

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM MATEMÁTICA INDUSTRIAL

JANAINA CRISTINA MENDES CARVALHO DOS SANTOS RAMOS

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS USANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS

CURITIBA

2023

JANAINA CRISTINA MENDES CARVALHO DOS SANTOS RAMOS

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS USANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título do grau de Bacharel em Matemática Industrial no curso de Matemática Industrial, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Thiago de Oliveira Quinelato, DSc

CURITIBA

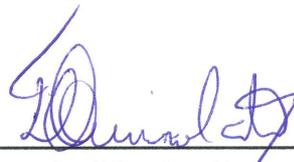
2023

TERMO DE APROVAÇÃO

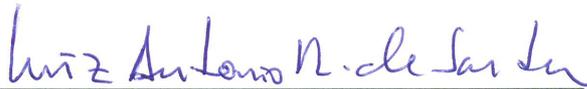
JANAINA CRISTINA MENDES CARVALHO DOS SANTOS RAMOS

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

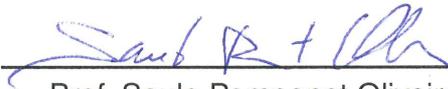
Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título do grau de Bacharela em Matemática Industrial no curso de Matemática Industrial, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



Prof. Thiago de Oliveira Quinelato, DSc
Orientador



Prof. Luiz Antonio Ribeiro de Santana, DSc.
UFPR



Prof. Saulo Pomponet Oliveira, PhD.
UFPR

Curitiba, 1 de Março de 2023.

AGRADECIMENTOS

Meu primeiro agradecimento é a Deus, por toda a força e amparo sempre.

Depois aos meus pais, Marcia e Wladimir, pois foram meu alicerce, por eles cheguei até o fim. E ao meu filho Anderson Henrique que foi a luz em meio a tanta escuridão. A minha Avó Renete e minha irmã Andréa por seu exemplo e esforço, e por não me deixarem desistir.

Ao Professor Luiz Antônio Ribeiro de Santana e Thiago de Oliveira Quinelato, pois vocês não desistiram de mim e apoiaram até o fim, sem falar na paciência e zelo que tiveram.

E por último, mas não menos importante, três amigas que fiz dentro da universidade e me acompanham em todos os momentos e me tiraram de muita enrascada, Ana, Francine, Oksana.

RESUMO

Neste trabalho é estudado o método dos Elementos Finitos para solução de Equações Diferenciais que aparecem na modelagem do escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso rígido totalmente saturado. O problema é abordado pelo modelo de Darcy com valores de contorno.

São apresentados testes realizados em Julia que mostram diversos cenários que existem nesse modelo de escoamento unidimensional (com e sem injeção de fluido no meio, com valores de pressão diferentes nos extremos do intervalo e com coeficientes de difusão diferentes).

Palavras-chaves: método dos elementos finitos; escoamento de fluidos em meios porosos; lei de Darcy.

ABSTRACT

In this work, it is studied the Finite Element method for solving Differential Equations arising in the modeling of the flow of an incompressible fluid through a totally saturated rigid porous medium. The problem is addressed by the Darcy model with boundary values.

Tests carried out in Julia are presented, showing several scenarios that exist in this one-dimensional flow model (with and without fluid injection in the medium, with different pressure values at the extremes of the interval and with different diffusion coefficients).

Key-words: finite element method; fluid flow in porous media; Darcy's law.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	OBJETIVOS	7
1.2	JUSTIFICATIVA	7
1.3	METODOLOGIA	7
1.4	REFERENCIAL TEÓRICO E BIBLIOGRAFIA BÁSICA	7
1.5	CRONOGRAMA	8
2	ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS	9
3	ELEMENTOS FINITOS – TEORIA BÁSICA	13
4	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	17
5	CONCLUSÕES	26
	REFERÊNCIAS	27

1 INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS

Neste trabalho iremos estudar Métodos de Elementos Finitos para escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso rígido totalmente saturado.

1.2 JUSTIFICATIVA

Escolhemos esse problema pois com ele conseguimos formular e entender melhor sobre o escoamento de diversos fluidos em meios porosos, como por exemplo o movimento da medula óssea em um fêmur, o escoamento de medicamentos injetáveis em órgãos e tecidos, a produção de petróleo e gás natural, entre outros.

1.3 METODOLOGIA

O primeiro passo é estudar um modelo fenomenológico que descreve o escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso rígido. Depois, estudaremos as equações diferenciais que compõem o modelo matemático correspondente e, por fim, usaremos o Método dos Elementos Finitos para a aproximação computacional das quantidades físicas envolvidas no escoamento de Darcy (velocidade e pressão). Consideraremos para uma visão mais específica um problema unidimensional e estudaremos apenas os casos com o meio e o fluido incompressíveis. Os problemas testes para melhor visualização desse modelo serão apresentados através de uma tabela e gráficos de experimentos realizados em um código próprio desenvolvido na linguagem Julia (BEZANSON et al., 2017).

1.4 REFERENCIAL TEÓRICO E BIBLIOGRAFIA BÁSICA

O modelo que vamos estudar é amplamente aplicado na modelagem de diversos fenômenos físicos. Um deles é no escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso rígido totalmente saturado. Por ser um modelo amplamente usado, há uma vasta bibliografia de apoio e escolhemos como base para esse trabalho as publicações de Correa (2006) e Allen III e Isaacson (2019).

Para entender melhor o escoamento de um fluido por um meio poroso pensemos em uma esponja de cozinha, pois ela é um ótimo exemplo de meio poroso. Nela existem furos, de tamanhos variados, por todos os ângulos que se observar. Agora pensemos na água passando por esses furos: ela entra, passa pelo interior da esponja

até encontrar um local para sair; esse é um exemplo de escoamento de um fluido em um meio poroso.

Aprofundando um pouco mais para o escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso rígido totalmente saturado, pensemos em um coral no oceano: ele é incompressível, e embaixo da água fica saturado.

Esse problema pode ser modelado por equações diferenciais e nessa modelagem levaremos em consideração as grandezas físicas de pressão e velocidade do fluido que serão apresentados no próximo capítulo.

1.5 CRONOGRAMA

TABELA 1 – CRONOGRAMA

Tarefa	Semana															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Revisão bibliográfica	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■						
Configuração do ambiente				■												
Escrita do projeto de TCC					■	■	■	■								
Implementação					■	■	■	■	■							
Escrita do TCC							■	■	■	■	■	■	■	■	■	
Entrega para a banca															■	
Preparação da apresentação															■	■
Apresentação																■

FONTE: Preparado pela autora.

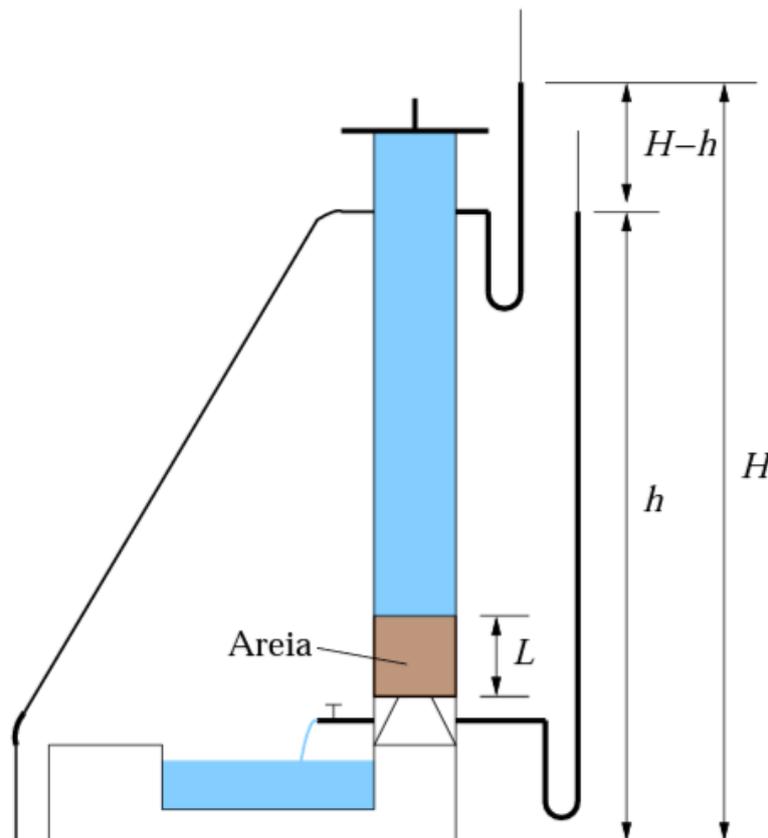
2 ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

Segundo Correa (2006), o escoamento de um fluido newtoniano incompressível em um meio poroso rígido é representado por um sistema de equações diferenciais parciais composto pela conservação da massa fluida mais a lei de Darcy, que relaciona a velocidade média de escoamento nos poros com o gradiente do potencial hidráulico.

Descreveremos a lei de Darcy, a partir de seu caráter experimental e a partir de hipóteses simplificadoras para o balanço de momento linear de um fluido newtoniano incompressível que escoar em um meio poroso rígido.

O experimento de Henri Darcy consistia em fazer escoar, sob pressão, um fluido de massa específica e viscosidade uniformes através de um tubo cilíndrico de seção transversal uniforme A , com uma parte de espessura L preenchida com areia completamente saturada (Fig. 1).

FIGURA 1 – EXPERIMENTO DE DARCY



FONTE: Adaptado de Correa (2006).

Nos extremos da parte preenchida com areia, Darcy mediu a carga hidráulica h . Essa grandeza mede a energia potencial de uma massa unitária do fluido localizado

no ponto em estudo, possuindo duas componentes:

$$h = z + \frac{p}{\rho g}, \quad (2.1)$$

onde:

- z – elevação do ponto;
- p – pressão no fluido;
- ρ – massa específica do fluido;
- g – magnitude da aceleração da gravidade.

Sabendo que o volume do fluido que atravessa a seção em um certo tempo é proporcional à área da seção transversal e à diferença de carga ($H - h$) e inversamente proporcional ao comprimento, resulta assim em:

$$Q \propto A \frac{H - h}{L}, \quad (2.2)$$

onde:

- Q – taxa de escoamento;
- A – área da seção;
- L – comprimento.

Sendo K a constante de condutividade hidráulica, teremos:

$$Q = -KA \frac{H - h}{L}. \quad (2.3)$$

Tomando o limite com $L \rightarrow 0$ teremos:

$$Q = -KA \frac{dh}{dl}. \quad (2.4)$$

Assim chegamos à equação de velocidade de Darcy, dada por

$$u = \frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dl}, \quad (2.5)$$

onde u é a velocidade de Darcy.

A condutividade hidráulica K é dada por (CORREA, 2006)

$$K = \frac{\kappa \rho g}{\mu}, \quad (2.6)$$

onde

- κ é o tensor de permeabilidade intrínseca do meio;
- μ é a viscosidade do fluido.

De forma geral, quando há diferença de potencial em mais de uma direção, usamos o gradiente de h . Calculando o gradiente da carga hidráulica h , definida em (2.1), obtemos:

$$\nabla h = \nabla z + \frac{1}{\rho g} \nabla p. \quad (2.7)$$

Aplicando (2.6) em (2.5) chegamos na seguinte equação:

$$u = -\frac{\kappa \rho g}{\mu} \frac{dh}{dl}. \quad (2.8)$$

Como estamos assumindo o caso em uma dimensão, temos

$$\frac{dh}{dl} = \nabla h. \quad (2.9)$$

Então ficamos com (2.8) da seguinte forma:

$$u = -\frac{\kappa \rho g}{\mu} \nabla h. \quad (2.10)$$

Aplicando ∇h chegamos a

$$u = -\frac{\kappa}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z). \quad (2.11)$$

Assumindo que o escoamento é horizontal e todos os pontos estão na mesma altura, temos $\nabla z = 0$ e chegamos a

$$u = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p. \quad (2.12)$$

Da conservação de massa no meio obtemos a equação

$$\operatorname{div} u = f. \quad (2.13)$$

Aplicando (2.12) em (2.13) teremos:

$$-\frac{\kappa}{\mu} \operatorname{div}(\nabla p) = f. \quad (2.14)$$

Como estamos trabalhando em uma dimensão, temos:

$$-\frac{\kappa}{\mu} \frac{d}{dx} \frac{dp}{dx} = f, \quad (2.15)$$

ou seja, o nosso problema modelo será:

Problema P: Dados a função f e os valores \bar{h} e \bar{p} e sendo κ o tensor de permeabilidade do meio e μ a viscosidade do fluido, queremos encontrar o potencial hidráulico $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\frac{\kappa}{\mu} \frac{d^2 p(x)}{dx^2} = f(x) \text{ em } \Omega, \quad (2.16)$$

com condições de contorno

$$u = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{dp}{dx} = \bar{h} \text{ sobre } \Gamma_h \quad \text{e} \quad (2.17)$$

$$p = \bar{p} \text{ sobre } \Gamma_p. \quad (2.18)$$

Neste trabalho iremos considerar casos com $\Gamma_h = \emptyset$.

O Problema P é uma formulação que pode ser aplicada na modelagem de vários problemas de diferentes áreas do conhecimento.

3 ELEMENTOS FINITOS – TEORIA BÁSICA

Neste capítulo iremos fazer uma revisão de conceitos utilizados neste trabalho, a partir de Allen III e Isaacson (2019).

Em geral, os métodos de elementos finitos oferecem mais flexibilidade do que métodos de diferenças finitas. Por exemplo, a formulação de elementos finitos produz técnicas precisas e rigorosas para problemas com uma variedade de condições de contorno sendo incorporadas naturalmente ao problema, mesmo quando temos um domínio que não seja retangular.

Seja Ω um intervalo real. Vamos definir o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis (L^2) em Ω :

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} v^2 dx < \infty \right\}.$$

As funções em $H^1(\Omega)$ são funções em $L^2(\Omega)$ cuja derivada também é uma função em $L^2(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{dv}{dx} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Definimos também o produto interno em $L^2(\Omega)$ e em $H^1(\Omega)$, respectivamente

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_0 &= \int_{\Omega} v(x)w(x)dx = \langle v, w \rangle \quad \text{e} \\ \langle v, w \rangle_1 &= \int_{\Omega} [v(x)w(x) + v'(x)w'(x)] dx \end{aligned}$$

e as normas $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, respectivamente

$$\|v\|_0 := \langle v, v \rangle_0^{1/2} = \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|v\|_1 := \langle v, v \rangle_1^{1/2}.$$

Vamos agora descrever a formulação básica para um problema de valor de contorno (PVC) dado pelo Problema P, usando ideias do cálculo de variações. Considere os espaços

$$\mathcal{P} = \{p \in H^1(\Omega); p|_{\Gamma_p} = \bar{p}\} \quad \text{e} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{Q} = \{q \in H^1(\Omega); q|_{\Gamma_p} = 0\}. \quad (3.2)$$

Multiplicamos (2.16) por uma função $q \in \mathcal{Q}$ e integramos em Ω :

$$- \int_{\Omega} \frac{\kappa}{\mu} \frac{d^2 p}{dx^2} q dx = \int_{\Omega} f q dx. \quad (3.3)$$

A seguir, usamos uma integração por partes, obtendo

$$-\frac{\kappa}{\mu} \left[\left(\frac{dp}{dx} q \right) \Big|_0^1 - \int_{\Omega} \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx} dx \right] = \int_{\Omega} f q dx, \quad (3.4)$$

e aplicamos as condições de contorno (2.17) e (2.18), chegando à formulação variacional:

Problema PV: Encontrar $p \in \mathcal{P}$ tal que

$$\frac{\kappa}{\mu} \int_{\Omega} \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx} dx = \int_{\Omega} f q dx \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \quad (3.5)$$

Quando trabalhamos com o escoamento de um fluido incompressível em um meio rígido onde não se tem troca entre meio poroso e o ambiente, ou seja a mesma quantidade de líquido que entrar no meio deverá sair, nossa integral ficará:

$$\frac{\kappa}{\mu} \int_{\Omega} \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx} dx = \int_{\Omega} f q dx = 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \quad (3.6)$$

Podemos também definir assim:

Problema PV: Encontrar $p \in \mathcal{P}$ tal que

$$c(p, q) = \mathcal{F}(q) \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \quad (3.7)$$

onde

$$c(p, q) = \left\langle \frac{\kappa}{\mu} \nabla p, \nabla q \right\rangle \text{ e } \mathcal{F}(q) = \langle f, q \rangle. \quad (3.8)$$

Vamos construir uma malha no domínio $\Omega = (0, 1)$:

$$\Delta := \{x_0, x_1, \dots, x_M\},$$

com $x_0 = 0$ e $x_M = 1$ e $x_{j-1} < x_j$. Definimos também o conjunto de elementos (intervalos)

$$\tau_h = \{(x_{j-1}, x_j), i = 1, 2, \dots, M\}.$$

Seja (S_h^k) o espaço dos elementos finitos lagrangianos contínuos $C^0(\bar{\Omega})$ de grau $k \geq 1$:

$$S_h^k = \{\varphi_h \in C^0(\bar{\Omega}); \varphi_h|_{\Omega^e} \in P_k(\Omega^e) \forall \Omega^e \in \tau_h\}, \quad (3.9)$$

onde $P_k(\Omega^e)$ denota o espaço dos polinômios de grau máximo até k em Ω^e . Usaremos o espaço vetorial S_h^1 que tem base $\{l_0, l_1, l_2, \dots, l_M\}$. Um elemento típico dessa base tem a forma

$$l_j(x) = \begin{cases} (x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1}), & \text{se } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ (x_{j+1} - x)/(x_{j+1} - x_j), & \text{se } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Como exemplo, o gráfico da função de forma $l_5(x)$ é mostrado na Figura 2. Na Figura 3 podemos ver os gráficos de todas as funções de forma utilizadas neste trabalho.

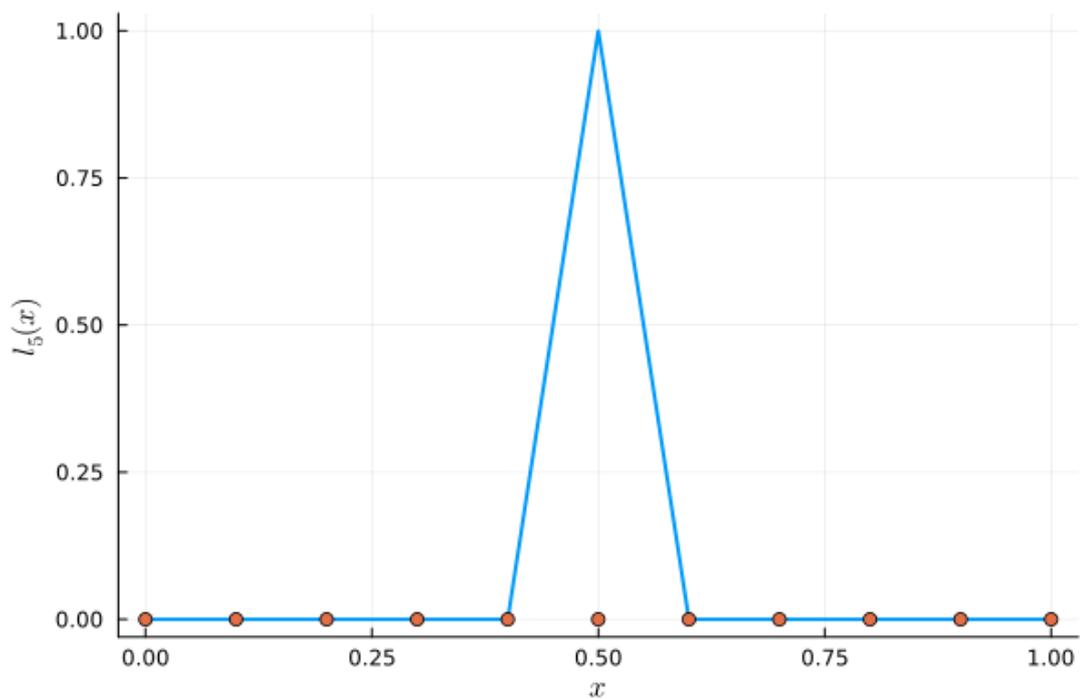
Definimos os espaços $P_h^1 = S_h^1 \cap \mathcal{P}$ e $Q_h^1 = S_h^1 \cap \mathcal{Q}$, com \mathcal{P} como definido em (3.1) e \mathcal{Q} como definido em (3.2).

Problema Ph (elementos finitos): Encontrar $p_h \in P_h^1$ satisfazendo a Equação de Galerkin:

$$c(p_h, q_h) = \mathcal{F}(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h^1, \quad (3.11)$$

com $\bar{p}(0) = \bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ e $\bar{p}(1) = \bar{p}_M \in \mathbb{R}$.

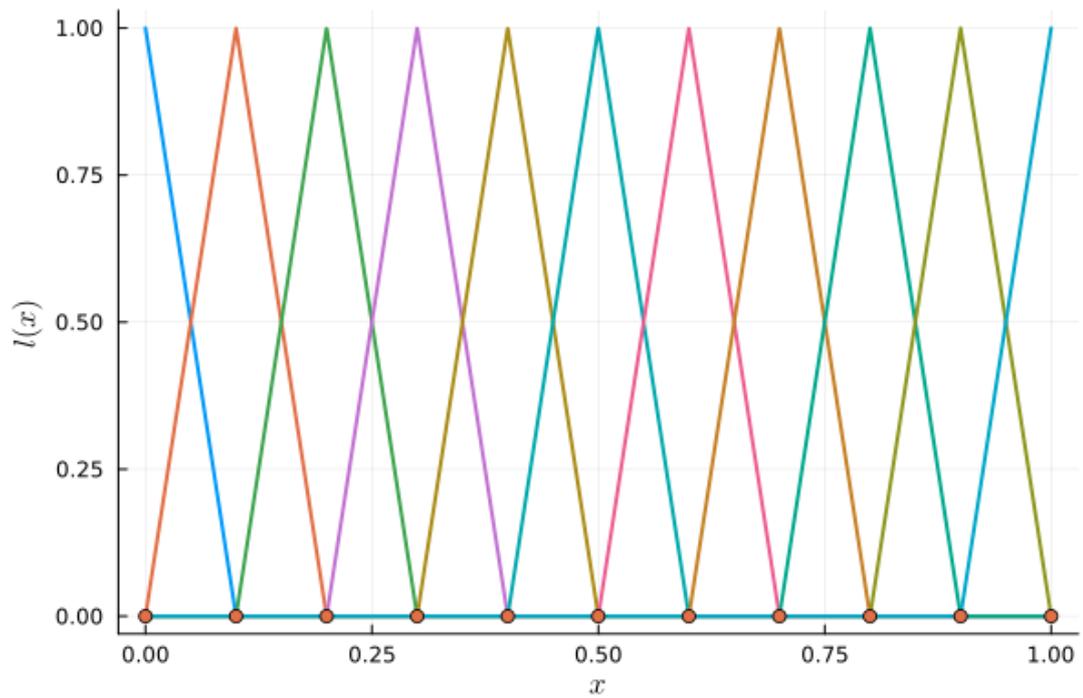
FIGURA 2 – FUNÇÃO DE FORMA



FONTE: Preparado pela autora.

LEGENDA: Gráfico da função de forma $l_5(x)$. Os pontos em laranja são os nós da malha.

FIGURA 3 – FUNÇÕES DE FORMA



FONTE: Preparado pela autora.

LEGENDA: Gráficos das funções de forma usadas neste trabalho. Os pontos em laranja são os nós da malha.

4 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Para resolver o Problema Ph, escrevemos a função $p_h(x)$ como combinação linear das funções de forma (3.10):

$$p_h(x) = \sum_{j=0}^M p_{h_j} l_j(x) = \bar{p}_0 l_0(x) + \sum_{j=1}^{M-1} p_{h_j} l_j(x) + \bar{p}_M l_M(x), \quad (4.1)$$

onde os coeficientes $p_{h_1}, p_{h_2}, \dots, p_{h_{M-1}}$ devem ser determinados.

Como Q_h^1 é de dimensão finita, basta impor a Equação (3.11) para q_h variando sobre os elementos de uma base para Q_h^1 (por exemplo, $\{l_1, l_2, \dots, l_{M-1}\}$). Portanto, as equações de Galerkin se reduzem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\kappa}{\mu} p'_h, l'_1 \right\rangle &= \langle f, l_1 \rangle, \\ \left\langle \frac{\kappa}{\mu} p'_h, l'_2 \right\rangle &= \langle f, l_2 \rangle, \\ &\vdots \\ \left\langle \frac{\kappa}{\mu} p'_h, l'_{M-1} \right\rangle &= \langle f, l_{M-1} \rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vamos aplicar a Equação (4.1) no sistema (4.2) e chegaremos a matriz formada por

$$\left\langle \frac{\kappa}{\mu} \sum_{j=1}^{M-1} p_{h_j} l'_j, l'_i \right\rangle = \langle f, l_i \rangle - \left\langle \frac{\kappa}{\mu} (\bar{p}_0 l'_0 + \bar{p}_M l'_M), l'_i \right\rangle, \quad (4.3)$$

dando origem ao sistema

$$\frac{\kappa}{\mu} \begin{bmatrix} \langle l'_1, l'_1 \rangle & \langle l'_2, l'_1 \rangle & \cdots & \langle l'_{M-1}, l'_1 \rangle \\ \langle l'_1, l'_2 \rangle & \langle l'_2, l'_2 \rangle & \cdots & \langle l'_{M-1}, l'_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l'_1, l'_{M-1} \rangle & \langle l'_2, l'_{M-1} \rangle & \cdots & \langle l'_{M-1}, l'_{M-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{h_1} \\ p_{h_2} \\ \vdots \\ p_{h_{M-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle - \frac{\kappa}{\mu} \bar{p}_0 \langle l'_0, l'_1 \rangle \\ \langle f, l_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_{M-1} \rangle - \frac{\kappa}{\mu} \bar{p}_M \langle l'_M, l'_{M-1} \rangle \end{bmatrix}$$

Fazendo os produtos internos chegamos a uma matriz tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & X & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}$$

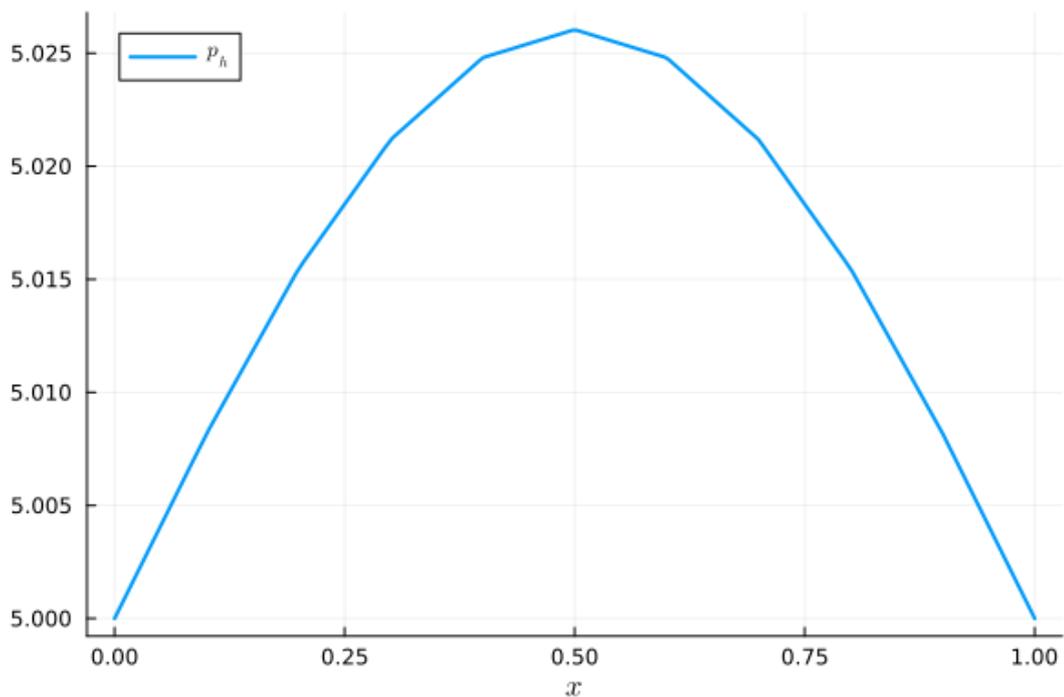
Para demonstrar a efetividade do método apresentado, implementamos em Julia (BEZANSON et al., 2017) uma série de experimentos, cujos parâmetros são mostrados na Tabela 2. Os resultados são exibidos nas Figuras 4 a 17. São mostrados os gráficos da pressão em todos os casos e da velocidade para os casos 4, 7 e 10. As aproximações para a velocidade u_h vêm da Equação (2.12) calculada com a função p_h aproximada.

TABELA 2 – EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Parâmetros	Experimentos										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f	$-x^2 + x$					0	0	0	$-x^2 + x$		0
\bar{p}_0	5	5	2.5	0	0	0	5	5	5	5	5
\bar{p}_M	5	0	0	0	5	0	0	5	5	0	5
κ/μ	1	1	1	1	1	1	1	1	$\begin{cases} 1, & x < 0.5, \\ 10, & x \geq 0.5. \end{cases}$		

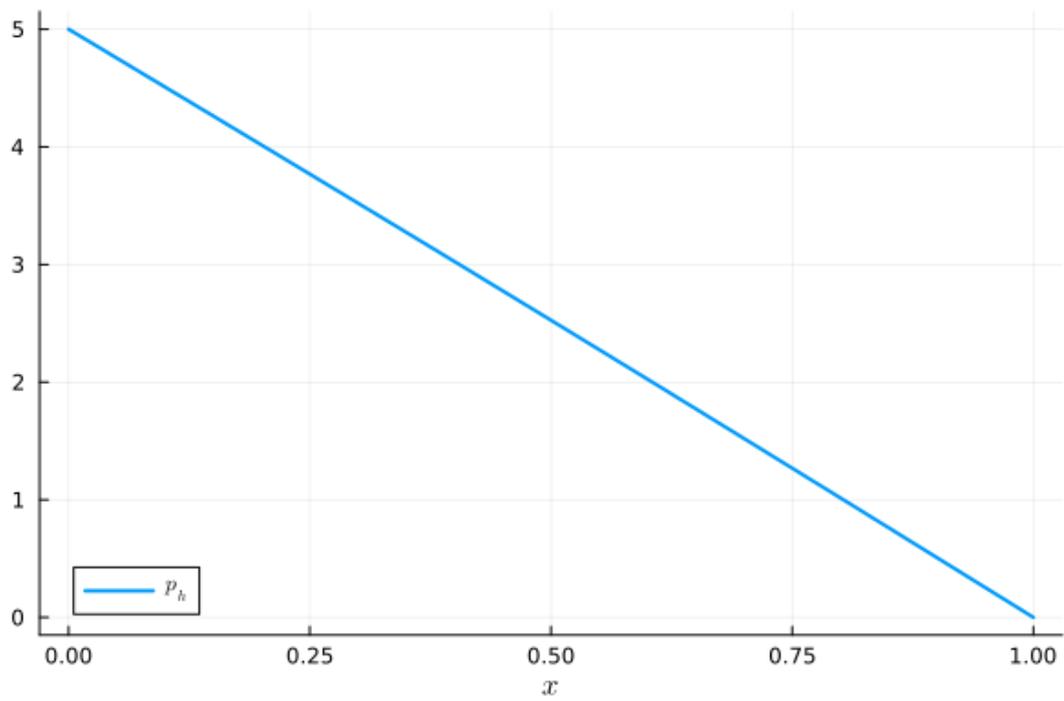
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 4 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 1



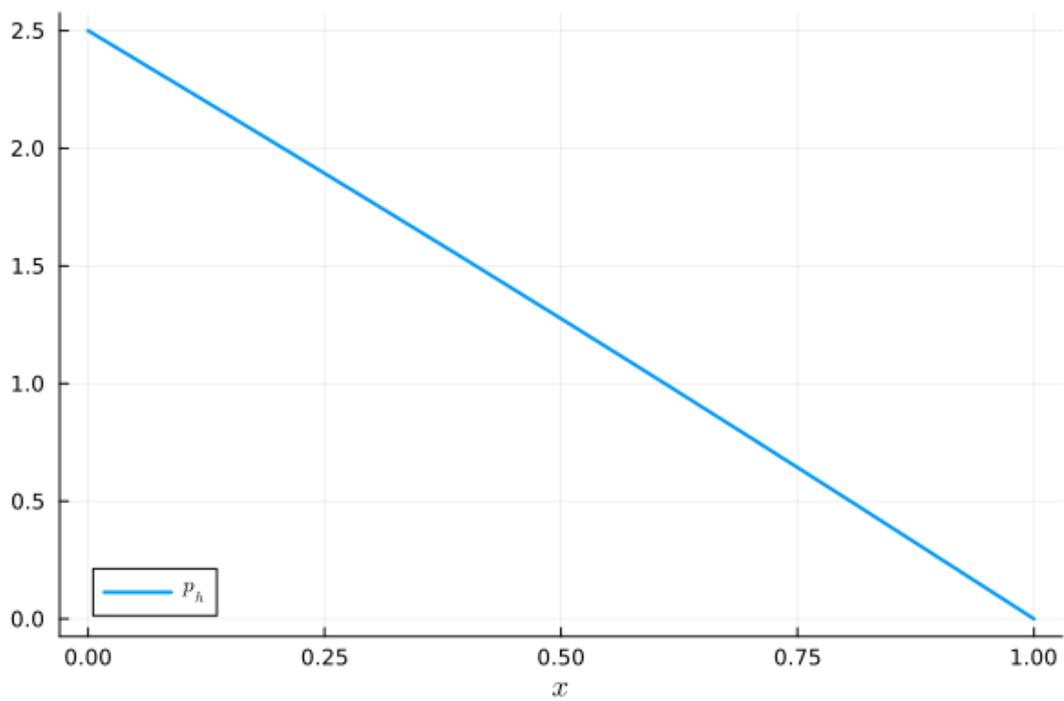
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 5 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 2



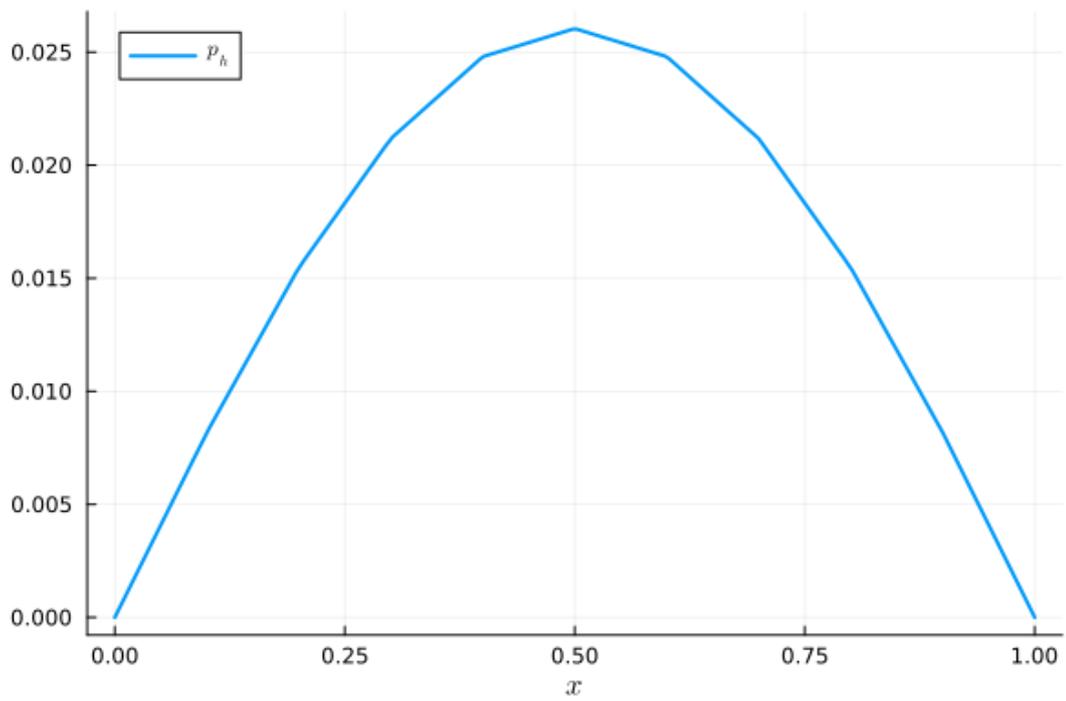
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 6 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 3



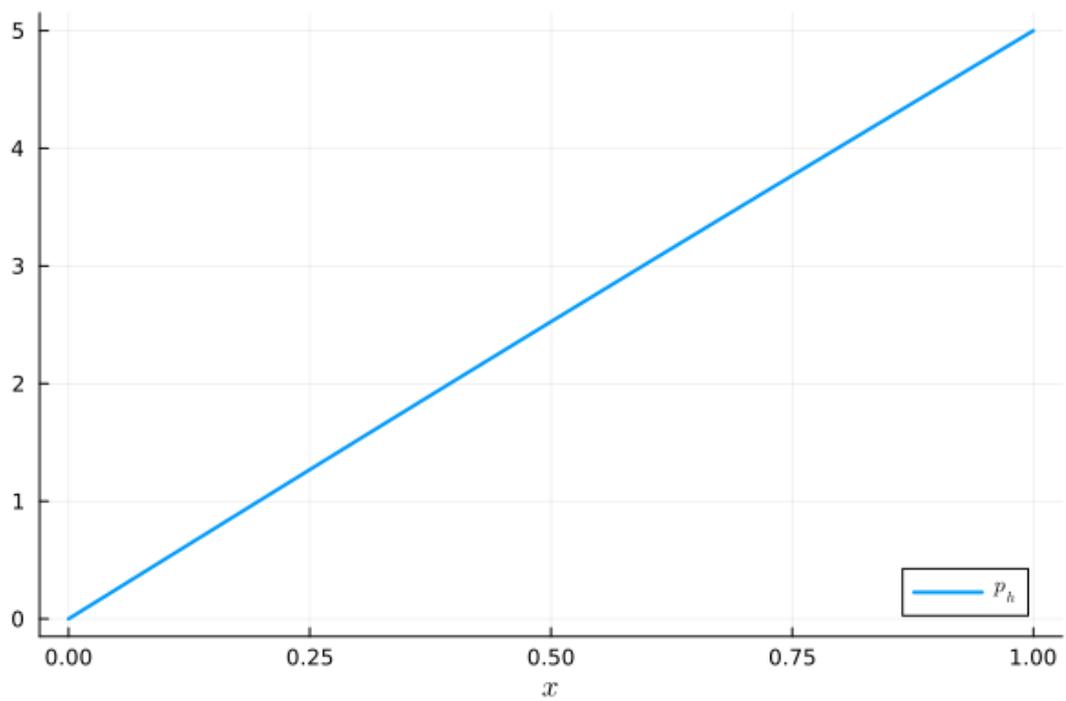
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 7 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 4



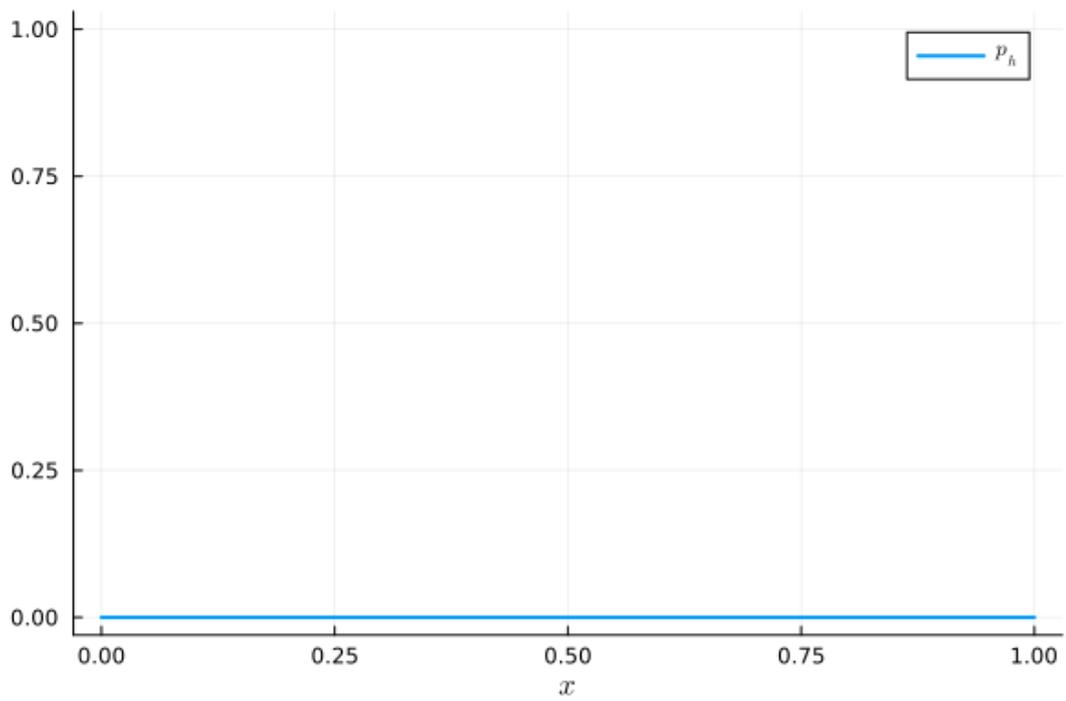
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 8 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 5



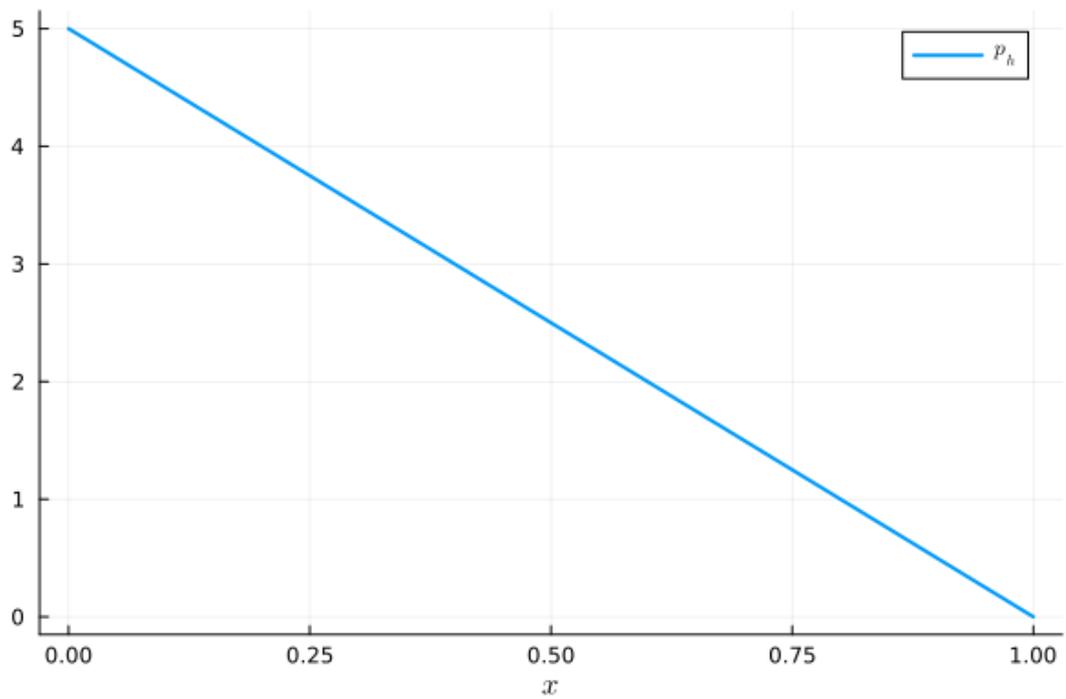
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 9 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 6



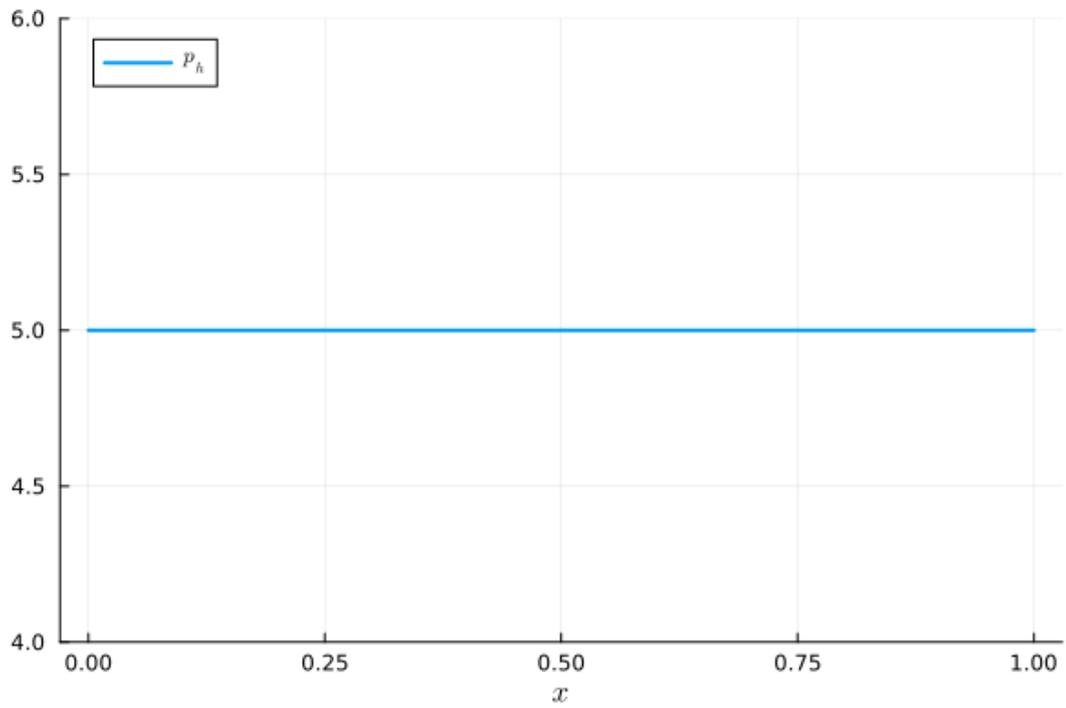
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 10 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 7



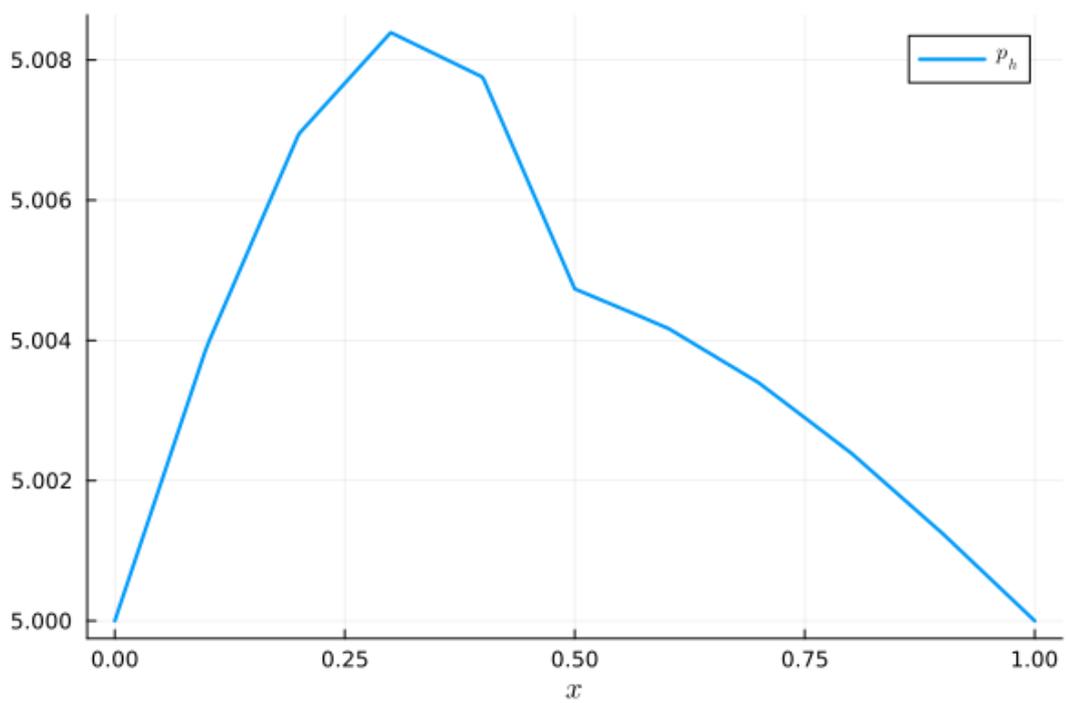
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 11 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 8



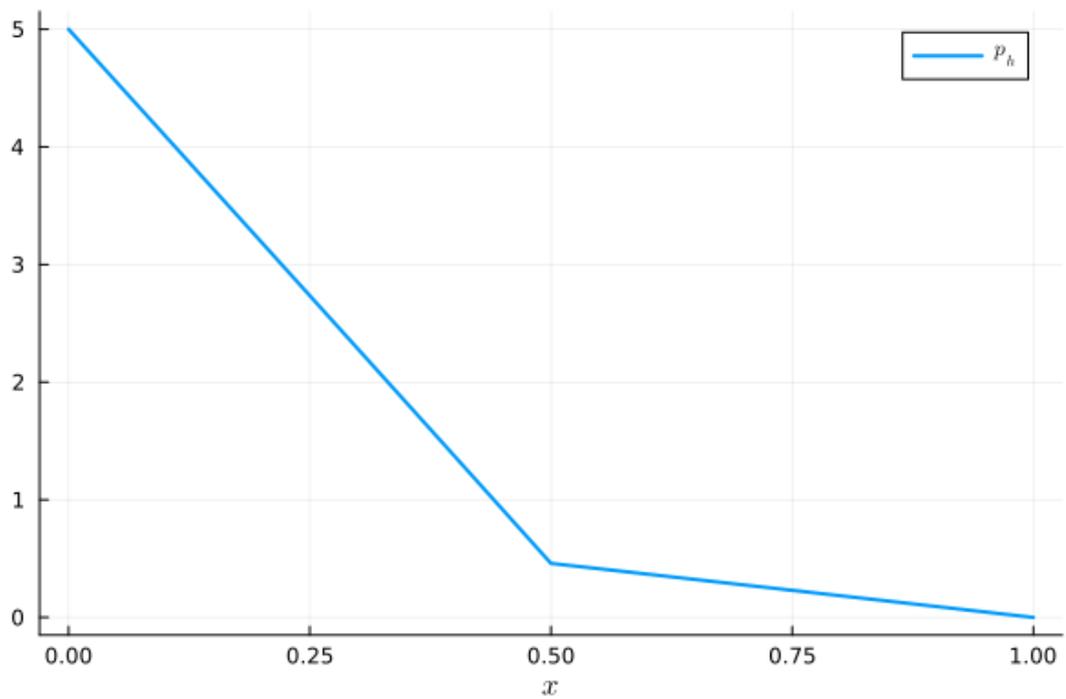
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 12 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 9



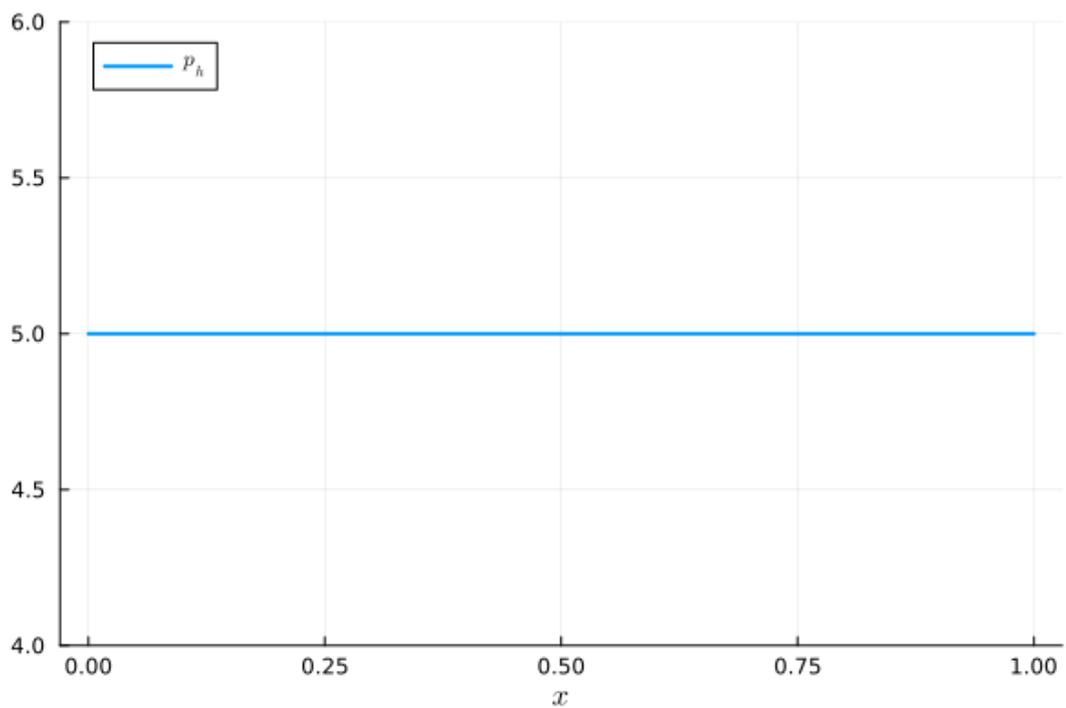
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 13 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 10



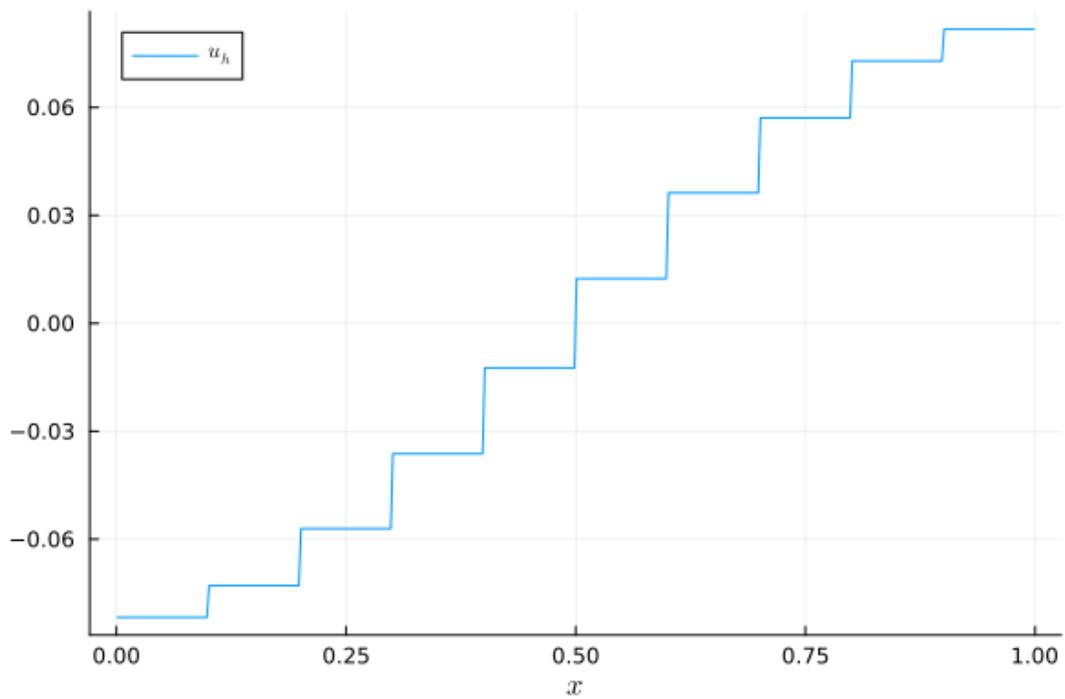
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 14 – GRÁFICO DA PRESSÃO APROXIMADA NO EXPERIMENTO 11



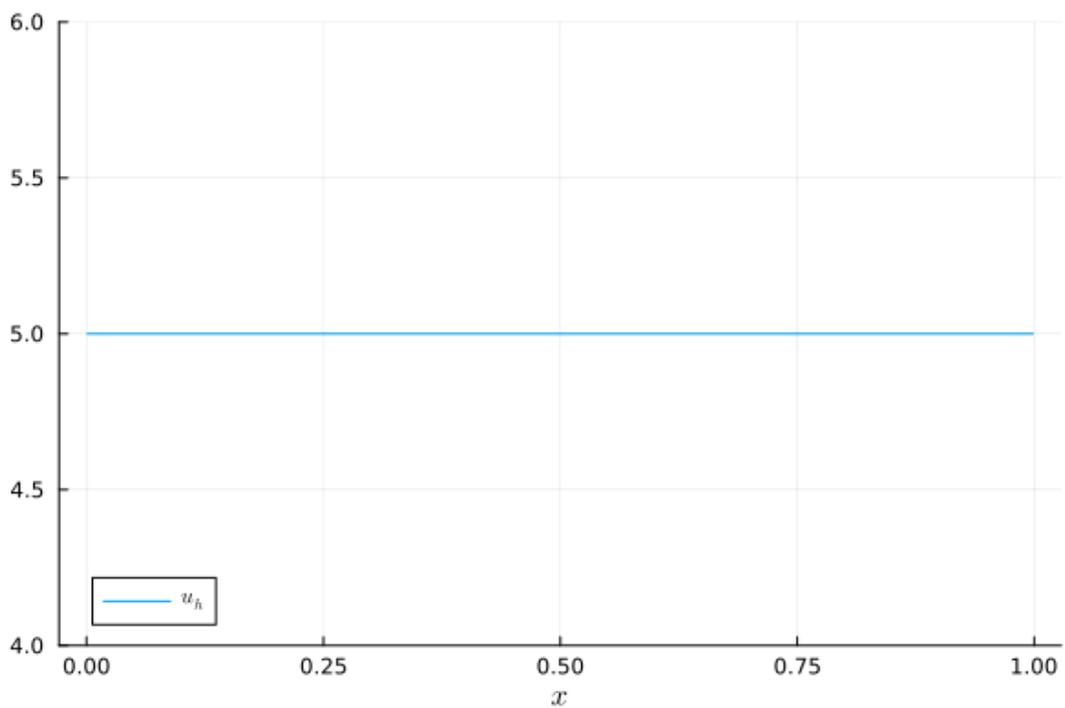
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 15 – GRÁFICO DA VELOCIDADE DO EXPERIMENTO 4



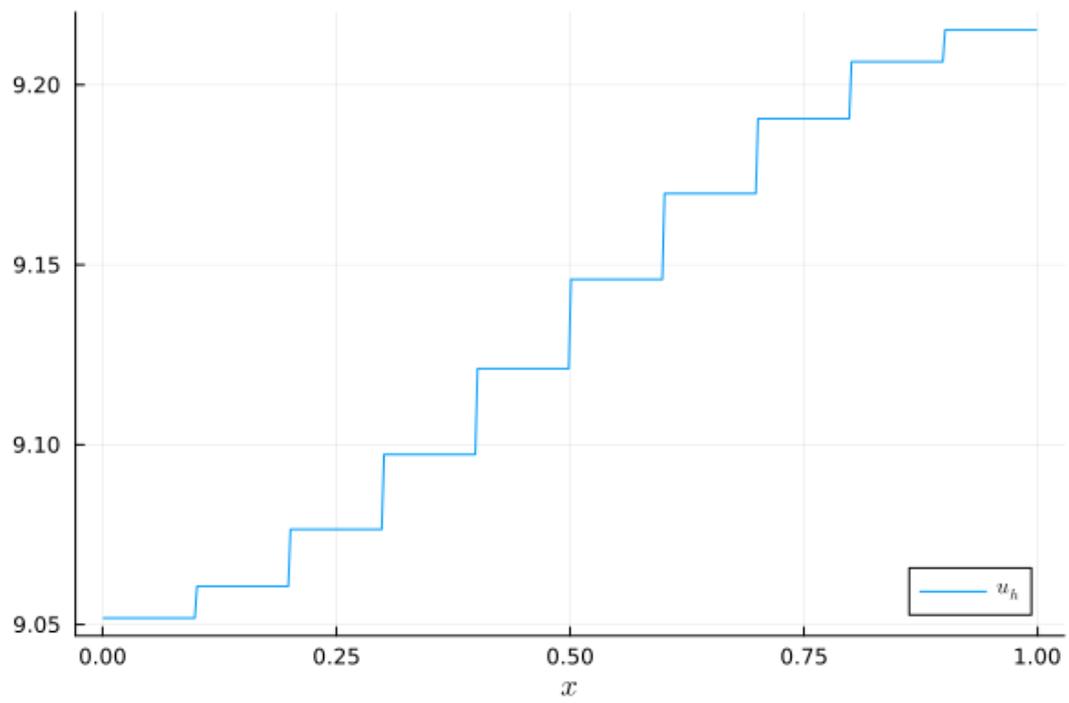
FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 16 – GRÁFICO DA VELOCIDADE DO EXPERIMENTO 7



FONTE: Preparado pela autora.

FIGURA 17 – GRÁFICO DA VELOCIDADE DO EXPERIMENTO 10



FONTE: Preparado pela autora.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi estudada a aplicação do método dos Elementos Finitos na solução de Equações Diferenciais que modelam o escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso rígido totalmente saturado. O modelo utilizado foi baseado na lei de Darcy e na conservação de massa, com valores de contorno nos extremos de um domínio Ω unidimensional.

O método dos Elementos Finitos pode ser usado inclusive quando a solução analítica para os modelos matemáticos for muito complicada de ser obtida ou não for conhecida.

Para a implementação computacional foram escolhidas funções simples para fonte e para o coeficiente de difusão a fim de verificar a implementação do programa e para uma fácil visualização do resultado da aplicação do método. Casos mais complexos (em que a fonte ou o coeficiente de difusão são funções mais complicadas) podem ser facilmente resolvidos fazendo alterações pontuais no código.

REFERÊNCIAS

ALLEN III, M. B.; ISAACSON, E. L. **Numerical Analysis for Applied Science**. 2. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 7, 13.

BEZANSON, J.; EDELMAN, A.; KARPINSKI, S.; SHAH, V. B. Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing. **SIAM Review**, v. 59, n. 1, p. 65–98, 2017. DOI: [10.1137/141000671](https://doi.org/10.1137/141000671). Citado 2 vezes nas páginas 7, 18.

CORREA, M. R. **Métodos de Elementos Finitos Estabilizados para Escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy Acoplados**. 2006. Tese de Doutorado – Laboratório Nacional de Computação Científica. Citado 3 vezes nas páginas 7, 9, 10.