

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GUSTAVO HENRIQUE SILVA SARTURI

ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
APLICADAS A UM SISTEMA BANCÁRIO

CURITIBA

2023

GUSTAVO HENRIQUE SILVA SARTURI

ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
APLICADAS A UM SISTEMA BANCÁRIO

Trabalho apresentado como requisito parcial
para a obtenção do título de Bacharel em Mate-
mática Industrial do Setor de Ciências Exatas
da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Thiago de Oliveira Quinelato,
DSc.

CURITIBA

2023

TERMO DE APROVAÇÃO

GUSTAVO HENRIQUE SILVA SARTURI

ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS A UM SISTEMA BANCÁRIO

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática Industrial do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Thiago de Oliveira Quinelato, DSc.
Orientador

Prof. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas, DSc.
UFPR

Prof. Roberto Ribeiro Santos Júnior, DSc.
UFPR

Curitiba, 31 de Março de 2023.

RESUMO

O modelo de Lotka-Volterra é o mais simples modelo para representar o crescimento ou decréscimo de populações de espécies que interagem entre si, por exemplo, coelhos e raposas. No presente trabalho, visamos analisar a estabilidade e realizar experimentações numéricas desse modelo e de modelos semelhantes aplicados a um sistema de depósitos e empréstimos bancários. Além do modelo de Lotka-Volterra, apresentaremos uma adaptação do modelo de Michaelis-Menten nas finanças e um modelo com requerimento de reserva.

Palavras-chaves: Equações Diferenciais. Presa-Predador. Finanças.

ABSTRACT

The Lotka-Volterra model is the simplest model to represent the growth or decrease of populations of interacting species. In the present work, we aim to analyze the stability and perform numerical experimentation of that model and similar ones applied to a system of bank deposits and loans. In addition to the Lotka-Volterra model, we will present an adaptation of the Michaelis-Menten model in finances, and a model with a reserve requirement.

Key-words: Differential Equations. Prey-Predator. Finances.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 6 |
| 1.1 | JUSTIFICATIVA | 7 |
| 1.2 | OBJETIVO | 7 |
| 1.3 | METODOLOGIA | 7 |
| 1.4 | CRONOGRAMA PLANEJADO | 8 |
| 2 | REVISÃO DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS | 9 |
| 2.1 | SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES | 9 |
| 2.2 | EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES E ESTABILIDADE | 10 |
| 2.2.1 | Caso 1: Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal | 11 |
| 2.2.2 | Caso 2: Autovalores Reais com Sinais Diferentes | 12 |
| 2.2.3 | Caso 3: Autovalores iguais | 12 |
| 2.2.4 | Caso 4: Autovalores Complexos | 13 |
| 2.2.5 | Caso 5: Autovalores Imaginários Puros | 15 |
| 2.2.6 | Resumo | 15 |
| 2.2.7 | Sistemas Autônomos | 16 |
| 2.2.8 | Estabilidade e Instabilidade | 17 |
| 2.2.9 | Sistemas Quase Lineares | 17 |
| 3 | APLICAÇÕES EM MODELO BANCÁRIO | 20 |
| 3.1 | MODELO LOTKA-VOLTERRA | 20 |
| 3.1.1 | Estabilidade do Modelo Presa-Predador | 22 |
| 3.2 | MODELO MICHAELIS-MENTEN | 23 |
| 3.3 | MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA | 24 |
| 4 | MODELAGEM | 25 |
| 4.1 | EXPERIMENTO 1 - MODELO DE LOTKA VOLTERRA | 25 |
| 4.2 | EXPERIMENTO 2 - MODELO MICHAELIS-MENTEN | 26 |
| 4.3 | EXPERIMENTO 3 - MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA (ESTÁVEL) | 27 |
| 4.4 | EXPERIMENTO 4 - MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA (ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL) | 27 |
| 5 | CONCLUSÃO | 29 |
| | REFERÊNCIAS | 30 |

1 INTRODUÇÃO

Neste projeto é proposto analisar a estabilidade dos modelos de Equações Diferenciais de Lotka-Volterra, conhecidos popularmente como “Presa e Predador”. Tratam-se de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem conhecidas pela sua aplicação biológica cujo objetivo é encontrar uma relação na interação entre duas espécies: uma como presa e outra como predadora. No caso biológico, predador é o animal que mata e se alimenta de outro animal e presa é o animal que serve de alimento para o predador. Citando o exemplo de Boyce e DiPrima (2015), suponha raposas e coelhos em uma floresta fechada; as raposas caçam coelhos, que vivem da vegetação da floresta.

As equações de Lotka-Volterra são expressas da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - cy = y(\gamma x - c), \quad (1.2)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as populações, respectivamente, da presa e do predador no instante t , a é a constante que representa a taxa de crescimento da população de presas, α e γ são constantes positivas que representam medidas do efeito da interação entre duas espécies e a constante c representa a taxa de morte da população de predadores.

Assumimos as seguintes hipóteses em relação à interação entre as duas espécies:

- Na ausência de predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual; sendo assim, $dx/dt = ax$, para $a > 0$, quando $y = 0$;
- Na ausência de presa, o predador é extinto; logo, $dy/dt = -cy$, $c > 0$, quando $x = 0$;
- O número de encontros entre predadores e presas é proporcional ao produto entre as duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Assim, a população de predadores é aumentada por um termo da forma γxy , enquanto que a população de presas é diminuída por um termo da forma $-\alpha xy$.

O objetivo deste trabalho não é encontrar soluções do sistema, mas sim determinar o comportamento qualitativo das soluções para valores iniciais positivos e arbitrários de x e y . As equações descritas acima foram desenvolvidas em artigos

escritos por Lotka em 1925¹ e por Volterra em 1926 (VOLTERRA, 1926). Apesar das equações terem inicialmente como objetivo modelar a evolução de um ecossistema, Almeida (2017) cita que muitos autores têm mostrado que tais sistemas dinâmicos possuem aplicações fora da Biologia. Uma dessas aplicações é a modelagem de um sistema bancário que descreve a relação entre depósitos e empréstimos.

1.1 JUSTIFICATIVA

A necessidade de confiabilidade das técnicas de previsões de lucro dos bancos é muito requisitada (SUMARTI et al., 2014). Por essa razão, o modelo presa-predador de Lotka-Volterra pode ser utilizado como um método para auxiliar nas previsões orçamentárias. O trabalho tem como intuito estudar a estabilidade das equações de Lotka-Volterra. Segundo Boyce e DiPrima (2015), existem muitas equações diferenciais, especialmente não-lineares, que não são suscetíveis à solução analítica de modo algum. Por essa razão, buscamos por métodos numéricos que fornecem soluções aproximadas para tais equações. É importante considerarmos o tipo de informação qualitativa que pode ser obtida sobre as soluções sem resolver, de fato, as equações.

O modelo de Lotka-Volterra é baseado em um sistema dinâmico, ou seja, é um conceito em que a função descreve uma evolução em relação ao tempo. O estudo de estabilidade desses sistemas é uma ferramenta útil para entendermos o comportamento das soluções desse tipo de modelo.

1.2 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo descrever o sistema presa-predador aplicado às finanças e analisar os seus pontos de estabilidade. Definir a estabilidade de um modelo aplicado a depósitos e empréstimos bancários significa definir se em algum momento haverá ou não um equilíbrio entre as entradas e saídas dos volumes de dinheiro.

1.3 METODOLOGIA

Para entendermos melhor o comportamento das soluções de sistemas dinâmicos, mais especificamente, dos modelos que iremos tratar neste trabalho, é importante realizarmos o estudo de estabilidade dos modelos. Uma revisão conceitual das ferramentas de Equações Diferenciais será apresentada antes de iniciarmos as aplicações a um modelo bancário de depósitos e empréstimos. Após estudarmos os autovalores

¹ Lotka desenvolveu essa análise em um estudo geral das interações presa-predador (ou hospedeiro-parasita) em seu livro subsequente, *Elements of Physical Biology* (1925), escrito no laboratório de Pearl. Esse livro foi reimpresso postumamente em 1956 como *Elements of Mathematical Biology* (LOTKA, 1956). Agora é considerado um clássico da Ecologia.

e autovetores associados à matriz do sistema e identificarmos padrões geométricos em seus retratos de fase, iremos estudar as propriedades de sistemas autônomos e estabilidade.

Estabelecendo os conceitos e particularidades das equações que serão apresentadas, iremos analisar a estabilidade em problemas de dinâmicas populacionais, que será o nosso caso de estudo. O objetivo será entender a interação entre espécies em competição, no caso, em nosso objeto de estudo teremos a população do volume de depósitos e de empréstimos.

1.4 CRONOGRAMA PLANEJADO

- **24/10/2022 a 07/11/2022 - Configuração do Ambiente**

Nesta etapa visamos configurar o ambiente de trabalho, verificando possíveis ferramentas a serem utilizadas, tais como o editor de texto e executáveis de programação.

- **31/10/2022 a 11/12/2022 - Revisão Bibliográfica**

Busca dos artigos, livros e demais materiais que irão auxiliar a execução do trabalho.

- **21/11/2022 a 18/12/2022 - Escrita do projeto de TCC**

Desenvolvimento da escrita do projeto de TCC de acordo com as revisões bibliográficas estudadas.

- **04/12/2022 a 26/01/2023 - Implementação**

Análise e implementação dos modelos estudados em linguagem de programação Julia e Python.

- **18/12/2022 a 12/02/2023 - Escrita do TCC**

Escrita, formatação e apresentação dos resultados do projeto de TCC.

- **13/02/2023 a 19/02/2023 - Entrega**

Entrega do trabalho à banca de TCC.

- **13/02/2023 a 20/02/2023 - Preparação**

Preparação da apresentação final do trabalho.

- **27/02/2023 a 05/03/2023 - Apresentação Final**

2 REVISÃO DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS

Antes de iniciarmos o estudo da teoria e das aplicações de sistemas dinâmicos, vamos relembrar alguns conceitos e a teoria acerca de Equações Diferenciais que serão importantes para desenvolvermos o trabalho. Iniciaremos com uma breve introdução sobre Equações Diferenciais, Sistemas Homogêneos e por fim, Equações Diferenciais Não-Lineares e Estabilidade. Para isso, iremos nos guiar pelo livro-texto Boyce e DiPrima (2015).

2.1 SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Nesta seção iremos nos concentrar em sistemas de equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, sistemas da forma

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ constante com coeficientes reais e x um vetor $n \times 1$. Pensando no caso mais simples, se $n = 1$, temos que o sistema apresentado reduz-se a uma equação de primeira ordem, ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (2.2)$$

cujas soluções são $x = ce^{at}$. Diante disso, temos algumas observações a considerar: $x = 0$ é a única solução de equilíbrio¹ se $a \neq 0$. Se $a < 0$, qualquer outra solução tende a $x = 0$ quanto $t \rightarrow \infty$ e, para esse caso, dizemos que x é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável². Por outro lado, se $a > 0$, então $x = 0$ é solução e dizemos que é uma solução instável³.

De forma análoga, podemos pensar para sistemas de maior ordem: encontramos as soluções de equilíbrio resolvendo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vamos supor que $\det(A) \neq 0$, de tal modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja a única solução de equilíbrio. Uma pergunta importante a se fazer é se outras soluções se aproximam ou se afastam dessa quando t aumenta, ou seja, em outras palavras, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável ou instável? Existem outras possibilidades?

O caso $n = 2$ é particularmente importante e permite visualização no plano x_1x_2 , ao qual chamamos de **Plano de fase**. Um gráfico que ilustra uma amostra representativa de trajetórias para um sistema dado é chamado de **Retrato de fase**.

¹ **Soluções de Equilíbrio** são soluções que correspondem ao caso em que não há variação no valor de x conforme t cresce.

² **Solução Assintoticamente Estável** é uma solução que é estável, conforme será definido posteriormente, e tende a um valor constante conforme t cresce.

³ **Solução Instável** significa dizer que a única maneira de garantir que a solução permaneça nula é certificar-se de que seu valor inicial é exatamente igual a zero.

A solução geral do sistema (2.1) é construída procurando soluções da forma

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt}, \quad (2.3)$$

onde o expoente r e o vetor constante ξ devem ser determinados. Se substituirmos na equação (2.1), obtemos $r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}$. Como e^{rt} é um fator não-nulo, podemos cancelar e assim, temos

$$(A - rI_d)\xi = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

onde I_d é a matriz identidade $n \times n$. Sendo assim, para resolvermos o sistema de equações diferenciais (2.1), precisamos resolver o sistema de equações algébricas (2.4). Para isso, precisamos determinar os autovalores e autovetores associados à matriz A . Concluímos então que o vetor \mathbf{x} dado pela equação (2.3) é uma solução da equação (2.1) se r for um autovalor e ξ um autovetor associado da matriz de coeficientes A . Os autovalores são as raízes da equação polinomial $\det(A - rI_d) = 0$ e os autovetores são determinados pela equação (2.4) a menos de uma constante multiplicativa.

Além das soluções da forma da equação (2.3) há casos de soluções que não se ajustam a esse formato (BOYCE; DIPRIMA, 2015), como será evidenciado posteriormente.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES E ESTABILIDADE

Como muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas de maneira conveniente por métodos analíticos, é de suma importância considerarmos o tipo de informação qualitativa que podemos obter sobre suas soluções sem necessariamente resolvê-las. Nesta seção, iremos tratar de estabilidade de uma solução e empregar métodos que são basicamente geométricos.

Consideremos um sistema linear homogêneo com duas incógnitas e com coeficientes constantes, a exemplo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

onde A é uma matriz constante 2×2 e \mathbf{x} é um vetor 2×1 . Conforme visto anteriormente, se buscarmos por soluções da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ e substituindo na equação anterior, teremos

$$(A - rI_d)\xi = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

portanto r tem que ser um autovalor e ξ um autovetor associado da matriz A . Pontos cuja expressão $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é satisfeita correspondem a soluções constantes, ou soluções de equilíbrio; por muitas vezes chamaremos também de pontos críticos. Se supormos que A é uma matriz invertível, então

$$\det(A) \neq 0. \quad (2.7)$$

Assim, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto crítico do sistema.

Uma solução da equação (2.5) é uma função vetorial $\mathbf{x} = \phi(t)$ que satisfaz tal equação diferencial. Podemos considerar a solução como uma representação paramétrica de uma curva no plano x_1x_2 .

Dependendo da natureza dos autovalores de A , é possível determinar alguns casos particulares. Estamos interessados em caracterizar a equação diferencial de acordo com o padrão geométrico formado pelas suas trajetórias.

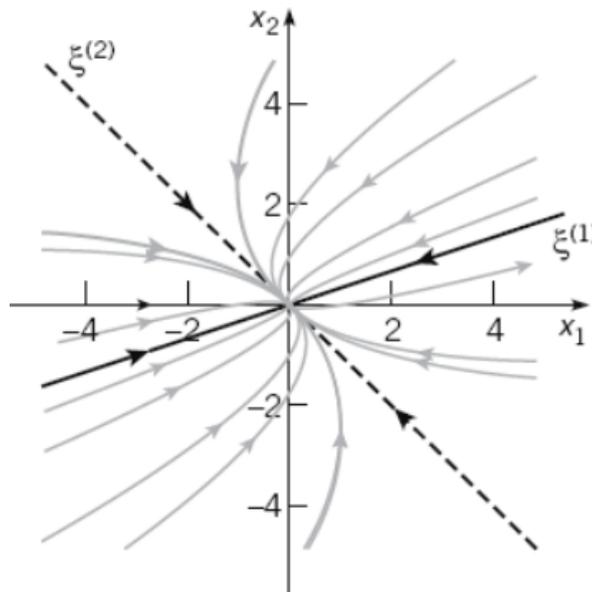
2.2.1 Caso 1: Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal

A solução geral de (2.5) é

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}. \quad (2.8)$$

Para esse caso, vamos considerar $r_1 < r_2 < 0$, ou seja, ambos r_1 e r_2 negativos e suponhamos que os autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ sejam conforme a Figura 1.

FIGURA 1 – EXEMPLO DE PLANO DE FASE DO CASO AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS DE MESMO SINAL



FONTE: Boyce e DiPrima (2015).
 LEGENDA: Trajetória no plano de fase quando a origem é um nó com $r_1 < r_2 < 0$. As curvas em preto sólida e pontilhada mostram, respectivamente, as soluções fundamentais $\xi^{(1)} e^{r_1 t}$ e $\xi^{(2)} e^{r_2 t}$.

Observe que quando $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, não importando os valores de c_1 e c_2 , ou seja, todas as soluções se aproximam do ponto crítico na origem. Se a solução começa

em um ponto inicial na reta contendo a origem e na direção de $\xi^{(1)}$ temos que $c_2 = 0$, ou seja, a solução tende à origem ao longo desta reta. Análogo para caso o ponto inicial pertença à reta na direção de $\xi^{(2)}$. Assim, podemos reescrever a solução (2.8) da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = e^{r_2 t} [c_1 \xi^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t} + c_2 \xi^{(2)}]. \quad (2.9)$$

Observe que $r_1 - r_2 < 0$. Logo, enquanto c_2 for diferente de zero, o primeiro termo entre colchetes é desprezível comparado com o segundo termo para valores suficientemente grandes de t . Assim, a solução não só tende à origem mas, também, à reta na direção de $\xi^{(2)}$. Ou seja, todas as soluções exibem decaimento exponencial no tempo. Esse tipo de ponto crítico é chamado de nó, ou nó atrator, ou sorvedouro.

Para o caso em que $0 < r_1 < r_2$ as trajetórias seguem o mesmo padrão; no entanto, o sentido do movimento é de afastamento do ponto crítico, o contrário do exemplo anterior. Assim, x_1 e x_2 crescem exponencialmente como funções de t , chamamos o ponto crítico novamente de nó ou de fonte e será instável.

2.2.2 Caso 2: Autovalores Reais com Sinais Diferentes

A solução da equação (2.5) continua sendo conforme a equação (2.8); no entanto, para esse caso consideramos $r_2 < 0 < r_1$. O comportamento geométrico deste caso é um **Ponto de Sela**, conforme a Figura 2.

Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem e na direção de $\xi^{(1)}$, então, $c_2 = 0$. Em consequência, a solução permanece nessa reta para todo t e, como $r_1 > 0$, $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. A situação é análoga para quando a solução começa em um ponto inicial pertencente à reta na direção de $\xi^{(2)}$; no entanto, como $r_2 < 0$, $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

2.2.3 Caso 3: Autovalores iguais

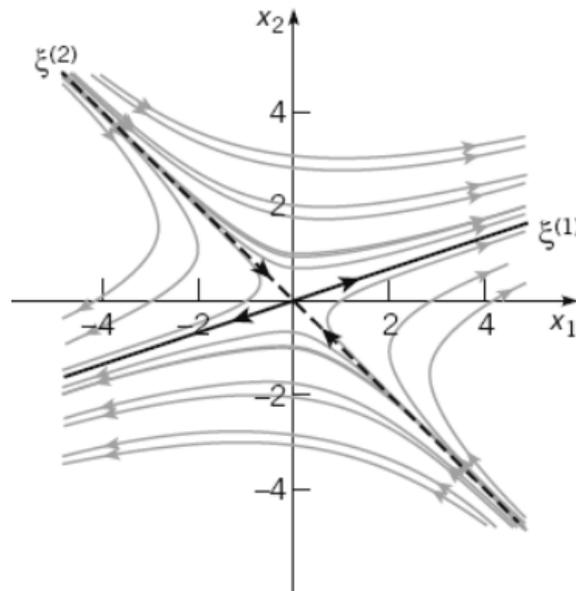
Separamos esse caso em duas partes, sendo $r_1 = r_2 = r$. Iremos considerar o caso em que os autovalores são negativos. Caso sejam positivos, as trajetórias são semelhantes; no entanto, o sentido é contrário. Para a primeira parte, vamos supor que há **dois autovetores** linearmente independentes, assim, a solução geral da equação (2.5) é

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{rt} + c_2 \xi^{(2)} e^{rt}, \quad (2.10)$$

onde $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são autovetores linearmente independentes. A razão x_2/x_1 (para $x_1 \neq 0$) é independente de t ; no entanto, depende das coordenadas de $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ e das constantes arbitrárias. Logo, toda a trajetória está contida em uma reta contendo a origem conforme ilustrado na Figura 3.

O ponto crítico é chamado de **nó próprio** ou, algumas vezes, de **ponto estrela**.

FIGURA 2 – EXEMPLO DE PLANO DE FASE DO CASO AUTOVALORES REAIS COM SINAIS DIFERENTES



FONTE: Boyce e DiPrima (2015).

LEGENDA: Trajetórias no plano de fase quando a origem é um ponto de sela com $r_1 > 0$, $r_2 < 0$. As curvas em preto sólida e tracejada mostram as soluções fundamentais $\xi^{(1)}e^{r_1t}$ e $\xi^{(2)}e^{r_2t}$, respectivamente.

Para a segunda parte, vamos supor que a matriz tem **um autovetor independente**. Para esse caso, a solução geral da equação (2.5) é

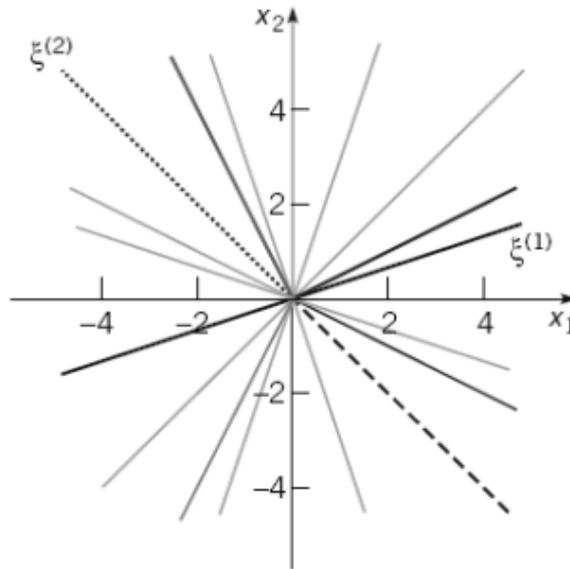
$$\mathbf{x} = c_1\xi e^{rt} + c_2(\xi t e^{rt} + \eta e^{rt}), \quad (2.11)$$

onde ξ é o autovetor e η é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Para t grande, o termo dominante na expressão (2.11) é $c_2\xi t e^{rt}$. Assim, quando $t \rightarrow \infty$, todas as trajetórias tendem à origem e são tangentes à reta na direção do autovetor. Isso é verdadeiro mesmo quando $c_2 = 0$, pois nesse caso a solução $\mathbf{x} = c_1\xi e^{rt}$ pertence à mesma reta. Analogamente, para valores negativos grandes de t , o termo $c_2\xi t e^{rt}$ é dominante também, de modo que, quando $t \rightarrow -\infty$, cada trajetória é assintótica a uma reta paralela a ξ . A orientação das trajetórias depende das posições relativas a ξ e η .

2.2.4 Caso 4: Autovalores Complexos

Para este caso, vamos supor que os autovalores são da forma $\lambda \pm i\mu$, onde λ e μ são reais, $\lambda \neq 0$ e $\mu > 0$. É possível escrever a solução geral em termos dos autovalores e autovetores. Para este caso, o tipo de ponto crítico é um ponto espiral e o tipo de estabilidade é instável ou assintoticamente estável dependendo do sinal de λ .

FIGURA 3 – EXEMPLO DE PLANO DE FASE DO CASO AUTOVALORES IGUAIS



FONTE: Boyce e DiPrima (2015).
 LEGENDA: Trajetórias no plano de fase
 quando a origem é um nó próprio
 com $r_1 = r_2 < 0$.

Sistemas com autovalores $\lambda \pm i\mu$ são, tipicamente, da forma

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.12)$$

ou, em forma escalar,

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad (2.13a)$$

$$x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2. \quad (2.13b)$$

Para facilitar um pouco os cálculos, introduzimos coordenadas polares r e θ dadas por

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + x_2^2, \\ \tan \theta &= x_2/x_1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

quando $x_1 \neq 0$. Quando $x_1 = 0$ e $x_2 \neq 0$ tomamos $\theta = \pi/2$. Na origem, consideramos apenas $r = 0$.

Assim, diferenciando as equações, obtemos

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \quad (2.15a)$$

$$(\sec^2 \theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2. \quad (2.15b)$$

Se substituirmos as equações (2.13) em (2.15a) vemos que

$$r' = \lambda r, \quad (2.16)$$

e, portanto,

$$r = ce^{\lambda t} \quad (2.17)$$

onde c é uma constante. Analogamente, das equações (2.13) e (2.15b) obtemos

$$\theta' = -\mu. \quad (2.18)$$

Logo,

$$\theta = -\mu t + \theta_0, \quad (2.19)$$

onde θ_0 é o valor de θ quando $t = 0$. Fazendo uma breve análise, como $\mu > 0$, segue da expressão (2.19) que θ diminui quando t aumenta, de modo que o movimento em uma trajetória é no sentido horário. Quando $t \rightarrow \infty$, observamos da equação (2.17) que $r \rightarrow 0$ se $\lambda < 0$ e que $r \rightarrow \infty$ se $\lambda > 0$. Assim, as trajetórias são espirais, que tendem ou se afastam da origem dependendo do sinal de λ . Ou seja, para este caso, os pontos críticos são chamados de pontos espirais. Os termos **sorvedouro espiral** e **fonte espiral** também são utilizados para este caso, frequentemente para se referir a pontos espirais cujas trajetórias se aproximam ou se afastam, respectivamente, do ponto crítico.

2.2.5 Caso 5: Autovalores Imaginários Puros

Neste caso, $\lambda = 0$ e o sistema se reduz a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (2.20)$$

com autovalores $\pm i\mu$. Usando o mesmo argumento utilizado no caso anterior, encontramos

$$r' = 0, \quad \theta' = -\mu, \quad (2.21)$$

e, portanto,

$$r = c, \quad \theta = -\mu t + \theta_0, \quad (2.22)$$

onde c e θ_0 são constantes. Logo, as trajetórias são círculos centrados na origem, percorridos no sentido horário se $\mu > 0$ e no sentido trigonométrico se $\mu < 0$. Um circuito completo em torno da origem é feito em um intervalo de tempo de comprimento $2\pi/\mu$, de modo que todas as soluções são periódicas com período $2\pi/\mu$. O ponto crítico é chamado de **centro** e é estável.

2.2.6 Resumo

Para lembrarmos com facilidade cada caso, vamos resumir os casos na Tabela 1, considerando a premissa de Sistemas Lineares da forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ com $\det(A - rI_d) = 0$ e $\det(A) \neq 0$.

TABELA 1 – PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

| Autovalores | Tipo de Ponto Crítico | Estabilidade |
|---|-------------------------|--------------------------------------|
| $r_1 > r_2 > 0$ | Nó | Instável |
| $r_1 < r_2 < 0$ | Nó | Assintoticamente estável |
| $r_2 < 0 < r_1$ | Ponto de sela | Instável |
| $r_1 = r_2 > 0$ | Nó próprio ou impróprio | Instável |
| $r_1 = r_2 < 0$ | Nó próprio ou impróprio | Assintoticamente estável |
| $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$ $\lambda > 0$ $\lambda < 0$ | Ponto espiral | Instável Assintoticamente estável |
| $r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$ | Centro | Estável |

FONTE: Adaptado de Boyce e DiPrima (2015).

2.2.7 Sistemas Autônomos

Consideremos sistemas com duas equações diferenciais da forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y). \quad (2.23)$$

Vamos supor que F e G sejam contínuas e com derivadas parciais contínuas em algum domínio D do plano xy . Se (x_0, y_0) é um ponto nesse domínio, então existe uma única solução $x = \phi(t)$, $y = \gamma(t)$ que satisfaz as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \quad (2.24)$$

ou seja, a solução está definida em algum intervalo de tempo I que possui o ponto t_0 .

Podemos reescrever o problema de valor inicial apresentado em sua forma vetorial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (2.25)$$

onde $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{x}^0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$.

Observe que as funções F e G não dependem da variável t , mas sim das variáveis dependentes x e y . Um sistema com essa propriedade é dito autônomo. O sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad (2.26)$$

onde A é uma matriz constante, é um exemplo simples de um sistema autônomo bidimensional. Por outro lado, se um ou mais elementos da matriz de coeficientes for uma função da variável independente t , então o sistema não é autônomo.

Em particular, o sistema autônomo tem um campo de direções associado que é independente do tempo; assim, como consequência, em cada ponto (x_0, y_0) existe apenas uma trajetória passando no plano de fase.

2.2.8 Estabilidade e Instabilidade

Apesar de já termos mencionado os conceitos de estabilidade e instabilidade, nesta seção iremos formalizar um pouco mais esses conceitos. Dado um sistema autônomo da forma (2.26), os pontos onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, se existirem, são chamados de pontos críticos do sistema autônomo. Em tais pontos, $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, de modo que os pontos críticos correspondem a soluções constantes, ou de equilíbrio, do sistema de equações diferenciais. Um ponto crítico \mathbf{x}^0 do sistema (2.26) é dito **estável** se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que toda solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ do sistema (2.26) que satisfaz, em $t = 0$,

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta \quad (2.27)$$

existe para todo t positivo e satisfaz

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon, \quad (2.28)$$

para todo $t \geq 0$. Um ponto crítico que não é estável é dito **instável**.

Um ponto crítico \mathbf{x}^0 é dito assintoticamente estável se é estável e se existe um $\delta_0 > 0$ tal que, se uma solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ satisfaz

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0, \quad (2.29)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0. \quad (2.30)$$

Assim, trajetórias que começam suficientemente próximas de \mathbf{x}^0 não apenas permanecem próximas, mas têm que acabar tendendo a \mathbf{x}^0 quando $t \rightarrow \infty$. A estabilidade assintótica é uma propriedade mais forte do que a estabilidade, já que um ponto crítico tem que ser estável antes que possamos falar se ele é ou não assintoticamente estável. Por outro lado, a condição-limite (2.30), que é uma propriedade essencial para a estabilidade assintótica, sozinha não implica nem estabilidade simples.

2.2.9 Sistemas Quase Lineares

Agora que já estão definidos os conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade, podemos enunciar esses resultados com o teorema a seguir:

Teorema 1. *O ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema linear $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ é assintoticamente estável se os autovalores r_1 e r_2 são reais e negativos ou têm parte real negativa; estável, mas não assintoticamente estável, se r_1 e r_2 são imaginários puros; instável se r_1 e r_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.*

Através deste teorema, fica claro que os autovalores r_1 e r_2 da matriz de coeficientes A determinam o tipo de ponto crítico em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e suas características de

estabilidade. Por sua vez, os valores de r_1 e r_2 dependem dos coeficientes do sistema. Detalhes e demonstração deste teorema podem ser encontrados em Boyce e DiPrima (2015).

Considere o seguinte sistema autônomo bidimensional:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.31)$$

Temos como objetivo investigar o comportamento das trajetórias deste sistema em uma vizinhança de um ponto crítico \mathbf{x}^0 . Podemos fazer isso aproximando o sistema (2.31) por um sistema linear apropriado. Mas será que as trajetórias do sistema linear são boas aproximações das trajetórias do sistema não-linear?

É conveniente escolhermos o ponto crítico como sendo a origem, sem perda de generalidade, já que se $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$ podemos fazer a substituição $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ e assim \mathbf{u} satisfaz um sistema autônomo com um ponto crítico na origem. Vamos considerar, primeiro, o que significa dizermos que o sistema não-linear (2.31) está próximo ao sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Suponha, então, que

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.32)$$

e que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico **isolado**, ou seja, existe algum círculo em torno da origem no interior do qual não existem outros pontos críticos. Vamos supor que $\det(A) \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ também é um ponto crítico isolado do sistema linear $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Para que o sistema não-linear (2.32) seja próximo de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, temos que supor que $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ seja pequeno. Se supusermos que as componentes de \mathbf{g} têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que \mathbf{g} satisfaz a condição $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| / \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, chamamos tal sistema de **sistema quase linear** na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A Tabela 2 nos apresenta os pontos críticos e seus respectivos tipos de estabilidade que podemos encontrar em um sistema linear e quase linear de acordo com os autovalores da matriz A associada.

TABELA 2 – PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES E QUASE LINEARES

| | Sistema Linear | | Sistema Quase Linear | |
|-------------------------------|----------------|--------------------------|----------------------|--------------------------|
| | Tipo | Estabilidade | Tipo | Estabilidade |
| $r_1 > r_2 > 0$ | N | Instável | N | Instável |
| $r_1 < r_2 < 0$ | N | Assintoticamente estável | N | Assintoticamente estável |
| $r_2 < 0 < r_1$ | PS | Instável | PS | Instável |
| $r_1 = r_2 > 0$ | NP ou NI | Instável | NP ou NI | Instável |
| $r_1 = r_2 < 0$ | NP ou NI | Assintoticamente estável | NP ou NI | Assintoticamente estável |
| $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$ | | | | |
| $\lambda > 0$ | PE | Instável | PE | Instável |
| $\lambda < 0$ | PE | Assintoticamente estável | PE | Assintoticamente estável |
| $r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$ | C | Estável | C ou PE | Indeterminado |

FONTE: Adaptado de Boyce e DiPrima (2015).

NOTA: N = Nó; NI = Nó Impróprio; NP = Nó Próprio; PS = Ponto de Sela; PE = Ponto Espiral; C = Centro

3 APLICAÇÕES EM MODELO BANCÁRIO

Como dito anteriormente, o modelo de Lotka-Volterra é formado por equações diferenciais não-lineares de primeira ordem conhecidas por sua aplicação na biologia e é baseado na interação entre duas espécies: uma como presa e outra como predador. Neste capítulo iremos analisar a teoria apresentada nos trabalhos de Sumarti et al. (2014) e da Almeida (2017), em seguida, através de experimentos numéricos, iremos verificar os resultados apresentados.

Um banco possui um balanço patrimonial composto por ativos, passivos e patrimônio líquido. Ativos são recursos econômicos dos quais são esperados retornos e benefícios futuros. Passivos são obrigações que devem ser reembolsadas no futuro ao depositante. O patrimônio líquido é a diferença entre o total de ativos e passivos.

3.1 MODELO LOTKA-VOLTERRA

O principal passivo de um banco é o depósito. Os ativos de um banco incluem empréstimos e reservas (a exemplo, como citado no livro de Matthews e Thompson (2005), podemos considerar como reservas primária e secundária as reservas para cobrir os riscos de inadimplências e os riscos de depósitos). Em um modelo simplificado, temos

$$L + R_1 + R_2 = D, \quad (3.1)$$

onde L representa os empréstimos, R_1 e R_2 , respectivamente, representam a reserva primária e a reserva secundária, e D representa os depósitos. Observe que todas as variáveis nos ativos são proporções dos volumes de depósito, ou seja, a existência de empréstimos e ambas reservas dependem do volume de depósito. Por essa razão, podemos enxergar como uma interação presa-predador, onde os empréstimos e as reservas são predadores e os depósitos, presa. Baseado nisso, temos o seguinte modelo de Lotka-Volterra adaptado para essa modelagem:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \alpha D - pDL, \\ \frac{dL}{dt} &= pDL - \beta L, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde α representa a taxa de juros do depósito (o seu aumento implica também no aumento do volume de depósitos, visto que irá trazer melhor rendimento ao cliente) e β representa a taxa de juros de empréstimos (ao contrário, aqui o seu aumento implica em uma redução no volume de empréstimos visto que os juros estariam mais altos). Um aumento em pDL , que representa a mistura entre os volumes de depósitos e empréstimos, causará uma diminuição no crescimento do volume de depósitos e

um aumento no crescimento do volume de empréstimos ao longo do tempo. O nosso objetivo não é encontrar as soluções do sistema mas sim analisar o plano de fase e obter respostas quanto a sua estabilidade.

De certa forma, é mais atrativo ao banco quando a taxa de juros de empréstimos é maior que a taxa de juros de depósito. Por essa razão, em nossos modelos vamos considerar que $0 < \alpha < \beta$. Ou seja, por α ser positivo, estamos considerando que o banco paga um determinado valor ao depositante por deixar seu dinheiro guardado.

Considerando essa restrição, temos que $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\beta/p, \alpha/p)$ são os únicos pontos críticos possíveis.

- De fato, $P_1 = (0, 0)$ é um ponto crítico pois $\alpha D - pDL = 0 \Leftrightarrow \alpha D = pDL$ e $pDL - \beta L = 0 \Leftrightarrow pDL = \beta L$. Sendo $D = 0$, temos como consequência que $L = 0$;
- Agora, se considerarmos que $D \neq 0$, da primeira equação obtemos que $\alpha = pL \Leftrightarrow L = \alpha/p$; substituindo na segunda equação, obtemos que $pDL = \beta L \Leftrightarrow D = \beta/p$. Assim, $P_2 = (\beta/p, \alpha/p)$ também é um ponto crítico.

Em ambos casos vamos analisar um sistema linear obtido a partir do sistema não-linear. Inicialmente faremos $u = D - D_0$ e $v = L - L_0$ (sendo D_0 e L_0 os volumes iniciais de depósitos e empréstimos respectivamente) calcularemos os autovalores da Jacobiana e verificaremos o tipo de ponto crítico.

Para o primeiro caso, quando $P_1 = (0, 0)$, temos a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Ao calcularmos o determinante da matriz para encontrar seus autovalores, ou seja, $\det(A - rI_d) = 0$, obtemos $r^2 - (\beta - \alpha)r - \alpha\beta = 0$. Chegamos à conclusão que

$$r_{1,2} = \frac{(\alpha - \beta) \pm \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 4\alpha\beta}}{2}. \quad (3.4)$$

Assim, como $0 < \alpha < \beta$, teremos $r_1 < 0 < r_2$. Logo, o ponto crítico será um ponto de sela, portanto instável.

Para o ponto crítico $P_2 = (\beta/p, \alpha/p)$, faremos $u = D - D_0 = D - \beta/p$ e $v = L - L_0 = L - \alpha/p$, ou seja, teremos $D = u + \beta/p$ e $L = v + \alpha/p$. Assim, a equação (3.2) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \alpha \left(u + \frac{\beta}{p} \right) - p \left(u + \frac{\beta}{p} \right) \left(v + \frac{\alpha}{p} \right) \\ \frac{dv}{dt} &= p \left(u + \frac{\beta}{p} \right) \left(v + \frac{\alpha}{p} \right) - \beta \left(v + \frac{\alpha}{p} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Expandindo em série de Taylor e desprezando os termos de alta ordem, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Observe que aqui estamos fazendo uma aproximação linear, podemos considerar também a matriz Jacobiana, sem precisar da expansão de Taylor.

Ao calcularmos os autovalores associados à matriz Jacobiana, obtemos que $r_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha\beta}i$, o ponto crítico é um centro e é estável.

3.1.1 Estabilidade do Modelo Presa-Predador

Os pontos críticos do sistema apresentado pelas equações (1.1) e (1.2) são soluções de

$$\begin{cases} x(a - \alpha y) = 0, \\ y(\gamma x - c) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

isto é, os pontos $(0, 0)$ e $(c/\gamma, a/\alpha)$.

Em uma vizinhança da origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

cujos autovalores são $r_1 = a$ e $r_2 = -c$, com autovetores correspondentes respectivamente $(1 \ 0)^T$ e $(0 \ 1)^T$, de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}. \quad (3.9)$$

Logo, a origem é um ponto de sela e, portanto, instável. A entrada no ponto de sela é através do eixo dos y ; todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança do ponto crítico.

Vamos considerar agora o ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Se $x = (c/\gamma) + u$ e $y = (a/\alpha) + v$ então o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Os autovalores do sistema são $r_{1,2} = \pm i\sqrt{a\bar{c}}$. Assim, o ponto crítico é um centro (estável) para o sistema linear. Podemos encontrar as trajetórias do sistema dividindo a primeira equação pela primeira, obtendo

$$\gamma^2 a u^2 + \alpha^2 c v^2 = k, \quad (3.11)$$

onde k é uma constante de integração não-negativa. As trajetórias do sistema são elipses.

Assim, podemos retornar ao sistema descrito pelas equações (1.1) e (1.2) e notar que podemos reduzi-lo a uma única equação,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)}, \quad (3.12)$$

que é separável e tem como solução

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C, \quad (3.13)$$

onde C é uma constante de integração. Assim, podemos mostrar que, para C fixo, os pontos que satisfazem a equação (3.13) formam uma curva fechada em torno do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Logo, o ponto crítico também é um centro para o sistema geral não-linear definido pelas equações (1.1) e (1.2).

3.2 MODELO MICHAELIS-MENTEN

Nesta seção vamos construir um sistema dinâmico baseado nos modelos simples de Lotka-Volterra incrementando com o modelo de Michaelis-Menten (Originalmente publicado por Michaelis e Menten (1913) e traduzido por Johnson e Goody (2011)), que é um modelo adotado na bioquímica para descrever a cinética de enzimas. Em analogia, para o nosso modelo vamos supor que os recursos de depósitos são limitados e que cada resposta funcional de empréstimo atrelado ao depósito se aproxima de uma constante na medida que o volume de depósitos aumenta.

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \alpha D \left(1 - \frac{D}{k}\right) - \frac{pDL}{1 + bD} \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{pDL}{1 + bD} - \beta L, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde α , k , β , p e b são positivos, k é a capacidade de carga de depósitos, p é a taxa máxima da mistura entre os volumes de depósitos e empréstimos, p/b é a proporção máxima disponível de depósito a ser usado a fim de se transformar em empréstimos e $1/b$ é o volume de depósito necessário para atingir metade da taxa p . Analisando a expressão que define o coeficiente de mistura

$$s = \frac{p}{1 + bD}, \quad (3.15)$$

fica claro que se $D = 1/b$ então $s = p/2$.

Os pontos de equilíbrio são $(0, 0)$ e $(k, 0)$, na ausência de volume de empréstimos, e

$$(D^*, L^*) = \left(\frac{\beta}{p - b\beta}, \frac{\alpha(pk - (1 + bk)\beta)}{k(b\beta - p)^2} \right). \quad (3.16)$$

O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ possui a mesma instabilidade do modelo anterior. O ponto $(k, 0)$ é assintoticamente estável se $\alpha > 0$ e $\beta > \frac{pk}{1 + bk}$.

O ponto de equilíbrio (3.16) existe se $\beta \neq p/b$. Olhamos para a parte real dos seus autovalores do sistema linearizado, isto é

$$\frac{\alpha}{2pk(b\beta - p)} ((bk + 1)b\beta^2 + (1 - bk)p\beta). \quad (3.17)$$

O ponto de equilíbrio será estável se a expressão acima possuir um sinal negativo. Tendo $\alpha > 0$, o valor de β deverá satisfazer a relação

$$0 < \beta < \frac{p(bk - 1)}{b(bk + 1)}, \quad (3.18)$$

que no caso existirá se os valores de p , b e k forem grandes o suficiente (maiores que 1) para que o valor da limitação superior seja positivo.

3.3 MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA

Bancos comerciais de alguns países precisam fazer uma reserva contra os depósitos feitos pelos clientes no Banco Central. Colocamos a reserva como um refúgio protetor mD . O sistema dinâmico será o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \alpha D \left(1 - \frac{D}{k}\right) - \frac{p(1 - m)DL}{1 + b(1 - m)D}, \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{p(1 - m)DL}{1 + b(1 - m)D} - \beta L. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O sistema de equações acima possui os seguintes pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0), \\ P_2 &= (k, 0) \quad \text{e} \\ P_3 &= (D^*, L^*) = \left(\frac{\beta}{(1 - m)(p - b\beta)}, \frac{\alpha[k(1 - m)(p - b\beta) - \beta]}{k(1 - m)^2(p - b\beta)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

O ponto de equilíbrio P_1 possui a mesma instabilidade do modelo anterior. Já pontos críticos P_2 e P_3 diferem dos apresentados por (SUMARTI et al., 2014), que na realidade não eram pontos críticos do sistema (3.19). No próximo capítulo apresentaremos experimentos numéricos que verificam a confiabilidade desses pontos críticos.

4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Abordaremos neste capítulo os experimentos numéricos dos modelos apresentados no capítulo anterior. Os experimentos foram realizados nas linguagens de programação Julia e Python, ambos softwares livres. O método numérico utilizado para a geração dos gráficos foi o Runge-Kutta de 4ª Ordem RK41 (BUTCHER, 2016), cuja tabela de Butcher é a Tabela 3.

TABELA 3 – TABELA DE BUTCHER DO MÉTODO RK41.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

FONTE: Butcher (2016).

Em todos os casos que iremos apresentar, vamos considerar que a Taxa de Juros de Empréstimo é maior que a Taxa de Juros do Depósito ($0 < \alpha < \beta$); neste cenário o banco é mais privilegiado que o cliente.

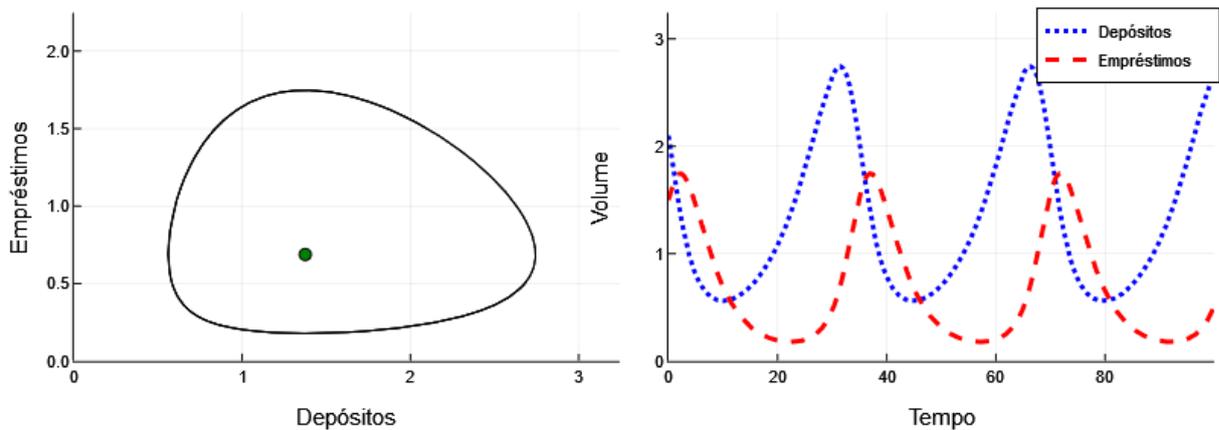
Em cada experimento, utilizamos valores diferentes para os pontos iniciais para uma melhor análise gráfica quanto às estabilidades propostas.

4.1 EXPERIMENTO 1 - MODELO DE LOTKA VOLTERRA

No modelo mais simples de Lotka-Volterra, observe que na equação (3.2), pDL representa a mistura entre os volumes de depósitos e empréstimos, isto é, a taxa de decrescimento de depósitos é a mesma que a taxa de crescimento de empréstimos. Quanto maior for o valor de p , maior a diminuição no volume de depósitos e o aumento no volume de empréstimos ao longo do tempo.

A evolução dos volumes de depósitos e empréstimos para esse caso é mostrada na Figura 4. Observe que a variação entre depósitos e empréstimos é periódica e que há momentos em que o volume de empréstimos é superior ao de depósitos, o que indica uma exposição de risco para o banco. O experimento mostra que de fato trata-se de um ponto de equilíbrio tipo centro. O ponto de equilíbrio encontrado para esse caso é $(1,375, 0,6875)$. Os parâmetros utilizados para esse experimento são: $\alpha = 0,1375$, $\beta = 0,2750$ e $p = 0,2$. O estado inicial escolhido foi $(2,1, 1,5)$.

FIGURA 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O MODELO DE LOTKA-VOLTERRA



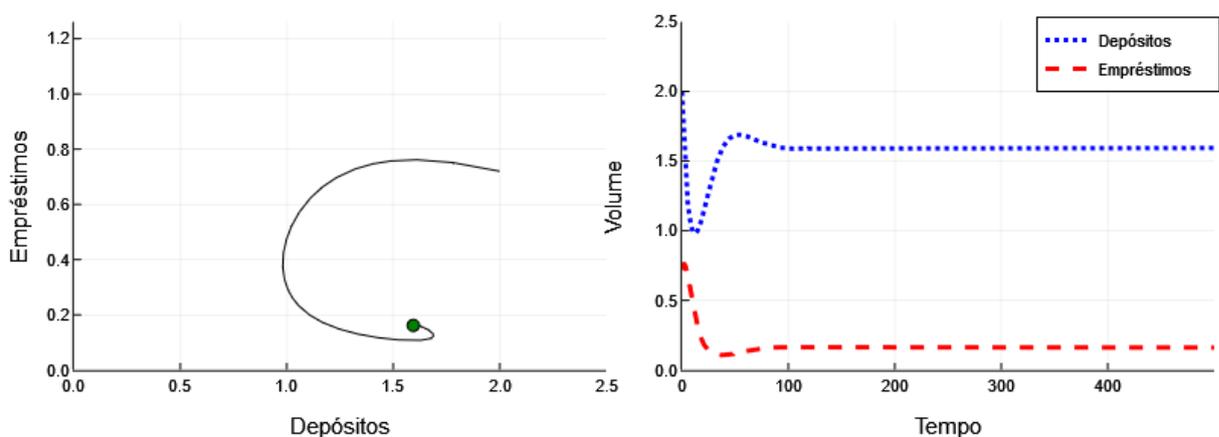
FONTE: Preparado pelo autor.

LEGENDA: À esquerda, plano de fase do experimento 1 onde o ponto de equilíbrio $(\beta/p, \alpha/p)$ é destacado em verde; à direita, gráfico da solução.

4.2 EXPERIMENTO 2 - MODELO MICHAELIS-MENTEN

No experimento numérico com o modelo Michaelis-Menten, utilizamos os parâmetros $\alpha = 0,1375$, $\beta = 0,2750$, $p = 0,2$, $b = 0,1$ e $k = 2,0$. O estado inicial foi $(2,00, 0,72)$. Com esses parâmetros, conseguimos identificar que a solução do modelo converge para o ponto de equilíbrio, o que sugere que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. No entanto, essa estabilidade encontrada não respeita a condição (3.18) apresentada por Sumarti et al. (2014).

FIGURA 5 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O MODELO DE MICHAELIS-MENTEN



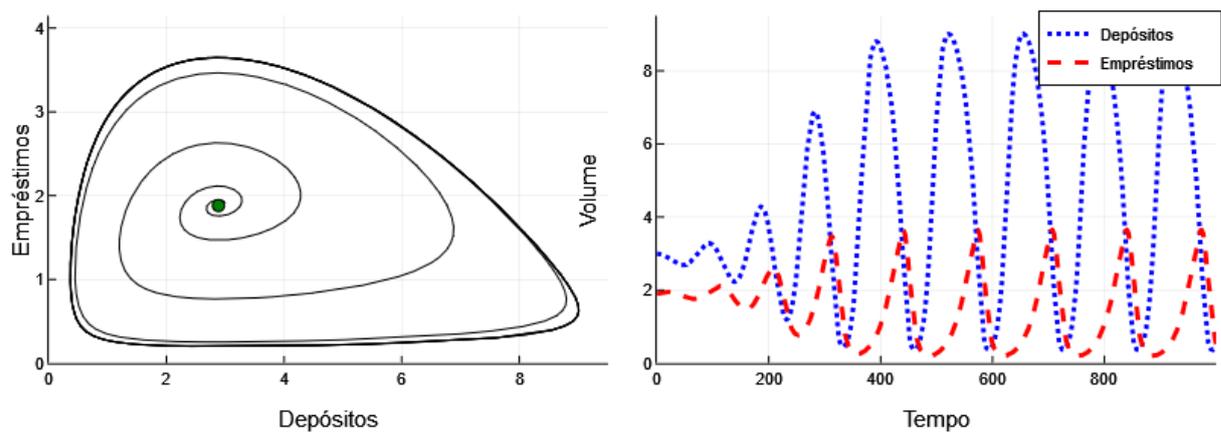
FONTE: Preparado pelo autor.

LEGENDA: À esquerda, plano de fase do experimento 2 onde o ponto de equilíbrio $P \approx (1,59, 0,16)$ é destacado em verde; à direita, gráfico da solução.

4.3 EXPERIMENTO 3 - MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA (ESTÁVEL)

Para esse experimento, utilizamos como parâmetros $\alpha = 0,1375$, $\beta = 0,15$, $p = 0,2$, $b = 0,9$, $k = 10$ e $m = 0,2$. O estado inicial foi $(3,0, 1,9)$. A solução numérica (mostrada na Figura 6) confirma a existência do ponto de equilíbrio $P_3 \approx (2,88, 1,88)$ e indica que ele é do tipo centro. Observe que o ciclo de depósitos não ultrapassa a capacidade de carga de depósitos $k = 10$.

FIGURA 6 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O EXPERIMENTO DO MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA (ESTÁVEL)



FONTE: Preparado pelo autor.

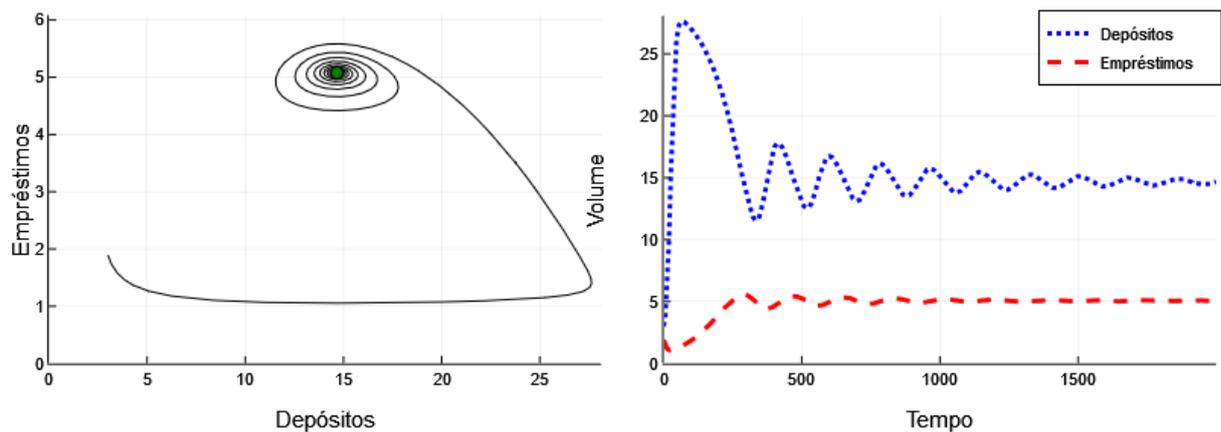
LEGENDA: Resultados numéricos usando o modelo com requerimento de reserva com parâmetros $\alpha = 0,1375$, $\beta = 0,15$, $p = 0,2$, $b = 0,9$, $k = 10$ e $m = 0,2$. À esquerda, plano de fase, onde o ponto de equilíbrio $P \approx (2,88, 1,88)$ é destacado em verde; à direita, evolução dos volumes em relação ao tempo.

Observe que os volumes de depósitos e empréstimos propostos inicialmente são próximos do ponto de equilíbrio. Com o tempo, a trajetória afasta-se do ponto de equilíbrio e parece atingir um ciclo limite. Com esse experimento, temos indícios que o ponto crítico é estável, segundo a definição dada na Seção 2.2.8.

4.4 EXPERIMENTO 4 - MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA (ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL)

Em um outro teste realizado, considerando o mesmo estado inicial do experimento 3, os parâmetros escolhidos foram $\alpha = 0,1375$, $\beta = 0,203$, $p = 0,2$, $b = 0,9$, $k = 30$ e $m = 0,2$. Notamos que as trajetórias se aproximam do ponto crítico $P_3 \approx (14,66, 5,07)$, apresentando estabilidade assintótica, conforme mostrado na Figura 7.

FIGURA 7 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O EXPERIMENTO DO MODELO COM REQUERIMENTO DE RESERVA (ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL)



FONTE: Preparado pelo autor.

LEGENDA: Resultados numéricos usando o modelo com requerimento de reserva com parâmetros $\alpha = 0,1375$, $\beta = 0,203$, $p = 0,2$, $b = 0,9$, $k = 30$ e $m = 0,2$. À esquerda, plano de fase, onde o ponto de equilíbrio $P \approx (14,66, 5,07)$ é destacado em verde; à direita, evolução dos volumes em relação ao tempo.

5 CONCLUSÃO

Uma revisão bibliográfica acerca do tema de estabilidade de sistemas lineares e quase lineares foi realizada com apoio do livro de Boyce e DiPrima (2015). A revisão permitiu olhar com mais detalhes as equações propostas para a modelagem do modelo Presa-Predador, bem como modelos para a evolução dos volumes de depósitos e empréstimos em um sistema bancário (a saber, Lotka-Volterra, Michaelis-Menten e com requerimento de reserva).

A seguir, foi feito um estudo do artigo elaborado por Sumarti et al. (2014), que apresenta resultados de análise de estabilidade para os pontos críticos dos três modelos estudados. O ponto de equilíbrio trivial $(0, 0)$ tem o mesmo comportamento de ponto de sela. Tanto no modelo de Michaelis-Menten quanto no modelo com requerimento de reserva foram encontrados pontos críticos condicionalmente estáveis. Os resultados numéricos apresentados neste trabalho diferem de algumas conclusões apresentadas pelos autores.

Como próximos passos para este trabalho identificamos a realização de uma análise de sensibilidade dos parâmetros e a validação dos modelos em um caso real do comportamento de depósitos e empréstimos de um banco.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. O. M. B. de. **The Lotka-Volterra Equations in Finance and Economics**. 2017. Dissertação de Mestrado – Universidade de Lisboa, Lisboa. Citado 2 vezes nas páginas 7, 20.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 6, 7, 9–11, 13, 14, 16, 18, 19, 29.

BUTCHER, J. C. **Numerical methods for ordinary differential equations**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016. Citado 1 vez na página 25.

JOHNSON, K. A.; GOODY, R. S. The Original Michaelis Constant: Translation of the 1913 Michaelis–Menten Paper. **Biochemistry**, v. 50, n. 39, p. 8264–8269, 2011. PMID: 21888353. DOI: [10.1021/bi201284u](https://doi.org/10.1021/bi201284u). Citado 1 vez na página 23.

LOTKA, A. J. **Elements of Mathematical Biology**. Nova Iorque: Dover Publications, 1956. Citado 1 vez na página 7.

MATTHEWS, K.; THOMPSON, J. **The Economics of Banking**. England: John Willey & Sons, LTD, 2005. Citado 1 vez na página 20.

MICHAELIS, L.; MENTEN, M. L. Die kinetik der invertinwirkung. **Biochem. Z**, Berlin, v. 49, p. 333–369, 1913. Citado 1 vez na página 23.

SUMARTI, N.; NURFITRIYANA, R.; NURWENDA, W. A dynamical system of deposit and loan volumes based on the Lotka-Volterra model. **AIP Conference Proceedings**, v. 1587, n. 1, p. 92–94, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 7, 20, 24, 26, 29.

VOLTERRA, V. Fluctuations in the Abundance of a Species considered Mathematically. **Nature**, v. 118, p. 558–560, 1926. DOI: [10.1038/118558a0](https://doi.org/10.1038/118558a0). Citado 1 vez na página 7.