UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRUNO PILATTI OLEIRO

O PROBLEMA DO AUTOVALOR PARA OPERADORES ELÍPTICOS

CURITIBA
2022

BRUNO PILATTI OLEIRO

O PROBLEMA DO AUTOVALOR PARA OPERADORES ELÍPTICOS

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, Curso de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA
2022

TERMO DE APROVAÇÃO

BRUNO PILATTI OLEIRO

O PROBLEMA DO AUTOVALOR PARA OPERADORES ELÍPTICOS

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, Curso de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, para a seguinte banca examinadora.

Prof. Dr. Jurandir Ceccon
Orientador - Departamento de Matemática - UFPR

Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo
Departamento de Matemática - UFPR

Curitiba, 23 de setembro de 2022.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por todo o apoio, compreensão, suporte e incentivo fornecido.
Ao professor Jurandir Ceccon pela orientação, confiança, paciência e todo o suporte que me ofereceu na iniciação científica e desenvolvimento deste trabalho.
Aos meus amigos, por todos os momentos de descontração que me proporcionaram durante o curso.

Dedico este trabalho à todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para o meu aprendizado durante o curso.

RESUMO

Nosso objetivo nessa monografia é demonstrar a existência de um conjunto enumerável de funções em H_0^1 que solucionam o problema do autovalor para operadores elípticos, e além disso, mostrar que esse conjunto define uma base ortonormal enumerável do espaço de Lebesgue L^2, todos os autovalores são números reais positivos e o autovalor principal é simples, onde esse último resultado será obtido pelo Princípio Variacional para o autovalor principal. Tendo como ponto de partida o Espaço de Sobolev sobre um aberto U de $\mathbb{R}^n$, mostraremos que as funções nesse espaço podem sem aproximadas, inclusive na fronteira, por funções suaves, estendidas para além do domínio U, e entre outras propriedades do Espaço de Sobolev, mostraremos também o Teorema da Compacidade de Rellich-Kondrachov, no qual mostra que espaços de Sobolev estão imersos em outros espaços de funções. O uso dessas propriedades, juntamente com resultados de Análise Funcional, permitirão mostrar sob quais hipóteses as equações elípticas de segunda ordem admitem soluções fracas, bem como a regularidade dessas soluções. Por fim, adicionando os Princípios do Máximo obteremos os resultados necessários para demonstrar o problema proposto.

Palavras-chave: problema do autovalor; operadores elípticos; equações diferenciais parciais elípticas; Espaço de Sobolev.

ABSTRACT

Our objective in this undergraduate thesis is to proof the existence of an enumerable set of functions in $H_0^1(U)$ that solve the eigenvalue problem for elliptical operators, and furthermore, show that this set provide a countable orthonormal basis of the Lebesgue space L^2, all eigenvalues are positive real numbers and the principal eigenvalue is simple, where this last asserion will be obtained by the Variational Principle for the principal eigenvalue. Taking the Sobolev space as a atarting point over an open U of $\mathbb{R}^n$, we will show that the functions in this space can be approximated, including at the boundary, by smooth functions, extended beyond the U, and among other properties of the Sobolev space, we will also show the Rellich-Kondrachov Compactness Theorem, which shows that Sobolev spaces are embedded in other functions spaces. The use of these properties, together with Functional Analysis, will show under which hypotheses the second-order elliptic equations admit weak solutions, as well as the regularity of these solutions Finally, adding the Maximal Principles we will obtain the necessary results to proof the proposed problem.

Keywords: eigenvalue problem; elliptical operators; elliptic partial differential equations; Sobolev space.

LISTA DE SÍMBOLOS

U_ε - $\{x \in U\,;\, dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$

$supp(f)$ - Fecho do conjunto $\{x \in D(f); f(x) \neq 0\}$;

u^+ e u^- - ver página 76;

$V \subset\subset U$ - V compactamente contido em U, isso é, $V \subset \bar{V} \subset U$ com $\bar{V}$ compacto;

$C^k(U)$ - Conjunto das funções diferenciáveis em U com k-ésima derivada contínua;

$C^\infty(U)$ - Conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em U;

$C_c^k(U)$ - Conjunto das funções $f \in C^k(U)$ com suporte compacto em U;

$C_c^\infty(U)$ - Conjunto das funções $f \in C^\infty(U)$ com suporte compacto em U;

$L^p_{\text{loc}}(U)$ - Conjunto das funções f tais que $f \in L^p(\omega)$ para todo aberto $\omega \subset\subset U$;

$H^m(U)$ - $W^{m,2}(U)$;

$H_0^m(U)$ - $W_0^{m,2}(U)$;

$H^{-1}(U)$ - Espaço dual de $H_0^1(U)$;

Du - $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$;

$|Du|$ - $\left(\sum_{i=1}^n \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$;

$(\ ,\ )$ - Produto interno em $H(U)$

$\langle f, u\rangle$ - pareamento entre $H^{-1}(U)$ e $H_0^1(U)$, onde $f \in H^{-1}(U)$ e $u \in H_0^1(U)$.

Sumário

1 Introdução **10**

2 Espaços de Sobolev **12**

2.1 Aproximação por funções suaves 14

2.2 Estendendo o domínio 20

2.3 Teorema do Traço e funções Traço-zero 27

2.4 As Desigualdades de Sobolev e Compacidade de Rellich-Kondrachov 33

3 Equações Elípticas **43**

3.1 Existência de Soluções Fracas 46

3.1.1 Estimativas de Energia 48

3.1.2 Alternativa de Fredholm 51

3.2 A Regularidade das soluções fracas no interior e na fronteira 57

3.3 Princípio do Máximo 74

3.3.1 Desigualdade de Harnack 80

4 O problema do autovalor **84**

5 Conclusão **91**

Referências **92**

Anexo A - Convolução e sequências regularizantes **93**

Anexo B - Análise e Análise Funcional **96**

Anexo C - Outras Propriedades **98**

1 Introdução

As equações diferenciais podem ter aplicações das mais variadas possíveis, como por exemplo na Segunda Lei de Newton, que no caso unidimensional para objetos de massa constante é escrita matematicamente por $F = ma$, onde F denota a força resultante sobre o objeto, m é a massa do objeto e a é a aceleração desse objeto. A Segunda Lei é uma equação diferencial pois, sendo r a posição do objeto em função do tempo, temos que $a(t) = \dfrac{d^2r}{dt^2}(t)$, obtendo então a equação diferencial $m\dfrac{d^2r}{dt^2}(t) = F(t)$. A equação do calor unidimensional, dada por $u_t = au_{xx}$ para $a > 0$, é uma equação diferencial que modela a difusão do calor em uma barra cilíndrica de raio suficientemente pequeno, desde que essa barra respeite determinadas condições.

Levando-se em conta que as equações diferenciais podem ser aplicadas para modelar problemas pertinentes à outras áreas do conhecimento, nota-se então a necessidade de saber responder a seguinte pergunta: sob quais hipóteses uma equação diferencial possui, ou não, solução, e caso haja solução, quais são as suas propriedades? A fim de responder essa pergunta, as equações diferenciais foram separadas em diversas classes, e nesta monografia nos ateremos às equações classificadas como equações diferenciais parciais elípticas, para então resolver um problema específico: o problema do autovalor para operadores elípticos.

A teoria que será utilizada nessa monografia terá como base o espaço de Sobolev, sendo o espaço de Sobolev um subespaço fechado do espaço de Lebesgue com uma norma apropriada, o espaço de Lebesgue será um pré-requisito para a teoria a seguir. Os espaços de Lebesgue L^p para $1 \leq p \leq \infty$, que são construídos via teoria da medida, são espaços de classes de funções que são completos sobre as *normas* L^p, isso é, toda sequência de Cauchy em L^p converge em L^p; portanto, os espaços de Lebesgue e de Sobolev são espaços de Banach. Da Desigualdade de Hölder temos que o espaço L^2 é também um espaço com produto interno cuja norma induzida é a norma L^2. Logo, L^2 é um espaço de Hilbert, sendo essa uma propriedade de grande utilidade para a teoria a seguir.

Em relação à organização dos assuntos tratados nessa monografia, no segundo capítulo, intitulado Espaços de Sobolev, encontram-se algumas propriedades sobre esses espaços. Dentre as propriedades destacam-se: os teoremas do aproximação, que fazem uso das sequências regularizantes para mostrar que toda função no espaço de Sobolev pode ser aproximada por funções suaves, inclusive por funções suaves definidas na fronteira do domínio; o teorema da extensão, que garante que o domínio das funções pode ser expandido; os teoremas do traço, que mostram a existência do operador $T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ que satisfaz "$u \in W_0^{1,p}(U)$ se, e somente se, $Tu = 0$ em ∂U"; e por fim, o Teorema de Rellich-Kondrachov, no qual é obtida a

imersão compacta dos espaços de Sobolev em Espaços de Lebesgue.

Já o capítulo 3 é destinado para o estudo das equações elípticas. Estando definidas a versão fraca e a solução fraca de um problema elíptico, verifica-se inicialmente a existência de soluções fracas para operadores elípticos com funções coeficientes em L^∞. Após, impondo condições de diferenciabilidade sobre as coeficientes verifica-se a regularidade das soluções fracas, tanto no interior do domínio quanto em sua fronteira. Por fim, verifica-se também os Princípios do Máximo e a desigualdade de Harnack, que ditam sobre o máximo (ou mínimo) de uma função por meio do operador elíptico.

O capítulo 4 é destinado exclusivamente para o problema do autovalor, no qual será mostrado que, em um operador elíptico, os autovalores são números reais positivos, a sequência formada por autovalores, respeitando a sua multiplicidade, é não decrescente, onde o primeiro autovalor tem multiplicidade 1 e é obtido pelo Princípio Variacional, existe base ortonormal formada por autofunções em L^2 associadas aos autovalores, e as funções que solucionam o problema do autovalor para o primeiro autovalor são múltiplas de uma função não negativa que também o solucionam. Por fim, os três anexos dispõem de resultados que fogem do idealizado nesse trabalho sendo, no entanto, necessário em alguns pontos para o seu desenvolvimento.

2 Espaços de Sobolev

O ponto de partida nesta monografia é o Espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ – onde U é aberto – que é o conjunto das funções u no *Espaço de Lebesgue* $L^p(U)$ que possuem todas as suas derivadas fracas de ordem no máximo k em $L^p(U)$. Por sua vez, dado um multi-índice α, uma função $v \in L^p(U)$ é uma α-*ésima* derivada fraca de $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$, e é denotada por $v = D^\alpha u$, se para todas as funções teste $\varphi \in C_c^\infty(U)$ tivermos

$$\int_U u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\varphi \, dx.$$

Nesse caso, $|\alpha|$ é a ordem da derivada.

Vale lembrar que dizer que uma função u pertence ao espaço $W^{k,p}(U)$ é um abuso de linguagem. Na realidade, os elementos que constituem $W^{k,p}(U)$ (e mais geralmente, $L^p(U)$) são classes de equivalência, na qual duas funções u e v pertencem à uma mesma classe se u e v são idênticas no sentido *quase todo ponto* (q.t.p.), ou seja, que o conjunto dos $x \in U$ tais que $u(x) \neq v(x)$ tem medida nula. A título de exemplo, a função identicamente nula e a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

são idênticas q.t.p., pois elas diferem apenas no conjunto $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, que por ser enumerável tem medida nula. Logo, elas pertencem à uma mesma classe de equivalência. Por simplicidade, os elementos de $W^{k,p}(U)$ serão tratados como funções, isso é, a notação $u \in W^{k,p}(U)$ (ou $u \in L^p(U)$) indica que u é uma função representante de sua classe de equivalência.

As derivadas fracas no Espaço de Sobolev possuem algumas propriedades que serão úteis no decorrer do trabalho. No teorema abaixo estão algumas delas, que serão aceitas sem demonstração.

Teorema 2.0.1 (Propriedades das derivadas fracas)**.** *Sejam $u, v \in W^{k,p}(U)$ e um multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Então,*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos multi-índices α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$;

(ii) Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha u$;

(iii) Se $V \subset U$ onde V é aberto, então $u \in W^{k,p}(V)$; e

(iv) Se $\zeta \in C_c^\infty(U)$ então $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ e

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u \quad \textit{(Fórmula de Leibniz)}.$$

.

Exemplo 1. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x| + c$, onde $c \in \mathbb{R}$, não possui derivada pois não é derivável em $x = 0$. No entanto, a função

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x < 0; \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

é a derivada fraca de f. De fato, dada $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f\varphi' dx &= \int_{-1}^{0} f\varphi' dx + \int_{0}^{1} f\varphi' dx \\ &= \int_{-1}^{0} (-x + c)\varphi' dx + \int_{0}^{1} (x + c)\varphi' dx \\ &= \left[(-x + c)\varphi|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1)\varphi dx\right] + \left[(x + c)\varphi|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 1 \cdot \varphi dx\right] \\ &= [c\varphi(0) - 0] + [0 - c\varphi(0)] - \left[\int_{-1}^{0} (-1)\varphi dx + \int_{0}^{1} 1 \cdot \varphi dx\right] \\ &= -\int_{-1}^{1} v\varphi dx. \end{aligned}$$

O cálculo acima evidencia que se $f \in C^k(a, b)$, então a derivada fraca de f é a sua derivada (no sentido usual). O mesmo vale para funções em $C^k(U)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$.

No exemplo acima poderia-se ter usado no lugar da função f a função $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} |x| + c & \text{se } x \in (-1, 1) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}; \\ 0 & \text{se } x \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

pois v é também derivada fraca de g. Isso se dá pois f e g são idênticas no sentido q.t.p..

Exemplo 2. Considere a função $h : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ onde $h(x) = -1$ para $x \in (-1, 0)$ e $h(x) = x$ para $x \in [0, 1)$. Esta função não admite derivada fraca, pois se admitisse derivada fraca v, para toda $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$, teríamos

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} v\varphi dx &= \int_{-1}^{1} h\varphi' dx \\ &= \int_{-1}^{0} h\varphi' dx + \int_{0}^{1} h\varphi' dx \\ &= -\int_{-1}^{0} \varphi' dx + \int_{0}^{1} x\varphi' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -(\varphi(0)-\varphi(-1)) + x\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx \\ &= -\varphi(0) - \int_0^1 \varphi dx, \end{aligned}$$

e tomando uma sequência de funções suaves $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ em $C_c^{\infty}(-1,1)$ que satisfaz

$$0 \leq \varphi_m(x) \leq 1, \quad \varphi_m(0) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi_m(x) \to 0 \text{ para todo } x \neq 0,$$

obtém-se ao substituir φ por φ_m que

$$1 = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(0) = \lim_{m\to\infty} \left(\int_{-1}^1 v\varphi_m dx - \int_0^1 \varphi_m dx \right) = 0,$$

uma contradição.

Os exemplos acima mostram que a não continuidade de uma função não é condição suficiente para que ela não tenha derivada fraca, uma vez que ambas as funções g e h são descontínuas, mas g possui derivada fraca, enquanto que h não possui.

O espaço $W^{k,p}(U)$ é também munido da norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$ que é dada por:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)} & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

e que conforme visto acima, essa norma depende da norma em $L^p(U)$, que é dada por $\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u|^p d\mu\right)^{1/p}$ para $1 \leq p < \infty$, e $\|u\|_{L^\infty(U)}$ é o ínfimo das cotas superiores essenciais de u, onde $M \in \mathbb{R}$ é uma cota superior essencial de u se $|f(x)| \leq M$ q.t.p. $x \in U$. Com essa norma, desde que $L^p(U)$ é um *Espaço de Banach* e $W^{k,p}(U)$ é um subconjunto fechado de $L^p(U)$, segue que o espaço $W^{k,p}(U)$ é também um espaço de Banach, isso é, toda sequência de Cauchy $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $W^{k,p}(U)$ converge para alguma função u em $W^{k,p}(U)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$. Além disso, essa sequência de Cauchy em $W^{k,p}(U)$ possui uma subsequência $\{u_{k,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge q.t.p. para u, isso é, as sequências numéricas $\{u_{k_j}(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergem para o número $u(x)$ para quase todo ponto x de U.

2.1 Aproximação por funções suaves

Uma função u que pertença a $W^{k,p}(U)$ não necessariamente possui boas propriedades, como por exemplo a diferenciabilidade no sentido usual. No entanto, os resultados a seguir mostram que é possível aproximar a função u por uma sequência de funções suaves. No primeiro resultado será mostrado a existência de uma aproximação

à u em subconjuntos compactos de U, isso é, uma aproximação local. Mas antes é necessário definir alguns objetos.
Definição: Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varepsilon > 0$, define-se o conjunto U_ε por

$$U_\varepsilon = \{x \in U; dist(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Ou seja, U_ε é formado pelos elementos U que distam mais do que ε da fronteira de U.

Considere a função $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} C \cdot \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se} |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante $C > 0$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$. Defina agora as funções ρ_m por

$$\rho_m(x) = m^n \rho(mx),$$

e note que $\rho_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_m \, dx = 1$ e $supp(\rho_m) \subset B(0, 1/m)$.
Definição: Dada $f \in W^{k,p}(U)$, defina as *funções regularizantes* por

$$f_m = \rho_m * f,$$

onde $\rho_m * f$ é a convolução dada por

$$\rho_m * f = \int_U \rho_m(x - y) f(y) \, dy = \int_{B(0,1/m)} \rho_m(y) f(x - y) \, dy.$$

Algumas propriedades úteis das funções regularizantes podem ser encontradas no Anexo A.

Teorema 2.1.1 (Aproximação local por funções suaves)**.** *Seja* $u \in W^{k,p}(U)$ *com* $1 \leq p < \infty$ *e defina*

$$u_n = \rho_n * u \ \text{ em } \ U_{1/n}.$$

Então,

(i) $u_n \in C^\infty(U_{1/n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$; e

(ii) $u_n \to u$ em $W^{k,p}_{\text{loc}}(U)$ quando $n \to \infty$.

Demonstração:

(i) segue do Teorema 1 do Anexo A;

(ii) Mostremos que para $|\alpha| \leq k$

$$D^\alpha u_n = \rho_n * D^\alpha u \text{ em } U_{1/n}, \tag{1}$$

isso é, que a α-ésima derivada parcial de u_n é a convolução da função ρ_n com a α-ésima derivada fraca da função u. De fato, para $x \in U_{1/n}$,

$$\begin{aligned} D^\alpha u_n(x) &= D^\alpha \int_U \rho_n(x-y)u(y)dy \\ &= \int_U D_x^\alpha \rho_n(x-y) \cdot u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D_y^\alpha \rho_n(x-y) \cdot u(y)dy, \end{aligned}$$

e desde que $\rho_n(x-y) \in C_c^\infty(U)$ para x fixado, temos pela derivada fraca de u que

$$\int_U D_y^\alpha \rho_n(x-y) \cdot u(y)dy = (-1)^{|\alpha|} \int_U \rho_n(x-y) \cdot D_y^\alpha u(y)dy,$$

ou seja,

$$D^\alpha u_n(x) = (-1)^{2|\alpha|} \int_U \rho_n(x-y) \cdot D^\alpha u(y)dy = (\rho_n * D^\alpha u)(x),$$

o que prova (1).

Seja $V \subset\subset U$ um aberto. Por (1) e pelo Teorema 1 do Anexo A, temos que $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ em $L^p(V)$ para cada $|\alpha| \leq k$, pois

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n = \lim_{n\to\infty} \rho_n * D^\alpha u = D^\alpha u \text{ em } L^p(V).$$

Então,

$$\|u_n - u\|_{W^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{L^p(V)}^p \to 0$$

quando $n \to \infty$. c.q.d.

Agora que foi obtido uma aproximação suave à uma função u em $W^{k,p}(U)$ de maneira localizada, pode-se usar esse resultado para obter uma aproximação suave à u em todo o domínio U, isso é, uma aproximação global.

Teorema 2.1.2 (Aproximação global por funções suaves)**.** *Seja U um conjunto limitado e suponha que $u \in W^{k,p}(U)$ com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ tal que*

$$u_m \to u \text{ em } W^{k,p}(U).$$

Demonstração: Note que $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{1/i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in U; dist(x, \partial U) > 1/i\}$. Defina

$$V_i = U_{\frac{1}{i+3}} - \bar{U}_{\frac{1}{i+1}}.$$

Escolha $V_0 \subset\subset U$ tal que $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$. Seja $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos abertos $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, isso é,

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, & \zeta_i \in C_c^{\infty}(V_i) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1 & \text{em } U. \end{cases} \tag{2}$$

Seja $u \in W^{k,p}(U)$. Pelo Teorema 2.0.1, item (iv), temos que $\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$ e $supp(\zeta_i u) \subset \subset V_i$. Fixe $\delta > 0$. Escolha $n_i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $u_i := \rho_{n_i} * (\zeta_i u)$ satisfaça

$$\begin{cases} \|u_i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \dfrac{\delta}{2^{i+1}}, & i = 0, 1, ... \\ supp(u_i) \subset W_i, & i = 1, ... \end{cases} \tag{3}$$

com $W_i := U_{\frac{1}{i+4}} - \bar{U}_{\frac{1}{i}} \supset V_i$ para $i = 1, ...$ (note que a primeira condição segue do teorema anterior).
Defina $v := \sum_{i=0}^{\infty} u_i$. Então, $v \in C^{\infty}(U)$, pois $u_i \in C_c^{\infty}(V_i)$ (note que para cada $x \in U$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin W_n$ se $n \geq N$, ou seja, pontualmente, v é a soma finita de funções C^{∞}) e para cada aberto $V \subset\subset U$ existe apenas um número finito de termos não nulos na soma. Desde que, por (2), $u = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u$, temos que para cada $V \subset\subset U$,

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{W^{k,p}(V)} &\leq \|v - u\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq \left\| \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u \right) \right\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (u_i - \zeta_i u) \right\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u_i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\overset{(3)}{\leq} \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &\leq \delta. \end{aligned}$$

Desde que vale para todo $V \subset\subset U$, tomando o supremo sobre os conjuntos $V \subset\subset U$, concluímos que $\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta$. c.q.d.

Obs.: Note que a sequência u_m dada no enunciado é $u_m = \sum_{i=0}^{m} u_i$.

Vale notar que no teorema anterior foi obtido uma aproximação suave à u em todo o domínio U, mas no entanto, não foi possível saber se as funções u_m podem ser definidas na fronteira. Agora, se forem impostas condições sobre a fronteira de U, as

funções u_m poderão ser definidas na fronteira, isso é, $u_m \in C^\infty(\bar{U})$.
Definição: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $k \in \mathbb{N}$. A fronteira ∂U é dita de classe C^k se para cada ponto $x_0 \in \partial U$ existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que, fazendo uma mudança de variáveis se necessário, temos

$$U \cap B[x_0, r] = \{x \in B[x_0, r]; x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}.$$

∂U é de classe C^∞ se é de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$ e é analítica se γ é analítica.

Teorema 2.1.3 (Aproximação Global por Funções Suaves sobre a Fronteira)**.** *Seja U limitado com fronteira de classe C^1. Suponha que $u \in W^{k,p}(U)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então, existem funções $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ tais que*

$$u_m \to u \ \textit{em}\ W^{k,p}(U).$$

Demonstração: Fixe $x_0 \in \partial U$. Como ∂U é de classe C^1, existe um raio $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que, fazendo uma mudança de variáveis se necessário, temos

$$U \cap B[x_0, r] = \{x \in B[x_0, r]; x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}.$$

Definamos $V = U \cap B[x_0, r/2]$ e as translações

$$t_m(x) = x + \frac{\lambda}{m} e_n, \ (x \in V),$$

e note que para $\lambda > 0$ suficientemente grande fixado, a bola $B(t_m(x), 1/m)$ está contida em $U \cap B[x_0, r]$ para todos $x \in V$ e $m \in \mathbb{N}$ com m suficientemente grande. Defina $u_m(x) = u(t_m(x))$ para $x \in V$ e defina $u_{m,j} = \rho_j * t_m(u)$ e note que $u_{m,j} \in C^\infty(\bar{V})$ (pois o conjunto $\bar{V} + \frac{\lambda}{m} e_n \subset U$ e pelo Teorema 2.0.1 $u \in W^{k,p}(\omega)$ para todo $\omega \subset U$. Logo, pelo Teorema 1 do Anexo A, $u_{m,j} \in C^\infty(\bar{V})$.

Conforme a demonstração do Teorema 2.1.1, temos que $D^\alpha u_{m,j} = \rho_j * D^\alpha u_m$. Pelo Teorema 1 do Anexo A tem-se que, para cada m fixado, a sequência $\{D^\alpha u_{m,j}\}_{j=1}^\infty$ converge para $D^\alpha u_m$ para todo $|\alpha| \leq k$. Defina então a sequência $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ por

$$v_m = u_{m,l} \ \text{ com } \ ||D^\alpha u_{m,l} - D^\alpha u_m||_{L^p(\bar{V})} < \frac{1}{(k+1)m} \ \ \forall |\alpha| \leq k \text{ para algum } l \in \mathbb{N} \text{ fixo.}$$

Provemos que

$$v_m \to u \ \text{ em } W^{k,p}(V).$$

Seja $|\alpha| \leq k$. Então, pela Desigualdade de Minkowski,

$$\|D^\alpha v_m - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v_m - D^\alpha u_m\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \overset{*}{<} \frac{\varepsilon}{k+1}, \qquad (4)$$

onde a desigualdade $\overset{*}{<}$ será mostrada verdadeira. Temos pela definição de $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ que $\|D^\alpha v_m - D^\alpha u_m\|_{L^p(V)}$ pode ser majorado. Mostremos que $\|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{L^p(V)}$ pode ser majorado. Seja $\varepsilon > 0$. Afirmamos, sem demonstrar, que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $F \subset V$, existe $\delta > 0$ tal que, se $m(V-F) < \delta$ então $\int_{V-F} |D^\alpha u_m - D^\alpha u|^p d\mu < (\varepsilon/2)^p$. Por outro lado, pelo Teorema de Lusin, para todo $\delta > 0$, existe $F \subset V$ fechado tal que $D^\alpha u$ é contínua em F e $m(V-F) < \delta$. Segue pela Propriedade 1 em Funções Contínuas do Anexo C que $D^\alpha u_m$ converge uniformemente para $D^\alpha u$ em F. Seja então $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|D^\alpha u_m - D^\alpha u| < \dfrac{\varepsilon}{2m(F)^{(1/p)}}$ em F para todo $m \geq m_0$. Então,

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{L^p(V)} &\leq \|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{L^p(V-F)} + \|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{L^p(F)} \\
&= \left(\int_{V-F} |D^\alpha u_m - D^\alpha u|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_F |D^\alpha u_m - D^\alpha u|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_F \frac{\varepsilon^p}{2^p m(F)} d\mu\right)^{1/p} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto a desigualdade (4) é verdadeira. Logo,

$$\|v_m - u\|_{W^{k,p}(V)} = \sum_{j=0}^{k} \|D^\alpha v_m - D^\alpha u\|_{L^p(V)} < \varepsilon.$$

Seja $\delta > 0$. Como ∂U é compacta, podemos encontrar um número finito de pontos $x_0^i \in \partial U$ e de raios $r_i > 0$, obtendo então um número finito de conjuntos $V_i = = U \cap B(x_0^i, r_i/2)$ e de funções $v_i \in C^\infty(\bar{V_i})$, $i = 1, ..., N$ tais que $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_0^i, r_i/2)$ e

$$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta. \qquad (5)$$

Sejam $V_0 \subset\subset U$ tal que $U \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$ e, usando o Teorema 2.1.1, uma função $v_0 \in C^\infty(\bar{V_0})$ satisfazendo

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta. \qquad (6)$$

Seja $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade em $\bar{U}$ subordinada aos conjuntos abertos $\{V_0, B(x_0^1, r_1/2), ..., B(x_0^N, r_N/2)\}$. Defina $v := \sum_{i=0}^N \zeta_i v_i$ (note que $v \in C^\infty(\bar{U})$ por ser pontualmente uma soma finita de funções C^∞). Desde que $u = \sum_{i=0}^N \zeta_i u$, temos pelo

Teorema 2.0.1 e por (5) e (6) que, para todo $\alpha \leq k$,

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(U)} &= \left\| D^\alpha \left(\sum_{i=0}^{N} \zeta_i v_i \right) - D^\alpha \left(\sum_{i=0}^{N} \zeta_i u \right) \right\|_{L^p(U)} \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i v_i) - \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i u) \right\|_{L^p(U)} \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{N} [D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)] \right\|_{L^p(U)} \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{N} D^\alpha [\zeta_i (v_i - u)] \right\|_{L^p(U)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha [\zeta_i (v_i - u)]\|_{L^p(U)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha [\zeta_i (v_i - u)]\|_{L^p(V_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta_i D^{\alpha-\beta} (v_i - u) \right\|_{L^p(V_i)} \\
&\leq C_1 \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{\beta \leq \alpha} \|D^{\alpha-\beta}(v_i - u)\|_{L^p(V_i)} \right) \\
&\leq C_1 \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \\
&\leq (N+1) C_1 \delta,
\end{aligned}$$

logo, $\|v - u\|_{W^{k,p}(a,b)} \leq (N+1)C\delta$. c.q.d.

Obs.: A sequência $\{u_m\}$ do enunciado pode ser definida pelas funções $u_m = v$ da demonstração tal que $\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} < 1/m$.

2.2 Estendendo o domínio

Será feito agora a extensão de uma função em $W^{1,p}(U)$ para uma função em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Se o domínio U de uma função $u \in W^{k,p}(U)$ for estendido para $\mathbb{R}^n$ anulando-a em $\mathbb{R}^n - U$, pode-se gerar descontinuidades na fronteira de forma que a função estendida não tenha derivada fraca.

Exemplo 3. Note que para a função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x$, ao tomar F como sendo a extensão de f para todo o conjunto $\mathbb{R}$ anulando F fora do intervalo $(0,1)$, isso é fazendo $F(x) = f(x) = x$ se $x \in (0,1)$ e $F(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}\backslash(0,1)$, então F não possuirá derivada fraca em $\mathbb{R}$. De fato, se existisse derivada fraca v de F, então para

toda $\varphi \in C_c^\infty(-1,2)$, tem-se

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{2} v\varphi dx &= \int_{-1}^{2} F\varphi' dx \\ &= \int_{0}^{1} x\varphi' dx \\ &= x\varphi|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi dx, \end{aligned}$$

e repetindo o argumento utilizado no Exemplo 2 com a modificação $\varphi_m(1) = 1$, obtém-se a contradição pretendida.

No teorema à seguir será mostrado que é possível fazer a extensão do domínio sem gerar descontinuidades na fronteira.

Teorema 2.2.1 (Teorema da Extensão)**.** *Considere o conjunto limitado U com fronteira ∂U de classe C^1. Seja V um conjunto aberto limitado tal que $U \subset\subset V$. Então, existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que para toda $u \in W^{1,p}(U)$:

(i) $Eu = u$ q.t.p. *em U;*

(ii) Eu *tem suporte em V; e*

(iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$*, onde a constante C depende apenas de p, U e V.*

Definição: Eu é chamada de *extensão de u em $\mathbb{R}^n$*.
Demonstração: Fixe $x_0 \in \partial U$ e suponha que

$$\partial U \text{ é plana proximo de } x_0, \text{ pertencente ao plano } \{x_n = 0\}.$$

Então existe uma bola aberta B de centro x_0 e raio r tal que

$$\begin{cases} B^+ = B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U} \\ B^- = B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U. \end{cases}$$

Seja $u \in C^\infty(\bar{U})$. Defina a função $\bar{u}$ por

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in B^+ \\ -3u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n/2) & \text{se } x \in B^-. \end{cases}$$

Provemos que $\bar{u} \in C^1(B)$. Claramente, $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x)$ existe se $x = (x_1, ..., x_n) \in B$ com $x_n \neq 0$ pois temos $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)$. Mostremos que existe a derivada em $x = = (x_1, ..., x_n) \in B$ com $x_n = 0$. Verifiquemos que os limites laterais coincidem (note que basta verificar a derivada parcial em relação à variável x_n):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, 0^-) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\bar{u}(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x) - \bar{u}(x_1, ..., x_{n-1}, 0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\bar{u}(x_1, ..., x_{n-1}, -\Delta x) - \bar{u}(x_1, ..., x_{n-1}, 0)}{-\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-3u(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x) + 4u(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x/2) - u(x)}{\Delta x} \\
&= -\left(\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-3u(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x) + 3u(x)}{\Delta x} + \frac{4u(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x/2) - 4u(x)}{\Delta x} \right) \\
&= 3 \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{u(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - 4 \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{u(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x/2) - u(x)}{\Delta x} \\
&= 3\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, 0^+) - 2 \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{u(x_1, ..., x_{n-1}, \Delta x/2) - u(x)}{\Delta x/2} \\
&= 3\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, 0^+) - 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, 0^+) \\
&= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, 0^+),
\end{aligned}$$

como gostaríamos.

Mostremos que existe C constante (que independe de u) tal que

$$\|\bar{u_1}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}. \tag{7}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} &= \|\bar{u}\|_{L^p(B)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B)} \\
&\leq \|\bar{u}\|_{L^p(B^-)} + \|\bar{u}\|_{L^p(B^+)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B^-)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B^+)} \\
&= \|\bar{u}\|_{L^p(B^+)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B^+)} + \|\bar{u}\|_{L^p(B^-)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B^-)} \\
&= \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B^+)} + \|\bar{u}\|_{L^p(B^-)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B^-)},
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}\|_{L^p(B^-)} &= \| -3u(x_1,...,x_{n-1},-x_n) + 4u(x_1,...,x_{n-1},-x_n/2)\|_{L^p(B^-)} \\
&\leq 3\|u(x_1,...,x_{n-1},-x_n)\|_{L^p(B^-)} + 4\|u(x_1,...,x_{n-1},-x_n/2)\|_{L^p(B^-)} \\
&= 3\|u\|_{L^p(B^+)} + 4\|u(x_1,...,x_{n-1},x_n/2)\|_{L^p(B^+)} \\
&\leq 3\|u\|_{L^p(B^+)} + 4\|u(x_1,...,x_{n-1},x_n)\|_{L^p(B^+)} \\
&\leq 7\|u\|_{L^p(B^+)},
\end{aligned}$$

e a norma das derivadas parciais

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}\right\|_{L^p(B^-)} &= \left\|-3\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{n-1},-x_n) + 4\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{n-1},-x_n/2)\right\|_{L^p(B^-)} \\
&\leq 3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{n-1},-x_n)\right\|_{L^p(B^-)} + 4\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{n-1},-x_n/2)\right\|_{L^p(B^-)} \\
&= 3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(B^+)} + 4\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{n-1},x_n/2)\right\|_{L^p(B^+)} \\
&\leq 3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(B^+)} + 4\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(B^+)} \\
&\leq 7\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(B^+)},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_n}\right\|_{L^p(B^-)} &= \left\|3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,...,x_{n-1},-x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,...,x_{n-1},-x_n/2)\right\|_{L^p(B_1^-)} \\
&\leq 3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,...,x_{n-1},-x_n)\right\|_{L^p(B^-)} + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,...,x_{n-1},-x_n/2)\right\|_{L^p(B^-)} \\
&= 3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{L^p(B^+)} + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,...,x_{n-1},x_n/2)\right\|_{L^p(B^+)} \\
&\leq 3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{L^p(B^+)} + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{L^p(B^+)} \\
&\leq 5\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{L^p(B^+)} \\
&\leq 7\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{L^p(B^+)},
\end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned}\|\bar{u_1}\|_{W^{1,p}(B_1)} &\leq \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B^+)} + \|\bar{u}\|_{L^p(B^-)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B^-)} \\ &\leq \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B^+)} + 7\|\bar{u}\|_{L^p(B^+)} + 7\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(B^+)} \\ &= 8\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}.\end{aligned}$$

Se ∂U não for plana próximo de x_0, podemos encontrar um mapeamento Φ de classe C^1 com inversa Ψ tal que a fronteira $\partial\Phi(U)$ seja plana próxima de $\Phi(x_O)$. Escrevendo $y = \Phi(x)$, $x = \Psi(y)$ e $u'(y) = u(\Psi(y))$, podemos tomar uma bola B tal que, procedendo de maneira aos passos anteriores, estenderemos u', que está definida em B^+, para uma função $\bar{u}'$ definida em toda a bola B no qual $\bar{u}'$ é de classe C^1 com estimativas

$$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Tomando $W = \Psi(B)$, obtemos uma extensão $\bar{u}$ de u em W com

$$\|u\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Como ∂U é compacto, existe uma quantidade finita de pontos $x_0^1, ..., x_0^N \in \partial U$, de conjuntos abertos W_i e de extensões $\bar{u_i}$ de u em W_i tais que $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^{N} W_i$. Defina o conjunto $W_0 \subset\subset U$ tal que $U \subset \bigcup_{i=0}^{N} W_i$. Defina a função $\bar{u}$ por

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^{N} \zeta_i \bar{u}_i$$

onde $\bar{u}_0 = u$ e $\{\zeta_i\}$ é uma partição da unidade subordinada aos conjuntos W_i. Então por (7) temos

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{8}$$

para algum C que não depende de u. Mais ainda, podemos tomar r_i suficientemente pequeno tal que o suporte de $\bar{u}$ esteja contido em V (lembre que $U \subset\subset V$).

Defina $Eu := \bar{u}$ e note que Eu é linear.

Sejam $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(U)$, e seja $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\bar{U})$ uma sequência que converge para u em $W^{1,p}(U)$ (essa sequência existe pelo Teorema 2.1.3). Pela desigualdade (8) e pela linearidade de E, temos

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|E(u_m - u_l)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Então, $\{Eu_m\}_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que converge para a função $\bar{u} := Eu$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $u \in W^{1,\infty}(U)$. Desde que U tem medida finita, temos que $u \in W^{1,p}(U)$ para todo $1 \leq p < \infty$, e então existe uma sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\bar{U})$ que converge para u em $W^{1,p}(U)$. Então,

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Desde que $u_m \in L^{\infty}(U)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, segue pela Propriedade 3 em Espaço L^p do Anexo C que

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,\infty}(U)},$$

ou seja, $\{Eu_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge para a função $\bar{u} := Eu$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}, \{v_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\bar{U})$ sequências que convergem para u em $W^{1,p}(U)$ e $\bar{u} = \lim_{m\to\infty} Eu_m$ e $\bar{v} = \lim_{m\to\infty} Ev_m$. Seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\bar{u} - Eu_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|\bar{v} - Ev_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para todos $m, j \geq k_1$. Seja $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - u_m\|_{W^{1,p}(U)}, \|u - v_j\|_{W^{1,p}(U)} \leq \varepsilon/6C$ e $m, j \geq k_2$. Então,

$$\|u_m - v_j\|_{W^{1,p}(U)} = \|(u_m - u) - (v_j - u)\|_{W^{1,p}(U)} \leq$$

$$\leq \|(u_m - u)\|_{W^{1,p}(U)} + \|(v_j - u)\|_{W^{1,p}(U)} < \varepsilon/3C.$$

Então para $k = \max\{k_1, k_2\}$, e $m, j \geq k$, segue pelas desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned}
\|\bar{u} - \bar{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|(\bar{u} - Eu_m) - (\bar{v} - Ev_j) + (Eu_m - Ev_j)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|\bar{u} - Eu_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\bar{v} - Ev_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Eu_m - Ev_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + C\|u_m - v_j\|_{W^{1,p}(U)} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, $\bar{u} = \bar{v}$ q.t.p., isso é, o limite $\lim_{m\to\infty} Eu_m$ independe da sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$. c.q.d.

Exemplo 4. Os passos da demonstração anterior serão agora usados para fazer a extensão da função $f(x) = x$ do exemplo anterior de forma que a extensão tenha suporte no intervalo $(-3/2, 5/2)$. Primeiramente, pelos resultados de aproximação pode-se tomar f definida no intervalo $[0, 1]$ onde $f(x) = x$. Logo, o conjunto U é o intervalo $(0, 1)$, donde $\bar{U} = [0, 1]$. Para $x_0^1 = 1$, os conjuntos B^+ e B^- podem ser tomados pelos intervalos

$$\begin{cases} B^+ = (3/5, 1] \\ B^- = (1, 7/5), \end{cases}$$

e a função $\bar{f}_1$ será

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (3/5, 1] \\ -3f(1-(x-1)) + 4f(1-(x-1)/2) & \text{se } x \in (1, 7/5) \end{cases}$$

isso é, $\bar{f}_1(x) = x$ para $x \in W_1 = (3/5, 7/5)$. Para $x_0^2 = 0$, mostra-se analogamente que $\bar{f}_2(x) = x$ para $x \in W_2 = (-2/5, 2/5)$. Para $W_0 = (1/5, 4/5)$, defina $f_0(x) = x$ em W_0 e a extensão Ef de f por

$$Ef = \sum_{i=0}^{2} \zeta_i \bar{f}_i,$$

onde $\{\zeta_i\}_{i=0}^2$ é uma partição da unidade tal que

$$\begin{cases} \zeta_i \in C_c^\infty(W_i) \\ \sum_{i=0}^2 \zeta_i = 1 \text{ em } U = (0,1). \end{cases}$$

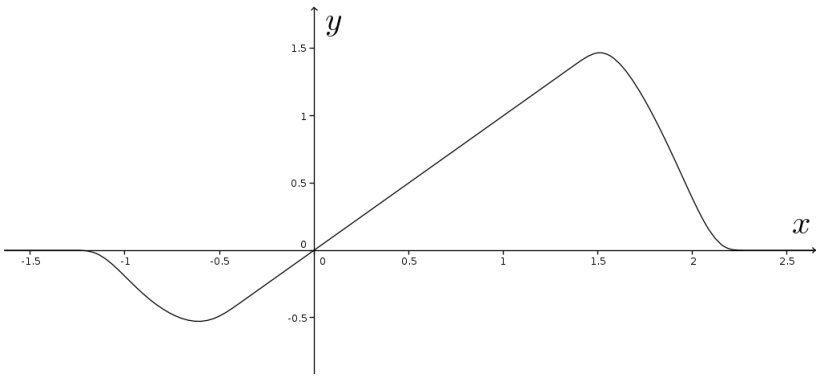

Figura 1: Extensão da função f com suporte no intervalo $(-3/2, 5/2)$.
Fonte: O autor.

Mostremos como definir as funções ζ_i acima. Tomando a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

considerando os números $a_1 = -27/20$, $a_2 = -3/10$, $a_3 = 1/4$, $a_4 = 3/10$, $a_5 = 7/20$ $a_6 = 13/20$, $a_7 = 7/10$, $a_8 = 3/4$, $a_9 = 13/10$ e $a_{10} = 47/20$, e tomando as funções $g_0, g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g_0(x) = \frac{g(x-a_3)}{g(x-a_3)+g(a_4-x)} \cdot \frac{g(a_8-x)}{g(a_8-x)+g(x-a_7)},$$

$$g_1(x) = \frac{g(x-a_6)}{g(x-a_6)+g(a_7-x)} \cdot \frac{g(a_{10}-x)}{g(a_{10}-x)+g(x-a_9)},$$

$$g_2(x) = \frac{g(x-a_1)}{g(x-a_1)+g(a_2-x)} \cdot \frac{g(a_5-x)}{g(a_5-x)+g(x-a_4)},$$

defina $\zeta_0 = g_0$, $\zeta_1 = (1-g_0)g_1$ e $\zeta_2 = (1-g_0)(1-g_1)g_2$. As funções ζ_i assim definidas satisfazem as propriedades requeridas.

2.3 Teorema do Traço e funções Traço-zero

Em vista dos resultados de aproximação, sendo que o último diz que uma função em $W^{k,p}(U)$ pode ser aproximada por funções em $C^\infty(\bar{U})$, torna-se possível descobrir quais propriedades u possui na fronteira. O primeiro teorema a ser mostrado, o Teorema do Traço, mostra a existência de um operador linear limitado de $W^{1,p}(U)$ em $L^p(\partial U)$.

Teorema 2.3.1 (Teorema do traço)**.** *Seja U um conjunto aberto e limitado com fronteira de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

tal que

(i) $Tu = u|_{\partial U}$ *se* $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$*; e*

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ *para cada* $u \in W^{1,p}(a,b)$*, e* C *uma constante dependendo somente de* p *e* U*.*

Definição: Tu é dito *traço* de u em ∂U.

Demonstração: Seja $u \in C^1(\bar{U})$. Analogamente à prova do teorema anterior, seja $x_0 \in \partial U$ e suponha que ∂U é plana próxima de x_0, pertencente ao plano $\{x_n = 0\}$. Seja B a bola escolhida no teorema anterior e seja $\hat{B}$ a bola concêntrica de raio $r/2$.

Considere $\zeta \in C_c^\infty(U)$ com $\zeta \geq 0$ em B e $\zeta = 1$ em $\hat{B}$. Denote por Γ o conjunto $\partial U \cap \hat{B}$. Seja $x' = (x_1.,,,.x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$. Definindo o campo vetorial $F(x_1,...,x_n) = (0,...,0,\zeta|u|^p)$, temos que

$$div(F) = \frac{\partial\, 0}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial\, 0}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial \zeta|u|^p}{\partial x_n} = \frac{\partial \zeta|u|^p}{\partial x_n} = (\zeta|u|^p)_{x_n}.$$

Então, pelo Teorema do Divergente, temos que

$$\begin{aligned}\int_{B^+}(\zeta|u|^p)_{x_n}dx &= \int_{B^+} div(F)dx \\ &= \int_{\partial B^+} F\cdot\vec{\eta}dS \\ &= \int_{\partial B^+}(0,...,0,\zeta|u|^p)\cdot\vec{\eta}dS \\ &= -\int_{\{x_n=0\}}\zeta|u|^p dx',\end{aligned}$$

pois desde que para $(x_1,...,x_n)\in\partial B^+$ com $x_n\neq 0$ a função ζ é nula, temos que $(0,...,0,\zeta|u|^p)\cdot\vec{\eta}=0$, e por outro lado, para $(x_1,...,x_n)\in\partial B^+$ com $x_n=0$ temos que $\vec{\eta}=(0,...,0,-1)$ pois ∂B^+ é a união entre a porção da casca esférica de centro x_0 e raio r com última coordenada não negativa e a circunferência no hiperplano $\{x_n=0\}$ com centro x_0 e raio r. Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |u|^p dx' &\leq \int_{\{x_n=0\}}\zeta|u|^p dx' \\ &= -\int_{B^+}(\zeta|u|^p)_{x_n}dx \\ &= -\int_{B^+}|u|^p\zeta_{x_n}+p|u|^{p-1}sgn(u)u_{x_n}\zeta dx \\ &\leq C_1\int_{B^+}|u|^p+|u|^{p-1}sgn(u)u_{x_n}dx \\ &\leq C_1\int_{B^+}|u|^p+|u|^{p-1}|u_{x_n}|dx \\ \overset{\text{Des. Young}}{\leq} & C_1\int_{B^+}|u|^p+(p-1)\frac{|u|^p}{p}+\frac{|u_{x_n}|^p}{p}dx \\ &\leq C\int_{B^+}|u|^p+|Du|^p dx\end{aligned}$$

Se $x_0\in\partial U$ mas ∂U não é plana próximo a x_0, podemos fazer uma substituição de variáveis de forma que a fronteira $\partial\Phi(U)$ seja plana próxima de $\Phi(x_0)$, e usando a estimativa acima e retornando as variáveis encontramos

$$\int_\Gamma |u|^p dS\leq C\int_U |u|^p+|Du|^p dx,$$

onde Γ é um subconjunto aberto de ∂U que contém x_0.

Como ∂U é compacto, existe uma quantidade finita de pontos $x_0^i\in\partial U$ e de subconjuntos abertos $\Gamma_i\subset\partial U$, $i=1,...,N$, tais que $\partial U=\bigcup_{i=1}^N\Gamma_i$ e

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},\quad i=1,...,N.$$

Defina $Tu := u|_{\partial U}$. Então,

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{9}$$

para alguma constante C que não depende de u.

Seja $u \in W^{1,p}(U)$. Então existe uma sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\bar{U})$ que converge para u em $W^{1,p}(U)$. Então, pela desigualdade (9) temos

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)},$$

ou seja, $\{Tu_m\}_{m=1}^{\infty}$ é sequência de Cauchy, e portanto converge para $Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m$. Note que, analogamente ao feito no teorema anterior, Tu independe da sequência tomada.

Seja $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$. A sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\bar{U})$ construídas na demonstração do Teorema 2.1.3 convergem uniformemente para u em $\bar{U}$. Portanto, $Tu = u|_{\partial U}$. c.q.d.

Exemplo 5. Considere $U = (0,1)$ e $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = 0$ se $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = x^2 - 3x + 3$ se $x \in (0,1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Note que $f = x^2 - 3x + 3$ q.t.p. no intervalo $(0,1)$. Logo, a sequência $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ onde $f_m(x) = x^2 - 3x + 3$ para todo $x \in [0,1]$ é uma aproximação suave para a função f. Então, como $Tf = \lim_{m\to\infty} Tf_m$ e $Tf_m(0) = 3$ e $Tf_m(1) = 1$, tem-se que o traço da função f é a função $Tf : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ onde $Tf(0) = 3$ e $Tf(1) = 1$. Aqui é interessante notar que a lei de formação da função f induz a pensar que o traço da f será uma função $g : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ onde $g(0) = g(1) = 0$. No entanto, não é isso que ocorre, pois f não é contínua e se anula, próximo dos extremos, apenas em um conjunto de medida finita.

Exemplo 6. A função $f : (-1,2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x-1|$ pertence ao conjunto $W^{1,p}(-1,2) \cap C([-1,2])$. Logo, o traço de f é a função $Tf : \{-1,2\} \to \mathbb{R}$ onde $Tf(2) = 1$ e $Tf(-1) = 2$.

Estando o funcional T bem definido, pode-se então estudar as funções que estão no espaço $W_0^{1,p}(U)$, onde $W_0^{1,p}(U)$ denota o fecho de $C_c^{\infty}(U)$ em $W^{1,p}(U)$.

Teorema 2.3.2 (Funções Traço-zero em $W^{1,p}$)**.** *Sejam U limitado com ∂U de classe C^1 e $u \in W^{1,p}(U)$. Então*

$$u \in W_0^{1,p}(U) \ \textit{ se, e somente se, } \ Tu = 0 \ \textit{ em } \ \partial U.$$

Demonstração: Seja $u \in W_0^{1,p}(U)$. Então, por definição, existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}(U)$ tal que

$$u_m \to u \ \text{ em } \ W^{1,p}(U).$$

Então, $Tu_m = 0$ em ∂U para todo m, e portanto, $Tu = 0$ em ∂U.

Reciprocamente, seja $u \in W^{1,p}(U)$ e suponha que

$$Tu = 0 \text{ em } \partial U.$$

Procedendo da forma como já havíamos feito, isso é, usando as partições da unidade e supondo que ∂U é plana, podemos assumir que

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+),\ u \text{ com suporte compacto em } \bar{\mathbb{R}}^n_+, \\ Tu = 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Então, pelo teorema anterior, existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ que converge para u em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, e desde que $Tu = 0$ temos $Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Tomando $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geq 0$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)|dt.$$

Então, para q sendo o conjugado de p,

$$\begin{aligned} |u_m(x', x_n)|^p &\leq C\left(|u_m(x', 0)|^p + \left(\int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)|dt\right)^p\right) \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\left(|u_m(x', 0)|^p + \left(x_n^{1/q}\left(\int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)|^p dt\right)^{1/p}\right)^p\right) \\ &\leq C\left(|u_m(x', 0)|^p + x_n^{p/q}\int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)|^p dt\right) \\ &\leq C\left(|u_m(x', 0)|^p + x_n^{p-1}\int_0^{x_n} |Du_m(x', t)|^p dt\right) \end{aligned}$$

e integrando ambos os membros,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{x_n} |Du_m(x', t)|^p dt dx'\right) \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p dx' dt\right), \end{aligned}$$

e como $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ e $Tu_m \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq C x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x', t)|^p dx' dt \tag{10}$$

para quase todo $x_n > 0$.

Seja $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leq \zeta \leq 1$ e

$$\zeta(x) = \begin{cases} \zeta(x) = 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \zeta(x) = 0 & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Escreva

$$\begin{cases} \zeta_m(x) := \zeta(mx_n), \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \\ w_m(x) := u(x)(1 - \zeta_m(x)), \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} w_{m,x_n}(x) = u_{x_n}(x)(1 - \zeta_m(x)) - mu(x)\zeta'(mx_n), \\ D_{x'}w_m(x) = D_{x'}u(x)(1 - \zeta_m(x)). \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} |Dw_m(x) - Du(x)| &= \left(\sum_{i=1}^{n-1}(u_{x_i}(x)\zeta_m(x))^2 + (u_{x_n}(x)\zeta_m(x) + mu(x)\zeta'(mx_n))^2\right)^{1/2} \\ &\leq C_1\left(\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}(x)\zeta_m(x))^2 + m^2u^2(x)(\zeta'(mx_n))^2\right)^{1/2} \\ &\leq C_2(|\zeta_m||Du| + m|u||\zeta'(mx_n)|) \\ &\Rightarrow \\ |Dw_m(x) - Du(x)|^p &\leq C(|\zeta_m|^p|Du|^p + m^p|u|^p) \end{aligned}$$

e então, integrando ambos os membros da desigualdade,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m(x) - Du(x)|^p dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p|Du|^p dx + \\ &\quad m^pC\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p|Du|^p dx + \\ &\quad m^pC\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx'dt \\ &=: A_m + B_m. \end{aligned}$$

Mostremos que $A_m \to 0$ quando $m \to \infty$. De fato, note que ζ_m tem suporte no conjunto $C_m = \mathbb{R}^{n-1} \times [-2/m, 2/m]$. Então,

$$|\zeta_m(x)|^p|Du(x)|^p| \overset{m\to\infty}{\to} 0 \text{ q.t.p..}$$

Desde que $|\zeta_m(x)| \leq 1$ para todo x, temos que $\zeta_m(x)|^p|Du(x)|^p| \leq |Du(x)|^p$ em U.

Segue então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$A_m = C \int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m(x)|^p |Du(x)|^p dx \overset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Para majorar B_m nós utilizaremos a desigualdade (10), obtendo

$$\begin{aligned} B_m &\leq m^p C \int_0^{2/m} t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x',t)|^p dx' dt dt \\ &\leq m^p C \int_0^{2/m} t^{p-1} \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x',t)|^p dx' dt dt \\ &\leq m^p C \left(\int_0^{2/m} t^{p-1} dt \right) \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x',t)|^p dx' dt \\ &\leq m^p C \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x',t)|^p dx' dt \ \to \ 0 \ \text{ quando } m \to \infty. \end{aligned}$$

Logo, $Dw_m(x) \to Du(x)$ em $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Repetindo o argumento do caso A_m mostra-se que $w_m(x) \to u(x)$ em $L^p(a,b)$, uma vez que $|w_m(x) - u(x)| = |u(x)\zeta_m(x)|$. Portanto

$$w_m(x) \to u(x) \ \text{ em } \ W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Note que $w_m = 0$ em C_{2m}. Defina a sequência $\{w_{m,j}\}_{m,j=1}^{\infty}$ por

$$w_{m,j} = \rho_j * w_m.$$

Temos então que $w_{m,j} \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ para todos m e j. Desde que w_m tem suporte no conjunto $supp(u) \cap (\mathbb{R}^n_+ - C_{2m})$, segue que

$$supp(w_{m,j}) \subset \overline{B[0,1/j] + supp(u) \cap (\mathbb{R}^n_+ - C_{2m})} := C_{m,j}.$$

Conforme a demonstração do Teorema 2.1.1, temos que $D^\alpha w_{m,j} = \rho_j * D^\alpha w_m$. Pelas propriedades de convergência da convolução tem-se que, para cada m fixado, as sequências $\{w_{m,j}\}_{j=1}^{\infty}$ e $\{D^\alpha w_{m,j}\}_{j=1}^{\infty}$ convergem respectivamente para w_m e $D^\alpha w_m$ em $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Defina então a sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ por

$$u_m = w_{m,k} \ \text{ com } \begin{cases} ||w_{m,k} - w_m||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} < \dfrac{1}{m(n+1)} \\ ||D^\alpha w_{m,k} - D^\alpha w_m||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} < \dfrac{1}{m(n+1)} \\ C_{m,k} \subset \mathbb{R}^n_+ \end{cases} \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \text{ fixo.}$$

Logo, a sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Desde que $w_m(x) \to u(x)$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, existe j_1 tal que

$$||u - w_m||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } m \geq j_1.$$

Conforme a definição da sequência $\{u_m\}_{j=1}^{\infty}$, existe j_2 tal que

$$||u_m - w_m||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } m \geq j_2.$$

Então, tomando $j_0 = \max\{j_1, j_2\}$, temos que para todo $m \geq j_0$ vale

$$\begin{aligned} ||u - u_m||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} &= ||(u - w_m) - (u_m - w_m)||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \\ &\leq ||u - w_m||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u_m - w_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Portanto, $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ por ser o limite (em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$) de uma sequência em $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)$. c.q.d.

Exemplo 7. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - |x|$ se $x \in (-1, 1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $f(x) = tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ se $x \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$ pertence ao espaço $W_0^{1,p}(-1, 1)$, mesmo sendo não limitada próximo de $x = -1$ e $x = 1$. Note que o traço da função f é a função $Tf : \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ dada por $Tf(-1) = Tf(1) = 0$, pois $f = g$ q.t.p., onde $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = 1 - |x|$, que é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

2.4 As Desigualdades de Sobolev e Compacidade de Rellich-Kondrachov

Nos resultador à seguir serão usadas as Desigualdades de Sobolev para mostrar as imersões dos Espaços de Sobolev em outros. Uma vez que as Desigualdades de Sobolev são válidas para funções em $C_c^1(\mathbb{R}^n)$, usaremos esse fato juntamente com os teoremas de extensão e aproximação para obter as desigualdades para as funções no espaço de Sobolev.

Por um lado, se U tem medida finita, é sabido que para $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ vale $W^{k,p_2}(U) \subset W^{k,p_1}(U)$. As desigualdades à seguir mostram que se $u \in W^{1,p}(U)$, então u pertence a outros espaços, no qual depende da relação entre p e n, sendo elas:

(1) $1 \leq p < n$;

(2) $p = n$; e

(3) $n < p \leq \infty$.

Por ora considere $1 \leq p < n$. Suponha que a desigualdade

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{11}$$

é válida para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde as constantes $C > 0$ e $1 \leq q < \infty$ não dependem de u. Dados $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $u \neq 0$, e $\lambda > 0$, defina

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Aplicando (11) em u_λ obtém-se

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Mas

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy,$$

e portanto pela desigualdade anterior tem-se

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{n/p}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

isso é,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

ou seja, $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} = 0$ pois caso contrário, fazendo λ tender a zero (ou ao infinito) obtém-se $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, uma contradição. Portanto, $q = \dfrac{np}{n-p}$.

Definição: Se $1 \leq p < n$, o *conjugado de Sobolev* é

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Note que de $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ segue que $p^* > p$.

Os resultados à seguir mostram que a desigualdade (11) é verdadeira para o conjugado de Sobolev. O primeiro resultado, que não será demonstrado, trata do caso particular para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Após, os resultados serão generalizados para as funções em $W^{1,p}(U)$.

Teorema 2.4.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Seja* $1 \leq p < n$.

Então existe uma constante C, dependendo somente de p e n, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Note que a desigualdade é falsa se u não tem suporte compacto, como por exemplo se $u(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Em vista dos teoremas de aproximação e extensão, o teorema anterior será usado para obter estimativas para funções em $W^{1,p}(U)$ e $W_0^{1,p}(U)$.

Teorema 2.4.2 (Estimativas para $W^{1,p}(U)$, $1 \leq p < n$)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com ∂U de classe C^1, $1 \leq p < n$ e $u \in W^{1,p}(U)$. Então $u \in L^{p^*}(U)$ e*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

onde a constante C depende somente de p, n e U.

Demonstração: Desde que ∂U é de classe C^1, segue pelo Teorema da Extensão que existe $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ em } U,\ \bar{u} \text{ tem suporte compacto, e} \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \end{cases} \tag{12}$$

Como $\bar{u}$ tem suporte compacto, segue pelo Teorema 2.1.1 que existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema 2.4.1 temos que $\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para todos $l, m \geq 1$, e portanto

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{em} \quad L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Novamente pelo Teorema 2.4.1 temos que $\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para todo $m \geq 1$. Logo,

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto, pela última desigualdade e por (12),

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \text{ c.q.d.}$$

Teorema 2.4.3 (Estimativas para $W_0^{1,p},\ 1 \leq p < n$)**.** *Seja U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Suponha $u \in W_0^{1,p}(U)$ e $1 \leq p < n$. Então,*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$$

para todo $q \in [1, p^*]$, onde a constante C depende somente de p, q, n e U. Em particular, para todo $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

Demonstração: Como $u \in W_0^{1,p}(U)$, existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset$ $\subset C_c^{\infty}(U)$ que convergem para u em $W^{1,p}(U)$. Então, estendendo cada função u_m em $\mathbb{R}^n$ de forma que $u_m = 0$ em $\mathbb{R}^n - \bar{U}$, podemos aplicar o Teorema 2.4.1 obtendo $\|u_m\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(U)}$, e tomando o limite com $m \to \infty$, obtemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

Desde que U tem medida finita por ser limitado, temos pela Des. de Hölder que $\|u_m\|_{L^q(U)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(U)}$ para todo $1 \leq q \leq p^*$. c.q.d.

Desde que $p^* > p$, para o caso particular $q = p$, segue pelo teorema acima que

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)},$$

e essa desigualdade é chamada de *Desigualdade de Poincaré*. Essa desigualdade é também válida para $n = 1$.

Obs.: Pelo Teorema 2.4.3 e por $p^* = \dfrac{np}{n-p} \to \infty$ quando $p \to n$, espera-se que $u \in L^{\infty}(U)$ se $u \in W^{1,n}(U)$. No entanto, isso é falso para $n > 1$, pois tomando $U = B(0,1)$ e $u = log\left(log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$, tem-se que $u \in W^{1,n}(U)$ mas $u \notin L^{\infty}(U)$, mostrando então que o caso $p = n$ deve ser tratado de forma diferente.

Assuma agora $n < p \leq \infty$. Para o que vem a seguir se faz necessário definir o *Espaço de Hölder*.

Definição: O Espaço de Hölder $C^{k,\gamma}$ é definido pelas funções $u \in C^k(\bar{U})$ para os quais a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup\{|D^{\alpha}u(x)|\,;\, x \in U\} + \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\}$$

é finita.

Teorema 2.4.4 (Desigualdade de Morrey)**.** *Seja $n < p \leq \infty$. Então existe uma cons-*

tante C, dependendo somente de p e n, tal que

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\gamma = 1 - n/p.$$

Definição: Diremos que u^* é uma versão de uma função u se

$$u = u^* \text{ q.t.p..}$$

Visto que o teorema anterior vale para funções em $C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, pode-se usar novamente os resultados de aproximação e extensão para obter estimativas para funções em $W^{1,p}(U)$.

Teorema 2.4.5 (Estimativas para $W^{1,p}$ com $n < p \leq \infty$)**.** *Seja U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^1. Suponha que $n < p \leq \infty$ e $u \in W^{1,p}(U)$. Então u possui uma versão $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$ onde $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$ com estimativa*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

sendo C uma constante que depende apenas de p, n e U.

Para o próximo resultado será retornado ao caso $1 \leq p < n$.

Teorema 2.4.6 (Desigualdades Gerais de Sobolev)**.** *Sejam U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fonteira de classe C^1, $u \in W^{k,p}(U)$ e $1 \leq p < n$.*

(i) Se

$$k < \frac{n}{p},$$

então $u \in L^q(U)$, onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n},$$

e vale a estimativa

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

onde a constante C depende somente de l, p, n e U.

(ii) Se

$$k > \frac{n}{p},$$

então $u \in C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \gamma}(\bar{U})$*, onde*

$$\gamma = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 - \frac{n}{p}, \text{ se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro} \\ \text{qualquer número positivo } < 1 \text{ se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.} \end{cases}$$

Vale também a estimativa

$$\|u\|_{C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

onde a constante C *depende somente de* l*,* p*,* n*,* γ *e* U*.*

Demonstração: Suponha que $k < \dfrac{n}{p}$. Como $D^\alpha u \in L^p(U)$ para todo $|\alpha| \leq k$, temos pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev que

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)} \text{ se } |\beta| \leq k-1,$$

e então $u \in W^{k-1,p^*}(U)$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$. Analogamente, temos que $u \in W^{k-2,p^{**}}(U)$, onde $\dfrac{1}{p^{**}} = \dfrac{1}{p^*} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{n}$. Procedendo indutivamente obtemos que $u \in W^{0,q}(U) = = L^q(U)$ onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{n}$, mostrando então a desigualdade.

Suponha agora que $k > \dfrac{n}{p}$ e $\dfrac{n}{p} \notin \mathbb{Z}$. Então, pelo caso acima,

$$u \in W^{k-l,r}(U),$$

onde

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$$

com $l < \dfrac{n}{p}$. Tome $l = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$, isso é

$$l < \frac{n}{p} < l + 1.$$

Então, $r = \dfrac{pn}{n - pl} > n$. Segue então pela Desigualdade de Morrey que $D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{r}}(\bar{U})$ para todo $|\alpha| \leq k - l - 1$. Note que $1 - \dfrac{n}{r} = 1 - \dfrac{n}{p} + l = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \dfrac{n}{p}$ Então, $u \in C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 - \frac{n}{p}}(\bar{U})$. A desigualdade é demonstrada aplicando a desigualdade de Morrey de forma recursiva (isso é, aplicando a desigualdade nas funções $D^\alpha u$ onde $\alpha \leq k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$).

Por fim, seja $\dfrac{n}{p}$ um inteiro. Defina $l = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \dfrac{n}{p} - 1$. Então, pelo caso acima, temos que $u \in W^{k-l,r}(U)$ onde $r = \dfrac{pn}{n - pl} = n$. Então, pela Des. de Gagliardo-

Nirenberg-Sobolev, temos que $D^\alpha u \in L^q(U)$ para todo $n \leq q < \infty$ e todo $|\alpha| \leq$ $\leq k - l - 1 = k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Portanto, pela Des. de Morrey, temos que $D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{U})$ para todo $n < q < \infty$ e todo $|\alpha| \leq k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$. Logo, $u \in C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1,\gamma}(\bar{U})$ para todo $0 < \gamma < 1$, obtendo consequentemente a desigualdade desejada. c.q.d.

Definição: Sejam X e Y Espaços de Banach com $X \subset Y$. Diremos que X é *compactamente imerso* em Y, e escreveremos

$$X \subset\subset Y,$$

se

i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ $(u \in X)$ para alguma constante C; e

ii) Toda sequência limitada em X é pré-compacta em Y.

A condição ii) diz que se $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência em X com $\sup_k \|u_k\|_X < \infty$, então alguma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ converge em Y com limite u, isso é,

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{k_j} - u\|_Y = 0.$$

Tendo em mente a definição de espaços compactamente imersos, será agora mostrado que o espaço $W^{1,p}$ é compactamente imerso em $L^q(U)$ onde $q < p^*$.

Teorema 2.4.7 (Compacidade de Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1. Suponha que $1 \leq p < n$. Então,*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

para todo $1 \leq q < p^*$.

Demonstração: Fixe $1 \leq q < p^*$ e note que como U é limitado, então pelo Teorema 2.4.2 temos que

$$W^{1,p}(U) \subset L^q(U),\ \|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Resta mostrar que se $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset W^{1,p}(U)$ é uma sequência limitada, então existe uma subsequência $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ que converge em $L^q(U)$.

Pelo Teorema da Extensão, podemos supor que $U = \mathbb{R}^n$ e que as funções u_m têm suporte compacto em um aberto limitado $V \subset \mathbb{R}^n$. Também podemos assumir que

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty. \tag{13}$$

Defina as funções suaves $u_{m,k}$ onde

$$u_{m,k} = \rho_n * u_m.$$

Mostremos que

$$u_{m,k} \text{ converge para } u_m \text{ em } L^q(V), \text{ uniformemente em } m. \tag{14}$$

De fato, como u_m é uma função suave para todo m,

$$\begin{aligned} u_{m,k}(x) - u_m(x) &= k^n \int_{B[x,1/n]} \rho(n(x-z))(u_m(z) - u_m(x))dz \\ &= \int_{B[0,1]} \rho(y)(u_m(x - y/k) - u_m(x))dy \\ &= \int_{B[0,1]} \rho(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}(u_m(x - ty/k))dtdy \\ &= -\frac{1}{k} \int_{B[0,1]} \rho(y) \int_0^1 Du_m(x - ty/k) \cdot ydtdy. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_V |u_{m,k}(x) - u_m(x)|dx &\leq \frac{1}{k} \int_{B[0,1]} \rho(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x - ty/k)|dxdtdy \\ &\leq \frac{1}{k} \int_V |Du_m(z)|dz. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_{m,k} - u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{1}{k}\|Du_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{1}{k}C\|Du_m\|_{L^p(V)},$$

onde a última desigualdade vale pois V é limitado. Logo, por (13), temos que

$$u_{m,k} \text{ converge para } u_m \text{ em } L^1(V), \text{ uniformemente em } m. \tag{15}$$

Como $1 \leq q < p^*$, podemos usar a desigualdade de interpolação para normas L^p

$$\|u_{m,k} - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_{m,k} - u_m\|^{\theta}_{L^1(V)} \|u_{m,k} - u_m\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(V)},$$

onde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}$, $0 < \theta < 1$. Então, pela Des. de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e por (13) temos

$$\|u_{m,k} - u_m\|_{L^q(V)} \leq C\|u_{m,k} - u_m\|^{\theta}_{L^1(V)},$$

e portanto (14) segue de (15).

Afirmamos que

$$\begin{cases} \text{para cada } k \text{ fixado, a sequência } \{u_{m,k}\}_{m=1}^{\infty} \\ \text{é uniformemente limitada e equicontínua.} \end{cases} \tag{16}$$

De fato, se $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} |u_{m,k}(x)| &\leq \int_{B[x,1/n]} \rho_k(x-y)|u_m(y)dy \\ &\leq \|\rho_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq Ck^n < \infty \end{aligned}$$

para $m = 1, 2, 3, ...$ Analogamente,

$$\begin{aligned} |Du_{m,k}(x)| &\leq \int_{B[x,1/n]} D\rho_k(x-y)|u_m(y)dy \\ &\leq \|D\rho_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq Ck^{n+1} < \infty \end{aligned}$$

para $m = 1, 2, 3, ...$ Logo, a afirmação é verdadeira.

Fixe $\delta > 0$. Mostremos que existe uma subsequência $\{u_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta. \tag{17}$$

De fato, por (14), escolha k suficientemente grande tal que

$$\|u_{m,k} - u_m\|_{L^q(V)} \leq \frac{\delta}{2} \tag{18}$$

para $m = 1, 2, 3, ...$ Note que as funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ e $\{u_{m,k}\}_{m=1}^{\infty}$ têm suporte compacto no conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$. Então, por (16) e pelo Critério de Compacidade de Arzelà-Ascoli, obtemos uma subsequência $\{u_{m_j,k}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_{m,k}\}_{m=1}^{\infty}$ que converge uniformemente em V. Em particular,

$$\limsup_{j,l\to\infty} \|u_{m_j,k} - u_{m_l,k}\|_{L^q(V)} = 0, \tag{19}$$

e por (18) e (19) temos

$$\limsup_{j,l\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_l}\|_{L^q(V)} = \delta,$$

mostrando (17).

Usando (17) e (18) com $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ e usando o argumento da diagonal de Cantor, conseguimos obter uma subsequência $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ que satisfaz

$$\limsup_{j,l\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_l}\|_{L^q(V)} = 0. \text{ c.q.d.}$$

Obs.: Como $p^* > p$ e $p^* \to \infty$ quando $p \to n$, segue que

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. O caso $n < p \leq \infty$ segue pela Des. de Morrey e pelo Critério de Compacidade de Arzelà-Ascoli, pois dada uma sequência limitada de funções contínuas $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, tem-se pela Des. de Morrey que essa sequência é uniformemente equicontínua, e então pelo Critério de Compacidade de Arzelà-Ascoli tem-se que essa sequência converge uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$ para alguma função u, e em particular, pode-se considerar o compacto $\bar{U}$. A convergência em $L^p(U)$ segue pois as funções convergem uniformemente.

Obs.: Note que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$ mesmo se ∂U não for C^1.

3 Equações Elípticas

Considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases} \tag{20}$$

onde U é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ é desconhecida, $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função dada, e L denota o operador diferencial parcial de segunda ordem, que pode ser da forma divergente:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u; \tag{21}$$

ou não-divergente:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{22}$$

onde a^{ij}, b^i e c, com $i, j = 1, ..., n$, são as funções coeficientes dadas. A condição $u = 0$ em ∂U em (20) é chamada de *condição de fronteira de Dirichlet*.

Obs.: Se os coeficientes a^{ij} são de classe C^1, então o operador dado na forma divergente pode ser reescrito na forma não-divergente, e vice versa. De fato, como

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} &= -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}_{x_j}(x)u_{x_i} + a^{ij}(x)u_{x_i x_j}\right) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}(x)u_{x_i} \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}(x)\right) u_{x_i} \end{aligned}$$

e substituindo o cálculo acima na forma divergente obtém-se

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

onde $\tilde{b} = b^i - \sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}$, obtendo então a forma não-divergente.

Existem vantagens em considerar essas duas representações do operador L. A forma divergente de L é mais natural para os métodos da energia, que são baseados pela integração por partes, e a forma não-divergente é mais apropriada para as técnicas de princípio do máximo.

Para o que será estudado nesse trabalho será suficiente assumir a condição

de simetria

$$a^{ij} = a^{ji}, \;\; i,j = 1,...,n.$$

Definição: Um operador diferencial L é dito (uniformemente) elíptico se existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{23}$$

para quase todo $x \in U$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Obs.: Note que $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j = \xi^t A(x)\xi$, onde $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ e $A(x) = (a^{ij}(x))_{ij}$. Logo, um operador diferencial é elíptico se para cada $x \in U$, a matriz simétrica $n \times n$ $A(x) = (a^{ij}(x))_{ij}$ é positiva definida e tem o seu menor autovalor maior ou igual a θ.

Exemplo 8. *(i)* O operador $-\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, onde Δ é o operador laplaciano, que é obtido quando $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i = 0$ e $c = 0$, é um exemplo de operador elíptico.

(ii) Se L é um operador diferencial onde $a^{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções tais que $a^{i,i}(x) \geq C$, onde C é uma constante positiva, e $a^{ij}(x) = 0$ se $i \neq j$, então o operador L é elíptico, pois

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \sum_{i=1}^{n} C\xi_i^2 = C|\xi|^2.$$

(iii) Se L é um operador diferencial onde $a^{11}(x) = 2$, $a^{12}(x) = a^{21}(x) = 1$ e $a^{22}(x) = 3$, então L é operador elíptico, pois

$$\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j = 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 \geq 2|\xi|^2 + 2\xi_1\xi_2 \overset{*}{\geq} 2|\xi|^2 - |\xi|^2 = |\xi|^2,$$

onde a desigualdade $\overset{*}{\geq}$ é obtida aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos vetores $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ e $\xi' = (\xi_2, \xi_1)$.

A partir desse ponto assuma que $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$ para todos $i,j = 1,...,n$. O problema de valor de fronteira (20) será estudado primeiramente quando L tem a forma divergente dada em (21).

Suponha que u é uma solução suave de (21). Multiplicando ambos os membros de $Lu = f$ pela função teste $v \in C_c^\infty(U)$ e integrando, obtém-se

$$\int_U \left(-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} v + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv \right) dx = \int_U fv dx,$$

mas integrando $-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} v$ por partes,

$$\begin{aligned}\int_U \left(-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} v\right) dx &= -\int_U \left(-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}\right) dx \\ &= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}dx,\end{aligned}$$

obtendo então

$$\int_U \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv\right) dx = \int_U fv dx.$$

O processo acima motiva a seguinte definição:

Definição: A forma bilinear $B[\ ,\ ]$, associada à forma divergente do operador elíptico L definida em (21) é dada por

$$B[u,v] = \int_U \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv\right) dx$$

para $u, v \in H_0^1(U)$.

Definição: Uma função $u \in H_0^1(U)$ é dita *solução fraca* do problema de valor de fronteira (20), ou *formulação variacional* de (20), se

$$B[u,v] = (f,v) \tag{24}$$

para todo $v \in H_0^1(U)$, onde $(\ ,\ )$ denota o produto interno em $L^2(U)$.

Exemplo 9. Para o caso $n = 1$, $U = (-1,1)$, $a^{11}(x) = 1$, $b^1(x) = 0$ e $c(x) = 1$, a forma bilinear do operador elíptico $Lu = -u'' + u$ é $\int_{-1}^{1}(u'v' + uv)\,dx$. Então, desde que $(f,v) = \int_{-1}^{1} fv\,dx$, tem-se que u_0 será solução fraca do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

se $\int_{-1}^{1}(u_0'v' + u_0v)\,dx = \int_{-1}^{1} fv\,dx$ para toda $v \in C_c^\infty(-1,1)$.

De maneira mais geral, considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} & \text{em } U \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases} \tag{25}$$

onde L é definida por (22) e $f^i \in L^2(U)$ ($f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} \in H^{-1}(U)$)

Definição: Uma função $u \in H_0^1(U)$ é dita uma *solução fraca* para o problema (25) se

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle$$

para todo $v \in H_0^1(U)$, onde $\langle f, v \rangle = \int_U \ f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_j} \, dx$ e $\langle \ , \ \rangle$ é o pareamento entre $H^{-1}(U)$ e $H_0^1(U)$.

É possível também trabalhar com outras condições de fronteira. Suponha que ∂U é de classe C^1 e $u \in H^1(U)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U \\ u = g & \text{sobre } \partial U, \end{cases}$$

Então, $u = g$ em ∂U no sentido do traço e a forma bilinear (24) vale para toda $v \in H_0^1(U)$. Logo, g tem traço em alguma função $w \in H^1$. Então, $\tilde{u} = u - w \in H_0^1(U)$ e é solução fraca do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{em } U \\ \tilde{u} = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases}$$

onde $\tilde{f} = f - Lw \in H^{-1}(U)$.

3.1 Existência de Soluções Fracas

Teorema 3.1.1 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Seja*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

um mapeamento bilinear para o qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ *tais que*

(i) $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \, \|v\|, \quad u, v \in H$*, e*

(ii) $\beta \|u\|^2 \leq B[u, u], \quad u \in H.$

Seja também $f : H \to \mathbb{R}$ *um funcional linear limitado em* H*. Então, existe um único* $u \in H$ *tal que*

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle \tag{26}$$

para todo $v \in H$*.*

Demonstração: Note que para cada $u \in H$ fixo, o mapeamento $v \mapsto B[u, v]$ é um funcional linear limitado em H. Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $w \in H$ tal que

$$B[u, v] = (w, v), \quad v \in H.$$

Denotando $w = Au$, reescreveremos a identidade acima por

$$B[u, v] = (Au, v), \quad u, v \in H. \tag{27}$$

Mostremos que $A : H \to H$ é um operador linear limitado. De fato, tomando $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $u_1, u_2 \in H$, para cada $v \in H$ vale

$$\begin{aligned}(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &\overset{(27)}{=} B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\ &= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\ &\overset{(27)}{=} \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) \\ &= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v).\end{aligned}$$

Como a igualdade acima vale para todo $v \in H$, temos que A é linear. Note que

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \, \|Au\|,$$

ou seja, $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$ para todo $u \in H$, e portanto A é limitado.

Mostremos que A é bijetor e $Im(A)$ é fechado em H. De fato, como H é fechado (pois é Banach) e A é um operador contínuo (pois é linear e limitado), segue que $Im(A)$ é fechado. Como

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u, u] = (Au, v) \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|Au\| \, \|u\|,$$

concluímos que $\beta \|u\| \leq \|Au\|$. Sejam $u, v \in H$ tais que $Au = Av$. Então,

$$0 = \|0\| = \|Au - Av\| \geq \beta \|u - v\| \Rightarrow u = v \text{ q.t.p..}$$

Logo, A é injetor. Suponha que $Im(A) \neq H$. Então, como $Im(A)$ é fechado, existe $w \in Im(A)^{\perp}$ não nulo. Logo, $\beta \|w\|^2 \leq B[w, w] = (Aw, w) = 0 \Rightarrow \|w\| = 0$, uma contradição. Portanto, $Im(A) = H$.

Pelo Teorema da Representação de Riesz temos que existe $w \in H$ tal que

$$\langle f, v \rangle = (w, v) \quad \text{para todo } v \in H.$$

Pela bijetividade de A, existe $u \in H$ tal que $Au = w$. Então

$$B[u, v] = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v \rangle, \quad v \in H$$

mostrando a existência em (26). Para mostrar a unicidade, suponha que existe $\tilde{u} \in H$ com $B[u, v] = \langle f, v \rangle$ e $B[\tilde{u}, v] = \langle f, v \rangle$. Então, $B[u - \tilde{u}, v] = 0$ para todo $v \in H$. Em particular para $v = u - \tilde{u}$ encontraremos $\beta \|u - \tilde{u}\|^2 \leq B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] = 0$, ou seja,

$u = \tilde{u}$ q.t.p.. c.q.d.

3.1.1 Estimativas de Energia

Teorema 3.1.2 (Estimativas de Energia)**.** *Existem constantes* $\alpha, \beta > 0$ *e* $\gamma \geq 0$ *tais que*

(i) $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$*; e*

(ii) $\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$

para todos $u, v \in H_0^1(U)$*.*

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \int_U \left| \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} \right| dx + \\
&\quad + \int_U \left| \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v \right| dx + \int_U |c(x)uv| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|\,|Dv| dx + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|\,|v| dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U |u|\,|v| dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} \|Du\|_{L^2(U)} \|Dv\|_{L^2(U)} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(U)} \|Du\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} + \|c\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \\
&\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}
\end{aligned}$$

para alguma constante α.

Pela condição de elipticidade (23), que é $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$, temos

$$\begin{aligned}
\theta \int_U |Du|^2 dx &\leq \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \\
&= B[u,u] - \int_U \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} u + cu^2 \, dx \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|\,|u| dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U u^2 dx
\end{aligned}$$

Como $ab = [(2\varepsilon)^{1/2} a] \dfrac{b}{(2\varepsilon)^{1/2}}$ para todo $\varepsilon > 0$, segue da Des. de Young que

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Então,

$$\int_U |Du|\,|u|dx \leq \varepsilon \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_U u^2 dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Da desigualdade acima e tomando ε suficientemente pequeno de forma que

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \leq \frac{\theta}{2},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\theta \int_U |Du|^2 dx &\leq B[u,v] + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|\,|u|dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U u^2 dx \\
&\leq B[u,u] + \frac{\theta}{2}\int_U |Du|^2 dx + C\int_U u^2 dx \\
&\Rightarrow \\
\frac{\theta}{2}\int_U |Du|^2 dx &\leq B[u,u] + C\int_U u^2 dx
\end{aligned}$$

onde $C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)}}{4\varepsilon} + \|c\|_{L^\infty(U)}$ com ε fixo.

Desde que $u \in H_0^1$, pela desigualdade de Poincaré,

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C_1 \|Du\|_{L^2(U)},$$

segue que

$$\frac{\theta}{4C_1^2}\int_U u^2 dx + \frac{\theta}{4}\int_U |Du|^2 dx \leq \frac{\theta}{2}\int_U |Du|^2 dx \leq B[u,u] + C\|u\|^2_{L^2(U)},$$

ou seja,

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)},$$

onde $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$. c.q.d.

Exemplo 9 (cont.). Considerando o operador elíptico do Exemplo 9 (página 45), segue que ele satisfaz as hipóteses das Estimativas de Energia. De fato, tomando $u, v \in H_0^1(-1,1)$ e denotando simplificadamente $L^2(-1,1)$ e $H_0^1(-1,1)$ por L^2 e H_0^1, tem-se

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &= \left| \int_{-1}^{1} (u'v' + uv)\, dx \right| \\
&\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq 2\left[(\|u\|^2_{L^2} + \|u'\|^2_{L^2})(\|v\|^2_{L^2} + \|v'\|^2_{L^2}) \right]^{1/2} \\
&= 2\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1},
\end{aligned}$$

isso é, (i) vale para $\alpha = 2$, e

$$\|u\|^2_{H^1_0} = \int_{-1}^{1} ((u')^2 + u^2)\, dx = B[u, v] \leq B[u, u] + 0 \cdot \|u\|^2_{L^2},$$

tendo então que (ii) vale para $\beta = 1$ e $\gamma = 0$.

Teorema 3.1.3 (Primeiro Teorema de Existência de soluções fracas)**.** *Existe um número* $\gamma \geq 0$ *tal que para cada*

$$\mu \geq \gamma$$

e para cada função

$$f \in L^2(U),$$

existe uma única solução $u \in H^1_0(U)$ *para o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \textit{em } U \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial U. \end{cases} \tag{28}$$

Demonstração: Tome γ como no teorema anterior, seja $\mu \geq \gamma$ e defina a forma bilinear

$$B_\mu[u, v] := B[u, v] + \mu(u, v) \quad u, v \in H^1_0(U),$$

que corresponde ao operador $L_\mu u := Lu + \mu u$. Então, $B_\mu[\,,\,]$ satisfaz as hipótese do Teorema de Lax-Milgram, pois pelo Teorema 3.1.2,

(i) $|B_\mu[u, v]| \leq |B[u, v]| + \mu|(u, v)| \leq \alpha\|u\|\|v\| + \mu\|u\|\|v\| \leq (\alpha + \mu)\|u\|\|v\|$, e

(ii) $\beta\|u\|^2 \leq B[u, v] + \gamma\|u\|^2 \leq B_\mu[u, v]$.

Fixe $f \in L^2(U)$ e defina $\langle f, v\rangle := (f, v)_{L^2(U)}$. Então $\langle f, v\rangle$ é um funcional linear limitado em $L^2(U)$ e também em $H^1_0(U)$.

Aplicando o Teorema de Lax-Milgram, encontramos uma única função $u \in H^1_0(U)$ satisfazendo

$$B\mu[u, v] = \langle f, v\rangle$$

para toda $v \in H^1_0(U)$, ou seja, u é a única solução fraca do problema (28). $_{\text{c.q.d.}}$

Exemplo 9 (cont.). Em relação o operador $Lu = -u'' + u$ definido sobre $U = (-1, 1)$, foi mostrado anteriormente que $\gamma = 0$. Logo, desde que $Lu + \mu u = -u'' + (\mu + 1)u$, segue pelo Primeiro Teorema de Existência de soluções fracas que o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -u'' + (\mu + 1)u = f & \text{em } (-1, 1) \\ u = 0 & \text{sobre } \{-1, 1\} \end{cases}$$

possui solução fraca $u \in H^1_0(-1, 1)$ para toda função $f \in L^2(-1, 1)$ e todo $\mu \geq 0$.

Exemplo 10. No caso $Lu = -\Delta u$, tem-se $B[u,v] = \int_U Du \cdot Dv\, dx$. Logo, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$|B[u,v]| \leq \|Du\|_{L^2(U)}\|Dv\|_{L^2(U)} \leq \|u\|_{H_0^1(U)}\|v\|_{H_0^1(U)}.$$

Agora, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\frac{1}{C}\|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq \|Du\|^2_{L^2(U)} = \int_U |Du|^2\, dx = B[u,u] + 0 \cdot \|u\|^2_{L^2(U)},$$

mostrando que as hipóteses do Teorema 3.1.2 vale para $\gamma = 0$. Logo, o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U \end{cases}$$

possui solução fraca $u \in H_0^1(U)$ para toda $f \in L^2(U)$ e todo $\mu \geq 0$.

Mapeamento H_0^1 para H^{-1}: De forma similar mostra-se que para todos

$$f^i \in L^2(U) \quad i = 0, ..., n,$$

existe uma única solução fraca u da EDP

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i} & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

Isso segue pois $\langle f, v\rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i} dx$ é um funcional linear limitado.

Em particular, o mapeamento

$$L_\mu := L + \mu I : H_0^1(U) \to H^{-1}(U) \quad \mu \geq \gamma$$

é um isomorfismo.

3.1.2 Alternativa de Fredholm

Definições:

(i) O operador L^*, chamado de adjunto formal de L, é

$$L^* v := -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij} v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n b^i v_{x_i} + (c - \sum_{i=1}^n b^i_{x_i})v,$$

onde $b^i \in C^1(\bar{U})$ para todo $i = 1, ..., n$.

(ii) A forma bilinear adjunta

$$B^* := H_0^1(U) \times H_0^1(U) \to \mathbb{R}$$

é definida por

$$B^*[v, u] := B[u, v]$$

para todos $u, v \in H_0^1(U)$.

(iii) Uma função $v \in H_0^1(U)$ é dita uma solução fraca do problema adjunto

$$\begin{cases} L^* v = f & \text{em } U \\ v = 0 & \text{em } \partial U, \end{cases}$$

se

$$B^*[v, u] = (f, u)$$

para todo $u \in H_0^1(U)$.

Teorema 3.1.4 (Segundo Teorema de Existência de Soluções Fracas)**.**

(i) Exatamente uma das afirmativas é verdadeira:

(a) Para cada $f \in L^2(U)$ existe uma única solução fraca u do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{em } U \\ u = 0 & \textit{em } \partial U \end{cases} \tag{29}$$

ou

(b) Existe uma solução fraca $u \neq 0$ do problema homogêneo

$$\begin{cases} Lu = 0 & \textit{em } U \\ u = 0 & \textit{em } \partial U \end{cases} \tag{30}$$

(ii) Mais ainda, se a afirmação (b) vale, então a dimensão do subespaço $N \subset H_0^1(U)$ da soluções fracas de (30) é finito e igual à dimensão do subespaço $N^* \subset H_0^1(U)$ das soluções fracas de

$$\begin{cases} L^* v = 0 & \textit{em } U \\ v = 0 & \textit{em } \partial U \end{cases} \tag{31}$$

(iii) O problema de valor de fronteira (29) possui uma solução fraca se e somente se

$$(f, v) = 0 \quad \textit{para todo } v \in N^*$$

A dicotomia *(a)*, *(b)* é chamada de *Alternativa de Fredholm*.

Demonstração: Escolha $\mu = \gamma$ como no teorema anterior e defina a forma bilinear

$$B_\gamma[u, v] := B[u, v] + \gamma(u, v),$$

que corresponde ao operador $L_\gamma u := Lu + \gamma u$. Então para cada $g \in L^2(U)$ existe uma única função $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$B_\gamma[u, v] = (g, v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U). \tag{32}$$

Escreveremos

$$u = L_\gamma^{-1} g \tag{33}$$

quando (32) valer.

Note que $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca de (29) se e somente se

$$B_\gamma[u, v] = (\gamma u + f, v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U), \tag{34}$$

isso é, se e somente se

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f).$$

Reescreva essa equação da seguinte maneira:

$$u - Ku = h,$$

onde

$$Ku := \gamma L_\gamma^{-1} u \tag{35}$$

e

$$h = L_\gamma^{-1} f. \tag{36}$$

Mostremos que $K : L^2(U) \to L^2(U)$ é um operador linear limitado compacto. A linearidade segue de (32) e (33). Da escolha para γ e das Estimativas de energia e supondo que (32) vale, temos

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B_\gamma[u, v] = (g, u) \leq \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)} \leq \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{H_0^1(U)},$$

e então de (33) e (35) temos $u = L_\gamma^{-1} g = \gamma^{-1} Kg$, ou seja,

$$\|Kg\|_{H_0^1(U)} \leq C \|g\|_{L^2(U)} \quad g \in L^2(U)$$

para alguma constante C. Mas como pelo Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov $H_0^1(U) \subset\subset L^2(U)$, temos que K é um operador compacto.

Aplicando os resultados da Alternativa de Fredholm do Anexo B, temos que

ou

$$\begin{cases} \text{Para cada } h \in L^2(U) \text{ a equação} \\ u - Ku = h \\ \text{tem uma única solução } u \in L^2(U) \end{cases} \tag{37}$$

ou

$$\begin{cases} \text{A equação} \\ u - Ku = 0 \\ \text{tem soluções não nulas em } L^2(U), \end{cases} \tag{38}$$

mostrando então (i). Se a afirmação (37) vale, então de acordo com as equações (34)$-$(36) existe uma única solução fraca para o problema (29). Se a afirmação (38) vale, então $\gamma \neq 0$ (pois γ advém de $\|u\|_{L^\infty(U)} \neq 0$) e novamente pela Alternativa de Fredholm do Anexo B temos que a dimensão do espaço N das soluções de (38) é finito e igual à dimensão do espaço N^* das soluções de

$$v - K^*v = 0, \tag{39}$$

mostrando então (ii). Note então que (38) vale se e somente se u é uma solução fraca de (30) e que (39) vale se e somente se v é uma solução fraca de (31).

Como (37) tem uma solução se e somente se

$$(h, v) = 0$$

para toda v que seja solução de (39). De (35) e (36) temos que $Kf = \frac{1}{\gamma}h$, e então por (39),

$$(h, v) = \frac{1}{\gamma}(Kf, v) = \frac{1}{\gamma}(f, K^*v) = \frac{1}{\gamma}(f, v).$$

Logo, o problema de valor de fronteira (29) tem solução se e somente se $(f, v) = 0$ para toda solução fraca v de (31). $_{\text{c.q.d.}}$

Teorema 3.1.5 (Terceiro Teorema de Existência de Soluções Fracas)**.**

(i) Existe um conjunto enumerável ou finito $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que, o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \textit{em } U \\ u = 0 & \textit{em } \partial U \end{cases} \tag{40}$$

possui uma única solução fraca para cada $f \in L^2(U)$ se e somente se $\lambda \notin \Sigma$.

(ii) Se Σ é infinito, então $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde tal sequência é não-decrescente com

$$\lambda_k \to \infty.$$

Definição: Σ é chamado de *espectro (real)* do operador L.

Note que, pelo item (i), o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U \end{cases}$$

possui uma solução não trivial $w \neq 0$ se e somente se $\lambda \in \Sigma$. Nesse caso, λ é dito *autovalor* de L, correspondente à *autofunção* w. A EDP $Lu = \lambda u$ para $L = -\Delta$ é chamada de *Equação de Helmholtz*.

Demonstração: Seja γ a constante do Teorema 3.1.2 e seja

$$\lambda > -\gamma. \tag{41}$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $\gamma > 0$.

Pela Alternativa de Fredholm, o problema de valor de fronteira (40) possui uma única solução fraca para cada $f \in L^2(U)$ se e somente se $u = 0$ é a única solução fraca do problema homogêneo

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

Mas isso vale se e somente se $u = 0$ é a única solução fraca de

$$\begin{cases} Lu + \gamma u = (\lambda + \gamma)u & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases} \tag{42}$$

Temos então, por (33), que (42) vale quando

$$u = L_\gamma^{-1}(\lambda + \gamma)u = \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} Ku, \tag{43}$$

onde $Ku = \gamma L_\gamma^{-1} u$. Conforme mostrado anteriormente, $K : L^2(U) \to L^2(U)$ é um operador linear limitado compacto.

Note que se $u = 0$ é a única solução de (43), então

$$\frac{\gamma}{\lambda + \gamma} \text{ não é um autovalor de } K. \tag{44}$$

Então o problema (40) possui uma única solução fraca para cada $f \in L^2(U)$ se e somente se (44) vale.

Pelo Teorema 4 do Anexo B, o conjunto de todos os autovalores de K é finito ou é uma sequência que converge para zero. No caso *(ii)*, por (41) e por (43) temos que a EDP (40) possui solução uma única solução fraca para todo $f \in L^2(U)$ exceto para uma sequência $\lambda_k \to \infty$. $_{\text{c.q.d.}}$

Exemplo 11. Considere o operador $Lu = -u''$ e o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & \text{no intervalo } (-\pi, \pi) \\ u = 0 & \text{sobre } \{-\pi, \pi\}. \end{cases}$$

Usando os resultados sobre *Equações Diferenciais Ordinárias*, segue que o problema de valor de fronteira acima admite solução não nula se, e somente se, $\lambda \in \Sigma$ onde $\Sigma = \{k^2 \in \mathbb{R}\,;\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{(k-1/2)^2 \in \mathbb{R}\,;\, k \in \mathbb{N}\}$, sendo soluções as funções da forma $u(x) = a\sin(kx)$ e $u(x) = a\cos([k-1/2]x)$ com $a \in \mathbb{R}$. Verificando,

$$-u''(x) = -(a\sin(kx))'' = k^2 a\sin(kx) = k^2(a\sin(kx)) = k^2 u(x),$$

$u(-\pi) = a\sin(-k\pi) = 0$ e $u(\pi) = a\sin(k\pi) = 0$, e verifica-se de maneira análoga para as funções $u(x) = a\cos([k-1/2]x)$. Então, se $\lambda \notin \Sigma$ tem-se que $u(x) = 0$ é a única solução do problema (e portanto é também a única solução fraca do problema), e se $\lambda \in \Sigma$ tem-se que as funções da forma $u(x) = a\sin(kx)$ e $u(x) = a\cos([k-1/2]x)$ são soluções do problema (e portanto a solução fraca do problema não é única).

Exemplo 11 (cont.): Considere agora o problema de valor de fronteira abaixo:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) + \alpha x & \text{no intervalo } (-\pi, \pi) \\ u = 0 & \text{sobre } \{-\pi, \pi\}, \end{cases}$$

onde $\alpha \neq 0$, e considere também o conjunto Σ definido anteriormente. As soluções (e portanto, as soluções fracas) são dadas pelos seguintes casos:

- Se $\lambda < 0$ então $u(x) = \dfrac{\alpha\pi e^{\sqrt{-\lambda}\pi}}{(e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} - 1)\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right) - \dfrac{\alpha}{\lambda}x$, e é a única solução.
- Se $\lambda = 0$ então $u(x) = -\dfrac{\alpha}{6}x^3 + \dfrac{\alpha\pi^2}{6}x$, e é a única solução.
- Se $\lambda > 0$ e $\lambda \notin \Sigma$, então $u(x) = \dfrac{\alpha\pi}{\lambda\sin(\sqrt{\lambda}\pi)}\sin(\sqrt{\lambda}x) - \dfrac{\alpha}{\lambda}x$, e é a única solução.
- Se $\lambda = (k-1/2)^2$ com $k \in \mathbb{N}$ então $u(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + \dfrac{\alpha\pi}{\lambda\sin(\sqrt{\lambda}\pi)}\sin(\sqrt{\lambda}x) - \dfrac{\alpha}{\lambda}x$, e são múltiplas soluções (pois a pode ser qualquer).
- Se $\lambda = k^2$ então não há soluções (desde que $\alpha \neq 0$). De fato, como o operador L e seu adjunto L^* têm mesma forma (pois $Lu = -u'' - \lambda u$ e $L^*v = -v'' - \lambda v$), segue que as soluções de $L^*v = -v'' - k^2 v = 0$ em $(-\pi, \pi)$ com v nula na fronteira é $v_k(x) = a\sin(kx)$, mas

$$(\alpha x, a\sin(kx)) = \alpha\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx = \frac{2\pi\alpha}{k}(-1)^{k+1} \neq 0.$$

Logo, segue pelo item (iii) do Teorema 3.1.4 que $Lu = -u'' - k^2u = \alpha x$ em $(-\pi, \pi)$ com u nula na fronteira não possui solução fraca.

Teorema 3.1.6 (Limite da inversa)**.** *Se $\lambda \notin \Sigma$, então existe uma constante C tal que*

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}$$

sempre que $f \in L^2(U)$ e $u \in H_0^1(U)$ é a única solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

A constante C depende somente de λ, U e dos coeficientes de L.

Obs.: A constante C cresce indefinidamente quando λ se aproxima de um autovalor.

Demonstração: Por redução ao absurdo, existem sequências $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(U)$ e $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H_0^1(U)$ tais que

$$\begin{cases} Lu_k = \lambda u_k + f_k & \text{em } U \\ u_k = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

no sentido fraco, mas

$$\|u_k\|_{L^2(U)} > k\|f_k\|_{L^2(U)}, \quad k = 1, ...$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $\|u_k\|_{L^2(U)} = 1$. Então, $f_k \to 0$ em $L^2(U)$. Pelas Estimativas de energia, temos que a sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é limitada em $H_0^1(U)$. Então, pelo Teorema 2 do Anexo B, existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset$ tal que

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u & \text{fracamente em } H_0^1(U), \\ u_{k_j} \to u & \text{em } L^2(U). \end{cases} \tag{45}$$

Então, tomando o limite, u é uma solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

Como $\lambda \notin \Sigma$, temos que $u = 0$. No entanto, temos por (45) que $\|u\| = 1$, um absurdo. $_{\text{c.q.d.}}$

3.2 A Regularidade das soluções fracas no interior e na fronteira

Obtidas as condições para a existência de soluções fracas, o objetivo agora é saber qual é a regularidade dessa solução, isso é, saber se uma solução fraca u da

EDP

$$Lu = f \quad \text{em } U$$

é uma função suave ou de classe C^k.

Motivação: derivada formal das estimativas. Seja $u \in H_0^1(U)$ e considere o problema

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Supondo que u é suave e com suporte finito, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Então, a norma L^2 da segunda derivada da u pode ser estimada a partir da norma L^2 da f. Fazendo um processo análogo ao feito na EDP

$$-\Delta \tilde{u} = \tilde{f},$$

onde $\tilde{u} = u_{x_k}$ e $\tilde{f} = f_{x_k}$, consegue-se estimar a norma em L^2 da terceira derivada da u a partir da norma em L^2 da primeira derivada da f. Procedendo dessa maneira, a norma da $m+2$-ésima derivada da u é estimada pela m-ésima derivada da f.

Esses cálculos sugerem que para a equação de Poisson ($-\Delta u = f$), espera-se que a solução fraca $u \in H_0^1$ pertença a H^{m+2} sempre que o termo não homogêneo f pertença a H^m. Particularmente, se $u \in H^m$ para todo m, então $u \in C^\infty$.

Note que os cálculos acima não garantem uma prova, uma vez que havia sido assumido que u era suave. Primeiramente será estudado a regularidade no interior. Assuma que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Suponha que $u \in H_0^1(U)$ é uma solução da EDP $Lu = f$ em U, onde L está na forma divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u.$$

Assuma também as condições de elipticidade, isso é, existe uma constante θ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

para quase todo $x \in \mathrm{U}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.1 (Regularidade no Interior em H^2)**.** *Suponha que*

$$a^{ij} \in C^1(U), \;\; b^i, \, c \in L^\infty(U) \quad i,j = 1, ..., n \tag{46}$$

e

$$f \in L^2(U).$$

Suponha também que $u \in H^1(U)$ é uma solução fraca da EDP elíptica

$$Lu = f \quad \textit{em } U.$$

Então,

$$u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U),$$

e para cada subconjunto aberto $V \subset\subset U$ vale

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right), \tag{47}$$

onde a constante C depende apenas de V, U e dos coeficientes de L.

Obs. 1: Note que não é necessário que $u \in H^1_0(U)$, ou seja, não é necessário que $u = 0$ sobre ∂U no sentido do traço.
Obs. 2: Desde que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$, tem-se que

$$Lu = f \quad \mathrm{q.t.p.} \text{ em } U.$$

Logo, u resolve a EDP para os pontos em U. De fato, para toda $v \in C_c^\infty(U)$ vale

$$B[u, v] = (f, v).$$

Como $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$, pode-se fazer a integral por partes de $B[u, v]$, donde segue que $B[u, v] = \int_U (Lu \cdot v)$, ou seja,

$$B[u, v] = (Lu, v).$$

Então, $(Lu - f, v) = 0$ para todo $v \in C_c^\infty(U)$, e então $Lu = f$ $\mathrm{q.t.p.}$.

Demonstração: Seja $V \subset\subset U$ fixo, e tome W tal que $V \subset\subset W \subset\subset U$. Seja ζ uma

função suave que satisfaz

$$\begin{cases} \zeta = 1 \text{ em } V,\ \zeta = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n - W, \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

ζ é dita *função de corte*. Essa função restringe os cálculos para o subconjunto W, que está a uma distância positiva de ∂U.

Como u é uma solução fraca de $Lu = f$, temos que $B[u, v] = (f, v)$ para toda $v \in H_0^1(U)$. Então,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U \tilde{f} v dx, \tag{48}$$

onde

$$\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu. \tag{49}$$

Seja $|h| > 0$ suficientemente pequeno, tome $k \in \{1, ..., n\}$, e substitua

$$v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u) \tag{50}$$

em (48), onde $D_k^h u$ denota o quociente

$$D_k^h u = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h} \quad h \in \mathbb{R},\ h \neq 0.$$

Escreva

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx \tag{51}$$

e

$$B = \int_U \tilde{f} v dx. \tag{52}$$

Calculemos as estimativas para A e B. Para A temos

$$\begin{aligned} A &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} \left[D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u) \right]_{x_j} dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} D_k^{-h}(\left[\zeta^2 D_k^h u \right]_{x_j}) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_U D_k^h \left(a^{ij} u_{x_i} \right) \left(\zeta^2 D_k^h u \right)_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij,h} D_k^h \left(u_{x_i} \right) \left(\zeta^2 D_k^h u \right)_{x_j} + \\ &\quad + \left(D_k^h a^{ij} \right) u_{x_i} \left(\zeta^2 D_k^h u \right)_{x_j} dx, \end{aligned} \tag{53}$$

e aqui usamos as fórmulas

$$\int_U vD_k^{-h}wdx = -\int_U wD_k^h vdx$$

e

$$D_k^h(vw) = v^h D_k^h w + wD_k^h v,$$

para $v^h(x) = v(x + he_k)$. Então, em (53), temos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{ij,h}D_k^h u_{x_i}D_k^h u_{x_j}\zeta^2 dx + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\int_U \Big[a^{ij,h}D_k^h u_{x_i}D_k^h u\cdot 2\zeta\zeta_{x_j} + D_k^h a^{ij}u_{x_i}D_k^h u_{x_j}\zeta^2 + \\ &\quad + D_k^h a^{ij}u_{x_i}D_k^h u\cdot 2\zeta\zeta_{x_j}\Big]dx \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned} \tag{54}$$

Note que pela condição de elipticidade uniforme temos que

$$A_1 \geq \theta\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2 dx \tag{55}$$

para algum $\theta > 0$. Note que por (46) e pelo fato de $\zeta = 0$ em $\mathbb{R}^n - W$ temos que

$$|A_2| \leq C\int_U \zeta|D_k^h Du|\,|D_k^h u| + \zeta|D_k^h Du|\,|Du| + \zeta|D_k^h u|\,|Du|dx,$$

para alguma constante C. Pela Desigualdade de Cauchy com ε, que é obtida aplicando a Des. de Young para $p = 2$ nos números $(a\sqrt{2\varepsilon})(b/\sqrt{2\varepsilon})$, temos

$$|A_2| \leq \varepsilon\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon}\int_W |D_k^h|^2 + |Du|^2 dx.$$

Escolhendo $\varepsilon = \dfrac{\theta}{2}$, e pelo item (i) do Teorema 7 do Anexo C temos a estimativa

$$\int_W |D_k^h|^2 dx \leq C\int_U |Du|^2 dx,$$

e então,

$$|A_2| \leq \frac{\theta}{2}\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2 dx + C\int_U |Du|^2 dx.$$

Desta última estimativa e de (54) e (55) obtemos

$$A \geq \frac{\theta}{2}\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2 dx - C\int_U |Du|^2 dx. \tag{56}$$

Estimativa para B. De (49) e (50) obtemos a estimativa

$$|B| \leq C \int_U (|f| + |Du| + |u|)|v|dx. \tag{57}$$

Pelo item (i) do Teorema 7 do Anexo C e por (52) temos

$$\begin{aligned} \int_U |v|^2 dx &\leq C \int_U |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx \\ &\leq C \int_W |D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \\ &\leq C \int_U |Du|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx. \end{aligned}$$

Então, por (57) e pela Desigualdade de Cauchy com ε temos

$$|B| \leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_U f^2 + u^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_U |Du|^2 dx.$$

Para $\varepsilon = \dfrac{\theta}{4}$ obtemos

$$|B| \leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx \tag{58}$$

Segue de (48), (51), (52), (56) e (58) que

$$\int_V |D_k^h Du|^2 dx \leq \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \leq C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx$$

para todo $k = 1, ..., n$ e todo $|h| \neq 0$ suficientemente pequeno.

Pelo item (ii) do Teorema 7 do Anexo C, como $\int_V |D_k^h Du|^2 dx$ é finito para todo k, temos que $Du \in H^1_{\text{loc}}(U; \mathbb{R}^n)$, e então $u \in H^2_{\text{loc}}(U)$, com

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)}), \tag{59}$$

para alguma constante C que depende apenas de V, W, U e dos coeficientes da L. Escolha uma nova função de corte ζ que satisfaz

$$\begin{cases} \zeta = 1 \text{ em } W, \ supp(\zeta) \subset U, \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Tomando $v = \zeta^2 u$ em (48), obtemos

$$\int_U \zeta^2 |Du|^2 dx \leq C \int_U f^2 + u^2 dx.$$

Então,

$$\|u\|_{H^1(W)} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Substituindo essa última igualdade em (59), obtemos (47). c.q.d.

Teorema 3.2.2 (Maior Regularidade no Interior)**.** *Seja m um inteiro não negativo e suponha que*

$$a^{ij},\, b^i,\, c \in C^{m+1}(U) \quad i,j = 1, ..., n$$

e

$$f \in H^m(U).$$

Suponha também que $u \in H^1(U)$ é uma solução fraca da EDP elíptica

$$Lu = f \quad \textit{em } U.$$

Então,

$$u \in H^{m+2}_{\text{loc}}(U),$$

e para cada subconjunto aberto $V \subset\subset U$ vale

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right),$$

onde a constante C depende apenas de m, V, U e dos coeficientes de L.

Demonstração: Mostremos por indução em m.

i. Note que o teorema é verdadeiro para $m = 0$, pois, desde que $H^0(U) = L^2(U)$, temos pelo teorema anterior que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{H^0(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

ii. Suponha que o teorema é verdadeiro para algum $k \geq 0$, ou seja, que se

$$a^{ij},\, b^i,\, c \in C^{k+1}(U) \quad \text{e} \quad f \in L^k(U),$$

então $u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(U)$ e $\|u\|_{H^{k+2}(V)} \leq C(\|f\|_{H^k(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$. Queremos mostrar que o teorema é verdadeiro para $k+1$, ou seja, que se

$$a^{ij},\, b^i,\, c \in C^{k+2}(U) \quad \text{e} \quad f \in L^{k+1}(U), \tag{60}$$

e $u \in H^1(U)$ é solução fraca de $Lu = f$, então $u \in H^{k+3}_{\text{loc}}(U)$ e

$$\|u\|_{H^{k+3}(V)} \leq C(\|f\|_{H^{k+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Suponha então que (60) é verdadeiro e $u \in H^1(U)$ é solução fraca de $Lu = f$. Pela hipótese de indução temos que

$$u \in H^{m+2}_{\text{loc}}(U)$$

com estimativa

$$\|u\|_{H^{m+2}(W)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

para cada $W \subset\subset U$ e para uma constante C que depende apenas de m, W, U e dos coeficientes de L. Fixe $V \subset\subset W \subset\subset U$.

Tomando α um multi-índice com

$$|\alpha| = m + 1,$$

e escolha uma função teste $\tilde{v} \in C_c^\infty(W)$. Defina

$$v = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v},$$

e desde que $B[u, v] = (f, v)_{L^2(U)}$, afirmamos que pela integração por partes obteremos

$$B[\tilde{u}, \tilde{v}] = (\tilde{f}, \tilde{v}) \tag{61}$$

para

$$\tilde{u} = D^\alpha u \in H^1(W)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{f} \;=\; & D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left[- \sum_{i,j=1}^n (D^{\alpha-\beta} a^{ij} D^\beta u_{x_i})_{x_j} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_{x_i} + D^{\alpha-\beta} c D^\beta u \right]. \end{aligned}$$

Desde que (61) vale para todo $\tilde{v} \in C_c^\infty(W)$, temos que $\tilde{u}$ é uma solução fraca de

$$L\tilde{u} = \tilde{f} \;\text{ em }\; W.$$

Temos também que $\tilde{f} \in L^2(W)$ com

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Logo, pelo teorema anterior, segue que $\tilde{u} \in H^2(V)$, com

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{H^2(V)} &\leq C(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}) \\ &\leq C(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{L^2(U)}) \end{aligned}$$

Desde que essa desigualdade vale para todo multi-índice α com $|\alpha| = m+1$ e $\tilde{u} = D^\alpha u$, temos que $u \in H^{m+3}(V)$, e

$$\|u\|_{H^{m+3}(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \text{ c.q.d.}$$

Teorema 3.2.3 (Diferenciabilidade Infinita no interior)**.** *Sejam*

$$a^{ij},\, b^i,\, c \in C^\infty(U) \quad i,j = 1,...,n$$

e

$$f \in C^\infty(U).$$

Suponha também que $u \in H^1(U)$ *é uma solução fraca da EDP elíptica*

$$Lu = f \quad \textit{em}\ U.$$

Então,

$$u \in C^\infty(U).$$

Demonstração: Pelo teorema anterior temos que $u \in H^m_{\text{loc}}(U)$ para cada $m = 1, 2, ...$ Portanto, pelo Teorema 2.4.6 temos que $u \in C^k(U)$ para cada $m = 1, 2, ...$ c.q.d.

Exemplo 12. Considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n (a^{ii}u_{x_i})_{x_i} + \mu u = f & \text{em } U \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases}$$

onde U é um aberto limitado, $a^{ii} \in C^{k+1}(U)$, $a^{ii}(x) \in [a, b]$ com $a > 0$ e b finito (note que $a^{ij}(x) = 0$ se $i \neq j$). Pelo Teorema 3.1.3, segue que o problema de valor de fronteira acima possui solução fraca $u \in H^1_0(U)$ para todo $\mu \geq 0$ e $f \in L^2$, pois, sendo $B[\,,\,]$ a forma bilinear do operador L, tem-se pela Desigualdade de Hölder que

$$|B[u,v]| = \left| \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \right| \leq b \sum_{i,j=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^2(U)} \|v_{x_j}\|_{L^2(U)} \leq bn^2 \|u\|_{H^1_0(U)} \|v\|_{H^1_0(U)},$$

e pela Desigualdade de Poincaré,

$$\frac{a}{C}\|u\|^2_{L^2(U)} \leq a\|Du\|^2_{L^2(U)} = \int_U a|Du|^2\, dx \leq B[u,u],$$

e repetindo os cálculos do Teorema 3.1.3, mostra-se a existência da solução fraca. Então, Pelo Teorema 3.2.2, se $f \in H^k$, segue que $u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(U)$. Se a^{ii} e f são funções suaves em U, então pelo Teorema 3.2.3 tem-se que $u \in C^\infty(U)$. Em particular, se $a^{ii}(x) = 1$ (isso é, $Lu = -\Delta u$) e $f \in C^\infty(U)$, então o problema de valor de fronteira

acima possui solução fraca suave.

Vamos agora estudar a regularidade na fronteira, isso é, vamos impor condições na fronteira das funções a^{ij}, b^i e c, e também na fronteira do conjunto U.

Teorema 3.2.4 (Regularidade na fronteira em H^2)**.** *Assuma*

$$a^{ij} \in C^1(\bar{U}),\ b^i, c \in L^\infty(U) \quad i,j = 1,...,n, \tag{62}$$

e

$$f \in L^2(U).$$

Suponha que $u \in H_0^1(U)$ *é uma solução do problema elíptico com valor de contorno*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases} \tag{63}$$

Assuma também que

$$\partial U \text{ é de classe } C^2.$$

Então,

$$u \in H^2(U),$$

e vale a estimativa

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}), \tag{64}$$

onde a constante C *depende apenas de* U *e dos coeficientes de* L*.*

Obs.: Se $u \in H_0^1(U)$ é a única solução fraca de (63), então pelo, Teorema 3.1.6, a estimativa (64) se reduz para

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}.$$

Demonstração: Suponha inicialmente o caso especial no qual U é a meia esfera

$$U = B(0,1) \cap \mathbb{R}^n_+.$$

Defina $V = B(0,1/2) \cap \mathbb{R}^n_+$, e tome uma função suave de corte ζ satisfazendo

$$\begin{cases} \zeta = 1 \text{ em } B(0,1/2),\ \zeta = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n = B(0,1), \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Como u é uma solução fraca de (63), temos que $B[u,v] = (f,v)$ para toda

$v \in H_0^1(U)$. Consequentemente,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U \tilde{f} v dx, \tag{65}$$

para

$$\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu.$$

Seja $h > 0$ suficientemente pequeno. Escolha $k \in \{1, ..., n-1\}$, e defina

$$v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u).$$

Então,

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h}(\zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]) \\ &= \frac{1}{h^2}(\zeta^2(x - he_k)[u(x) - u(x - he_k)] - \zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]) \end{aligned}$$

para $x \in U$ Como $u = 0$ em $\{x_n = 0\}$ no sentido do traço e $\zeta = 0$ próxima de ∂U, temos que $v \in H_0^1(U)$.

Reescreva a identidade (65) como

$$A = B \tag{66}$$

onde

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx$$

e

$$B = \int_U \tilde{f} v dx.$$

De forma análoga ao Teorema 3.2.1 mostra-se que

$$A \geq \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - C \int_U |Du|^2 dx$$

e

$$|B| \leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\theta} \int_U f^2 + u^2 dx + \frac{C}{\theta} \int_U |Du|^2 dx$$

para alguma constante C. Segue de (66) e das estimativas para A e $|B|$ acima que

$$\int_V |D_k^h Du|^2 dx \leq C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx$$

para $k = 1, ..., n-1$. Pela observação do Teorema 7 do Anexo C, temos que

$$u_{x_k} \in H^1(V) \quad k = 1, ..., n-1$$

com estimativa

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l<2n}}^{n} \|u_{x_k x_l}\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}). \tag{67}$$

Pela Obs. 2 do Teorema 3.2.1 (pg. 59), $Lu = f$ q.t.p. em U. Da definição de L, podemos reescrevê-la na forma divergente como

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b} u_{x^i} + cu = f,$$

onde $\tilde{b}^i = b^i - \sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x^j}$, $i = 1, ..., n$. Então,

$$a^{nn} u_{x_n x_n} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2n}}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b} u_{x^i} + cu - f, \tag{68}$$

Da condição de elipticidade uniforme, $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ para todo $x \in U$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Em particular para $\xi = e_n$,

$$a^{nn}(x) \geq \theta > 0 \tag{69}$$

para todo $x \in U$. Então, de (62), (68) e (69), temos que

$$|u_{x_n x_n}| \leq C \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2n}}^{n} |u_{x_i x_j}| + |Du| + |u| + |f| \right)$$

em U. Usando essa estimativa em (67) obtemos que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

para alguma constante C.

Suponha agora que U é um conjunto aberto qualquer (limitado). Tomando $x^0 \in \partial U$, como ∂U é de classe C^2, temos que, se necessário fazer uma troca de variáveis,

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \,|\, x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

para alguma $r > 0$ e alguma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Escreva

$$y = \Phi(x), \quad x = \Psi(y),$$

onde Φ e Ψ são funções de troca de variáveis.

Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de forma que a meia esfera $U' = = B(0,s) \cap \{y_n > 0\}$ esteja contida em $\Phi(U \cap B(x^0, r))$. Defina $V' = B(0, s/2) \cap \{y_n > 0\}$ e defina

$$u'(x) = u(\Psi(y)), \quad u \in U'.$$

Note que

$$u' \in H^1(U')$$

e

$$u' = 0 \text{ em } \partial U' \cap \{y_n = 0\}$$

no sentido do traço.

Temos então que u' é uma solução fraca da EDP

$$L'u' = f' \text{ em } U', \tag{70}$$

para

$$f'(y) = f(\Psi(y))$$

e

$$L'u' = -\sum_{k,l=1}^{n} (a'^{kl} u'_{yk})_{y_l} + \sum_{k=1}^{n} b'^{k} u'_{y_k} + c'u',$$

onde

$$a'^{kl}(y) = \sum_{r,s=1}^{n} a^{rs}(\Psi(y)) \Phi^k_{x_r}(\Psi(y)) \Phi^l_{x_r}(\Psi(y)), \quad k,l = 1, ..., n,$$

$$b'_k(y) = \sum_{r=1} b^r(\Psi(y)) \Phi^k_{x_r}(\Psi(y)), \quad k = 1, ..., n$$

e

$$c'(y) = c(\Psi(y))$$

para $y \in U'$, $k, l = 1, ..., n$.

Se $v' \in H^1_0(U')$ e $B'[,]$ denota a forma bilinear associada ao operador L', temos que

$$B'[u', v'] = \int_{U'} \sum_{k,l=1}^{n} a'^{kl} u'_{y_k} v'_{y_l} + \sum_{k=1}^{n} b'^{k} u'_{y_k} v' + c'u'v'dy.$$

Defina

$$v(x) = v'(\Phi(x)).$$

Da forma bilinear acima temos

$$B'[u', v'] = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \int_{U'} a'^{kl} u_{x_i} \Psi^i_{y_k} v_{x_j} \Psi^j_{y_l} dy + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{U'} b'^{k} u_{x_i} \Psi^i_{y_k} v dy + \int_{U'} c'uvdy.$$

Então, da definição de a'^{kl} temos

$$\sum_{k,l=1}^{n} a'^{kl}\Psi^i_{y_k}\Psi^j_{y_l} = \sum_{rs=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n} a^{rs}\Phi^k_{x_r}(\Psi(y))\Phi^l_{x_r}(\Psi(y))\Psi^i_{y_k}(y)\Psi^j_{y_l}(y) = a^{ij},$$

pois $D\phi = (D\Psi)^{-1}$. Analogamente,

$$\sum_{k=1}^{n} b'^{k}\Psi^i_{y_k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} b^r\Phi^k_{x_r}\Psi^i_{y_k} = b^i.$$

Substituindo então na forma bilinear B' e fazendo a troca de variáveis, como $|\det D\Phi| = = 1$,

$$\begin{aligned} B'[u',v'] &= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}v + cuvdx \\ &= B[u,v] = (f,v)_{L^2(U)} = (f',v')_{L^2(U')}, \end{aligned}$$

mostrando então (70).

Mostremos que o operador L' é uniformemente elíptico em U'. De fato, para $y \in U'$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{n} a'^{kl}(y)\xi_k\xi_l &= \sum_{r,s=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n} a^{rs}(\Psi(y))\Phi^k_{x_r}\Phi^l_{x_s}\xi_k\xi_l \\ &= \sum_{r,s=1}^{n} a^{rs}(\Psi(y))\eta_r\eta_s \geq \theta|\eta|^2, \end{aligned}$$

onde $\eta = \xi D\Phi$, e então $\eta_r = \sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{x_r}\xi_k$. Então, como $\xi = \eta D\Psi$, temos que $|\xi| \leq C|\eta|$. Temos então que

$$\sum_{k,l=1}^{n} a'^{kl}\xi_k\xi_l \geq \theta'|\xi|^2.$$

Note que os coeficientes a'^{kl} são de classe C^1, pois Φ e Ψ são de classe C^2.

Segue então pelo caso particular feito inicialmente que $u' \in H^2(V')$, com estimativa

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C(\|f'\|_{L^2(U')} + \|u'\|_{L^2(U')}).$$

Logo,

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

para $V = \Psi(V')$.

Desde que ∂U é compacto, podemos cobrir ∂U com uma quantidade finita de conjuntos $V_1, ..., V_n$, obtendo então que $u \in H^2(U)$ com a estimativa (64). c.q.d.

Teorema 3.2.5 (Maior regularidade na fronteira)**.** *Seja m um inteiro não negativo, e*

sejam

$$a^{ij},\ b^i,\ c \in C^{m+1}(\bar{U}) \quad i,j = 1, ..., n \tag{71}$$

e

$$f \in H^m(U).$$

Suponha que $u \in H_0^1(U)$ *é uma solução do problema elíptico com valor de contorno*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

Assuma também que

$$\partial U \text{ é de classe } C^{m+2}.$$

Então,

$$u \in H^{m+2}(U),$$

e vale a estimativa

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

onde a constante C *depende apenas de* m, U *e dos coeficientes de* L.

Obs.: Se u é a única solução fraca do problema de valor de fronteira, então a desigualdade pode ser reduzida a

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C\|f\|_{H^m(U)}.$$

Demonstração: Façamos primeiro o caso

$$U = B(0, s) \cap \mathbb{R}^n_+$$

para algum $s > 0$. Fixe $0 < t < s$ e defina $V = B(0, t) \cap \mathbb{R}^n_+$.

Provemos por indução em m. Note que o caso particular $m = 0$ segue do teorema anterior. Suponha, como Hipótese de Indução, que o teorema é verdadeiro para algum $m \geq 0$. Suponha então que

$$a^{ij},\ b^i,\ c \in C^{m+2}(\bar{U}) \quad i,j = 1, ..., n,$$

$$f \in H^{m+1}(U), \tag{72}$$

e que U é uma solução fraca de $Lu = f$ que se anula em $\{x_n = 0\}$ no sentido do traço. Fixe $0 < t < r < s$ e tome $W = B(0, r) \cap \mathbb{R}^n_+$. Pela Hipótese de Indução, temos que

$$u \in H^{m+2}(W),$$

com estimativa

$$\|u\|_{H^{m+2}(W)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \tag{73}$$

Temos também, pelo Teorema 3.2.2, que $u \in H^{m+3}_{\text{loc}}(U)$.

Considere o multi-índice α com

$$|\alpha| = m + 1$$

e

$$\alpha_n = 0$$

Então, a função

$$\tilde{u} = D^\alpha u$$

pertence a $H^1(U)$ e se anula na fronteira $\{x_n = 0\}$ no sentido do traço. Pela demonstração do Teorema 3.2.2, $\tilde{u}$ é solução fraca de $L\tilde{u} = \tilde{f}$ em U, onde

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left[- \sum_{i,j=1}^{n} (D^{\alpha-\beta} a^{ij} D^\beta u_{x_i})_{x_j} + \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=1}^{n} D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_{x_i} + D^{\alpha-\beta} c D^\beta u \right]. \end{aligned}$$

De (71), (72) e (73), temos que $\tilde{f} \in L^2(W)$ com

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Pela demonstração do Teorema 3.2.4 temos que $\tilde{u} \in H^2(V)$ com estimativa

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{H^2(V)} &\leq C \left(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)} \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|D^\beta u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \tag{74}$$

para todo multi-índice β com $|\beta| = m + 3$ e

$$\beta_n = 0, 1 \text{ ou } 2.$$

Mostremos agora que (74) vale para todo $|\beta|$. Por indução, suponha que

$$\|D^\beta u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \tag{75}$$

para todo multi-índice β com $|\beta| = m+3$ e $\beta_n = 0, 1, ..., j$ para $j \in \{2, ..., m+2\}$. Assuma

$|\beta| = m+3$ com $\beta_n = j+1$. Escreva $\beta = \gamma + \delta$, onde $\delta = (0,...,0,2)$ e $|\gamma| = m+1$. Desde que $u \in H^{m+3}_{\text{loc}}(U)$ e $Lu = f$ em U, temos que $D^\gamma Lu = D^\gamma f$ q.t.p. em U. Então,

$$D^\gamma Lu = a^{nn} D^\beta u + \{ \text{ soma das derivadas de } u \text{ de ordem no máximo } m+3$$
$$\text{com derivadas de } u \text{ em relação à } x_n \text{ com ordem de}$$
$$\text{no máximo } j \ \}.$$

Como $a^{nn} \geq \theta > 0$, temos por (75) e da hipótese $\beta_n = 0, 1, ..., j$ que

$$\|D^\beta u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

para $|\beta| = m+3$ e $\beta_n = j+1$.

Portanto, segue por indução em j que

$$\|u\|_{H_{m+3}(U)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

e essa desigualdade completa a indução em m iniciada anteriormente.

O caso geral segue de passos análogos feitos na demonstração do teorema anterior, e também do uso do Teorema 3.2.2. c.q.d.

Teorema 3.2.6 (Diferenciabilidade infinita na fronteira)**.** *Sejam*

$$a^{ij},\ b^i,\ c \in C^\infty(\bar{U}) \quad i,j = 1,...,n$$

e

$$f \in C^\infty(\bar{U}).$$

Suponha que $u \in H^1_0(U)$ *é uma solução do problema elíptico com valor de contorno*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

Assuma também que

$$\partial U \text{ é de classe } C^\infty.$$

Então,

$$u \in C^\infty(\bar{U}).$$

Demonstração: Pelo teorema anterior temos que $u \in H^m(U)$ para cada inteiro $m = 1, 2, ...$ Então, pelo Teorema 2.4.6, $u \in C^k(\bar{U})$ para todo $k = 1, 2, ...$ c.q.d.

Exemplo 12 (cont.). Se no Exemplo 12 (página 65) for considerado U como sendo uma bola aberta, desde que a fronteira de uma bola aberta é de classe C^∞, tem-se

pelo Teorema 3.2.5 que $u \in H^{k+2}$ se $a^{ii} \in C^{k+1}(\bar{U})$ e $f \in H^k(U)$; e $u \in C^\infty(\bar{U})$ se $a^{ij} \in C^\infty(\bar{U})$ e $f \in C^\infty(U)$. Por outro lado, se U for um retângulo aberto não é possível afirmar propriedades da solução u na fronteira, pois a fronteira de um retângulo é de classe C^0. Também não é possível afirmar propriedades de u na fronteira se U for um aberto que forma uma espiral em torno de um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, pois nesse ponto o conjunto não é de classe C^k, qualquer que seja $k \geq 1$.

3.3 Princípio do Máximo

O método do princípio do máximo é baseado no fato de que se uma função u de classe C^2 possui um ponto de máximo no ponto x_0 do aberto U, então

$$Du(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad D^2u(x_0) \leq 0,$$

onde $D^2u(x_0) \leq 0$ significa que a matriz D^2u é semidefinida negativa no ponto x_0.

Aqui será considerado a forma não-divergente de L, que é dada por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu,$$

onde os coeficientes a^{ij}, b^i e c são contínuos, e serão assumidas também a condição de elipticidade uniforme e a condição de simetria $a^{ij} = a^{ji}$.

Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Primeiramente serão identificadas as condições para que a função possua máximo, ou mínimo, na fronteira.

Teorema 3.3.1 (Princípio do Máximo Fraco)**.** *Suponha que* $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ *e* $c = 0$ *em* U*.*

(i) Se

$$Lu \leq 0 \quad \textit{em } U,$$

então

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(ii) Se

$$Lu \geq 0 \quad \textit{em } U,$$

então

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

Obs.: Uma função que satisfaz a condição (i) acima é dita subsolução. Analogamente, uma função que satisfaz a condição (ii) é dita supersolução.

Demonstração: Suponhamos primeiro que

$$Lu < 0 \quad \text{em } U,$$

e que exista um ponto $x_0 \in U$ tal que

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u.$$

Da hipótese de que x_0 é ponto de máximo, temos que

$$Du(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad D^2u(x_0) \leq 0.$$

Como a matriz $A = (a^{ij}(x_0))_{i,j}$ é simétrica e positiva definida, existe uma matriz ortogonal $O = (o_{ij})_{i,j}$ tal que

$$OAO^t = diag(d_1, ..., d_n), \quad OO^t = I,$$

onde $d_k > 0$ para $k = 1, ..., n$. Escreva $y = x_0 + O(x - x_0)$. Daí, $x - x_0 = O^t(y - x_0)$, e então

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj}, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Então no ponto x_0,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} &= \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_k u_{y_k y_k} \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pois $d_k > 0$ e $u_{y_k y_k}(x_0) \leq 0$.

Então, pela desigualdade anterior e por $Du(x_0) = 0$, temos no ponto x_0 que

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} \geq 0.$$

Mas isso é uma contradição. Logo, $x_0 \notin U$

Suponha agora que $Lu \leq 0$, e escreva

$$u_k(x) = u(x) + \frac{1}{k} e^{\lambda x_1} \quad x \in U,$$

onde $\lambda > 0$ é fixo e k é um natural. Pela condição de elipticidade uniforme, temos que

$a^{ii}(x) \geq \theta$ para todo $i = 1, ..., n$ e $x \in U$. Então,

$$\begin{aligned} Lu_k &= Lu + \frac{1}{k} L(e^{\lambda x_1}) \\ &\leq \frac{1}{k} e^{\lambda x_1}[-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1] \\ &\leq \frac{1}{k} e^{\lambda x_1}[-\lambda^2 \theta + \|b\|_{L^\infty(U)} \lambda] \\ &< 0 \quad \text{em } U, \end{aligned}$$

para $\lambda > 0$ suficientemente grande. Logo, pelo caso anterior ($Lu < 0$), temos que $\max_{\bar{U}} u_k = \max_{\partial U} u_k$. Fazendo $k \to \infty$ obtemos $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$ (pois $u_k \to u$ uniformemente em $\bar{U}$), provando (i).

O caso (ii) segue do fato de que uma supersolução de u é também uma subsolução de $-u$. c.q.d.

Teorema 3.3.2 (Princípio do Máximo Fraco para $c \geq 0$)**.** *Suponha que* $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ *e* $c \geq 0$ *em* U*.*

(i) Se

$$Lu \leq 0 \quad \textit{em } U,$$

então

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+.$$

(ii) Se

$$Lu \geq 0 \quad \textit{em } U,$$

então

$$\min_{\bar{U}} u \geq -\max_{\partial U} u^-.$$

Obs.: No caso $Lu = 0$ em U temos

$$\max_{\bar{U}} |u| = \max_{\partial U} |u|.$$

Obs.: u^+ e u^- denotam as partes positiva e negativa de u, respectivamente, sendo

$$u^+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } u(x) > 0 \\ 0 & \text{se } u(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad u^-(x) = \begin{cases} -u(x) & \text{se } u(x) < 0 \\ 0 & \text{se } u(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Demonstração: Seja u uma subsolução e seja $V = \{x \in U \mid u(x) > 0\}$. Então

$$\begin{aligned} Ku &:= Lu - cu \\ &\leq -cu \leq 0 \quad \text{em } V. \end{aligned}$$

Logo, o operador K se enquadra nas hipóteses do Teorema 3.3.1, e portanto

$$\max_{\bar{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial U} u^+.$$

Isso mostra o caso (i) se $V \neq \emptyset$. Caso $V = \emptyset$, então $u \leq 0$ em todo o U, e então o caso (i) é trivial.

O caso (ii) segue aplicando o caso (i) na função $-u$, junto com a observação que $(-u)^+ = u^-$. c.q.d.

Exemplo 13. Considere o operador elíptico L onde $a^{11}(x,y) = 2$, $a^{12}(x,y) = a^{21}(x,y) = 1$ $a^{22}(x,y) = 3$, $b^1(x,y) = -x$, $b^2(x,y) = -y$ e $c(x,y) = 1$, isso é,

$$Lu = -(2u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy}) - xu_x - yu_y + u.$$

Claramente, se U é um aberto limitado, o paraboloide $u(x,y) = x^2 + y^2 + k$ possui ponto de máximo em ∂U, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$. Note que para $k = 0$, o operador L aplicado em $u(x,y) = x^2 + y^2$ é

$$Lu(x,y) = -10 - 2x^2 - 2y^2 + x^2 + y^2 = -(x^2 + y^2 + 10),$$

sendo então estritamente negativo, qualquer que seja o aberto U de $\mathbb{R}^2$. Logo, pelo resultado (i) do teorema acima, desde que $u(x,y) \geq 0$, u possui ponto de máximo na fronteira. No entanto para $k = -1$, isso é, $u(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, e $U \subset B(0,1)$, o Teorema 3.3.2 afirma que $\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+ = 0$, não sendo possível afirmar que seu ponto de máximo está na fronteira; adicionalmente, no caso de $c(x,y) = 0$, o Teorema 3.3.1 afirma então que u tem o seu máximo na fronteira.

Lema 3.3.1 (Lema de Hopf)**.** *Suponha que* $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ *e*

$$c = 0 \quad \textit{em } U.$$

Suponha também que

$$Lu \leq 0 \quad \textit{em } U$$

e que existe um ponto $x_0 \in \partial U$ *tal que*

$$u(x_0) > u(x) \quad \textit{para todo } x \in U. \tag{76}$$

Suponha também U *satisfaz a condição da bola interior em* x_0*, isso é, existe uma bola aberta* $B \subset U$ *com* $x_0 \in \partial B$*.*

(i) Então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0,$$

onde η é o vetor normal à B em x_0.

(ii) Se

$$c \geq 0 \quad \textit{em } U,$$

a mesma conclusão anterior valerá se

$$u(x_0) \geq 0.$$

Obs.: A condição da bola interior vale se ∂U é de classe C^2.
Demonstração: Suponha que $c \geq 0$. Tome $B = B(0, r)$ para algum raio $r > 0$. Defina

$$v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}, \quad x \in B(0, r)$$

para algum $\lambda > 0$ fixo. Então, pela condição de elipticidade uniforme,

$$\begin{aligned} Lv &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i v_{x_i} + cv \\ &= e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda\delta_{ij}) - \\ &\quad -e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i=1}^{n} 2b^i \lambda x_i + c(e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}) \\ &\leq e^{-\lambda|x|^2}(-4\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda tr(A) + 2\lambda|b||x| + c), \end{aligned}$$

onde $A = (a^{ij})_{i,j}$ e $b = (b^1, ..., b_n)$. Considere a região anelar $R = B(0, r) - B[0, r/2]$. Então,

$$Lv \leq e^{-\lambda|x|^2}(-\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda tr(A) + 2\lambda|b||x| + c) \leq 0 \tag{77}$$

em R para algum $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Da hipótese (76), existe uma constante $\varepsilon > 0$ suficientemente pequena tal que

$$u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \quad x \in \partial B(0, r/2). \tag{78}$$

Temos também que

$$u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \quad x \in \partial B(0, r), \tag{79}$$

pois $v = 0$ em $\partial B(0, r)$.

Por (77) temos que

$$L(u + \varepsilon v - u(x_0)) \leq -cu(x_0) \leq 0 \quad \text{em } R,$$

e por (78) e (79) temos que

$$u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0 \quad \partial R.$$

Pelo Teorema 3.3.2 temos que $u+\varepsilon v-u(x_0) \leq 0$ em R. Mas $u(x_0)+\varepsilon v(x_0)-u(x_0) = 0$, e então,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -\frac{\varepsilon}{r} Dv(x_0) \cdot x_0 = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0,$$

como gostaríamos. $_{\text{c.q.d.}}$

Mostremos agora que se u é uma subsolução (ou supersolução) que contém um ponto de máximo (ou mínimo) no interior de U, então u é uma função constante.

Teorema 3.3.3 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Suponha que* $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ *e*

$$c = 0 \quad \textit{em } U.$$

Suponha também que U *é um aberto conexo e limitado.*

(i) Se

$$Lu \leq 0 \quad \textit{em } U$$

e u *contém um máximo sobre* $\bar{U}$ *em um ponto interior, então*

u *é constante dentro de* U*.*

(ii) Se

$$Lu \geq 0 \quad \textit{em } U$$

e u *contém um mínimo sobre* $\bar{U}$ *em um ponto interior, então*

u *é constante dentro de* U*.*

Demonstração: Tome $M = \max_{\bar{U}} u$ e $C = \{x \in U \,|\, u(x) = M\}$. Então, por absurdo, se fosse $U \neq M$, o conjunto

$$V = \{x \in U \,|\, u(x) < M\}$$

é não vazio. Escolha um ponto $y \in V$ satisfazendo $dist(y, C) < dist(y, \partial U)$, e seja B uma bola de maior raio com centro em y contida em V. Então existe um ponto $x_0 \in C$ com $x_0 \in \partial B$. Como V satisfaz a condição da bola interior no ponto x_0, temos pelo

Lema de Hopf (aplicado no conjunto V) que $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$. Mas isso é uma contradição, pois como u tem máximo em $x_0 \in U$, temos que $Du(x_0) = 0$. $_{\text{c.q.d.}}$

Teorema 3.3.4 (Princípio do Máximo Forte com $c \geq 0$)**.** *Suponha que* $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ *e*

$$c \geq 0 \quad \textit{em } U.$$

Suponha também que U *é um aberto conexo e limitado.*

(i) Se

$$Lu \leq 0 \quad \textit{em } U$$

e u *contém um máximo não negativo sobre* $\bar{U}$ *em um ponto interior, então*

$$u \textit{ é constante dentro de } U.$$

(ii) Se

$$Lu \geq 0 \quad \textit{em } U$$

e u *contém um mínimo não positivo sobre* $\bar{U}$ *em um ponto interior, então*

$$u \textit{ é constante dentro de } U.$$

Demonstração: A demonstração é análoga à anterior, exceto que na aplicação do Lema de Hopf deve-se usar a afirmação (ii) do Lema de Hopf. $_{\text{c.q.d.}}$

3.3.1 Desigualdade de Harnack

Teorema 3.3.5 (Desigualdade de Harnack)**.** *Suponha que* $u \geq 0$ *é uma solução de classe* C^2 *de*

$$Lu = 0 \quad \textit{em } U,$$

e suponha que $V \subset\subset U$ *é conexo. Então existe uma constante* C *tal que*

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

A constante C *depende somente de* V *e dos coeficientes de* L*.*

Demonstração: Podemos supor que $u > 0$ em U, pois caso contrário, basta aplicar o resultado na função $u + \varepsilon$ e tomar $\varepsilon \to 0^+$.

Seja

$$v = log(u).$$

De $Lu = 0$ e $v = log(u)$, encontramos

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i x_j} + a^{ij} v_{x_i} v_{x_j} = 0 \quad \text{em } U. \tag{80}$$

Defina

$$w = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i} v_{x_j}. \tag{81}$$

Então, por (80)

$$w = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i x_j}. \tag{82}$$

Por (81), para $k, l = 1, ..., n$, temos que

$$w_{x_k x_l} = \sum_{i,j=1}^{n} 2a^{ij} v_{x_i x_k x_l} v_{x_j} + 2a^{ij} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} + R,$$

onde R é a soma dos termos que há as derivadas dos coeficientes a^{ij} e satisfaz a estimativa

$$|R| \leq \varepsilon |D^2 v|^2 + C(\varepsilon)|Dv|^2 \tag{83}$$

para cada $\varepsilon > 0$. Então,

$$\begin{aligned} -\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} w_{x_k x_l} &= 2\sum_{i,j=1}^{n} \left[a^{ij} v_{x_j} \left(-\sum_{k,l=1}^{n} a^{lk} v_{v_{x_i x_k x_l}} \right) - \right. \\ &\quad \left. -2\sum_{k,l=1}^{n} a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} \right] - R. \end{aligned} \tag{84}$$

Por (82), temos

$$-\sum_{k,l=1}^{n} a^{lk} v_{x_i x_k x_l} = w_{x_i} + R_i \quad i = 1, ..., n \tag{85}$$

onde R_i é um termo que também satisfaz a estimativa (83). Mais ainda, pela condição de elipticidade uniforme, temos

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} \geq \theta^2 |D^2 v|^2. \tag{86}$$

Substituindo então (85) e (86) em (84) e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos a desigualdade diferencial

$$-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} w_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k w_{x_k} \geq \theta^2 |D^2 v|^2 - C|Dv|^2, \tag{87}$$

onde

$$b^k = -2\sum_{l=1}^{n} a^{kl} v_{x_l} \quad k = 1, ..., n.$$

Seja $V \subset\subset U$ uma bola aberta de raio $r > 0$. Escolha uma função de corte $\zeta \in C^\infty(U)$ tal que

$$0 \leq \zeta \leq 1, \ \ \zeta = 0 \ \text{ em } \partial U, \ \ \zeta = 1 \ \text{ em } V.$$

Seja

$$z = \zeta^4 w.$$

Como z é contínua com suporte compato,

$$z \text{ tem um ponto de máximo em } x_0 \in U.$$

Então , em x_0,

$$\zeta w_{x_k} + 4\zeta_{x_k} w = 0 \quad k = 1, ..., n. \tag{88}$$

Também temos a seguinte desigualdade em x_0:

$$0 \leq -\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} z_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k z_{x_k} = -\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} (\zeta^4 w)_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k (\zeta^4 w)_{x_k}.$$

Então,

$$0 \leq \zeta^4 \left(-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} w_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k w_{x_k} \right) + \hat{R}, \tag{89}$$

onde $\hat{R}$ é a soma das parcelas que possuem as derivadas de ζ, e $\hat{R}$ satisfaz a estimativa

$$|\hat{R}| \leq C(\zeta^2 w + \zeta^3 |Dw|).$$

Mas por (88), temos que

$$|\hat{R}| \leq C\zeta^2 w.$$

Inserindo essa desigualdade e a desigualdade (87) em (89), obtemos

$$\zeta^4 |D^2 v|^2 \leq C\zeta^4 |Dv|^2 + C\zeta^2 w.$$

Mas de (81) temos que $\theta |Dv|^2 \leq w$, e por (82) temos que $w \leq C|D^2 v|$. Segue então que

$$\zeta^4 w^2 \leq C\zeta^2 w,$$

e portanto

$$z = \zeta^4 w \leq C \quad \text{no ponto } x_0.$$

Desde que z atinge um máximo em x_0, e desde que $\zeta = 1$ em V, temos que

$$|Dv| \leq C \quad \text{dentro de } V.$$

Tomando $x_1, x_2 \in V$, temos

$$v(x_2) - v(x_1) \leq 2 \sup_V |Dv| r \leq C,$$

onde r é o raio da bola V. Como $v = log(u)$, obtemos que

$$u(x_2) \leq u(x_1) e^C.$$

Essa desigualdade é válida para todo $x_1, x_2 \in V$, e então a desigualdade de Harnack é válida se V é uma bola. No caso geral $V \subset\subset U$, podemos cobrir V com uma quantidade finita de bolas e repetir a desigualdade acima. $_{\text{c.q.d.}}$

4 O problema do autovalor

Considere agora o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lw = \lambda w & \text{em } U \\ w = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}, \tag{90}$$

onde U é um aberto limitado, e λ é um autovalor de L se existir uma solução não trivial de (90). Conforme visto anteriormente, o conjunto de autovalores de L é finito ou enumerável (Teorema 3.1.5).

Por simplicidade, a partir desse ponto será considerado o operador elíptico na sua forma divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j},$$

onde $a^{ij} \in C^\infty(\bar{U})$, $i, j = 1, ..., n$. Será ainda considerada a condição de simetria $a^{ij} = a^{ji}$. Então, o operador L é simétrico, e a forma bilinear associada é comutativa, isso é, $B[u, v] = B[v, u]$ para $u, v \in H_0^1(U)$.

Teorema 4.0.1 (Autovalores de operadores elípticos simétricos)**.**

i) Cada autovalor de L é real.

ii) Se repetirmos cada autovalor de acordo com a sua multiplicidade, obteremos

$$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty},$$

onde

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$$

e

$$\lambda_k \to \infty \ \textit{se} \ \ k \to \infty.$$

iii) Existe uma base ortonormal $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(U)$, onde $w_k \in H_0^1(U)$ é uma autofunção correspondente a λ_k :

$$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k & \textit{em } U \\ w_k = 0 & \textit{em } \partial U. \end{cases}, \tag{91}$$

Pela teoria de regularidade estudada anteriormente, tem-se que $w_k \in C^\infty(U)$, e $w_k \in C^\infty(\bar{U})$ se ∂U é suave.

Demonstração: Como visto no Teorema 3.1.4,

$$S := L^{-1}$$

é um operador linear limitado e compacto de $L^2(U)$ em $L^2(U)$.

Mostremos que S é simétrico. De fato, dados $f, g \in L^2(U)$, então $Sf = u$ indica que $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases},$$

e da mesma forma, $Sg = v$ indica que $v \in H_0^1(U)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} Lv = g & \text{em } U \\ v = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}.$$

Então,

$$(Sf, g) = (u, g) = B[v, u]$$

e

$$(f, Sg) = (f, v) = B[u, v].$$

Uma vez que $B[u, v] = B[v, u]$, temos que $(Sf, g) = (f, Sg)$ para todo $f, g \in L^(U)$. Logo, S é simétrico.

Também temos que

$$(Sf, f) = (u, f) = B[u, u] \geq 0, \quad f \in L^2(U).$$

Pelos teoremas 5 e 6 do Anexo B, temos que os autovalores de S são reais, positivos, e existe autofunções correspondentes que definem uma base ortonormal de $L^2(U)$. Note que, se $\eta \neq 0$, temos que $Sw = \eta w$ sss $Lw = \lambda w$ para $\lambda = 1/\eta$. c.q.d.

Definição: O autovalor $\lambda_1 > 0$ é dito *autovalor principal* de L.

Teorema 4.0.2 (Princípio variacional para o autovalor principal)**.**

i) Temos que

$$\lambda_1 = \min\{B[u, u] \,|\, u \in H_0^1(U),\ \|u\|_{L^2} = 1\}. \tag{92}$$

ii) Mais ainda, o mínimo acima é atingido por uma função w_1, positiva em U, que soluciona o problema

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{em } U \\ w_1 = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

iii) Se $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U, \end{cases}$$

então u é um múltiplo de w_1.

Obs.: (i) A afirmação (iii) diz que o autovalor principal é simples, ou seja,

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots .$$

(ii) A expressão (92) é a *Fórmula de Rayleigh* e é equivalente a

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \frac{B[u,u]}{\|u\|^2_{L^2(U)}}.$$

Demonstração: Por (91) temos que

$$B[w_k, w_k] = \lambda_k \|w_k\|^2_{L^2(U)} = \lambda_k \tag{93}$$

e

$$B[w_k, w_l] = \lambda_k (w_k, w_l) = 0 \tag{94}$$

para todos $k, l = 1, ..., k \neq 0$.

Como $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $L^2(U)$, se $u \in H_0^1(U)$ e $\|u\|_{L^2(U)} = 1$, podemos escrever

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} d_k w_k \tag{95}$$

para $d_k = (u, w_k)_{L^2(U)}$, onde a série converge em $L^2(U)$. Temos também que

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \|u\|^2_{L^2(U)} = 1. \tag{96}$$

Por (93) e (94) temos que $\left\{ \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ é um subconjunto ortonormal de $H_0^1(U)$ munido do produto interno $B[\,,\,]$.

Mostremos que $\left\{ \frac{w_k}{\lambda^{1/2}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $H_0^1(U)$ com o produto interno $B[\,,\,]$. Para mostrar isso, basta mostrar que

$$B[u, w_k] = 0 \quad k = 1, 2, ...$$

implica que $u = 0$. De fato,

$$0 = B[u, w_k] = \lambda_k (w_k, u) \quad k = 1, 2, ...,$$

que força $u = 0$, pois $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base de $L^2(U)$. Então

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}$$

para $\mu_k = B\left[u, \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}\right]$, e a série converge em $H_0^1(U)$. Por (95) temos que $\mu_k = d_k \lambda_k^{1/2}$; e então a série dada em (95) converge em $H_0^1(U)$.

Por (93), (95) (96) temos

$$B[u,u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1.$$

Como a desigualdade acima vale para $u = w_1$, a fórmula (92) é verdadeira.

Mostremos que se $u \in H_0^1(U)$ e $\|u\|_{L^2(U)} = 1$, então u é uma solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U, \end{cases} \tag{97}$$

se e somente se

$$B[u,u] = \lambda_1. \tag{98}$$

Note que (97)⇒(98) é imediato. Suponha então que (98) é verdadeiro. Então, para $d_k = (u, w_k)$ tomado acima temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_1 = \lambda_1 = B[u,u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k.$$

Segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) d_k^2 = 0.$$

Logo,

$$d_k = (u, w_k) = 0 \quad \text{se} \quad \lambda_k > \lambda_1.$$

Desde que λ_1 tem multiplicidade finita, segue que

$$u = \sum_{k=1}^{m} (u, w_k) w_k$$

para algum m, onde $Lw_k = \lambda_1 w_k$. Portanto,

$$Lu = \sum_{k=1}^{m} (u, w_k) Lw_k = \sum_{k=1}^{m} (u, w_k) \lambda_1 w_k = \lambda_1 u,$$

provando (97).

Provemos que se $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca de (97) com $u \neq 0$, então

$$u > 0 \text{ em } U \quad \text{ou} \quad u < 0 \text{ em } U. \tag{99}$$

Para mostrar isso, suponha, sem perda de generalidade, que $\|u\|_{L^2(U)} = 1$ e escreva

$$\alpha + \beta = 1$$

para

$$\alpha = \int_U (u^+)^2 dx, \quad \beta = \int_U (u^-)^2 dx.$$

Desde que $u^\pm \in H_0^1(U)$, com

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{q.t.p. em } \{u \geq 0\} \\ 0 & \text{q.t.p. em } \{u \leq 0\} \end{cases}$$

$$Du^- = \begin{cases} 0 & \text{q.t.p. em } \{u \geq 0\} \\ -Du & \text{q.t.p. em } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

temos que $B[u^+, u^-] = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= B[u,u] = B[u^+, u^+] + B[u^-, u^-] \\ &\geq \lambda_1 \|u^+\|^2_{L^2(U)} + \lambda_1 \|u^-\|^2_{L^2(U)} \\ &= (\alpha + \beta)\lambda_1 = \lambda_1. \end{aligned}$$

Logo, da desigualdade acima, que no fato é uma igualdade, obtemos

$$B[u^+, u^+] = \lambda_1 \|u^+\|^2_{L^2(U)}, \quad B[u^-, u^-] = \lambda_1 \|u^-\|^2_{L^2(U)}.$$

Portanto, por (97),

$$\begin{cases} Lu^+ = \lambda_1 u^+ & \text{em } U \\ u^+ = 0 & \text{em } \partial U \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Lu^- = \lambda_1 u^- & \text{em } U \\ u^- = 0 & \text{em } \partial U \end{cases} \tag{100}$$

no sentido fraco.

Como os coeficientes a^{ij} são suaves, deduzimos de (100) que $u^+ \in C^\infty(U)$ e

$$Lu^+ = \lambda_1 u^+ \geq 0 \quad \text{em } U.$$

Então a função u^+ é uma supersolução. Pelo Princípio do Máximo Forte, temos que $u^+ > 0$ ou $u^+ = 0$ em U. Analogamente, $u^- > 0$ ou $u^- = 0$ em U, o que prova (99).

Suponha agora que u e $\tilde{u}$ são duas soluções fracas não triviais de (97). Então,

pelos dois últimos parágrafos,

$$\int_U \tilde{u}\, dx \neq 0,$$

e então existe uma constante real χ tal que

$$\int_U u - \chi\tilde{u}\, dx = 0. \tag{101}$$

Mas como $u - \chi\tilde{u}$ é uma solução fraca de (97), segue pelos dois últimos parágrafos e por (101) que $u = \chi\tilde{u}$ em U. Portanto, o autovalor λ_1 é simples. $_{\text{c.q.d.}}$

Exemplo 14. No Exemplo 11 (pg. 56) vimos que o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & \text{no intervalo } (-\pi, \pi) \\ u = 0 & \text{sobre } \{-\pi, \pi\} \end{cases} \tag{102}$$

possui soluções, onde as soluções são as funções da forma $u_k(x) = a_k \sin(kx)$ e $v(x) = b_k \cos([k - 1/2]x)$ com $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, e o conjunto dos autovalores é

$$\Sigma = \{k^2 \in \mathbb{R}\,;\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{(k - 1/2)^2 \in \mathbb{R}\,;\, k \in \mathbb{N}\}.$$

Note que para a_k e b_k adequados o conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{u_k, v_k\}$ determina uma base ortonormal de L^2 onde as funções u_k e v_k são suaves em $[-\pi, \pi]$. Tem-se também que a função $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, que é associada ao menor autovalor de (102), é positiva, $\|w\|_{L^2(-\pi,\pi)} = 1$ e $B[w, w] = \dfrac{1}{4}$. Nesse problema particular, todos os autovalores do problema (102) são simples.

O exemplo abaixo mostra um problema que possui autovalores de multiplicidade maior que 1.

Exemplo 15. O problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -(u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)) = \lambda u(x, y) & \text{em } U = (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U \end{cases} \tag{103}$$

tem por solução as funções $u(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin(mx) \sin(ny)$ onde $\lambda = m^2 + n^2$ com m e n naturais. Em particular para o autovalor $\lambda = 5$, temos que as autofunções associadas são

$$u(x, y) = c_{1,2} \sin(x) \sin(2y) + c_{2,1} \sin(2x) \sin(y),$$

e desde que as funções $\sin(x) \sin(2y)$ e $\sin(2x) \sin(y)$ são linearmente independentes, temos que a dimensão do autoespaço gerado pelas soluções do problema (103) para o autovalor $\lambda = 5$ é 2; ou seja, o autovalor $\lambda = 5$ não é simples e tem multiplicidade 2.

Para o autovalor $\lambda = 65$, temos que as autofunções associadas são

$$u(x,y) = c_{1,8}\sin(x)\sin(8y) + c_{8,1}\sin(8x)\sin(y) + c_{4,7}\sin(4x)\sin(7y) + c_{7,4}\sin(7x)\sin(4y),$$

e sendo então $u(x,y)$ a combinação linear de 4 funções linearmente independentes, segue que a dimensão do autoespaço gerado pelas soluções do problema (103) para o autovalor $\lambda = 65$ é 4; ou seja, o autovalor $\lambda = 65$ não é simples e tem multiplicidade 4.

5 Conclusão

O interesse da pesquisa é dar um primeiro passo para o estudo do método variacional, que é uma técnica moderna de resolução de equações diferenciais. O objetivo geral é o estudo das equações diferenciais parciais elípticas, em especial a resolução do problema do autovalor em operadores elípticos em um caso particular com coeficientes suaves, tendo como objetivos específicos a construção dos espaços de Sobolev e suas propriedades, a determinação da existência de soluções fracas para operadores elípticos, bem como a regularidade das soluções, e o princípio do máximo.

Como pré-requisitos necessários para atingir os objetivos específicos, destacam-se: conceitos básicos sobre topologia no $\mathbb{R}^n$, análise no $\mathbb{R}^n$, teoria da medida, a integral de Lebesgue, espaço de Lebesgue e alguns tópicos sobre análise funcional. O espaço de Sobolev é de interesse para o estudo das equações diferenciais via método variacional pois o seu caso particular $W^{k,2}$ determina, na realidade, um espaço de Hilbert, isso é, um espaço completo munido de um produto interno. Este fato, aliado com os conceitos sobre análise funcional, é o que fornece, entre outras coisas, a existência das soluções fracas de operadores elípticos, desde que haja condições sobre os coeficientes dos operadores.

Com isso foi possível mostrar: o problema do autovalor em casos particulares de operadores elípticos possui solução; os autovalores são números reais que, quando ordenados, crescem indefinidamente; a existência de uma base ortonormal de L^2 formada por autofunções, donde a teoria de regularidade garante que essas autofunções são suaves; o princípio variacional fornece uma expressão para o autovalor principal, sendo essa expressão o minimizante de um funcional linear que é atingida por uma autofunção associada ao autovalor principal no qual o princípio do máximo garante que essa autofunção é positiva.

São objetivos futuros o estudo mais aprofundado sobre os espaços de Sobolev e sobre análise funcional, as topologias fracas, bem como outros assuntos que são pré-requisito para o método variacional.

Referências

[1] EVANS, L.C.; **Partial differential equations**. 2nd ed. Providence, USA: American Mathematical Society, 2010.

[2] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle**: théorie et applications. Paris : Dunod, 1999.

[3] ROYDEN, H.L.; FITZPATRICK, P.M. **Real analysis**. 4th ed. Boston, USA: Prentice Hall, 2010.

[4] JOST, J. **Partial Differential Equations**. 3th ed. New York, USA: Springer, 2013.

[5] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

[6] KREYZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

[7] BARTLE, R.G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure.** New York, USA: John Wiley & Sons, 1995.

[8] RUDIN, W.; **Principles of mathematical analysis**. 3th ed. New York, USA: McGraw-Hill, 1976.

[9] BIEZUNER, R. J.; **Equações Diferenciais Parciais I/II**. Notas de Aula, UFMG, 2010.

Anexo A - Convolução e sequências regularizantes

O teorema abaixo exibe algumas propriedades sobre as sequências regularizantes.

Teorema 1 (Propriedades das sequências regularizantes)**.**

(i) $f_m = \rho_m * f \in C^\infty(U_{1/j})$*;*

(ii) $f_m \to f$ q.t.p. *quando* $m \to \infty$*;*

(iii) Se $f \in C(U)$*, então* $f_m \to f$ *uniformemente em todo subconjunto compacto de* U*;*

(iv) Se $1 \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$*, então* $f_m \to f$ *em* $L^p_{\text{loc}}(U)$*.*

Demonstração: (i) Fixando $x \in U_{1/j}$, $i \in \{1, ..., n\}$ e h suficientemente pequeno tal que $x + he_i \in U_{1/j}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f_m(x + he_i) - f_m(x)}{h} &= m^n \int_U \frac{1}{h} \left[\rho(m(x + he_i - y)) - \rho(m(x - y))\right] f(y)dy \\ &= m^n \int_V \frac{1}{h} \left[\rho(m(x + he_i - y)) - \rho(m(x - y))\right] f(y)dy \end{aligned}$$

para algum aberto $V \subset\subset U$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{h} \left[\rho(m(x + he_i - y)) - \rho(m(x - y))\right] = m\frac{\partial \rho}{\partial x_i}(m(x + h\theta e_i - y)),$$

e então, desde que x é fixo e V está contido em um compacto, temos pela Propriedade 2 em Funções Contínuas do Anexo C que

$$m\frac{\partial \rho}{\partial x_i}(m(x + h\theta e_i - y)) - m\frac{\partial \rho}{\partial x_i}(m(x - y)) \to 0,$$

e portanto,

$$\frac{1}{h} \left[\rho(m(x + he_i - y)) - \rho(m(x - y))\right] \to m\frac{\partial \rho}{\partial x_i}(m(x - y))$$

uniformemente no aberto $V \subset\subset U$. Logo, a derivada parcial $\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)$ existe e é igual a

$$\int_U \frac{\partial \rho_m}{\partial x_i}(x - y)f(y).$$

Indutivamente mostra-se que $D^\alpha f_m(x)$ existe e

$$D^\alpha f_m(x) = \int_U D^\alpha \rho_m(x - y)f(y)dy, \qquad x \in U_{1/j},$$

para cada α.
(ii) Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue temos

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \tag{104}$$

para quase todo ponto $x \in U$. Seja x um ponto fixo. Então

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,1/m)} \rho_m(x-y)(f(y) - f(x))dy \right| \\ &\leq m^n \int_{B(x,1/m)} \rho(m(x-y))|f(y) - f(x)|dy \\ &\leq C\left(\frac{1}{\alpha(n)(1/m)^n} \int_{B(x,1/m)} |f(y) - f(x)|dy \right) \\ &\leq C \fint_{B(x,1/m)} |f(y) - f(x)|dy \to 0 \text{ quando } m \to \infty, \end{aligned}$$

isso é, $f_m(x) \to f(x)$ para quase todo ponto $x \in U$.
(iii) Seja $f \in C(U)$. Dado $V \subset\subset U$, escolhamos $V \subset\subset W \subset\subset U$ e note que f é uniformemente contínua em W (pois toda função contínua com domínio compacto é uniformemente contínua). Logo o limite em (104) vale uniformemente para $x \in V$ (pois podemos encontrar m que não depende de x). Logo, pelos cálculos acima temos que $f_m \to f$ uniformemente em V.
(iv) Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$. Escolhamos V e W abertos com $V \subset\subset W \subset\subset U$. Mostremos que

$$\|f_m\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}. \tag{105}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} |f_m(x)| &= \left| \int_{B(x,1/m)} \rho_m(x-y)f(y)dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,1/m)} \rho_m^{1-1/p}(x-y)\rho_m^{1/p}(x-y)|f(y)|dy \\ &\leq \left(\int_{B(x,1/m)} \rho_m(x-y)dy \right)^{1-1/p} \left(\int_{B(x,1/m)} \rho_m(x-y)|f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{B(x,1/m)} \rho_m(x-y)|f(y)|^p dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}\int_V |f_m(x)|^p dx &\leq \int_V \left(\int_{B(x,1/m)} \rho_m(x-y)|f(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B(y,1/m)} \rho_m(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_W |f(y)|^p dy,\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade (105). Seja $g \in C(W)$ com

$$\|f-g\|_{L^p(W)} < \delta.$$

Então,

$$\begin{aligned}\|f_m - f\|_{L^p(V)} &\leq \|f_m - g_m\|_{L^p(V)} + \|g_m - g\|_{L^p(V)} + \|g-f\|_{L^p(V)} \\ &\leq \|f-g\|_{L^p(W)} + \|g_m - g\|_{L^p(V)} + \|g-f\|_{L^p(W)} \\ &= 2\delta + \|g_m - g\|_{L^p(V)},\end{aligned}$$

e desde que pelo item (iii) $g_m \to g$ uniformemente em V, temos que

$$\limsup_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta. \text{ c.q.d.}$$

Anexo B - Análise e Análise Funcional

Nos resultados de Análise Funcional a seguir, X denotará um espaço de Banach real. O espaço X^*, dito *dual* de X, denotará o conjunto dos funcionais lineares limitados com domínio em X.

Critério de compacidade de Arzelà-Ascoli: Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais com domínio em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n$$

para alguma constante M. Suponha também que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente contínua, isso é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $|x - y| < \delta$, então $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então existe subsequência $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função contínua f tal que

$$f_{n_j} \to f \quad \text{uniformemente em subconjuntos compactos de } \mathbb{R}^n.$$

Definição: Diz-se que uma sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge fracamente para $u \in X$, e escreve-se $u_k \rightharpoonup u$, se $\langle f, u_k\rangle = \langle f, u\rangle$ para todo funcional $f \in X^*$.

Teorema 2 (Compacidade fraca)**.** *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que a sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ é limitada. Então, existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ e $u \in X$ tais que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

Como $H_0^1(U)$ é espaço de Hilbert, segue que $H_0^1(U)$ é reflexivo. Logo, toda sequência limitada em $H_0^1(U)$ possui subsequência que converge fracamente em $H_0^1(U)$.

Teorema 3 (Alternativa de Fredholm)**.** *Seja $K : H \to H$ um operador linear compacto. Então:*

(i) $N(I - K)$ *tem dimensão finita;*

(ii) $Im(I - K)$ *é fechado;*

(iii) $Im(I - K) = N(I - K^*)^{\perp}$*;*

(iv) $N(I - K) = \{0\}$ *se, e somente se,* $Im(I - K) = H$*;*

(v) $dim(N(I - K)) = dim(N(I - K^*))$*,*

onde K^* é o adjunto de K, isso é, K^* é tal que $(Ku, v) = (u, K^*v)$ para todos $u, v \in H$.

Note que pelo item (iv) te-se que vale apenas uma das duas opções:

(a): para cada $f \in H$, a equação $u - Ku = f$ possui uma única solução,

ou

(b): a equação homogênea $u - Ku = 0$ possui soluções não nulas.

Definição: Seja $A : X \to X$ um operador linear limitado. O conjunto resolvente de A é

$$\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R}\,;\, (A - \eta I) \text{ é bijetor}\},$$

e o espectro de A é

$$\sigma(A) = \mathbb{R} - \rho(A).$$

Os autovalores de A são os valores $\eta \in \sigma(A)$ tais que

$$N(A - \eta I) \neq \{0\},$$

e $\sigma_p(A)$ denota o conjunto dos autovalores de A.

Teorema 4 (Espectro do operador compacto)**.** *Suponha que* $dim(H) = \infty$ *e* $K : H \to H$ *é compacto. Então:*

(i) $0 \in \sigma(K)$*;*

(ii) $\sigma(K) - \{0\} = \sigma_p(K) - \{0\}$*;*

(iii) $\sigma(K) - \{0\}$ *é finito ou* $\sigma(K) - \{0\}$ *é uma sequência que tende à zero.*

Seja $S : H \to H$ um operador linear, limitado e simétrico. Defina

$$m := \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Su, u), \qquad M := \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Su, u).$$

Teorema 5 (Limitação do espectro)**.** *Temos que*

(i) $\sigma(S) \subset [m, M]$*; e*

(ii) $m, M \in \sigma(S)$.

Teorema 6 (Autovetores do operador simétrico e compacto)**.** *Seja* H *um espaço de Hilbert separável, e suponha que* $S : H \to H$ *é um operador simétrico e compacto. Então, existe uma base ortonormal enumerável de* H *formada por autovetores de* S.

Anexo C - Outras Propriedades

Neste anexo encontram-se algumas propriedades sobre funções contínuas, espaço L^p e quociente de diferença que serão usadas em alguns resultados.

Funções contínuas

Propriedade 1. *Se $f : F \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no fechado F, então, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$ com $\|v\| = 1$, existe $h = h(v, \varepsilon) \neq 0$ (positivo ou negativo) tal que $|f(x - hv) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in F \cap (F + hv)$.*

Demonstração: Fixado v com $\|v\| = 1$, suponha por absurdo que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $h \neq 0$, existe $x_h \in F \cap (F + hv)$ tal que $|f(x_h - hv) - f(x_h)| \geq \varepsilon$. Em particular, considerando uma sequência $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $h_n \to 0$, obtemos a sequência limitada $\{x_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$. Logo, a menos de subsequência e por ser F fechado, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in F$. Da continuidade de f em x_0, tome $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/4$ se $x \in B(x_0, \delta) \cap F$. Então, desde que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{h_n}, x_{h_n} - h_n v \in B(x_0, \delta) \cap F$ para todo $n \geq n_0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq |f(x_{h_n} - h_n v) - f(x_{h_n})| \\
&= |(f(x_{h_n} - h_n v) - f(x_0)) + (f(x_0) - f(x_{h_n}))| \\
&\leq |f(x_{h_n} - h_n v) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_{h_n})| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

um absurdo. c.q.d.

Propriedade 2. *Se $f : X \times K \to \mathbb{R}^n$ é contínua com K compacto, e fixado $x_0 \in X$, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todos $\alpha \in K$ e $x \in X$,*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \varepsilon.$$

Demonstração: Supondo o contrário, existiriam $\varepsilon > 0$ e sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ tais que $|x_k - x_o| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| \geq \varepsilon$ para todo k. Desde que K é compacto, a menos de uma subsequência, $\alpha = \lim \alpha_k \in K$, e $x_0 = \lim x_k$, segue pela continuidade de f que $\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} |f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| = |f(x_0, \alpha) - f(x_0, \alpha)| = 0$, uma contradição. c.q.d.

Espaço L^p

Propriedade 3. *Se $f \in L^\infty(E)$ e E tem medida finita não nula, então,*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(a,b)}.$$

Demonstração: De fato, como $f \in L^\infty(E)$, então $|f| \leq \|f\|_{L^\infty(E)}$ q.t.p.. Então, por um lado,

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \lim_{p\to\infty} \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \|f\|_{L^\infty(E)} \lim_{p\to\infty} m(E)^{1/p} = \|f\|_{L^\infty(E)},$$

e por outro lado, desde que o conjunto $X = \{x \in E; |f(x)| > \|f\|_{L^\infty(E)} - \varepsilon\}$ tem medida não nula para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} &= \lim_{p\to\infty} \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&\geq \lim_{p\to\infty} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&\geq (\|f\|_{L^\infty(E)} - \varepsilon) \lim_{p\to\infty} m(X)^{1/p} \\
&= \|f\|_{L^\infty(E)} - \varepsilon,
\end{aligned}$$

e desde que vale para todo $\varepsilon > 0$, então $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \geq \|f\|_{L^\infty(E)}$. Das duas desigualdades segue que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}$.

Quociente de diferença

Seja $u : U \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável e $V \subset\subset U$. O *i-ésimo* quociente de diferença de tamanho h é

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \quad i = 1, ..., n$$

para $x \in V$ e $h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < dist(V, \partial U)$. $D^h u$ denotará $(D_1^h u, ..., D_n^h u)$.

Teorema 7 (Quociente de diferença e derivadas fracas)**.**

(i) Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(U)$. Então, para cada $V \subset\subset U$, vale

$$\|D^h u\|_{L^p(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$$

para alguma constante C e todo $0 < |h| < \frac{1}{2} dist(V, \partial U)$.

(ii) Suponha que $1 < p < \infty$*,* $u \in L^p(V)$*, e que existe uma constante* C *tal que*

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C$$

para todo $0 < |h| < \frac{1}{2} dist(V, \partial U)$*. Então*

$$u \in W^{1,p}(V), \text{ com } \|Du\|_{L^p(V)} \leq C.$$

Obs.: Há uma variante desse teorema que afirma que, considerando, por exemplo, a meia esfera $B[0,1] \cap \{x_n > 0\}$, $V = B[0,1/2] \cap \{x_n > 0\}$, vale

$$\int_V |D_i^h u|^p dx \leq \int_U |u_{x_i}|^p dx \quad \text{para todo} \quad i = 1, ..., n-1.$$