numérica geral de integrais de superfície.	28
Figura 4 – Discretização do termo laplaciano.	28
Figura 5 – Esquema da Interpolação linear.	29
Figura 6 – Esquema geométrico da atuação do correto de ortogonalidade para o gradiente normal.	29
Figura 7 – Discretização do termo advectivo.	30
Figura 8 – Diagrama de Sweby para Limited linear.	31
Figura 9 – Diagrama de Sweby para van Leer.	32
Figura 10 – Diagrama de Sweby para Linear Upwind com limitador de gradiente.	32
Figura 11 – Discretização do termo gradiente.	33
Figura 12 – Passo do algoritmo PIMPLE.	37
Figura 13 – Método descendente.	38
Figura 14 – Método multigrid para cálculo iterativo em todo domínio computacional.	39
Figura 15 – Esquema da bancada com o canal e partes.	42
Figura 16 – Vista isométrica do vertedor com dimensões.	42
Figura 17 – Esquema da vista lateral do canal.	43
Figura 18 – Esquema da vista lateral do canal.	43
Figura 19 – Esquema em vista isométrica do vertedor.	45
Figura 20 – Tabela de experimentos de (Govinda Rao; Muralidhar, 1963).	45
Figura 21 – Esquema em vista isométrica do vertedor.	46
Figura 22 – Malha em vista isométrica	48
Figura 24 – Corte longitudinal, detalhe sobre o vertedor.	49
Figura 23 – Corte longitudinal da malha, com refinamento local.	49
Figura 25 – Corte longitudinal, detalhe sobre o anteparo.	50
Figura 26 – Vista isométrica de montante, com planos transversais em 3 trechos de interesse	50
Figura 27 – Vista isométrica de jusante, com planos transversais em 3 trechos de interesse	51
Figura 28 – Corte transversal sobre vertedor.	51
Figura 29 – Corte transversal sobre região do ressalto.	52
Figura 30 – Corte transversal sobre anteparo.	52
Figura 31 – Aparato numérico de discretização da equação geral	53
Figura 32 – Intervalos de valor de y^+ para os tipos de camada junto a parede.	54

Figura 33 – Recomendações gerais de condições de contorno para escoamento em canal	57
Figura 34 – Sketch de solução para condição de contorno de saída de velocidade e pressão	57
Figura 35 – Experimento para investigar relação de variáveis entre ressalto e anteparo.	58
Figura 36 – Experimento da variação relativa da altura do anteparo em função do número de Froude incidente.	59
Figura 37 – Rotâmetro indicando vazão de ensaio, estimado em 3,75 m ³ /h	60
Figura 38 – Declividade do canal aferida por dispositivo digital	61
Figura 39 – Distância de formação do ressalto do vertedor	61
Figura 40 – Medida da altura do nível d'água a montante do ressalto	62
Figura 41 – Medida da altura do nível d'água a jusante do ressalto	62
Figura 42 – Medida do nível d'água a montante do vertedor	63
Figura 43 – Curva vazão-altura do vertedor	64
Figura 44 – Pallet de cores para energia cinética turbulenta ao longo do canal.	65
Figura 45 – Turbulência avaliada junto ao chão e paredes do canal.	66
Figura 46 – Turbulência avaliada junto ao chão e paredes do canal, maior foco	66
Figura 47 – Perfil da linha d'água na região do vertedor	67
Figura 48 – Perfil da linha d'água na região do anteparo	68
Figura 49 – Perfil de velocidade na região do vertedor.	68
Figura 50 – Perfil de velocidades na região do anteparo.	69
Figura 51 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de	69
Figura 52 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	69
Figura 53 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de	70
Figura 54 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	70
Figura 55 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de	70
Figura 56 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	70
Figura 57 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de	71
Figura 58 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	71
Figura 59 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de	71
Figura 60 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	71
Figura 61 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de	72
Figura 62 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	72
Figura 63 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	72
Figura 64 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	73
Figura 65 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.	73
Figura 66 – Comparativo entre curvas analíticas, medidas de ensaio e perfil numérico.	74
Figura 67 – Cálculo do número de Froude imediatamente a jusante do vertedor.	81
Figura 68 – Cálculo do número de Reynolds para o escoamento no canal.	82

Figura 69 – Cálculo da distância entre a parede e o centro da primeira célula para $y^+ = 90$	83
Figura 70 – Estimativa das dimensões das 5 primeiras camadas a contar do fundo do canal e a soma total.	83
Figura 71 – Números gerais de malha.	84
Figura 72 – Métricas de qualidade de malha.	84
Figura 73 – Planilha de cálculo da curva de remanso M1.	86
Figura 74 – Planilha de cálculo da curva de remanso M3.	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela síntese do estado da arte em trabalhos de investigação física hidrodinâmica em CFD.	18
Tabela 2 – Tabela síntese do estado da arte em trabalhos pedagógicos relacionados a CFD.	18
Tabela 3 – Tabela de classificação dos vertedores em relação a H/B	46
Tabela 4 – Subdicionários de importância para os solvers em <i>fvSolution</i>	53
Tabela 5 – Valores iniciais para variáveis turbulentas.	55
Tabela 6 – Número de Courant e passo de tempo.	56
Tabela 7 – Valores extraídos do experimento de Fonster and Skrinde (1950).	58
Tabela 8 – Dados resultantes do Ensaio 1	60
Tabela 9 – Tabela de vazões e altura de nível medidos sobre vertedor.	63
Tabela 10 – Tabela com valores relacionados a estimativa do coeficiente de descarga	75
Tabela 11 – Tabela com valores numéricos relacionados a estimativa do coeficiente de descarga	75

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
UFPR	Universidade Federal do Paraná
FOAM	Field Operation and Manipulation
VOF	Volume Of Fluid numeric method
DNS	Direct Numerical Simulation
PLIC	Piecewise Linear Interface Calculation
FVM	Finite Volume Method
MVF	Método dos Volumes Finitos
TVD	Total Variation Diminishing
CFL	Courant–Friedrichs–Lewy number
PCG	Preconditioned Conjugate Gradient
GAMG	Geometric-Algebraic MultiGrid
PIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
PbiCGStab	Preconditioned BiConjugate Gradient Stabilized
DIC	Diagonal Incomplete Cholesky
DILU	Diagonal Incomplete LU
C++	Linguagem C orientada a objetos
WSL	Windows Subsystem Linux
CAD	Computer Aided Design
MULES	Predictor-Corrector Semi-Implicit

LISTA DE SÍMBOLOS

Ψ	parâmetro geral: escalar, vetorial ou tensorial
V	Volume (m^3)
ϕ	grandeza arbitrária
ρ	densidade (Kg/m^3)
S_ϕ	termo fonte referente a grandeza arbitrária
U	velocidade do escoamento (m/s)
τ	tensor de tensões viscosas (N/m^2)
p	pressão (Pa)
λ	coeficiente de Lamés
κ	viscosidade volumétrica ($Pa.s$)
ν	viscosidade cinemática (m^2/s)
μ	viscosidade dinâmica ($Pa.s$)
D	tensor taxa de deformação
I	tensor identidade
σ	tensor de tensões de Cauchy
$\overline{\sigma}_t$	tensor de Reynolds turbulento
Q	vazão mássica (m^3/s)
S_0	declividade do canal
R_h	raio hidráulico
n	coeficiente de Manning
y_1, y_2	alturas conjugadas do ressalto hidráulico
F_r	número de Froude
T	tempo (s)
k	energia cinética turbulenta (m^2/s^2)

ω	taxa de dissipação específica (s^{-1})
α	constante indicador de fase
Γ	constante de difusividade
S	área (m^2)
S_f	área na face (m^2)
Δd	distância (m)
$\nabla_n \Psi_f$	gradiente normal da propriedade na face
r	razão entre gradientes
β	limitador beta para estimativa de gradiente
C_o	número de Courant
g	aceleração da gravidade
γ_w	surface tension of water
h	altura do fio de água
y^+	altura adimensional

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	MARCO TEÓRICO	19
2.1	Equações Governantes do Modelo Numérico	19
2.2	Movimento Permanente Gradualmente Variado	22
2.3	Ressalto Hidráulico	22
2.4	Modelagem do Fenômeno da Turbulência	23
2.5	Equação Multifásica	26
2.6	Método dos Volumes Finitos (FVM)	27
2.6.1	Discretização do Laplaciano	28
2.6.2	Discretização Advectiva	30
2.6.3	Discretização do Gradiente	33
2.6.4	Discretização temporal	33
2.7	Algoritmos de solução	34
2.7.1	Resíduo e Tolerância	34
2.7.2	Acoplamento Pressão-Velocidade e Algoritmo PIMPLE	35
2.7.3	Métodos do Gradiente Conjugado, PCG e PBiCGStab	37
2.7.4	Métodos Multi-Malhas	39
3	MATERIAIS E MÉTODOS	41
3.1	Ensaio Físicos	41
3.1.1	Ensaio 1 - Perfil D'água	43
3.1.2	Ensaio 2 - Coeficiente de descarga do vertedor	44
3.2	Modelo Numérico	46
3.2.1	Malha	47
3.2.2	Discretização e solução numérica	52
3.2.3	Modelo do Fenômeno de Turbulência	53
3.2.4	Modelo do Fenômeno Multifásico	55
3.2.5	Condições Iniciais e de Contorno	56
4	RESULTADOS	60
4.1	Ensaio 1 - Perfil D'água	60
4.2	Ensaio 2 - Coeficiente de descarga do vertedor	63
4.3	Modelo Numérico	64
4.3.1	Modelagem da Turbulência	65
4.3.2	Modelo da Interface Multifásica	67

4.3.3	Perfis de Velocidade	69
4.3.4	Vorticidade	72
4.3.5	Difusividade Turbulenta	73
4.4	Comparação Entre Modelos Físico e Numérico	73
4.4.1	Linha d'água	73
4.4.2	Coefficiente de descarga do vertedor	74
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
	Referências	78
	 APÊNDICES	 80
	APÊNDICE A – CALCULO DO NÚMERO DE FROUDE	81
	APÊNDICE B – NÚMERO DE REYNOLDS DO ESCOA- MENTO	82
	APÊNDICE C – ESTIMATIVA DE Y^+	83
	APÊNDICE D – MÉTRICAS DE MALHA.	84
	APÊNDICE E – PLANILHAS DAS CURVAS DE REMANSO M1 E M3	85
	 ANEXOS	 88
	ANEXO A – EQUAÇÕES DO MOVIMENTO NO REFE- RENCIAL CARTESIANO	89
	ANEXO B – ESTIMATIVA DE Y^+	90
	ANEXO C – STEP METHOD	91
	ANEXO D – TRANSPORTE DA VORTICIDADE	92

1 INTRODUÇÃO

A solução numérica de problemas relacionados à fluidodinâmica tem se consolidado como uma abordagem amplamente empregada na engenharia e em diversas outras áreas do conhecimento. Essa técnica apresenta vantagens significativas no que se refere à redução de custos e de tempo, sobretudo quando comparada à construção e à utilização de protótipos físicos para experimentação. Com o avanço da capacidade de processamento computacional (MCDONALD, 2021) e o desenvolvimento de softwares robustos e de código aberto, tornou-se viável a simulação de escoamentos complexos, bem como a visualização e análise dos resultados em formatos interativos e acessíveis.

Nesse cenário, a modelagem numérica não apenas se consolida como uma ferramenta de análise e tomada de decisão, mas também como um recurso pedagógico valioso no processo formativo de profissionais da engenharia. Sua aplicação em disciplinas como Mecânica dos Fluidos e Hidráulica, tanto na graduação quanto na pós-graduação, responde à crescente demanda por soluções inovadoras frente aos desafios relacionados aos recursos hídricos em diferentes contextos.

Estudos diversos apontam as contribuições pedagógicas do uso da modelagem computacional no ensino da mecânica dos fluidos, destacando, entre outros aspectos, o aumento do interesse dos estudantes (SERT; NAKIBOGLU, 2007; CHEN et al., 2023; TIEN; ABRAHAM, 2014), a diminuição do tempo necessário para o desenvolvimento de projetos (ALBAGHDADI, 2019; ELDREDGE et al., 2014; HUNG et al., 2007), bem como a ampliação da compreensão dos conteúdos por meio do uso de recursos visuais e da integração entre teoria e prática (PIERITZ et al., 2004; PINES, 2004; HUNG et al., 2007; NEDYALKOV; WOSNIK, 2016; PAZ et al., 2019; BARBER; TIMCHENKO, 2011; TIAN, 2016).

Diante do potencial da modelagem numérica enquanto ferramenta didática, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de um modelo computacional representativo do canal físico disponível no laboratório da Universidade Federal do Paraná (UFPR), utilizado por alunos da disciplina de Mecânica dos Fluidos II dos cursos de engenharia. A proposta visa permitir a comparação entre os dados empíricos de nível d'água obtidos em ensaios laboratoriais e os resultados numéricos simulados.

Espera-se, com isso, construir um modelo confiável que, futuramente, possa ser utilizado em processos de calibração e validação, culminando na consolidação de uma configuração definitiva. Tal modelo poderá subsidiar o desenvolvimento de diferentes estratégias pedagógicas, tanto em sala de aula quanto em atividades laboratoriais e extraclasse, ampliando os recursos disponíveis para o ensino da mecânica dos fluidos.

A hipótese que orienta esta pesquisa é a de que é possível representar numericamente, por meio do software OpenFOAM, a hidrodinâmica do canal físico existente em

laboratório, a partir da definição de uma estratégia numérica adequada. O OpenFOAM, enquanto conjunto de bibliotecas de código aberto, destaca-se pela robustez e confiabilidade, sendo amplamente utilizado em pesquisas voltadas à hidrodinâmica aplicada e, mais recentemente, em contextos pedagógicos na engenharia. Adicionalmente, ferramentas de pós-processamento como o ParaView oferecem suporte visual relevante ao ensino de disciplinas como Hidráulica e Mecânica dos Fluidos, promovendo maior engajamento dos estudantes diante da linguagem visual, com a qual já estão naturalmente familiarizados. Por fim, almeja-se que esta pesquisa contribua para a familiarização dos estudantes com a modelagem numérica, especialmente no uso de ferramentas de código aberto, favorecendo uma compreensão mais prática e aplicada da dinâmica dos fluidos computacional.

Com o intuito de entender o contexto na qual a presente pesquisa se insere, o levantamento em bases de dados de engenharia, em especial a *Web of Science*, resultou nos artigos relacionados na Tabela 1, sobre a pesquisa fenomenológica da hidrodinâmica de canais, com utilização de códigos os mais variados.

No mesmo sentido, o mesmo levantamento foi feito para artigos que apresentassem aspecto didático em engenharia, com utilização de códigos abertos ou não. A tabela 2 apresenta estes resultados.

Tabela 1 – Tabela síntese do estado da arte em trabalhos de investigação física hidrodinâmica em CFD.

Ano	Autor	Título
2024	Pablo Ouro et al	Benchmark of computational hydraulics models for open-channel flow with lateral cavities
2024	Ehsan Behzad et al	Numerical Simulation of Confluence Flow in a Degraded Bed
2023	Sourav Hossain et al	Unsteady numerical simulation of suspended load in relation to grain-size distribution
2023	Mónica Yineth Lara Pérez et al	Análisis de modelaciones de canal abierto con reducción en OpenFOAM
2023	Muhammad Azizol Mohd Yusof et al	The Application of OpenFOAM in Modelling Flow for Vegetated Channel
2022	Mahsa Mahmoudi et al	Analytical and numerical investigation of mechanical energy balance and energy loss of three-dimensional steady turbulent flows in open-channels
2022	Subhojit Kadia et al	Reynolds stress modeling of supercritical narrow channel flows using OpenFOAM
2022	Yun-Hang Cho et al	Computational fluid dynamics simulation of rough bed open channels using openFOAM
2022	Rawaa Shaheed et al	Numerical Simulation of Turbulent Flow in Bends and Confluences Considering Free Surface Changes Using the Volume of Fluid Method
2022	Zhengruì Shi, Sheng Jin	Numerical Investigation of Hydrodynamics in a U-Shaped Open Channel Confluence Flow with Partially Emergent Rigid Vegetation
2021	Mehdi Heyrani et al	Numerical Modeling of Venturi Flume
2020	Sánchez-Cordero et al	Análisis numérico 3D de las características del flujo en un canal curvo
2020	Öznur Kocaer, Alpaslan Yarar	Experimental and Numerical Investigation of Flow Over Ogee Spillway
2019	Esmail Lakzian et al	Investigation of numerical simulation of non-Newtonian flows dam break and dam breach in open channels using modified VOF method
2015	Arnau Bayon-Barrachina, Petra Amparo Lopez-Jimenez	Numerical analysis of hydraulic jumps using OpenFOAM

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Tabela síntese do estado da arte em trabalhos pedagógicos relacionados a CFD.

Ano	Autor	Título
2024	Hector Rafael Morano Okuno, Guillermo Sandoval Benitez	Effects of Using Computational Fluid Dynamics Simulations on Student Learning During a Mechanical Engineering Course
2022	Serkan Solmaz, Tom Van Gerven	Interactive CFD simulations with virtual reality to support learning in mixing
2019	Manuel Rodríguez-Martín et al	Short CFD Simulation Activities in the Context of Fluid-Mechanical Learning in a Multidisciplinary Student Body
2010	Shin Y. Wong et al	Enhancing Student Learning in Food Engineering Using Computational Fluid Dynamics Simulations

Fonte: elaborada pelo autor.

2 MARCO TEÓRICO

A prática da simulação numérica de fenômenos de transporte, conhecida por dinâmica dos fluídos computacional (CFD), envolve diversas disciplinas e relacioná-las pode ser um desafio (Jiyuan Tu Guan-Heng Yeoh, 2018). Neste capítulo, as equações que governam o escoamento do modelo numérico, conhecidas como equações de Navier-Stokes, são fornecidas com seus termos ajustados para o fenômeno físico proposto. Quando na análise dos resultados, as equações de Saint-Venant para o escoamento permanente variado são úteis em fornecer as curvas de remanso para comparação e portanto, constam dispostas também neste capítulo. Ademais, as teorias específicas para vertedor e ressalto hidráulico acompanham este capítulo visando embasar o entendimento da metodologia e resultados.

Para a inclusão do fenômeno da turbulência o mesmo acontece, onde o modelo proposto para o fechamento do sistema de equações do movimento é o $K-\omega SST$. Em seguida, a abordagem escolhida para captar a interface entre água e ar, conhecida como método *Volume Of Fluid*, é apresentada em seu equacionamento conceitual. Por fim, o processo de discretização e aplicação dos esquemas numéricos inerentes ao Método dos Volumes Finitos (MVF), e a solução das matrizes decorrentes são concisamente apresentados em seus termos mais essenciais, todos utilizados neste trabalho. As equações serão apresentadas no formato vetorial por serem mais gerais e compactas, e a forma cartesiana geralmente mais familiar pode ser encontrada no ANEXO A para consulta.

2.1 Equações Governantes do Modelo Numérico

O Teorema do Divergente, conhecido como Teorema de Gauss, é essencial para a aplicação numérica e tem a seguinte forma:

$$\int_S (d\mathbf{S}\Psi) = \int_V \nabla\Psi dV \quad (2.1)$$

e pode ser interpretado como a integral do divergente do campo Ψ no volume, equivale ao somatório na superfície dos componentes do campo na direção normal a mesma. Na Seção 2.6, o teorema será empregado em conjunção com o método numérico.

Supondo a hipótese do contínuo de massa e utilizando-se da descrição euleriana, as equações do movimento do fluido são derivadas a partir da equação geral da conservação para a grandeza intensiva arbitrária Ψ . Esta, é mais conhecida por engenheiros por refletir diretamente cada termo na equação com o respectivo fenômeno envolvido no transporte.

Por (Holzmann, 2016), temos:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho\phi}_{\text{acumulação no tempo}} = - \underbrace{\nabla \bullet (\rho\mathbf{U}\phi)}_{\text{transporte convectivo}} + \underbrace{\nabla \bullet (D\nabla\phi)}_{\text{transporte difusivo}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{termos fonte}} \quad (2.2)$$

A equação da continuidade ou equação da conservação da massa é obtida para $\phi = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla \bullet (\rho\mathbf{U}) \quad (2.3)$$

onde supõe-se a massa não sendo transportada por difusão ou transformada em energia ($S_\phi = 0$). Ademais, supõe-se escoamento incompressível $\rho = \text{const.}$ e, portanto, a Equação 2.3 do balanço de massa resulta

$$\nabla \bullet \mathbf{U} = 0 \quad (2.4)$$

Para a equação da quantidade de movimento, é necessário saber que o termo difusivo é dado pelo tensor de tensões taxa de cisalhamento ($\boldsymbol{\tau}$), que é a priori desconhecido. Ademais, os termos fontes essenciais são a aceleração da gravidade e a força de pressão. Para $\phi = \mathbf{U}$, a equação assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{U} = -\nabla \bullet (\rho\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla \bullet \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \rho\mathbf{g} \quad (2.5)$$

A água é um fluido newtoniano e assim sendo, a teoria linear de deformação é utilizada para definir o tensor $\boldsymbol{\tau}$. Introduzindo o tensor taxa de deformação $\mathbf{D}$ dado por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \otimes \mathbf{U} + (\nabla \otimes \mathbf{U})^T], \quad (2.6)$$

a forma vetorial geral da equação de Navier-Stokes para quantidade de movimento, supondo fluido newtoniano, é

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{U} + \nabla \bullet (\rho\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = \nabla \bullet \underbrace{\left(2\mu\mathbf{D} + \left[-\frac{2}{3}\mu + \kappa \right] (\nabla \bullet \mathbf{U})\mathbf{I} \right)}_{\text{tensor cisalhante viscoso } \boldsymbol{\tau}} - \nabla p + \rho\mathbf{g} \quad (2.7)$$

onde $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ é o primeiro coeficiente de Lamés ou viscosidade de dilatação, e κ é a viscosidade volumétrica (*bulk viscosity*) associada à dissipação de energia causada por variações no volume em fenômenos compressíveis. Esta última pode ser desprezada para

gases densos e líquidos e assim, obtemos a forma da equação mais comumente encontrada na literatura (Holtzmann, 2022)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{U} + \nabla \bullet (\rho\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = \nabla \bullet \underbrace{\left(2\mu\mathbf{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \bullet \mathbf{U})\mathbf{I}\right)}_{\text{tensor cisalhante viscoso } \boldsymbol{\tau}} - \nabla p + \rho\mathbf{g} \quad (2.8)$$

Com o uso da equação da continuidade 2.3, é possível substituir o gradiente do vetor velocidade $\nabla \bullet \mathbf{U} = 0$ na equação do tensor e deixar os termos que compõem o tensor $\boldsymbol{\tau}$ na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} - \underbrace{\frac{2}{3}\mu \left\{ -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \bullet \nabla \rho \right] \right\} \mathbf{I}}_{\text{termo de dilatação}} \quad (2.9)$$

O segundo termo é chamado de termo de dilatação e refere-se aos fenômenos de expansão e compressão relacionados à densidade (Holtzmann, 2022). Haja vista a hipótese de incompressibilidade adotada $\rho = \text{const.}$, essa parte é removida restando apenas o primeiro termo. Neste, como decorrência da hipótese acima citada, é possível tirar a densidade da derivada e portanto divide-se pela mesma, resultando o tensor de tensões cisalhantes viscosas em:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\nu\mathbf{D} \quad (2.10)$$

Em mecânica dos fluidos, é comum usar o tensor de tensões de Cauchy para obter o tensor cisalhante e a pressão, segundo a relação

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz unidade e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor de tensões viscosas cisalhantes

Assim, dentre muitas formas para a equação da quantidade de movimento, temos a forma conservativa geral com o tensor de tensões de Cauchy:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{U} = -\nabla \bullet (\rho\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla \bullet \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{g} \quad (2.13)$$

2.2 Movimento Permanente Gradualmente Variado

As equações de Saint-Venant para o escoamento permanente unidimensional e não uniforme podem ser apresentadas como por (Franco, 2018):

$$Q = u \cdot A = \text{constante} \quad (\text{conservação da massa}) \quad (2.14)$$

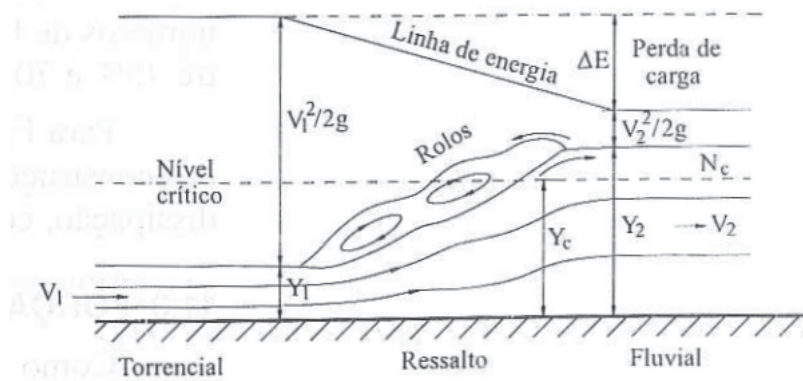
$$u \frac{\partial u}{\partial x} = gS_0 - g \frac{\partial h}{\partial x} - gn^2 \frac{u|u|}{R_h^{4/3}} \quad (\text{conservação da quantidade de movimento em } x) \quad (2.15)$$

onde Q é a vazão, u a velocidade na direção x , g o valor da aceleração da gravidade, S_0 a declividade do canal, n o coeficiente de Manning, A área e R_h raio hidráulico, ambos referentes a secção transversal ao escoamento.

2.3 Ressalto Hidráulico

O ressalto hidráulico em canais retangulares possui formulação bem conhecida, como ilustrado por (Melo Porto, 2006) na Figura 1. A relação entre as alturas conjugadas do ressalto pode ser dada por (Chow, 1959) através da Equação 2.16 abaixo:

Figura 1 – Esquema do ressalto em canais retangulares por (Melo Porto, 2006).



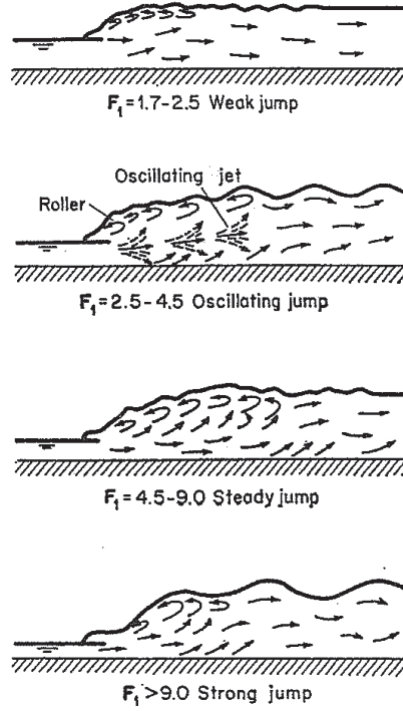
Fonte: (Melo Porto, 2006).

$$\frac{y_2}{y_1} = 1/2 \left(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right) \quad (2.16)$$

onde $F_1 = U_1/\sqrt{gy_1}$ é o chamado número de *Froude*.

O tipo de ressalto investigado foi o ressalto estático, cujo número de Froude reside em $(4,5 < F_1 < 9)$, o qual se enquadra no 3º tipo na Figura 2.

Figura 2 – Classificação de ressalto hidráulico segundo (Chow, 1959).



Fonte: (Chow, 1959).

2.4 Modelagem do Fenômeno da Turbulência

Uma característica relevante do escoamento é avaliar o número de Reynolds. Segundo (Chaudhry, 2022), o escoamento é turbulento se as forças inerciais predominam sobre as forças viscosas. Para escoamentos a pressão atmosférica, como é o caso para canais em superfície livre, o número de Reynolds é dado por (Chaudhry, 2022) como:

$$R_e = \frac{V R_h}{\nu} \quad (2.17)$$

onde V é a velocidade média do fluxo d'água, ν é a viscosidade cinemática da água e R_h o raio hidráulico. De fato, para canais (Chaudhry, 2022) diz que tanto altura hidráulica (*Hydraulic depth*) como raio hidráulico (*Hydraulic Radius*) podem ser usados como comprimento característico para escoamentos livres.

A estratégia adotada para incluir a turbulência no modelo foi através da abordagem de Reynolds (*Reynolds-Averaging*) sobre as equações do movimento, especialmente com o uso da média independente no tempo, onde as flutuações acabam reunidas em um termo apenas. A natureza caótica do escoamento pode, para cada variável, ser apresentada como:

$$\phi(t, x) = \bar{\phi}(x) + \phi'(t, x) \quad (2.18)$$

onde $\bar{\phi}$ é a média independente no tempo e ϕ' as flutuações oscilantes em torno do valor médio. O método de “promediar no tempo” de determinada variável consiste em:

$$\bar{\phi}(x)_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(t, x) dt, \quad (2.19)$$

onde $\phi(t, x)$ é a variável instantânea e $\bar{\phi}(x)_T$ a variável tomada em sua média.

Para obtermos a equação da continuidade média aplicamos esses conceitos à Equação 2.4, e obtemos a equação RANS da continuidade

$$\nabla \bullet \bar{\mathbf{U}} = 0 \quad (2.20)$$

Introduzindo um novo vetor $\mathbf{U}'$ contendo as flutuações das velocidades

$$\underbrace{\rho \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{U}} + \rho \nabla \bullet (\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}})}_{\text{Como na equação 2.8 (com } \rho = \text{const.)}} = \underbrace{\nabla \bullet (2\mu \bar{\mathbf{D}})}_{\bar{\boldsymbol{\tau}}} + \nabla \bar{p} + \rho \mathbf{g} - \underbrace{\rho \nabla \bullet (\bar{\mathbf{U}}' \otimes \bar{\mathbf{U}}')}_{\text{Tensões de Reynolds } \sigma_t} \quad (2.21)$$

onde $\bar{\mathbf{D}}$ define o tensor taxa de deformação, por ponderação de Reynolds, $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ o tensor de tensões viscosas cisalhantes turbulentas.

O tensor de tensões de Reynolds é definido

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_t = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} -\overline{\rho u'_x u'_x} & -\overline{\rho u'_y u'_x} & -\overline{\rho u'_z u'_x} \\ -\overline{\rho u'_x u'_y} & -\overline{\rho u'_y u'_y} & -\overline{\rho u'_z u'_y} \\ -\overline{\rho u'_x u'_z} & -\overline{\rho u'_y u'_z} & -\overline{\rho u'_z u'_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{t_{xx}} & \bar{\sigma}_{t_{yx}} & \bar{\sigma}_{t_{zx}} \\ \bar{\sigma}_{t_{xy}} & \bar{\sigma}_{t_{yy}} & \bar{\sigma}_{t_{zy}} \\ \bar{\sigma}_{t_{xz}} & \bar{\sigma}_{t_{yz}} & \bar{\sigma}_{t_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Com o tensor de Reynolds, a equação da quantidade de movimento turbulenta é

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{U}} + \rho \nabla \bullet (\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) = \nabla \bullet \bar{\boldsymbol{\tau}} + \nabla \bar{p} + \rho \mathbf{g} + \nabla \bullet \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t \quad (2.23)$$

Utilizando o tensor de Cauchy, pode-se obter a equação

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{U}} + \rho \nabla \bullet (\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) = \nabla \bullet \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{g} + \nabla \bullet \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t \quad (2.24)$$

Em analogia ao capítulo anterior, a equação geral

$$\underbrace{\rho \frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi} = -\rho \nabla \bullet (\bar{\mathbf{U}} \bar{\phi}) + \nabla \bullet (D \nabla \bar{\phi})}_{\text{formato anterior}} - \underbrace{\rho \nabla \bullet (\bar{\mathbf{U}}' \bar{\phi}')}_{\text{fluxo escalar turbulento}} \quad (2.25)$$

Para resolver o problema de fechamento das equações, ou seja, igualar o número de equações ao de incógnitas, utilizamos modelos de turbulência para as tensões de Reynolds

e para os fluxos escalares turbulentos (Holtzmann, 2022). O método adotado é o de viscosidade turbulenta (eddy viscosity) de Boussinesq' Eddy, que relaciona a turbulência no escoamento com uma viscosidade maior do fluido. Como bem coloca Holtzmann, a viscosidade molecular é ampliada pela viscosidade turbulenta ou eddy viscosity

$$\overline{\sigma}_t = 2\mu_t \overline{\mathbf{D}} - \frac{2}{3}\mu_t \text{tr}(\overline{\mathbf{D}})\mathbf{I} - \frac{2}{3}\rho \mathbf{I}k \quad (2.26)$$

$$\overline{\sigma}_t = \overline{\tau}_t - \frac{2}{3}\rho \mathbf{I}k \quad (2.27)$$

O tensor de tensões de Reynolds turbulento é igual ao tensor de tensões cisalhantes turbulenta mais um termo. Fertzer (2018) comenta que esse termo, que possui a energia cinética turbulenta, é importante para garantir o rastreamento apropriado do tensor de tensões de Reynolds.

$$\text{tr}(\overline{\sigma}_t) = \text{tr}\left(\overline{\tau}_t - \frac{2}{3}\rho \mathbf{I}k\right) = -2\rho k \quad (2.28)$$

O termo anterior comporta-se como uma pressão (Holtzmann, 2022)

$$k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2}(\overline{u'_x u'_x} + \overline{u'_y u'_y} + \overline{u'_z u'_z}) \quad (2.29)$$

Com a pressão modificada e com a viscosidade efetiva, que resulta do somatório de duas viscosidades, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} &= \mu_1 + \mu_t \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho \overline{\mathbf{U}} + \nabla \bullet (\rho \overline{\mathbf{U}} \otimes \overline{\mathbf{U}}) &= \nabla \bullet \overline{\tau}_{\text{eff}} - \nabla \bullet (p^* \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} \\ \overline{\sigma}_{\text{eff}} &= \overline{\tau}_{\text{eff}} - p^* \mathbf{I} \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho \overline{\mathbf{U}} + \nabla \bullet (\rho \overline{\mathbf{U}} \otimes \overline{\mathbf{U}}) &= \nabla \bullet \overline{\sigma}_{\text{eff}} + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.30)$$

O modelo revisado de Wilcox (1998) utiliza duas equações adicionais para resolver a viscosidade turbulenta. Uma equação para a energia cinética turbulenta k e outra para a taxa específica de dissipação ω . As equações abaixo fecham o problema para solução no modelo $\kappa - \omega$ RANS:

$$\nabla_t \rho k + \nabla \bullet (\rho \overline{\mathbf{u}} k) = \underbrace{\tau^R : \nabla \overline{\mathbf{u}}}_{\text{produção}} - \underbrace{\beta^* \rho \omega k}_{\text{dissipação}} + \underbrace{\nabla \bullet [(\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k]}_{\text{difusão}} \quad (2.31)$$

$$\nabla_t \rho \omega + \nabla \bullet (\rho \overline{\mathbf{u}} \omega) = \underbrace{\alpha \frac{\omega}{k} \tau^R : \nabla \overline{\mathbf{u}}}_{\text{produção}} - \underbrace{\beta \rho \omega^2}_{\text{dissipação}} + \underbrace{\nabla \bullet [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega]}_{\text{difusão}} \quad (2.32)$$

Os coeficientes, κ e ω , não são propriedades físicas e podem ser pensadas como responsáveis pela geração e destruição da turbulência. Ao final, a viscosidade turbulenta pode ser calculada como:

$$\mu_T = \frac{\rho k}{\omega} \quad (2.33)$$

O modelo possui muitos outros coeficientes que inter-relacionam-se de maneira a “fechar” ou “estabiliza” o problema. Esses coeficientes podem ser calibrados através de dados experimentais, simulações do tipo direct numerical (DNS), etc. Para condições iniciais e longe de fronteiras sólidas, a energia cinética turbulenta κ e a taxa específica de dissipação ω podem ser obtidos como:

$$k = \frac{3}{2}(UI)^2 \quad (2.34)$$

$$\omega = \frac{\rho k}{\mu} \frac{\mu_t}{\mu}^{-1} \quad (2.35)$$

A estimativa para estas grandezas depende da física do problema e campanhas visando ampliar o conhecimento destes valores através de tentativa e erro devem compor a vida útil do projeto.

2.5 Equação Multifásica

O presente modelo enquadra-se em uma classificação do escoamento multifásico em relação à morfologia de fase, com interface de superfície da água bem definida, podendo-se afirmar que o sistema encontra-se separado por escoamento de duas fases contínuas (contínuo-contínuo), água e ar.

A abordagem numérica equivalente *Euleriano-Euleriano* resolve dois ou mais fluidos juntos. O sistema pode ser disperso ou separado, e pode dar conta da turbulência, transferência de momento e massa. Em comparação a outras abordagens, esta exige menor poder computacional, porém maior uso de modelos. O método utilizado para o fenômeno multifásico é o *Volume Of Fluid (VOF)*, que rastreia a interface entre dois fluidos imiscíveis, utilizando uma variável escalar fração volumétrica (γ). Células com $\gamma = 1$ estão cheias de água e células com $\gamma = 0$, cheia de ar. As que pertencem ao $0 < \gamma < 1$, possuem ambas fases e a célula resulta de forma difusa.

Por (Guerrero, 2023), a equação de transporte de fase e rastreamento, com compressão de superfície PLIC respectivamente, são

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} \gamma + \nabla \cdot (\mathbf{U}_r \gamma (1 - \gamma)) = 0 \quad (2.36)$$

$$\mathbf{U}_r = \min(c_\gamma |\mathbf{U}|, \max(|\mathbf{U}|)) \cdot \mathbf{n} \quad (2.37)$$

Como mencionado acima, o VOF apresenta resultado difuso para $0 < \gamma < 1$. Por este motivo, o método PLIC (*Piecewise Linear Interface Calculation*), ou cálculo de interface linear por partes, foi adotado (Equação 2.37) para atuar em conjunto com o VOF na construção da superfície da água. A interface separando as duas fases é extremamente fina e praticamente descontínua. Portanto, a densidade através da interface possui um gradiente muito alto. O método PLIC reconstrói a interface dentro da célula, assumindo que ela pode ser aproximada por um segmento de reta ou plano. Em vez de assumir que a interface é reta ou difusa, O PLIC estima a orientação da interface com base no gradiente da fração volumétrica E traça uma reta/plano que preserva o volume correto da fração dentro da célula (Guerrero, 2023, slide 62). Resultados mais robustos são alcançados com este método (Guerrero, 2024).

A interface também exerce tensão superficial na fase líquida (Guerrero, 2023, slide 62). Os efeitos da tensão superficial foram desconsiderados neste trabalho. De acordo com Guerrero (2023, slide 90): “Em escalas elevadas, os efeitos da tensão superficial podem ser desconsiderados”.

2.6 Método dos Volumes Finitos (FVM)

Uma vez que a solução da Equação 2.2 não é possível analiticamente, para qual a geometria e regime de escoamento são complexos neste caso, um método numérico deve atuar sobre o domínio de forma a definir as equações algébricas representantes de cada célula ou volume de controle. Uma vez isto feito, é possível buscar solução aproximada por métodos iterativos para estes volumes.

O método numérico adotado é o Método dos Volumes Finitos (MVF), cujo conceito central é o volume de controle. A Equação 2.1 forneceu a possibilidade de integrar os fluxos na superfície, restando portanto lidar com o balanço dos fluxos nas faces dos volumes de controle. Ou seja, a discretização das equações converte equações diferenciais parciais contínuas em conjuntos de equações lineares de valores discretos, para cada célula ou volume de controle, onde as equações de conservação são aplicadas.

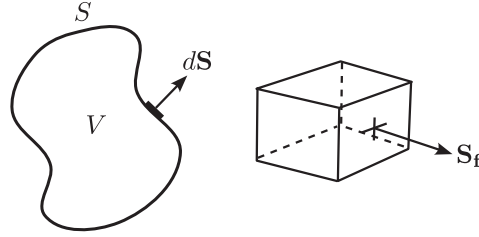
Esse conjunto de equações pode ser escrita em formato matricial como:

$$[\mathbf{A}][\Psi] = [\mathbf{b}] \quad (2.38)$$

onde a matriz $\mathbf{A}$ compreende os coeficientes, $\mathbf{b}$ refere-se aos termos fonte e Ψ é o campo da variável discreta.

A discretização utiliza os operadores diferenciais sobre o Ψ . O teorema de Gauss (Equação 2.1) resultou na integral de superfície que agora é aproximada para uma soma sobre todas as faces da superfície que envolve o volume. A Figura 3 apresenta visualmente este processo, de um volume qualquer para forma compartimentada do volume de controle:

Figura 3 – Aproximação numérica geral de integrais de superfície.



Fonte: Greenshields, 2022.

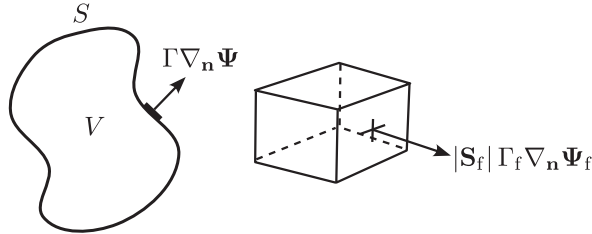
$$\int_S (d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Psi}) \rightarrow \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \boldsymbol{\Psi}_f \quad (2.39)$$

Para o cálculo do fluxo $\mathbf{S}_f \cdot \boldsymbol{\Psi}_f$ no somatório da Equação 2.39, um método de interpolação é necessário para encontrar $\boldsymbol{\Psi}_f$ nas faces.

2.6.1 Discretização do Laplaciano

Novamente, partindo do volume qualquer para um volume de controle discreto, temos para o termo Laplaciano:

Figura 4 – Discretização do termo laplaciano.



Fonte: Greenshields, 2022.

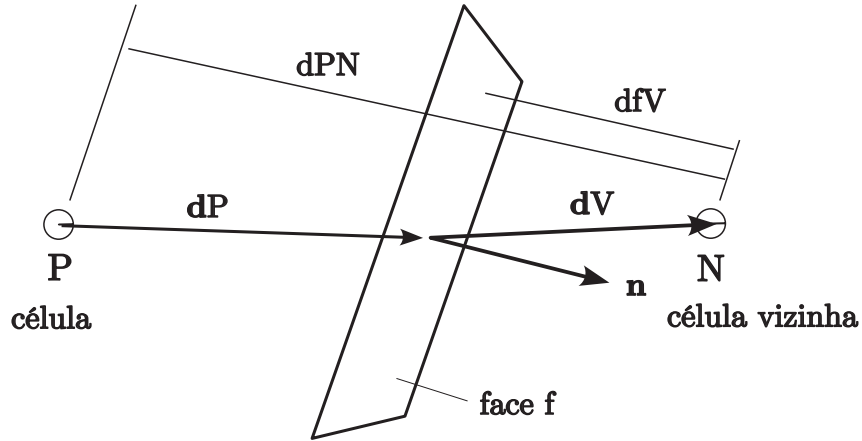
Este termo refere-se a difusão que ocorre através da superfície do elemento de fluido. Uma propriedade do fluido pode ser transportada por flutuações que não são capturadas pela velocidade do *continuum* $\mathbf{u}$ (Greenshields; Weller, 2022).

Aplicando Equação 2.39 para o termo difusivo, obtem-se:

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \boldsymbol{\Psi}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S (dS \Gamma \nabla_{\mathbf{n}} \boldsymbol{\Psi}) \rightarrow \frac{1}{V} \sum_f |\mathbf{S}_f| \Gamma_f \nabla_{\mathbf{n}} \boldsymbol{\Psi}_f \quad (2.40)$$

O volume V e vetor $\mathbf{S}_f$ advém de informações geométricas disponíveis. A difusividade Γ_f nas faces é interpolada segundo esquema linear do centro para a face do volume (Figura 5).

Figura 5 – Esquema da Interpolação linear.



Fonte: Greenshields,2022.

Para malhas irregulares, o esquema (Figura 5) tem equação geral:

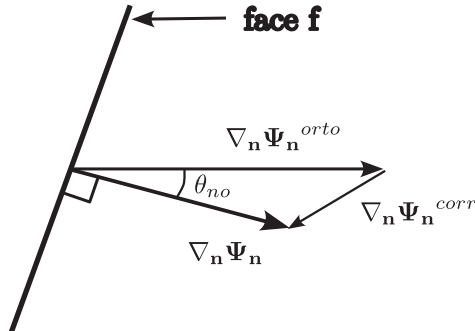
$$\Psi_f = w\Psi_P + (1 - w)\Psi_N \quad (2.41)$$

onde a equação para os pesos w é

$$w = \frac{d_{fN}}{d_{PN}} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_N}{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_P + \mathbf{d}_N)} \quad (2.42)$$

Por sua vez, o gradiente normal a superfície na face é obtido por diferenças finitas com corretor de ortogonalidade, uma vez que o ângulo entre Δd e $\mathbf{n}$ em malhas irregulares pode ser alto (Figura 6). Δd o vetor entre os centros dos volumes discretos e $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal da face.

Figura 6 – Esquema geométrico da atuação do corretor de ortogonalidade para o gradiente normal.



Fonte: Greenshields,2022.

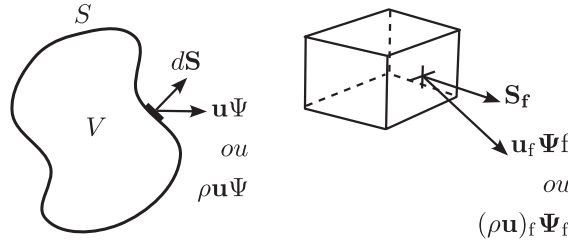
$$\nabla_n \Psi_f = \underbrace{C_{\Delta}^{\text{corr}} (\Psi_N - \Psi_P)}_{\text{ortogonal}} + \underbrace{(\mathbf{n} - C_{\Delta}^{\text{corr}} \Delta \mathbf{d}) \cdot (\nabla \Psi)_f}_{\text{correção}} \quad (2.43)$$

2.6.2 Discretização Advectiva

Este termo refere-se ao transporte com a velocidade do escoamento $\mathbf{u}$, onde o divergente representa o fluxo através da área por unidade de volume.

Da mesma forma, do volume qualquer ao volume de controle discreto, para o termo advectivo temos:

Figura 7 – Discretização do termo advectivo.



Fonte: Greenshields, 2022.

Aplicando a Equação 2.39 para o termo advectivo, obtém-se:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\Psi) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}\Psi) \rightarrow \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{u}_f \Psi_f \rightarrow \frac{1}{V} \sum_f \phi_f \Psi_f \quad (2.44)$$

O cálculo do fluxo volumétrico ($\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{u}_f$) ou mássico ($\mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{u})_f$), requer o uso de interpolação linear para obter $\mathbf{u}_f$ como feito com a constante de difusividade (Equação 2.41).

A obtenção de Ψ_f , no entanto, requer análise. Para este caso, o esquema linear de interpolação não funciona pois não integra a direção do fluxo, o que incorre em instabilidades na solução. Ao contrário, o esquema *UpWind* garante solução porém com grande difusividade, o que diminui a acurácia do modelo.

De maneira a encontrar o equilíbrio entre esses extremos para o transporte convectivo, métodos TVD¹ (*Total Variation Diminishing scheme*) foram empregados. Esquemas TVD possuem um limitador (*limiter*, β) que busca ser otimizado em cada face, baseado no Ψ local. Isso se dá através da função $\beta(r)$, onde r é a razão entre gradientes consecutivos (Greenshields; Weller, 2022), dado por:

$$r = \max \left[2 \frac{\Delta \mathbf{d} \cdot \nabla \Psi}{|\Delta \mathbf{d}| |\nabla_n \Psi_f|} - 1, 0 \right] \quad (2.45)$$

¹ Amir Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, 1983

Como afirma (Greenshields; Weller, 2022): “A ideia se baseia na condição de que se a variação total de Ψ não aumenta no tempo, picos e oscilações relacionadas a *unbounddedness* não vão ocorrer”.

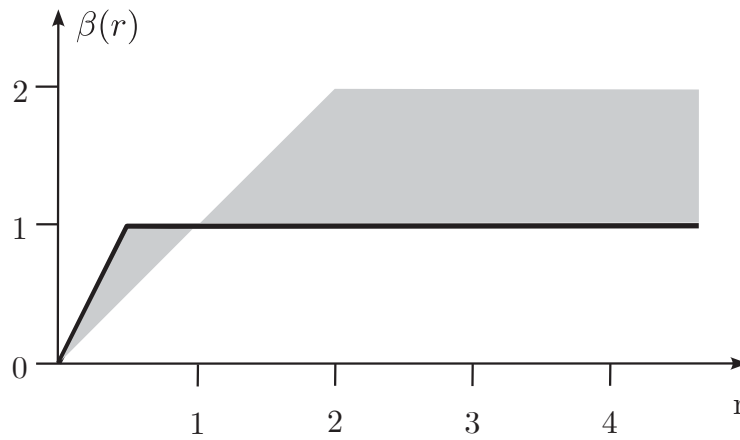
O termo *Boundedness*, em métodos numéricos, pode ser interpretada como o compromisso em manter os valores numéricos dentro de certos limites físicos plausíveis.

A equação e representação no diagrama de Sweby² do três esquemas de convecção usados no modelo numérico são descritos em seguida. Os esquemas numéricos TVD utilizados são:

- *Limited linear*;
- *Van Leer*;
- *Linear UpWind*.

O esquema *Limited linear* mantém-se o mais próximo do esquema linear ainda sendo TVD ($\beta = 1$), antes de limitar-se a upwind como é possível verificar na Figura 8 a linha com borda expessa.

Figura 8 – Diagrama de Sweby para Limited linear.



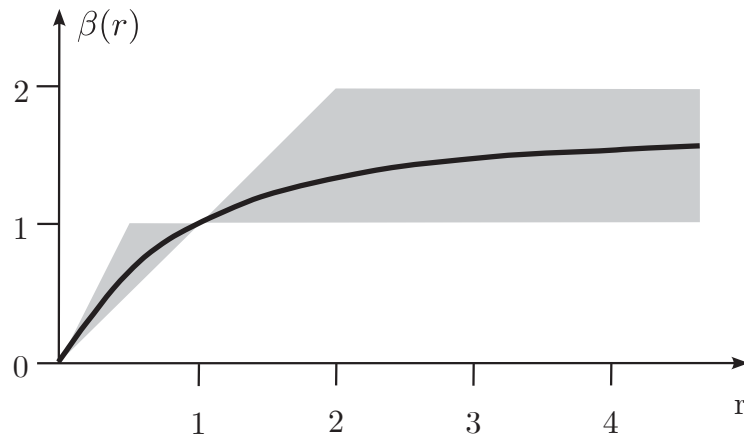
Fonte: Greenshields,2022.

$$\beta = \min(2r, 1) \quad (2.46)$$

O esquema TVD *van Leer* resulta em baixa difusividade e se vale de forte interpolação *downwind*:

² Peter Sweby, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, 1984

Figura 9 – Diagrama de Sweby para van Leer.



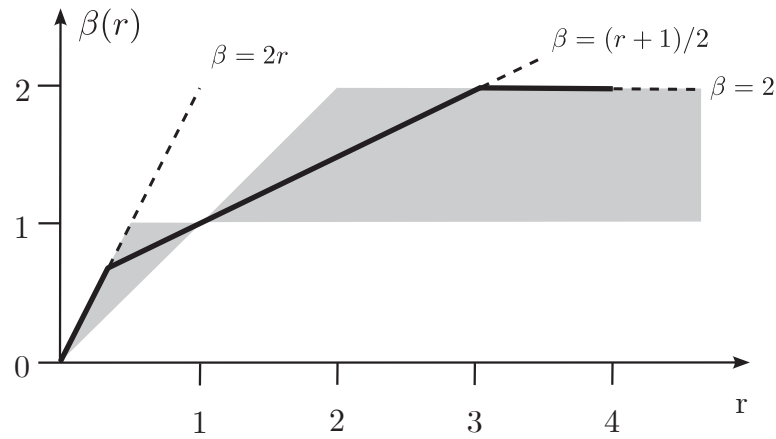
Fonte: Greenshields,2022.

O esquema de van Leer é conhecido por ser o esquema original de limitador para advecção,

$$\beta = \frac{r + |r|}{1 + |r|} \quad (2.47)$$

Por fim, outro esquema utilizado para dar conta da advecção, especialmente para a quantidade de movimento é o *Limited upwind*.

Figura 10 – Diagrama de Sweby para Linear Upwind com limitador de gradiente.



Fonte: Greenshields,2022.

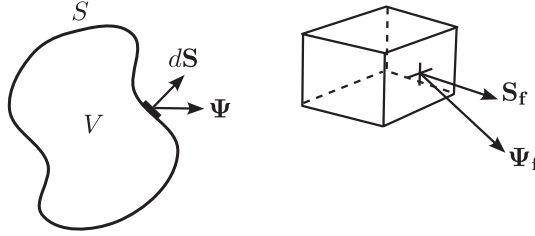
O *Linear UpWind* baseia-se na ampliação dos valores a montante (*Upwind*) para melhor estimar o gradiente. Desta forma, diminui-se a natureza difusiva do método Upwind. Aliado a este método, um limitador de gradiente utiliza a Equação 2.45 para alternar esquemas em trechos ($\beta = 2$ e $\beta = 2r$) quando da ocorrência de gradientes altos, mantendo estabilidade e difusividade em equilíbrio.

Dada a natureza multidimensional de envolver toda vizinhança local de cada volume, fornece boa acurácia. (Greenshields; Weller, 2022)

2.6.3 Discretização do Gradiente

O gradiente é calculado explicitamente através de

Figura 11 – Discretização do termo gradiente.



Fonte: Greenshields, 2022.

$$\nabla \Psi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S (d\mathbf{S} \Psi) \rightarrow \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{S}_f \Psi_f \quad (2.48)$$

A interpolação linear (Equação 2.41) é aplicada na obtenção dos valores de Ψ_f na face, como para a difusividade Γ_f na Subseção (2.6.1). Como visto na seção anterior (Seção 2.6.2), linear upwind com limitador de gradiente é aplicado para aproximar os gradientes.

2.6.4 Discretização temporal

Para discretizar o tempo em intervalos iguais (*steps*), o esquema de *Euler* de primeira ordem é adotado como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \rightarrow \frac{\Psi - \Psi^\circ}{\Delta t} \quad (2.49)$$

onde a derivada é calculada através a diferença entre valor atual (Ψ) e prévio (Ψ°).

No tocante ao passo de tempo Δt escolhido para a simulação, quando avaliada a O passo de tempo Δt tem grande relevância sobre a convergência da solução, uma vez que o MVF é majorativamente implícito em sua solução. O parametro adimensional Número de Courant (CFL), ou condição de [Courant-Friedrichs-Lewy]³ é dada por

$$\text{Co} = \frac{u_x \Delta t}{\Delta x} \quad (2.50)$$

e relaciona a distancia Δx percorrida pelo fluido durante o tempo Δt e o tamanho da célula de malha. Como bem interpreta (Segovia, 2024), indica quantas células o fluido atravessa em cada passo de tempo.

³ Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy, em *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, 1928

2.7 Algoritmos de solução

A próxima etapa no ciclo de solução dos problemas de dinâmica dos fluidos computacional, é resolver os sistemas de equações discretas para os campos escalares e vetoriais. A solução desses sistemas é encontrada por algoritmos solucionadores ou solvers, que resolvem o sistema de equações lineares correspondentes aos pontos discretos no domínio. Esse sistema resulta do equacionamento entre tensores e, portanto, em notação matricial. Assim sendo, a solução de determinada variável pode ser uma matriz individual ou o resultado da articulação entre matrizes diferentes, vinculadas em sequência pelo método computacional. Esse inter-relacionamento é conhecido como acoplamento, e será apresentado juntamente com o algoritmo responsável por fazê-lo, na subseção 2.5.1.

Os métodos escolhidos para resolver tais sistemas são iterativos e, deles espera-se a convergência das soluções. Na prática, a convergência de uma variável será observada pelo parâmetro resíduo, que irá diminuindo ao longo das iterações até chegar a um valor que esteja dentro do intervalo de tolerância escolhido para o objetivo da simulação. Assim, a acurácia do modelo será acompanhada pelo comportamento dos resíduos de cada variável ao longo da simulação. As equações desse parâmetro serão apresentadas em seguida, na subseção 2.5.1.

Por fim, 2 grupos de métodos foram escolhidos para a obtenção das soluções numéricas. O primeiro é o método do gradiente conjugado (PCG), que apresenta reconhecida eficiência para a solução da velocidade, cujas mudanças na simulação são mais locais. O segundo grupo corresponde ao método das malhas-múltiplas (GAMG), cujo desempenho é melhor para a solução da pressão.

2.7.1 Resíduo e Tolerância

O processo iterativo de resolução necessita de algum controle para dizer ao algoritmo quando parar. Esse controle, na prática, é feito pelo resíduo de determinada quantidade de interesse. Formalmente, o vetor resíduo representa a mudança restante na solução, necessária pra fazer a variável exata

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{A} \cdot \Psi_{\text{ex}} - \mathbf{A} \cdot \Psi \\ &= \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \Psi \end{aligned} \quad (2.51)$$

No entanto, o vetor acima gera muitos valores (um por linha) e não é independente da geometria, o que o torna de pouca utilidade prática. Assim, uma medida mais conveniente r , de valor único, que independa da escala geométrica é dado por

$$r = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \Psi\|}{\|\mathbf{A} \cdot \Psi - \mathbf{A} \cdot \bar{\Psi}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \bar{\Psi}\|} \quad (2.52)$$

Ao final de cada iteração, o método compara o resíduo, dado pela Equação 2.45, com o valor da tolerância. A tolerância é o valor ou intervalo, que o modelador aceita como satisfatório para representar a solução da variável em termos numéricos. Em outras palavras, é o valor da diferença entre o "valor ideal" e o valor truncado pelo conjunto de erros numéricos. Quando o valor do resíduo fica menor que a tolerância escolhida, o algoritmo cessa de iterar. Dois formatos de tolerância são utilizados neste trabalho: tolerância absoluta (r_{abs}) e tolerância relativa (r_{rel}). Mais detalhes serão dados no capítulo de Materiais e Métodos.

Como o cálculo dos resíduos (multiplicação de matrizes) implica maior custo computacional, pode-se configurar que o mesmo ocorra a cada determinado número de iterações. Essa técnica pode ser muito útil no começo das simulação, onde geralmente são necessárias várias varreduras sucessivas para convergir. Para os intervalos de tolerância, duas formas de controle do algoritmo são comuns, a tolerância absoluta e a tolerância relativa. Tolerância é um critério de convergência. Difere entre simulações permanentes e não permanentes no tempo. Em resultados, será possível discutir o comportamento do resíduo ao longo da simulação para ambas as modalidades

2.7.2 Acoplamento Pressão-Velocidade e Algoritmo PIMPLE

Com o enquadramento do escoamento em incompressível $\rho = \text{const.}$, a pressão não é mais função das propriedades termodinâmicas, e a equação de estado não pode ser aplicada. Conjuntamente, a equação da continuidade não possui um termo para pressão p , onde não há como avaliar a sua evolução temporal (Oliveira Fortuna, 2020).

Para resolver esse impasse, utiliza-se o PIMPLE, uma combinação de outros dois métodos, SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) e PISO (*Pressure Implicit with Splitting of Operators*). O método resolve iterativamente, ajustando campos de pressão e velocidade até satisfazer continuidade e conservação da quantidade de movimento.

A solução por acoplamento das equações do escoamento significa resolvê-las em conjunto, através da incorporação alternada no termo matricial fonte $\mathbf{b}$ da variável seguinte.

Essas substituições ocorrem entre as equações de movimento, conservação de massa e os corretores. Esses corretores agem sobre o fluxo advectivo ϕ_f e a velocidade $\mathbf{u}$, e objetivam otimizar o valor para próxima iteração, reduzindo assim o tempo de solução.

O vetor velocidade $\mathbf{u}$ possui 3 equações matriciais escalares, uma para cada componente cartesiano, o que é encontrado na literatura como decoupling ou desacoplamento. Portanto, a velocidade é envolvida no método por suas componentes.

O algoritmo tem como partida a seguinte notação da equação do movimento, onde Au é um termo linear em u e $-Hu$ é função de u e outros termos fonte:

$$A\mathbf{u} - \mathbf{H}(\mathbf{u}) \equiv \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) \quad (2.53)$$

A matriz $A.u = b$ é decomposta na soma de 2 termos, Au e $-Hu$, visando o tratamento implícito de u . Esses termos são utilizados para formar a equação da pressão e resolver p no passo seguinte

A abordagem implícita busca solucionar por aproximação numérica discreta, utilizando valores de estado atual e futuro. Já a abordagem explícita, acha valores futuros através do uso de valores atuais.

É importante citar que a equação matricial anterior recebe uma constrição através do fator de relaxação (*under relaxation method*), que limita o quanto a variável pode mudar entre iterações. O uso desses fatores no sistema aumenta a estabilidade, o que é essencial nas primeiras varreduras em estado estacionário. Essa técnica também é aplicada na equação da pressão no passo seguinte

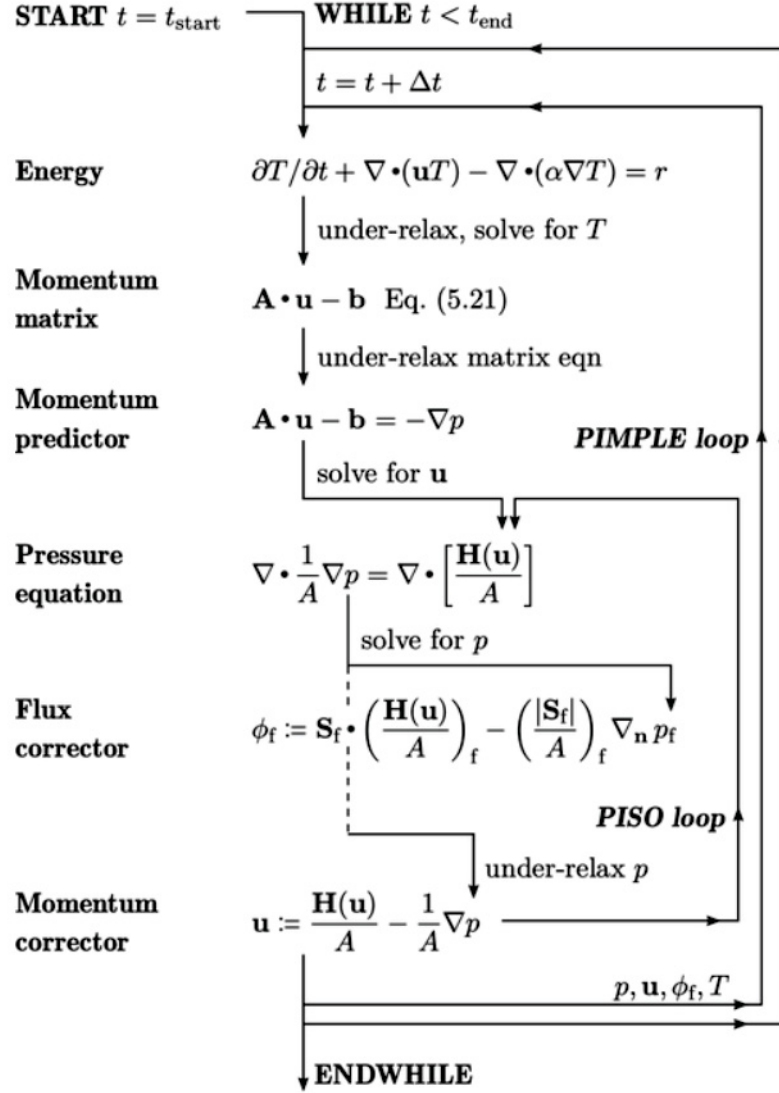
A equação da pressão é apresentada com fator de relaxação. Na prática, o uso é aconselhável porque a ausência de taxa temporal característica do estado permanente implica redução na dominância diagonal da matriz. Esse fato põe em risco a convergência da solução

$$\nabla \cdot \frac{1}{A - A^*} \nabla p = \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{H}^*(\mathbf{u})}{A - A^*} \right] \quad (2.54)$$

As demais partes são o corretor de quantidade de movimento ($u :=$) e o corretor de fluxo ($\phi :=$). O corretor de quantidade de movimento advém do rearranjo da Equação 2.47, e fornece a velocidade u futura através de 2 valores presentes, ou seja, u é calculada explicitamente. A^* é a matriz diagonal extraída de A referente a matriz dos termos da quantidade de movimento.

$$\mathbf{u} := \frac{\mathbf{H}(\mathbf{u})}{A} - \frac{1}{A} \nabla p \quad (2.55)$$

Figura 12 – Passo do algoritmo PIMPLE.



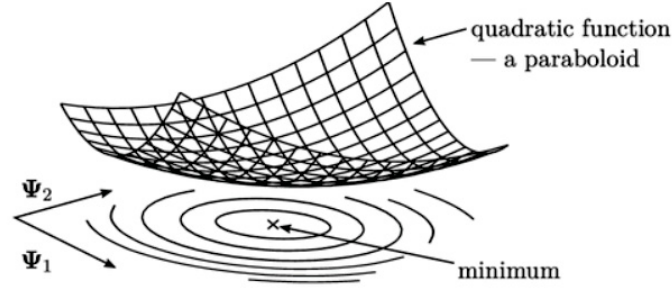
Fonte: Greenshields, 2022.

O corretor de fluxo é deduzido do corretor de momento por interpolação de u para a face das células. Incorporando a força de corpo b , presente na equação da quantidade de movimento, temos, de forma sucinta, o fluxo de trabalho do algoritmo na Figura ??.

2.7.3 Métodos do Gradiente Conjugado, PCG e PBiCGStab

Durante a solução, quando muitas iterações são necessárias para convergir, os métodos descendentes (*Descent Methods*) são uma boa alternativa. Na Figura 13, pode-se ver como as equações são resolvidas como um problema de minimização (Greenshields; Weller, 2022). O método submete as equações a forma quadrática e encontra o valor mínimo.

Figura 13 – Método descendente.



Fonte: Greenshields, 2022.

Como condição para a existência do mínimo, a matriz A deve ser simétrica ($A = A^T$) e positiva-definida ($v^T A v > 0$). Estas condições garantem unicidade, estabilidade e convergência mais rápida para este grupo de métodos iterativos.

Dentro desse grupo, o método do gradiente conjugado com pré-condicionamento (*Preconditioning Conjugate Gradient*) pode aumentar drasticamente a convergência. Segundo (Greenshields; Weller, 2022), o método do gradiente conjugado (CG) é o mais proeminente algoritmo para resolver sistemas esparsos. Se baseiam por buscarem eficientemente o valor mínimo da forma quadrática, em direções que são conjugadas com A . Infelizmente, o PCG requer que a matriz A seja simétrica.

O pré-condicionamento é uma técnica que visa otimizar o número condicional da matriz ($k = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$), assim aumentando a taxa de convergência. Ou seja, o pré-condicionador é uma transformação aplicada ao sistema linear 2.56 que fornece equação equivalente a original, porém “numericamente” mais homogênia. A melhor convergência corresponde ao valor de $k = 1$, e portanto, uma matriz M^{-1} que transforme o lado esquerdo da Equação 2.56 o mais próximo possível da matriz unitária (Greenshields; Weller, 2022).

$$(M^{-1} \cdot A) \cdot \Psi = M^{-1} \cdot b \quad (2.56)$$

Para a solução de matrizes simétricas, os pré-condicionadores do grupo DIC (Diagonal Incomplete Cholesky) são usados para obter a M^{-1} . Este tipo acelera a convergência de métodos como o PCG e portanto, escolhido para atuar junto ao mesmo.

Quando a matriz é assimétrica devido aos termos convectivos, a alternativa de método que lida com essa assimetria é o PBiCG, ou *preconditioned biconjugate gradient stabilized*. Este método complementa os cálculos dos resíduos e investiga direções do método gradiente conjugado com um segundo conjunto de cálculos para a transposta de A (Greenshields; Weller, 2022). Em outras palavras, é uma versão pré-condicionada do método Gradiente Bi-conjugado (BICG) generalizado para matrizes assimétricas.

Adicionalmente, o pré-condicionador DILU (Diagonal Incomplete LU decomposition) é utilizado com o PBiCG, onde a fatoração incompleta prioriza os termos na

diagonal reduzindo o custo computacional. Costuma ter desempenho elevado no transporte convectivo, turbulento e multifásico (Guerrero, 2023).

Assim, os métodos de solução e condicionadores para sistemas matriciais:

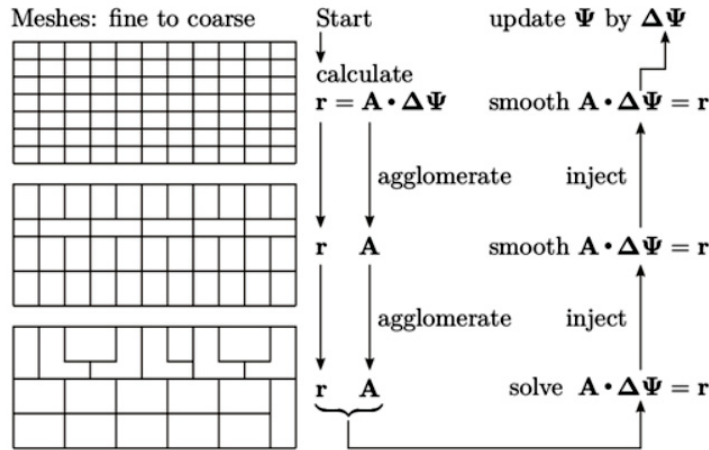
- simétrico, PCG com DIC;
- assimétrico, PBiCGStab com DILU.

2.7.4 Métodos Multi-Malhas

Os métodos da seção anterior resolvem o campo com apenas algumas iterações, onde as mudanças em cada ponto são influenciadas somente por pontos próximos. Ou seja, são eficientes em resolver as equações localmente, a velocidade e o termo advectivo na equação do transporte.

Já a equação da pressão não possui nem uma taxa temporal e nem um termo advectivo. Um distúrbio em qualquer ponto influencia a solução em todo domínio instantaneamente (Greenshields; Weller, 2022). Portanto, um método que transfira mudanças no domínio de maneira precisa e eficiente torna-se compulsório.

Figura 14 – Método multigrid para cálculo iterativo em todo domínio computacional.



Fonte: Greenshields, 2022.

O método para tal tarefa é o GAMG, *geometric agglomeration - algebraic multigrid*, que executa 2 processos principais em sequência. Na figura 14, o agrupamento de células (sentido descendente) é chamado de aglomeração e define a estrutura das sucessivas malhas grosseiras (Greenshields; Weller, 2022). Durante a aglomeração, os valores de resíduo r e A (matriz resultante da aglutinação dos termos da matriz original) são calculados para cada estágio. Ao final da aglomeração, o campo é calculado em termos do resíduo r com muita rapidez, dado o menor número de células/equações.

No segundo processo (sentido ascendente na Figura 14, esses valores são “injetados” e “suavizados” ao longo do processo inverso à aglomeração em cada estágio. O retorno fornece valores gerais mais funcionais ao processo iterativo e sem ruídos. Os valores injetados servem de condição inicial para o problema e portanto, transportam valores com grande precisão para todo o domínio.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

O materiais utilizados na pesquisa envolveram uma estação de processamento (*desktop*) e uma bancada experimental em laboratório, onde o equipamento foi utilizado para 2 ensaios diferentes. O computador executou todas as etapas do pré ao pós tratamento do modelo numérico, e o modelo físico do canal permitiu medição sobre os dois ensaios definidos.

A metodologia escolhida se valeu da comparação de variável entre modelo físico, modelo numérico e cálculo analítico. Ao confrontar os resultados das 3 vias investigativas, espera-se conhecer a capacidade do modelo numérico em reproduzir o escoamento definido em ensaio. Portanto, o desenho de pesquisa tem enfoque quantitativo experimental.

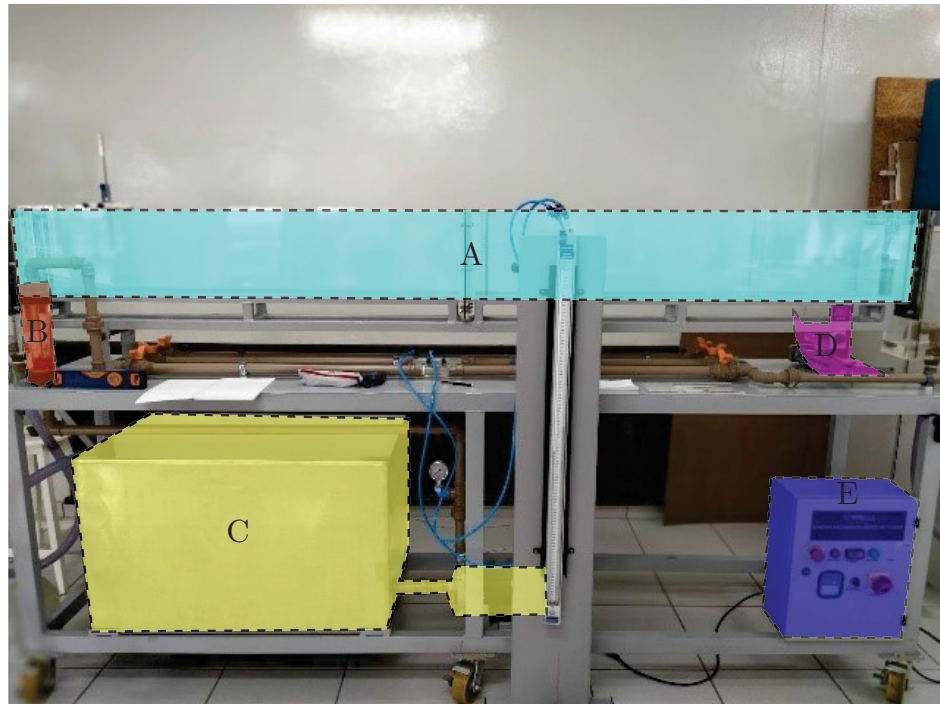
Na Seção 3.1, os materiais e métodos de dois ensaios físicos em laboratório são descritos, e por fim, o modelo numérico é apresentado em suas partes essenciais na Seção 3.2.

3.1 Ensaios Físicos

O canal físico, modelo BA-0129, foi fabricado pela empresa WIDETECH AUTOMAÇÃO e visa a realização de práticas demonstrativas relacionadas à hidráulica e hidrodinâmica de canais. No contexto do laboratório, ele serve ao propósito de atividades práticas de disciplinas de mecânica dos fluidos.

As partes componentes do sistema são o canal em acrílico, estrutura metálica de suporte (formato de bancada), conjunto moto bomba com reservatório, tubulações e válvulas. Apenas os componentes do sistema que interessam às condições hidrodinâmicas no canal foram reproduzidos no modelo numérico. O canal possui 3 metros de comprimento, largura de 15 cm e altura máxima de 30 cm. Possui um sistema de elevação para controle da inclinação do canal, cujo ajuste imediato é feito por botões na interface do amostrador digital. Após a alimentação elétrica ser ativada, o controle elétrico permite a regulação da vazão através do aumento da rotação da bomba pelo painel.

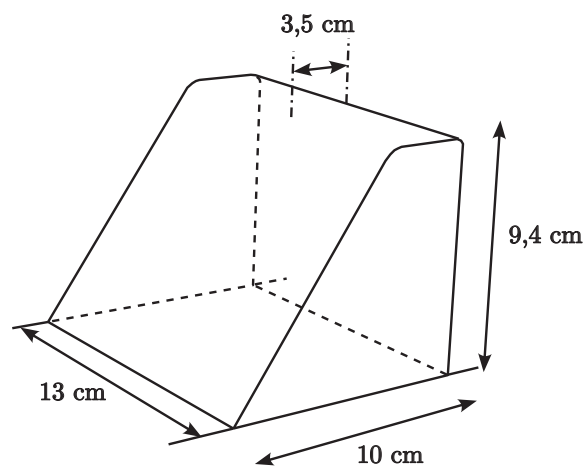
Figura 15 – Esquema da bancada com o canal e partes.



Fonte: O Autor.

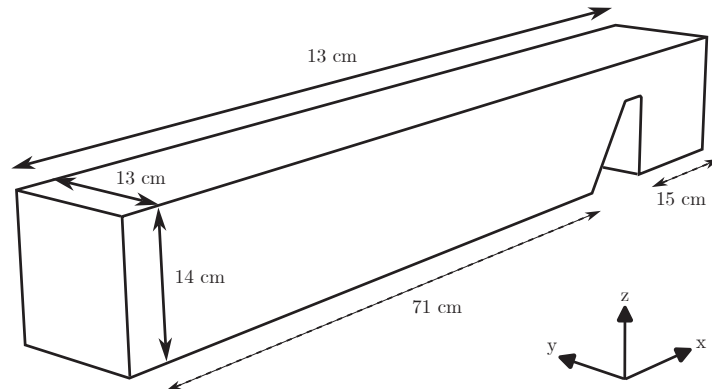
Com a finalidade de incluir os regimes sub e supercrítico de escoamento, um vertedor foi alocado no canal, como mostra a Figura XX. O objetivo foi induzir o aparecimento de ressalto hidráulico a jusante, ao mesmo tempo que permite investigar o vertimento. Assim, pontos de importância hidráulica ao longo do canal foram definidos para medição dos fenômenos acima referidos, indicados na Figura XX como h_1 , h_2 , h_3 e h_4 .

Figura 16 – Vista isométrica do vertedor com dimensões.



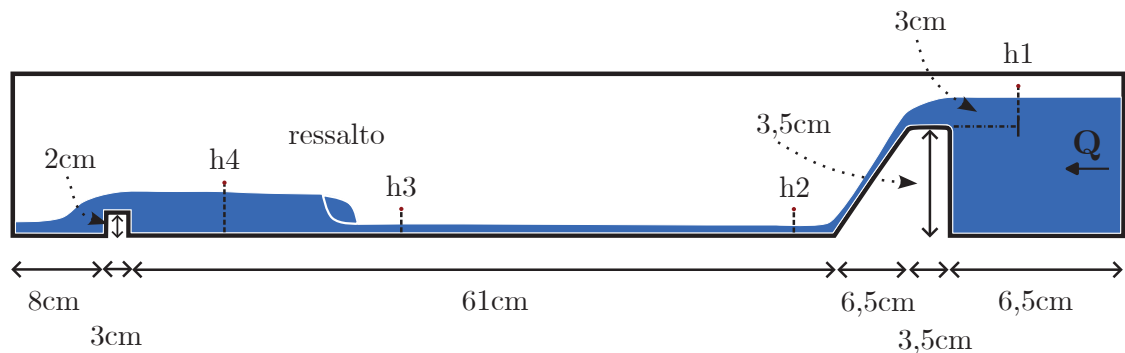
Fonte: O Autor.

Figura 17 – Esquema da vista lateral do canal.



Fonte: O Autor.

Figura 18 – Esquema da vista lateral do canal.



Fonte: O Autor.

Dois ensaios experimentais diferentes foram definidos, cada qual com objetivo próprio. O ensaio 1 pretende, em regime permanente de escoamento, fornecer o perfil do fio d'água através de 4 pontos ao longo do canal, h_1 , h_2 , h_3 e h_4 .

O ensaio 2 visa a análise do coeficiente de descarga do vertimento através da curva altura-vazão, tomadas em h_1 .

A vazão é aferida pelo rotâmetro e as medições de nível feitas com régua milimétrica comum de 30 cm, de material plástico.

3.1.1 Ensaio 1 - Perfil D'água

O ensaio 1 foi determinado para alcançar um escoamento em estado permanente, que permitiu a medição de 4 alturas ao longo do perfil d'água no canal, de montante a

jusante, como apontado na Figura 18:

- ponto 1 a montante do vertedor;
- pontos 2 e 3 a jusante do vertedor, na região supercrítica de escoamento do ressalto hidráulico;
- ponto 4 a jusante do ressalto, na região subcrítica de escoamento do ressalto hidráulico.

Para a investigação da possibilidade de formação do ressalto hidráulico estático a jusante do vertedor, as vazões foram incrementadas igualmente através do regulador de rotação da moto-bomba a cada $0,5 \text{ m}^3/\text{h}$. Para o ressalto manter-se confinado na mesma posição, o escoamento deve ser permanente e portanto, vazão e declividade fixas. Quando o equilíbrio dinâmico é estabelecido e o ressalto permanece por 5 minutos no mesmo ponto, a posição e a vazão são determinados.

Assim se deu pois há uma limitação da capacidade de drenagem de jusante e portanto, o equilíbrio deveria ser alcançado em consonância com essa vazão máxima de saída. Do contrário, se a vazão de montante continuasse a aumentar, esse desbalanço acabaria por afogar o escoamento no vertedor. Portanto, a vazão em questão é a vazão de equilíbrio que permite o escoamento permanente variado.

A medição de nível altimétrico se deu visualmente por leitura de régua métrica em centímetros, disposta ortogonalmente ao sentido do escoamento, alinhada à seção de interesse.

3.1.2 Ensaio 2 - Coeficiente de descarga do vertedor

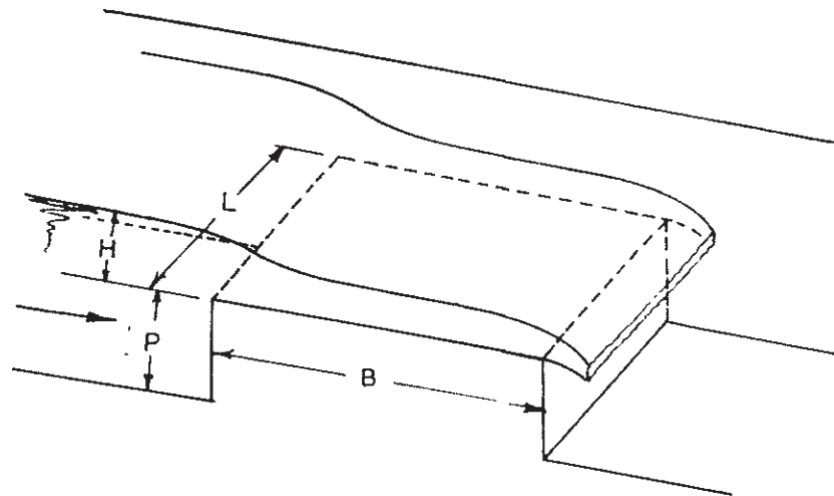
O ensaio 2 pretendeu obter uma equação de descarga com a medição de 10 pontos de nível altimétrico para 10 respectivas vazões.

Para estimativa do coeficiente de descarga, os trabalhos de (Govinda Rao; Muralidhar, 1963) serviram ao propósito da presente pesquisa pela importância que ocupam na investigação de escoamentos com vertedouros de soleira espessa. O esquema na imagem, pertencente ao autor, ilustra a equação 3.1:

A equação adotada para relacionar vazão e cota é:

$$Q = CLH^{3/2} \quad (3.1)$$

Figura 19 – Esquema em vista isométrica do vertedor.



Fonte: (Govinda Rao; Muralidhar, 1963).

Em (Govinda Rao; Muralidhar, 1963), mostrou-se pelos resultados dos experimentos que:

$$C = f[H/B] \quad (3.2)$$

onde H é a cota em relação a soleira e B , o comprimento no sentido do fluxo.

Com a verificação sobre a tabela dos experimentos de (Govinda Rao; Muralidhar, 1963), as relações geométricas permitiram enquadrar o presente trabalho no experimento "series 3", onde a relação H/B está muito próximo a unidade.

Figura 20 – Tabela de experimentos de (Govinda Rao; Muralidhar, 1963).

SERIES	HEIGHT OF THE WEIR P in ft.	WIDTH OF THE WEIR B in ft.	RATIO H/P	RATIO H/B	NO. OF TESTS
1	2	3	4	5	6
1	1.002	0.333	0.103-0.631	0.311-1.896	12
2	1.005	0.500	0.108-0.712	0.215-1.431	12
3	1.009	0.750	0.112-0.734	0.151-0.988	15
4	0.992	1.00	0.103-0.756	0.103-0.756	10
5	1.006	2.00	0.109-0.819	0.055-0.412	26
6	1.012	3.00	0.154-0.802	0.052-0.270	16
7	1.017	4.00	0.167-0.848	0.043-0.216	17
8	1.007	5.00	0.138-0.903	0.028-0.182	17
9	1.007	7.00	0.120-0.881	0.024-0.127	17
10	0.995	10.00	0.171-0.804	0.017-0.080	18

Fonte: (Govinda Rao; Muralidhar, 1963).

Ademais, (Govinda Rao; Muralidhar, 1963) conclui que para $0,45 < H/B < 1,5$ at $1,9$, o coeficiente C varia conforme a seguinte relação:

$$C = 0,64(H/B) + 2,63 \quad (3.3)$$

e que a relação $H/B = 1$ situa-se como *Narrow-crested weir*, não *Broad-crested weir*, como previamente se assumia.

Tabela 3 – Tabela de classificação dos vertedores em relação a H/B

tipo	limite inferior	razão	limite superior
Long-crested weir	$0 <$	H/B	$= < 0,1$
Broad-crested weir	$0,1 = <$	H/B	$= < 0,4$
Narrow-crested weir	$1,4 = <$	H/B	$= < 1,5$ a $1,9$
Sharp-crested weir	$1,5$ a $1,9 = <$	H/B	não há limite superior

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Modelo Numérico

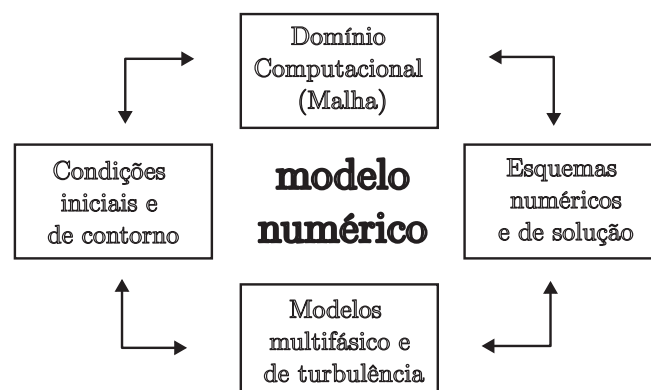
Para o desenvolvimento do modelo, utilizou-se a versão 11 do *OpenFOAM*, desenvolvido e distribuído pela fundação OpenFOAM. É um conjunto de bibliotecas em *C++* que resolve uma variedade de problemas que envolvam equações diferenciais, e possuem 2 distribuições principais. Foi adotado neste trabalho por ser código livre e por seu potencial. Possui enorme comunidade de desenvolvedores distribuídos entre academia e indústria. A distribuição *Linux OpenSUSE 15.5* foi escolhida como sistema operacional e o recurso *Windows Subsystem for Linux (WSL)* do *Windows 11* foi instalado e executado para a concepção e processamento do modelo.

O pós-processamento, a etapa onde os resultados da simulação são visualizados e analisados, foi feito com a ferramenta *Paraview 5.11.2*.

Para a criação da geometria subsidiária à construção das malhas, a solução *CloudCAD OnShape* foi utilizada. Dentre outras vantagens, como parametrização, o armazenamento em nuvem permitiu desenvolver o sólido através do navegador sem necessidade de instalação.

As 4 partes essenciais a construção do presente conceito numérico do modelo são:

Figura 21 – Esquema em vista isométrica do vertedor.



Fonte: (Govinda Rao; Muralidhar, 1963).

3.2.1 Malha

A geração de malha é um processo iterativo, que em média demanda 80% do tempo destinado ao ciclo de CFD (Guerrero, 2020). Da malha depende a convergência da solução e a qualidade dos resultados.

O desenvolvimento das malhas foi executado pelo utilitário nativo do ambiente OpenFOAM, snappyHexMesh. Como não há interface gráfica nesse programa, as formas complexas foram geradas e importadas em outra aplicação *CAD (Computer Aided Design)* chamada *OnShape*. Onshape é uma solução de plataforma de projeto geométrico na nuvem, que possibilita a atualização paramétrica dos desenhos ao mesmo tempo que não demanda instalação.

As peças tridimensionais em Onshape foram criadas no plano bidimensional, do qual são “*extrudadas*”. Em outras palavras, a forma 2D é ortogonalmente criada em um terceiro eixo, ganhando forma de poliedro regular. Ao final desse processo, a peça é exportada em formato *.stl*.

Em seguida, um gerador de blocos simples *blockMesh*, foi utilizado como “pano de fundo” com a função de envolver a superfície complexa e permitir o algoritmo do snappyHexMesh iniciar a “quebra” da malha em blocos menores. O snappyHexMesh é de fato a ferramenta central na produção da malha computacional para o modelo. É um *script* divisor de malha que refina utilizando a forma hexaédrica como referência para a discretização (Guerrero, 2020). Foi criado para geometrias complexas e possui múltiplos dicionários que governam basicamente 3 processos sucessivos:

1. *castellation*, responsável pelo refinamento de malha;
2. *snap*, onde as superfícies em torno da geometria ganham tratamento iterativo de corte e adaptação;
3. *addLayers*, onde camadas são incluídas de forma a finalizar a malha;
4. *meshQuality*, controles de qualidade definidos são checados para a malha resultante.

Os dicionários a serem alimentados encontram-se no arquivo *snappyHexMeshDict*. A malha gerada pode ser encontrada no diretório *constant/PolyMesh* dentro da pasta do caso.

Com a malha finalizada, é importante neste estágio definir as superfícies de fronteira do modelo. Para tanto, deve-se editar essas informações no dicionário ou arquivo *boundary*, localizado também no diretório *constant/polyMesh*. Na tabela abaixo constam os nomes dados a essas superfícies, também conhecidas como *Patches*.

No presente trabalho, 3 critérios de qualidade foram fixados segundo (Guerrero, 2023), para conferir qualidade e flexibilidade a malha:

- Ortogonalidade (*Non-orthogonality*) = 75;

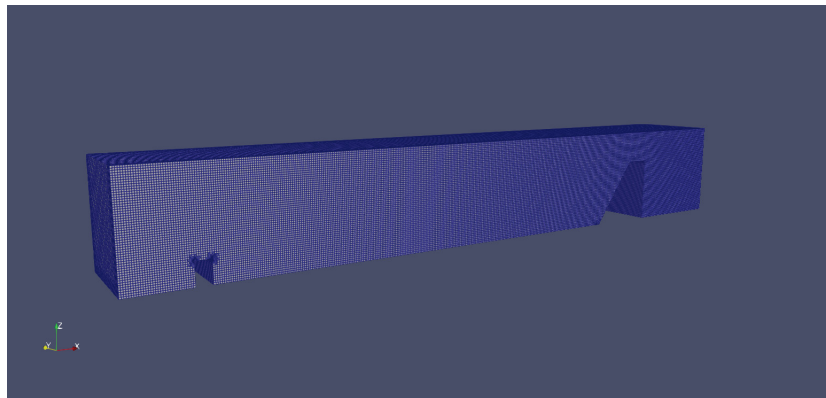
- Desvio angular (*Skewness*) = 8 e;
- Taxa de aspecto (*Aspecto ratio*) a critério do modelo de turbulência.

O subdicionário "*quality metrics*" impõe ao algoritmo valores mais ou menos restritivos para criação da malha, no qual apenas não ortogonalidade foi utilizado. O utilitário *checkMesh* informa ao usuário os índices de qualidade da malha, e podem ser encontrados no D.

A malha possui 5 camadas, chamadas especificamente de *camadas limite*, dispostas sobre a base do canal (*patch floor*). A primeira camada possui 4 mm entre o patch e o centro da primeira célula. Esse valor corresponde ao valor de y^+ , estimado segundo metodologia apresentada na Seção tal. Após, uma taxa de crescimento de 1,2 vezes define os valores relativos de dimensão para as próximas células, tomadas na direção ascendente do eixo z. Informações sobre o número de células e outra métricas da malha podem ser verificados no Apêndice ??.

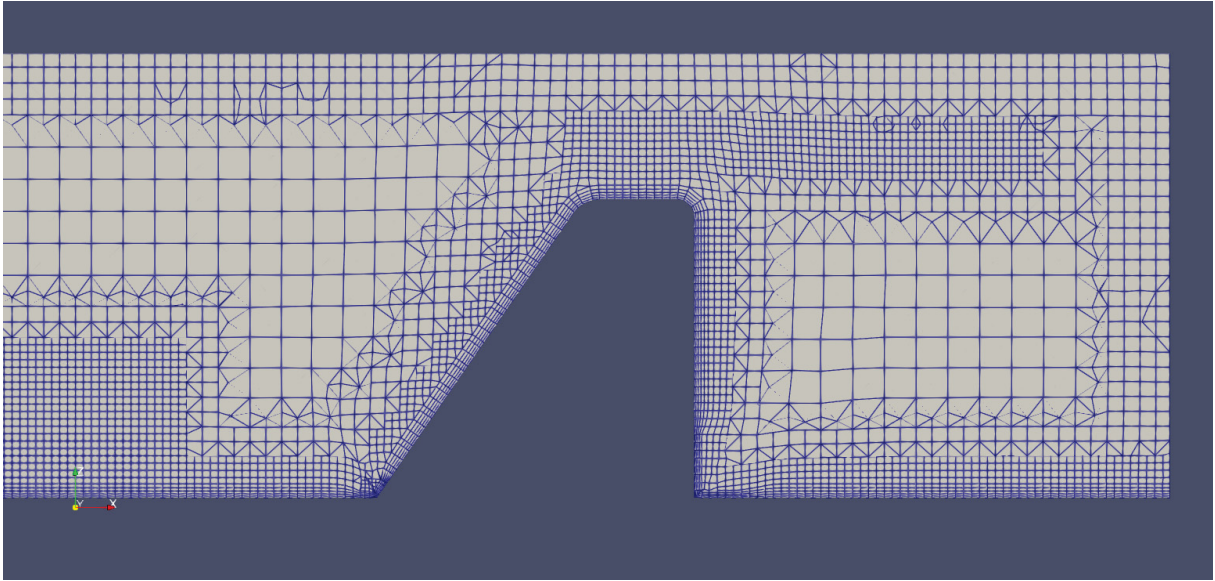
Para garantir que ocorram os fenômenos esperados, vertimento e ressalto, foi necessário o refino local nas regiões onde se espera que ocorram os fenômenos. Esse refino foi feito pelo subdicionário *refinementRegion* e o valor conjunto total dessa camada resulta em 6,5 cm, como é possível verificar no Apêndice C.

Figura 22 – Malha em vista isométrica



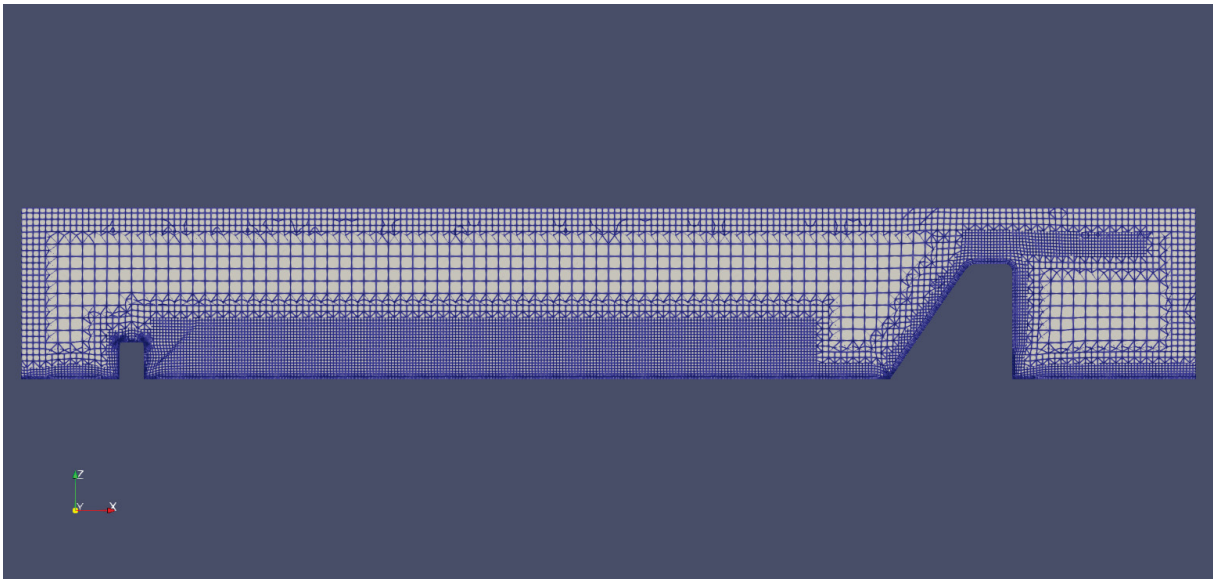
Fonte: O autor.

Figura 24 – Corte longitudinal, detalhe sobre o vertedor.



Fonte: O autor.

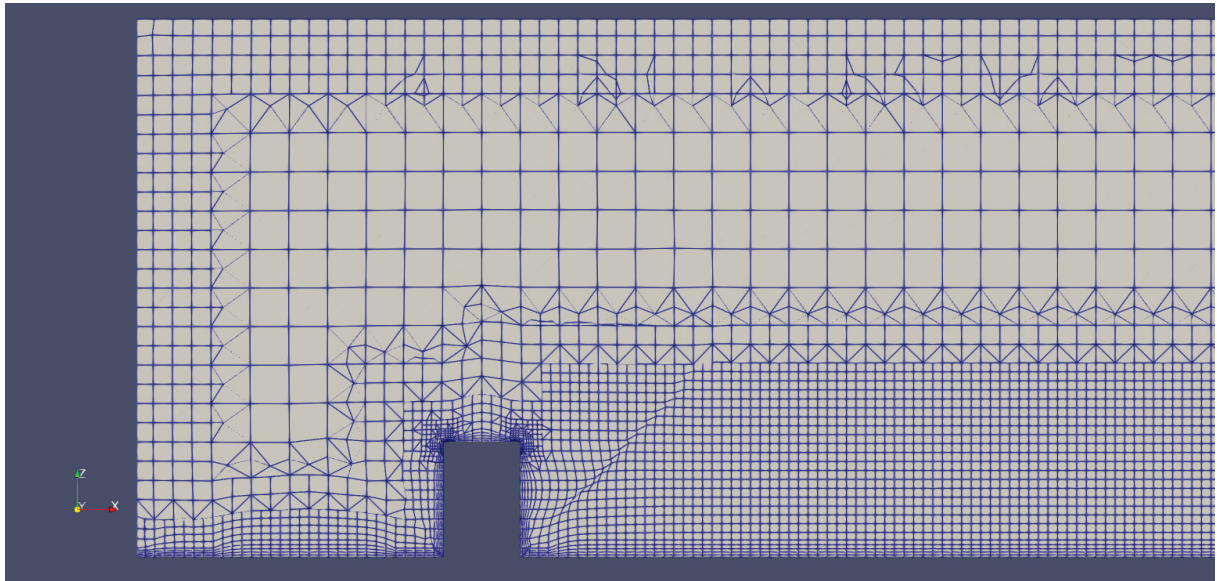
Figura 23 – Corte longitudinal da malha, com refinamento local.



Fonte: O autor.

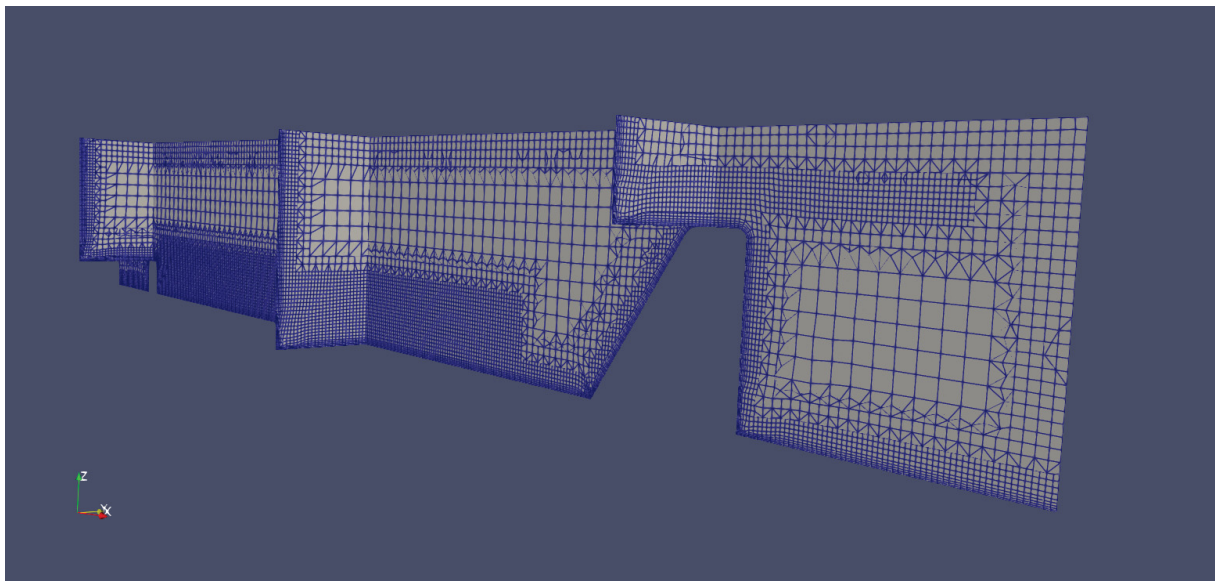
Cabe comentar que há, tanto ao pé do vertedor quanto no anteparo, uma espécie de “dobra”, aludindo quase ao plano de tensão num bloco prismático retangular. Acredita-se que isso se deve à diferença entre a taxa de aspecto entre as células vizinhas na direção x , e y , para o anteparo. Os cantos sofrem maior refino devido a descontinuidade geométrica. Esse efeito aumenta a largura das células que se afastam dessas regiões por não demandarem maior refino.

Figura 25 – Corte longitudinal, detalhe sobre o anteparo.



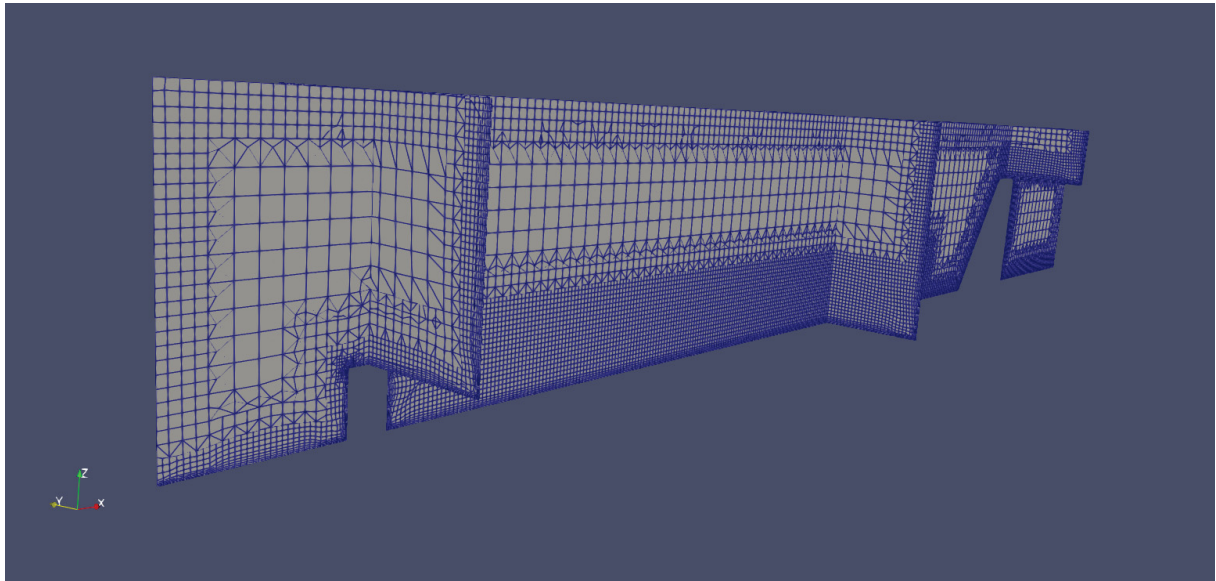
Fonte: O autor.

Figura 26 – Vista isométrica de montante, com planos transversais em 3 trechos de interesse



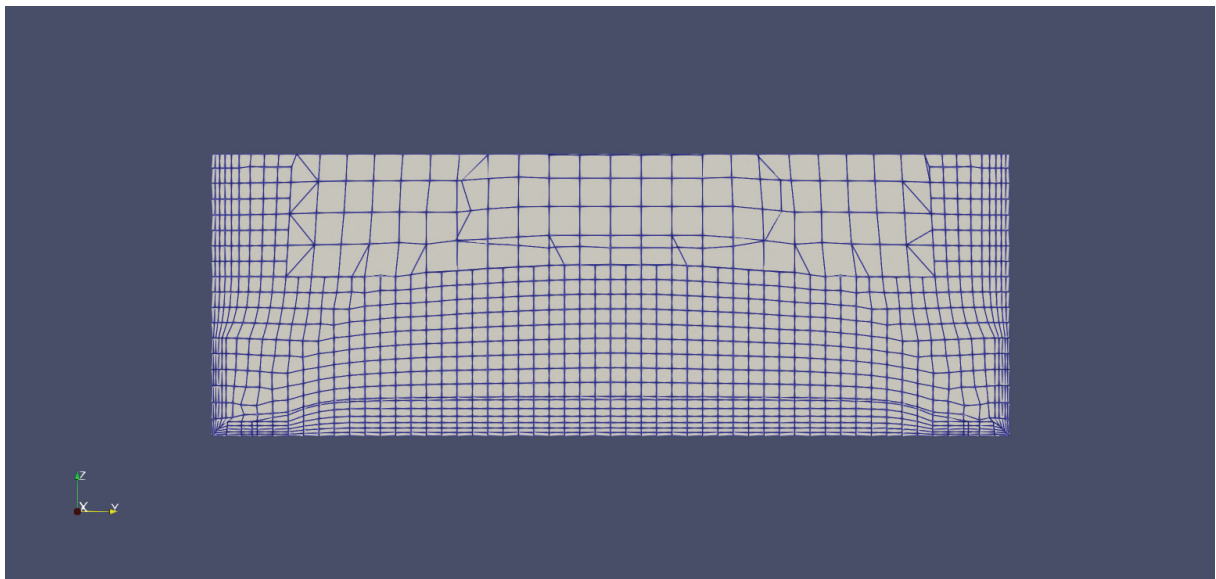
Fonte: O autor.

Figura 27 – Vista isométrica de jusante, com planos transversais em 3 trechos de interesse



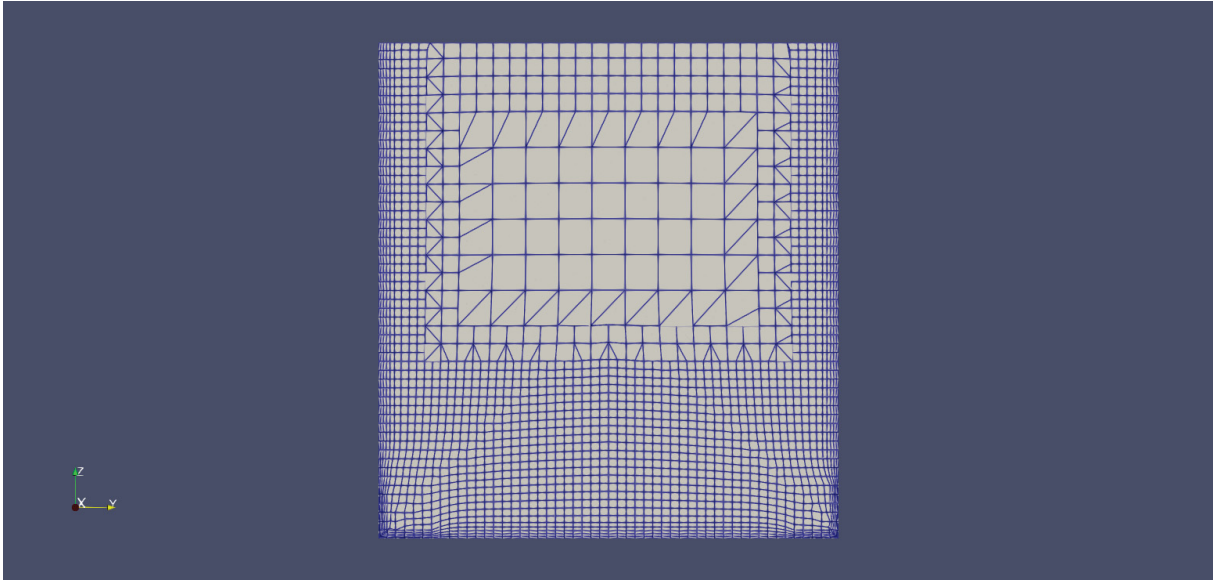
Fonte: O autor.

Figura 28 – Corte transversal sobre vertedor.



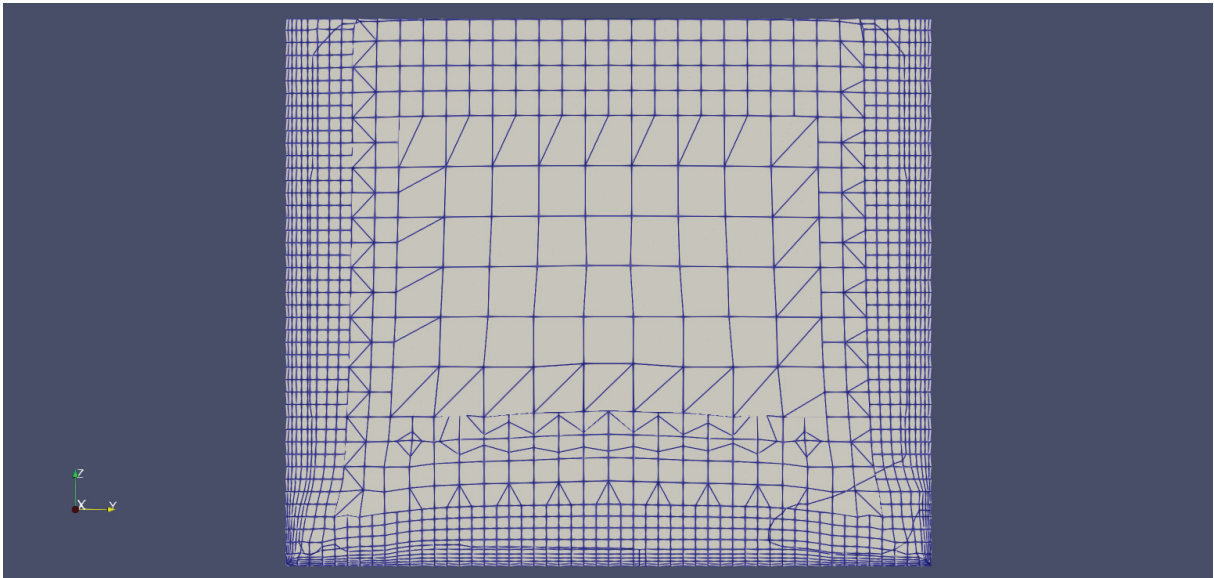
Fonte: O autor.

Figura 29 – Corte transversal sobre região do ressalto.



Fonte: O autor.

Figura 30 – Corte transversal sobre anteparo.



Fonte: O autor.

3.2.2 Discretização e solução numérica

Para a obtenção dos campos escalares e vetoriais, o método dos volumes finitos (Seção 2.6) foi utilizado. O conjunto de esquemas responsáveis por essa aproximação compõe a estratégia numérica e são dependentes da natureza e dos objetivos do problema.

A escolha desses esquemas envolve o equilíbrio entre acurácia e estabilidade, onde a qualidade da malha e a física envolvidas possuem grande peso. Como bem afirma (Guerrero, 2023), gradientes maiores tendem a gerar oscilações que podem divergir da solução.

Como indicado na Figura tal (3.2 Modelo numérico, ainda ser colocada), os esquemas numéricos e códigos solucionadores (“*solvers*”) são parte do modelo. Os primeiros são encontrados no dicionário *fvSchemes* e os últimos no dicionário *fvSolution*, ambos presentes no diretório */system*. No openFOAM não há valores pré definidos em relação a estratégia numérica, e portanto, resta ao usuário escolhê-los.

Na Figura 31, o dicionário *fvSchemes* foi definido com esquemas de segunda ordem visando equilíbrio entre acurácia e convergência, como apontado por (Guerrero, 2023). A Figura 31 apresenta sinteticamente os esquemas numéricos e a tabela 4 os solucionadores.

Figura 31 – Aparato numérico de discretização da equação geral

```

ddtSchemes
{
    default          CrankNicolson 0.7;
}
gradSchemes
{
    default          cellMDLimited Gauss linear 0.5;
}
divSchemes
{
    default          none;
    div(phi,U)       Gauss linear;
    div(phi,omega)    Gauss limitedLinear 1;
    div(phi,k)        Gauss limitedLinear 1;
    div((nuEff*dev(T(grad(U)))) Gauss linear;
}
laplacianSchemes
{
    default          Gauss linear limited 1;
}
interpolationSchemes
{
    default          linear;
}
snGradSchemes
{
    default          limited 1;
}

```

Fonte: Guerrero (2023, pág. 269).

Tabela 4 – Subdicionários de importância para os solvers em *fvSolution*

<i>alpha.water</i>	<i>p_rgh</i>	<i>U, k, omega</i>	PIMPLE
<i>nAlphaCorr</i> = 3	<i>solverPCG</i>	<i>solverPBiCGStab</i>	<i>nCorrectors</i> = 2
<i>cAlpha</i> = 1	<i>preconditionerGAMG</i>	<i>preconditionerDILU</i>	<i>nOuterCorrectors</i> = 2
<i>tolerance</i> = $1e-8$	<i>tolerance</i> = $1e-5$	<i>tolerance</i> = $1e-08$	<i>nNonOrthogonalCorrectors</i> = 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.3 Modelo do Fenômeno de Turbulência

Escoamentos turbulentos estão por toda parte e costumam ser a regra na engenharia (Guerrero, 2023). Na Equação 2.17, o R_h Raio Hidráulico foi utilizado como

comprimento característico na estimativa do número de Reynolds. O valor encontrado apontou natureza turbulenta do escoamento ($R_e \approx 6500$) e a planilha consta no APÊNDICE II.

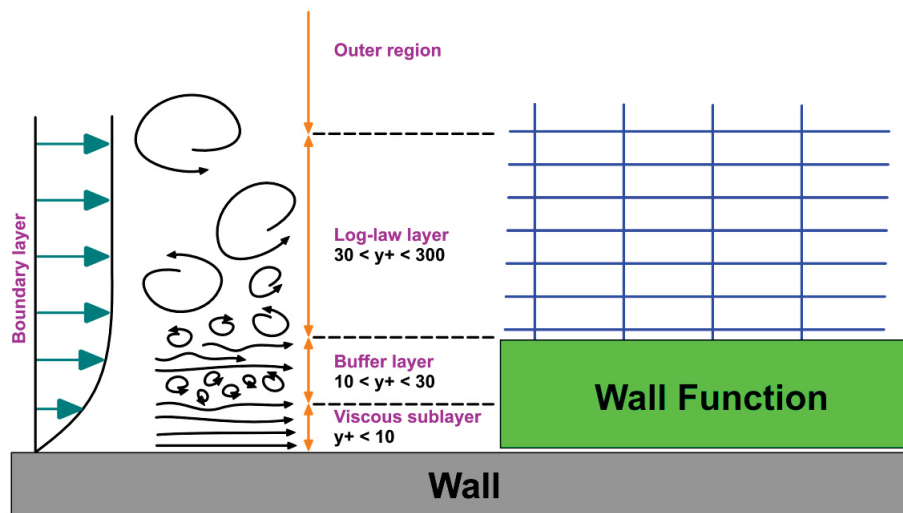
Segundo (Chaudhry, 2022), a transição entre laminar a turbulento para escoamento em superfície livre acontecem para $R_e \approx 600$, utilizando o raio hidráulico como comprimento característico.

Ademais, com a capacidade de processamento disponível não convém resolver o escoamento em cada detalhe, sendo satisfatório a obtenção dos valores médios para os campos, como visto na Equação 2.19. Portanto, o conceito de Reynolds-Averaging é adotado visando resolver as grandes escalas de turbulência e modelar as pequenas parametricamente (Holzmann, 2016).

A física dos escoamentos multifásicos demanda alto nível de modelagem. A turbulência tem uma grande influência na dinâmica de escoamentos multifásicos, nas grandes e pequenas escalas (Guerrero, 2023, slide 52).

Isso dito, a abordagem econômica *RANS* (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) foi escolhida, com adoção do modelo $K - \omega SST$ (*Shear Stress Transport*). Esta escolha foi consequência do fato de o escoamento interno no canal resultar em outra grande fonte de turbulência junto às superfícies. O modelo $k - \omega SST$ é um híbrido que exerce ótimo desempenho perto e longe da parede (*y+ insensitive*) (Guerrero, 2023). Adicionalmente, neste modelo supõe-se a hipótese linear do tensor de *Boussinesq*.

Figura 32 – Intervalos de valor de y^+ para os tipos de camada junto a parede.



Fonte: Guerrero (2023, pág. 269).

Em termos numéricos, supõe-se o escoamento turbulento totalmente desenvolvido uma vez que capturar a transição entre laminar para turbulento requer resolver a camada imediatamente próxima à parede (*viscoussub-layer*), conhecida como abordagem *low-Reynolds*. Essa alternativa é proibitiva pelos recursos computacionais dispostos,

e portanto decidiu-se por modelar essa camada com função de parede (*wallmodel*) chamada de abordagem *high – Reynolds*. Todos os modelos RANS supõem a camada limite (*boundarylayer*) totalmente desenvolvida.

Para casos em que modelos de turbulência são aplicados para o tratamento da camada viscosa, é imprescindível a estimativa da quantidade y^+ . Esse valor decide o tamanho de célula a ser escolhido nas camadas limite junto às paredes e define a estratégia de inclusão destas camadas no gerador de malha a partir da métrica referencial. Segundo Guerrero, a estimativa pode dar através dos seguintes passos:

Na prática em OpenFOAM, simular escoamentos turbulentos requer a seleção de um modelo para turbulência, condições iniciais e de contorno para as equações de fechamento, adotar estratégia sobre o tratamento junto às paredes, além de configurar parâmetros numéricos e de controle da simulação relacionados a turbulência (Guerrero, 2023).

Na hierarquia dos diretórios que compõem o modelo, o modelo de turbulência é determinado em *constant/momentumTransport* e as condições iniciais e de contorno para viscosidade ν , energia cinética κ e taxa de dissipação específica turbulenta ω no diretório *zero* para os respectivos dicionários. No anexo B constam os arquivos.

Referir que a estimativa dos valores para o modelo de turbulencia em questao dependem de metodo tal e sera apresentado na secao de condicoes de contorno.

Tabela 5 – Valores iniciais para variáveis turbulentas.

Energia cinética turbulenta k	Taxa específica de dissipação ω	Viscosidade turbulenta ν_t
$6e - 4$	60	$1e - 6$
m^2/s^2	$1/s$	m^2/s

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.4 Modelo do Fenômeno Multifásico

A natureza transiente multifásica torna compulsório o uso de métodos transientes e por esse motivo, tais simulações costumam ser computacionalmente caras. Muitas vezes não é possível achar uma solução permanente para o escoamento, (Guerrero, 2023).

Passos pequenos de tempo, esquemas de discretização de alta ordem e malha fina para resolver bem as escalas espaço tempo são os requisitos para modelar escoamentos sob pressão atmosférica.

O fenômeno de escoamento guiou a escolha da malha hexaédrica regular, por resolver melhor a descontinuidade entre fases e aproximar mais eficientemente os gradientes.

O presente modelo enquadra-se em *Eulerian-Eulerian with VOF* (Guerrero, 2023), que resolve para dois ou mais fluidos coexistentes com o separação nítida entre eles. Adicionalmente, o custo computacional decresce à medida que o requerimento de modelagem

crece. De acordo com Guerrero (Guerrero, 2023), escoamentos multifásicos são altamente modelados, e a turbulência tem forte influência na dinâmica multifásica, em todas as escalas.

Para solução das frações e captura da interface em OpenFOAM, decidiu-se pelo algoritmo semi-implícito MULES, conhecido por *Predictor-Corrector Semi-Implicit MULES*, menos restritivo com o número de Courant.

Tabela 6 – Número de Courant e passo de tempo.

solver	incompressibleVoF
deltaT	0,005
maxCo	3
maxAlphaCo	1
maxDeltaT	0,1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para reconstrução da interface, recorreu-se à família PLIC de esquemas (explicar) de interpolação. Como vantagens, eles são mais precisos e tem potencial de removerem ou reduzirem oscilações na interface decorrentes de padrões de refinamento. São mais acurados a um custo computacional adicional (Guerrero, 2023).

3.2.5 Condições Iniciais e de Contorno

A possibilidade de solução do problema exige que o modelo matemático seja bem posto, ou seja, forneça solução física, única e estável para as equações. Portanto, condições iniciais e de contorno devem ser fornecidas. Todavia, defini-las pode ser um desafio pois devem refletir as condições físicas do problema e serem compatíveis com o conjunto de equações, particularmente para p e $\mathbf{u}$ (Greenshields; Weller, 2022).

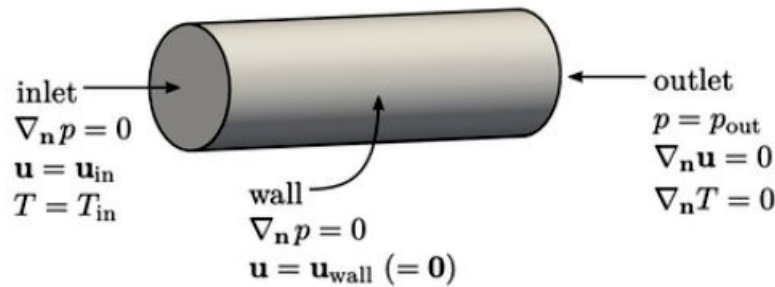
A natureza transiente do fenômeno situa o problema em questão na categoria dos problemas de marcha ou propagação (H.K. Versteeg, 2007), cunhado como *initial-boundary-value problem*. Os problemas em marcha dependem somente de condições de montante (Maliska, 2023). Assim, a viscosidade e a derivada temporal presentes nas equações conferem o comportamento físico parabólico ao problema, segundo (H.K. Versteeg, 2007) em sua tabela 'formal' de classificação de escoamento. Adicionalmente, (Maliska, 2023) diz que a classificação é sempre mista, e que é mais didático não classificar o sistema de equações como um todo, mas sim apontar o caráter das equações em cada direção coordenada.

Computacionalmente, as fronteiras ou contornos da malha são separadas e designadas em grupos, chamados *Patches*. No modelo estão definidos 4 patches, onde 3 especificações numéricas são possíveis: condição de valor fixo (Dirichlet), condição de gradiente fixo (Neumann) ou condição mista (Robin). A discretização dos termos advectivos e difusivos implica a necessidade de definir um valor fixo na face para o termo advectivo e

um gradiente normal a face para o termo laplaciano difusivo (Greenshields; Weller, 2022). A condição de Robin agrega ambas as condições de maneira a dar resposta a condições de fronteira mais complexas. Para o entendimento em termos numéricos dessas condições, o esquema numérico das condições de contorno estão disponíveis no Anexo C.

As recomendações gerais para as condições de contorno, segundo (Greenshields; Weller, 2022), podem ser vistas na Figura 33 abaixo:

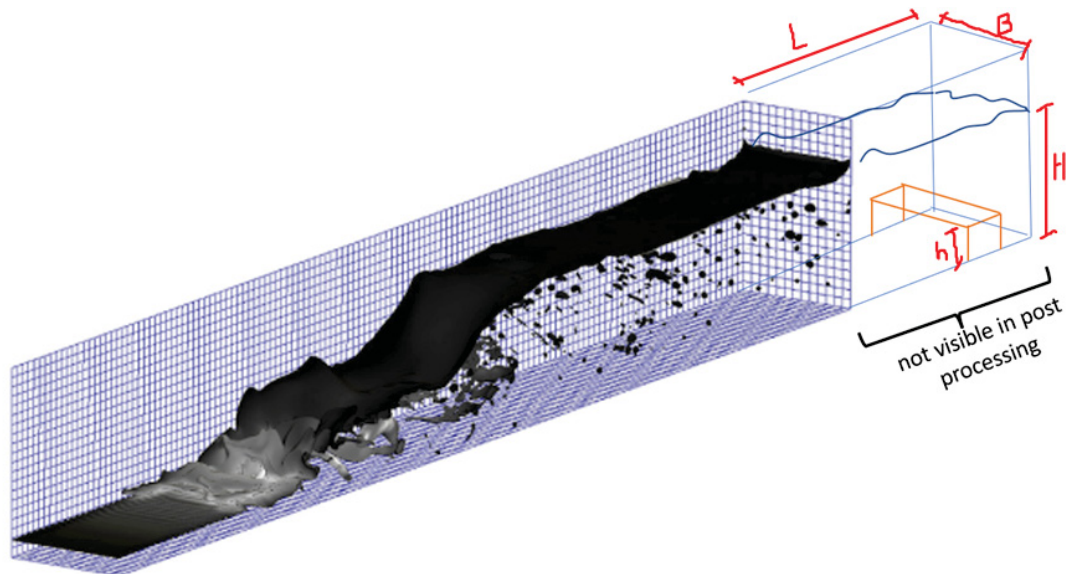
Figura 33 – Recomendações gerais de condições de contorno para escoamento em canal



Fonte: (Greenshields; Weller, 2022)

Para a condição de contorno de saída, um artifício foi utilizado de maneira a obter a altura hidrostática conjugada do ressalto. O OpenFOAM não dispõe em seu código condição de saída disponível que sustente uma vazão e ao mesmo tempo mantenha uma altura hidrostática. Desta forma, optou-se por construir um anteparo a jusante do domínio no modelo, como na Figura 34 de forma de desacelerar o escoamento, condição esta essencial ao ressalto.

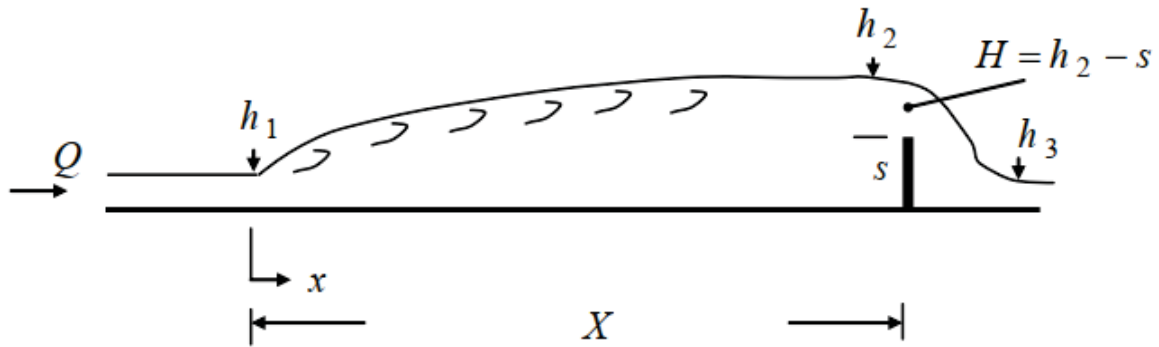
Figura 34 – Sketch de solução para condição de contorno de saída de velocidade e pressão



Fonte: Torres, 2024.

Os autores (Forster; Skrinde, 1950) investigaram a relação do anteparo sobre o ressalto hidráulico, de forma a diminuir as dimensões da bacia de dissipação. Trabalhos mais recentes de (Achour; Amara; Mehta, 2022) alcançaram ampliar as curvas experimentais para maiores intervalos, e clamam terem determinado equação experimental que permite o cálculo explícito da posição do anteparo. De (Forster; Skrinde, 1950), o experimento possui a seguinte configuração:

Figura 35 – Experimento para investigar relação de variáveis entre ressalto e anteparo.



Fonte: Fonster, 1950.

A relação adimensional proposta:

$$\frac{s}{h_1} = f(F_1, X/h_2) \quad (3.4)$$

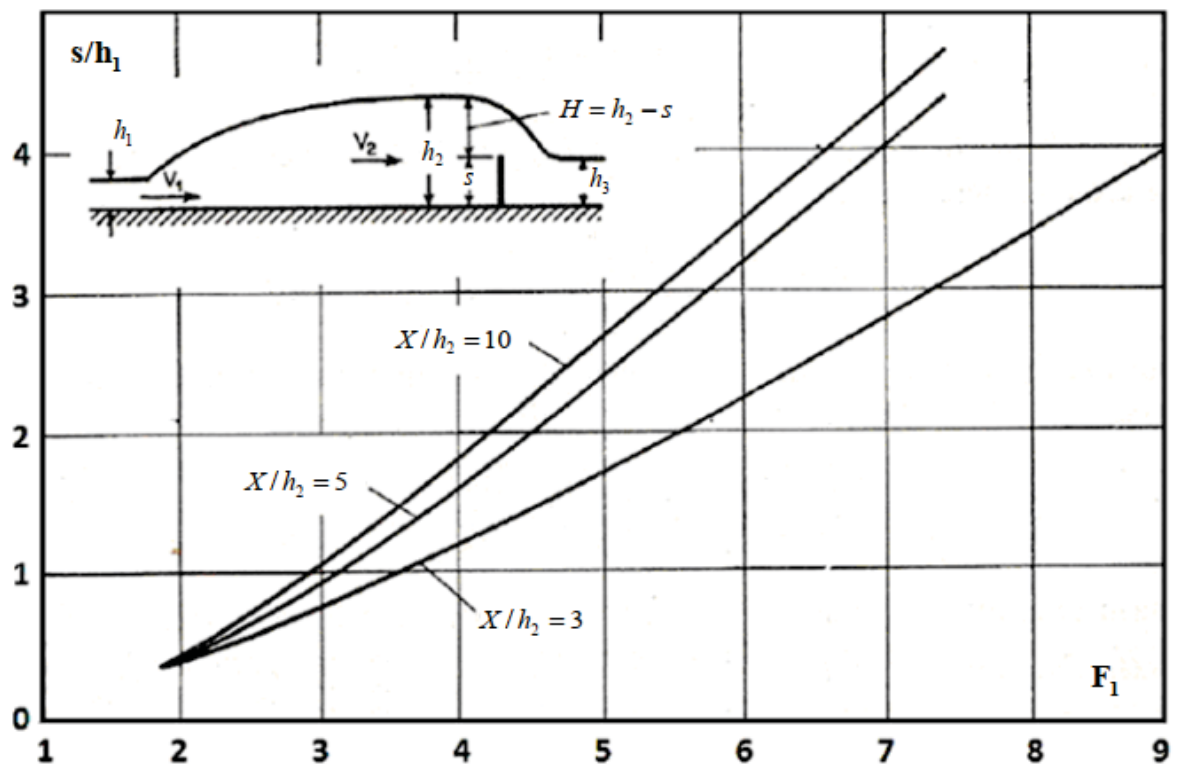
Do experimento, os autores plotaram 3 curvas (X/h_2) que relaciona o número de Froude incidente com a altura do anteparo (s/h_1). Na Figura 36, os resultados orientaram as dimensões do anteparo para o presente modelo numérico, e os valores escolhidos são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores extraídos do experimento de Fonster and Skrinde (1950).

Froude	X/h_2	s/h_1	s
6,07	10	≈ 2	≈ 2

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 36 – Experimento da variação relativa da altura do anteparo em função do número de Froude incidente.



Fonte: Fonster, 1950.

4 RESULTADOS

4.1 Ensaio 1 - Perfil D'água

O ensaio chegou ao estado permanente de escoamento, cuja vazão sustentou o ressalto hidráulico estático a uma distância fixa a jusante do vertedor. A declividade foi definida com apenas um comando junto ao acionador mecânico, responsável em elevar a extremidade de montante do canal. Após 5 minutos pode-se garantir o término do transiente, e as medições foram tomadas.

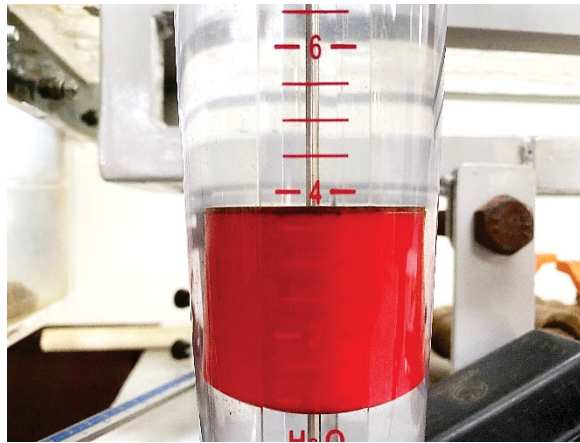
Os dados resultantes do ensaio 1 constam na Tabela 8.

Tabela 8 – Dados resultantes do Ensaio 1

Vazão	Rotação	Declividade	h1	h2	h3	h4
m^3	rpm	-	cm	cm	cm	cm
3,75	1528	0,0035	12,9	1	1,2	3,6

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 37 – Rotâmetro indicando vazão de ensaio, estimado em 3,75 m³/h



Fonte: O autor

A declividade apontada pelo equipamento foi de 0,35%, o que equivale a um ângulo de $\arctan(0,0035) \approx 0,20^\circ$. Para o domínio de 96cm de comprimento, a diferença de altura decorrente do ângulo é muito pequena.

Figura 38 – Declividade do canal aferida por dispositivo digital



Fonte: O autor

O escoamento permanente com a formação de ressalto estático foi alcançado, segundo procedimento indicado na metodologia. A estimativa do número de Froude (Apêndice A) resulta em valor menor ($F_r \approx 1,5 < 4,5$) compreendido ao intervalo que prevê a formação do fenômeno, segundo (Chaudhry, 2022).

Na Figura 39, a medida da posição do ressalto é estimada em torno da posição $24cm$ a jusante do vertedor.

Figura 39 – Distância de formação do ressalto do vertedor



Fonte: O autor

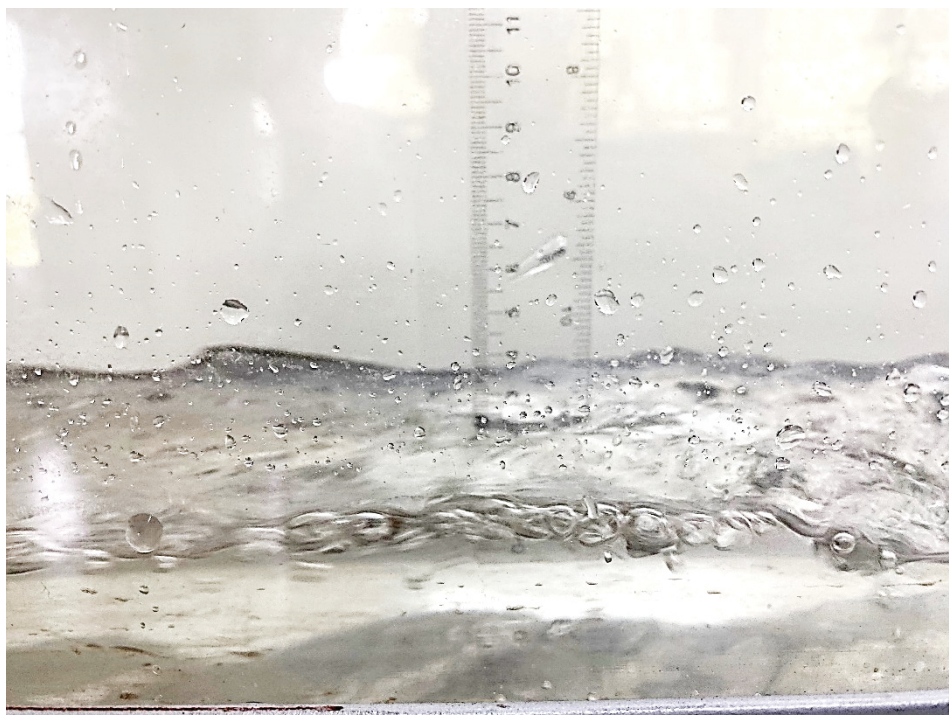
As alturas conjugadas do ressalto são indicadas por altura h_1 a montante, no “pé” do vertedor, e h_2 a jusante.

Figura 40 – Medida da altura do nível d'água a montante do ressalto



Fonte: O autor

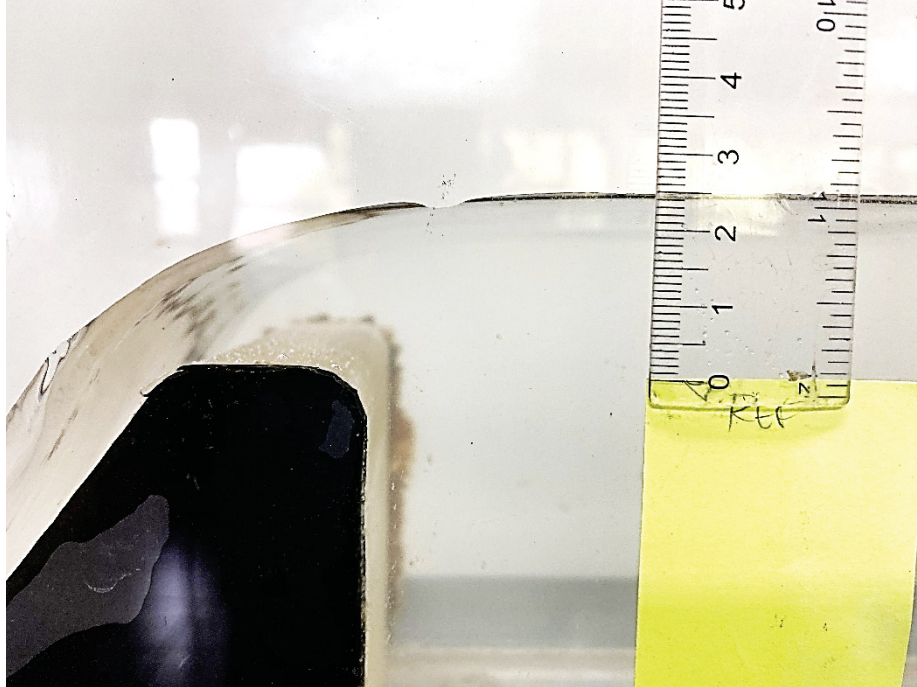
Figura 41 – Medida da altura do nível d'água a jusante do ressalto



Fonte: O autor

Por fim, afastada 3cm a montante (Figura 18) do barramento, a altura de nível d'água (h_1) foi medida em aproximadamente $2,9\text{cm}$.

Figura 42 – Medida do nível d'água a montante do vertedor



Fonte: O autor.

4.2 Ensaio 2 - Coeficiente de descarga do vertedor

O ensaio 2 forneceu as alturas de montante do vertedor para cada vazão. Para a tomada das medições, um ponto a montante do vertedor, a distancia de $d = 3\text{cm}$ foi escolhido. Os dados medidos constam na Tabela 9:

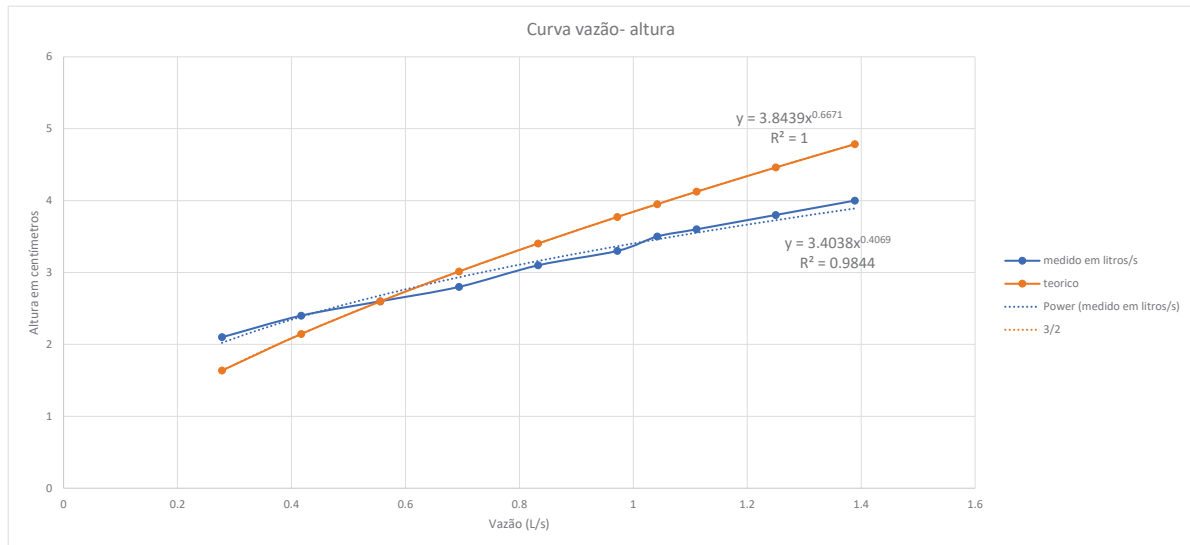
Tabela 9 – Tabela de vazões e altura de nível medidos sobre vertedor.

Vazão m^3/h	vazão l/s	altura h cm
1,0	0,278	11,5
1,5	0,417	11,8
2,0	0,556	12,0
2,5	0,694	12,2
3,0	0,833	12,5
3,5	0,972	12,7
3,75	1,042	12,9
4,0	1,111	13,0
4,5	1,250	13,2
5,0	1,389	13,4

Fonte: elaborada pelo autor.

A curva vazão-altura que resulta dos dados medidos segue na Figura 43:

Figura 43 – Curva vazão-altura do vertedor



Fonte: O autor.

4.3 Modelo Numérico

O modelo numérico demora em média 5 horas para computar 11 segundos de simulação, com 4 núcleos físicos em paralelo, processador i7 7700, frequência 3,60GHz.

Tempo suficiente ao desenvolvimento do escoamento no modelo ($\Delta t = 11s$) foi dado para atingir o estado permanente ou pseudopermanente (posição do ressalto não se alterou), similar ao experimento físico. No entanto, a simulação é resolvida pelo algoritmo PIMPLE e, portanto, transiente em natureza.

Como previamente apresentado no subcapítulo 3.2.5, a condição de saída do modelo foi projetada para reproduzir a coluna d'água que atua como restrição de montante a origem do ressalto na bacia. O valor do anteparo retirado dos estudos, claramente não atendeu à expectativa, devido ao modelador prever um comprimento inferior ao necessário. O que significa que, para trazer o ressalto mais para montante, é necessário aumentar o canal do valor atual de 61 cm, para investigar coerentemente à relação publicada no artigo (Forster; Skrinde, 1950). Além disso, os autores não tinham declividade presente em seus experimentos, o que acredito ser fonte de erro no tocante a altura do anteparo.

De maneira satisfatória, o modelo conseguiu simular o escoamento a montante com ótima acurácia, resultando em diferença de ≈ 1 entre valor medido no ensaio e resultado do modelo.

O ponto 1 ($h1$) de medição encontra-se a distância ≈ 10 cm do (*patch inlet*), onde um gradiente pode ser verificado devido a gravidade. A entrada do modelo reflete inteiramente no patch a codição de Dirichlet e portanto, o fluido descende.

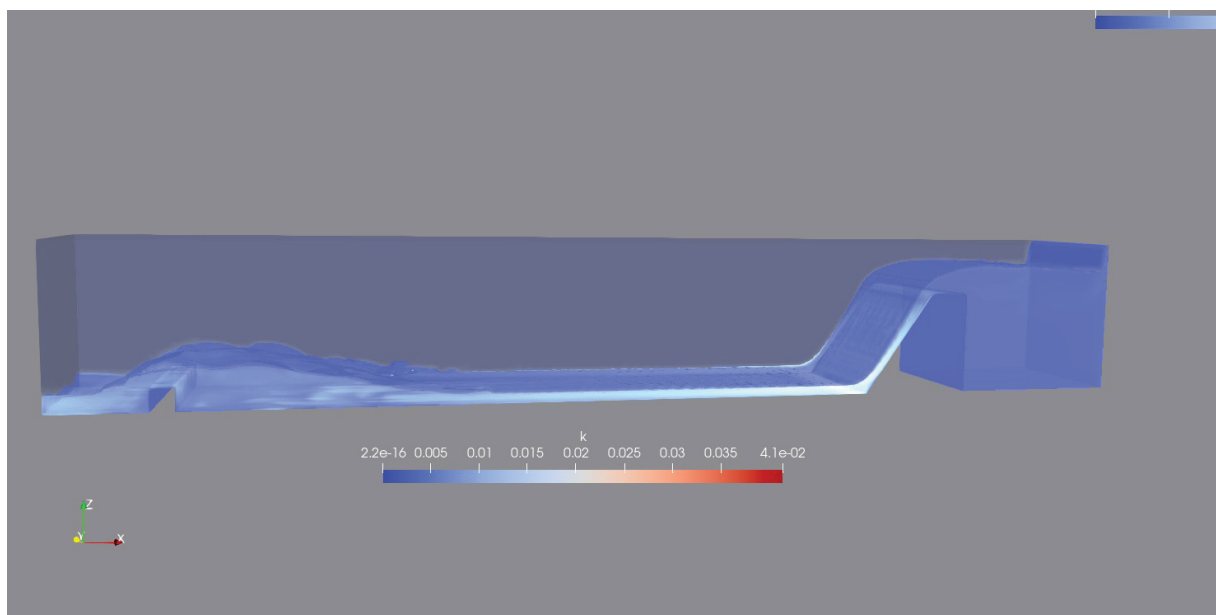
O valor de $h2$, a montante do ressalto teve boa correspondência por parte do

modelo, ambos muito próximos do centímetro na região imediatamente próxima ao vertedor. no ensaio referência. Portanto, o resultado modelado corrobora essa medição em ensaio.

4.3.1 Modelagem da Turbulência

A verificação qualitativa do modelo de turbulência não apresentou nenhum resultado conclusivo, com a energia cinética turbulenta aparecendo com baixos valores ao longo de todo o canal. De fato, uma pequena variação na região a jusante do vertedor já esperava-se, mas não é possível concluir nada.

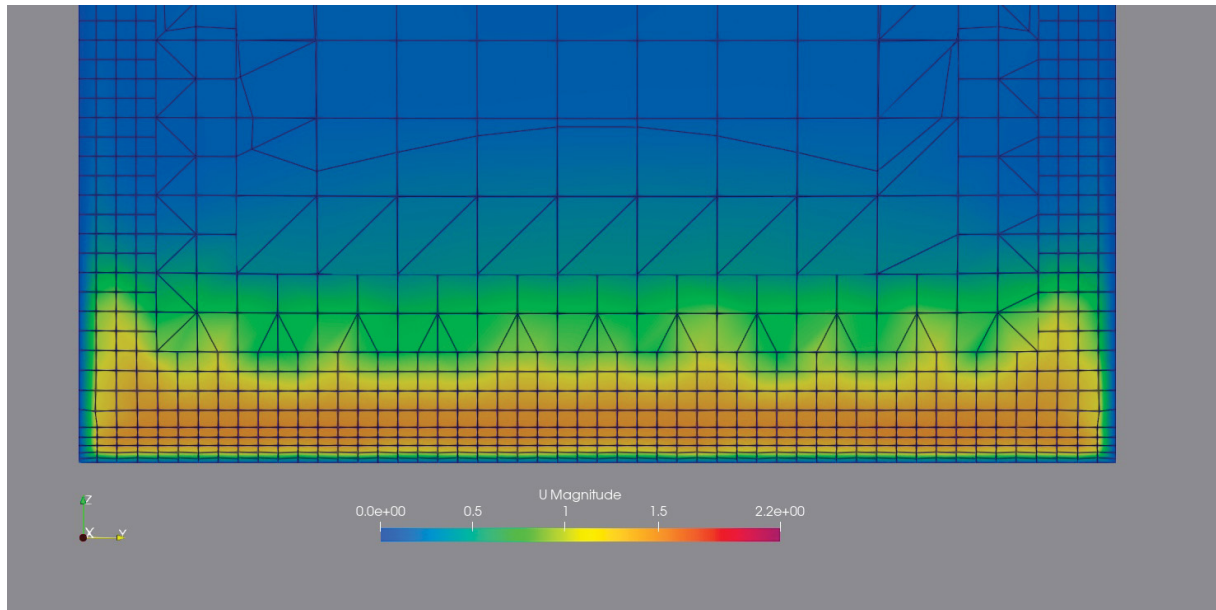
Figura 44 – Pallet de cores para energia cinética turbulenta ao longo do canal.



Fonte: O autor.

Avaliando o corte transversal no “pé” da rampa, no sentido de montante a jusante, é possível ver a distribuição de velocidade em unidades internacionais. A região refinada foi bem sucedida em abarcar a parte do escoamento com maior energia e é possível verificar junto ao chão, um gradiente de velocidades referente à modelagem das camadas sub viscosa e de transição.

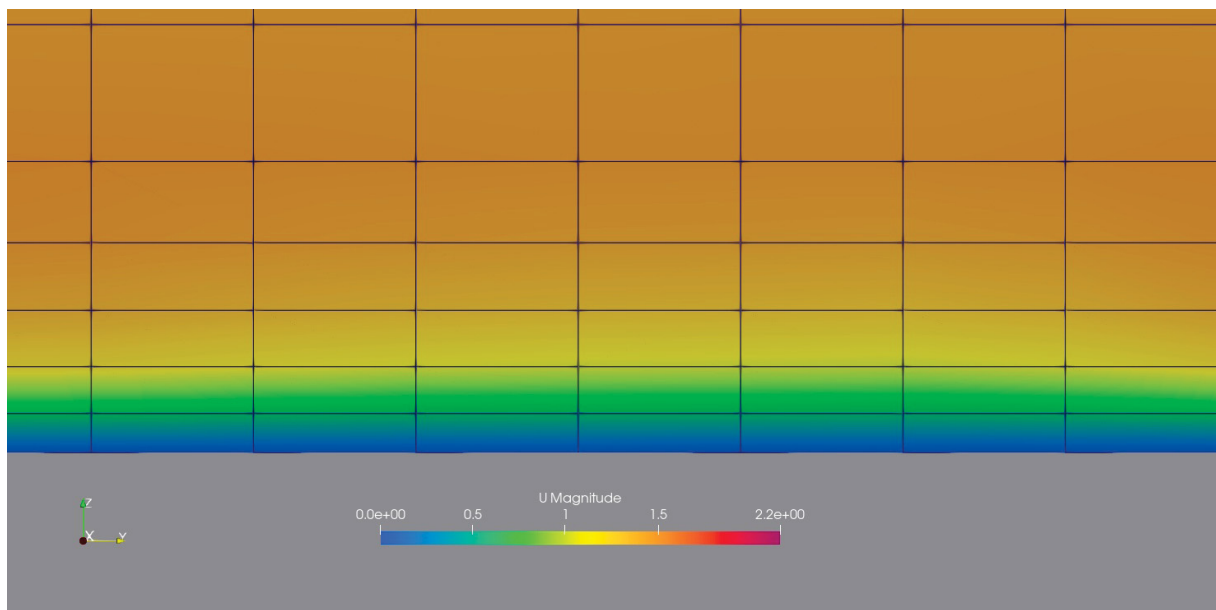
Figura 45 – Turbulência avaliada junto ao chão e paredes do canal.



Fonte: O autor.

Para o $y^+ = 90$ escolhido, o valor da camada mais próxima a parede tem $\approx 9mm$, valor esse que equivale aos 90 unidades de y^+ . Destarte, as velocidades do escoamento junto a parede devem apresentar comportamento esperado pela *Lei log* da turbulência em paredes.

Figura 46 – Turbulência avaliada junto ao chão e paredes do canal, maior foco



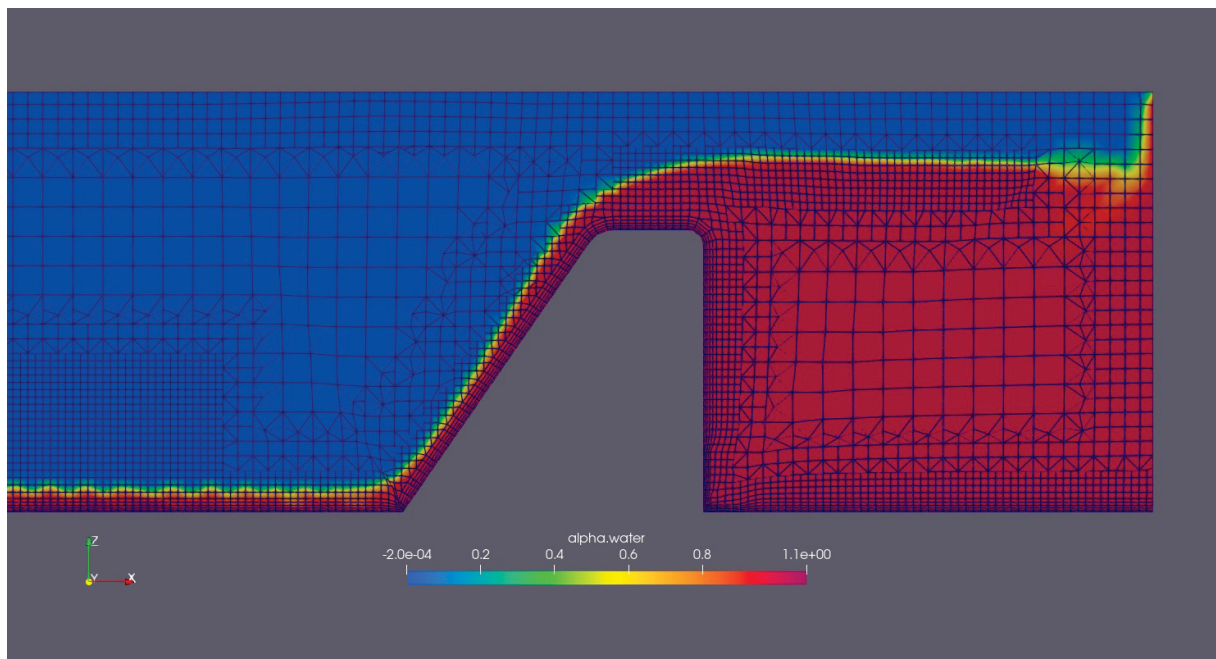
Fonte: O autor.

4.3.2 Modelo da Interface Multifásica

Os resultados para captura da natureza multifásica do modelo foram bons. As duas regiões críticas da hidrodinâmica no canal apresentaram boa resolução, onde pode-se inferir a qualidade do método PLIC mais compressivo na solução da interface.

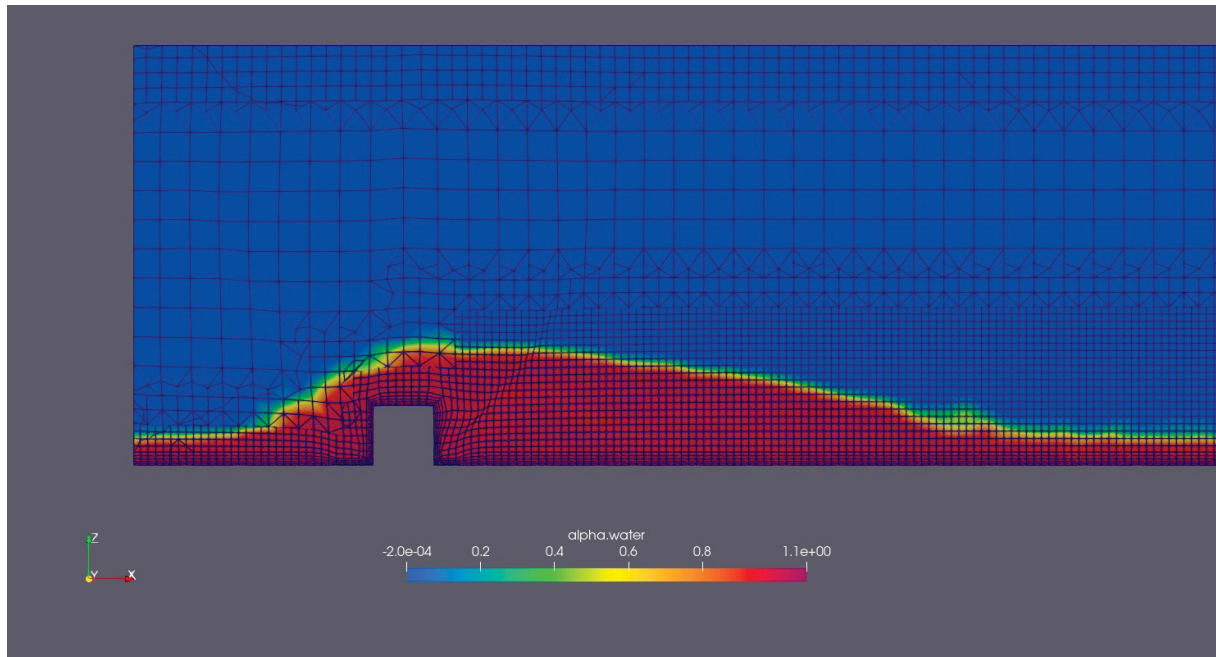
Outro aspecto surpreendente, foi o reconhecimento de regiões em verde ciano nas figuras 49 e 50, com α entre 0,2 e 0,4, apontando “mais ar do que água”, o que é caracteristicamente próprio de vertedouros, quando a jusante o processo de aspersão ocorre devido ao gradiente de velocidade nessa região.

Figura 47 – Perfil da linha d’água na região do vertedor



Fonte: O autor.

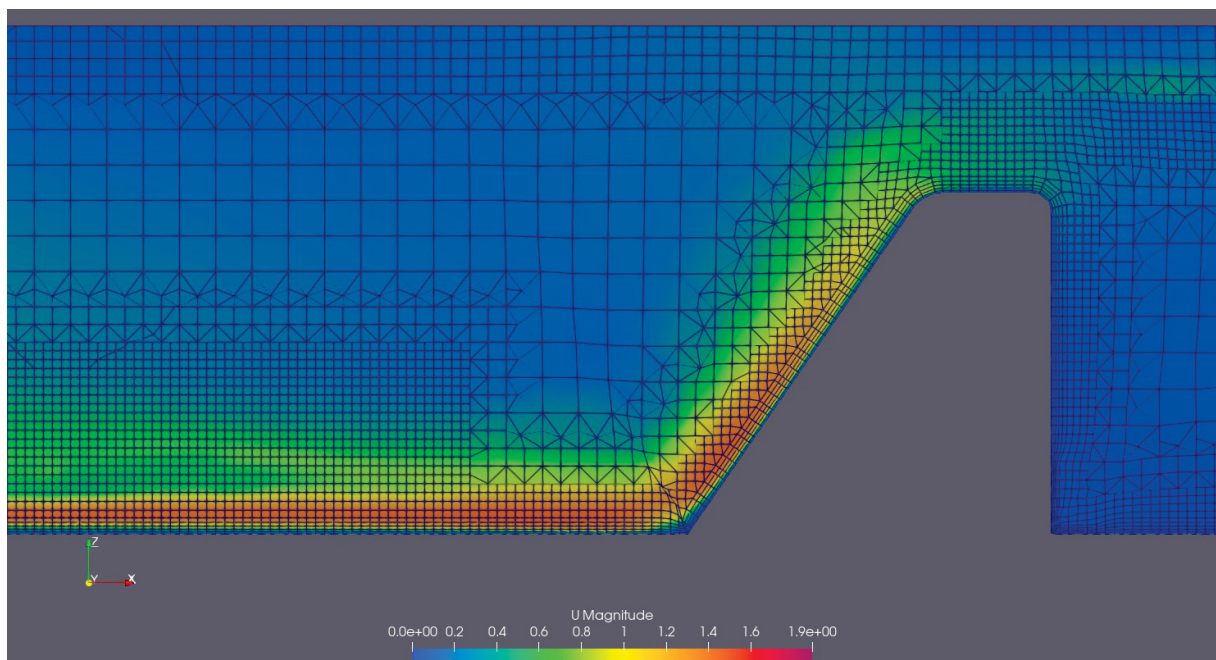
Figura 48 – Perfil da linha d'água na região do anteparo



Fonte: O autor.

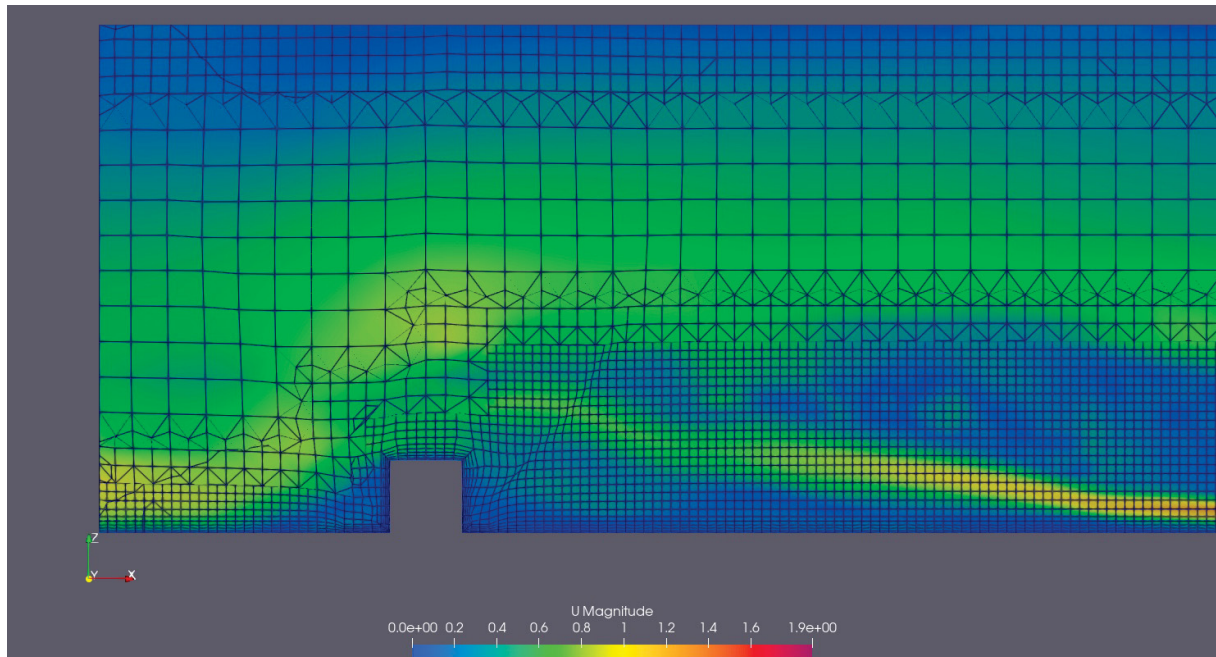
Outro detalhe interessante do escoamento é o ponto mais inferior do vertedor. O escoamento sofre uma variação brusca na direção, o que cria uma região com velocidades muito baixas em relação a velocidade do escoamento. Um refino adicional na região pode permitir uma investigação nessa região.

Figura 49 – Perfil de velocidade na região do vertedor.



Fonte: O autor.

Figura 50 – Perfil de velocidades na região do anteparo.

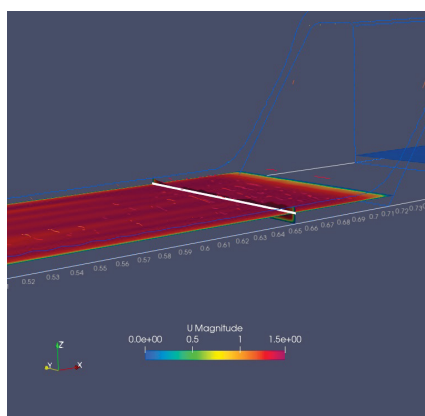


Fonte: O autor.

4.3.3 Perfis de Velocidade

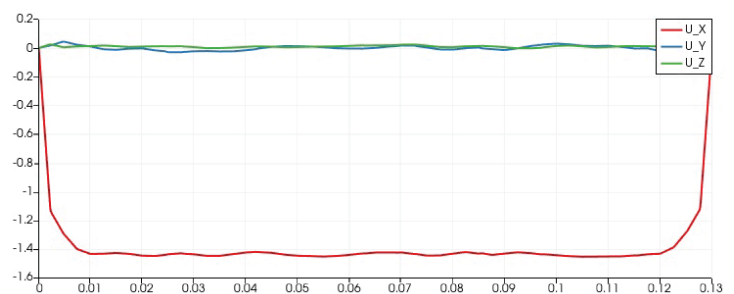
Os perfis de velocidade foram tomados em 3 pontos, h1, h2 e h4, em dois planos xy e xz.

Figura 51 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de



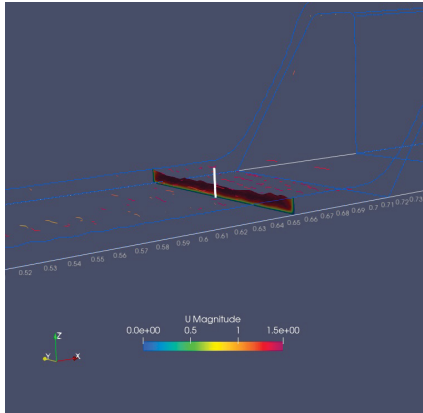
Fonte: O autor.

Figura 52 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



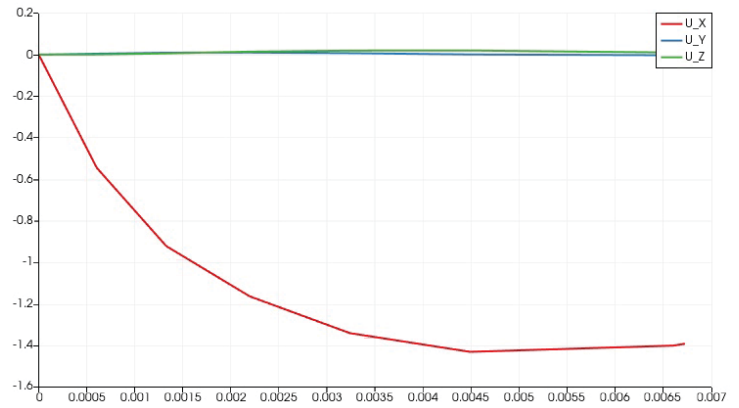
Fonte: O autor.

Figura 53 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de



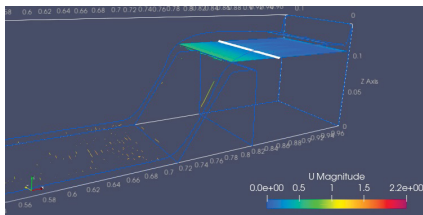
Fonte: O autor.

Figura 54 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



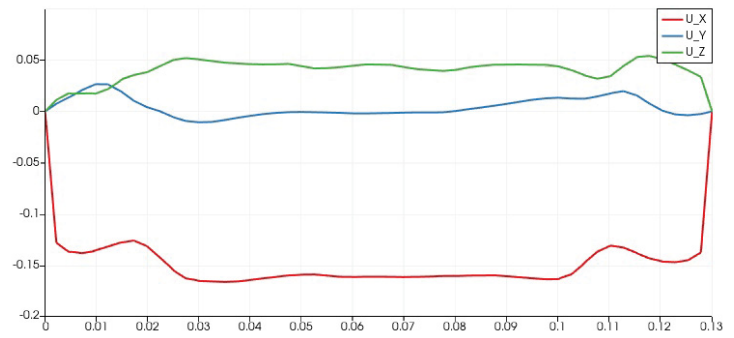
Fonte: O autor.

Figura 55 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de



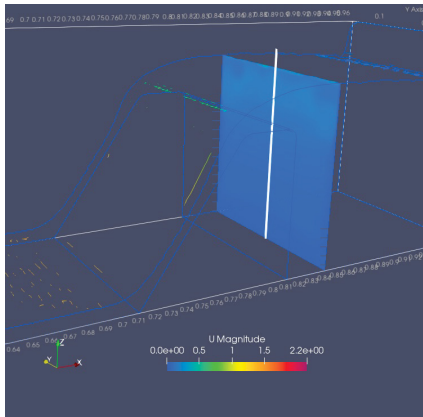
Fonte: O autor.

Figura 56 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



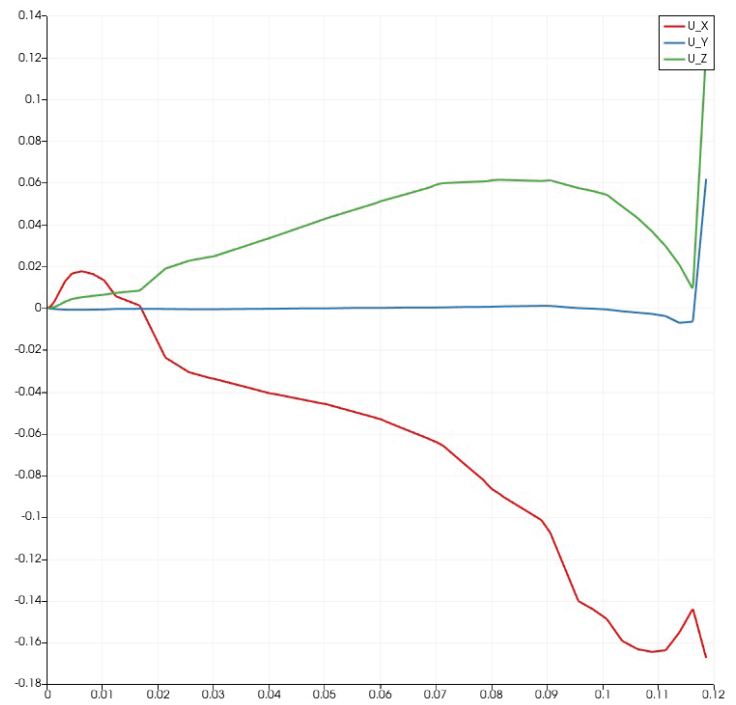
Fonte: O autor.

Figura 57 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de



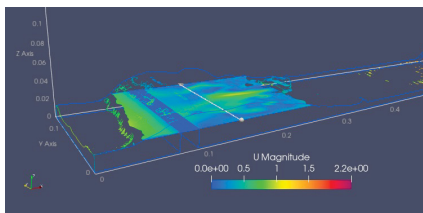
Fonte: O autor.

Figura 58 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



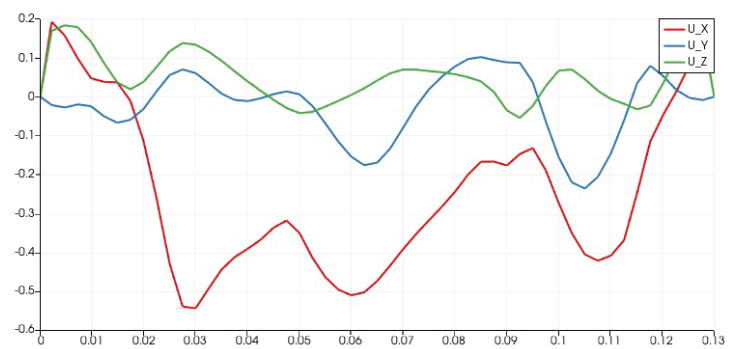
Fonte: O autor.

Figura 59 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de



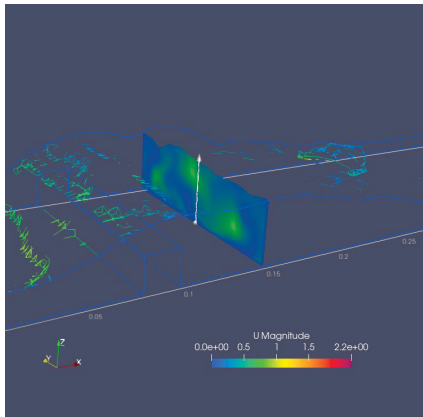
Fonte: O autor.

Figura 60 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



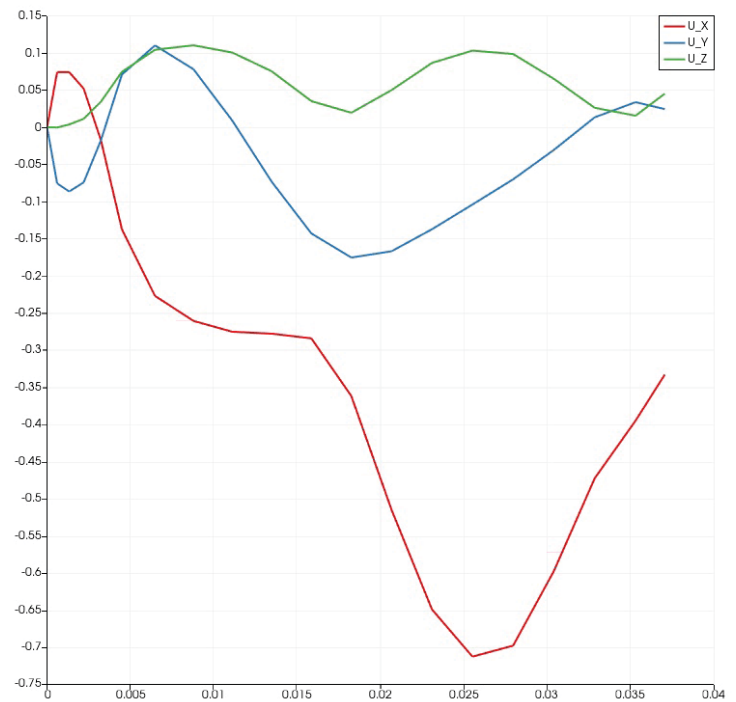
Fonte: O autor.

Figura 61 – Perfil de velocidade ortogonal ao escoamento, a profundidade de



Fonte: O autor.

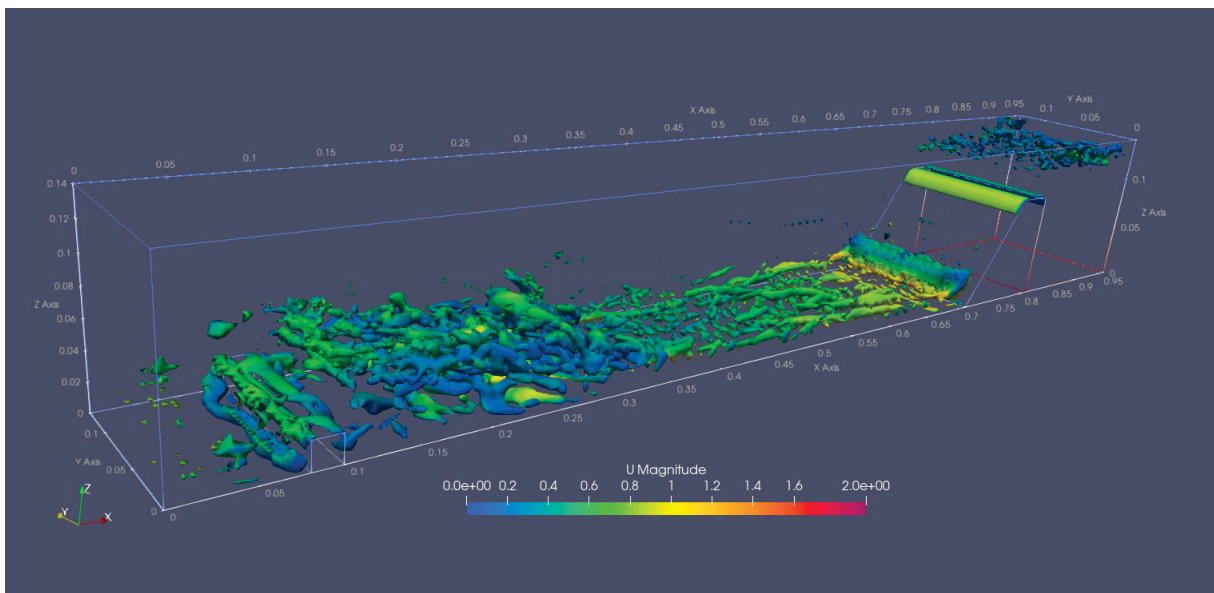
Figura 62 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



Fonte: O autor.

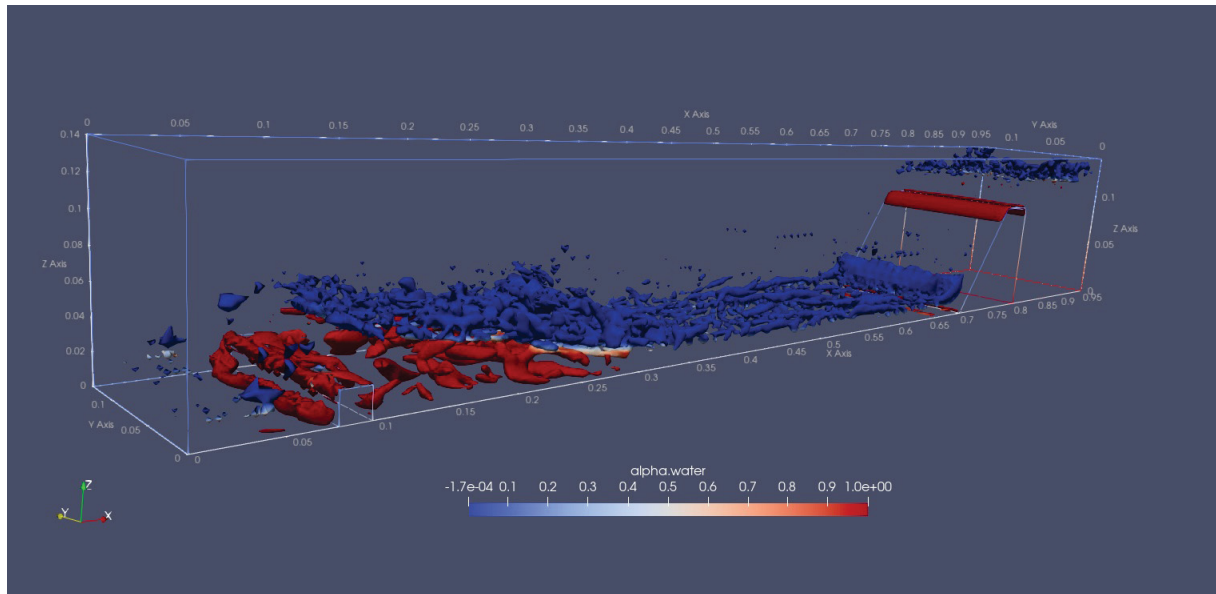
4.3.4 Vorticidade

Figura 63 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



Fonte: O autor.

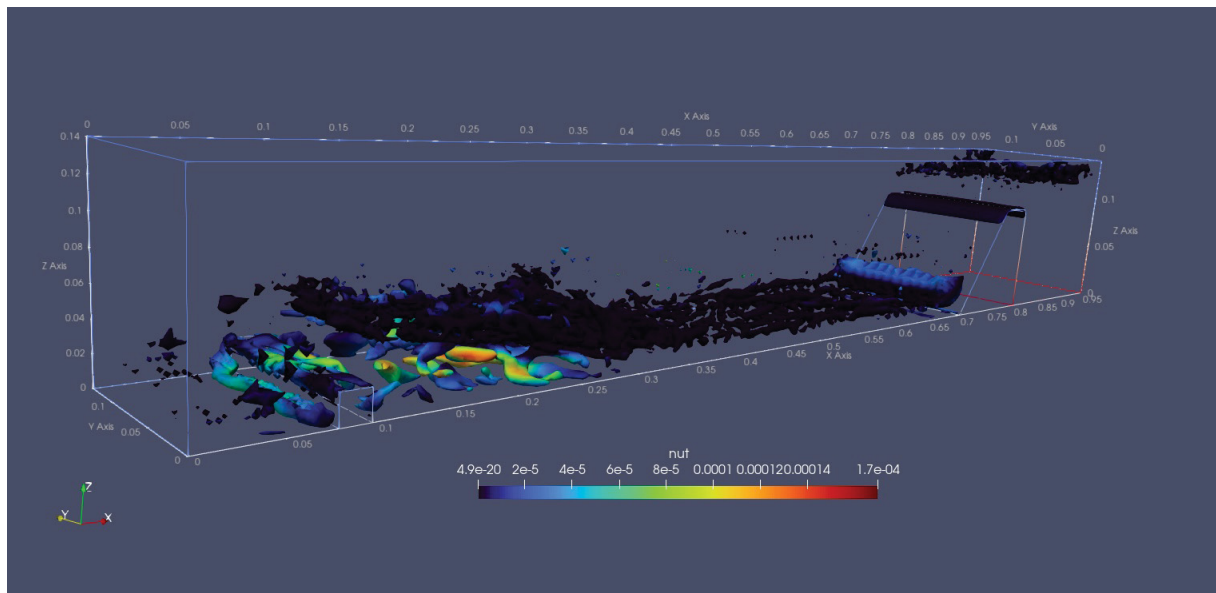
Figura 64 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



Fonte: O autor.

4.3.5 Difusividade Turbulenta

Figura 65 – Velocidades ao longo do eixo y no ponto h2.



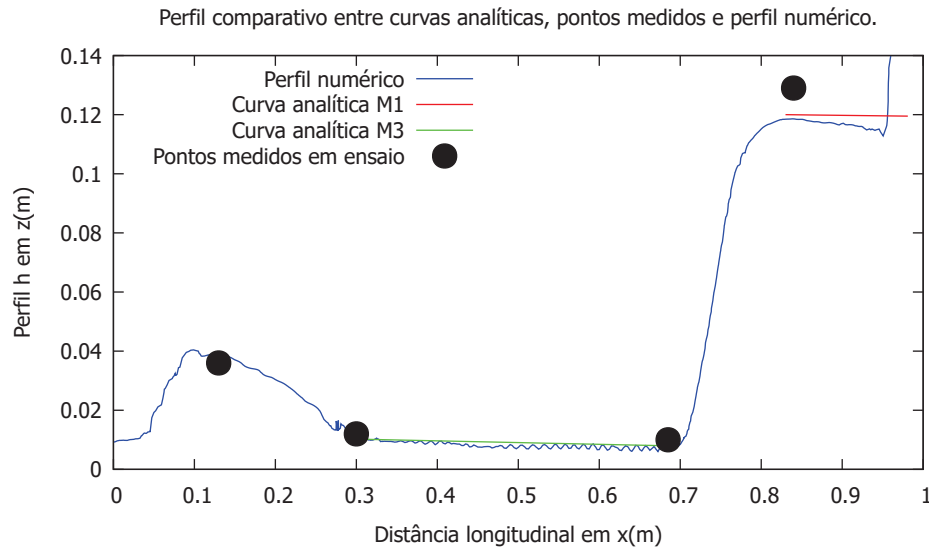
Fonte: O autor.

4.4 Comparação Entre Modelos Físico e Numérico

4.4.1 Linha d'água

O perfil d'água resultante do modelo, para o tempo $t = 10\text{ s}$, foi utilizado para comparação com as curvas M1 e M3, obtidas pelo step method (Apêndice E).

Figura 66 – Comparativo entre curvas analíticas, medidas de ensaio e perfil numérico.



Fonte: O autor.

Para o escoamento sobre o bordo vertente, supôs-se primeiramente ele que poderia ter comportamento similar a curva M2 e os cálculos foram feitos na planilha. Os cálculos apontaram a variação procurada no eixo vertical, mas com um deslocamento muito superior no eixo longitudinal, o que descarta a possibilidade de enquadrar a curva M2 na explicação do comportamento da crista de verteeção para o bordo do vertedor.

Interessantemente, a curva M1 no modelo mostrou um superfície com valores abaixo da prevista pela curva analítica. O gradiente da altura em x tem módulo maior que o previsto pela curva analítica.

Já a curva M3, na região supercrítica cujo controle se dá a montante, apresentou boa correspondencia com a curva analítica em termos absolutos e do gradiente.

Infelizmente, o domínio computacional se mostrou muito pequeno na entrada do modelo, o que impediu avaliar com mais dados a correspondencia com a curva M1.

4.4.2 Coeficiente de descarga do vertedor

O resultado experimental para o coeficiente de descarga resultou dos valores medidos aplicados a relação teórica do vertedor.

A posição no eixo longitudinal marcada para medição, experimental e numérica, é o ponto $x = 84\text{cm}$, 3cm a montante do início do descarregador. A estimativa sobre o coeficiente através dos dados do ensaio ocorreu da vazão de equilíbrio $Q = 3,75\text{m}^3/\text{h}$ apenas, pois para as demais vazões da curva $Q(h)$, não há valores numéricos. Os valores para estimativa do coeficiente de descarga estão dispostos na tabela abaixo:

Tabela 10 – Tabela com valores relacionados a estimativa do coeficiente de descarga

$Q \text{ l/s}$	$L(cm)$	$h(cm)$	$C(SI)$
1,042	13	3,5	1,224

Fonte: elaborada pelo autor.

Para a estimativa numérica do mesmo coeficiente, utilizou-se o *Paraview* através do filtro *slice* e *Integrate Variables*, onde deste último se extrai o valor na direção normal a área perpendicular. Os valores tabulados são:

Tabela 11 – Tabela com valores numéricos relacionados a estimativa do coeficiente de descarga

$Q \text{ l/s}$	$L(cm)$	$h(cm)$	$C(SI)$
1,057	13	2,5	2,057

Fonte: elaborada pelo autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo o desenvolvimento e a avaliação de um modelo numérico, utilizando o software de código aberto OpenFOAM, para representar o escoamento em um canal aberto em escala laboratorial. Este canal foi projetado para fins didáticos, no contexto de aulas experimentais na graduação em Engenharia, e conta com um barramento com vertedor, de forma a permitir medições relevantes do escoamento e a visualização de fenômenos hidráulicos, como o ressalto hidráulico.

A hipótese principal do estudo consistia na viabilidade de modelar numericamente o escoamento neste canal utilizando ferramentas de código aberto, e que, com adequada calibração e validação, o modelo poderia apresentar alto grau de representatividade em relação ao sistema físico.

Embora o tempo disponível para o desenvolvimento do mestrado tenha limitado a quantidade de ensaios experimentais possíveis, foram realizados dois experimentos fundamentais para a validação inicial do modelo. O Ensaio 1 visou determinar o regime de escoamento em equilíbrio permanente unidimensional (EPU), medindo a linha d'água em pontos estratégicos ao longo do canal. Os dados obtidos foram utilizados para comparação direta com os resultados da simulação numérica. O Ensaio 2 consistiu na construção da curva de cota-vazão imediatamente a montante do vertedor, possibilitando a estimativa do coeficiente de descarga experimental, o qual também foi confrontado com o valor obtido nas simulações.

Os resultados obtidos apontam que o modelo numérico foi capaz de representar com boa fidelidade a superfície livre do escoamento. A montante do vertedor, a diferença média entre os valores medidos experimentalmente e os simulados foi de aproximadamente $\Delta h = 1\text{cm}$ em cota, o que é um valor aceitável, considerando as limitações da modelagem. A jusante, os resultados apresentaram excelente concordância, com sobreposição quase total entre dados medidos e simulados.

Por outro lado, a estimativa do coeficiente de descarga do vertedor apresentou maior discrepância. Enquanto o valor teórico foi de 1,224, o modelo numérico indicou um valor de 2,057. Inicialmente, cogitou-se que tal divergência pudesse estar relacionada a dificuldades na geração da malha junto à rampa do vertedor, onde a geometria muda abruptamente e a ortogonalidade da malha se compromete. No entanto, considerando que o escoamento sobre a rampa é supercrítico, e que este tipo de escoamento não permite que informações a jusante influenciem a montante, é improvável que esse fator tenha causado impactos significativos nas regiões a montante do vertedor.

Outros fatores parecem mais prováveis para explicar a discrepância observada. A ausência de uma calibragem adequada do número de Manning pode ter afetado o resultado, uma vez que esse parâmetro é responsável por representar a rugosidade das

superfícies e sua influência nas perdas por atrito viscoso. Além disso, o protótipo físico apresenta, em três trechos ao longo de seus 3 metros de extensão, saliências laterais de aproximadamente $d = 1\text{cm}$, que provavelmente atuam como obstáculos adicionais, desacelerando o escoamento. Soma-se a isso a presença recorrente de poeira acumulada no fundo do canal, aumentando a rugosidade aparente e, portanto, as perdas de energia. Outro ponto a ser considerado é a condição de contorno imposta na entrada do domínio simulado: a aplicação da vazão em toda a parede de montante pode gerar perturbações artificiais no escoamento nos primeiros 15cm antes do vertedor, o que deve ser investigado com mais profundidade em estudos futuros.

Apesar das limitações identificadas — como a ausência de uma curva de validação logarítmica, de um estudo de sensibilidade de malha e de ensaios adicionais — os resultados obtidos são promissores e indicam que a utilização de ferramentas de código aberto como o OpenFOAM é viável para representar com boa acurácia sistemas de escoamento em canais abertos de pequena escala. O modelo desenvolvido pode servir de base para estudos futuros, com aprimoramentos na malha, ajustes nas condições de contorno, refinamento na modelagem da rugosidade e inclusão de novos dados experimentais que permitam uma validação mais robusta.

Em suma, o trabalho atingiu seus objetivos dentro dos limites impostos, contribuindo para o avanço do uso de simulações numéricas em ambientes didáticos e abrindo caminho para futuras aplicações em projetos de engenharia e pesquisa em hidráulica experimental.

REFERÊNCIAS

ACHOUR, B.; AMARA, L.; MEHTA, D. Control of the hydraulic jump by a thin-crested sill in a rectangular channel: New experimental considerations. **Larhyss Journal**, v. 50, p. 31–48, 2022.

CHAUDHRY, M. Hanif. **Open-Channel Flow**. [S. l.]: Springer International Publishing, 2022. ISBN 9783030964474. DOI: 10.1007/978-3-030-96447-4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-96447-4>.

CHOW, Ven .Te. **Open Channel Hydraulics**. International Student Edition. New Delhi: McGraw-Hill Kogakusha Limited, 1959.

FORSTER, John W.; SKRINDE, Raymond A. Control of Hydraulic Jump by Sills. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, v. 115, n. 1, p. 973–987, 1950. DOI: 10.1061/TACEAT.0006341.

FRANCO, Davide. **Hidráulica de Canais**. [S. l.: s. n.], 2018. Material texto integrante da disciplina de hidráulica 2. Material de aula, Universidade Federal de Santa Catarina.

GOVINDA RAO, N. S.; MURALIDHAR, D. Discharge characteristics of weirs of finite-crest width. **La Houille Blanche**, Informa UK Limited, v. 49, n. 5, p. 537–545, ago. 1963. ISSN 1958-5551. DOI: 10.1051/1hb/1963036. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1051/1hb/1963036>.

GREENSHIELDS, Christopher; WELLER, Henry. **Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles**. Reading, UK: CFD Direct Ltd, 2022.

GUERRERO, Joel. **OpenFOAM 9 - Introductory Training**. [S. l.]: figshare, 2023. DOI: 10.6084/M9.FIGSHARE.16783657. Disponível em: https://figshare.com/articles/media/OpenFOAM_Introductory_Training/16783657.

H.K. VERSTEEG, W. Malalasekera. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The finite volume method**. 2. ed. [S. l.]: Person Practice Hall, 2007.

HOLZMANN, Tobias. **Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM, The basics for numerical simulations**. 4. ed. [S. l.]: Holzmann CFD, 2016.

JIYUAN TU GUAN-HENG YEOH, Chaoqun Liu. **Computational Fluid Dynamics**. 3. ed. [S. l.]: Elsevier, 2018.

MALISKA, Clovis R. **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. [S. l.]: Springer International Publishing, 2023. ISBN

9783031182358. DOI: 10.1007/978-3-031-18235-8. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-18235-8>.

MELO PORTO, Rodrigo de. **Hidráulica Básica**. 4. ed. [S. l.]: EESC-USP, 2006.

OLIVEIRA FORTUNA, Armando de. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**. 2. ed. São Paulo: EdUSP, 2020. ISBN 978-8531405266.

SEGOVIA, Roger Ivan Ponce. **Dinámica de Fluidos Computacional con OpenFOAM: Fundamentos y Estrategias Avanzadas**. [S. l.]: Independently Published, 2024. ISBN 979-8344926131.

Apêndices

APÊNDICE A – CÁLCULO DO NÚMERO DE FROUDE

O número de Froude a jusante do vertedor foi calculado como:

Figura 67 – Cálculo do número de Froude imediatamente a jusante do vertedor.

Fr	V	(gy) ^{1/2}
1,784803904	0,5	0,2801428207
gy	g	y
0,07848	9,81	0,008

Fonte: O autor.

APÊNDICE B – NÚMERO DE REYNOLDS DO ESCOAMENTO

O número de Reynolds encontrado para o canal é

Figura 68 – Cálculo do número de Reynolds para o escoamento no canal.

Calculo para o número de reynolds do canal				
Re	R	A	P	velocidade V
6587,5	0,01219	0,00195	0,16	0,5405
viscosidade cinemática				
v	h	b	Q	
0,000001	0,015	0,13	1,054	l/s
			0,001054	m3/s

Fonte: O autor.

APÊNDICE C – ESTIMATIVA DE Y^+

Figura 69 – Cálculo da distância entre a parede e o centro da primeira célula para $y^+ = 90$.

Y+ WALL DISTANCE ESTIMATION

Input

Freestream velocity:	0.54	<i>m/s</i>
Density:	1000	<i>kg/m³</i>
Dynamic viscosity:	1e-3	<i>kg/m s</i>
Reference Length:	0.0122	<i>m</i>
Desired y^+ value:	90	

Output

Reynolds number:	6.6e+3	
Estimated wall distance:	2.2e-3	<i>m</i>

Fonte: O autor.

Figura 70 – Estimativa das dimensões das 5 primeiras camadas a contar do fundo do canal e a soma total.

	4,40E-03		
2	8,80E-03	1,2	1
	1,06E-02		2
	1,27E-02		3
	1,52E-02		4
	1,82E-02		5
	6,55E-02		

Fonte: O autor.

APÊNDICE D – MÉTRICAS DE MALHA.

Figura 71 – Números gerais de malha.

```

Mesh stats
  points:          516414
  faces:           1459430
  internal faces:  1405555
  cells:           471818
  faces per cell:  6.0722249
  boundary patches: 6
  point zones:     0
  face zones:      0
  cell zones:      0

Overall number of cells of each type:
  hexahedra:       459052
  prisms:          1404
  wedges:          0
  pyramids:        0
  tet wedges:      0
  tetrahedra:      0
  polyhedra:       11362
Breakdown of polyhedra by number of faces:
  faces  number of cells
    6    975
    9   9268
   12   890
   15   137
   18    92

```

Fonte: O autor.

Figura 72 – Métricas de qualidade de malha.

```

Checking patch topology for multiply connected surfaces...
  Patch  Faces  Points  Surface topology
  inlet   1144   1232  ok (non-closed singly connected)
  outlet   754    845  ok (non-closed singly connected)
  up       5019   5249  ok (non-closed singly connected)
  floor   23348  23850  ok (non-closed singly connected)
  back    11814  12400  ok (non-closed singly connected)
  front   11796  12382  ok (non-closed singly connected)

Checking geometry...
  Overall domain bounding box (-3.297052e-17 0 -8.4134089e-17) (0.95999998 0.13 0.14)
  Mesh has 3 geometric (non-empty/wedge) directions (1 1 1)
  Mesh has 3 solution (non-empty) directions (1 1 1)
  Boundary openness (-1.4256867e-16 -1.4117643e-15 8.6565849e-15) OK.
  Max cell openness = 3.0815854e-16 OK.
  Max aspect ratio = 15.488744 OK.
  Minimum face area = 2.2461925e-07. Maximum face area = 0.0001174753. Face area magnitudes OK.
  Min volume = 6.8599377e-10. Max volume = 1.1735161e-06. Total volume = 0.016596573. Cell volume OK.
  Mesh non-orthogonality Max: 73.93858 average: 5.7219239
  *Number of severely non-orthogonal (> 70 degrees) faces: 136.
  Non-orthogonality check OK.
  <<Writing 136 non-orthogonal faces to set nonOrthoFaces
  Face pyramids OK.
  Max skewness = 3.3371728 OK.
  Coupled point location match (average 0) OK.

```

Fonte: O autor.

APÊNDICE E – PLANILHAS DAS CURVAS DE REMANSO M1 E M3

Figura 73 – Planilha de cálculo da curva de remanso M1.

n		So (m/m)	Q (m³/s)	b (m)	g (m/s²)		h0 (m)	x0 (m)	Dh (m)	
0,02		0,00333	0,00106	0,13	9,81			0,12	0,83	
h(m)	A = b . h	u = Q / A	E = (u²/2g + h)	P = b + 2h	R = A / P	Am = (Ai + Ai+1)/2	R = (Ri + Ri+1)/2	Sf = Q²n²/A²R(4/3)	deltaX = deltaE/(S0 - Sf)	xi+1 = xi + deltaX
0,12	0,01560	0,0679	0,1202	0,3700	0,04216	-	-	-	-	0,83
0,1199	0,01559	0,0680	0,1201	0,3698	0,04215	0,01559	0,04216	0,0000315	-0,030167	0,80
0,1198	0,01557	0,0681	0,1200	0,3696	0,04214	0,01558	0,04214	0,0000316	-0,030168	0,77
0,1197	0,01556	0,0681	0,1199	0,3694	0,04213	0,01557	0,04213	0,0000316	-0,030168	0,74
0,1196	0,01555	0,0682	0,1198	0,3692	0,04211	0,01555	0,04212	0,0000317	-0,030168	0,71
0,1195	0,01554	0,0682	0,1197	0,3690	0,04210	0,01554	0,04211	0,0000318	-0,030168	0,68

Fonte: O autor.

Anexos

ANEXO A – EQUAÇÕES DO MOVIMENTO NO REFERENCIAL CARTESIANO

A Equação da continuidade em coordenadas retangulares:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Para as equações da conservação de quantidade de movimento nos eixos cartesianos x, y e z, possuem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \left(S_u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + S'_u \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left(S_v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + S'_v \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \left(S_w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + S'_w \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ANEXO B – ESTIMATIVA DE y^+

A estimativa do y^+ é um processo iterativo e pode ser estimado pelos seguintes passos (Guerrero, 2023):

$$1) \ Re = \frac{\rho \times U \times L}{\mu}$$

$$2) \ C_f = 0,058 \times Re^{-0,2}$$

$$3) \ \tau_w = \frac{1}{2} \times C_f \times \rho \times U_\infty^2$$

$$4) \ U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$5) \ y = \frac{\mu \times y^+}{\rho \times U_\tau}$$

O termo C_f é o coeficiente de atrito de parede (*Skin Friction Coefficient*), medida adimensional que relaciona a tensão de cisalhamento na parede (τ_w) e a velocidade característica do escoamento (U). Essa correlação é para placa plana.

ANEXO C – STEP METHOD

O *Step Method* é um método de diferenças finitas e foi obtido de (Franco, 2018). Os passos foram os seguintes:

- 1) $A = b \cdot h$
- 2) $u = Q/A$
- 3) $E = \left(\frac{u^2}{2g} + h \right)$
- 4) $P = b + 2h$
- 5) $R = A/P$
- 6) $\bar{A} = \frac{A_i + A_{i+1}}{2}$
- 7) $\bar{R} = \frac{R_i + R_{i+1}}{2}$
- 8) $S_f = \frac{Q^2 n^2}{(\bar{A})^2 (\bar{R})^{4/3}}$
- 9) $\Delta x = \frac{\Delta E}{S_0 - S_f}$
- 10) $x_{i+1} = x_i + \Delta x$

Os valores disponíveis para o cálculo são Número de Manning (n), declividade (S_0), vazão (Q), largura do canal (b) e gravidade g . Valores de entrada são altura inicial em z (h_0), localização na horizontal (x_0) e incremento no passo (Δh).

ANEXO D – TRANSPORTE DA VORTICIDADE

Vorticidade descreve a tendência de um fluido rotacionar localmente, como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$

Para um fluido incompressível, vorticidade obedece a seguinte equação de transporte:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \mathbf{u}) - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$