

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUIZ PEDRO PALACIO DANIEL

TRAJETÓRIAS DE PARTÍCULAS SOB ONDAS VIAJANTES EM
ESCOAMENTOS ELETROHIDRODINÂMICOS

CURITIBA

2025

LUIZ PEDRO PALACIO DANIEL

TRAJETÓRIAS DE PARTÍCULAS SOB ONDAS VIAJANTES EM
ESCOAMENTOS ELETROHIDRODINÂMICOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Matemática, no
Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada,
Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal
do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos
Júnior.

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Velloso Flamarion
Vasconcellos.

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Daniel, Luiz Pedro Palacio

Trajatórias de partículas sob ondas viajantes em escoamentos eletrohidrodinâmicos. / Luiz Pedro Palacio Daniel. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas. Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Júnior.

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Velloso Flamarion Vasconcellos.

1. Hidrodinâmica. 2. Eletrodinâmica 3. Partículas - Energia cinética. 4. Campos Elétricos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada. III. Santos Júnior, Roberto Ribeiro. IV. Vasconcellos, Marcelo Velloso Flamarion. V. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LUIZ PEDRO PALACIO DANIEL**, intitulada: **TRAJETÓRIAS DE PARTÍCULAS SOB ONDAS VIAJANTES EM ESCOAMENTOS ELETROHIDRODINÂMICOS**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Abril de 2025.

Assinatura Eletrônica

01/05/2025 20:56:55.0

ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

29/04/2025 10:28:15.0

AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

29/04/2025 13:35:18.0

ANDRE NACHBIN

Avaliador Externo (ASSOCIAÇÃO INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA)

Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR - CURITIBA - Paraná - Brasil

CEP 81531990 - Tel: (41) 3361-3026 - E-mail: pgmat@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.

Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 446148

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://siga.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp> e insira o código 446148

A minha família, Maria Cristina Palacio, Elcio Gonçalo Mendes e Maria Leonor Rossi Palacio.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que participaram da minha trajetória pela pós-graduação em matemática na Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Agradeço à minha família, que sempre esteve presente com muito apoio e acolhimento, em especial à minha mãe Maria Cristina, meu padrasto Elcio e minha avó Maria Leonor.

Aos meus amigos da graduação, João Vitor, Matheus, Pedro, Lussyano, Letícia e Ana, que me incentivaram e estiveram presentes nos momentos de alegria e descontentamento.

Aos professores da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), que participaram da minha graduação e me proporcionaram uma educação de qualidade para que fosse possível o ingresso no mestrado. Em especial, a professora Nara Bobko, que orientou minha jornada acadêmica na UTFPR.

Aos meus amigos da pós-graduação, que estiveram presentes nas disciplinas cursadas e nas realizações acadêmicas. Em especial, João, Luiz e Gustavo.

Ao professor Roberto Ribeiro, que aceitou me orientar durante esta etapa, sempre esteve disponível nos momentos de dificuldade e me ensinou, não só toda a matemática necessária para a realização deste trabalho, como também a importância da persistência, do pensamento crítico e da busca contínua pelo conhecimento.

Ao meu coorientador, professor Marcelo Flamarion, que me ensinou e ajudou muito durante a realização desta pesquisa.

À banca examinadora, que aceitou acompanhar e contribuir com este trabalho.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGM) da UFPR, que foram parte da minha formação acadêmica.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aproveitamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A curiosidade tem sua própria razão de existir”.

Albert Einstein.

RESUMO

O estudo das trajetórias de partículas abaixo de ondas aquáticas, periódicas e viajantes é amplamente explorado na dinâmica de fluidos. Um importante resultado dessa área é que as trajetórias não são fechadas, resultando em um deslocamento residual das partículas na direção de propagação da onda, conhecido como *Stokes Drift*. Além disso, a energia cinética total das partículas apresenta propriedades bem definidas para ondas neste contexto. Enquanto já existe uma literatura extensa para ondas aquáticas, pouco se fala sobre as trajetórias de partículas abaixo de ondas viajantes em escoamentos eletrohidrodinâmicos (EHD). Visando preencher esta lacuna, esta dissertação investiga numericamente o efeito da variação de campos elétricos normais e horizontais na geometria das trajetórias e nas propriedades da energia cinética total das partículas abaixo de ondas viajantes, sejam periódicas ou solitárias. Através de experimentos numéricos que utilizam de métodos pseudo-espectrais e mapeamento conforme calculamos as trajetórias abaixo destas ondas, seus respectivos parâmetros geométricos e a energia cinética total das partículas no referencial de laboratório e no referencial móvel, que se move com a velocidade da onda. Nossos resultados indicam que, sob um campo elétrico normal, as partículas desaceleram sem alterar a geometria de suas trajetórias. Já para um campo elétrico horizontal, há aceleração da onda e deformação significativa nas trajetórias. Por fim, verificamos que as propriedades da energia cinética total obtidas na teoria de ondas aquáticas se mantêm para ondas periódicas no contexto EHD, mas não para ondas solitárias ou em escoamentos com campo elétrico horizontal.

Palavras-chave: Eletrohidrodinâmica; Trajetórias de Partículas; Energia Cinética; Campo Elétrico Normal; Campo Elétrico Horizontal.

ABSTRACT

The study of particle trajectories beneath periodic and traveling water waves is widely explored in fluid dynamics. An important result in this field is that trajectories are not closed, leading to a residual displacement of particles in the wave propagation direction, known as Stokes Drift. Moreover, the total kinetic energy of the particles presents well-defined properties for waves in this context. While extensive research has been conducted on water waves, its counterpart in electrohydrodynamic (EHD) flows remains relatively unexplored. To fill this gap, this work numerically investigates the effect of the variation of normal and horizontal electric fields on the geometry of trajectories and the properties of the total kinetic energy of particles beneath traveling waves, whether periodic or solitary. Through numerical simulations utilizing pseudo-spectral methods and conformal mapping, we compute the trajectories beneath these waves, their respective geometric parameters, and the total kinetic energy of the trajectories in both the laboratorial frame and the moving frame, which moves with the wave speed. Our results indicate that under a normal electric field, particles slow down without while maintain the geometry of their trajectories. However, under a horizontal electric field, particles acceleration occurs alongside significant deformation of the trajectories. Finally, we find that the total kinetic energy properties established in water wave theory hold for periodic waves in the EHD context but not for solitary waves or flows with a horizontal electric field.

Keywords: Electrohydrodynamics; Particle Trajectories; Kinetic Energy; Normal Electric Field; Horizontal Electric Field.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Esquema Físico do Problema. | 20 |
| 1.2 | Representação do Mapeamento Conforme | 21 |
| 1.3 | Parâmetros Geométricos da Trajetória | 31 |
| 2.1 | Esquema Físico do Problema | 35 |
| 2.2 | Variação do perfil da onda para três valores de E_b diferentes. | 43 |
| 2.3 | Velocidade da onda com a variação de E_b | 44 |
| 2.4 | Registros instantâneos das trajetórias. Posição inicial (preto), $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.3$ (azul), $E_b = 0.7615$ (verde). | 45 |
| 2.5 | Tempo de <i>drift</i> com a variação de E_b | 45 |
| 2.6 | Limite inferior (L.B.) e superior (U.B.) para o tempo de <i>drift</i> . Esquerda: Variação de E_b . Direita: Variação de Y_0 | 46 |
| 2.7 | Erros relativos dos parâmetros geométricos. Acima: Esquerda: $E_r(d_1)$. Direita: $E_r(d_2)$. Abaixo: $E_r(d_3)$ | 46 |
| 2.8 | Energia cinética com variação de ε . Acima: Referencial de laboratório. Direita: <i>Zoom</i> para o caso $\varepsilon = 0.001$. Abaixo: Referencial móvel. | 47 |
| 2.9 | Energia cinética com variação de E_b . Direita: Referencial de laboratório. Esquerda: Referencial móvel. | 48 |
| 2.10 | Onda Solitária de Elevação (Preto) e Região Efetiva da onda (Vermelho). | 49 |
| 2.11 | Perfis de ondas solitárias com a variação de E_b . Esquerda: Onda de elevação. Direita: Onda de depressão. | 52 |
| 2.12 | Velocidade da onda com a variação de E_b . Esquerda: Ondas de elevaçã. Direita: Ondas de depressão. | 52 |
| 2.13 | Registros Instantâneos da Trajetória. Esquerda: Onda de Elevação. Ponto Inicial (preto), $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.4$ (azul), $E_b = 0.9$ (verde). Direita: Onda de Depressão. Ponto Inicial (preto), $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.3$ (azul), $E_b = 0.6$ (verde). | 53 |
| 2.14 | Tempo de <i>Drift</i> com a variação de E_b . Ondas de Elevação (direita), Ondas de Depressão (esquerda). | 53 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.15 | Erros relativos dos parâmetros geométricos em ondas de elevação. Acima: Esquerda: $E_r(d_1)$. Direita: $E_r(d_2)$. Abaixo: $E_r(d_3)$ | 54 |
| 2.16 | Erros relativos dos parâmetros geométricos em ondas de depressão. Acima: Esquerda: $E_r(d_1)$. Direita: $E_r(d_2)$. Abaixo: $E_r(d_3)$ | 55 |
| 2.17 | Energia cinética total das partículas abaixo de uma onda de elevação. Esquerda: Referencial de laboratório. Direita: Referencial móvel. | 55 |
| 2.18 | Energia cinética total das partículas abaixo de uma onda de depressão nos referenciais. Es- querda: Referencial de laboratório. Direita: Referencial móvel. | 56 |
| 3.1 | Esquema Físico do Problema | 58 |
| 3.2 | Perfil da Onda | 61 |
| 3.3 | Velocidade da Onda com a Variação da Intensidade do Campo Elétrico | 62 |
| 3.4 | Registo da Trajetórias de Partículas. $E_b = 0.01$ (preto), $E_b = 1.5$ (vermelho), $E_b = 4.7$ (azul). | 63 |
| 3.5 | Tempo de <i>drift</i> com a variação de E_b | 63 |
| 3.6 | Energia cinética total das partículas. Esquerda: Referencial de laboratório. Direita: Referen- cial móvel. | 64 |
| D.1 | Tempo de <i>drift</i> em função de E_b . Esquerda: Regime de águas rasas. Direita: Regime de águas profundas. | 81 |
| D.2 | Energia Cinética total das partículas em função da profundidade inicial (Y_0) para diferentes valores de E_b . Acima: Regime de águas rasas. Abaixo: Regime de águas profundas. Esquerda: Referencial de laboratório. Direita: Referencial móvel | 82 |
| D.3 | Fonte: Autoria Própria. | 82 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| INTRODUÇÃO | 14 |
| 1 Preliminares: Ondas Aquáticas | 19 |
| 1.1 Formulação Matemática | 19 |
| 1.2 Mapeamento Conforme | 20 |
| 1.3 Trajetórias de Partículas | 29 |
| 1.3.1 Parâmetros Geométricos | 30 |
| 1.4 Energia Cinética Total das Partículas | 32 |
| 2 Campo Elétrico Normal | 34 |
| 2.1 Formulação Matemática | 34 |
| 2.2 Teoria Linear | 38 |
| 2.3 Ondas Periódicas | 40 |
| 2.3.1 Discretização e o Método Numérico | 40 |
| 2.3.2 Experimentos Numéricos | 42 |
| 2.4 Ondas Solitárias | 48 |
| 2.4.1 Parâmetros Geométricos para Ondas Solitárias | 48 |
| 2.4.2 Método Numérico | 50 |
| 2.4.3 Experimentos Numéricos | 51 |
| 3 Campo Elétrico Horizontal | 57 |
| 3.1 Formulação Matemática | 57 |
| 3.2 Método Numérico | 59 |
| 3.3 Experimentos Numéricos | 61 |
| Considerações Finais | 65 |
| BIBLIOGRAFIA | 66 |
| A Resolução das equações para ϕ e ψ | 71 |

| | |
|--|-----------|
| B Inversão dos Sistemas | 75 |
| C Velocidade da onda linear c_γ | 77 |
| D Experimentos Numéricos para Regimes de Profundidade distintos | 80 |

INTRODUÇÃO

Imagine um mundo onde a escuridão da noite só pode ser afastada pelo fogo, onde máquinas são movidas apenas pela força dos músculos ou do vento. Agora, visualize o instante em que uma faísca atravessa o céu, um relâmpago cortando as nuvens, e alguém se pergunta: e se pudéssemos dominar essa força invisível?

A eletricidade foi descoberta pela escola de Tales de Mileto, os milésios, por volta de 600 a.C. Eles observaram que ao esfregar um âmbar com um pedaço de pano fazia com que materiais leves fossem atraídos por ele. Originalmente, o termo “eletricidade” vem da palavra grega para âmbar: $\eta\lambdaεκτρον$ (elektron) [39]. Hoje, a eletricidade é uma prova que a curiosidade humana não tem limites e, esta curiosidade gerou frutos em diversas áreas de estudo. Em especial, estamos interessados no acoplamento do movimento de um fluido e da eletricidade.

Eletrohidrodinâmica (EHD) é um campo de estudo que combina o escoamento de um fluido com a ação de um campo elétrico. Existem diversas aplicações para escoamentos EHD em engenharia química, como em processos de revestimento [31, 25], processos de resfriamento de equipamentos de alta potência [22], processo de transferência de íons [45], etc. Um detalhamento maior pode ser visto em [30].

Neste trabalho, estamos interessados em estudar as propriedades das trajetórias e da energia cinética total das partículas que estão se deslocando abaixo de ondas cujo escoamento é EHD. Antes de aprofundarmos nas hipóteses matemáticas e nos objetivos deste trabalho, fazemos uma breve introdução à história deste estudo e ao estado da arte, que justificará a contribuição desta dissertação ao tema.

Trajatóras de partículas abaixo de ondas aquáticas: Uma revisão histórica e o estado da arte.

A história do estudo de trajetórias de partículas abaixo de ondas aquáticas remete ao ano de 1839 com os trabalhos de George Green [24]. Ele provou que estas trajetórias abaixo de ondas lineares em canais de dimensão infinita são circulares e fechadas. Logo em seguida, George B. Airy [2] deduziu que em canais de dimensão finita, estas trajetórias são curvas elípticas fechadas.

Motivado por estes trabalhos, George G. Stokes [44] se aprofundou nos trabalhos de Green e conjecturou, utilizando aproximações sucessivas, que as trajetórias das partículas abaixo de ondas aquáticas, sejam estas

no regime de águas rasas¹ ou profunda², não são fechadas, isto é, sofrem um deslocamento residual na direção de propagação da onda. Este deslocamento ficou conhecido na literatura como *Stokes Drift*.

No século seguinte ao trabalho de Stokes, diversos trabalhos relacionados à sua conjectura foram produzidos. Ursell [49] provou teoricamente que as partículas abaixo de ondas aquáticas rasas ou profundas com profundidade uniforme sofrem um deslocamento na direção de propagação da onda. Longuet-Higgins [34], por sua vez, analisou experimentalmente a trajetória de uma partícula localizada inicialmente na superfície da onda e observou que esta tinha o formato de um laço.

Conectando os estudos previamente descritos, Constantin [7] produziu uma prova rigorosa para o resultado apontado por Stokes, avançou o trabalho teórico de Ursell e mostrou que o experimento de Longuet-Higgins está matematicamente correto. Em outras palavras, Constantin provou que as trajetórias de partículas abaixo de ondas, sem nenhuma hipótese sobre o regime de profundidade, não são fechadas, isto é, o *Stokes Drift* está presente na trajetória. Mais ainda, Constantin mostrou que o formato das trajetórias é de laço, independente da sua posição inicial, exceto por partículas inicialmente localizadas no fundo do canal, estas oscilam horizontalmente. Em parceria, Constantin e Villari [11] estudaram o caso linear do trabalho anterior e obtiveram o mesmo resultado. Constantin e Strauss [10] estudaram o efeito de uma onda com correnteza uniforme na trajetória das partículas abaixo da mesma. Neste caso, os autores provaram que é possível que a trajetória seja fechada.

Em estudos mais recentes, Carter et al. [6] utilizam principalmente as equações de Schrödinger não lineares para descrever a superfície da onda e estudar as trajetórias das partículas abaixo dessa onda, obtendo resultados semelhantes aos de uma onda descrita pelas equações de Euler. Vanneste e Young [50] mostram que o *Stokes Drift* pode ser decomposto em um componente solenoidal, o que simplifica a sua análise.

Outros autores consideram ondas com vorticidade constante³, as quais são adequadas para modelar situações em que as ondas são longas em comparação com a profundidade ou curtas em comparação com a escala de comprimento da distribuição de vorticidade [47]. Van den Bremer e Breivik [5] estudaram o *Stokes Drift* por meio de estudos experimentais utilizando técnicas fotográficas no laboratório para comparar resultados teóricos e experimentais. Abrashkin e Pelinovsky [1] analisaram o *Stokes Drift* sob dois tipos de ondas, ondas de Stokes e ondas de Gerstner⁴, e mostraram que existe uma relação entre os dois tipos de onda e o *Stokes Drift*.

Os trabalhos mencionados acima têm seu foco em ondas aquáticas periódicas e viajantes. Em alguns contextos físicos também é interessante considerar ondas solitárias. A definição de uma onda solitária remete a John S. Russel, no ano de 1845. Russel conta em seu relato que descobriu este tipo de onda quando viu a formação de uma elevação solitária a frente de um barco puxado por dois cavalos no *Union Canal* em Edimburgo (Escócia) [42]. A este fenômeno, Russel deu o nome de Grande Onda de Translação. Por mais de cem anos as ondas solitárias foram discutidas por matemáticos renomados, como Stokes [35] e Boussinesq

¹Regime no qual a profundidade do canal é muito menor que o comprimento da onda.

²Regime no qual a profundidade do canal é muito maior que o comprimento da onda.

³Vorticidade constante é o mesmo que uma correnteza que varia linearmente com a profundidade do canal.

⁴Soluções exatas das equações de Euler.

[4], até que, em 1985, Diederik Korteweg e Gustav de Vries [32] deduziram um modelo reduzido que descreve a dinâmica de uma onda solitária. Tal modelo é conhecido como equação de Korteweg-De Vries (KdV).

O estudo das trajetórias abaixo deste tipo de onda é iniciado por Constantin e Escher [9]. Neste trabalho, os autores mostram que o formato das trajetórias abaixo de uma onda solitária descrita pelas equações de Euler, observada em um referencial fixo segue o padrão da superfície da onda. Em 2009, Constantin [8] oferece uma abordagem diferente e simplificada para o mesmo problema, e obtém o mesmo resultado.

Mais recentemente, Borluk e Kalisch [3] utilizam o modelo de KdV para descrever a onda solitária na qual estudam numericamente a trajetória das partículas abaixo destas e o fluxo de massa proveniente da propagação da onda. Os experimentos numéricos realizados neste artigo mostram que as trajetórias abaixo de ondas solitárias não são fechadas e o fluxo de massa computado numericamente está de acordo com a previsão teórica. Guan [26] utiliza as equações de KdV para modelar ondas solitárias com vorticidade constante e verifica a possibilidade das trajetórias serem fechadas neste contexto, isto é, a adição da vorticidade na modelagem do problema modifica o formato das trajetórias.

Estudos experimentais também foram realizados para estudar as trajetórias de partículas. Umeyama [48] faz experimentos com ondas solitárias sem vorticidade, com vorticidade constante e provenientes da colisão de duas ondas solitárias. Vale notar que em seus experimentos o único caso em que a trajetória se fechou foi com correnteza presente. Hsu, Chen e Hwung [28] faz experimentos com ondas solitárias variando sua altura e profundidade. Aqui, os autores verificam as propriedades descritas por Constantin [7].

Além destes resultados sobre as trajetórias de partículas abaixo de ondas aquáticas, estudos foram feitos acerca da energia cinética total das partículas abaixo destas ondas. Constantin [12] mostra, sob a hipótese de ondas periódicas, viajantes e com escoamento irrotacional que a energia cinética total das partículas, em função da profundidade, no referencial móvel⁵ é constante igual a metade do produto da velocidade com o comprimento da onda, enquanto no referencial de laboratório é convexa e não decrescente. Li e Yang [33] produzem resultados análogos para ondas em regime de ondas profundas.

A revisão histórica e o estado da arte mencionados acima se referem especificamente à ondas periódicas e solitárias aquáticas. Essa revisão bibliográfica sobre trajetórias de partículas abaixo de ondas aquáticas serve como introdução para o estudo do estado da arte deste tema no contexto de escoamentos EHD.

Eletrohidrodinâmica

Os principais estudos pioneiros em EHD consideram uma interface entre dois fluidos. Taylor e McEwan [46] mostraram em teoria e com experimentos práticos que a interface entre um fluido condutor e um dielétrico pode ser desestabilizada com o efeito de um campo elétrico normal atuando perpendicularmente à interface entre os fluidos. Melcher e Schwarz [37] consideram campos elétricos tangentes que são paralelos à superfície da onda não perturbada. Neste trabalho, os autores mostram que ondas curtas podem ser regularizadas devido à ação do campo elétrico no fluido.

⁵Referencial que se move com a velocidade da onda.

Desde então, muitos autores continuaram a investigação sobre o papel dos campos elétricos na (des)estabilização de várias configurações de interface de fluidos. No problema de campos elétricos verticais, o cenário mais geral envolve dois fluidos imiscíveis, com uma interface entre eles, sendo ambos dielétricos perfeitos com coeficientes dielétricos diferentes [13]. Algumas suposições são geralmente feitas para simplificar o problema. Uma configuração comum é considerar que a camada superior seja uma região hidrodinamicamente passiva e que a camada inferior seja um fluido condutor [40, 15, 38, 23, 27, 29, 51, 14]. Outra suposição comum é considerar que a camada superior seja um gás condutor, enquanto a camada inferior seja um fluido dielétrico, o que reduz a configuração física a um problema de uma única camada [20, 21, 17, 18]. Uma dúvida natural que pode surgir para escoamentos neste contexto é como a variação do campo elétrico atua na trajetória das partículas.

Estudos recentes sobre trajetórias de partículas abaixo de ondas viajantes periódicas [17] e solitárias [18] consideram um campo elétrico normal agindo no escoamento do fluido. O trabalho [19] considera ondas periódicas e viajantes que estão sob a ação de um campo elétrico paralelo (horizontal) à direção de propagação da onda. Estes trabalhos foram feitos dando ênfase na investigação de pontos de estagnação⁶ e linhas de corrente.⁷

Até onde temos conhecimento, não há na literatura nenhum trabalho que estude o efeito de campos elétricos normais e horizontais nos parâmetros geométricos das trajetórias (*Stokes Drift* e máximo comprimento horizontal e vertical de uma trajetória) e na energia cinética total das partículas abaixo de um perfil de onda viajante, seja este periódico ou solitário. Para preencher esta lacuna na literatura, nesta dissertação faremos uma investigação numérica sobre este tema.

Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é realizar um estudo numérico acerca das trajetórias e da energia cinética total das partículas em dois contextos EHD: (1) O efeito de um campo elétrico normal e (2) o efeito de um campo elétrico horizontal. Para ambos os casos, definimos os seguintes objetivos específicos:

1. Estudar o efeito da mudança da intensidade do campo elétrico na trajetória das partículas abaixo de ondas periódicas e solitárias;
2. Verificar se as propriedades da energia cinética total das partículas, conhecidas para ondas aquáticas, continuam válidas no contexto de escoamentos EHD para ambos os tipos de ondas (periódicas e solitárias).

Nossos resultados indicam que tanto para ondas periódicas, quanto para ondas solitárias, o aumento da intensidade do campo elétrico normal faz com que a velocidade da onda caia, mas o perfil se mantenha. Ao mesmo tempo, esta variação causa nas trajetórias das partículas uma desaceleração das mesmas, mas

⁶Partículas com velocidade zero no referencial móvel

⁷Curvas que indicam a trajetória de uma partícula.

mantém seu formato e parâmetros geométricos. Para a energia cinética, verificamos que as propriedades oriundas da teoria de ondas aquáticas [12, 33] se mantêm para um escoamento eletrohidrodinâmico abaixo de ondas periódicas. Já para ondas solitárias, estas propriedades não são mantidas por completo.

Considerando um campo elétrico horizontal, estudamos apenas o caso de ondas periódicas. Nossos resultados indicam que, neste contexto, a intensificação do campo elétrico faz uma pequena alteração no perfil da onda e acelera a mesma. Por outro lado, as trajetórias não são mantidas e, ainda, são aceleradas. Por fim, os estudos acerca da energia cinética total das partículas indicam que as propriedades de ondas aquáticas não são mantidas neste contexto.

Para a obtenção destes objetivos, nós resolvemos as equações governantes para encontrar o perfil da onda via métodos pseudo-espectrais e mapeamento conforme, como em [16, 17]. Encontramos as trajetórias via método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e as integrais provenientes da energia cinética total das partículas são calculadas via método dos trapézios. Todas as simulações numéricas foram realizadas utilizando o *software* Matlab R2023a disponibilizado para uso acadêmico.

Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: No capítulo 1 apresentamos resultados preliminares sobre ondas aquáticas que serão de grande utilidade para a compreensão das aplicações em ambos os contextos EHD. No capítulo 2 exploramos o efeito do campo elétrico normal. Nele, apresentamos a formulação matemática do problema, a teoria linear atrelada ao mesmo, os métodos numéricos utilizados e os experimentos numéricos realizados. No capítulo 3 apresentamos o problema relacionado a um campo elétrico horizontal com a mesma estrutura do capítulo anterior. As considerações finais estão dispostas nas conclusões do trabalho. Por fim, acrescentamos os Apêndices A, B e C visando apresentar um desenvolvimento algébrico mais detalhado e o Apêndice D tem como objetivo mostrar experimentos numéricos para ondas periódicas cujo escoamento está sob o efeito de um campo elétrico normal em outros regimes de profundidade, isto é, águas rasas e profundas.

Capítulo 1

Preliminares: Ondas Aquáticas

Este capítulo tem como objetivo apresentar resultados preliminares sobre ondas aquáticas que servirão como motivação para o estudo de escoamentos eletrohidrodinâmicos (EHD).

A primeira seção deste capítulo é dedicada a introduzir a motivação física do problema, as equações governantes que o regem e a teoria linear necessária para que possamos resolver o problema não-linear. Em seguida, na segunda seção, apresentamos a ferramenta crucial para o desenvolvimento do trabalho, o mapeamento conforme. Na terceira seção, mostramos o sistema para calcular a trajetória das partículas e definimos seus parâmetros geométricos. Finalmente, a quarta seção é dedicada a expor resultados acerca da energia cinética total das partículas.

1.1 Formulação Matemática

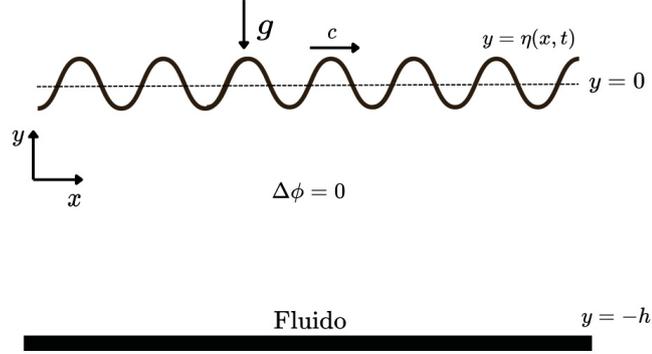
Considere um fluido invíscido e incompressível de densidade ρ . O fundo do fluido está em $y = -h$ e $y = 0$ denota a superfície da onda não perturbada, como podemos ver na Figura 1.1. A aceleração da gravidade e o coeficiente de tensão superficial são denotados por g e T , respectivamente. Seja $\vec{U} = \nabla\phi$ o campo de velocidades do escoamento do fluido. Denotamos por $y = \eta(x, t)$ a superfície livre do fluido, que se comporta como uma onda periódica e viajante, λ o comprimento da onda e c a velocidade da onda. Note que, neste referencial, a onda propaga na direção x com velocidade c , o qual chamamos de referencial de laboratório (fixo). Com a seguinte mudança de variáveis:

$$X = x - ct \quad Y = y,$$

eliminamos a dependência do tempo e, assim, a dinâmica do fluido consiste em um fluxo na direção negativa de X , e o perfil da onda se mantém estacionário. Quando feita essa mudança, dizemos que estamos considerando a onda no referencial móvel. Assim, podemos reescrever o perfil da onda como $Y = \eta(X)$.

Seguindo uma abordagem semelhante à feita por [17] expressamos as equações de Euler na sua forma adimensional, utilizando as formulações do potencial de velocidade como:

Figura 1.1: Esquema Físico do Problema.



Fonte: Autoria Própria.

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{em} \quad -1 < Y < \eta(X), \quad (1.1)$$

$$-c\eta_X + \phi_X\eta_X = \phi_Y \quad \text{sobre} \quad Y = \eta(X), \quad (1.2)$$

$$\phi_Y = 0 \quad \text{sobre} \quad Y = -1, \quad (1.3)$$

onde escolhemos h e $\sqrt{h/g}$ como comprimento e tempo de referência, respectivamente. Note que, da escolha do comprimento de referência h , fixamos o fundo do canal em $Y = -1$. Devido à continuidade da pressão na superfície do fluido, podemos acoplar no sistema a condição dinâmica:

$$-c\phi_X + \frac{1}{2}(\phi_X^2 + \phi_Y^2) + \eta - \sigma \frac{\eta_{XX}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} = B \quad \text{sobre} \quad Y = \eta(X), \quad (1.4)$$

onde B representa a constante de Bernoulli e σ o parâmetro de capilaridade adimensional (número de Bond), dado por:

$$\sigma = \frac{T}{\rho gh^2}.$$

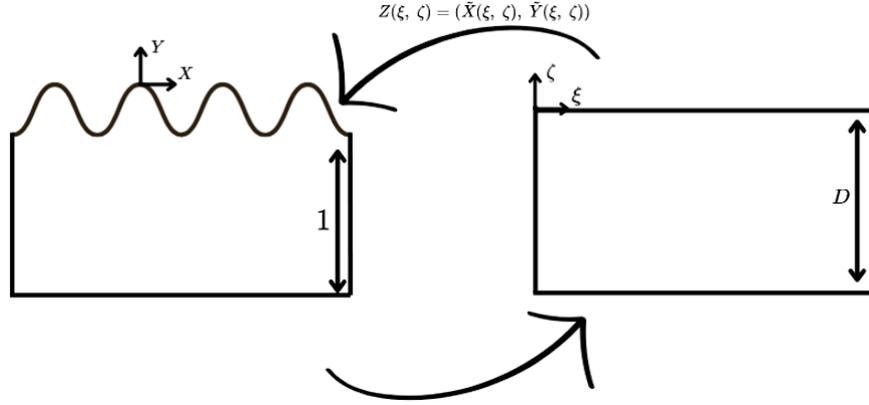
Para encontrar a elevação da superfície livre η e estudar as trajetórias abaixo desta ondas precisamos resolver a equação de Laplace (1.1) acoplada com as condições de fronteira (1.2)-(1.4), ou seja, precisamos tratar de um problema de fronteira livre, o que não é trivial.

Uma estratégia muito utilizada para a resolução de problemas desta natureza é o mapeamento conforme [16, 17], e é a esta técnica que dedicamos a próxima seção.

1.2 Mapeamento Conforme

Nesta seção, estamos interessados em apresentar o método crucial para o desenvolvimento deste trabalho, o mapeamento conforme. Esta estratégia de resolução consiste em mapear o domínio original em um domínio

Figura 1.2: Representação do Mapeamento Conforme



Fonte: Autoria Própria.

retangular, que é mais simples e adequado para as simulações numéricas. Uma ilustração pode ser vista na Figura 1.2.

Com isto em mente, definimos:

- Domínio Físico (Original): $\Gamma = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\lambda/2 \leq X \leq \lambda/2, -1 \leq Y \leq \eta(X)\}$;
- Domínio Canônico (Retangular): $\tilde{\Gamma} = \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2 \mid -L/2 \leq \xi \leq L/2, -D \leq \zeta \leq 0\}$.

Assim, precisamos encontrar uma transformação $Z : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, dada por:

$$Z(\xi, \zeta) = (\tilde{X}(\xi, \zeta), \tilde{Y}(\xi, \zeta)),$$

que assumiremos ser conforme. Em virtude do isomorfismo $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ é possível mostrar que uma transformação conforme é uma função complexa analítica, localmente invertível e geometricamente, preserva ângulos. A invertibilidade é essencial para este trabalho, já que vamos resolver as equações no domínio canônico e expressar as soluções no domínio físico. Outras duas características centrais desta transformação são:

- Invariância para a equação de Laplace;
- A superfície livre e o fundo do canal são, respectivamente, imagens das curvas $\zeta = 0$ e $\zeta = -D$, isto é,

$$\tilde{Y}(\xi, 0) = \eta(\tilde{X}(\xi, 0)), \quad (1.5)$$

$$\tilde{Y}(\xi, -D) = -1. \quad (1.6)$$

Desta forma, para encontrarmos uma expressão para esta transformação, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{Y} = 0, & \text{em } -D < \zeta < 0, \\ \tilde{Y}(\xi, 0) = \eta(\tilde{X}(\xi, 0)), \\ \tilde{Y}(\xi, -D) = -1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Daqui em diante, por conveniência, denotaremos $\eta(\tilde{X}(\xi, 0)) = \mathbf{Y}(\xi, \zeta = 0)$ e supomos que esta é uma função previamente conhecida. Para resolver o sistema (1.7) faremos o uso da transformada de Fourier periódica em relação à variável ξ , definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(\xi)] &= \hat{f}(k_j) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(\xi) e^{-ik_j \xi} d\xi, \\ \mathcal{F}[\hat{f}(k_j)]^{-1} &= f(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k_j) e^{ik_j \xi}, \end{aligned}$$

onde $k_j = (2\pi/L)j$, $j \in \mathbb{Z}$. Para alívio da notação, façamos $k_j = k$. Vamos aplicar a transformada de Fourier periódica no sistema (1.7), mas antes relembremos que:

$$\hat{f}'(k) = ik \hat{f}(k).$$

Assim, ao fazer o uso do operador $\mathcal{F}[\cdot]$ nas equações do sistema (1.7), traduzimos o sistema de EDP's em um sistema de EDO's de segunda ordem homogêneo dado por:

$$\begin{cases} -k^2 \hat{Y}(k, \zeta) + \hat{Y}_{\zeta\zeta}(k, \zeta) = 0, & \text{em } -D < \zeta < 0, \\ \hat{Y}(k, 0) = \hat{\mathbf{Y}}(k), \\ \hat{Y}(0, -D) = \begin{cases} -1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.8)$$

Note que, a notação $\hat{Y}(k, \zeta)$ representa a transformada de Fourier periódica da função $\tilde{Y}(\xi, \zeta)$ na variável ξ e, $\hat{\mathbf{Y}}(k) = \mathcal{F}[Y(\xi, \zeta = 0)]$. Dividimos a resolução deste sistema em dois casos. Primeiro, considere $k \neq 0$. Então, note que:

$$k^2 \hat{Y}(k, \zeta) = \hat{Y}_{\zeta\zeta}(k, \zeta) \Rightarrow \hat{Y}(k, \zeta) = e^{\alpha\zeta},$$

onde $\alpha = \pm k$. Desta forma, a solução geral para essa EDO é dada por:

$$\hat{Y}(k, \zeta) = A(k)e^{k\zeta} + B(k)e^{-k\zeta}. \quad (1.9)$$

onde $A(k)$ e $B(k)$ são funções ainda desconhecidas. Fazendo $\zeta = 0$, temos:

$$\hat{Y}(k, 0) = \hat{\mathbf{Y}}(k) = A(k) + B(k). \quad (1.10)$$

Por outro lado, tomando $\zeta = -D$, obtemos:

$$\hat{Y}(k, -D) = A(k)e^{-kD} + B(k)e^{kD} = 0 \Rightarrow A(k) = \frac{-B(k)e^{kD}}{e^{-kD}}.$$

Substituindo na equação (1.10):

$$\begin{aligned} \hat{Y}(k) &= \frac{-B(k)e^{kD}}{e^{-kD}} + B(k), \\ &= \frac{-B(k)e^{kD} + B(k)e^{-kD}}{e^{-kD}}, \\ &= B(k) \left(\frac{e^{-kD} - e^{kD}}{e^{-kD}} \right), \\ &= B(k) \left(\frac{2 \sinh(kD)}{e^{-kD}} \right), \\ &\Rightarrow B(k) = \hat{Y}(k) \left(\frac{e^{-kD}}{2 \sinh(kD)} \right). \end{aligned}$$

Aplicando ambos $A(k)$ e $B(k)$ na equação (1.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(k, \zeta) &= \frac{-B(k)e^{kD}}{e^{-kD}} e^{k\zeta} + B(k)e^{-k\zeta}, \\ &= -\hat{Y}(k) \left(\frac{e^{kD}}{2 \sinh(kD)} \right) e^{k\zeta} + \hat{Y}(k) \left(\frac{e^{-kD}}{2 \sinh(kD)} \right) e^{-k\zeta}, \\ &= \frac{\hat{Y}(k)}{\sinh(kD)} \left(\frac{e^{-kD} e^{-k\zeta}}{2} - \frac{e^{kD} e^{k\zeta}}{2} \right), \\ &= \frac{\hat{Y}(k)}{\sinh(kD)} \sinh(k(D + \zeta)). \end{aligned}$$

Agora, analisemos o caso $k = 0$. A primeira equação do sistema (1.8) fica da forma:

$$\hat{Y}_{\zeta\zeta}(0, \zeta) = 0,$$

cujas soluções gerais são da forma $\hat{Y}(0, \zeta) = a\zeta + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Aplicada às condições de contorno:

$$\begin{cases} \hat{Y}(0, 0) = \hat{Y}(0), \\ \hat{Y}(0, -D) = -1. \end{cases}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(0, 0) = b = \hat{Y}(0) \quad \text{e}, \\ \hat{Y}(0, -D) = -Da + b = -Da + \hat{Y}(0) = -1 \Rightarrow a = \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução para o sistema (1.8) pode ser expressa por:

$$\hat{Y}(k, \zeta) = \begin{cases} \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D} \zeta + \hat{Y}(0), & k = 0, \\ \hat{Y}(k) \frac{\sinh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Retomando a definição da transformada de Fourier periódica inversa ser um somatório, temos uma das fórmulas para o mapeamento conforme Z , expressa por:

$$\tilde{Y}(\xi, \zeta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\hat{Y}(k) \frac{\sinh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \right] + \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D} \zeta + \hat{Y}(0). \quad (1.11)$$

Devido à analiticidade de Z , podemos fazer o uso das relações de Cauchy-Riemann para expressar a componente $\tilde{X}(\xi, \zeta)$ do mapeamento. Veja que,

$$\tilde{Y}_\zeta(\xi, \zeta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[k \hat{Y}(k) \frac{\cosh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \right] + \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D} = \tilde{X}_\xi(\xi, \zeta). \quad (1.12)$$

Onde integramos em ξ para obter:

$$\tilde{X}(\xi, \zeta) = -\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\hat{Y}(k) \frac{i \cosh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \right] + \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D} \xi. \quad (1.13)$$

Assim, obtemos duas equações necessárias para compor o mapeamento $Z : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$.

Note que, como estamos mapeando o domínio físico em uma faixa retangular, precisamos fixar o tamanho de uma das dimensões do domínio canônico. A escolha feita neste trabalho é fazer $L = \lambda$, isto é, os comprimentos de ambos os domínios são os mesmos. Desta forma, temos:

$$\mathbf{X}(\xi = -L/2) - \mathbf{X}(\xi = L/2) = L = \lambda = \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{X}_\xi(\xi) d\xi,$$

onde $\mathbf{X}(\xi) = \tilde{X}(\xi, \zeta = 0)$. Assim, utilizando a primeira definição de transformada de Fourier periódica e tomando seu modo zero, obtemos:

$$\hat{\mathbf{X}}_\xi(0) = \frac{\lambda}{L} = 1.$$

Por outro lado, ao tomarmos o modo zero da transformada de Fourier periódica descrita pela equação (1.12), obtemos:

$$\hat{\mathbf{X}}_\xi(0) = \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D} = 1 \Rightarrow \hat{Y}(0) + 1 = D. \quad (1.14)$$

Portanto, fixamos a profundidade do domínio canônico como:

$$D = \langle \mathbf{Y} \rangle + 1, \quad (1.15)$$

onde

$$\langle \mathbf{Y} \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{Y}(\xi) d\xi.$$

Além disso, podemos substituir a equação (1.14) nas fórmulas (1.11) e (1.13) para finalizar o desenvolvimento das equações do mapeamento conforme Z . Assim, obtemos:

$$\begin{cases} \tilde{X}(\xi, \zeta) = -\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\hat{Y}(k) \frac{i \cosh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \right] + \xi, \\ \tilde{Y}(\xi, \zeta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\hat{Y}(k) \frac{\sinh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \right] + \zeta + \hat{Y}(0). \end{cases} \quad (1.16)$$

Com as equações para o mapeamento conforme em mãos, podemos transformar um ponto qualquer de $\tilde{\Gamma}$ para Γ , mas isto não basta para resolvermos o nosso problema, precisamos reescrever as equações governantes

no referencial canônico, para que assim estas possam ser resolvidas numericamente. Desta forma, um passo-a-passo análogo ao feito anteriormente pode ser repetido para encontrar uma fórmula para o campo de velocidades $\vec{U} = \nabla\phi$ no sistema de coordenadas canônico. Assim, considere $\psi(X, Y)$ um conjugado harmônico de $\phi(X, Y)$. Reescrevemos ambas no referencial canônico da seguinte forma:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(\xi, \zeta) = \phi(\tilde{X}(\xi, \zeta), \tilde{Y}(\xi, \zeta)), \\ \tilde{\psi}(\xi, \zeta) = \psi(\tilde{X}(\xi, \zeta), \tilde{Y}(\xi, \zeta)). \end{cases} \quad (1.17)$$

Para assegurar uma melhor fluidez na leitura, o processo de obtenção das fórmulas para $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ serão omitidas do texto, mas estão disponíveis no Apêndice A. Desta forma, apresentamos diretamente as fórmulas para o mapeamento para o campo de velocidades no sistema de coordenadas canônico:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(\xi, \zeta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\cosh(k(D + \zeta))}{\cosh(kD)} \hat{\Phi}(k) \right], \\ \tilde{\psi}(\xi, \zeta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \hat{\Psi}(k) \right] - \langle \Psi \rangle \frac{\zeta}{D}, \end{cases} \quad (1.18)$$

onde $\hat{\Phi}(\xi) = \phi(\xi, \zeta = 0)$, $\hat{\Psi}(\xi) = \psi(\xi, \zeta = 0)$ são as funções tomadas na superfície.

Para que possamos cumprir o objetivo de expressar as equações governantes no referencial canônico, precisamos encontrar relações entre os pares harmônicos $\mathbf{X}(\xi)$ - $\mathbf{Y}(\xi)$ e $\hat{\Phi}(\xi)$ - $\hat{\Psi}(\xi)$. Desta forma, definimos um operador que será de grande ajuda para encontrar estas relações, o Operador de Hilbert:

Definição 1.1. *Dada uma função f . Definimos como $\mathcal{C}[\cdot]$ o operador de Hilbert em uma faixa, dado por:*

$$\mathcal{C}[f(\xi)] = \mathcal{C}_0[f(\xi)] + \lim_{k \rightarrow 0} i \coth(kD) \hat{f}(k),$$

onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{H}\mathcal{F}[\cdot]]$ e

$$\mathcal{H} := \begin{cases} i \coth(kD), & k \neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}$$

e f está definida no espaço onde as operações anteriores fazem sentido.

Ainda que esta definição pareça desconexa com o que foi feito anteriormente no trabalho, voltemos para a equação (1.16) onde derivamos $\tilde{X}(\xi, \zeta)$ em relação à variável ξ e tomamos seu valor na superfície:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\xi(\xi) &= -\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\hat{\mathbf{Y}}_\xi(k) \frac{i \cosh(kD)}{\sinh(kD)} \right] + 1, \\ &= -\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[i \coth(kD) \hat{\mathbf{Y}}_\xi(k) \right] + 1. \end{aligned}$$

Utilizando a definição do operador de Hilbert, temos portanto:

$$\mathbf{X}_\xi(\xi) = -\mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi(\xi)] + 1. \quad (1.19)$$

Por outro lado, tomando a derivada de $\tilde{\phi}(\xi, \zeta)$ em relação à variável ζ , fazendo uso da transformada de Fourier em $\tilde{\phi}_\zeta(\xi, \zeta)$ e aplicando na superfície, temos:

$$\hat{\Phi}_\zeta(\xi) = k \tanh(kD) \hat{\Phi}(k)$$

Da relação $\hat{f}_\xi(k) = ik\hat{f}(k)$, continuamos:

$$k \tanh(kD)\hat{\Phi}(k) = \frac{k \tanh(kD)\hat{\Phi}_\xi(\mathbf{k})}{i} = -\hat{\Psi}_\xi(k).$$

Isolando $\hat{\Phi}_\xi(\mathbf{k})$ na equação acima, obtemos:

$$\hat{\Phi}_\xi(\mathbf{k}) = -i \coth(kD)\hat{\Psi}_\xi(k).$$

Assim, com a utilização do operador de Hilbert, obtemos mais uma relação entre os pares harmônicos:

$$\Phi_\xi(\xi) = -\mathcal{C}_0[\Psi_\xi(\xi)]. \quad (1.20)$$

Outra relação importante advém da manipulação algébrica da equação (1.5):

$$\mathbf{Y}(\xi) = \eta(\mathbf{X}(\xi)),$$

que, ao utilizar a regra da cadeia, implica em:

$$\mathbf{Y}(\xi) = \eta_X \mathbf{X}_\xi \Rightarrow \eta_X = \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi}. \quad (1.21)$$

Além desta, vamos calcular a derivada de $\tilde{\phi}(\xi, \zeta)$ em ambas suas variáveis utilizando a regra da cadeia e depois, simplificando com as relações de Cauchy-Riemann.

$$\tilde{X}_\xi = \tilde{Y}_\zeta \quad \text{e} \quad \tilde{X}_\zeta = -\tilde{Y}_\xi.$$

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_\xi(\xi, \zeta) = \phi_X \tilde{X}_\xi + \phi_Y \tilde{Y}_\xi, \\ \tilde{\phi}_\zeta(\xi, \zeta) = \phi_X \tilde{X}_\zeta + \phi_Y \tilde{Y}_\zeta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\phi}_\xi(\xi, \zeta) = \phi_X \tilde{X}_\xi + \phi_Y \tilde{Y}_\xi, \\ \tilde{\phi}_\zeta(\xi, \zeta) = -\phi_X \tilde{Y}_\xi + \phi_Y \tilde{X}_\xi. \end{cases} \quad (1.22)$$

Para resolvermos o sistema anterior nas variáveis ϕ_X, ϕ_Y , precisamos invertê-lo. As manipulações feitas para a inversão do sistema estão disponíveis no Apêndice B. Desta forma, obtemos:

$$\begin{cases} \phi_X(X, Y) = \frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi \tilde{\phi}_\xi + \tilde{Y}_\xi \tilde{\psi}_\xi), \\ \phi_Y(X, Y) = \frac{1}{J}(-\tilde{X}_\xi \tilde{\psi}_\xi + \tilde{Y}_\xi \tilde{\phi}_\xi), \end{cases} \quad (1.23)$$

onde $J = X_\xi^2 + Y_\xi^2$ representa o Jacobiano da transformação. Avaliando o sistema anterior na superfície, temos o seguinte:

$$\begin{cases} \Phi_X(X, Y) = \frac{1}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi \Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi \Psi_\xi), \\ \Phi_Y(X, Y) = \frac{1}{\mathbf{J}}(-\mathbf{X}_\xi \Psi_\xi + \mathbf{Y}_\xi \Phi_\xi), \end{cases} \quad (1.24)$$

onde $\mathbf{J} = \mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2$ representa o Jacobiano da transformação avaliado na superfície. Agora, com todas as ferramentas necessárias, podemos atacar o problema principal, escrever as equações governantes e suas condições de contorno no domínio canônico. Primeiro, vejamos a condição de fronteira (1.2):

$$\begin{aligned}
& -c\eta_X + \phi_X\eta_X = \phi_Y, \\
& \Leftrightarrow -c\frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi} + \frac{1}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\Psi_\xi)\frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi} = \frac{1}{\mathbf{J}}(-\mathbf{X}_\xi\Psi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\Phi_\xi), \\
& \Leftrightarrow -c\mathbf{Y}_\xi + \frac{1}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi\mathbf{Y}_\xi\Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi^2\Psi_\xi) = \frac{1}{\mathbf{J}}(-\mathbf{X}_\xi^2\Psi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi), \\
& \Leftrightarrow -c\mathbf{Y}_\xi + \frac{1}{\mathbf{J}}\Psi_\xi(\mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2) = 0, \\
& \Leftrightarrow -c\mathbf{Y}_\xi + \frac{1}{\mathbf{J}}\Psi_\xi\mathbf{J} = 0, \\
& \Leftrightarrow c\mathbf{Y}_\xi = \Psi_\xi, \\
& \Rightarrow c\mathbf{Y} = \Psi.
\end{aligned}$$

Com isto, conseguimos uma relação entre as funções $\mathbf{Y}(\xi)$ e $\Psi(\xi)$, que será útil adiante. Vejamos também uma relação entre $\mathbf{X}_\xi(\xi)$ e $\Phi_\xi(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_\xi &= -\mathcal{C}_0[\Psi_\xi], \\
&= -\mathcal{C}_0[c\mathbf{Y}_\xi], \\
&= -c\mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi], \\
&= -c(1 - \mathbf{X}_\xi), \\
&= c\mathbf{X}_\xi - c.
\end{aligned}$$

Agora, vejamos a aplicação das relações previamente vistas na condição dinâmica (1.4) aplicadas na superfície:

$$-c\Phi_X + \frac{1}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Y^2) + \mathbf{Y} - \sigma\frac{\eta_{XX}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} = B,$$

Por conviência, dividimos essa substituição em 2 partes, onde:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = B, \\ P_1 = -c\Phi_X + \frac{1}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Y^2) + \mathbf{Y}, \\ P_2 = \sigma\frac{\eta_{XX}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Começando por P_1 , temos que:

$$\begin{aligned}
P_1 &= -c\Phi_X + \frac{1}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Y^2) + \mathbf{Y}, \\
&= -c\frac{1}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\Psi_\xi) + \frac{1}{2\mathbf{J}^2}((\mathbf{X}_\xi^2\Phi_\xi^2 + 2\mathbf{X}_\xi\mathbf{Y}_\xi\Phi_\xi\Psi_\xi + \mathbf{Y}_\xi^2\Psi_\xi^2) + (\mathbf{X}_\xi^2\Psi_\xi^2 - 2\mathbf{X}_\xi\mathbf{Y}_\xi\Phi_\xi\Psi_\xi + \mathbf{Y}_\xi^2\Phi_\xi^2)) + \mathbf{Y}, \\
&= \frac{-c}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\Psi_\xi) + \frac{1}{2\mathbf{J}^2}(\mathbf{J}\Phi_\xi^2 + \mathbf{J}\Psi_\xi^2) + \mathbf{Y}, \\
&= \frac{-c}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\Psi_\xi) + \frac{1}{2\mathbf{J}}(\Phi_\xi^2 + \Psi_\xi^2) + \mathbf{Y}, \\
&= \frac{-c}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi(c\mathbf{X}_\xi - c) + c\mathbf{Y}_\xi^2) + \frac{1}{2\mathbf{J}}(c^2\mathbf{X}_\xi^2 - 2c^2\mathbf{X}_\xi + c^2 + c^2\mathbf{Y}_\xi^2) + \mathbf{Y}, \\
&= \frac{-c^2}{\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi^2 - \mathbf{X}_\xi + \mathbf{Y}_\xi^2) + \frac{c^2}{2\mathbf{J}}(\mathbf{X}_\xi^2 - 2\mathbf{X}_\xi + 1 + \mathbf{Y}_\xi^2) + \mathbf{Y}, \\
&= \frac{-c^2}{\mathbf{J}}(\mathbf{J} - \mathbf{X}_\xi) + \frac{c^2}{2\mathbf{J}}(\mathbf{J} - 2\mathbf{X}_\xi + 1) + \mathbf{Y}, \\
&= -c^2 + \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2\mathbf{J}} + \mathbf{Y}, \\
&= \frac{-c^2}{2} + \frac{c^2}{2\mathbf{J}} + \mathbf{Y}.
\end{aligned}$$

Agora, para encontrar uma expressão para P_2 , utilizaremos a regra da Cadeia em $\eta(\tilde{X}(\xi, \zeta))$ juntamente com a equação (1.21). Veja que,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_\xi &= \eta_X \mathbf{X}_\xi, \\
\Rightarrow \mathbf{Y}_{\xi\xi} &= \eta_{XX} \mathbf{X}_\xi X_\xi + \eta_X \mathbf{X}_{\xi\xi}, \\
\Rightarrow \eta_{XX} \mathbf{X}_\xi^2 &= \mathbf{Y}_{\xi\xi} - \frac{\mathbf{Y}_\xi}{X_\xi} \mathbf{X}_{\xi\xi}, \\
\Rightarrow \eta_{XX} &= \frac{\mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_{\xi\xi} - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_{\xi\xi}}{\mathbf{X}_\xi^3}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(1 + \eta_X^2)^{3/2} = \left(\frac{X_\xi^2 + Y_\xi^2}{X_\xi^2} \right)^{3/2} = \frac{J^{3/2}}{X_\xi^3}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{\eta_{XX}}{(1 + \eta_X^2)^{3/2}}, \\
&= \frac{\mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_{\xi\xi} - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_{\xi\xi}}{\mathbf{X}_\xi^3} \left(\frac{\mathbf{X}_\xi^3}{\mathbf{J}^{3/2}} \right), \\
&= \frac{\mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_{\xi\xi} - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_{\xi\xi}}{\mathbf{J}^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Assim, conseguimos uma equação que calcula a elevação da superfície livre no domínio canônico em função de $\mathbf{Y}(\xi)$, c , D e B :

$$G(\mathbf{Y}(\xi), c, D, B) := \frac{-c^2}{2} + \frac{c^2}{2J} + \mathbf{Y} - \sigma \frac{\mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_{\xi\xi} - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_{\xi\xi}}{J^{3/2}} - B = 0. \quad (1.25)$$

Uma vez calculada a solução para a equação (1.25), basta utilizarmos as equações do mapeamento conforme (1.16) e obtemos o perfil da onda no domínio físico.

1.3 Trajetórias de Partículas

Nesta seção, estamos interessados em apresentar o sistema que resolve as trajetórias das partículas no domínio físico e sua formulação no domínio canônico. Além disso, apresentaremos os parâmetros geométricos da trajetória, que serão foco do estudo nos problemas seguintes.

Como $\nabla\phi(x, y, t)$ representa o campo de velocidades do escoamento, então a trajetória da partícula inicialmente localizada em (x_0, y_0) pode ser encontrada resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \phi_x(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \phi_y(x, y), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases} \quad (1.26)$$

Ou ainda, passando para o referencial móvel:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} - c, \\ \frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt}, \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \phi_X - c, \\ \frac{dY}{dt} = \phi_Y, \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0). \end{cases} \quad (1.27)$$

onde $X_0 = x_0$ e $Y_0 = y_0$. Note que, a trajetória $(X(t), Y(t))$, que é solução do sistema (1.27) corresponde a imagem da trajetória $(\xi(t), \zeta(t))$ no domínio canônico através do mapeamento conforme Z . Mais especificamente, temos:

$$(X(t), Y(t)) = (\tilde{X}(\xi(t), \zeta(t)), \tilde{Y}(\xi(t), \zeta(t))),$$

Assim, ao utilizar a regra da cadeia na expressão acima, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \tilde{X}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \tilde{X}_\zeta \frac{d\zeta}{dt}, \\ \frac{dY}{dt} = \tilde{Y}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \tilde{Y}_\zeta \frac{d\zeta}{dt}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Invertendo o sistema acima em função de $d\xi/dt$ e $d\zeta/dt$. A manipulação necessária para essa inversão está disponível no Apêndice B temos que:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi \frac{dX}{dt} + \tilde{Y}_\xi \frac{dY}{dt}), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J}(-\tilde{Y}_\xi \frac{dX}{dt} + \tilde{X}_\xi \frac{dY}{dt}), \end{cases}$$

onde $J = X_\xi^2 + Y_\xi^2$. Substituindo o sistema (1.27) no anterior:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi(\phi_X - c) + \tilde{Y}_\xi(\phi_Y)), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J}(-\tilde{Y}_\xi(\phi_X - c) + \tilde{X}_\xi(\phi_Y)). \end{cases}$$

Utilizando as relações dadas pelo sistema (1.23):

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi(\frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi\tilde{\phi}_\xi + \tilde{Y}_\xi\tilde{\psi}_\xi)) - c) + \tilde{Y}_\xi(\frac{1}{J}(-\tilde{X}_\xi\tilde{\psi}_\xi + \tilde{Y}_\xi\tilde{\phi}_\xi)), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J}(-\tilde{Y}_\xi(\frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi\tilde{\phi}_\xi + \tilde{Y}_\xi\tilde{\psi}_\xi)) - c) + \tilde{X}_\xi(\frac{1}{J}(-\tilde{X}_\xi\tilde{\psi}_\xi + \tilde{Y}_\xi\tilde{\phi}_\xi)). \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J}(\frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi^2\tilde{\phi}_\xi + \tilde{X}_\xi\tilde{Y}_\xi\tilde{\psi}_\xi - \tilde{X}_\xi\tilde{Y}_\xi\tilde{\psi}_\xi + \tilde{Y}_\xi^2\tilde{\phi}_\xi) - \tilde{X}_\xi c), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J}(\frac{1}{J}(-\tilde{Y}_\xi\tilde{X}_\xi\tilde{\phi}_\xi - \tilde{Y}_\xi^2\tilde{\psi}_\xi - \tilde{X}_\xi^2\tilde{\psi}_\xi + \tilde{Y}_\xi\tilde{X}_\xi\tilde{\phi}_\xi) + \tilde{Y}_\xi c). \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J}(\frac{1}{J}(J\tilde{\phi}_\xi) - \tilde{X}_\xi c), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J}(\frac{1}{J}(-J\tilde{\psi}_\xi) + \tilde{Y}_\xi c), \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J}(\tilde{\phi}_\xi - c\tilde{X}_\xi), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J}(-\tilde{\psi}_\xi + c\tilde{Y}_\xi), \end{cases}
\end{aligned}$$

Por fim, utilizando as relações de Cauchy-Riemann tanto para o par $X - Y$, quanto para $\phi - \psi$, dadas por:

$$\phi_\xi = \psi_\zeta \quad \text{e} \quad \phi_\zeta = -\psi_\xi,$$

obtemos:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J}(\tilde{\phi}_\xi - c\tilde{Y}_\zeta), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J}(\tilde{\phi}_\zeta + c\tilde{Y}_\xi), \\ (\xi(0), \zeta(0)) = (\xi_0, \zeta_0). \end{cases} \quad (1.29)$$

Resolvendo o sistema (1.29) no domínio canônico e utilizando as equações do mapeamento conforme (1.16) obtemos as trajetórias no domínio físico, que são cruciais para o estudo dos parâmetros geométricos das trajetórias.

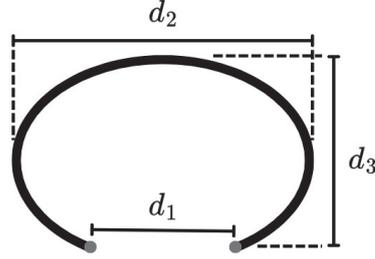
1.3.1 Parâmetros Geométricos

Como conjecturado por Stokes [44] e rigorosamente provado por Constantin [7], a trajetória de uma partícula abaixo de ondas aquáticas (periódicas e viajantes) não é fechada e, geometricamente, possui o formato de um laço, conforme imagem esquemática apresentada na Figura 1.3.

Assim, investigamos três parâmetros distintos que descrevem as características dimensionais da trajetória uma partícula: O deslocamento residual da partícula na direção de propagação da onda, ou *Stokes Drift* (d_1), o máximo deslocamento horizontal (d_2) e o máximo deslocamento vertical (d_3).

Fisicamente, o movimento que buscamos observar na partícula acontece durante uma fase da onda, isto é, se a partícula está inicialmente localizada abaixo de um cavado, sua trajetória acontece até que esteja localizada abaixo do cavado seguinte. Assim, para que possamos definir rigorosamente os parâmetros geométricos acima citados, precisamos definir o tempo necessário para que a partícula realize este movimento, denotado por tempo de *drift*.

Figura 1.3: Parâmetros Geométricos da Trajetória



Fonte: Autoria Própria.

Definição 1.2. Seja $(X(t), Y(t))$ uma solução para o sistema de EDO's (1.27) com condição inicial (X_0, Y_0) , $Y_0 \in [-1, \eta(X_0)]$. O tempo necessário para que esta solução intercepte a linha $X = X_0 - \lambda$ é chamado **Tempo de Drift** e é denotado por $\tau(Y_0)$ ou apenas τ .

Observação 1.3. Constantin [7] mostra as seguintes propriedades:

- O tempo de drift depende apenas da condição inicial Y_0 ;
- A trajetória da partícula obedece a seguinte simetria:

$$X(\tau(Y_0)) = X(0) - \lambda \quad e \quad Y(\tau(Y_0)) = Y_0.$$

Assim, podemos definir o Stokes Drift de uma partícula como:

Definição 1.4. Seja $(X(t), Y(t))$ uma solução para o sistema de EDO's (1.27) com condição inicial (X_0, Y_0) , $Y_0 \in [-1, \eta(X_0)]$ e tempo de drift τ . A distância entre $(x(0), y(0))$ e $(x(\tau), y(\tau))$ é chamada de **Stokes Drift** e denotamos por d_1 .

Note que, para calcular o Stokes Drift de uma partícula, basta fazermos o seguinte:

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (x(\tau) - x(0))^2 - (y(\tau) - y(0))^2, \\ &= (X(\tau) - c\tau - X(0))^2 - (Y(\tau) + Y(0))^2. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Pela observação 1.3, temos:

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (X(\tau) - c\tau - X(0))^2 - (Y(\tau) + Y(0))^2, \\ &= (c\tau - \lambda)^2, \\ &\Rightarrow d_1 = c\tau - \lambda. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Assim, o caso $d_1 = 0$, isto é, o caso que a trajetória é fechada, acontece se, e somente se, $\tau = \lambda/c$. Um dos resultados de Constantin [7] é que $d_1 > 0$, o que implica que as trajetórias não são fechadas.

A desigualdade a seguir, provada em Li e Yang [33] para ondas em águas profundas, atribui limites inferior e superior para o tempo de *drift*:

$$\frac{\lambda}{c} < \tau \leq \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{dX}{c - \phi_X(X, \eta(X))}, \quad (1.32)$$

onde λ/c é o período da onda.

Também investigamos as outras distâncias pertencentes à trajetória da partícula, que são definidas da seguinte forma:

Definição 1.5. *Seja $(X(t), Y(t))$ uma solução para o sistema de EDO's (1.27) com condição inicial (X_0, Y_0) , $Y_0 \in [-1, \eta(X_0)]$ e tempo de drift τ . Sejam $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, \tau]$ tais que $x(t_1) = \min_{t \in [0, \tau]} x(t)$, $x(t_2) = \max_{t \in [0, \tau]} x(t)$, $y(t_3) = \min_{t \in [0, \tau]} y(t)$ e $y(t_4) = \max_{t \in [0, \tau]} y(t)$. Definimos:*

1. d_2 é a distância entre $(x(t_1), y(t_1))$ e $(x(t_2), y(t_2))$;
2. d_3 é a distância entre $(x(t_3), y(t_3))$ e $(x(t_4), y(t_4))$.

1.4 Energia Cinética Total das Partículas

Nesta seção, estamos interessados em apresentar propriedades para as funções que definem a energia cinética total das partículas abaixo de ondas aquáticas.

A energia cinética total das partículas durante o tempo de *drift* é a norma do quadrado da velocidade da partícula, que no referencial móvel, escrevemos:

$$E(X_0, Y_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau(Y_0)} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 dt, \quad (1.33)$$

onde $(X(t), Y(t))$ é solução do sistema (1.27) com condições iniciais (X_0, Y_0) e $\tau(Y_0)$ representa o tempo de *Drift* desta trajetória. Ao fazer a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} X(t) = x(t) - c &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} + c, \\ Y(t) = y(t) &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt}, \end{aligned}$$

é possível obter uma fórmula para a energia cinética total da partícula localizada em (X_0, Y_0) no referencial de laboratório. Esta é dada por:

$$\mathcal{E}(X_0, Y_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau(Y_0)} \left(\frac{dX}{dt} + c \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 dt. \quad (1.34)$$

Com isto em mente, apresentamos duas propriedades já apresentadas na literatura no contexto de ondas aquáticas periódicas e viajantes:

- $E(X_0, Y_0)$ é uma função constante igual a $c\lambda/2$;

- $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ é uma função convexa e não-decrescente que depende somente da condição inicial Y_0 .

Estas propriedades foram provadas por [33] para ondas no regime de águas profundas e por [12] sem nenhuma restrição de profundidade.

Assim, finalizamos a apresentação dos principais conceitos motivadores para os problemas que vêm à seguir.

Capítulo 2

Campo Elétrico Normal

Este capítulo tem como objetivo investigar numericamente o efeito da variação da intensidade de um campo elétrico normal, isto é, perpendicular à superfície livre em repouso, agindo no escoamento do fluido na direção de propagação da onda na trajetória e na energia cinética total das partículas abaixo da mesma. Este estudo será feito para ondas periódicas e solitárias.

A primeira seção deste capítulo é dedicada a apresentar as equações governantes de ambos os tipos de onda, já que estes estão presentes no mesmo contexto de escoamentos EHD, a não ser pela condição de onda solitária, expressa por:

$$|\eta(X)| \rightarrow 0 \text{ quando, } |X| \rightarrow \infty.$$

Também, exploramos como a equação (1.25) é modificada ao acoplarmos o campo elétrico na modelagem matemática do problema.

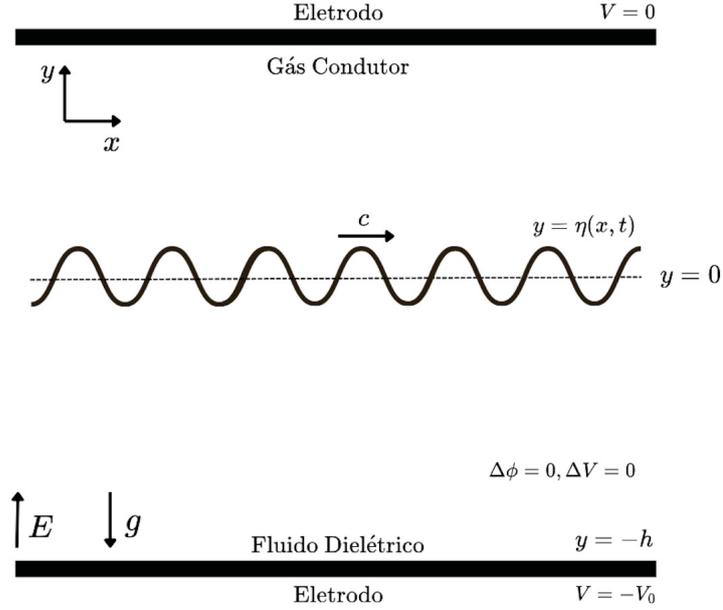
Na segunda seção, estudamos a teoria linear que nos permite uma formulação explícita para a velocidade da onda linear, que será importante para o método numérico utilizado. A partir deste ponto, dividimos em subseções, onde apresentaremos individualmente os métodos numéricos para estudar a trajetória e a energia cinética total das partículas para ambos os tipos de ondas. Por fim, apresentaremos os experimentos realizados e os resultados numéricos obtidos.

2.1 Formulação Matemática

Considere um fluido invíscido, incompressível e dielétrico de densidade ρ e constante dielétrica ϵ limitado por eletrodos nas extremidades superior e inferior e envolto por um gás condutor. O fundo do canal está em $y = h$ e a $y = 0$ representa a superfície do fluido não perturbado, como podemos ver na Figura 2.1. Neste contexto, consideramos os efeitos da aceleração da gravidade g e da tensão superficial T agindo em conjunto com o campo elétrico no escoamento do fluido. Quando energizados, esses eletrodos geram uma diferença de potencial V_0 entre si, criando um campo elétrico com direção normal à direção de propagação da onda, que atua no escoamento do fluido. Denotamos o campo elétrico formado como $\vec{E} = \nabla V$. Essa diferença

de potencial é invariante na camada de gás, isto é, V é identicamente nula nesta camada. Denotamos por $\vec{U} = \nabla\phi$ o campo de velocidades do escoamento do fluido e $y = \eta(x, t)$, λ , c representam, respectivamente, a superfície livre, o comprimento e a velocidade da onda.

Figura 2.1: Esquema Físico do Problema



Fonte: Autoria Própria.

As equações governantes deste problema são as mesmas apresentadas na seção 1.1 com a adição três equações que descrevem como o campo elétrico age no escoamento do fluido. Assim como anteriormente, estas são apresentadas na sua forma adimensional:

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{em} \quad -1 < Y < \eta(X), \quad (2.1)$$

$$\Delta V = 0 \quad \text{em} \quad -1 < Y < \eta(X), \quad (2.2)$$

$$-c\eta_X + \phi_X\eta_X = \phi_Y \quad \text{sobre} \quad Y = \eta(X), \quad (2.3)$$

$$\phi_Y = 0 \quad \text{sobre} \quad Y = -1, \quad (2.4)$$

$$V = 0 \quad \text{sobre} \quad Y = \eta(X), \quad (2.5)$$

$$V = -1 \quad \text{sobre} \quad Y = -1, \quad (2.6)$$

onde escolhemos h , $\sqrt{h/g}$ e V_0 como comprimento, tempo e potencial elétrico de referência, respectivamente.

Além destas, acooplamos a condição dinâmica:

$$-c\phi_X + \frac{1}{2}(\phi_X^2 + \phi_Y^2) + \eta - \sigma \frac{\eta_{XX}}{(1 + \eta_X^2)^{3/2}} + M_e = B, \quad (2.7)$$

onde B e σ representam, respectivamente, a constante de Bernoulli e o parâmetro de capilaridade adimensional (número de Bond), dado por:

$$\sigma = \frac{T}{\rho g h^2}$$

Nesta condição adicionamos o tensor de estresse de Maxwell (M_e), que é dado por:

$$M_e = \frac{E_b}{2(1 + \eta_X^2)}((1 - \eta_X^2)(V_Y^2 - V_X^2) - 4\eta_X V_X V_Y) = \frac{E_b}{2} |\nabla V|^2,$$

e é nesta equação que acoplamos o parâmetro de intensidade do campo elétrico adimensional, dado por:

$$E_b = \frac{\epsilon V_0^2}{\rho g h^3}.$$

Note que, ao adicionarmos o campo elétrico no problema, modificamos a condição dinâmica e portanto, esta mudança terá efeito na equação (1.25) de tal forma:

$$G(\mathbf{Y}(\xi), c, D, B) := \frac{-c^2}{2} + \frac{c^2}{2\mathbf{J}} + \mathbf{Y} - \sigma \frac{\mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_{\xi\xi} - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_{\xi\xi}}{\mathbf{J}^{3/2}} + P_{E_b} - B = 0, \quad (2.8)$$

onde P_{E_b} simboliza uma expressão para:

$$\frac{E_b}{2} |\nabla V|^2,$$

no domínio canônico. Para explicitar P_{E_b} , precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla \tilde{V} = 0, & \text{em } -D < \zeta < 0, \\ \tilde{V}(\xi, 0) = 0, \\ \tilde{V}(\xi, -D) = 1. \end{cases}$$

Fazendo o uso da transformada de Fourier periódica, obtemos:

$$\begin{cases} -k^2 \hat{V}(k, \zeta) + \hat{V}(k, \zeta)_{\zeta\zeta} = 0, & \text{em } -D < \zeta < 0, \\ \hat{V}(k, 0) = 0, \\ \hat{V}(k, -D) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Analisaremos primeiro o caso $k = 0$. Assim, a primeira equação se resume a seguinte EDO:

$$\hat{V}(k, \zeta)_{\zeta\zeta} = 0,$$

cuja solução geral é da forma:

$$\hat{V}(k, \zeta) = \alpha\zeta + \beta.$$

Utilizando ambas as equações de contorno, obtemos que:

$$\hat{V}(k, \zeta) = \frac{1}{D}\zeta. \quad (2.9)$$

Agora, para $k \neq 0$. A solução geral é dada por:

$$\hat{V}(k, \zeta) = A(k)e^{k\zeta} + B(k)e^{-k\zeta},$$

assim como vimos no desenvolvimento do mapeamento conforme de $X - Y$. Aplicando $V(k, -D) = 0$, temos que:

$$\hat{V}(k, -D) = A(k)e^{-kD} + B(k)e^{kD} = 0 \Rightarrow A(k) = -\frac{B(k)e^{kD}}{e^{-kD}}.$$

Além disso, note que:

$$\begin{aligned} \hat{V}(k, 0) &= A(k) + B(k) = 0, \\ &\Rightarrow -\frac{B(k)e^{kD}}{e^{-kD}} + B(k) = 0, \\ &\Rightarrow B(k) \left(1 - \frac{e^{kD}}{e^{-kD}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como $(1 - e^{kD}/e^{-kD}) = 0$ se, e somente se, $kD = 0$, temos um absurdo. Logo $B(k) = -A(k) = 0$. Assim, a solução geral deste sistema de EDO's é dada por:

$$\hat{V}(k, \zeta) = \frac{1}{D}\zeta.$$

Portanto, utilizando a transformada de Fourier inversa, temos:

$$\tilde{V}(\xi, \zeta) = \frac{1}{D}\zeta. \quad (2.10)$$

Por outro lado, ao calcularmos $|\nabla V|^2$ no sistema de coordenadas canônico, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{V}(\tilde{X}(\xi, \zeta), \tilde{Y}(\xi, \zeta))|^2 &= (\tilde{V}_X \tilde{X}_\xi + \tilde{V}_Y \tilde{Y}_\xi)^2 + (\tilde{V}_X \tilde{X}_\zeta + \tilde{V}_Y \tilde{Y}_\zeta)^2, \\ &= (\tilde{V}_X \tilde{X}_\xi + \tilde{V}_Y \tilde{Y}_\xi)^2 + (-\tilde{V}_X \tilde{Y}_\xi + \tilde{V}_Y \tilde{X}_\xi)^2, \\ &= \tilde{V}_X^2 (\tilde{X}_\xi^2 + \tilde{Y}_\xi^2) + \tilde{V}_Y^2 (\tilde{X}_\xi^2 + \tilde{Y}_\xi^2), \\ &= J |\nabla V|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\nabla V|^2 = \frac{1}{J} |\nabla \tilde{V}|^2.$$

Da formulação expressa em (2.10), temos:

$$|\nabla \tilde{V}|^2 = \frac{1}{D^2}.$$

Desta forma,

$$P_{E_b} = \frac{E_b}{2} |\nabla V|^2 = \frac{E_b}{2D^2 J}.$$

Assim, a equação para encontrar a elevação da superfície livre para ondas solitárias e periódicas com escoamento EHD de um campo elétrico normal pode ser expressa por uma equação que depende de $\mathbf{Y}(\xi)$, c , D e B , dada por:

$$G(\mathbf{Y}(\xi), c, D, B) := \frac{-c^2}{2} + \frac{c^2}{2\mathbf{J}} + \mathbf{Y} - \sigma \frac{\mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_{\xi\xi} - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_{\xi\xi}}{\mathbf{J}^{3/2}} + \frac{E_b}{2D^2 \mathbf{J}} - B = 0. \quad (2.11)$$

Note que G está expressa em função de mais de uma variável. Assim, para a resolução numérica da elevação da superfície livre, será necessário acrescentar equações adicionais ao sistema, que serão apresentadas na Seção 2.3.

Observação 2.1. A equação (2.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{J} - 1 \right) \left(c^2 + \frac{E_b}{D^2} \right) + Y - \sigma \frac{X_\xi Y_{\xi\xi} - Y_\xi X_{\xi\xi}}{J^{3/2}} - B = 0,$$

Assim, para qualquer solução periódica com perfil Y_\dagger sendo D_\dagger sua profundidade associada ao domínio canônico e c_\dagger sua velocidade, quando na presença de um campo elétrico de intensidade E_b , este perfil deve manter o formato clássico ($E_b = 0$) com velocidade c onde:

$$c^2 = c_\dagger^2 + \frac{E_b}{D_\dagger^2}.$$

Assim, aumentar a intensidade do campo elétrico deve desacelerar a onda enquanto mantém seu perfil.

2.2 Teoria Linear

Uma solução trivial para as equações governantes (2.1)-(2.6) acopladas com (2.7) é dada por:

$$\begin{cases} \eta_0(X, Y) = 0, \\ \phi_0(X, Y) = 0, \\ V_0(X, Y) = Y, \\ B_0 = \frac{-E_b}{2}. \end{cases}$$

Consideramos uma solução que é uma pequena perturbação da solução inicial, isto é,

$$\begin{cases} \eta_0(X, Y) = \varepsilon \hat{\eta}(X), \\ \phi_0(X, Y) = \varepsilon \hat{\phi}(X, Y), \\ V_0(X, Y) = Y + \varepsilon \hat{V}(X, Y), \\ B_0 = \frac{-E_b}{2} + \varepsilon \hat{B}. \end{cases}$$

Tomamos $\hat{\eta}(X, Y) = \Re\{Ae^{ikX}\}$, onde \Re denota a parte real de um número complexo. O que significa que linearmente o perfil da onda é representado por um cosseno. Resolvendo as equações de Laplace (2.1)-(2.2) com condição de contorno (2.3)-(2.7), obtemos:

$$\begin{cases} \hat{\eta}(X, Y) = \Re\{Ae^{ikX}\} \\ \hat{\phi}(X, Y) = \Re\{Pe^{ikX} \cosh(k(Y+1))\}, \\ \hat{V}(X, Y) = \Re\{Qe^{ikX} \sinh(k(Y+1))\}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Neste ponto, temos A , P e Q como constantes desconhecidas e $k = 2\pi/\lambda$ representa o número da onda. Linearizando a equação (2.3) e a condição dinâmica (2.7), obtemos:

$$-c\hat{\eta}_X = \hat{\phi}_Y, \quad (2.13)$$

$$-c\hat{\phi}_X + \hat{\eta} - \sigma\hat{\eta}_{XX} + E_b\hat{V}_Y = 0. \quad (2.14)$$

Além disso, podemos manipular a seguinte equação:

$$V = 0 \quad \text{sobre} \quad Y = \eta(X),$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon \hat{\eta} + \varepsilon \hat{V} &= 0 \quad \text{sobre} \quad Y = \varepsilon \eta(X), \\ \Rightarrow \hat{V} &= -\hat{\eta} \quad \text{sobre} \quad Y = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{cases} -c\hat{\eta}_X = \hat{\phi}_Y, \\ -c\hat{\phi}_X + \hat{\eta} - \sigma\hat{\eta}_{XX} + E_b\hat{V}_Y = 0. \\ \hat{V} = -\hat{\eta} \end{cases} \quad (2.15)$$

Substituindo as equações de (2.12) no sistema (2.15), deixamos as constantes P e Q em função apenas de A da seguinte forma:

$$\begin{cases} P = \frac{iAc}{\sinh(k)}, \\ Q = \frac{-A}{\sinh(k)}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Com as relações dadas pelos sistemas (2.12), (2.15) e (2.16), podemos manipular a equação (2.14) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & -c\hat{\phi}_X + \hat{\eta} - \sigma\hat{\eta}_{XX} + E_b\hat{V}_Y = 0, \\ \Leftrightarrow & -c\Re\{ikPe^{ikX} \cosh k\} + \Re\{Ae^{ikX}\} - \sigma\Re\{-k^2Ae^{ikX}\} + E_b\Re\{Qe^{ikX} \cosh k\} = 0, \\ \Leftrightarrow & -c\Re\left\{ik \frac{iAc}{\sinh(k)} e^{ikX} \cosh k\right\} + \Re\{Ae^{ikX}\} - \sigma\Re\{-k^2Ae^{ikX}\} + E_b\Re\left\{\frac{-A}{\sinh(k)} e^{ikX} \cosh k\right\} = 0, \\ \Leftrightarrow & -c^2 \frac{A}{\sinh(k)} \cosh k + A + \sigma k^2 A - E_b \frac{Ak}{\sinh(k)} \cosh k = 0, \\ \Leftrightarrow & -c^2 \coth k + 1 + \sigma k^2 - kE_b \coth k = 0, \\ \Leftrightarrow & c^2 = \frac{1 + \sigma k^2 - kE_b \coth k}{\coth k}, \\ \Leftrightarrow & c^2 = \tanh k + \tanh k \sigma k^2 - kE_b, \\ \Leftrightarrow & c^2 = \tanh k(1 + \sigma k^2) - kE_b, \\ \Leftrightarrow & c = \pm \frac{\sqrt{4k \tanh k(1 + \sigma k^2) - 4k^2 E_b}}{2k}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, obtemos uma fórmula fechada para a velocidade da onda linear do problema. Daqui em diante consideramos apenas o valor positivo de c , pois este indica a onda se movimentando para a direita.

2.3 Ondas Periódicas

Nesta seção estamos interessados em investigar numericamente o efeito da variação da intensidade do campo elétrico na trajetória e na energia cinética total das partículas abaixo de uma onda periódica cujo escoamento está sob o efeito de um campo elétrico normal. Para isso, primeiro apresentaremos na primeira subseção o método numérico utilizado e na segunda, os resultados numéricos obtidos.

2.3.1 Discretização e o Método Numérico

Antes de apresentarmos o método numérico, explicitamos o procedimento utilizado para os experimentos numéricos:

1. Encontramos a elevação da superfície livre solucionando a equação (2.11) e utilizamos as fórmulas do mapeamento conforme (1.16) para mapear a superfície livre no domínio físico;
2. Resolvemos o sistema (1.29) e utilizamos novamente as fórmulas para o mapeamento conforme (1.16) para encontrar a trajetória das partículas abaixo desta onda;
3. Calculamos os parâmetros geométricos e a energia cinética total destas partículas.

Para calcular numericamente a elevação da superfície livre precisamos primeiro discretizar o domínio canônico. Assim, definimos uma partição uniformemente espaçada de ξ em $\zeta = 0$, onde

$$\xi_j = -\frac{\lambda}{2}(j-1)\Delta\xi, \quad j = 1, \dots, N, \quad \text{onde, } \Delta\xi = \frac{\lambda}{N}.$$

O número de pontos na grade é dado por $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$. Sejam $\mathbf{Y}_j := \mathbf{Y}(\xi_j)$ e $\mathbf{X}_j := \mathbf{X}(\xi_j)$. Da natureza do problema, é razoável impor simetria sobre $\xi = 0$ de modo que $\mathbf{Y}_j = \mathbf{Y}_{N-j+2}$ para $j = N/2 + 2, \dots, N$. Esta imposição é interessante do ponto de vista computacional, já que reduz pela metade o processamento necessário.

Agora, temos $N/2 + 1$ equações, dadas por $G_j(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B)$, $j = 1, \dots, N/2 + 1$ para resolver um sistema de $N/2 + 4$ incógnitas. Assim, precisamos introduzir três equações adicionais, que serão, em sua formulação contínua:

- Largura da Faixa: $D = \langle \mathbf{Y} \rangle + 1$;
- Altura da onda: $\mathbf{Y}(\xi = 0) - \mathbf{Y}(\xi = \lambda/2) = H$;
- Média nula: $\int_{-\lambda/2}^0 \mathbf{Y}\mathbf{X}_\xi d\xi = 0$.

Note que, a primeira condição é imposta na equação (1.15) graças à escolha $\lambda = L$. A segunda condição define a altura da onda (H) como a diferença vertical entre a crista e o cavado. Além disso, essa condição nos garantirá um método numérico do qual podemos gerar ondas com alturas diferentes a partir de um parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$. A terceira condição nos garante que o nível de repouso é $Y = 0$, ou ainda, fisicamente esta condição assegura conservação de massa.

Ainda, precisamos discretizar essas três condições para que sejam acopladas ao sistema que determina a elevação da superfície livre. A média $\langle \mathbf{Y} \rangle$ será discretizada utilizando a regra do trapézio composta:

$$\langle \mathbf{Y} \rangle \approx \frac{2}{N} \left(\frac{Y_1 + Y_{N/2+1}}{2} + \sum_{j=2}^{N/2} Y_j \right).$$

Da mesma forma, a integral definida pela condição da média nula será discretizada utilizando a regra dos trapézios composta, o que fornece:

$$\int_{-\lambda/2}^0 \mathbf{Y} \mathbf{X}_\xi d\xi = \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{X}_{\xi_1} + \mathbf{Y}_{N/2+1} \mathbf{X}_{\xi_{(N/2+1)}} \Delta\xi}{2} + \Delta\xi \sum_{j=2}^{N/2} \mathbf{Y}_j \mathbf{X}_{\xi_j}.$$

Por fim, a altura da onda pode ser escrita como

$$Y_{N/2+1} - Y_1 = H.$$

Desta forma, condensamos as equações adicionais à forma discretizada de $G(\mathbf{Y}(\xi), c, D, B)$ para um único sistema de equações quadrado e não linear, expresso por $G : \mathbb{R}^{N/2+4} \rightarrow \mathbb{R}^{N/2+4}$ cujas incógnitas são dadas por $(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B)$ e suas componentes G_j respeitam:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_j(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = 0, \quad j = 1, \dots, N/2 + 1, \\ G_{N/2+2}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \mathbf{Y}_{N/2+1} - \mathbf{Y}_1 - H = 0, \\ G_{N/2+3}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{X}_{\xi_1} + \mathbf{Y}_{N/2+1} \mathbf{X}_{\xi_{(N/2+1)}} \Delta\xi}{2} + \Delta\xi \sum_{j=2}^{N/2} \mathbf{Y}_j \mathbf{X}_{\xi_j} = 0, \\ G_{N/2+4}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \frac{2}{N} \left(\frac{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_{N/2+1}}{2} + \sum_{j=2}^{N/2} \mathbf{Y}_j \right) + 1 - D = 0. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Vale notar que esta discretização substitui todas as derivadas e operadores não lineares pelos símbolos de Fourier discretos, como resultado, suas ações são computadas com eficácia espectral no espaço de Fourier.

Com o sistema G expresso em (2.18), buscamos resolvê-lo utilizando o método de Newton, como feito em [17]. É conhecido na literatura que a convergência do método de Newton exige que façamos uma escolha para o chute inicial minimamente precisa. Com isto em mente, utilizamos os resultados da teoria linear exposta na seção 2.2 para tal, isto é,

$$\mathbf{Y} = 10^{-5} \cos(kX), \quad c = \frac{\sqrt{4k \tanh(k)(1 + \sigma k^2) - 4k^2 E_b}}{2k}.$$

Ainda precisamos fazer escolhas para a profundidade (D) e para a constante de Bernoulli (B). Note que, nossa escolha inicial para \mathbf{Y} tem pequena amplitude, assim, uma escolha razoável para o chute inicial da profundidade é $D = 1$. A escolha para a constante de Bernoulli é empírica e tomamos $B = 0$. Assim, o método de Newton é utilizado com critério de parada:

$$\frac{\sum |G_j|_{j=1}^{N/2+4}}{N/2 + 4} < 10^{-10},$$

e as matrizes Jacobianas são calculadas via diferenças finitas.

Agora, façamos uma breve pausa para entender como obter soluções fortemente não lineares para o nosso problema. Note que, o chute inicial para $\mathbf{Y}(\xi)$ tem pequena amplitude, assim, este não é ideal para gerar uma onda com altura (H) grande pelo método de Newton. Desta forma, definimos o parâmetro de declividade $\varepsilon = H/\lambda$. Este parâmetro é comumente usado no estudo de ondas periódicas. Além disso, no nosso trabalho, a profundidade do domínio físico está fixada em 1 e nas simulações o comprimento (λ) também é fixo. Portanto, o aumento de ε corresponde ao aumento na não linearidade do problema.

Desta forma, ao escolher o parâmetro de declividade ε , definimos uma malha $(\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon, \dots, \varepsilon)$, onde ε_0 é muito próximo de 0 e fazemos um processo iterativo no qual calculamos primeiro, via método de Newton, a onda de declividade ε_0 utilizando o chute inicial linear e, para as demais, utilizamos como chute inicial os dados obtidos da iteração anterior até que a onda cuja declividade ε escolhida seja obtida. Este método é conhecido como método da continuação em ε .

Uma vez obtida a superfície livre, resolvemos o sistema (1.29) utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para determinar a trajetória e então mapeamos esta para o domínio físico utilizando as fórmulas do mapeamento conforme (1.16). As derivadas necessárias são calculadas via métodos espectrais de Fourier. Note que, as trajetórias obtidas com esta resolução estão dispostas no referencial móvel $(X(t), Y(t))$, portanto, para estudar as trajetórias no referencial de laboratório fazemos a mudança de variáveis:

$$x(t) = X(t) + ct, \quad y(t) = Y(t).$$

As integrais que determinam a energia cinética total das partículas, expressas pelas equações (1.33) e (1.34) são calculadas numericamente via regra do trapézio.

2.3.2 Experimentos Numéricos

Os experimentos numéricos feitos para ondas periódicas e viajantes estão divididos e serão expostos em três partes. Na primeira vemos resultados sobre a variação da intensidade do campo elétrico no perfil e na velocidade da onda. Logo após, verificaremos as mudanças decorrentes da variação de E_b na trajetória das partículas e seus respectivos parâmetros geométricos. Por fim, estudaremos se resultados sobre a energia cinética total das partículas, que são previamente provados para ondas aquáticas se mantêm no contexto de escoamentos EHD. Experimentos adicionais acerca de ondas em regimes de profundidade distintos estão disponíveis no Apêndice D.

Perfil da Onda

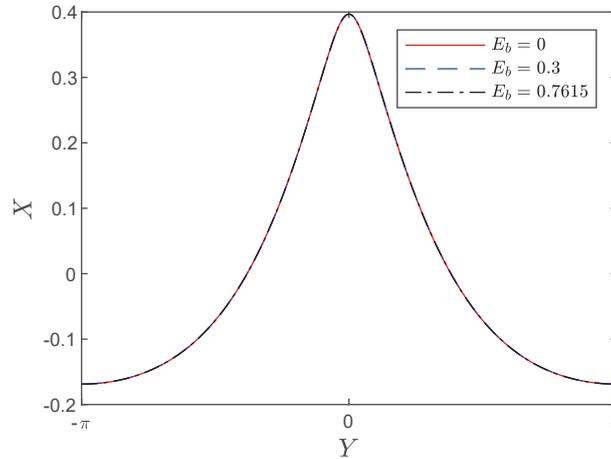
Para iniciar o tratamento numérico do problema, precisamos definir alguns parâmetros para calcular a elevação da superfície livre. Em todos os experimentos, fixamos o parâmetro de capilaridade (σ) em 0 e o comprimento de onda (λ) em 2π . Neste caso, o número da onda $k = 2\pi/\lambda = 1$. Desta forma, focamos em estudar ondas em regime intermediário e controlamos a altura H do perfil da onda através do parâmetro de declividade (ε). Os perfis de onda foram calculados utilizando 1024 pontos de grade (modos de Fourier).

Note que, na seção anterior introduzimos o método da continuação em ε para que possamos estudar ondas com altura (H) grande, isto é, ondas fortemente não lineares. Empiricamente, nosso método numérico obteve convergência para $\varepsilon \leq 0.09$, o que nos dá ondas cuja altura máxima é $H \approx 0.5655$. Assim, a não ser que seja dito o contrário, nossos experimentos numéricos estão associados a ondas com esta altura.

Por outro lado, a partir da fórmula (2.17) para a velocidade da onda linear, para garantir que $c \in \mathbb{R}$, é necessário impor uma restrição ao parâmetro E_b . Desta forma,

$$E_b \leq \tanh(1) \approx 0.7615.$$

Figura 2.2: Variação do perfil da onda para três valores de E_b diferentes.



Fonte: Autoria Própria.

Assim, nosso primeiro experimento numérico diz respeito à mudança no perfil da onda com a variação de E_b , como mostra a Figura 2.2. Este experimento mostra três perfis de onda gerados com três valores diferentes para a intensidade do campo elétrico, sendo estes $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.3$ (azul) e $E_b = 0.7615$ (preto). Concluímos a partir deste que os perfis de onda se mantêm os mesmos com a variação de E_b .

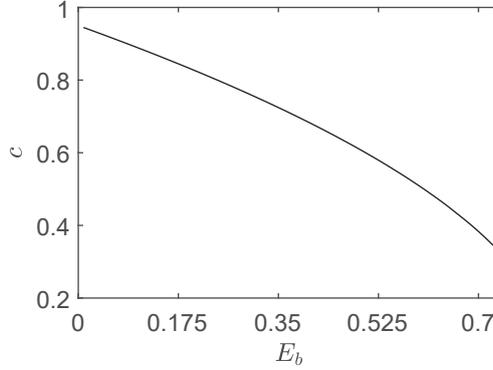
Com isto em mente, estudamos o efeito da variação de E_b na velocidade da onda, como mostra a Figura 2.3. Para este experimento, geramos 100 valores para E_b aleatórios entre $E_b = 0$ e $E_b = 0.7615$ distribuídos uniformemente. Com isto, observamos que o efeito do campo elétrico no escoamento é desacelerar a onda.

Note que, nas Figuras 2.2 e 2.3 vemos exatamente o que foi dito na Observação 2.1. Esta verificação numérica serve como intuição para os resultados sobre as trajetórias das partículas e o *Stokes Drift*, que veremos na próxima subseção.

Trajetória das Partículas e Stokes Drift

Para verificar a variação do campo elétrico na trajetória das partículas, resolvemos o sistema (1.29) com condição inicial $(\xi_0, \zeta_0) = (\pi, -D/2)$ e passo de tempo $\Delta t = 0.001$, o que é equivalente a resolver o sistema

Figura 2.3: Velocidade da onda com a variação de E_b .



Fonte: Autoria Própria.

(1.27) com $(X_0, Y_0) = (\pi, -0.5627)$. Assim, na Figura 2.4, vemos quatro registros instantâneos da trajetória de três partículas no referencial de laboratório. O tempo t é expresso em termos de $\tau^* \approx 6.7877$, que corresponde ao tempo de *drift* para a trajetória cujo $E_b = 0$. Cada uma destas partículas está sob a ação de um campo elétrico diferente, sendo estes $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.3$ (azul) e $E_b = 0.7615$ (verde). Nesta figura, observamos que a variação do campo elétrico não altera o formato das trajetórias. Ao mesmo tempo, as partículas abaixo de ondas cujo E_b é maior são desaceleradas.

Para uma melhor compreensão do efeito do campo elétrico na velocidade das partículas, fizemos um experimento medindo o tempo de *drift* das partículas abaixo de ondas geradas com os mesmos 100 valores de E_b aleatórios que foram utilizados no estudo da velocidade da onda e, como pode ser visto na Figura 2.5 observamos que o tempo de *drift* aumenta com o crescimento de E_b .

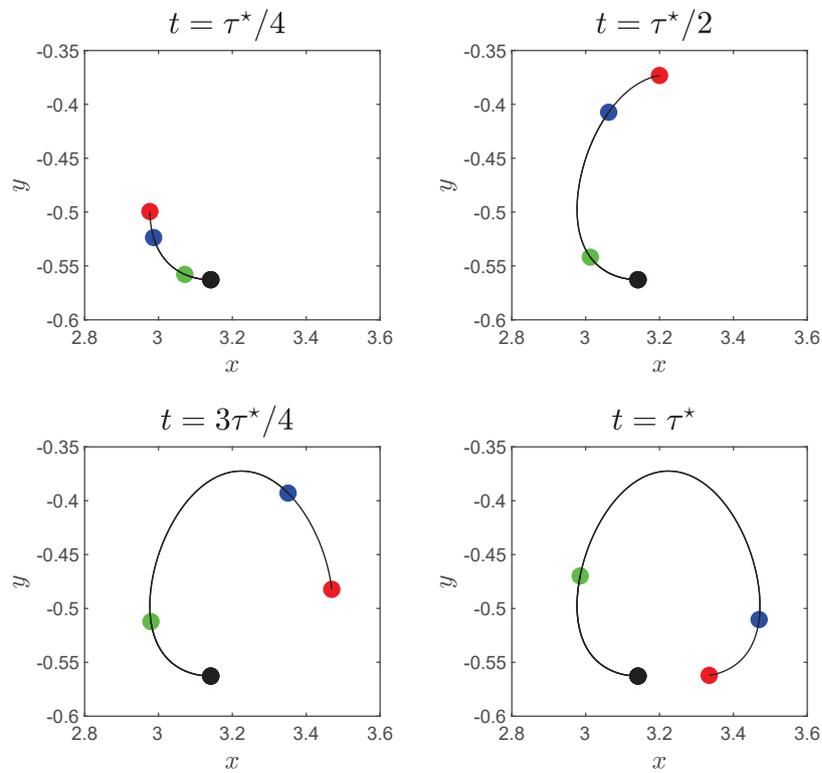
Por outro lado, também verificamos se a desigualdade (1.32) se mantém válida no contexto de escoamentos EHD. Os experimentos expostos na Figura 2.6 mostram que essa desigualdade é mantida. Nesta figura vemos à esquerda, um estudo com a variação de E_b e $Y_0 = -0.5627$ fixado. E, à direita, vemos um experimento com $E_b = 0.7$ fixo e Y_0 variando.

O estudo numérico da variação do *Stokes drift* (d_1) e dos outros parâmetros geométricos (d_2, d_3) da órbita, tomamos como referência a onda gerada com $E_b = 0$ e seus respectivos $(d_1^*, d_2^*, d_3^*) \approx (0.1652, 0.4952, 0.1903)$. Para comparação com ondas geradas por outros valores de E_b calculamos o erro relativo:

$$E_r(d_j) = \frac{|d_j - d_j^*|}{|d_j^*|}, \quad j = 1, 2, 3.$$

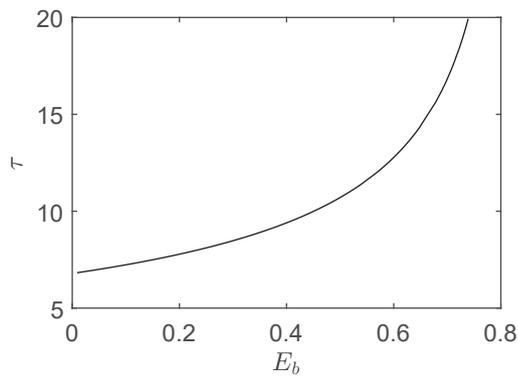
E, como vemos na Figura 2.7 os erros relativos estão na ordem de 10^{-10} para d_1 e 10^{-6} para d_2 e d_3 , isto é, os parâmetros geométricos são mantidos com a variação de E_b .

Figura 2.4: Registros instantâneos das trajetórias. Posição inicial (preto), $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.3$ (azul), $E_b = 0.7615$ (verde).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.5: Tempo de *drift* com a variação de E_b .

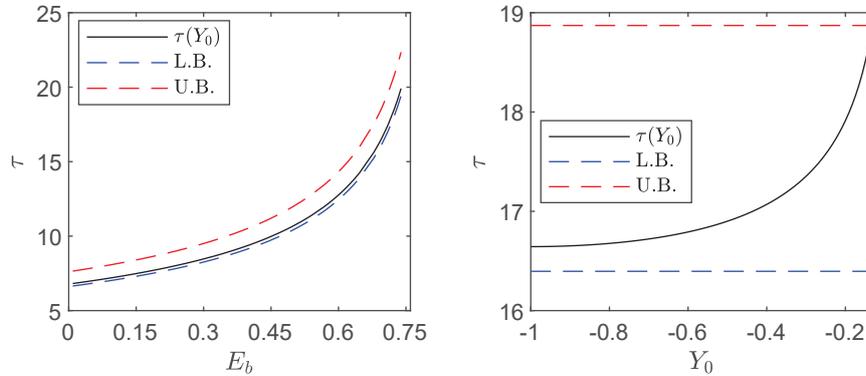


Fonte: Autoria Própria.

Energia Cinética Total das Partículas

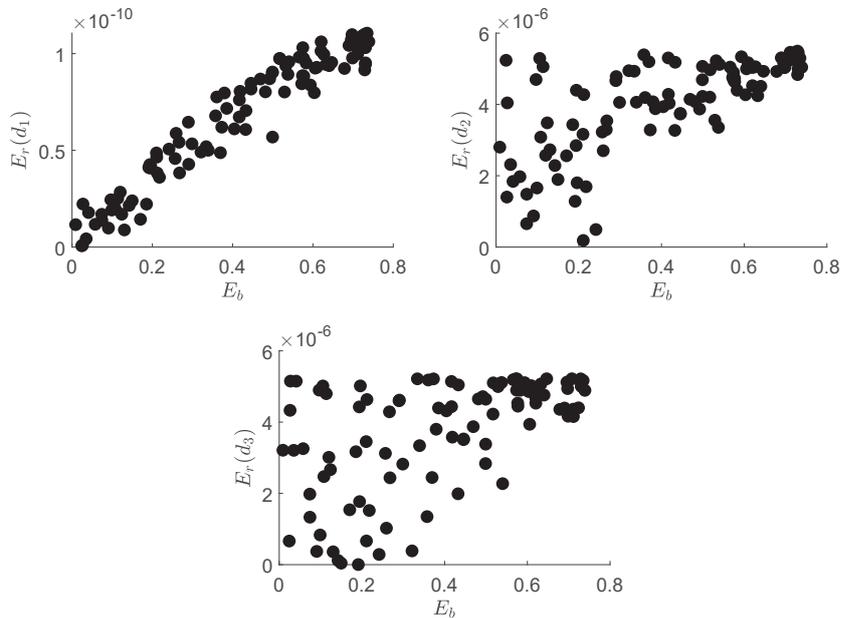
Em vista que a intensificação do campo elétrico desacelera as partículas sem alterar o formato de sua trajetória. Faremos o estudo da energia cinética total das partículas com o objetivo de verificar a validade

Figura 2.6: Limite inferior (L.B.) e superior (U.B.) para o tempo de *drift*. Esquerda: Variação de E_b . Direita: Variação de Y_0 .



Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.7: Erros relativos dos parâmetros geométricos. Acima: Esquerda: $E_r(d_1)$. Direita: $E_r(d_2)$. Abaixo: $E_r(d_3)$



Fonte: Autoria Própria.

das propriedades apresentadas por [12, 33] no contexto de escoamentos EHD.

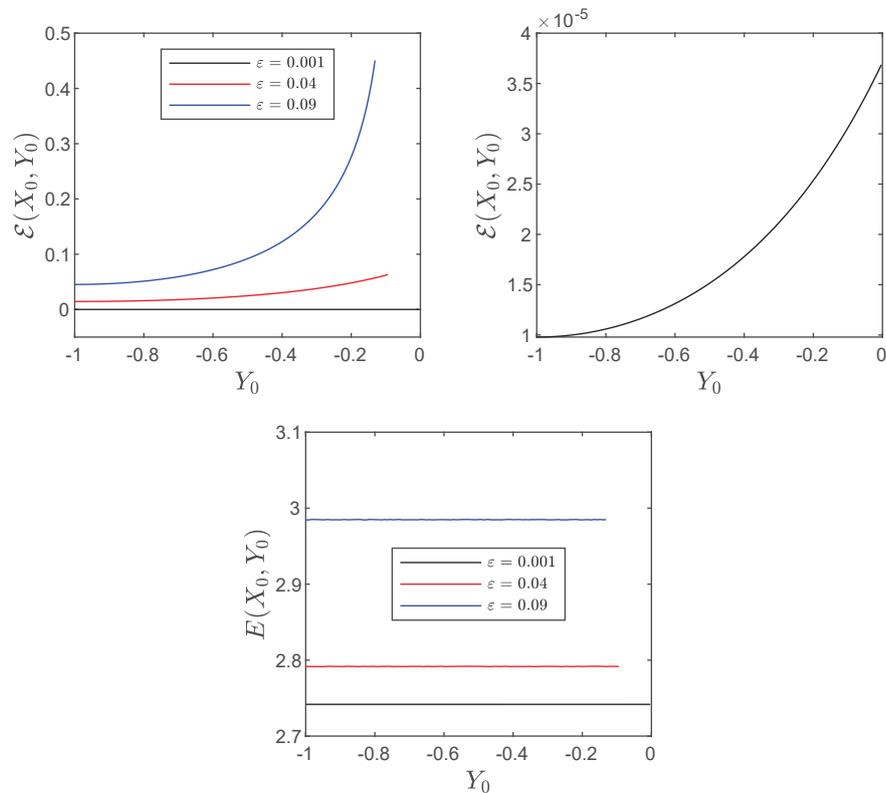
A energia cinética total das partículas foi estudada numericamente a partir de dois experimentos distintos. Primeiro, na ausência de um campo elétrico variando o parâmetro de declividade ($\varepsilon_1 = 0.001$, $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_3 = 0.09$) da onda, neste estudo verificamos uma noção que é intuitiva, isto é, para ondas com maior altura, a

energia cinética é maior em ambos os referenciais. Estes resultados podem ser vistos na Figura 2.8. Note que, a função energia cinética $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ para $\varepsilon = 0.001$ tem uma variação muito menor que as duas outras ondas, e para uma melhor observação, se fez necessário uma imagem adicional como *zoom* para observarmos este caso.

O segundo experimento verifica que as propriedades da energia cinética se mantêm no contexto de escoamentos EHD. Para tal, computamos a energia cinética total de 100 trajetórias diferentes, cuja posição inicial é dada por $X_0 = \pi$ e Y_0 variando no intervalo $[-1, \eta(X_0)]$. A Figura 2.9 mostra que variando E_b ($E_b = 0, 0.3, 0.7$), as propriedades se mantêm. Isto é, $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ é uma função convexa não-decrescente e $E(X_0, Y_0)$ é constante igual à $c\lambda/2$.

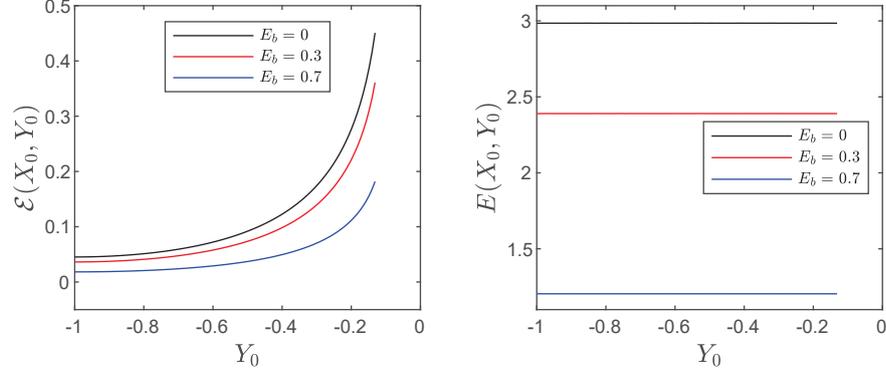
Em suma, os experimentos relacionados à velocidade da onda c e ao tempo de *drift* τ indicam que tanto a superfície quanto as partículas são desaceleradas à medida que E_b aumenta. Ao combinar esses resultados com os experimentos sobre a energia cinética total das partículas, percebe-se que essa energia é maior para partículas localizadas sob ondas com um campo elétrico de menor intensidade, ou seja, partículas que possuem maior velocidade.

Figura 2.8: Energia cinética com variação de ε . Acima: Referencial de laboratório. Direita: *Zoom* para o caso $\varepsilon = 0.001$. Abaixo: Referencial móvel.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.9: Energia cinética com variação de E_b . Direita: Referencial de laboratório. Esquerda: Referencial móvel.



Fonte: Autoria Própria.

2.4 Ondas Solitárias

Nesta seção estamos interessados em investigar o efeito da variação da intensidade do campo elétrico normal que age no escoamento de uma onda solitária. As equações governantes que regem o problema para este tipo de onda são as mesmas do caso periódico, a menos pela condição:

$$\eta(X) \rightarrow 0, \quad \text{quando } |X| \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

que assegura que o perfil seja solitário. Note que, as notações utilizadas são as mesmas do caso anterior. η , λ e c representam a superfície livre, o comprimento e a velocidade da onda, respectivamente. Também, fazemos uso da mudança de variáveis do referencial de laboratório (x, y) para o referencial móvel $(X, Y) = (x - ct, y)$.

É conhecido na literatura que o parâmetro de capilaridade adimensional (σ) interfere diretamente no perfil de uma onda solitária, isto é, fixando $\sigma < 1/3$ e solucionando a equação para a superfície livre obtemos uma onda de elevação e, caso $\sigma > 1/3$, obtemos uma onda de depressão [36]. Nossos experimentos numéricos estarão interessados em ambos os casos.

Note que, as definições para os parâmetros geométricos presentes no contexto de ondas periódicas não podem ser as mesmas para o caso de ondas solitárias, já que não existe um período de onda. Desta forma, na próxima subseção, apresentaremos algumas definições que serão úteis tanto para o estudo dos parâmetros geométricos, quando da energia cinética total das partículas. Em seguida, faremos a exposição dos métodos numéricos utilizados e apresentaremos os resultados numéricos obtidos.

2.4.1 Parâmetros Geométricos para Ondas Solitárias

Intuitivamente, a propagação de uma onda solitária tem pouca influência no deslocamento das partículas que estão longe de sua crista. Assim, uma maneira prática de estudar as trajetórias das partículas abaixo de

ondas deste tipo é estabelecer uma região efetiva na superfície da onda próxima à crista. Assim, propomos uma compreensão mais clara dos efeitos locais na trajetória das partículas. Note que, restringir a análise a uma região efetiva da onda torna o tratamento computacional menos custoso. Assim, definimos:

Definição 2.2. *Seja $\Gamma : \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; -\lambda/2 < X < \lambda/2, -1 < Y < \eta(X)\}$ o domínio físico abaixo da onda solitária $\eta(X)$. Para alguma tolerância $\delta > 0$, considere $X_0^* = \inf\{X \in [-\lambda/2, \lambda/2] ; |\eta(X)| > \delta\}$ e $X_1^* = \max\{X \in [-\lambda/2, \lambda/2] ; |\eta(X)| > \delta\}$. Assim, denotamos:*

1. *O comprimento efetivo da onda é dado por:*

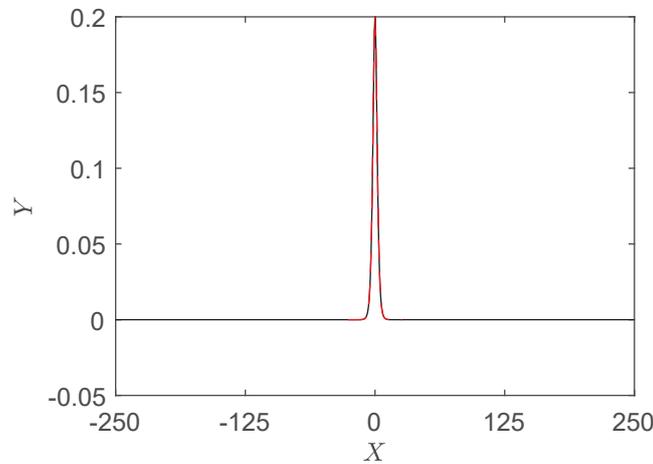
$$\lambda^* = |X_1^* - X_0^*|$$

2. *A região efetiva da onda é dada por:*

$$\Gamma^* : \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; -\lambda^*/2 < X < \lambda^*/2, -1 < Y < \eta(X)\}$$

Com esta definição, podemos trabalhar o nosso problema em uma região que melhor se encaixa no nosso problema. A não ser que seja dito o contrário, neste trabalho consideramos a tolerância $\delta = 10^{-8}$. A Figura 2.10 mostra em vermelho a região efetiva da onda com esta tolerância.

Figura 2.10: Onda Solitária de Elevação (Preto) e Região Efetiva da onda (Vermelho).



Fonte: Autoria Própria.

Motivados pelas definições do contexto de ondas periódicas, podemos definir o tempo de *drift* para ondas solitárias como o tempo necessário para que a partícula percorra a região efetiva em sua trajetória no referencial móvel. Isto é,

Definição 2.3. *Seja $(X(t), Y(t))$ uma solução do sistema de EDO's (1.27) com condição inicial (X_1^*, Y_0) . O tempo necessário para que $(X(t), Y(t))$ intercepte a reta $X = X_0^*$ é chamado de tempo de Drift e será denotado por $\tau(Y_0)$ ou apenas, τ .*

Além disso, podemos definir o deslocamento residual de uma trajetória na direção de propagação da onda (d_1) como a distância entre o ponto inicial da partícula e seu ponto no tempo de Drift, isto é:

$$d_1 = \sqrt{((x(0) + x(\tau))^2 + (y(0) + y(\tau))^2)}$$

Os parâmetros geométricos de máximo comprimento horizontal (d_2) e vertical (d_3) são definidos de forma análoga ao caso periódico.

Note que, as propriedades descritas acerca da energia cinética das partículas na seção 1.4 são válidas apenas para ondas aquáticas periódicas e viajantes. Isto posto, para realizar o estudo da energia cinética total das partículas no contexto de ondas solitárias, precisamos primeiro adaptar as fórmulas (1.33) para o referencial móvel e (1.34) para o referencial de laboratório. A adaptação é feita pela escolha do tempo de *drift* para calcular as integrais, neste caso utilizaremos aquele apresentado na Definição 2.3.

A partir disto, investigamos se as seguintes hipóteses para $E(X_0, Y_0)$ no referencial de laboratório e $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ no referencial móvel:

- $E(X_0, Y_0) = c\lambda^*/2$, onde λ^* advém da definição 2.2;
- $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ é convexa e não decrescente,

são válidas para ondas solitárias no contexto de escoamentos EHD.

Na próxima subseção discutiremos o método numérico utilizado para calcular a onda solitária, seus parâmetros geométricos e a energia cinética total.

2.4.2 Método Numérico

Em suma, o procedimento utilizado para os experimentos numéricos com ondas solitárias é o mesmo que foi utilizado para ondas periódicas, isto é, também buscamos resolver a equação da onda via método de Newton. Vale notar que a condição (2.19) é necessária para a obtenção de uma onda solitária e esta, por sua vez, pode ser discretizada impondo que $\mathbf{Y}_1 = 0$.

Com isto em mente, discretizamos o domínio canônico de forma análoga ao contexto de ondas periódicas e condensamos as equações ao sistema de equações $G : \mathbb{R}^{N/2+4} \rightarrow \mathbb{R}^{N/2+4}$ cujas incógnitas são $(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B)$ e as componentes G_j respeitam:

$$\begin{cases} G_j(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = 0, j = 1, \dots, N/2 + 1 \\ G_{N/2+2}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \mathbf{Y}_{N/2+1} - \mathbf{Y}_1 - H = 0 \\ G_{N/2+3}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \frac{2}{N} \left(\frac{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_{N/2+1}}{2} + \sum_{j=2}^{N/2} \mathbf{Y}_j \right) + 1 - D = 0 \\ G_{N/2+4}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \mathbf{Y}_1 = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

O sistema (2.20) é então resolvido via método de Newton com chutes iniciais dados por:

$$\mathbf{Y}(\xi) = \pm 0.01 \cdot \operatorname{sech}^2(kX), \quad c = \frac{\sqrt{4k \tanh(k)(1 + \sigma k^2) - 4k^2 E_b}}{2k}, \quad D = 1, \quad B = 0.$$

Para a convergência do método numérico, utilizamos o método da continuação em dois parâmetros, a altura da onda H e a intensidade do campo elétrico E_b . Em suma, escolhidos H e E_b , nosso método numérico primeiro resolve o sistema (2.20) via método de Newton com continuação em H e $E_b = 0$. Quando esta onda é obtida, utilizamos este dado como inicial para a continuação em E_b .

O sistema (1.29) foi resolvido via RK4 e as integrais (1.33) e (1.34) da energia cinética total foram resolvidas via método dos trapézios, de forma totalmente análoga ao caso periódico.

2.4.3 Experimentos Numéricos

Os experimentos numéricos feitos para ondas solitárias estão divididos da seguinte forma: Primeiro, verificaremos a mudança no perfil da onda com a variação do parâmetro de intensidade do campo elétrico E_b em ambos perfis de elevação e depressão. Logo após, estudaremos o efeito da variação do campo elétrico na trajetória das partículas e seus respectivos parâmetros geométricos. Por fim, verificaremos se as propriedades da energia cinética total das partículas se mantêm neste contexto.

Perfil da Onda

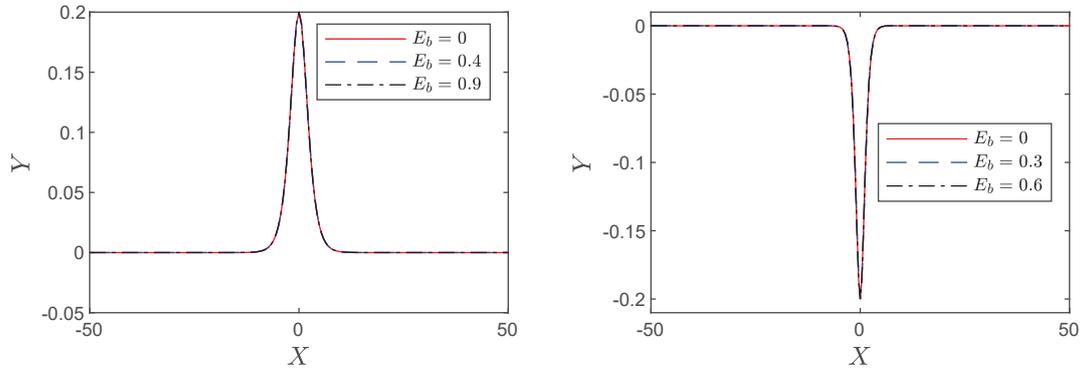
Para iniciar o tratamento numérico do problema, fixamos o comprimento do domínio computacional $\lambda = 500$ e, a não ser que seja dito o contrário, escolhemos a altura da onda como $H = 0.2$. Os perfis de onda foram gerados com 1024 modos de Fourier. Para ondas de elevação, fixamos $\sigma = 0$ e com isto, nosso método numérico convergiu para valores de $E_b < 1$. No caso de ondas de depressão, obtivemos convergência para $E_b < 0.6$. A Figura 2.11 mostra a comparação do perfil de ondas solitárias de elevação (Esquerda) e depressão (Direita) com valores de E_b diferentes. Para facilitar a visualização, limitamos o comprimento do eixo X para 100.

Novamente, observamos que a variação da intensidade do campo elétrico não está relacionada a uma mudança no perfil da onda. Assim, verificamos se essa variação interfere na velocidade da onda. De fato, o aumento do parâmetro E_b implica no decaimento de c , como vemos na Figura 2.12. Para esta comparação, utilizamos os valores de c relacionados à grade de E_b do método de continuação. Este resultado é esperado, visto o que a Observação 2.1 nos mostra analiticamente este efeito.

Trajетória das Partículas

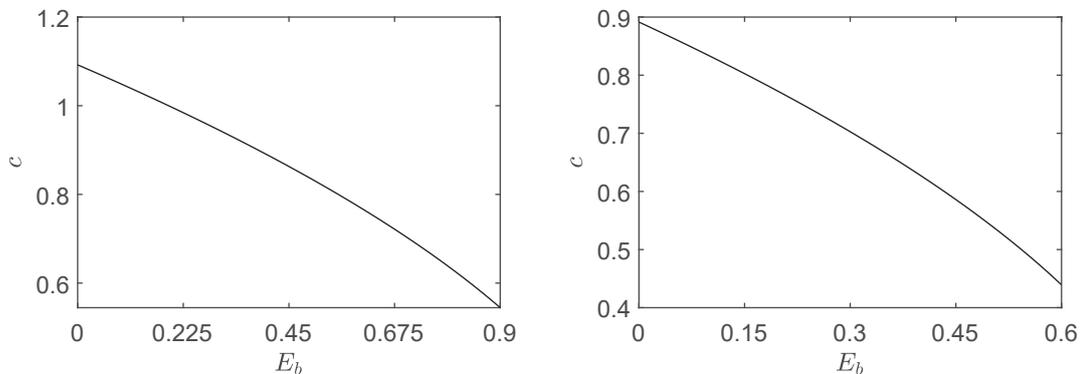
Para a verificação da variação do campo elétrico na trajetória das partículas, resolvemos o sistema (1.29) com condição inicial $(\xi_0, \zeta_0) = (\xi_0, -D/2)$ e passo de tempo $\Delta t = 0.001$, onde $X_1^* = \tilde{X}(\xi_0, -D/2)$ e X_1^* é o mesmo da Definição 2.2. Resolver este sistema no domínio canônico é o mesmo que resolver o sistema (1.27) com condições iniciais (X_1^*, Y_0) onde $Y_0 = \tilde{Y}(\xi_0, -D/2)$. Para ondas de elevação a condição inicial é dada por $(X_0, Y_0) = (20.4231, -0.5)$ e, para ondas de depressão $(X_0, Y_0) = (6.1731, -0.5001)$.

Figura 2.11: Perfis de ondas solitárias com a variação de E_b . Esquerda: Onda de elevação. Direita: Onda de depressão.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.12: Velocidade da onda com a variação de E_b . Esquerda: Ondas de elevação. Direita: Ondas de depressão.

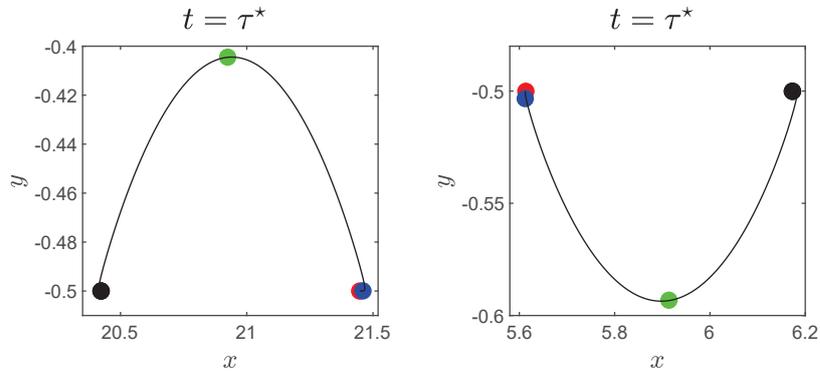


Fonte: Autoria Própria.

Na Figura 2.13, vemos um registro instantâneo da trajetória de três partículas no referencial de laboratório no instante t que corresponde ao tempo de *drift* da trajetória cujo $E_b = 0$, sendo à esquerda para ondas de elevação e à direita para ondas de depressão. Os valores de E_b e suas respectivas cores estão dispostos em ambas as figuras.

Assim, visualizamos que para ambos os tipos de ondas, a trajetória permanece a mesma, mudando apenas a velocidade na qual a partícula se movimenta. Para uma melhor compreensão deste efeito, fizemos experimentos análogos aos realizados para ondas periódicas com o tempo de *drift* τ e os parâmetros geométricos (d_1 , d_2 , d_3). A figura 2.14 mostra à esquerda o experimento relativo à onda de elevação e à direita, relativo à onda de depressão. Em ambas, podemos observar o tempo de *drift* (τ) crescendo junto do crescimento de

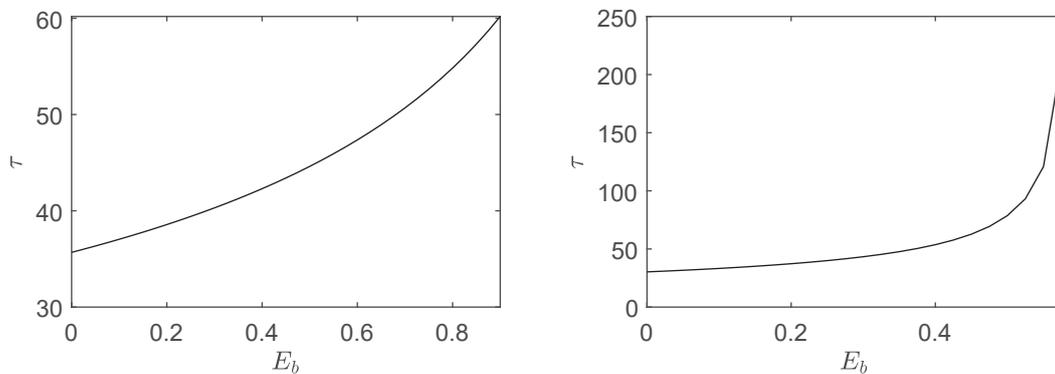
Figura 2.13: Registros Instantâneos da Trajetória. Esquerda: Onda de Elevação. Ponto Inicial (preto), $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.4$ (azul), $E_b = 0.9$ (verde). Direita: Onda de Depressão. Ponto Inicial (preto), $E_b = 0$ (vermelho), $E_b = 0.3$ (azul), $E_b = 0.6$ (verde).



Fonte: Autoria Própria.

E_b .

Figura 2.14: Tempo de *Drift* com a variação de E_b . Ondas de Elevação (direita), Ondas de Depressão (esquerda).



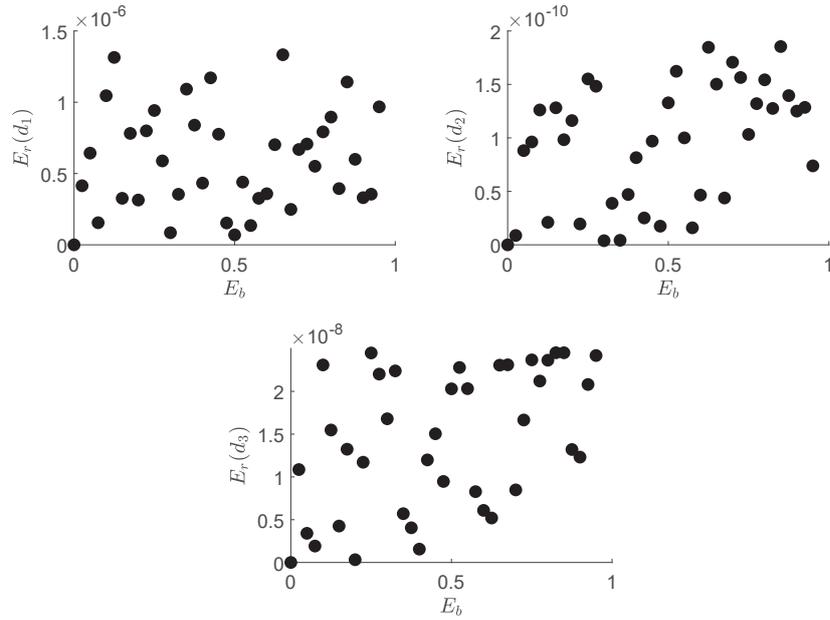
Fonte: Autoria Própria.

Na Figura 2.13 observamos que a partícula que está sob o efeito de um campo elétrico intermediário ($E_b = 0.4$ para ondas de elevação e, $E_b = 0.3$ para ondas de depressão) não apresentam uma redução na velocidade tão significativa quanto as ondas com E_b máximo. Isto pode ser observado na Figura 2.14. Nesta figura também observamos uma diferença de escala entre os tipos de onda, o que sugere que partículas abaixo de ondas de depressão são mais afetadas pela desaceleração do que no caso de ondas de elevação.

O erro relativo aos parâmetros geométricos é calculado com a mesma fórmula do caso periódico, onde (d_1^*, d_2^*, d_3^*) são os parâmetros de referência calculados na onda cujo $E_b = 0$. Este experimento foi realizado

particionando o intervalo de E_b uniformemente com passo $\Delta E_b = 0.025$ resultando em uma malha de 39 pontos para ondas de elevação e 24 pontos para ondas de depressão. Os resultados estão dispostos nas Figuras 2.15 e 2.16. Com este experimento, podemos concluir que numericamente, as trajetórias são as mesmas.

Figura 2.15: Erros relativos dos parâmetros geométricos em ondas de elevação. Acima: Esquerda: $E_r(d_1)$. Direita: $E_r(d_2)$. Abaixo: $E_r(d_3)$



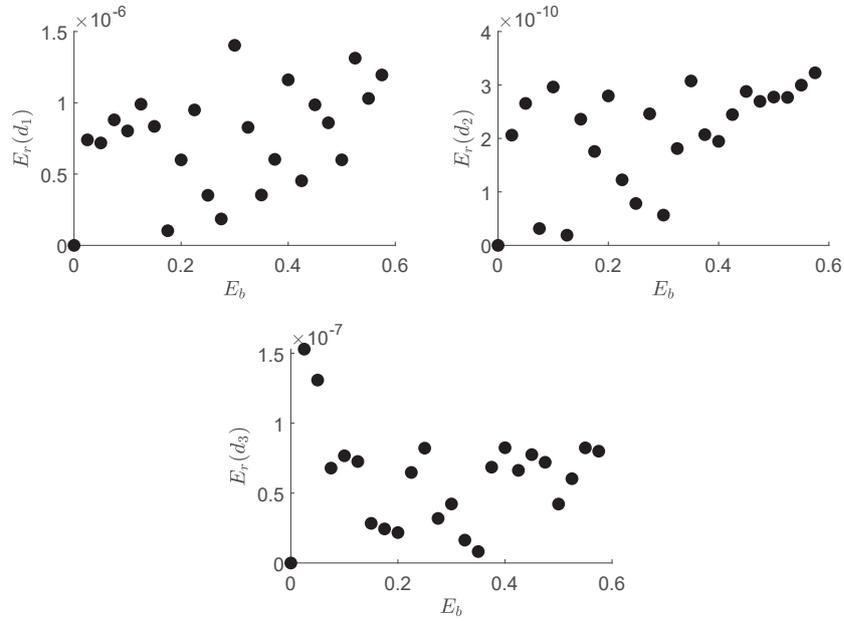
Fonte: Autoria Própria.

Energia Cinética Total das Partículas

Gostaríamos de verificar se as propriedades provenientes da energia cinética total das partículas abaixo de ondas aquáticas, periódicas e viajantes se mantém válidas para ondas solitárias e viajantes em escoamentos EHD. Desta forma, calculamos a energia cinética total das partículas abaixo de ondas de elevação e depressão com três valores distintos de E_b . Nas figuras 2.17 e 2.18 observamos que a função $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ é convexa e não decrescente. Além disso, $E(X_0, Y_0)$ é constante, porém essa constante não é $c\lambda^*/2$ onde λ^* é o comprimento relativo, como definido em 2.2. Nossos experimentos numéricos não indicaram um padrão para essa constante.

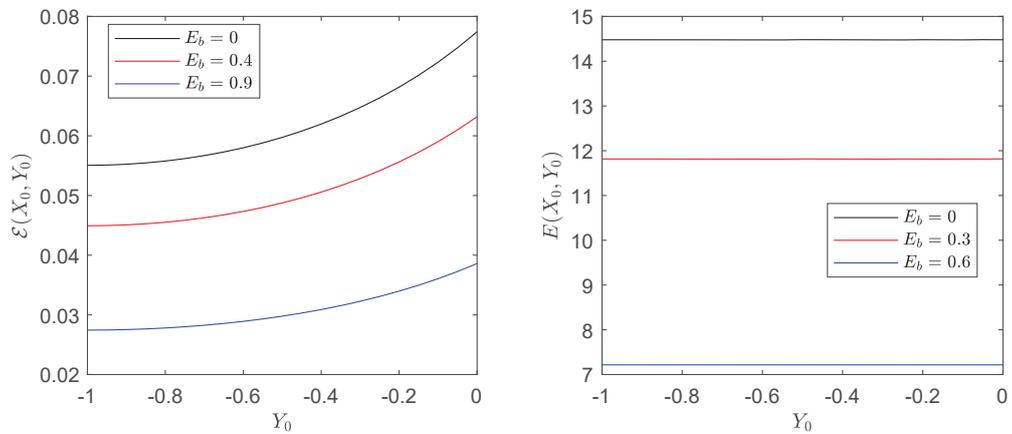
De maneira geral, os experimentos sobre a velocidade da onda c e o tempo de *drift* τ mostram que tanto a superfície, quanto as partículas se movimentam lentamente com o crescimento de E_b . Aliando estes resultados com os experimentos realizados, temos um resultado análogo ao caso de ondas periódicas, isto é, a energia cinética total é maior para partículas que estão abaixo de ondas cuja intensidade do campo elétrico é menor.

Figura 2.16: Erros relativos dos parâmetros geométricos em ondas de depressão. Acima: Esquerda: $E_r(d_1)$. Direita: $E_r(d_2)$. Abaixo: $E_r(d_3)$



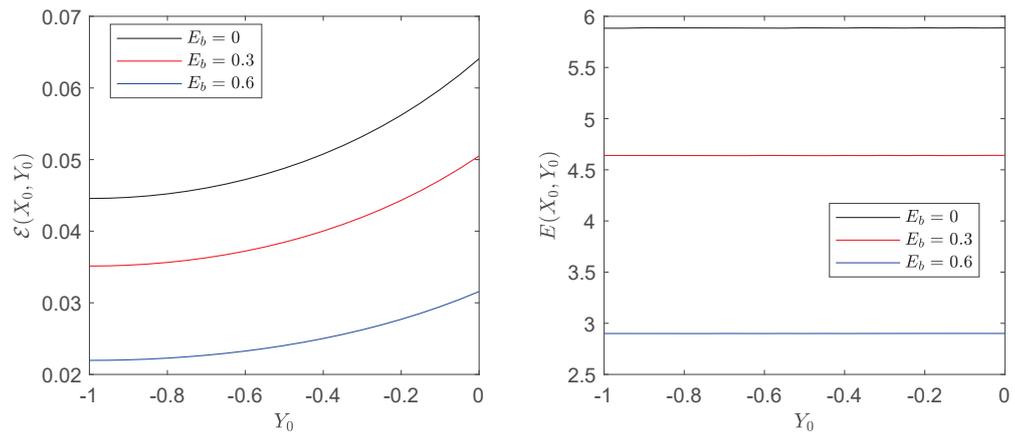
Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.17: Energia cinética total das partículas abaixo de uma onda de elevação. Esquerda: Referencial de laboratório. Direita: Referencial móvel.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.18: Energia cinética total das partículas abaixo de uma onda de depressão nos referenciais. Esquerda: Referencial de laboratório. Direita: Referencial móvel.



Fonte: Autoria Própria.

Capítulo 3

Campo Elétrico Horizontal

Neste capítulo estamos interessados em investigar numericamente o efeito da variação da intensidade de um campo elétrico horizontal na trajetória e na energia cinética total das partículas abaixo de ondas periódicas em escoamento EHD.

O problema que buscamos resolver envolve a modelagem matemática de um campo elétrico forte o suficiente para que os efeitos da gravidade e da tensão superficial possam ser desconsiderados do problema. Embora nosso interesse seja estudar fluxos irrotacionais, apresentaremos o caso com vorticidade constante, que será de utilidade quando discutirmos acerca do método numérico. Para isso, utilizamos como referência o trabalho de Flamarion, et al. [19].

A primeira seção será dedicada a apresentar a motivação física e as equações governantes que regem o problema, além das modificações que a adição do campo elétrico horizontal traz para as equações governantes no sistema de coordenadas canônico e faremos uma breve discussão acerca da velocidade da onda linear. Na segunda seção, apresentaremos os métodos numéricos utilizados para calcular tanto o perfil da onda, quanto as trajetórias e a energia cinética total das partículas. Por fim, na terceira seção, discutiremos os experimentos e resultados numéricos.

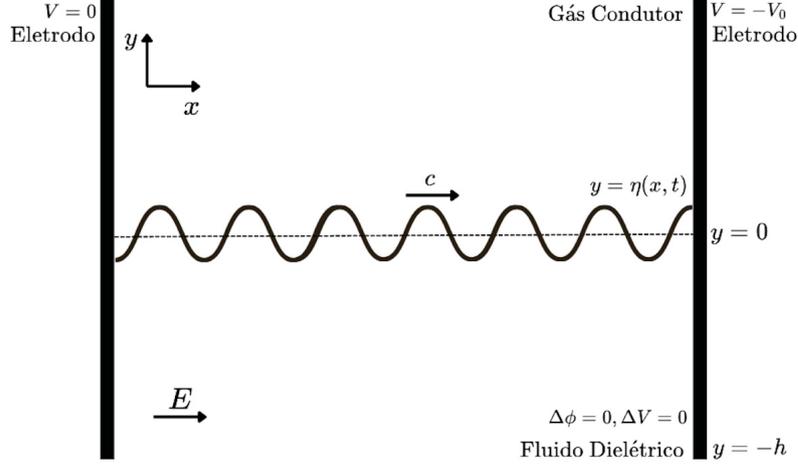
3.1 Formulação Matemática

Considere um fluido invíscido, incompressível e dielétrico de densidade ρ e constante dielétrica $\epsilon \gg 1$ limitado por eletrodos nas extremidades esquerda e direita, envolto por um gás condutor e sob o efeito de uma vorticidade constante γ . O fundo do canal está em $y = -h$ e $y = 0$ representa a superfície do fluido não perturbado, como podemos ver na Figura 3.1. Os eletrodos, por sua vez, geram uma diferença de potencial V_0 entre si e criam um campo elétrico $\vec{E} = -\nabla V$ de magnitude $E_0 = V_0/\lambda_0$, onde λ_0 representa a distância entre os eletrodos. Neste caso, o campo elétrico gerado é horizontal.

O campo de velocidades \vec{U} é dado por uma perturbação rotacional de um fluxo cisalhante, isto é:

$$\vec{U} = \hat{u} + \nabla\phi,$$

Figura 3.1: Esquema Físico do Problema



Fonte: Autoria Própria.

onde γ é a constante que representa a vorticidade e $\hat{u} = (-\gamma(y+h), 0)$.

Além disso, $y = \eta(x, t)$, λ , c representam, respectivamente, a superfície livre, o comprimento e a velocidade da onda. Considerando o comprimento da onda muito menor que a distância entre os eletrodos, i.e, $\lambda \ll \lambda_0$ podemos introduzir a mudança de variáveis do referencial de laboratório (x, y) para o referencial móvel (X, Y) da mesma forma que feito anteriormente: $X = x - ct$, $Y = y$. As equações governantes, em sua forma adimensional são dadas por [19]:

$$\Delta\phi = 0, \quad \text{em } -1 < Y < \eta(X); \quad (3.1)$$

$$\Delta V = 0, \quad \text{em } -1 < Y < \eta(X); \quad (3.2)$$

$$-c\eta_X + (\phi_X - \gamma(\eta+1))\eta_X = \phi_Y, \quad \text{sobre } Y = \eta(X); \quad (3.3)$$

$$\phi_Y = 0, \quad \text{sobre } Y = -1; \quad (3.4)$$

$$\partial V / \partial n = 0, \quad \text{sobre } Y = \eta(X); \quad (3.5)$$

$$V_Y = 0, \quad \text{sobre } Y = -1; \quad (3.6)$$

$$V = 0, \quad \text{sobre } X = -\lambda_0/2; \quad (3.7)$$

$$V = -V_0, \quad \text{sobre } X = \lambda_0/2. \quad (3.8)$$

Além destas, acoplamos ao sistema a condição dinâmica

$$-c\phi_X + \frac{1}{2}(\phi_X^2 + \phi_Y^2) - \gamma(\eta+1)\phi_X + \gamma\psi - \frac{E_b}{2}|\nabla V|^2 = B, \quad (3.9)$$

onde ψ , B e E_b representam, respectivamente, um conjugado harmônico de ϕ , a constante de Bernoulli e o

parâmetro de intensidade do campo elétrico adimensional, dado por

$$E_b = \frac{\epsilon V_0^2}{\rho g h}.$$

Além disso, escolhamos para a adimensionalização h , $\sqrt{h/g}$ e V_0 como comprimento, tempo e potencial elétrico de referência.

Procedendo de maneira análoga a seção 2.2, linearizamos o sistema (3.1)-(3.9) e encontramos a velocidade da onda linear com vorticidade constante denotada por c_γ :

$$c_\gamma = -\gamma + \frac{1}{2k} \left[\gamma \tanh(k) \pm \sqrt{\gamma^2 \tanh^2(k) + 4k^2 E_b} \right]. \quad (3.10)$$

Para garantir uma melhor fluidez no texto, omitimos as manipulações algébricas necessárias, mas estas estão disponíveis no Apêndice C.

Para o caso de um fluxo irrotacional, tomamos $\gamma = 0$ e portanto, a velocidade da onda linear é dada por:

$$c = \frac{\sqrt{4k^2 E_b}}{2k} = \sqrt{E_b}.$$

Resolvendo as equações (3.1)-(3.8) acopladas da condição dinâmica (3.9) no domínio canônico, condensamos as equações governantes e suas condições de fronteira para a uma única equação dependente de $\mathbf{Y}(\xi)$, c , D e B que resolve a elevação da superfície livre, dada por:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{Y}(\xi), c, D, B) := & \frac{-c^2}{2} - \frac{c^2}{2\mathbf{J}} + \gamma^2 \frac{(\mathcal{C}[(\mathbf{Y}+1)\mathbf{Y}_\xi]^2 - ((\mathbf{Y}+1)\mathbf{Y}_\xi)^2)}{2\mathbf{J}} + \gamma^2 \mathbf{Y} \left(\frac{\mathbf{Y}}{2} + b \right) \\ & + \frac{(c + \gamma \mathcal{C}[(\mathbf{Y}+1)\mathbf{Y}_\xi])(c + \gamma(\mathbf{Y}+1)(1 - \mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi]))}{\mathbf{J}} - \gamma c - \frac{E_b}{2\mathbf{J}} - B = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{J} = \mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2$.

Para o caso $\gamma = 0$, obtemos a seguinte equação dependente de $\mathbf{Y}(\xi)$, c , D e B :

$$G(\mathbf{Y}(\xi), c, D, B) := \frac{-c^2}{2} + \frac{c^2}{2\mathbf{J}} - \frac{E_b}{2\mathbf{J}} - B = 0, \quad (3.12)$$

Note que a equação (3.12) tem solução exata para para qualquer perfil de onda \mathbf{Y} , basta tomarmos $c = \sqrt{E_b}$ e $B = -E_b/2$.

3.2 Método Numérico

Antes de apresentarmos o método numérico utilizado para resolver este problema, façamos uma breve observação. Desconsiderar o efeito da gravidade e da tensão superficial no fluido dificulta a convergência do método de Newton. Desta forma, precisamos fazer uma continuação em γ para a resolução numérica da equação (3.12), isto é, primeiro resolvemos numericamente a equação (3.11) considerando uma vorticidade γ próxima de 0.

A discretização e o método numérico são os mesmos apresentados na seção 2.3.1 para o caso de ondas periódicas com campo elétrico normal. Para completar o sistema de $N/2+4$ incógnitas, utilizamos as seguintes equações:

- Largura da Faixa: $D = \langle \mathbf{Y} \rangle + 1$
- Altura da Onda: $\mathbf{Y}(\xi = 0) - \mathbf{Y}(\xi = -\lambda/2) = H$;
- Média Nula: $\int_{-\lambda/2}^0 \mathbf{Y} \mathbf{X}_\xi d\xi = 0$.

Assim, de maneira análoga ao caso de um campo elétrico normal, resolvemos o sistema quadrado $G : \mathbb{R}^{N/2+4} \rightarrow \mathbb{R}^{N/2+4}$ cujas incógnitas são dadas por $(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B)$ e suas componentes G_j respeitam:

$$\begin{cases} G_j(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = 0, & j = 1, \dots, N/2 + 1, \\ G_{N/2+2}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \mathbf{Y}_{N/2+1} - \mathbf{Y}_1 - H = 0, \\ G_{N/2+3}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{X}_{\xi_1} + \mathbf{Y}_{N/2+1} \mathbf{X}_{\xi_{(N/2+1)}} \Delta \xi}{2} + \Delta \xi \sum_{j=2}^{N/2} \mathbf{Y}_j \mathbf{X}_{\xi_j} = 0, \\ G_{N/2+4}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B) = \frac{2}{N} \left(\frac{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_{N/2+1}}{2} + \sum_{j=2}^{N/2} \mathbf{Y}_j \right) + 1 - D = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

via método de Newton com condições iniciais:

$$\mathbf{Y} = 10^{-5} \cos(kX), \quad c = c_\gamma, \quad D = 1, \quad B = 0.$$

E critério de parada para o método dado por:

$$\frac{\sum |G_j|_{j=1}^{N/2+4}}{N/2+4} < 10^{-10}.$$

Fazemos uma continuação no parâmetro de declividade ε visando a convergência do método para ondas com altura H grande. Com a convergência deste método para o ε desejado, utilizamos os dados $(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B)$ obtidos como condição inicial para a resolução numérica da equação (3.12) também via método de Newton. Note que, para esta resolução utilizamos as mesmas equações para completar o sistema quadrado $G : \mathbb{R}^{N/2+4} \rightarrow \mathbb{R}^{N/2+4}$ de incógnitas $(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N/2+1}, c, D, B)$.

Assim, para uma melhor compreensão dos passos realizados neste método, expomos o procedimento utilizado em forma de algoritmo:

1. Fixamos a intensidade do campo elétrico E_b e o parâmetro de declividade ε ;
2. Escolhemos um valor para $\gamma^* \in \{s \cdot 10^{-l} ; l \leq 6, s = 1, -1\}$;
3. Encontramos a elevação da superfície livre da onda cujo $\gamma = \gamma^*$ utilizando o método de Newton com continuação em ε ;
4. Caso não haja convergência, retornamos ao passo (2) e escolhemos outro γ^* .
5. Utilizamos a onda gerada pelo passo 3 como dado inicial no método de Newton com continuação em γ para encontrar a onda cujo $\gamma = 0$.

Uma vez que obtemos numericamente $\mathbf{Y}(\xi)$, para calcular as trajetórias das partículas abaixo desta onda, resolvemos o sistema (1.29) via Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) no domínio canônico e então utilizamos as fórmulas do mapeamento conforme (1.16) para obter as trajetórias no domínio físico. As integrais provenientes da energia cinética total das partículas, expressas pelas equações (1.33) e (1.34), são calculadas via método dos trapézios.

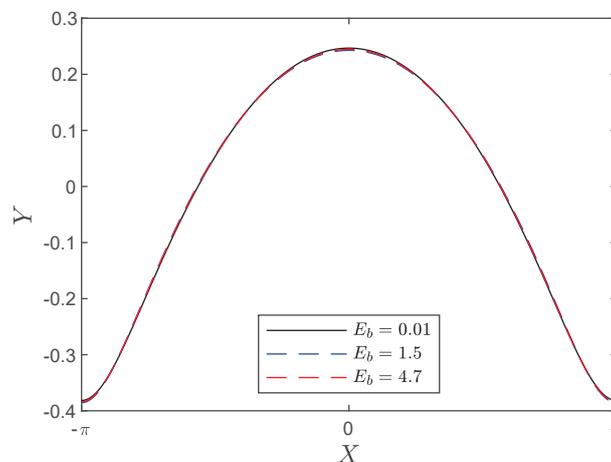
3.3 Experimentos Numéricos

Nesta seção estamos interessados em apresentar os experimentos numéricos realizados para ondas periódicas sob a ação de um campo elétrico horizontal. Primeiro, verificaremos a mudança no perfil da onda de acordo com a variação da intensidade do campo elétrico. Logo após, resultados acerca das trajetórias das partículas e seus respectivos parâmetros geométricos. Por fim, estudaremos a energia cinética total das partículas.

Perfil da Onda

Para iniciar o tratamento numérico do problema, fixamos o comprimento do domínio computacional em $\lambda = 2\pi$ e o parâmetro de declividade $\varepsilon = 0.1$, o que nos garante ondas com altura $H = 0.6283$. Esta escolha é feita para garantir que estamos no caso de ondas fortemente não lineares. Os perfis de onda foram gerados com 1024 modos de Fourier. Note que, escolher $E_b = 0$ não faz sentido físico para o problema, desta forma, para uma comparação entre os perfis de onda gerados por campos elétricos diferentes escolhemos três valores para a intensidade do campo elétrico, sendo estes $E_b = 0.01$ para um campo elétrico fraco, $E_b = 1.5$ para um campo elétrico intermediário e $E_b = 4.7$ para um campo elétrico forte.

Figura 3.2: Perfil da Onda

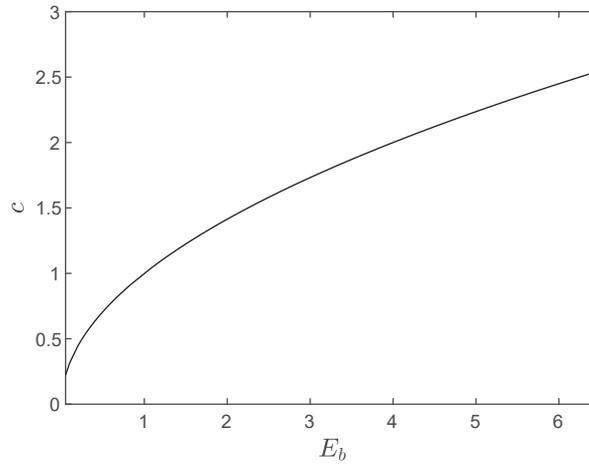


Fonte: Autoria Própria.

A Figura 3.2 mostra que a variação do parâmetro E_b altera o perfil da onda. Para verificar qual a magnitude desta variação tomamos como referência η^* a superfície gerada com $E_b = 0.01$ e calculamos o erro relativo entre cada valor de Y no vetor η . Nossos resultados indicaram um erro relativo na ordem de 10^{-3} .

Para o experimento onde verificamos a variação da velocidade da onda, tomamos 85 valores distintos de E_b divididos no intervalo $[0.05, 6.5]$ e conseguimos a convergência de 82 destes. A figura 3.3 mostra que a velocidade aumenta conforme o crescimento de E_b .

Figura 3.3: Velocidade da Onda com a Variação da Intensidade do Campo Elétrico



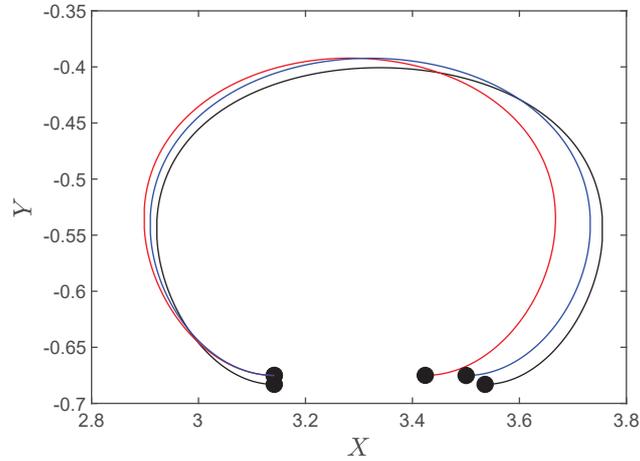
Fonte: Autoria Própria.

Trajetórias das Partículas e Stokes Drift

Os estudo numérico das trajetórias das partículas abaixo destas ondas e seus parâmetros geométricos aconteceu resolvendo o sistema (1.29) com condição inicial $(\xi_0, \zeta_0) = (\pi, -D/2)$ e passo de tempo $\Delta t = 0.001$. O que é equivalente a resolver o sistema (1.27) com condição inicial $(X_0, Y_0) = (\pi, Y_0)$, onde $Y_0 = \tilde{Y}(\pi, -D/2)$. Como vimos na Figura 3.2, as superfícies não são mantidas com a variação de E_b , como no caso de ondas sob o efeito de um campo elétrico normal, por isso, não há motivo para que a posição inicial das trajetórias seja a mesma. Vemos na Figura 3.4 três trajetórias referentes à ondas com E_b diferentes e com condição inicial $(\pi, -D/2)$. Neste experimento observamos que neste contexto, os parâmetros geométricos da trajetória são diferentes. Com isto em mente, não repetimos o experimento do erro relativo, como feito para ondas sob o efeito de um campo elétrico normal para este contexto.

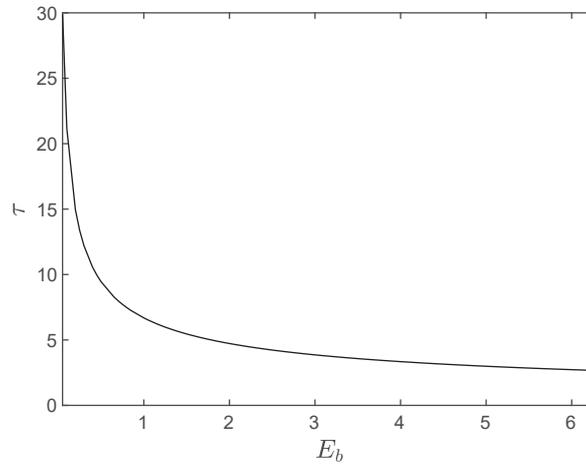
Verificamos também a variação do tempo de *drift* τ com a intensificação do campo elétrico e concluímos que o tempo de *drift* decresce conforme o crescimento de E_b . Como podemos ver na Figura 3.5. A conclusão deste experimento é contrária ao caso de ondas com campo elétrico normal. Veja que, neste contexto o campo elétrico acelera a superfície e as partículas, enquanto no caso anterior, desacelera.

Figura 3.4: Registro da Trajetórias de Partículas. $E_b = 0.01$ (preto), $E_b = 1.5$ (vermelho), $E_b = 4.7$ (azul).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 3.5: Tempo de *drift* com a variação de E_b .



Fonte: Autoria Própria.

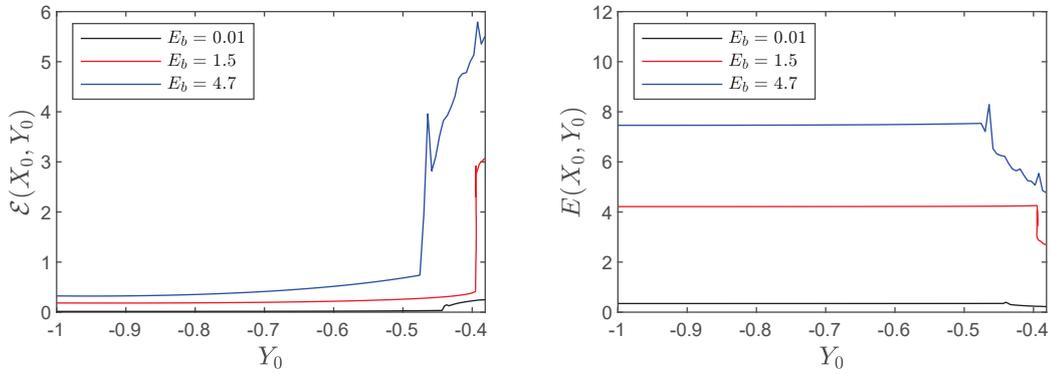
Energia Cinética Total das Partículas

Para os experimentos acerca da energia cinética, resolvemos o sistema (1.29) escolhendo como condição inicial $(\xi_0, \zeta_0) = (\pi, \zeta_0)$ onde ζ_0 varia no intervalo $[-D, 0]$ em 101 valores diferentes. Realizamos este experimento para os três valores de E_b que vêm sendo trabalhados nesta seção.

Na Figura 3.6 observamos à esquerda a energia cinética total no referencial de laboratório. Sua propriedade para ondas aquáticas nos diz que a função $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ deveria ser convexa e não-decrescente, mas isto não

acontece neste caso. À direita, observamos a energia cinética total das partículas no referencial de laboratório, que também não cumpre a propriedade de ser constante igual a $c\lambda/2$. Pode-se notar que os gráficos das funções $E(X_0, Y_0)$ e $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ cumprem as propriedades até um certo valor de Y_0 , mas nossos experimentos não indicaram um padrão sobre esse limiar. Para garantir que este resultado não está sendo afetado por erros numéricos, refizemos o experimento calculando a elevação da superfície livre com 4096 modos de Fourier e resolvendo o sistema (1.29) com $\Delta t = 10^{-4}$ e obtimos resultados análogos.

Figura 3.6: Energia cinética total das partículas. Esquerda: Referencial de laboratório. Direita: Referencial móvel.



Fonte: Autoria Própria.

Vale notar que, ainda que estas propriedades não sejam cumpridas, ainda temos que a energia cinética total em ambos os referenciais é maior para trajetórias que estão sob o efeito de um campo elétrico mais forte. Ao acoplar este resultado com os experimentos da velocidade da onda c e o tempo de *drift* τ , observamos que partículas que se movem mais rapidamente, i.e, estão sob o efeito de um campo elétrico mais forte possuem a energia cinética total maior. Portanto, obtemos um resultado análogo ao caso de ondas sob o efeito de um campo elétrico normal.

Considerações Finais

Neste trabalho, investigamos o efeito da variação da intensidade de campos elétricos normais e horizontais nos parâmetros geométricos da trajetória e na energia cinética total das partículas.

No que se refere a campo elétrico normal, a investigação numérica das trajetórias das partículas abaixo de ondas periódicas revelou que o tempo de *drift* das mesmas é maior para ondas cujo campo elétrico é mais intenso. Por outro lado, os parâmetros geométricos são mantidos, isto é, as partículas estão sendo apenas desaceleradas pelo campo elétrico, mantendo seu formato. Além disso, investigamos numericamente uma desigualdade que limita inferior e superiormente o tempo de *drift* das partículas conhecida para ondas aquáticas e verificamos que esta se mantém no contexto de escoamentos EHD. Acerca da energia cinética total das partículas, nossos experimentos mostraram que no referencial de laboratório, a função que representa a energia cinética é convexa e não decrescente, enquanto no referencial móvel, esta função é constante igual à metade do produto da velocidade pelo comprimento da onda. Ou seja, verificamos que no contexto de um escoamento EHD, as propriedades acerca da energia cinética total das partículas que dizem respeito à ondas aquáticas são mantidas. Para ondas solitárias, definimos uma região próxima à crista da onda, onde a mesma tem maior influência no deslocamento das partículas abaixo da onda e investigamos numericamente o efeito da variação do campo elétrico na trajetória e na energia cinética total das partículas abaixo de ondas solitárias de elevação e depressão. Nossos resultados foram semelhantes ao caso periódico, a não ser pela constante atrelada a energia cinética total das partículas no referencial móvel, esta por sua vez, não é igual à metade do produto da velocidade da onda pelo comprimento efetivo desta região.

Acerca de ondas cujo escoamento está sob o efeito de um campo elétrico horizontal, investigamos apenas o caso de ondas periódicas. Nossos experimentos revelaram uma discrepância com o caso anterior, isto é, o tempo de *drift* das partículas sofre uma diminuição com a intensificação do campo elétrico porque as partículas estão sendo aceleradas pelo campo elétrico. Além disso, as trajetórias não são mantidas. Sobre a energia cinética total das partículas, obtivemos que em ambos os referenciais, as funções não cumprem as propriedades oriundas de ondas aquáticas.

Para ambos os tipos de campo elétrico (normal e horizontal), resolvemos a equação governante da onda no sistema de coordenadas canônico via métodos pseudo-espectrais e utilizamos as fórmulas do mapeamento conforme para mapeá-la para o domínio físico. Calculamos as trajetórias no domínio canônico via método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e, novamente, utilizamos o mapeamento conforme para determiná-las

no domínio físico. Por fim, computamos a energia cinética total das partículas via método dos trapézios.

Desta forma, os resultados expostos nesta dissertação se fazem relevantes completando lacunas existentes na literatura. Estes resultados podem ser utilizados para motivar estudos teóricos. Algumas dúvidas podem surgir, que motivam a continuação deste trabalho:

1. Existe uma formulação para a constante da energia cinética $E(X_0, Y_0)$ no caso de ondas solitárias sob a ação de um campo elétrico normal?
2. Qual o efeito da variação do campo elétrico nas trajetória de partículas abaixo de uma onda solitária sob o efeito de um campo elétrico horizontal?
3. Por que a energia cinética total das partículas abaixo de uma onda periódica sob o efeito de um campo elétrico horizontal tem uma instabilidade ?

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRASHKIN, A.; PELINOVSKY, E. On the connection between stokes drift and gerstner wave. *Physics-Usp ekhi*, v. 61, 03 2017.
- [2] AIRY, G. B. Tides and waves. *Encyclopaedia Metropolitana*, v. 5, 1842.
- [3] BORLUK, H.; KALISCH, H. Particle dynamics in the kdv approximation. *Wave Motion*, v. 49, p. 691–709, 2012.
- [4] BOUSSINESQ, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, p. 55–108, 1872.
- [5] BREMER, T. S. Van den; BREIVIK, Ø. Stokes drift. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 376, p. 20170104, 2017.
- [6] CARTER, J. D.; CURTIS, C. W.; KALISCH, H. Particle trajectories in nonlinear schrödinger models. *Water Waves*, v. 2, p. 31–57, 2019.
- [7] CONSTANTIN, A. The trajectories of particles in stokes waves. *Inventiones Mathematicae*, v. 166, p. 523–535, 2006.
- [8] CONSTANTIN, A. On the particle paths in solitary water waves. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 68, p. 81–90, 2009.
- [9] CONSTANTIN, A.; ESCHER, J. Particle trajectories in solitary water waves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 44, p. 424–441, 2007.
- [10] CONSTANTIN, A.; STRAUSS, W. Pressure beneath a stokes wave. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 63, p. 533–557, 2008.
- [11] CONSTANTIN, A.; VILLARI, G. Particle trajectories in linear water waves. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, v. 10, p. 1336–1344, 2008.
- [12] CONSTANTIN, O. A complex-analytic approach to kinetic energy properties of irrotational traveling water waves. *Mathematische Zeitschrift*, v. 301, p. 4201–4215, 2022.

- [13] DOAK, A. et al. Capillary-gravity waves on the interface of two dielectric fluid layers under normal electric fields. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 73, n. 3, p. 231–250, 2020.
- [14] DOAK, A.; GAO, T.; VANDEN-BROECK, J.-M. Global bifurcation of capillary-gravity dark solitary waves on the surface of a conducting fluid under normal electric fields. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 75, n. 3, p. 215–234, 2022.
- [15] EASWARAN, C. Solitary waves on a conducting fluid layer. *Physics of Fluids*, v. 31, p. 3442–3443, 1988.
- [16] FLAMARION, M. V.; RIBEIRO-JR, R. An iterative method to compute conformal mappings and their inverses in the context of water waves over topographies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 93, p. 3304–3311, 2021.
- [17] FLAMARION, M. V. et al. Flow structure beneath periodic waves with constant vorticity under normal electric fields. *Physics of Fluids*, v. 34, 2022.
- [18] FLAMARION, M. V.; GAO, T.; RIBEIRO-JR, R. An investigation of the flow structure beneath solitary waves with constant vorticity on a conducting fluid under normal electric fields. *Physics of Fluids*, v. 35, 2023.
- [19] FLAMARION, M. V. et al. Flow structure beneath periodic waves with constant vorticity under strong horizontal electric fields. *Wave Motion*, v. 131, 2024.
- [20] GAO, T. et al. Dynamics of fully nonlinear capillary–gravity solitary waves under normal electric fields. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 108, p. 107–122, 2018.
- [21] GAO, T. et al. Capillary-gravity waves on a dielectric fluid of finite depth under normal electric field. *European Journal of Mechanics. B, Fluids*, v. 77, p. 98–107, 2019.
- [22] U. Ghoshal e A. C. Miner. *Cooling of high power density devices by electrically conducting fluids*. 2003. 6,658,861.
- [23] GLEESON, H. et al. A new application of the korteweg-de vries benjamin-ono equation in interfacial electrohydrodynamics. *Physics of Fluids*, v. 19, 2007.
- [24] GREEN, G. On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 6, p. 457–462, 1838.
- [25] GRIFFING, E. M. et al. Electrohydrodynamics of thin flowing films. *Journal of Fluids Engineering*, v. 128, p. 276–283, 2006.
- [26] GUAN, X. Particle trajectories under interactions between solitary waves and a linear shear current. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, v. 10, p. 125–131, 2020.

- [27] HAMMERTON, P. Existence of solitary travelling waves in interfacial electrohydrodynamics. *Wave Motion*, v. 50, p. 676–686, 2013.
- [28] HSU, H.; CHEN, Y.; HWUNG, H. Experimental study of the particle paths in solitary water waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 370, p. 1629–1637, 2012.
- [29] HUNT, M. J.; VANDEN-BROECK, J.-M. A study of the effects of electric field on two-dimensional inviscid nonlinear free surface flows generated by moving disturbances. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 92, p. 1–13, 2015.
- [30] IRANSHAHI, K. et al. Electrohydrodynamics and its applications: Recent advances and future perspectives. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 232, 2024.
- [31] KISTLER, S. F.; SCHWEIZER, P. M. *Liquid Film Coating - Scientific Principles and their Technological Implications*. New York: Chapman and Hall, Springer, 1997.
- [32] KORTEWEG, D. J.; VRIES, G. D. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal. *Philosophical Magazine*, v. 39, p. 422–443, 1895.
- [33] LI, J.; YANG, S. *Kinetic energy properties of irrotational deep-water Stokes waves*. 2024. ArXiv:2406.00711v1.
- [34] LONGUET-HIGGINS, M. S. Eulerian and lagrangian aspects of surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 173, p. 683–707, 1986.
- [35] MANUKURE, S.; BOOKER, T. A short overview of solitons and applications. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, v. 4, p. 100–140, 2021.
- [36] MALEEWONG, M.; GRIMSHAW, R.; ASAVANANT, J. Free surface flow under gravity and surface tension due to an applied pressure distribution ii bond number less than one-third. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, v. 24, n. 4, p. 502–521, 2005.
- [37] MELCHER, J. R.; SCHWARZ, W. J. Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field. *Physics of Fluids*, v. 11, n. 12, p. 2604–2616, 1968.
- [38] PAPAGEORGIOU, D. T.; VANDEN-BROECK, J.-M. Numerical and analytical studies of nonlinear gravity–capillary waves in fluid layers under normal electric fields. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 72, p. 832–853, 2006.
- [39] PAPAGEORGIOU, D. T. Film flows in the presence of electric fields. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 51, p. 155–187, 2019.
- [40] PERELMAN, T.; FRIDMAN, A.; ELIASHEVICH, M. Modified korteweg-de vries equation in electrohydrodynamics. *Soviet Physics JETP*, v. 66, p. 1316–1323, 1974.

- [41] RIBEIRO-JR, R.; MILEWSKI, P. A.; NACHBIN, A. Flow structure beneath rotational water waves with stagnation points. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 812, p. 792–814, 2017.
- [42] RUSSEL, J. S. *Report on Waves*. London: Richard and John E. Taylor, 1845.
- [43] SOUZA, M. T. d. A. *A Equação de Whitham-Benjamin-Ono: Uma Extensão do Modelo de KDV-Benjamin-Ono*. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2024. Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM.
- [44] STOKES, G. G. On the theory of oscillatory waves. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 8, p. 411–455, 1847.
- [45] TAYLOR, G. I.; DYKE, M. D. V. Electrically driven jets. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 313, p. 453–475, 1969.
- [46] TAYLOR, G.; MCEWAN, A. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 22, n. 1, p. 1–15, 1965.
- [47] SILVA, A. F. Teles da; PEREGRINE, D. H. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 195, p. 281–302, 1988.
- [48] UMEYAMA, M. Investigation of single and multiple solitary waves using superresolution piv. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, v. 139, p. 304–313, 2013.
- [49] URSELL, F. Mass transport in gravity waves. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 49, p. 145–150, 1953.
- [50] VANNESTE, J.; YOUNG, W. R. Stokes drift and its discontents. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, v. 380, p. 20210032, 2022.
- [51] WANG, Z. Modelling nonlinear electrohydrodynamic surface waves over three-dimensional conducting fluids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 473, 2017.

Apêndice A

Resolução das equações para ϕ e ψ

Este apêndice busca mostrar a resolução das equações para ϕ e sua conjugada harmônica ψ no sistema de coordenadas canônico. A resolução de ambas é semelhante ao desenvolvimento das fórmulas para as componentes X - Y do mapeamento conforme, explícito na seção 1.2. Resolveremos separadamente cada um dos sistemas. Primeiro, vamos deduzir as condições de fronteira no fundo do canal necessárias para a resolução deste problema.

Ao aplicar a regra da cadeia em $\tilde{\phi}(\xi, \zeta) = \phi(\tilde{X}(\xi, \zeta), \tilde{Y}(\xi, \zeta))$ para calcular sua derivada em relação à variável ζ , obtemos:

$$\phi_\zeta = \phi_X \tilde{X}_\zeta + \phi_Y Y_\zeta,$$

para todo (ξ, ζ) . A condição (1.6):

$$Y(\xi, -D) = -1,$$

nos garante que $Y_\xi = X_\zeta = 0$ sobre $\zeta = -D$. Além disso, retomamos a condição de impermeabilidade do fundo (1.3), dada por:

$$\phi_Y(X, -1) = 0 \Rightarrow \tilde{\phi}_\zeta(\xi, -D) = 0.$$

Assim, o sistema que estamos interessados em resolver para ϕ é o seguinte:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0, & \text{em } -D < \zeta < -0, \\ \phi(\xi, 0) = \Phi(\xi), \\ \phi_\zeta(\xi, -D) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde Φ é uma função dada *a priori*.

Para deduzir a condição de fronteira no fundo do canal da componente ψ , basta notar que o par $\phi - \psi$ é harmônico conjugado, isto é, respeita as condições de Cauchy-Riemann. Isto implica que $\phi_\zeta = -\psi_\xi = 0$ em

$\zeta = -D$. Logo, $\psi(\xi, -D) = A$, $A \in \mathbb{R}$. Assim, o sistema relacionado à componente ψ é dado por:

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, & \text{em } -D < \zeta < 0, \\ \psi(\xi, 0) = \Psi(\xi), \\ \psi(\xi, -D) = A, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde Ψ é uma função dada *a priori* e A uma constante desconhecida.

Isto posto, podemos prosseguir à resolução das componentes ϕ e ψ separadamente.

Componente ϕ

Para a componente ϕ , começamos utilizando a transformada de Fourier $\mathcal{F}[\cdot]$ no sistema (A.1) em relação à variável ξ , assim obtendo:

$$\begin{cases} -k^2\hat{\phi}(k, \zeta) + \hat{\phi}_{\zeta\zeta}(k, \zeta) = 0 & \text{em } -D < \zeta < 0, \\ \hat{\phi}(k, 0) = \hat{\Phi}(k), \\ \hat{\phi}_{\zeta}(k, -D) = 0. \end{cases}$$

Primeiro, supomos $k = 0$, temos que a solução geral da EDO $\hat{\phi}_{\zeta\zeta}(0, \zeta) = 0$ é dada por:

$$\hat{\phi}(0, \zeta) = a\zeta + b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

e as condições de fronteira são as seguintes:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(0, 0) = \hat{\Phi}(0), \\ \hat{\phi}_{\zeta}(0, -D) = 0. \end{cases}$$

Assim, $b = \hat{\Phi}(0)$ e,

$$\hat{\phi}_{\zeta}(0, -D) = a = 0,$$

o que nos garante que neste caso a solução é dada por: $\hat{\phi}(0, \zeta) = \hat{\Phi}(0)$.

Agora, supomos $k \neq 0$. A solução geral da EDO $-k^2\hat{\phi}(k, \zeta) + \hat{\phi}_{\zeta\zeta} = 0$ é dada por:

$$\hat{\phi}(k, \zeta) = A(k)e^{k\zeta} + B(k)e^{-k\zeta}, \quad (\text{A.3})$$

e as condições de fronteira são as seguintes:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(k, 0) = \hat{\Phi}(k), \\ \hat{\phi}_{\zeta}(k, -D) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(k) + B(k) = \hat{\Phi}(k), \\ A(k)e^{-kD} - B(k)e^{kD} = 0. \end{cases}$$

Veja que, com as relações anteriores, obtemos o seguinte:

$$B(k) = \frac{A(k)e^{-kD}}{e^{kD}} \quad \text{e,} \quad A(k) = \hat{\Phi}(k) - B(k).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
B(k) &= \frac{(\hat{\Phi}(0) - B(k))e^{-kD}}{e^{kD}}, \\
\Rightarrow 2B(k) \left(\frac{e^{kD} + e^{-kD}}{2e^{kD}} \right) &= \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{e^{kD}}, \\
\Rightarrow B(k) &= \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{2 \cosh(kD)}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
A(k) &= \hat{\Phi}(k) - B(k), \\
\Rightarrow A(k) &= \hat{\Phi}(k) - \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{2 \cosh(kD)}, \\
\Rightarrow A(k) &= \hat{\Phi}(k) \left(1 - \frac{e^{-kD}}{2 \cosh(kD)} \right). \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Aplicando ambas as equações (A.4) e (A.5) na solução geral (A.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(k, \zeta) &= A(k)e^{k\zeta} + B(k)e^{k\zeta}, \\
&= \hat{\Phi}(k) \left(1 - \frac{e^{-kD}}{2 \cosh(kD)} \right) e^{k\zeta} + \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD} e^{-k\zeta}}{2 \cosh(kD)}, \\
&= \left(\frac{e^{kD} e^{k\zeta} + e^{-kD} e^{-k\zeta}}{2} \right) \frac{\hat{\Phi}(k)}{\cosh(kD)}, \\
&= \hat{\Phi}(k) \frac{\cosh(k(D + \zeta))}{\cosh(kD)}.
\end{aligned}$$

Unindo ambos os casos $k = 0$ e $k \neq 0$, temos que a componente ϕ no sistema de coordenadas canônico pode ser expressa por:

$$\tilde{\phi}(\xi, \zeta) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cosh(k(D + \zeta))}{\cosh(kD)} \hat{\Phi}(k) \right].$$

Componente ψ

Para a componente ψ , utilizamos também a transformada de Fourier $\mathcal{F}[\cdot]$ no sistema (A.2) em relação à variável ξ , assim obtendo:

$$\begin{cases} -k^2 \hat{\psi}(k, \zeta) + \hat{\psi}_{\zeta\zeta}(k, \zeta) = 0 \text{ em, } -D < \zeta < 0, \\ \hat{\psi}(k, 0) = \hat{\Psi}(k), \\ \hat{\psi}(k, -D) = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ A, & k = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Note que o caso $k \neq 0$ é análogo ao realizado na componente Y na seção 1.2, logo a solução para este caso é dada por:

$$\hat{\psi}(k, \zeta) = \frac{\sinh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \hat{\Psi}(k).$$

Para o caso $k = 0$, obtemos o seguinte:

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{\zeta\zeta}(0, \zeta) = 0 \text{ em, } -D < \zeta < 0, \\ \hat{\psi}(0, 0) = \hat{\Psi}(0), \\ \hat{\psi}(0, -D) = A. \end{cases}$$

A solução geral da EDO $\hat{\psi}_{\zeta\zeta}(0, \zeta) = 0$ é dada por:

$$\psi(0, \zeta) = a\zeta + b,$$

e suas condições de fronteira implicam:

$$\hat{\psi}(0, 0) = b = \hat{\Psi}(0),$$

$$\hat{\psi}(0, -D) = -Da + \hat{\Psi}(0) = A \Rightarrow a = \frac{-A + \hat{\Psi}(0)}{D}.$$

Logo,

$$\hat{\psi}(0, \zeta) = \frac{-A + \hat{\Psi}(0)}{D} \zeta + \hat{\Psi}(0).$$

E, portanto, obtemos uma formulação para a componente ψ no sistema de coordenadas canônico

$$\tilde{\psi}(\xi, \zeta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(D + \zeta))}{\sinh(kD)} \hat{\Psi}(k) \right] - \frac{A + \hat{\Psi}(0)}{D} \zeta + \hat{\Psi}(0). \quad (\text{A.6})$$

No caso de ondas periódicas, a constante A pode ser fixada fazendo:

$$0 = \phi(\lambda/2, -1) - \phi(-\lambda/2, -1) = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \phi_X(X, -1) dX = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \psi_Y(X, -1) dX \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, observamos a formulação para ψ no referencial canônico:

$$\tilde{\psi}(\xi, \zeta) = \psi(\tilde{X}(\xi, \zeta), \tilde{Y}(\xi, \zeta)).$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\zeta} &= \psi_X \tilde{X}_{\zeta} + \psi_Y \tilde{Y}_{\zeta}, \\ &= -\psi_X \tilde{Y}_{\xi} + \psi_Y \tilde{X}_{\xi}, \end{aligned}$$

aplicando em $\zeta = -D$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\zeta}(\xi, -D) &= -\psi_X(\tilde{X}(\xi - D), -1) \tilde{Y}_{\xi}(\xi, -D) + \psi_Y(\tilde{X}(\xi - D), -1) \tilde{X}_{\xi}(\xi, -D), \\ &= \psi_Y(\tilde{X}(\xi - D), -1) \tilde{X}_{\xi}(\xi, -D). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Logo,

$$\psi_Y(\tilde{X}(\xi - D), -1) = \frac{\tilde{\psi}_{\zeta}(\xi, -D)}{\tilde{X}_{\xi}(\xi, -D)}.$$

Por fim, fazendo a mudança de variáveis $X = \tilde{X}(\xi, -D)$ na equação (A.7) obtemos:

$$0 = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \psi_Y(X, -1) dX = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{\tilde{\psi}_{\zeta}(\xi, -D)}{\tilde{X}_{\xi}(\xi, -D)} \tilde{X}_{\xi}(\xi, -D) d\xi = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \psi_{\zeta}(\xi, -D) d\xi,$$

isto é, $\langle \psi(\xi, -D) \rangle = 0$. Aplicando na equação (A.6), obtemos que $A = \langle \Psi \rangle$.

Apêndice B

Inversão dos Sistemas

Este apêndice é dedicado a mostrar detalhadamente como é feita a inversão dos sistemas de equações (1.22) e (1.28), que se referem à mudança para o referencial físico do campo de velocidades e à mudança para o referencial canônico das trajetórias das partículas, respectivamente.

Campo de velocidades

Queremos solucionar o sistema:

$$\begin{cases} \phi_\xi(\xi, \zeta) = \phi_X \tilde{X}_\xi + \phi_Y \tilde{Y}_\xi, \\ \phi_\zeta(\xi, \zeta) = -\phi_X \tilde{Y}_\xi + \phi_Y \tilde{X}_\xi, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

nas variáveis ϕ_X e ϕ_Y . Para tal, primeiro escrevemos o sistema em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \phi_X \\ \phi_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & \tilde{Y}_\xi \\ -\tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\zeta \end{bmatrix}.$$

Assim, basta invertemos a matriz de coeficientes da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & \tilde{Y}_\xi \\ -\tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\tilde{X}_\xi^2 + \tilde{Y}_\xi^2} \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & -\tilde{Y}_\xi \\ \tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & -\tilde{Y}_\xi \\ \tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix}.$$

Desta forma, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\zeta \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & -\tilde{Y}_\xi \\ \tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_X \\ \phi_Y \end{bmatrix}.$$

Ou ainda, escrevendo como um sistema de equações:

$$\begin{cases} \phi_X(X, Y) = \frac{1}{J}(\tilde{X}_\xi \tilde{\phi}_\xi + \tilde{Y}_\xi \tilde{\psi}_\xi), \\ \phi_Y(X, Y) = \frac{1}{J}(-\tilde{X}_\xi \tilde{\psi}_\xi + \tilde{Y}_\xi \tilde{\phi}_\xi). \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Trajetória de partículas

Buscamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \tilde{X}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \tilde{X}_\zeta \frac{d\zeta}{dt}, \\ \frac{dY}{dt} = \tilde{Y}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \tilde{Y}_\zeta \frac{d\zeta}{dt}, \end{cases}$$

nas variáveis $d\xi/dt$ e $d\zeta/dt$. Em primeiro lugar, escrevemos na sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & \tilde{X}_\zeta \\ \tilde{Y}_\xi & \tilde{Y}_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt} \end{bmatrix}.$$

Utilizando a regra da cadeia na matriz de coeficientes, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & \tilde{X}_\zeta \\ \tilde{Y}_\xi & \tilde{Y}_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & -\tilde{Y}_\xi \\ \tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix}$$

Assim, podemos inverter essa matriz da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & -\tilde{Y}_\xi \\ \tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix} = \frac{1}{\tilde{X}_\xi^2 + \tilde{Y}_\xi^2} \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & \tilde{Y}_\xi \\ -\tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & \tilde{Y}_\xi \\ -\tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt} \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \tilde{X}_\xi & \tilde{Y}_\xi \\ -\tilde{Y}_\xi & \tilde{X}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{bmatrix},$$

ou ainda, escrevendo em forma de sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{J} \left(\tilde{X}_\xi \frac{dX}{dt} + \tilde{Y}_\xi \frac{dY}{dt} \right), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{J} \left(-\tilde{Y}_\xi \frac{dX}{dt} + \tilde{X}_\xi \frac{dY}{dt} \right). \end{cases}$$

Apêndice C

Velocidade da onda linear c_γ

Neste apêndice, buscamos apresentar a resolução da fórmula fechada para a velocidade da onda linear para ondas periódicas no contexto de um escoamento com vorticidade constante e sob efeito de um campo elétrico horizontal (c_γ).

Para tal, note que

$$\phi_0(X, Y) = 0, \quad V_0(X, Y) = X, \quad \eta_0(X) = 0$$

é uma solução trivial para as equações governantes (3.1)-(3.8). Assim, consideramos uma perturbação da solução trivial dada por:

$$\phi(X, Y) = \varepsilon \hat{\phi}, \quad V(X, Y) = X + \varepsilon \hat{V}, \quad \eta(X) = \varepsilon \hat{\eta},$$

onde ε é um parâmetro próximo de zero que mensura a amplitude da onda linear. Dada a conjugação harmônica de ϕ e ψ , é natural impormos que $\psi(X, Y) = \varepsilon \hat{\psi}$ onde $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$ também são conjugados harmônicos. Tomamos $\hat{\eta}(X) = \Re\{Ae^{irX}\}$, com A uma constante ainda não conhecida.

Resolvemos as equações de Laplace (3.1)-(3.2) com condição de fronteira (3.4) e (3.6) e obtemos:

$$\begin{cases} \hat{\eta}(X) = \Re\{Ae^{ikX}\}, \\ \hat{\phi}(X, Y) = \Re\{Me^{ikX} \cosh k(Y+1)\}, \\ \hat{\psi}(X, Y) = \Re\{iMe^{ikX} \sinh k(Y+1)\}, \\ \hat{V}(X, Y) = \Re\{Ne^{ikX} \cosh k(Y+1)\}, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

onde M e N são constantes desconhecidas e $k = 2\pi/L$ é o número da onda. Para os leitores interessados, uma resolução similar pode ser vista em [43]. Linearizamos a condição (3.3) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -c\eta_X + (\phi_X - \gamma(\eta+1))\eta_X &= \phi_Y, & \text{em } Y = \eta(X), \\ \Rightarrow -c\varepsilon\hat{\eta}_X + (\varepsilon\hat{\phi}_X - \gamma(\varepsilon\hat{\eta}+1))\varepsilon\hat{\eta}_X &= \varepsilon\hat{\phi}_Y, & \text{em } Y = \varepsilon\hat{\eta}(X), \\ \Leftrightarrow -c\varepsilon\hat{\eta}_X + \varepsilon^2\hat{\eta}_X(\hat{\phi}_X - \gamma\hat{\eta}) - \gamma\varepsilon\hat{\eta}_X &= \varepsilon\hat{\phi}_Y, & \text{em } Y = \varepsilon\hat{\eta}(X), \\ &\Leftrightarrow -(c+\gamma)\hat{\eta}_X = \hat{\phi}_Y, & \text{em } Y = \varepsilon\hat{\eta}(X). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

e, para a condição (3.9), fazemos a seguinte linearização na superfície $Y = \varepsilon\hat{\eta}(X)$:

$$\begin{aligned}
& -c\phi_X + \frac{1}{2}(\phi_X^2 + \phi_Y^2) - \gamma(\eta + 1)\phi_X + \gamma\psi - \frac{E_b}{2}|\nabla V|^2 = B, \\
\Rightarrow & -c\varepsilon\hat{\phi}_X + \frac{1}{2}(\varepsilon^2\hat{\phi}_X^2 + \varepsilon^2\hat{\phi}_Y^2) - \gamma(\varepsilon\hat{\eta} + 1)\varepsilon\hat{\phi}_X + \gamma\varepsilon\hat{\psi} - \frac{E_b}{2}((\varepsilon\hat{V}_Y)^2 + (1 + \varepsilon\hat{V}_X)^2) = 0, \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)\hat{\phi}_X + \gamma\hat{\psi} - \frac{E_b}{2}(1 + 2\varepsilon\hat{V}_X) = 0 \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)\hat{\phi}_X + \gamma\hat{\psi} - E_b\hat{V}_X = 0. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Além disso, da condição (3.5) obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \quad \text{em } Y = \eta(X), \\
& \Leftrightarrow \nabla V \cdot (-\eta_X, 1) = 0, \quad \text{em } Y = \eta(X), \\
& \Leftrightarrow -V_X\eta_X + V_Y = 0 \quad \text{em } Y = \eta(X), \\
\Rightarrow & -(X + \varepsilon\hat{V})_X \cdot \varepsilon\hat{\eta}_X + (\varepsilon\hat{V})_Y = 0, \quad \text{em } Y = \varepsilon\eta(\hat{X}), \\
& \Leftrightarrow -\varepsilon\hat{\eta}_X - \varepsilon^2\hat{V}_X\hat{\eta}_X = -\varepsilon\hat{V}_Y, \quad \text{em } Y = \varepsilon\eta(\hat{X}), \\
& \Leftrightarrow -\varepsilon\hat{\eta}_X = -\varepsilon\hat{V}_Y, \quad \text{em } Y = \varepsilon\eta(\hat{X}), \\
& \hat{\eta}_X = \hat{V}_Y, \quad \text{em } Y = \varepsilon\eta(X). \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Para encontrar a constante M , utilizamos as formulações dadas no sistema (C.1) na equação (C.2) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& -(c + \gamma)\hat{\eta}_X = \hat{\phi}_Y, \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)\Re\{ikAe^{ikX}\} = \Re\{kMe^{ikX} \sinh(k)\}, \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)iA = M \sinh(k), \\
& \Leftrightarrow M = \frac{-iA(c + \gamma)}{\sinh(k)}.
\end{aligned}$$

Analogamente, para resolver a constante N , substituímos as formulações dadas pelo sistema (C.1) na equação (C.4). Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \hat{V}_Y = \hat{\eta}_X, \\
& \Leftrightarrow \Re\{kNe^{ikX} \sinh(k)\} = \Re\{ikAe^{ikX}\} \\
& \Leftrightarrow N \sinh(k) = iA \\
& \Leftrightarrow N = \frac{iA}{\sinh(k)}
\end{aligned}$$

Assim, temos o que é preciso para resolver a fórmula para a velocidade linear da onda c . Para tal, substituímos as equações do sistema (C.1) na equação (C.3):

$$\begin{aligned}
& -(c + \gamma)\hat{\phi}_X + \gamma\hat{\psi} - E_b\hat{V}_X = 0, \\
\Leftrightarrow & -(c + \gamma)\Re\{ikBe^{ikX} \cosh k(Y + 1)\} + \gamma \Re\{iMe^{ikX} \sinh k(Y + 1)\} - E_b\Re\{ikNe^{ikX} \cosh k(Y + 1)\} = 0, \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)\Re\left\{ik \left[\frac{-iA(c + \gamma)}{\sinh(k)} \right] e^{ikX} \cosh k(Y + 1)\right\} + \gamma \Re\left\{i \left[\frac{-iA(c + \gamma)}{\sinh(k)} \right] e^{ikX} \sinh k(Y + 1)\right\} - \\
& \quad E_b\Re\left\{ikN \left[\frac{iA}{\sinh(k)} \right] e^{ikX} \cosh k(Y + 1)\right\} = 0, \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)^2 k A \coth(k) + \gamma A(c + \gamma) + k A E_b \coth(k) = 0, \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)^2 k \coth(k) + \gamma(c + \gamma) + k E_b \coth(k) = 0, \\
& \Leftrightarrow -(c + \gamma)^2 k + \gamma(c + \gamma) \tanh(k) + k E_b = 0.
\end{aligned}$$

Note que, se tomarmos $c_{\dagger} = c + \gamma$, obtemos uma equação do segundo grau:

$$k c_{\dagger}^2 - \gamma \tanh(k) c_{\dagger} - k E_b = 0,$$

cuja solução é dada por:

$$c_{\dagger} = \frac{\gamma \tanh(k) \pm \sqrt{\gamma^2 \tanh^2(k) + 4k^2 E_b}}{2k}.$$

Voltando para c , finalmente obtemos a formulação desejada para a velocidade linear da onda (c_{γ}):

$$c_{\gamma} = c = -\gamma + \frac{\gamma \tanh(k) \pm \sqrt{\gamma^2 \tanh^2(k) + 4k^2 E_b}}{2k}.$$

Apêndice D

Experimentos Numéricos para Regimes de Profundidade distintos

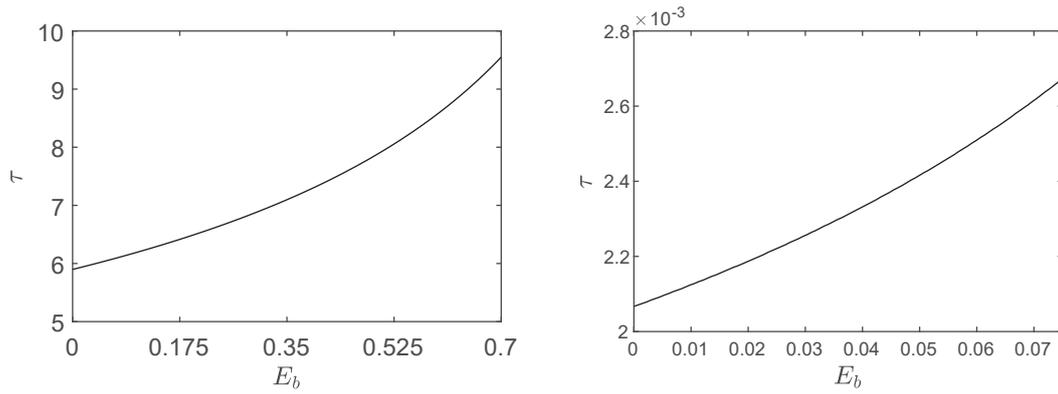
Neste apêndice, buscamos apresentar os experimentos numéricos realizados para ondas periódicas cujo escoamento está sob o efeito de um campo elétrico normal em dois regimes de profundidade distintos: Águas rasas e águas profundas. Numericamente, a escolha do regime está associada ao comprimento da onda λ . Para ondas no regime de águas intermediárias, apresentado no Capítulo 2, utilizamos $\lambda = 2\pi$. Aqui, consideramos $\lambda_R = 10\pi$ e $\lambda_P = 0.5$ para ondas no regime de águas rasas e águas profundas, respectivamente.

O método numérico utilizado foi o mesmo para o caso apresentado no corpo do texto. Nossos experimentos numéricos obtiveram resultados análogos ao caso de ondas em regime de águas intermediárias. O tempo de *drift* (τ) em função da intensidade do campo elétrico (E_b) é crescente e os gráficos podem ser observados na Figura D.1. Nesta figura, à esquerda temos o experimento para o regime de águas rasas e a direita, águas profundas. Vale notar para ondas no regime de águas rasas, o tempo de *drift* é maior, em relação ao outro regime.

Investigamos também a variação dos parâmetros geométricos (d_1, d_2, d_3) e os resultados estão dispostos na Tabela D.1. Assim, verificamos que a ordem do erro relativo $E_r(d_i)$, $i = 1, 2, 3$, é pequena, o que indica que as trajetórias mantêm seu formato. Para ambos os regimes de águas rasas e profundas, tomamos os mesmos 100 valores de E_b utilizados para o experimento no caso ondas no regime de águas intermediárias e introduzimos a ordem do seu erro relativo na tabela como comparação.

Por fim, investigamos a variação da energia cinética total das partículas em função da intensidade do campo elétrico. Nossos resultados estão expostos na Figura D.3. Nesta figura, vemos que a energia cinética total das partículas no referencial de laboratório $\mathcal{E}(X_0, Y_0)$ é convexa e não-decrescente, enquanto no referencial móvel $E(X_0, Y_0)$ é constante igual à $c\lambda/2$. Além disso, em ambos os regimes e referenciais, a energia cinética total das partículas é menor para campos elétricos mais fortes.

Figura D.1: Tempo de *drift* em função de E_b . Esquerda: Regime de águas rasas. Direita: Regime de águas profundas.



Fonte: Autoria Própria.

Tabela D.1: Ordem do erro relativo em três regimes de profundidade distintos.

| | $E_r(d_1)$ | $E_r(d_2)$ | $E_r(d_3)$ |
|----------------------|------------|------------|------------|
| Águas rasas | 10^{-6} | 10^{-10} | 10^{-8} |
| Águas intermediárias | 10^{-10} | 10^{-6} | 10^{-6} |
| Águas profundas | 10^{-6} | 10^{-10} | 10^{-10} |

Fonte: Autoria Própria.

Figura D.2: Energia Cinética total das partículas em função da profundidade inicial (Y_0) para diferentes valores de E_b . Acima: Regime de águas rasas. Abaixo: Regime de águas profundas. Esquerda: Referencial de laboratório. Direita: Referencial móvel

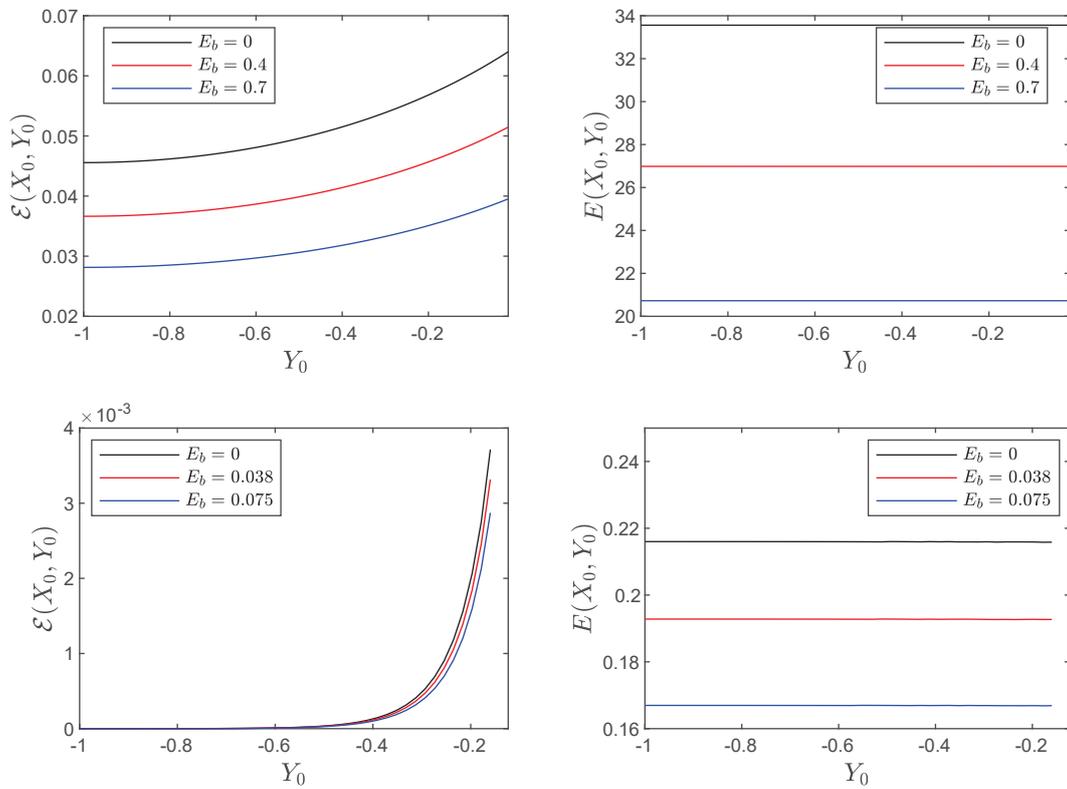


Figura D.3: Fonte: Autoria Própria.