

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THIAGO KERR PADILHA

ANÁLISE DO USO DA SOLUÇÃO DO TIPO BROVAR NO PVCG FIXADO PARA A  
MODELAGEM DO GEOPOTENCIAL NA ESTAÇÃO IHRF PPTE

CURITIBA, PR

2025

THIAGO KERR PADILHA

ANÁLISE DO USO DA SOLUÇÃO DO TIPO BROVAR NO PVCG FIXADO PARA A  
MODELAGEM DO GEOPOTENCIAL NA ESTAÇÃO IHRF PPTE

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências Geodésicas do Programa de Pós Graduação em Ciências Geodésicas, setor de Ciências da Terra, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Lima Rodrigues  
Coorientadora: Prof<sup>a</sup> . Dr<sup>a</sup> . Andrea Galudht  
Santacruz Jaramillo

CURITIBA, PR  
2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Padilha, Thiago Kerr

Análise do uso da solução do tipo Brovar no PVCG fixado para a modelagem do geopotencial na estação IHRF PPTE. / Thiago Kerr Padilha. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências da Terra, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Lima Rodrigues

Coorientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup> Andrea Galudht Santacruz Jaramillo

1. Sistema de referência. 2. International Height Reference System (IHRF),  
3. International Height Reference Frame (IHRF). I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. III. Rodrigues, Tiago Lima. IV. Jaramillo, Andrea Galudht Santacruz. V. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação CIÊNCIAS GEODÉSICAS da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **THIAGO KERR PADILHA**, intitulada: **ANÁLISE DO USO DA SOLUÇÃO DO TIPO BROVAR NO PVCG FIXADO PARA A MODELAGEM DO GEOPOTENCIAL NA ESTAÇÃO IHRF PPTE**, sob orientação do Prof. Dr. TIAGO LIMA RODRIGUES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 27 de Fevereiro de 2025.

Assinatura Eletrônica

28/02/2025 10:37:39.0

TIAGO LIMA RODRIGUES

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

28/02/2025 16:13:05.0

GABRIEL DO NASCIMENTO GUIMARÃES

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA)

Assinatura Eletrônica

28/02/2025 10:41:54.0

REGIANE DALAZOANA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

# AGRADECIMENTOS

- Primeiramente gostaria de agradecer a minha mãe, Irma Kristina Kerr, por todo, carinho, apoio, incentivo e ensinamentos durante toda minha vida, que permitiu com que eu pudesse continuar meus estudos.
- Ao demais membros da minha família, por todos ensinamentos e por todo carinho durante esta trajetória. Em especial ao meu pai Joel Padilha, minha vó Élide Padilha e aos meus irmãos Leandro Kerr e Enzo Padilha.
- A minha namorada, Brenda Miranda, por todo companheirismo, incentivo e ensinamentos. Além de todos ensinamentos sobre física que com certeza contribuíram significativamente para elaboração desta dissertação.
- Ao meu orientador Tiago Lima Rodrigues, e minha co-orientadora Andrea Jaramillo por todos ensinamentos e contribuições para esta dissertação.
- As minhas amizades feitas tanto na cidade de Curitiba quanto na minha cidade natal em Rio Grande, que fizeram com que toda esta trajetória fosse mais leve e divertida.
- Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas por toda estrutura e ensinamentos para elaboração da minha pesquisa. Também gostaria de agradecer a CNPQ pelo fomento, que também é de grande importância para manter uma boa qualidade de pesquisa no País.

# RESUMO

A grande problematização para o estabelecimento do IHRF se dá na padronização da modelagem do campo de gravidade da Terra, na qual busca-se uma precisão de 1 centímetro em termos de altitude científica. Esta problematização fica evidente diante dos resultados obtidos no âmbito do “Experimento Colorado”, no qual quatorze diferentes equipes de pesquisadores ao redor do mundo propuseram suas soluções para serem comparadas. Dentro deste contexto, esta pesquisa busca analisar uma metodologia para o cálculo do geopotencial na futura estação IHRF PPTTE no estado de São Paulo, contribuindo para o estudo do estabelecimento do IHRF no Brasil. A metodologia irá empregar a solução do tipo Brovar para o Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) fixado, o que conduz diretamente ao potencial anômalo na superfície terrestre na estação, e, assim difere das demais soluções estudadas no Brasil até o momento. Além disso, será analisada a aplicação da modificação de Wong e Gore (1969) do núcleo de Hotine-Koch, testando diferentes graus de truncamento, como realizado no âmbito do “Experimento Colorado”. A justificativa para a escolha da solução do PVCG fixado via séries de Brovar baseia-se no uso de distúrbios de gravidade na superfície terrestre como funcional amostrada do campo de gravidade. Neste caso, altitudes elipsoidais com precisão centimétrica ou melhor, obtidas por posicionamento GNSS, podem ser usadas para calcular a gravidade normal na superfície terrestre (ou próximo a ela, como no caso de dados aéreos). Em adição, nos dias atuais a facilidade de obter o posicionamento GNSS junto com a gravimetria terrestre e/ou aérea torna essa solução particularmente interessante e mais alinhada com os aspectos modernos da modelagem do campo gravitacional. Primeiramente, a metodologia será testada na região do “Experimento Colorado”. Na sequência, será aplicada e avaliada para a determinação do valor do geopotencial na futura estação IHRF PPTTE. Adicionalmente, o valor será comparado com os valores encontrados em outros trabalhos.

**Palavras-chave:** IHRF; Geopotencial; Séries de Brovar; PVCG; Experimento Colorado; PPTTE.

# ABSTRACT

The establishment of the International Height Reference Frame (IHRF) faces significant challenges, particularly in standardizing the modeling of Earth's gravity field to achieve a scientific altitude precision of 1 centimeter. This issue is highlighted by the results of the "Colorado Experiment," where fourteen different research teams worldwide proposed solutions for comparison. Within this context, this research aims to analyze a methodology for calculating the geopotential at the future IHRF PPTe station in São Paulo, Brazil, contributing to the study of IHRF establishment in the country. The methodology employs the Brovar-type solution for the fixed Geodetic Boundary Value Problem (GBVP), which directly leads to the anomalous potential at the Earth's surface at the station, differing from other solutions studied in Brazil so far. Additionally, the application of the Wong and Gore (1969) modification to the Hotine-Koch kernel will be analyzed, testing different truncation degrees, as done in the "Colorado Experiment." The choice of the fixed GBVP solution via Brovar series is justified by the use of surface gravity disturbances as a sampled functional of the gravity field. In this case, ellipsoidal heights with centimetric or better precision, obtained by GNSS positioning, can be used to calculate normal gravity at the Earth's surface (or near it, as in airborne data). Moreover, the current ease of obtaining GNSS positioning alongside terrestrial and/or airborne gravimetry makes this solution particularly interesting and aligned with modern aspects of gravitational field modeling. Initially, the methodology will be tested in the "Colorado Experiment" region. Subsequently, it will be applied and evaluated for determining the geopotential value at the future IHRF PPTe station. Additionally, the value will be compared with those found in other studies.

**Keywords:** IHRF; Geopotential; Brovar Series; GBVP; Colorado Experiment; PPTe.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Potencial de um corpo sólido. . . . .	22
Figura 2 – Força centrífuga. . . . .	24
Figura 3 – Perfil de anomalias de gravidade com a técnica de decomposição espectral. . . . .	28
Figura 4 – Discretização da topografia residual. . . . .	33
Figura 5 – Geometria para a solução de Molodensky e Brovar. . . . .	37
Figura 6 – Compartimentos $q_k$ na região de integração. . . . .	41
Figura 7 – Calota esférica da região de integração. . . . .	43
Figura 8 – Comportamento da função de Hotine. . . . .	44
Figura 9 – Comportamento da função de Stokes, com as modificações de Wong e Gore (1969). . . . .	45
Figura 10 – Comportamento da função de Stokes, com as modificações de Meissl (1971). . . . .	46
Figura 11 – Desvios Padrão dos diferentes Data verticais da América do Sul em relação à $W_o$ . . . . .	47
Figura 12 – Distribuição dos dados aéreos (linhas em azul), terrestres e o perfil GSVS17 (Curva em roxo), para o experimento colorado. . . . .	48
Figura 13 – Anomalias de altura residuais obtidas por diferentes soluções ao longo do perfil GSVS17. . . . .	49
Figura 14 – Estações compõem o IHRF no Brasil (Os círculos vermelhos representam a área da densificação gravimétrica). . . . .	50
Figura 15 – Distribuição gravimétrica no entorno das estações IHRF. . . . .	50
Figura 16 – Fluxograma Metodológico para o Experimento Colorado. . . . .	53
Figura 17 – Área de modelagem (Cinza escuro) e área de extrapolação (Cinza claro) na região do Experimento Colorado. . . . .	55
Figura 18 – Grades utilizadas para solução do PVCG. . . . .	60
Figura 19 – Topografia da estação PPTE com o MDE SRTM GL1. . . . .	63
Figura 20 – Fluxograma Metodológico para a estação PPTE. . . . .	64
Figura 21 – Dados Gravimétricos em um raio de 300 km da estação PPTE. . . . .	65
Figura 22 – Metodologia para conversão de marés para o IHRF. . . . .	66
Figura 23 – Graus e ordens dos modelos e do PVCG utilizado. . . . .	67
Figura 24 – Função covariância ajustada e empírica. (a) Para G/O de 300. (b) Para G/O 500. (c) Para G/O 719. . . . .	73
Figura 25 – Grade de distúrbios de gravidade residuais para os valores de G/O de remoção de 300, 500 e 719. . . . .	75

Figura 26 – Testes de G/O de remoção, grau de modificação Wong-Gore e raios de integração. (a) Para G/O de remoção de 300. (b) Para G/O de remoção de 500. (c) Para G/O de remoção de 719. . . . .	76
Figura 28 – Modelo Quase-Geoidal gerado pela melhor configuração em comparação com o perfil GSVS17. . . . .	78
Figura 29 – Solução da UFPR e 12 soluções do EC. . . . .	79
Figura 30 – Soluções da UFPR utilizando diferentes graus de modificação Wong e Gore. (a): Grau de modificação de 180. (b): Grau de modificação de 210. . . . .	80
Figura 31 – Valores estatísticos entre anomalias de altura calculadas e as anomalias de altura de validação do perfil GSVS17. . . . .	81
Figura 33 – Valores de mínimo, máximo e amplitudes das soluções do EC e da UFPR. . . . .	83
Figura 36 – Grade de distúrbios residuais utilizando os dois conjuntos de dados para a estação PPTE. . . . .	90
Figura 38 – Comparação entre $T$ obtido pela presente pesquisa e por demais estudos. . . . .	95
Figura 39 – Comparação entre $W$ obtido pela presente pesquisa e por demais estudos. . . . .	97
Figura 40 – Comparação entre $C_P$ obtido pela presente pesquisa e o valor dado pelo IBGE. . . . .	98
Figura 41 – Comparação entre valores de $H_N$ . . . . .	100
Figura 42 – Comparação entre valores de $H_N$ padronizados ao IHRS. . . . .	101

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Divisão espectral da gravidade e suas fontes de dados. . . . .	29
Tabela 2 – Divisão espectral da gravidade no domínio das frequências. . . . .	29
Tabela 3 – Diferentes configurações propostas para as soluções . . . . .	64
Tabela 4 – Estatísticas referentes à etapa de remoção utilizando diferentes valores de Grau e Ordem. . . . .	71
Tabela 5 – Coeficientes da função covariância ajustada. . . . .	72
Tabela 6 – Estatísticas referentes à etapa de remoção para a estação PPTE. . . . .	84
Tabela 7 – Coeficientes da função polinomial para os dois conjuntos de dados, com e sem o modelo Earth2014. . . . .	89
Tabela 8 – Estatísticas das grades de distúrbios residuais . . . . .	91
Tabela 9 – Valores de anomalia de altura na estação PPTE para cada solução proposta. . . . .	94
Tabela 10 – Valores de potencial anômalo final para cada solução proposta. . . . .	94
Tabela 11 – Valores de Geopotencial e número geopotencial para todas as soluções realizadas. . . . .	96
Tabela 12 – Valores de altitude normal para todas as soluções realizadas. . . . .	99
Tabela 13 – Configurações de $T_0$ e dos conceitos de maré dos autores a serem comparados . . . . .	99

# LISTA DE SIGLAS

ANP	Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis do Brasil
AUTh	Aristotle University of Thessaloniki
BDG	Banco de Dados Geodésicos
BGI	Bureau Gravimetric International
BNDG	Banco Nacional de Dados Gravimétricos
CMQ	Colocação por Mínimos Quadrados
CODATA	Committee on Data for Science and Technology
CPRM	Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais
Curtin	Curtin University
DGFI	Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut
DTU	Technical University of Denmark
DVBI	Datum Vertical Brasileiro de Imbituba
EC	Experimento Colorado
FFT	Fast Fourier Transform (Transformada Rápida de Fourier)
G/O	Grau e Ordem
GGOS	Global Geodetic Observing System
GGRF	Global Geodetic Reference Frame
GGRS	Global Geodetic Reference System
GNSS	Global Navigation Satellite System
GOCE	Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
GRAV-D	Gravity for the Redefinition of the American Vertical Datum
GSI	Geospatial Information Authority of Japan
GSVS17	Geoid Slope Validation Survey 2017

IAG	International Association of Geodesy
IAPG	Institute for Astronomical and Physical Geodesy
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICGEM	International Centre for Global Earth Models
ICRF	International Celestial Reference Frame
ICRS	International Celestial Reference System
IHRF	International Height Reference Frame
IHRS	International Height Reference System
ISG	International Service for the Geoid
ITGRF	International Terrestrial Gravity Reference Frame
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
ITU	Istanbul Technical University
JWG	Joint Working Groups
MDT	Modelo Digital do Terreno
MGG	Modelo Global do Geopotencial
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
NAD83	North American Datum 1983
NGA	US National Geospatial Intelligence Agency
NGS	US National Geodetic Survey
NTIS-GEOF	New Technologies for the Information Society
ON	Observatório Nacional
ONU	Organização das Nações Unidas
Polimi	Politecnico di Milano
PVC	Problema de Valor de Contorno

PVCG	Problema de Valor de Contorno da Geodésia
RAAP	Rede Altimétrica de Alta Precisão
RBMC	Redes Brasileiras de Monitoramento Contínuo
RCR	Remove-Compute-Restore
RTM	Residual Terrain Model
SGB	Sistema Geodésico Brasileiro
TGF	Terrain Gravity Field
TNMM	Topografia do Nível Médio dos Mares
UNESP	Universidade Estadual Paulista
USP	Universidade de São Paulo

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\Delta g$	Anomalia de Gravidade
$\gamma$	Gravidade Normal
$\lambda$	Comprimento de onda
$\omega$	Velocidade angular de rotação
$\Phi$	Potencial centrífugo
$\psi$	Distância esférica
$\rho$	Densidade
$\varsigma$	Anomalia de altura
$\vec{F}_C$	Força Centrífuga
$\vec{F}_g$	Força de atração gravitacional
$C_P$	Número Geopotencial
$G$	Constante de Gravitação Universal
$g$	Gravidade
$GM$	Produto da Constante de Gravitação Universal e a Massa da Terra
$H(\psi)$	Função de Hotine
$N$	Altura geoidal
$S(\psi)$	Função de Stokes
$T$	Potencial Anômalo ou Perturbador
$U$	Esferopotencial
$V$	Potencial de atração
$V_N$	Potencial de atração na Terra Normal
$W$	Geopotencial
$W_o$	Geopotencial de Referência

$W_p$	Geopotencial no ponto P
a	Semi-Eixo maior do elipsoide
b	Semi-Eixo Menor do elipsoide
$C_{nm}S_{nm}$	Coefficientes de Stokes
E	Excentricidade Linear
$P_{nm}$	Funções de Legendre

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
1.1	HIPÓTESE DE PESQUISA	19
1.2	OBJETIVOS	19
1.2.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	20
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
2.1	INTRODUÇÃO À TEORIA DO POTENCIAL	21
2.1.1	LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL E POTENCIAL ESCALAR	21
2.1.2	POTENCIAL GRAVITACIONAL	23
2.1.3	GRAVIDADE, GEOPOTENCIAL, ESFEROPOTENCIAL E POTENCIAL PERTURBADOR	24
2.2	TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL	27
2.2.1	TÉCNICA REMOVE-COMPUTE-RESTORE	30
2.3	MODELOS GLOBAIS DO GEOPOTENCIAL	31
2.4	MODELAGEM DA TOPOGRAFIA RESIDUAL (TÉCNICA RTM)	32
2.5	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA	34
2.5.1	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO FIXADO E SÉRIES DE BROVAR	36
2.6	MODIFICAÇÃO NO NÚCLEO DA INTEGRAL DE HOTINE	42
2.7	IHRS/IHRF E EXPERIMENTO COLORADO	47
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>52</b>
3.1	SOLUÇÃO APLICADA AO EXPERIMENTO COLORADO	52
3.1.1	PREPARAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	53
3.1.2	ETAPA DE REMOÇÃO	57
3.1.3	GERAÇÃO DA GRADE DE DISTÚRBIOS DA GRAVIDADE RESIDUAIS	58
3.1.4	SOLUÇÃO FIXADA DO PVCG	59
3.1.5	ETAPA DE RESTAURAÇÃO, cálculo DO MODELO DE QUASE-GEOIDE E ANÁLISE DOS RESULTADOS	60
3.2	SOLUÇÃO APLICADA À ESTAÇÃO PPTE	62
3.2.1	CÁLCULO DOS DISTÚRBIOS DE GRAVIDADE E ETAPA DE REMOÇÃO	64
3.2.2	GERAÇÃO DA GRADE DE DISTÚRBIOS DE GRAVIDADE RESIDUAIS PARA PPTE	68
3.2.3	CÁLCULO DAS ANOMALIAS DE ALTURA RESIDUAIS PARA A ESTAÇÃO PPTE	68
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>71</b>
4.1	VALIDAÇÃO NO EXPERIMENTO COLORADO	71
4.2	RESULTADOS PARA A ESTAÇÃO PPTE	84

<b>5</b>	<b>Conclusões e recomendações . . . . .</b>	<b>102</b>
----------	---	------------

	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>106</b>
--	------------------------------	------------

# 1 INTRODUÇÃO

O avanço dos sistemas de observação do planeta Terra permitiu ter uma melhor compreensão sobre sua forma, dimensão e campo de gravidade, sendo estes, os principais focos de estudo da Geodésia. Estes avanços permitem a obtenção de dados de forma cada vez mais rápida, precisa e confiável, permitindo a realização de estudos relacionados com as variações temporais do planeta (IAG, 2023b). Devido a isso, deve-se destacar a importância das Estruturas Geodésicas de Referência, que permitem o monitoramento do nosso planeta de forma global, com precisão ao longo do tempo (GGOS, 2023b).

Atualmente, as Estruturas Geodésicas de Referência não se encontram unificadas, o que dificulta diversas tarefas que necessitam de dois ou mais sistemas de referência, como o sistema geométrico e gravimétrico. A IAG (*International Association of Geodesy*), atualmente, busca estabelecer um Sistema Geodésico de Referência Global integrado chamado GGRS (*Global Geodetic Reference System*), que contribuirá para aplicações envolvendo navegação, posicionamento, mapeamento e pesquisas relacionadas tanto com a componente geométrica como com a componente física (IAG, 2023a).

No dia 26 de fevereiro de 2015, a ONU (Organização das Nações Unidas) publicou a resolução "*A global geodetic reference frame for sustainable development*", explicitando a importância do estabelecimento do GGRS e sua materialização, o *Global Geodetic Reference Frame* (GGRF), para com os objetivos do desenvolvimento sustentável (ONU, 2015). Nesta resolução, as instituições internacionais foram encorajadas a cooperarem entre si, através de assistência, disponibilização de dados em ambiente aberto, criação de padronizações, convenções e aprimoramento de sua infraestrutura para buscar este objetivo.

Segundo a IAG, o GGRS compreende as componentes terrestres e celestes, onde a componente terrestre se refere à geometria e campo da gravidade terrestre, e a componente celeste se refere à orientação do planeta Terra no espaço, através de relações entre coordenadas celestes e terrestres. Atualmente, a componente celeste se encontra definida e realizada através do ICRS (*International Celestial Reference System*) e ICRF (*International Celestial Reference Frame*) respectivamente. Na componente terrestre, a geometria terrestre encontra-se definida e realizada através do ITRS (*International Terrestrial Reference System*) e ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*), enquanto o campo de gravidade terrestre, que envolve tanto dados de gravidade quanto altitudes com significado físico, ainda não se encontra nestes aspectos, ou se encontra recentemente materializado, como no caso da componente altimétrica IHRS (*International Height Reference System*) com o IHRF (*International Height Reference Frame*).

O GGRF busca vincular e incorporar o ITRF, ICRF, o IHRF e uma nova referência de gravidade absoluta global chamada ITGRF (*International Terrestrial Gravity Reference Frame*). Como o ITRF e ICRF já estão estabelecidos e consolidados (SÁNCHEZ et al., 2021), restam as realizações da componente do campo da gravidade terrestre, através da nova referência de gravidade absoluta internacional e de contribuições para novas soluções do IHRS e IHRF. Como já mencionado, o IHRS já possui sua primeira realização, porém é recomendado pela IAG que pelo menos duas soluções diferentes sejam testadas em cada estação IHRF.

A grande problematização para o estabelecimento do IHRF se dá na padronização da modelagem do campo de gravidade da Terra, na qual busca-se uma precisão de 1 centímetro na modelagem geoidal (IAG, 2019). Esta problematização fica evidente diante dos resultados obtidos no âmbito do Experimento Colorado (WANG et al., 2021), no qual quatorze diferentes equipes de pesquisadores ao redor do mundo propuseram suas soluções para serem comparadas.

Conforme o que foi mencionado neste capítulo, levando em consideração a resolução da ONU sobre a importância do GGRF para o desenvolvimento sustentável, a proposta da IAG para direcionar esforços à implementação do IHRS/IHRF e a busca pela padronização da modelagem do campo gravitacional evidenciada pelo Experimento Colorado, esta pesquisa busca analisar uma solução para o cálculo do geopotencial na estação IHRF PPTe no estado de São Paulo, contribuindo para o estudo do estabelecimento do IHRF no Brasil.

A solução foi baseada no emprego da solução do tipo Brovar (Brovar (1972), Heck (2011), Ferreira (2011)) para o Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) fixado, o que difere das demais soluções estudadas no Brasil até o momento. Além disso, foi analisada a aplicação da modificação de Wong e Gore (1969) do núcleo de Hotine-Koch, testando diferentes graus de truncamento, como realizado no âmbito do Experimento Colorado. O cálculo das integrais de Hotine-Koch será feito através de uma adaptação do método dos templates, abordado em Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006), realizando uma solução numérica das integrais, subdividindo as regiões em uma malha de blocos equiângulos.

Na solução numérica das integrais será utilizado o cálculo de forma vetorial em ambiente MATLAB, o que permite um aprimoramento na performance e na velocidade do processamento computacional (ABDALLA; FERREIRA, 2022). A solução foi testada no âmbito do Experimento Colorado para fins de validação.

A justificativa para a escolha do PVCG fixado baseia-se no uso de distúrbios de gravidade na superfície terrestre como funcional amostrada do campo de gravidade. Neste caso, altitudes elipsoidais com precisão centimétrica ou melhor, obtidas por posicionamento GNSS (*Global Navigation Satellite System*), podem ser usadas para calcular a gravidade normal na superfície terrestre (ou próximo a ela, como no caso

de dados aéreos). Isso ao invés de se utilizar altitudes normais aproximadas obtidas via Modelos Digitais de Superfície (MDS), com precisão muitas vezes métrica, que acarretam em erros no cálculo da gravidade normal na superfície do Teluroide, no caso do PVCG escalar livre. Em adição, nos dias atuais a facilidade de obter o posicionamento GNSS junto com a gravimetria terrestre e/ou aérea torna essa solução particularmente interessante e mais alinhada com os aspectos modernos da modelagem do campo gravitacional ([Hofmann-Wellenhof e Moritz \(2006\)](#), [Heck \(2011\)](#), [Sansò e Sideris \(2013\)](#)).

No Brasil, grande parte dos dados gravimétricos possui altitude elipsoidal obtida via posicionamento GNSS. Além disso, tem-se a modelagem direta do quase geoide, sem a necessidade de transformação de valores de altura geoidal para anomalia de altura, o que pode incluir erros adicionais de altitude ortométrica (provavelmente via MDS), anomalia de Bouguer e dados de densidade da crosta ([WANG et al., 2021](#)).

Em relação às pesquisas que envolveram o uso do PVCG para cálculo do Geopotencial no Brasil, têm-se a dissertação de [Silva \(2020\)](#), que utilizou a solução do PVCG Fixado, com solução das integrais via FFT (*Fast Fourier Transform*) para cálculo de modelo geoidal e quase-geoidal no estado de São Paulo, além disso, [Blitzkow et al. \(2017\)](#) e [Blitzkow et al. \(2022\)](#) também utilizaram a solução do PVCG Fixado via FFT nas estações IHRF brasileiras. A pesquisa feita por [Ribeiro \(2019\)](#) também apresentou sua solução para obtenção de valores do Geopotencial para a estação PPTTE, uma das estações IHRF brasileiras.

Além disto, o recente trabalho apresentado no XIII Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas (CBCG) por [Guimarães et al. \(2024\)](#) apresenta o modelo geoidal para a América do Sul (SAM\_GEOID2023) utilizando o PVCG Fixado para sua geração. A recente apresentação também no XIII CBCG por [Blitzkow et al. \(2024\)](#) mostra os resultados de sua solução envolvendo o uso do PVCG Fixado para as estações IHRF brasileiras.

## 1.1 HIPÓTESE DE PESQUISA

Se a solução proposta para a solução do Problema de Valor de Contorno Fixado pode comprovadamente ser utilizada, então o valor do número geopotencial na futura estação PPTTE do IHRF pode ser calculado a partir da mesma, e com isso, ter-se-á mais uma alternativa viável de ser utilizada para as demais futuras estações, contribuindo assim, para o estabelecimento do IHRF no Brasil.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho consiste em analisar o uso da solução do tipo Brovar no PVCG fixado, utilizando solução numérica das integrais, para o cálculo do

---

geopotencial na estação PPTE do IHRF no Brasil. Para fins de validação da solução aqui proposta, a mesma foi empregada no âmbito do Experimento Colorado.

### 1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Calcular um modelo de quase-geoide para o Experimento Colorado utilizando a solução proposta e validá-lo com as demais soluções e com o perfil GSVS17;
- Obter o potencial anômalo e suas funcionais a partir da solução utilizada testando diferentes graus e ordem de Modelos Globais do Geopotencial, raios de integração e graus de truncamento nas modificações do núcleo da Integral de Hotine-Koch para a estação PPTE;
- Validar e comparar as soluções obtidas, com soluções obtidas por outros pesquisadores em outros estudos;

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão abordados e conceituados os fundamentos mais importantes para que o leitor tenha condições de assimilar os métodos e resultados desta dissertação com maior facilidade.

### 2.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DO POTENCIAL

Este tópico tem como objetivo conceituar os principais elementos que compõem a teoria do potencial, e do potencial gravitacional, que serão elementos-chave para a compreensão dos tópicos posteriores apresentados nesta pesquisa. Busca-se introduzir os elementos fundamentais da física Newtoniana, apresentando as principais equações que envolvem este conhecimento.

#### 2.1.1 LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL E POTENCIAL ESCALAR

De acordo com a lei da gravitação universal de Isaac Newton, dois pontos com massa  $m_1$  e  $m_2$ , a uma determinada distância  $l$ , possuem uma força de atração em módulo dada pela eq.(1),

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}, \quad (1)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e equivale à  $6,674184 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  de acordo com o *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA). Esta equação foi produto das principais observações acerca da gravitação dada por Newton, sendo elas (SNEEUW, 2006):

- A força entre dois corpos que se atraem é proporcional à suas massas individuais.
- Esta força é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as massas.
- A força é dirigida à linha que liga os dois corpos.

É comum chamar estes dois corpos de massa atraída e massa atratora, tendo em vista que dificilmente há corpos que se atraem de maneira simétrica por ter a mesma quantidade de massa (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006). Assim a equação 1 pode ser simplificada para a eq.(2).

$$F = G \frac{m}{l^2}, \quad (2)$$

onde  $m$  é a massa do corpo atrator. Como exemplo a isto, pode-se fazer uma analogia utilizando o planeta Terra e o Sol, onde a Terra seria o corpo atraído e o Sol, o corpo atrator. Arfken e Weber (2007) alegam que se uma força sobre uma dada região em um determinado espaço  $S$  puder ser expressa como gradiente negativo de uma função

escalar  $V$ , denomina-se  $V$  um potencial escalar que descreve a força por uma única função. Com isto, pode-se conceituar o potencial de atração gravitacional  $V$  na eq.(3) como:

$$V = G \frac{m}{l}, \quad (3)$$

e a força da gravidade  $F$ , como já dito, pode ser descrita como o gradiente negativo da função escalar do potencial  $V$  (Equação 4),

$$F = -\nabla V. \quad (4)$$

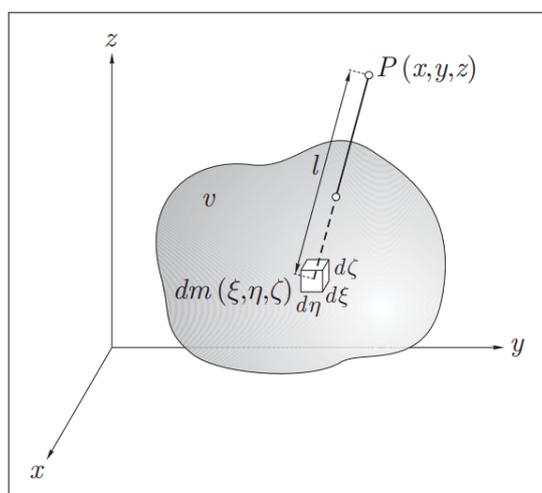
Isto simplifica significativamente os cálculos, podendo ser aplicado em situações que envolvem pontos-massa ou até mesmo na atração de corpos sólidos, que serão abordados na sequência deste tópico.

Quando se trata de um corpo sólido, sua massa é distribuída pelo espaço, e não concentrada em um único ponto como os exemplos anteriores em que se tratava de pontos-massa. A distribuição de massa do planeta Terra, por exemplo, pode ser descrita em função do potencial de atração (Equação 3), porém, considerando a Terra como um corpo sólido, como é abordado por [Vermeer et al. \(2020\)](#) (Equação 5) .

$$V = G \iiint_V \frac{\rho}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta, \quad (5)$$

no qual  $\rho$  é o valor de densidade do elemento de volume. A Figura (1) apresenta o potencial de um corpo sólido em um ponto  $P(x,y,z)$  e como os elementos apresentados se relacionam espacialmente.

Figura 1 – Potencial de um corpo sólido.



Fonte: [Hofmann-Wellenhof e Moritz \(2006\)](#).

A partir do que foi abordado é relevante abordar algumas propriedades fundamentais acerca do potencial gravitacional  $V$ , que serão apresentadas no próximo tópico, sendo

de grande relevância para introduzir os demais conceitos da revisão bibliográfica desta dissertação.

### 2.1.2 POTENCIAL GRAVITACIONAL

O potencial  $V$  é contínuo ao longo de todo espaço e tende a zero no infinito, onde, em grandes distâncias, o corpo atrator pode ser considerado até mesmo como um ponto-massa, satisfazendo a equação 3. As primeiras derivadas do potencial gravitacional  $V$ , que descrevem as componentes da força  $F_x, F_y, F_z$  também são contínuas no espaço, porém, suas segundas derivadas não são. Locais onde a densidade muda abruptamente acarretam na descontinuidade de algumas derivadas segundas, assim, dentro das massas atrativas, o potencial  $V$  satisfaz a Equação de Poisson (6), onde o Laplaciano de  $V$  é dado a seguir (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006),

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \quad (6)$$

Fora das massas atrativas, a densidade  $\rho$  é zero, tendo em vista que se está no espaço vazio, assim, a equação 6 se torna a Equação de Laplace (7),

$$\Delta V = 0. \quad (7)$$

As soluções do potencial gravitacional que atendem a equação de Laplace são chamadas de Funções Harmônicas (VERMEER et al., 2020). Isto permite com que  $V$  possa ser desenvolvido através de funções harmônicas esféricas, ao expandir a equação de Laplace (7) em séries de grau  $n$  e ordem  $m$  conforme eq.(8),

$$V(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\text{sen}\varphi)(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda), \quad (8)$$

onde  $GM$  é o produto da Constante da Gravitação Universal pela massa da Terra,  $r, \lambda, \varphi$  são as coordenadas esféricas geocêntricas do ponto de cálculo,  $P_{nm}$  representa as funções de Legendre,  $R$  é o raio da Terra e  $C_{nm}, S_{nm}$  são os Coeficientes de Stokes.

Segundo Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006) toda função harmônica é contínua e tem suas derivadas contínuas em qualquer ordem de modo que possam ser desenvolvidas através da Expansão de Taylor, expandindo uma função para uma série infinita de potências, ou finita com adição de um termo de resto, onde seus coeficientes envolvem as derivadas sucessivas da função. O uso da expansão de Taylor torna a função mais simples, permitindo melhores análises e manipulações das funções (ARFKEN; WEBER, 2007).

### 2.1.3 GRAVIDADE, GEOPOTENCIAL, ESFEROPOTENCIAL E POTENCIAL PERTURBADOR

A gravidade pode ser definida como a resultante da força de atração da gravidade  $\vec{F}_g$  e a força centrífuga  $\vec{F}_c$  exercida devido à rotação do planeta Terra (Equação 9) (GUO, 2023),

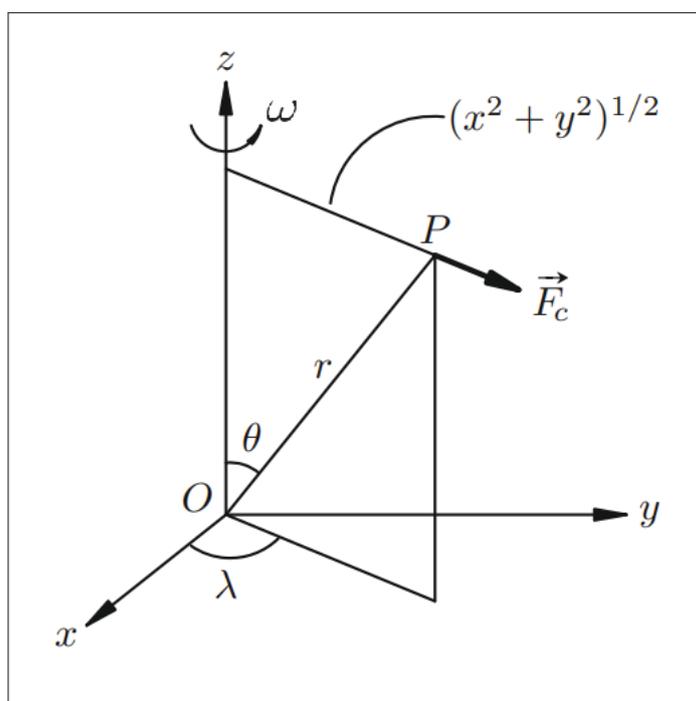
$$\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_c. \quad (9)$$

A força centrífuga é definida pela velocidade angular de rotação  $\omega$  e pela distância entre o ponto e o eixo de rotação (Equação 10) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006),

$$F_C = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r \sin \theta. \quad (10)$$

A Figura 2 de Guo (2023), no qual  $x, y, z$  são as coordenadas de  $P$  em relação a um Sistema de Coordenadas geocêntrico cartesiano, permite uma visualização geométrica da equação em questão, facilitando a compreensão da mesma.

Figura 2 – Força centrífuga.



Fonte: Guo (2023).

A força centrífuga pode ser descrita também através de um potencial, denominado potencial centrífugo  $\Phi$  (SNEEUW, 2006), como é visto na eq. (11),

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (11)$$

Assim como a força centrífuga, a gravidade também pode ser descrita através de um potencial, e este é conhecido como Geopotencial  $W$  (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006), sendo, de forma análoga a eq.(9), a soma do potencial gravitacional  $V_g$  e o potencial centrífugo  $\Phi$  (Equação 12),

$$W = V_g + \Phi = G \int_{\nu} \frac{\rho}{l} d\nu + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (12)$$

Os obstáculos encontrados para se obter o valor de geopotencial em um ponto na superfície física da Terra, como por exemplo, a variação das densidades de massa em seu interior, fez com que fosse utilizado um modelo de Terra atribuído à um elipsoide de referência homogêneo, com mesma massa e velocidade de rotação da Terra Real, e com uma superfície equipotencial, ou seja, o mesmo valor de potencial gravitacional para qualquer ponto em sua superfície. Este modelo é chamado de Terra Normal (GEMAEL, 1999).

Assim como existe o Geopotencial na Terra Real (Equação 12), existe o Esferopotencial  $U$  na Terra Normal, descrito pela soma entre o potencial de atração na Terra Normal  $V_N$ , e o potencial centrífugo que é o mesmo nas duas abordagens (equação 13).

$$U = V_N + \Phi = V_N + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (13)$$

A diferença entre o Geopotencial e o Esferopotencial é chamada de Potencial Perturbador  $T$  (Equação 14), que descreve as variações entre as grandezas físicas da Terra Real e da Terra Normal. Como o potencial centrífugo é o mesmo tanto para a Terra Real quanto para a Terra Normal, pode-se utilizar o Potencial Perturbador como sendo a diferença entre o potencial de atração da Terra Real e o potencial de atração da Terra Normal, assim têm-se uma função harmônica que pode ser resolvida através de harmônicos esféricos (SNEEUW, 2006),

$$T = W - U = V_g + \Phi - V_N - \Phi = V_g - V_N. \quad (14)$$

A diferença entre o vetor gravidade em um ponto  $P$  no geóide e o vetor gravidade normal  $\gamma$  em um ponto  $Q$  no elipsoide é conhecida como anomalia de gravidade  $\Delta g$ , se tratando de forma escalar, dá-se:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (15)$$

Já a diferença entre o vetor gravidade e o vetor gravidade normal em um mesmo ponto é conhecida como distúrbio da gravidade  $\delta g$ , de forma escalar têm-se:

$$\delta g = g_P - \gamma_P. \quad (16)$$

Estas são algumas das funcionais do geopotencial que são utilizadas para a solução do PVCG. O uso de harmônicos esféricos é de grande relevância neste tipo de estudo, contribuindo significativamente para o cálculo destas funcionais do Geopotencial (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006).

A partir das funcionais e modelos apresentados, pode-se realizar algumas relações, no qual:

$$U_P = U_Q + \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_Q N = U_Q - \gamma N, \quad (17)$$

onde  $n$  é a normal ao elipsoide e  $N$  é a ondulação geoidal. Pelo fato de que  $W_P = U_Q = W_0$ , pode-se chegar a equação de Bruns (18), que relaciona a ondulação geoidal com o potencial perturbador,

$$N = \frac{T}{\gamma}. \quad (18)$$

Considerando que:

$$\delta g = \text{grad} T, \quad (19)$$

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}, \quad (20)$$

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n}, \quad (21)$$

pode-se fazer a seguinte relação:

$$\delta g = g_P - \gamma_P = -\left( \frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} \right) = -\frac{\partial T}{\partial n}. \quad (22)$$

Tendo em vista que  $h$  (altitude elipsoidal) é reconhecido ao longo da normal  $n$ ,  $\delta g$  pode ser escrito como:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h}. \quad (23)$$

Ao levar em consideração que:

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (24)$$

a eq. (22) pode ser escrita como:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (25)$$

e, a partir da fórmula de Bruns (18) têm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0. \quad (26)$$

Esta equação é conhecida como Equação Fundamental da Geodésia Física, relacionando a anomalia de gravidade ao potencial perturbador. A mesma também pode ser escrita em termos de distúrbio da gravidade a partir da eq. (27),

$$\frac{\partial T}{\partial h} + \delta g = 0. \quad (27)$$

Para mais informações sobre estas deduções, pode-se consultar [Hofmann-Wellenhof e Moritz \(2006\)](#). No próximo tópico, será abordado os conceitos referentes à técnica de Decomposição Espectral, que permite modelar o Geopotencial de uma determinada região a partir de dados de gravidade e do terreno.

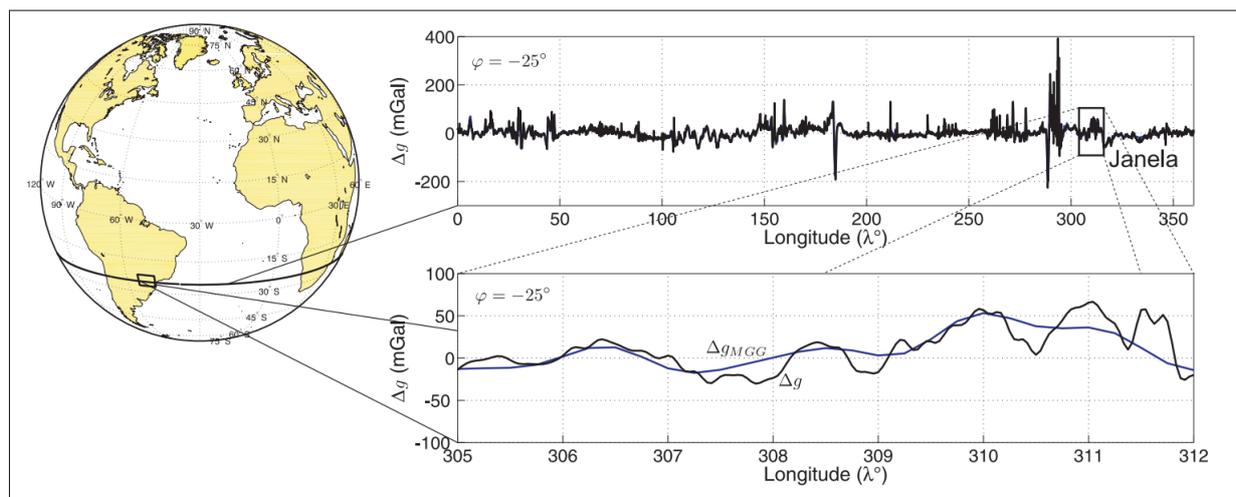
## 2.2 TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL

O campo de gravidade da Terra pode ser decomposto em componentes espectrais relacionadas aos longos, médios, curtos e curtíssimos comprimentos de onda ([SCHWARZ, 1984](#)), ou no domínio das frequências como baixas, médias, altas e altíssimas frequências. Com isto, o espectro completo do campo gravitacional pode se dar como a soma destas componentes (Equação 28). Esta divisão do espectro gravitacional pode ser aplicada às diferentes funcionais do campo da gravidade, como distúrbio da gravidade, anomalia de gravidade, potencial perturbador, altura geoidal e anomalia de altura. Para exemplificar as equações, têm-se  $f$  como uma funcional,

$$f = f_{\text{longos}} + f_{\text{médios}} + f_{\text{curtos}} + f_{\text{curtíssimos}}. \quad (28)$$

Nesta dissertação, a nomenclatura adotada para a divisão do espectro gravitacional será baseada em comprimentos de onda, para evitar confusões quanto ao discernimento deste conteúdo. Na figura 3, é ilustrado como se dá esta subdivisão do campo da gravidade em comprimentos de onda. A figura foi feita por [Ferreira \(2011\)](#), no qual, calculou os valores de  $\Delta g$  com base nos coeficientes do EGM2008 e representou como longos comprimentos de onda àqueles obtidos até grau 360 e como curtos àqueles obtidos até grau 2190. Em azul se encontram os longos e parte dos médios comprimentos de onda, enquanto em preto, encontram-se os curtos e curtíssimos.

Figura 3 – Perfil de anomalias de gravidade com a técnica de decomposição espectral.



Fonte: Ferreira (2011).

Como pode ser visto na Figura 3, cada componente tem sua resolução espectral que é composta pela soma de soluções as quais podem ser obtidas a partir de diferentes fontes de dados. Os longos e médios comprimentos de onda podem ser obtidos a partir da análise da órbita de satélites artificiais que funcionam como sensores de baixa resolução do campo de gravidade, e de sensores embarcados em satélites de órbitas baixas, como a missão GOCE (*Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*) que possuiu gradiômetros (European Space Agency, 2009).

Os curtos e curtíssimos comprimentos de onda já dependem da solução do PVCG e de dados de topografia residual, normalmente obtidos a partir de um MDS (SANSÒ; SIDERIS, 2013). Uma das principais técnicas existentes para a modelagem dos curtos e curtíssimos comprimentos de onda é a Técnica RTM (*Residual Terrain Model*), que será abordada mais detalhadamente nos próximos tópicos desta dissertação.

Quanto maior for a quantidade de dados gravimétricos utilizados para preencher o espectro gravitacional, sejam reais (medidos em campo) ou sintéticos (modelados com dados de modelagem residual de terreno - ver Hirt, Gruber e Featherstone (2011)), maior será o grau e a ordem do desenvolvimento dos harmônicos esféricos para a solução numérica do campo da gravidade, ou seja, haverá uma melhor resolução espacial da representação desta grandeza. De acordo com Seeber (2003), levando em conta a frequência de Nyquist, o comprimento de onda pode ser medido em graus através da Eq.(29),

$$\lambda = \frac{180}{n}, \quad (29)$$

no qual  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $n$  o grau de desenvolvimento em harmônicos esféricos. A eq. (29) também pode ser escrita em quilômetros, a partir da semi-

circunferência da Terra de 20000 km, equivalente ao grau e ordem 2 do desenvolvimento em harmônicos esféricos, alterando-a da seguinte forma:

$$\text{Resolução (Km)} = \frac{20000}{n}. \quad (30)$$

Em sua tese, [Ferreira \(2011\)](#) classificou os intervalos do comprimento de onda como Modelagem Global do campo gravitacional, para resoluções entre 20.000 km e 100 km, Modelagem Regional para resoluções entre 100 km e 1 km e Modelagem Local para resoluções abaixo de 1 km. A tabela 1 apresenta a subdivisão dos comprimentos de onda pela visão de [Jamur \(2012\)](#).

Tabela 1 – Divisão espectral da gravidade e suas fontes de dados.

Subdivisão	$\lambda$ (km)	Grau e ordem N	Técnicas e Modelos
<b>Longos</b>	>80	<250	Dados de satélites
<b>Médios</b>	>55	<360	Combinações de dados orbitais e altimetria por satélites
<b>Curtos</b>	>9	<2160	Levantamentos Gravimétricos (Terrestres, aéreos e marinhos)
<b>Curtíssimos</b>	<9	>2160	Combinações com medições gravimétricas no terreno e MDT's

Fonte: [Jamur \(2012\)](#)

Vale ressaltar que existem diversas divisões diferentes apresentadas na literatura, a mais conceituada, porém mais antiga, foi proposta por [Schwarz \(1984\)](#), no domínio das frequências, como pode-se ver na tabela 2.

Tabela 2 – Divisão espectral da gravidade no domínio das frequências.

Frequência	Grau e ordem N
<b>Baixa</b>	$2 \leq l \leq 36$
<b>Média</b>	$37 \leq l \leq 360$
<b>Alta</b>	$361 \leq l \leq 3600$
<b>Altíssima</b>	$3601 \leq l \leq 36000$

Fonte: [Schwarz \(1984\)](#)

Atualmente existem MGG's com desenvolvimentos de grau e ordem de até 5540, como o XGM2019, que é dado pela combinação de dados de altimetria, gravimetria terrestre, modelos topográficos e dados satelitais GOCO06s ([ZINGERLE et al., 2020](#)), podendo chegar a resoluções de 3,6km, adentrando os curtíssimos comprimentos de onda da visão de [Jamur \(2012\)](#). O uso da técnica de decomposição espectral é de grande vantagem para trabalhos e pesquisas que envolvam a modelagem do campo de

gravidade, para aplicação da técnica Remover-Calcular-Restaurar, que será abordada no próximo tópico.

### 2.2.1 TÉCNICA REMOVE-COMPUTE-RESTORE

Para modelar de maneira adequada uma dada funcional, com controle dos erros de comissão e omissão, e também, afim de contornar a limitação de distribuição dos dados de gravidade na superfície terrestre pode-se recorrer a técnica *Remove-Compute-Restore* (Técnica RCR).

A teoria por trás desta técnica, para cálculo do geoide ou quase-geoide, implica que para uma boa modelagem destas funcionais, os longos e curtos comprimentos de onda devem ser removidos do espectro completo antes da solução pelo PVCG (Problema de Valor de Contorno da Geodésia) (SJÖBERG, 2005), como pode ser visto na eq. (31). Esta técnica foi inventada por K. Colic, e seu termo em inglês é mencionado pela primeira vez no artigo de Forsberg e Tscherning (1981) como "*Remove-Restore Technique*",

$$f - f_{\text{longos}} - f_{\text{parte dos médios}} - f_{\text{curtos}} - f_{\text{curtíssimos}} = f_{\text{residual}}. \quad (31)$$

Os longos comprimentos de onda, junto com parte dos médios comprimentos, são melhores resolvidos a partir de dados de órbitas de satélites e sensores a bordo de satélites de órbitas baixas, que possuem um menor erro de comissão. Além disto, a utilização destes dados faz com que o raio de integração seja reduzido, seguindo a regra de Rapp em função da relação entre solução espectral e espacial (Equação 29). Já os curtos podem ser modelados com o uso de MDT's e da técnica RTM (Tabela 1), superando a falta de dados gravimétricos com maior densidade.

Com a remoção dos longos, parte dos médios, curtos e curtíssimos comprimentos de onda da funcional, há uma suavização da mesma (funcional residual), conforme eq. (31), e um melhor resultado no processo de interpolação para geração da grade de funcionais para a solução do PVCG via Integral de Stokes ou de Hotine. Ao mesmo tempo, diminui o erro de aproximação esférica da solução (SANSÒ; SIDERIS, 2013).

Dentre as funcionais utilizadas, é comumente utilizado o valor de anomalia de gravidade nas equações, mas vale ressaltar que isto vale para diferentes funcionais do geopotencial, como altitudes geoidais  $N$  e anomalias de altura  $\zeta$ , por exemplo. Referente às fontes de dados utilizadas, e para facilitar o entendimento de como esta técnica funciona na prática, a eq. (31) também pode ser escrita através da seguinte forma:

$$f - f_{\text{MGGs}} - f_{\text{RTM}} = f_{\text{residual}}. \quad (32)$$

No caso da presente pesquisa, o uso da técnica RCR permitiria obter um  $\delta g$  residual que, através do PVCG Fixado, seria possível obter as anomalias de altura

residuais  $S_{residual}$ , onde, posteriormente, restaura-se a parte do espectro que foi removida (Equação 33),

$$S = S_{residual} + S_{MGGs} + S_{RTM}. \quad (33)$$

Com isto, têm-se modelado (neste caso) a anomalia de altura com os longos, médios, curtos e curtíssimos comprimentos de onda inclusos.

Além da solução pelo PVCG fixado, a técnica RCR pode ser utilizada para modelagem da componente residual utilizando também abordagens estocásticas, como a Colocação pelo Método dos Mínimos Quadrados (CMQ) e a Função de base radial esférica. Já em relação as funcionais residuais, cada técnica utiliza uma determinada funcional do geopotencial para seus cálculos, como será apresentado posteriormente.

## 2.3 MODELOS GLOBAIS DO GEOPOTENCIAL

Um Modelo Global do Geopotencial (MGG) é uma função matemática com parâmetros e coeficientes associados que descrevem o campo gravitacional da Terra e o campo centrífugo no espaço, e, através disto, pode-se calcular diferentes funcionais do Geopotencial como potencial da gravidade, anomalia de gravidade, dentre outros (BARTHELMES, 2014). Matematicamente, esta função é desenvolvida por meio de funções harmônicas esféricas (Equação 8).

Os avanços tecnológicos e o lançamento de satélites artificiais permitiram um grande avanço na determinação de Modelos Globais do Geopotencial. O lançamento do satélite Sputnik 2 em 1957 permitiu com que o coeficiente  $C_{20}$  pudesse ser estimado com maior precisão, se comparado ao valor obtido com métodos terrestres (MERSON; KING-HELE, 1958). Após este período diversos satélites foram lançados permitindo um maior desenvolvimento das séries e a determinação cada vez mais acurada dos coeficientes. O artigo desenvolvido por Nicacio e Dalazoana (2017) abordou muito bem o estado-da-arte e as perspectivas futuras do uso de MGG's e seu desenvolvimento.

Um MGG possui diversas utilidades, podendo-se citar algumas delas dadas por Sansò e Sideris (2013):

- Determinação de órbitas de objetos no entorno da Terra.
- Navegação com sensores inerciais para determinação da trajetória de aviões e mísseis.
- Cálculo de ondulações geoidais necessárias para cálculo do Geoide.
- Determinação da Topografia do Nível Médio dos Mares (TNMM).
- Auxílio na realização de um Datum Vertical Global.
- Prospecção Geofísica.

Segundo [Featherstone \(2002\)](#), os MGGs existentes podem ser subdivididos em três classes:

- MGGs somente-satélite, derivados do rastreamento da órbita de satélites artificiais.
- MGGs combinados, derivados da combinação de modelos somente-satélite, dados de gravimetria terrestre, dados oriundos da altimetria por satélites em regiões oceânicas, e gravimetria aérea.
- MGGs adaptados, derivados de um refinamento dos MGGs somente-satélite ou combinados, com uso de dados de gravidade de maior resolução.

A resolução espectral dos MGGs segue o mesmo princípio das equações (29) e (30), onde, quanto maior a combinação e a quantidade de dados utilizados para composição do MGG, maior será sua resolução espacial. A plataforma do ICGEM (*International Centre for Global Earth Models*) disponibiliza uma grande variedade dos MGGs disponíveis, permitindo acesso público e cálculo de diferentes funcionais do geopotencial ([INCE et al., 2019](#)).

Vale ressaltar, que cada MGG é um modelo de Terra Real para uma determinada funcional, portanto, possui seu próprio  $GM$  e conceito de maré. Normalmente, o MGG difere dos valores do Elipsoide de Referência utilizado, por isso é importante a utilização do termo de grau zero no seu uso ([INCE et al., 2019](#)).

## 2.4 MODELAGEM DA TOPOGRAFIA RESIDUAL (TÉCNICA RTM)

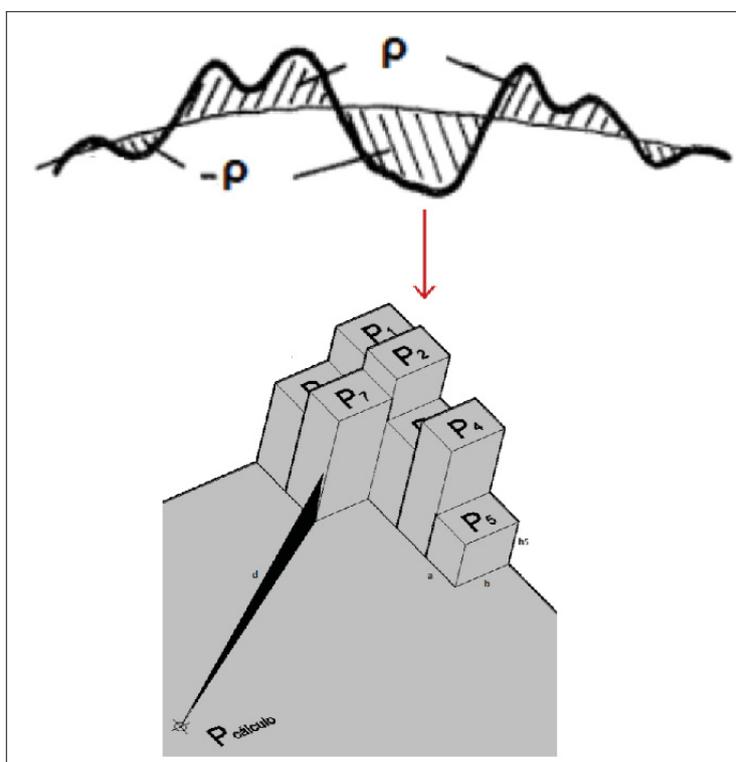
Mesmo com os MGGs atuais tendo graus de desenvolvimento elevados, como no caso do XGM2019, chegando a uma resolução de aproximadamente 3,6 km, obter graus de desenvolvimento com resoluções melhores torna-se inviável devido à falta de dados que permitam maior desenvolvimento, acarretando em um erro de omissão ([HIRT, 2010](#)).

Ao definir as estratégias necessárias para determinação e avaliação das coordenadas do IHRF, existem três principais alternativas à serem utilizadas, sendo estes, os Modelos Globais do Geopotencial de alta resolução, Modelos Regionais do Campo da Gravidade e sistemas de altitudes físicas existentes ([SÁNCHEZ et al., 2021](#)).

No caso da primeira alternativa, a fim de reduzir o erro de omissão apresentado anteriormente, pode-se utilizar a técnica RTM para a modelagem dos curtos e curtíssimos comprimentos de onda do campo gravitacional ([FORSBERG; TSCHERNING, 1981](#)). Já para o caso da segunda alternativa, a técnica RTM pode ser utilizada para a modelagem da componente de curto/curtíssimo comprimento de onda das funcionais e ainda para a modelagem para a frente de dados de gravidade sintética obtidos por MGG's em áreas de vazio gravimétrico ([HIRT; KUHN, 2014](#)).

A técnica RTM consiste em calcular o potencial gravitacional das massas situadas entre duas superfícies com resoluções espectrais (e espaciais segundo a regra de Rapp) diferentes. Isso a fim de aumentar (modelagem para frente) ou diminuir (remover) a resolução espectral de um dado valor de funcional em um determinado ponto. Por exemplo, pode ser usada uma superfície de elevação média de referência, como um Modelo Digital de Terreno, que represente as elevações médias da região de estudo, e uma superfície detalhada que melhor represente a superfície física. Assim, as massas residuais da superfície detalhada que estão acima da superfície de referência são removidas, e os vazios abaixo da superfície de referência são preenchidos (FORSBERG, 1984). A Figura (4) ilustra este conceito.

Figura 4 – Discretização da topografia residual.



Fonte: Adaptado de Forsberg (1984) e Pereira (2013).

Segundo Hirt e Kuhn (2014), a avaliação da Integral de Newton é comum à todas as técnicas de modelagem do campo gravitacional, inclusive à técnica RTM, podendo ser realizada tanto através do domínio espectral, quanto pelo domínio espacial. No domínio espectral, são utilizadas expansões em harmônicos esféricos para conversão de modelos topográficos em potencial gravitacional. Estes são conhecidos como Modelos de Campo de Gravidade Topográficos, como o modelo Earth 2014 (HIRT; REXER, 2015) e o modelo EHFM\_Earth\_7200 (LIU; WANG, 2024). Estes modelos podem ser usados para modelar para frente funcionais obtidas com MGG's ou utilizando na etapa de *remove* escolhendo-se os graus e ordens limitantes.

Já no domínio espacial, as massas sobre e sob a superfície de referência são decompostas em "Corpos elementares", como Prismas, Tesseroides, Poliedros ou Pontos-Massa. Isto possibilita, em conjunto com um valor de densidade associado à estes corpos, uma integração numérica ou analítica que permite obter o potencial gravitacional destas massas residuais (HIRT; KUHN, 2014).

## 2.5 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA

O problema de valor de contorno (PVC) consiste em achar soluções que se ajustam a pontos, curvas ou superfícies. Isto parte do princípio de que, ao conhecermos um sistema físico em um determinado ponto do tempo, e a lei que governa este processo físico, pode-se prever o desenvolvimento subsequente (ARFKEN; WEBER, 2007). Existem 3 tipos de Problemas de Valor de Contorno (GEMAEL, 1999):

- **Problema de Dirichlet:** Consiste em determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície  $S$ , quando são conhecidos os valores que a função assume sobre esta superfície.
- **Problema de Neumann:** Consiste em determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície  $S$  quando são conhecidos os valores que a derivada normal da função assume sobre a superfície.
- **Problema de Hilbert:** Consiste em determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície  $S$  quando são conhecidos os valores que assume sobre a superfície uma combinação da função e de sua derivada normal.

A determinação do campo de gravidade externo da Terra, através de dados de gravimetria na sua superfície está relacionada com a formulação do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (SANSÓ; RUMMEL, 1997). A superfície a ser determinada no PVCG pode ser o Geóide, para a concepção clássica de Stokes, ou a superfície física, a partir do problema de Molodenski (SANSÒ, 1995). Na concepção de Stokes, utiliza-se a fórmula de Pizzeti, para obter o potencial perturbador, como é apresentado na eq. (34) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006),

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(r, \psi) \Delta g d\sigma, \quad (34)$$

onde  $S(r, \psi)$  é o núcleo da integral de Stokes. Através da fórmula de Bruns, pode-se escrever esta equação através da ondulação geoidal (Equação 35).

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} S(r, \psi) \Delta g d\sigma. \quad (35)$$

Pelo fato de não se conhecer a distribuição de massas no interior da crosta terrestre, Mikhail Molodesky propôs a solução do PVCG considerando a superfície física como

limitante, substituindo o geóide pelo quase-geóide (GUIMARÃES; BLITZKOW, 2011). A eq. (36) apresenta como  $T$  pode ser calculado através da formulação de Molodensky (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006),

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{\cos \beta}{l} \right] T d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{l} [\Delta g - \gamma (\xi \tan \beta_1 + \eta \tan \beta_2)] \cos \beta d\Sigma, \quad (36)$$

onde  $T$  é a incógnita a ser calculada de forma iterativa,  $\xi$  e  $\eta$  são as componentes do desvio da vertical e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os ângulos de inclinação do terreno em relação à horizontal.

O PVCG pode ser descrito pela forma livre, pelo PVCG Livre e o PVCG Escalar Livre, no qual a superfície de contorno  $S$  é desconhecida. Ele também pode ser abordado pela forma fixada, através do PVCG Fixado e PVCG Gravimétrico Fixo, onde a superfície de contorno  $S$  é dada (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006). No caso do PVCG fixo, o conhecimento da superfície terrestre (contorno) passou a existir com a popularização do posicionamento GNSS.

O PVCG Livre envolve um Problema de Valor de Contorno não linear, onde a denominação "Livre", se dá no fato de que não se tem informação sobre a superfície de contorno (GUIMARÃES; BLITZKOW, 2011). Este problema surgiu em uma época em que não haviam técnicas espaciais suficientes para que se pudesse determinar a geometria da superfície da Terra com boa precisão. Nele, as componentes conhecidas são coordenadas astronômicas e valores de gravidade, que não possuem uma distribuição espacial adequada e possuem uma precisão abaixo das precisões exigidas (NICACIO; DALAZOANA, 2019).

No PVCG "Escalar Livre", utiliza-se as coordenadas geodésicas  $\phi, \lambda$  derivadas de poligonação e triangulação. A altitude elipsoidal não era conhecida pelo fato da não existência de dados GNSS na época, sendo esta, a quantidade necessária para fixar a superfície desconhecida. Para suprir a falta de dados, mede-se as quantidades  $g$  e  $W$  do campo da gravidade (HECK, 1989).

Para o PVCG Gravimétrico Fixo, têm-se uma superfície geoidal aproximada, por valores de altitude ortométrica provenientes de um MDS por exemplo. Em grande parte dos casos, têm-se MDS's globais, como o SRTM, com suas altitudes referenciadas ao MGG EGM96 (LEMOINE et al., 1998). Para melhorar a qualidade da altitude ortométrica, pode-se substituir o EGM96 por um outro modelo de grau e ordem mais elevado, como o EGM2008 (PAVLIS et al., 2012), como é o caso do Copernicus DEM e, conseqüentemente do FABDEM (MEADOWS; JONES; REINKE, 2024). A pesquisa feita por Grombein, Seitz e Heck (2016) é de grande auxílio para um estudo mais aprofundado nesta metodologia.

### 2.5.1 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO FIXADO E SÉRIES DE BROVAR

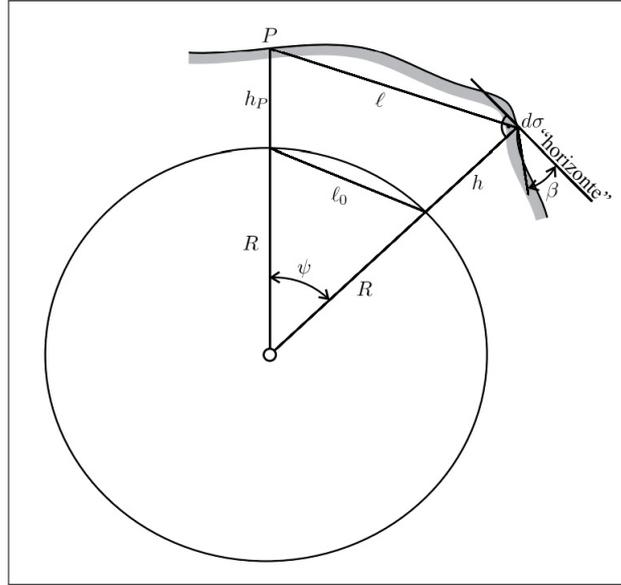
Com o avanço e surgimento de técnicas de posicionamento através de satélites artificiais, o conhecimento da superfície de contorno como a superfície física da Terra se torna possível, assim o PVCG que é abordado de forma "Fixada" passa a ser de grande relevância para a modelagem do campo da gravidade. Ao conhecer a geometria da superfície  $S$  através da latitude  $\phi$ , longitude  $\lambda$  e altitude elipsoidal  $h$ , somente o potencial de gravidade externo às massas atrativas passa a ser indeterminado. Para o PVCG Fixado, utiliza-se como condição de contorno o módulo do vetor gravidade  $\vec{g}$  (GUIMARÃES; BLITZKOW, 2011) (NICACIO; DALAZOANA, 2019).

O PVCG Fixado pode ser solucionado de forma mais comum a partir de duas soluções. A primeira delas é trabalhar pela abordagem estocástica com o uso de funções de base radial esférica (*Radial Basis Functions*), como foi feito pelo DGFI para o "Experimento Colorado" (LIU et al., 2020).

Uma outra alternativa é utilizar as Equações Integrais de Brovar (HECK, 2011) que são solucionadas de forma iterativa. Porém, uma vez que esta solução possui convergência lenta, é mais eficaz o uso da solução do tipo Brovar do PVCG de Molodensky, com o núcleo de Hotine-Koch ( $H(\psi)$ ) e distúrbios da gravidade, desenvolvida em séries. Trata-se das chamadas séries de Brovar (Brovar (1972); Heck (2011), Ferreira (2011)). Cabe ressaltar que esta solução é baseada na solução do PVCG de Neumann (ou Robin), uma vez que a derivada normal negativa do potencial é o distúrbio da gravidade que é amostrado sobre a superfície de contorno. Esta alternativa será utilizada na presente pesquisa.

A solução de Brovar para o PVCG fixado busca solucionar o problema de Neumann através da relação de  $\delta g$  com  $T$  por duas abordagens, a primeira, através das séries de Neumann, enquanto a segunda utiliza as séries de Brovar (FERREIRA, 2011). Para a presente pesquisa, as séries de Brovar serão utilizadas.

Figura 5 – Geometria para a solução de Molodensky e Brovar.



Fonte: Ferreira (2011).

A partir da figura 5, sendo  $T$  expresso como potencial de uma determinada superfície  $S$  dado por:

$$T = \iint_S \lambda E dS, \quad (37)$$

no qual, em séries de Fourier-Legendre:

$$E(r, \psi, r_p) = \frac{1}{l} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \frac{r^n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos\psi), \quad (38)$$

têm-se  $E$  como função harmônica, logo  $T$  também é harmônica e a equação de Laplace é válida no exterior de  $S$ . Para o caso no qual  $r = r_p = R$  têm-se:

$$E = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos\psi) = \frac{1}{4\pi R} H(R, \psi). \quad (39)$$

Ao considerar a Função Generalizada de Hotine-Koch:

$$H(r, \psi, r_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \frac{r^{n+1}}{r_p} P_n(\cos\psi) \quad (40)$$

Ao utilizar  $\frac{r}{r_p} = \kappa$  e partindo da função geratriz dos polinômios de Legendre têm-se que:

$$H(\kappa, \psi) = 2\kappa \frac{1}{\sqrt{1 - 2\kappa\cos\psi + \kappa^2}} - \ln \left( \frac{\sqrt{1 - 2\kappa\cos\psi + \kappa^2} + \kappa - \cos\psi}{1 - \cos\psi} \right), \quad (41)$$

no qual como:

$$l = \sqrt{r_p^2 + r^2 - 2r_pr \cos\psi}, \quad (42)$$

$H$  passa a ser:

$$H(r, \psi, r_p) = 2\frac{r}{l} - \ln \left[ \frac{l + r - r_p \cos\psi}{r_p(1 - \cos\psi)} \right]. \quad (43)$$

Ao voltar ao cálculo de  $E$  na equação 39, substituindo pela equação 43 e dividindo-se por  $r$  chega-se em:

$$4\pi E = \frac{2}{l} - \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{l + r - r_p \cos\psi}{r_p(1 - \cos\psi)} \right], \quad (44)$$

no qual sua derivada (equação 45) pode ser substituída na condição de contorno (equação 46):

$$\frac{\partial E}{\partial r_p} = \frac{1}{4\pi} \frac{r^2 - r_p^2}{r_p l^3} \quad (45)$$

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r_p} = \iint_S \lambda \left( -\frac{\partial E}{\partial r_p} \right) dS, \quad (46)$$

de forma a resultar em:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r_p} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda \frac{r^2 - r_p^2}{r_p l^3} dS. \quad (47)$$

Esta equação é válida somente enquanto o ponto  $P$  encontrar-se fora da superfície  $S$  (FERREIRA, 2011). Assim, como solução para isto é possível reescrever esta equação como uma integral do segundo tipo dada por:

$$\delta g = \lambda \cos\beta - \frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda \frac{r^2 - r_p^2}{r_p l^3} dS, \quad (48)$$

no qual, ao se ter as seguintes igualdades:

$$\mu = \lambda \sec\beta, \quad (49)$$

$$dS = r^2 \sec\beta d\sigma, \quad (50)$$

substituindo na equação 48 têm-se:

$$\mu \cos^2\beta - \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \mu r^2 \frac{r^2 - r_p^2}{r_p l^3} d\sigma = \delta g, \quad (51)$$

no qual, ao substituir em  $T$  têm-se:

$$T = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \mu H(r, \psi, r_p) r^2 d\sigma. \quad (52)$$

Para o caso da superfície física com aproximação esférica têm-se  $r = R$  e  $\mu_0 = \delta g$  logo, partindo-se da função generalizada de Hotine (equação 40) chega-se em:

$$T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g H(R, \psi) d\sigma. \quad (53)$$

Ao considerar a diferença  $H(r, \psi, r_P) - H(R, \psi)$  como  $\Delta H$ , com o uso de aproximação planar,  $T$  passa a ser:

$$T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu \left[ \frac{1}{R} H(R, \psi) + \frac{2}{l} - \frac{2}{l_0} \right] R^2 d\sigma. \quad (54)$$

Ao desenvolver em séries a partir de um parâmetro  $k$  como abordado em Moritz (1980), e a partir da teoria da multiplicação para séries de potência têm-se:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} K^n \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_n H(R, \psi) d\sigma + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} a_r k^{p+2r} \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \mu_p \frac{(h - h_p)^{2r}}{l_0^{2r+1}} d\sigma, \quad (55)$$

ou abordando em termos de série têm-se:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n. \quad (56)$$

Neste caso, o parâmetro  $k$  foi útil para o desenvolvimento em séries, assim, com  $k = 1$ , para  $n = 0$  têm-se:

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_0 H(\psi) d\sigma, \quad (57)$$

e para  $n > 0$ :

$$T_n = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_n H(R, \psi) d\sigma + \sum_{r=1}^M a_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \mu_{n-2r} \frac{(h - h_p)^{2r}}{l_0^{2r+1}} d\sigma, \quad (58)$$

$$\mu_n = \sum_{r=1}^N b_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_p)^{2r+1}}{l_0^{2r+3}} \mu_{n-2r-1} d\sigma - \sum_{r=1}^M (-1)^r \mu_{n-2r} \tan^{2r} \beta \quad (59)$$

onde  $M$ ,  $N$ ,  $a_r$  e  $b_r$  são dados pelas seguintes equações:

$$M = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad (60)$$

$$N = \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (61)$$

$$a_r = (-1)^r r \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}, \quad (62)$$

$$b_r = (-1)^r \frac{(2r+1)!}{2^{2r}(r!)^2}. \quad (63)$$

Com toda esta dedução, chega-se por fim, aos três primeiros termos da série de Brovar:

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_0 H(\psi) d\sigma, \quad (64)$$

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_1 H(\psi) d\sigma, \quad (65)$$

$$T_2 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_2 H(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_p)^2}{l_0^3} \mu_0 d\sigma, \quad (66)$$

$$T_3 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_3 H(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_p)^2}{l_0^3} \mu_0 d\sigma, \quad (67)$$

onde  $\mu_0$  corresponde ao próprio distúrbio da gravidade  $\delta g$  e  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  e  $\mu_3$  são dados por:

$$\mu_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \delta g d\sigma \quad (68)$$

$$\mu_2 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \mu_1 d\sigma + \delta g \tan^2 \beta \quad (69)$$

$$\mu_3 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \mu_2 d\sigma - \frac{3R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_p)^3}{l_0^5} \delta g d\sigma + \mu_1 \tan^2 \beta \quad (70)$$

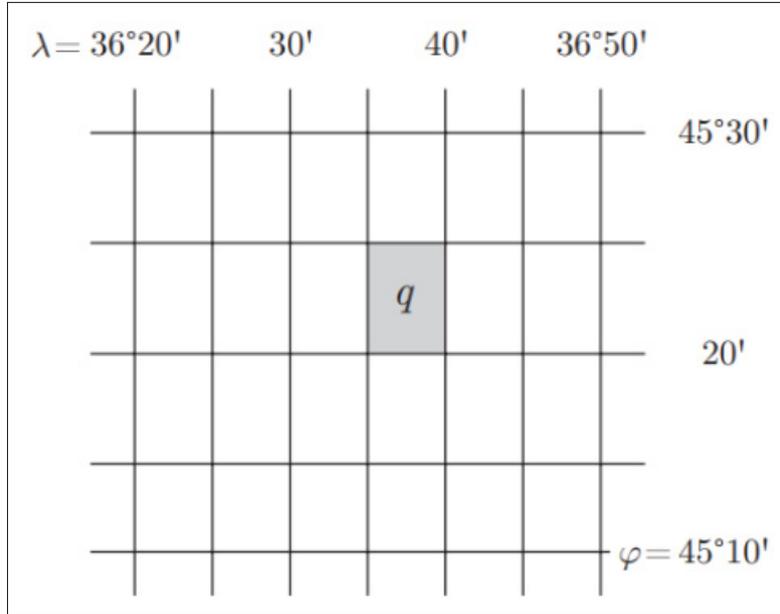
Na maioria dos casos, apenas são levados em consideração os termos  $\mu_0$  e  $\mu_1$ . Vale também ressaltar que para estudos onde a técnica RTM é utilizada, o termo  $\mu_1$  é na maioria das vezes, insignificante (YILDIZ et al., 2012). Apesar de se ter um bom desenvolvimento de como se dá as séries de Brovar, é recomendado a leitura de Heck (2011), Ferreira (2011) e Moritz (1980) para um conhecimento mais aprofundado nesta dedução. Esta solução abordada é mais simples do que as séries de Molodensky, como é abordado por Ferreira (2011) e Heck (2011).

As integrais nas equações acima podem ser solucionadas por diferentes maneiras. A mais comum é através da Transformada Rápida de Fourier que foi amplamente utilizada no Experimento Colorado (WANG et al., 2021). Uma outra forma de solucionar estas integrais, que será a forma utilizada nesta dissertação, é através da solução numérica das integrais.

A solução numérica se baseia no método das *Grid Lines*, como abordado em Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006), ou método dos quadrados como é abordado em

Gemael (1999). Este método trata de discretizar os distúrbios de gravidade em diversos compartimentos  $q_k$ , assim, para cada compartimento, haverá um distúrbio de gravidade  $\delta g_k$  associado. A figura 6 representa esta divisão em compartimentos.

Figura 6 – Compartimentos  $q_k$  na região de integração.



Fonte: Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006).

Cada compartimento  $q_k$  encontra-se subdividido por linhas latitudinais e longitudinais, assim, a equação 64 pode ser reescrita como:

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\lambda_1 \varphi_1}^{\lambda_2 \varphi_2} \bar{\delta}_{g_q} H(\psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'. \quad (71)$$

Pode-se atribuir a uma variável  $c_q$  as variáveis da eq. 71 que não envolvem o distúrbio de gravidade, conforme eq 72.

$$c_q = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda_1 \varphi_1}^{\lambda_2 \varphi_2} H(\psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda', \quad (72)$$

com a função de Hotine suficientemente constante nos compartimentos  $q_k$ , ela pode ser definida como  $H(\psi_q)$  em cada compartimento, e por ser constante, sair de dentro da integral, permitindo o cálculo da área de cada compartimento como  $A_q$  dada pela equação 73.

$$A_q = R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (73)$$

Substituindo na eq. 72, têm-se:

$$c_q = \frac{H(\psi_q) A_q}{4\pi R}, \quad (74)$$

e, utilizando o princípio da superposição, a equação 71 pode ser reescrita como:

$$T_0 = \sum_q \frac{H(\psi_q) A_q \delta g_q}{4\pi R}. \quad (75)$$

Este é o primeiro termo da série de Brovar através da solução numérica. A obtenção dos demais termos da série, segue a mesma lógica abordada, para isto, é necessário discretizar os elementos  $l_{0q}$  para calcular o termo  $\mu_{1q}$  também discretizado, como é apresentado na eq 76.

$$\mu_{1q} = \frac{1}{2\pi} \sum_q \frac{h - h_p}{l_{0q}^3} \mu_0 A_q, \quad (76)$$

e, por fim, com  $\mu_{1q}$  calculado, também pelo princípio da superposição, chega-se em:

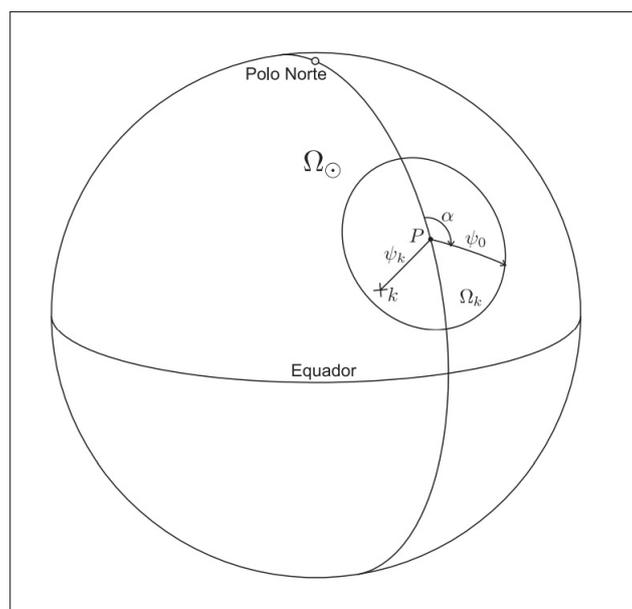
$$T_1 = \frac{1}{4\pi R} \sum_q \mu_{1q} H(\psi_q) A_q \quad (77)$$

Este tipo de solução possui grande vantagem quando se trabalha em ambientes computacionais como na linguagem MATLAB ou Python, isto porque há a possibilidade de realizar a solução de forma vetorizada como é abordado em [Abdalla e Ferreira \(2022\)](#), o que permite mais velocidade de processamento, porém, também exige uma boa quantidade de memória do computador. Para informações mais detalhadas sobre esta metodologia, ou a solução numérica de mais termos das séries de Brovar, recomenda-se consultar em [Hofmann-Wellenhof e Moritz \(2006\)](#) e [Gemael \(1999\)](#).

## 2.6 MODIFICAÇÃO NO NÚCLEO DA INTEGRAL DE HOTINE

A princípio, as integrais de Stokes e Hotine, devem ser utilizadas baseando-se em dados de anomalia e distúrbio da gravidade sobre todo o planeta ([VANÍČEK; FEATHERSTONE, 1998](#)). Devido à falta de dados gravimétricos bem distribuídos ao longo do planeta, e também ao esforço computacional, é comum adotar uma calota esférica de raio  $\psi$  para realizar esta integração (Figura 7). Esta adoção também é útil para substituir a contribuição dos longos e parte dos médios comprimentos de onda em todo planeta a partir da solução de MGG's até determinado grau e ordem, que naturalmente possui menor erro de comissão.

Figura 7 – Calota esférica da região de integração.



Fonte: [Ferreira \(2013\)](#).

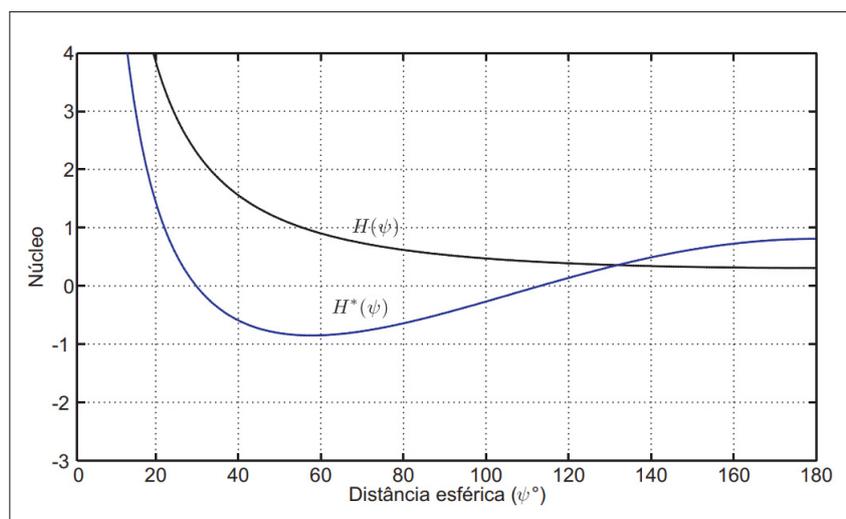
Nesta figura, os dados à serem integrados encontram-se no interior da capa esférica  $\Omega_k$  e  $\Omega_0$  para regiões externas, que acabariam sendo omitidas devido ao erro de truncamento. Matematicamente, pode-se dividir a integral em duas partes, onde a segunda parte, estaria relacionada a este erro. Em relação a integral de Hotine que é o objeto de estudo deste tópico, a eq. (78) descreve a altura geoidal, em coordenadas polares, calculada no raio de integração (no interior da calota), enquanto a eq. (79) apresenta a parte exterior, ou seja, o erro de truncamento ([FEATHERSTONE, 2013](#)).

$$\hat{N}_1 = \frac{r}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} H(\psi) \delta g \sin \psi d\psi d\alpha, \quad (78)$$

$$\Delta N = \frac{r}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_{\psi_0}^{\pi} H(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \right] \delta g_n. \quad (79)$$

Além do erro de truncamento apresentado, as integrais de Stokes e Hotine, possuem uma função de ponderação,  $S(\psi)$  e  $H(\psi)$  para a integral de Stokes e  $H(\psi)$  para a integral de Hotine, que dependem da distância esférica entre os pontos de integração e os pontos de cálculo. Quando estas distâncias estão próximas de zero, os valores em  $S(\psi)$  e  $H(\psi)$  tendem ao infinito (Figura 8), enquanto que para maiores valores de distâncias esféricas, os valores destas funções tendem a zero ([FERREIRA, 2013](#)).

Figura 8 – Comportamento da função de Hotine.



Fonte: Ferreira (2011).

Para resolver estes problemas apresentados, têm-se como solução realizar uma modificação na função original  $S(\psi)$  ou  $H(\psi)$ , diminuindo assim, o impacto do erro de truncamento e suavizando as regiões das funções tendendo ao infinito (FEATHERS-TONE; EVANS; OLLIVER, 1998). Estas modificações podem ser caracterizadas como modificações determinísticas, onde todas as variáveis utilizadas são conhecidas, ou modificações estocásticas, onde são incorporadas incertezas, sendo necessário a realização de um ajustamento para utilização destes métodos (FERREIRA, 2011).

A primeira modificação, proposta por Molodenskii (1958), parte do princípio que, ao utilizar a integral de Stokes (ou Hotine) somente até o raio de integração do interior da calota, deve-se compensar a função utilizada para o exterior da calota. Assim, Molodenskii propõe o cálculo desta função adaptada  $\tilde{S}(\psi)$  ou  $\tilde{H}(\psi)$ , de forma aproximada pelas séries de Fourier-Legendre com os coeficientes de truncamento em  $M - 1$  (Equação 80):

$$\tilde{S}(\psi) = \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2n+1}{2} Q_n P_n(\cos \psi). \quad (80)$$

A modificação de Molodenskii (1958) consiste em diminuir a função de Stokes original, para a função adaptada (equação 80). Adaptando para a função de Hotine, a modificação de Molodenskii é apresentada na eq. (81),

$$H(\psi)_{Mol}^M = H(\psi) - \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2n+1}{2} Q_n P_n(\cos \psi). \quad (81)$$

Para contornar a situação da distorção dos termos de baixo grau da função de Stokes, e também Hotine, como apresentado anteriormente através da Figura (8), surgiu

uma nova modificação, proposta por [Wong e Gore \(1969\)](#). Ela propõe a eliminação dos Polinômios de Legendre de baixo grau da função, assim, ela partiria de um grau  $M$  e não o grau 2 apresentado anteriormente na eq. (81).

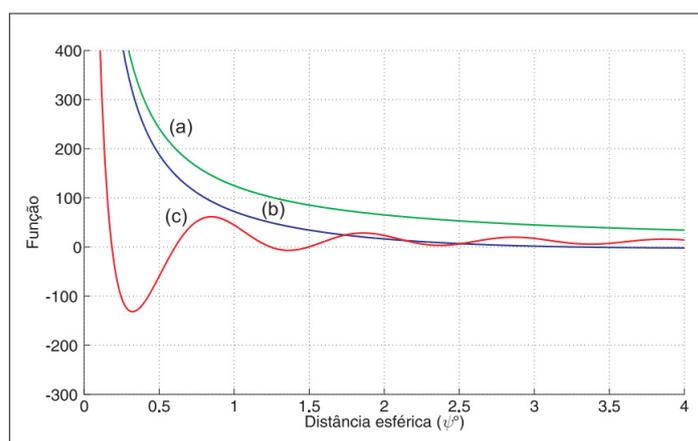
$$H(\psi)_{WG}^M = \sum_M^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \psi). \quad (82)$$

Ao diminuir da função original de Hotine, chega-se à eq (83). Vale ressaltar que o grau de truncamento  $M - 1$  da equação deve ser menor que do MGG na etapa de *Restore* da técnica *Remove-Compute-Restore* de acordo com [Jekeli \(1981\)](#). Porém, de acordo com [Wang et al. \(2021\)](#) e [Ferreira \(2011\)](#), é preferível que os valores de grau de modificação sejam testados de forma experimental, até que se alcance um resultado mais acurado com os de GPS/Nivelamento. Além disto, existem instabilidades ao aumentar demais o grau de modificação próximo ao grau da etapa de *remove*.

$$H(\psi)_{Mol}^M = H(\psi) - \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \psi). \quad (83)$$

A Figura 9, apresenta como ficou a função de Stokes, após esta modificação, considerando os graus de  $M$  como 30 e 360. Pode-se analisar a diminuição nos valores de função para os termos de baixo grau. Para (b) utilizou-se o grau  $M$  como 30 e para (c),  $M = 360$ , em (a), segue o comportamento da função original.

Figura 9 – Comportamento da função de Stokes, com as modificações de [Wong e Gore \(1969\)](#).



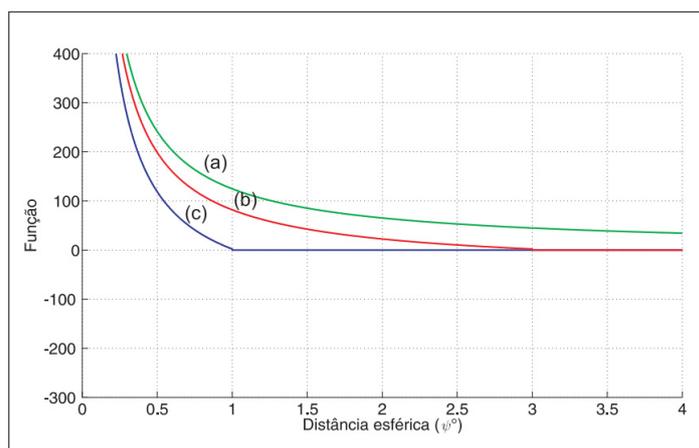
Fonte: [Ferreira \(2011\)](#).

Com intuito de fazer com que haja uma convergência mais rápida à zero, [Meissl \(1971\)](#) propôs com que a função  $S(\psi)$  ou  $H(\psi)$  seja zero no raio de integração  $\psi_0$ ,

$$H(\psi)_{Me}^M = \begin{cases} S(\psi) - S(\psi_0) & \text{para } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ 0 & \text{para } \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases}. \quad (84)$$

A Figura (10), apresenta como se dá o comportamento da função de Stokes com esta modificação. Vale ressaltar que quanto maior o raio de integração, mais suave é a transição entre as regiões no interior da calota para o exterior da calota, porém, a convergência é mais demorada nestes casos. Esta modificação é mais eficiente ao se utilizar em conjunto com a remoção do grau e ordem correspondentes do MGG.

Figura 10 – Comportamento da função de Stokes, com as modificações de Meissl (1971).



Fonte: Ferreira (2011).

Partindo da modificação de Wong e Gore (1969) e de Meissl (1971), com seu grau de modificação, Vaníček e Kleusberg (1987) propuseram adicionar mais um grau de modificação à função  $S(\psi)$  ou  $H(\psi)$ , com o objetivo de minimizar o limite superior do erro de truncamento.

$$H(\psi)_{VK}^M = \begin{cases} H(\psi) - \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) - \sum_{k=2}^{P-1} \frac{2k+1}{2} t_k P_k(\cos \psi) & \text{para } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ 0 & \text{para } \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases}, \quad (85)$$

onde  $t_k$  é um coeficiente que pode ser determinado através de minimização por mínimos quadrados. Para mais informações sobre como determinar o coeficiente  $t_k$ , consultar Vaníček e Kleusberg (1987). Esta modificação possui uma vantagem na convergência à zero, sendo mais rápida dos que as modificações anteriores (FEATHERSTONE; EVANS; OLLIVER, 1998).

Para solucionar o problema da indeterminação de  $S(\psi)$  e  $H(\psi)$  para as distâncias esféricas próximas a zero, onde há uma tendência ao infinito, pode-se utilizar a função  $F(\psi)$  (GEMAEL, 1999):

$$F(\psi) = \frac{1}{2} H(\psi) \operatorname{sen}(\psi). \quad (86)$$

Além destas modificações apresentadas, no caso das determinísticas, pode-se citar também as modificações de Witte (1967) e Heck e Gruninger (1987), já para as

estocásticas, alguns exemplos são as modificações de Wenzel (1982), Sjöberg (1984), Sjöberg (1991) e Vaníček e Sjöberg (1991) que podem ser mais detalhadamente analisadas através de suas respectivas referências.

## 2.7 IHRS/IHRF E EXPERIMENTO COLORADO

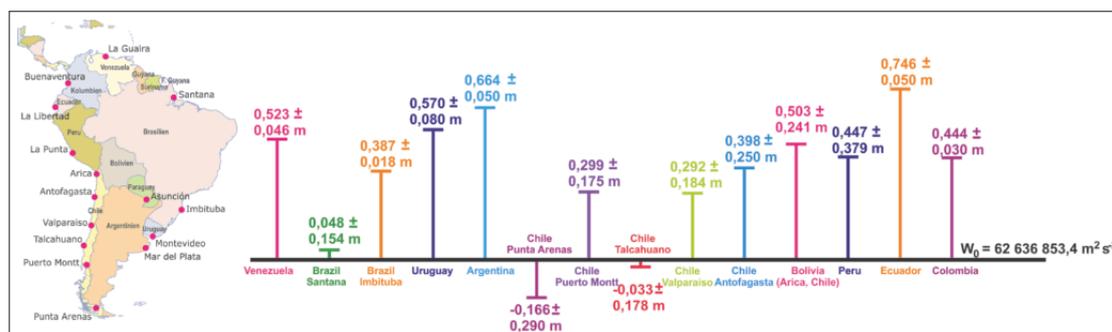
No ano de 2015 a IAG publicou a resolução N° 1/2015 (IAG, 2015) que trata da definição e realização do *International Height Reference System*, com o objetivo de propor um sistema global e unificado de altitudes utilizando altitudes com significado físico, ou seja, relacionadas ao campo da gravidade terrestre.

O IHRS é fundamental em obras e pesquisas envolvendo diferentes países, tendo em vista que se trabalhará no mesmo sistema de altitudes, além disso, é essencial para pesquisas relacionadas a determinação e investigação de mudanças globais no planeta Terra, como na detecção do nível do mar, por exemplo. É crucial destacar que a investigação das mudanças globais do planeta é de grande importância para o entendimento e prevenção de desastres naturais (GGOS, 2023c).

O IHRS é baseado numa superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra, com um valor de geopotencial  $W_o$  e suas coordenadas verticais se dão através da diferença entre o geopotencial do ponto  $W_P$  e  $W_o$ , conhecida como número geopotencial  $C_P$ .

Desde 2011, o GGOS (*Global Geodetic Observing System*) criou grupos de trabalho (*Joint Working Groups*) com o objetivo de desenvolver métodos e investigações para a definição e realização do IHRS e do IHRF. Foram criados 3 grupos de trabalho, sendo o primeiro (*JWG 0.1.1*), que atuou entre 2011 e 2015, responsável pela definição de  $W_o$  como  $62.636.853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  (SÁNCHEZ et al., 2014). A partir deste valor de referência, Sánchez e Sideris (2017) e GGOS (2023a) apontaram como se dá a diferença entre os diferentes Data Verticais de diferentes países na América do Sul em relação à esta superfície equipotencial de referência atualmente (FIGURA 11).

Figura 11 – Desvios Padrão dos diferentes Data verticais da América do Sul em relação à  $W_o$ .



Fonte: Adaptado de Sánchez e Sideris (2017).

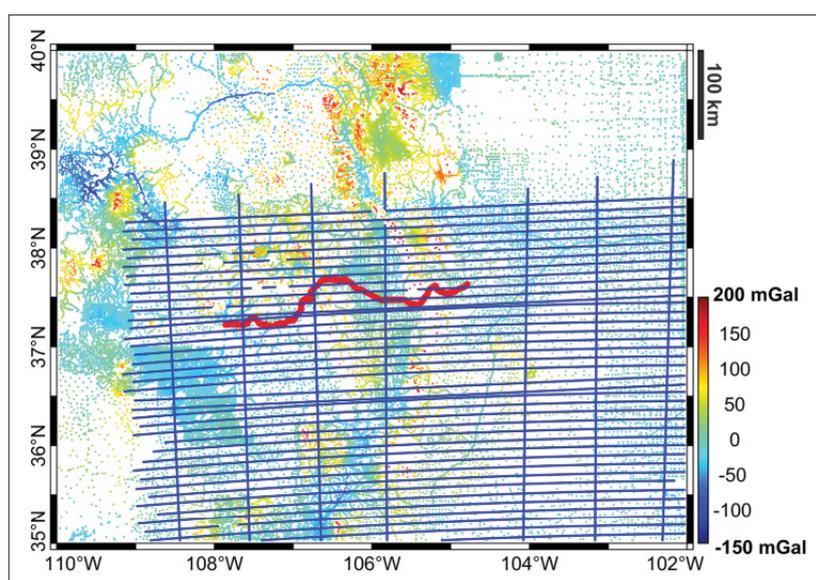
O segundo grupo de trabalho (*JWG 0.1.2*), que atuou entre 2015 e 2019, teve como foco a definição das estratégias para a implementação do IHRF, e assim, a partir da resolução N° 3/2019 da IAG ([IAG, 2019](#)), foi solicitado que todos os países se empenhassem na instalação de estações IHRF de referência a nível nacional, vinculadas ao ITRF. Neste grupo, [Sánchez e Sideris \(2017\)](#) e [Ihde et al. \(2017\)](#) abordam como se dá a unificação das redes existentes para o IHRF. Neste JWG foram definidas as futuras estações IHRF ao redor do mundo.

Foi solicitado que estes países conduzissem levantamentos gravimétricos no entorno destas estações para garantir uma determinação precisa dos valores de potencial da gravidade, mediante diferentes técnicas de integração numérica, e disponibilização destes dados de forma aberta. E, por fim, a contribuição com análises de estratégias para melhorar a determinação destas coordenadas e da modelagem do campo de gravidade terrestre.

Atualmente, o grupo *JWG 0.1.3* está em execução, e tem como foco a implementação do IHRF, abordada no artigo [Sánchez et al. \(2021\)](#), desenvolvido pela coordenadora deste grupo de trabalho. Neste grupo de trabalho é abordada a problematização na padronização da modelagem do campo gravitacional, que foi comprovada através do "Experimento Colorado".

Este experimento foi realizado em uma região montanhosa no estado do Colorado, nos Estados Unidos, e a "US National Geodetic Survey" disponibilizou dados para o cálculo do Geopotencial neste local, para que todos utilizassem o mesmo conjunto de dados ([FIGURA 12](#)).

Figura 12 – Distribuição dos dados aéreos (linhas em azul), terrestres e o perfil GSVS17 (Curva em roxo), para o experimento colorado.

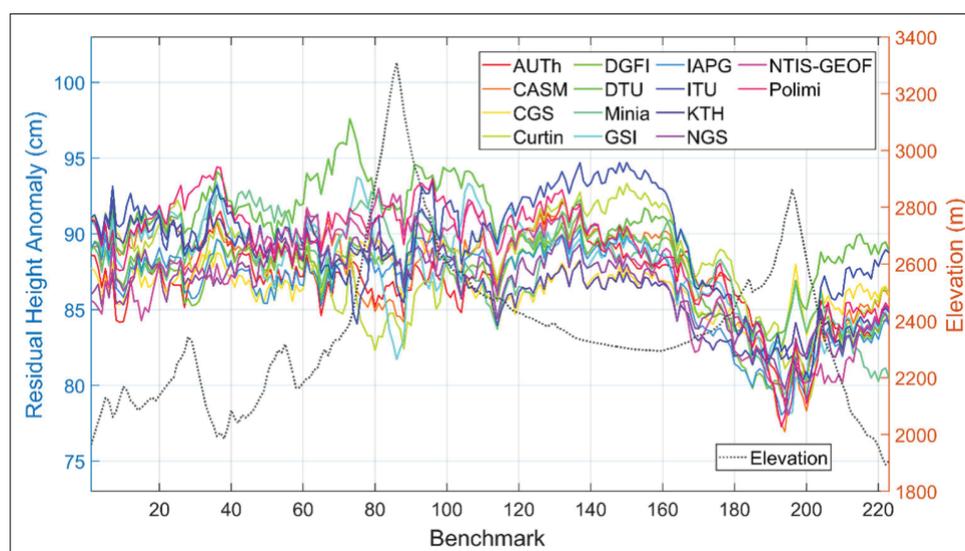


Fonte: ([WANG et al., 2021](#)).

Foram utilizados dados de gravimetria aérea e terrestre, modelos digitais do terreno, dados de GPS/Nivelamento e modelos globais do geopotencial (MGG's). Um total de 14 órgãos e instituições de diferentes partes do mundo utilizaram suas metodologias para calcular as anomalias de altura em 223 pontos com valores de geopotencial conhecidos ao longo do perfil GSVS17 (*Geoid Slope Validation Survey 2017*) através de técnicas de GPS/Nivelamento. Os resultados podem ser vistos na FIGURA 13.

Há três grupos que utilizaram a solução do PVCG Fixado, porém nenhum destes utilizou as séries de Brovar para sua solução. Quem realizou o PVCG Fixado foi Liu et al. (2020) pelo DGFI (*Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut*) na Alemanha utilizando a Função de Base Radial Esférica, Willberg, Zingerle e Pail (2020) pelo IAPG (*Institute for Astronomical and Physical Geodesy*), também na Alemanha utilizando Colocação por Mínimos Quadrados Residual (*Residual Least Squares Colocation*) e Jiang (2019) (*Chinese Academy of Surveying and Mapping*), na China, que utilizou combinação espectral (*Spectral Combination*).

Figura 13 – Anomalias de altura residuais obtidas por diferentes soluções ao longo do perfil GSVS17.



Fonte: Wang et al. (2021).

Através deste estudo, concluiu-se que a precisão dos modelos quase-geoidais foi de aproximadamente 2cm, sem atingir o objetivo de 1cm definido pela IAG, sendo necessário a realização de diversas pesquisas voltadas à modelagem do campo gravitacional para que haja uma padronização das metodologias concordante com a precisão de 1cm.

No Brasil, foram selecionadas pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) as estações que compõem a primeira realização do IHRF, sendo estas, as estações PPTTE, MABA, SCIM, BRAZ, CUIB e CEFT (Figura 14), todas pertencentes à Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC).

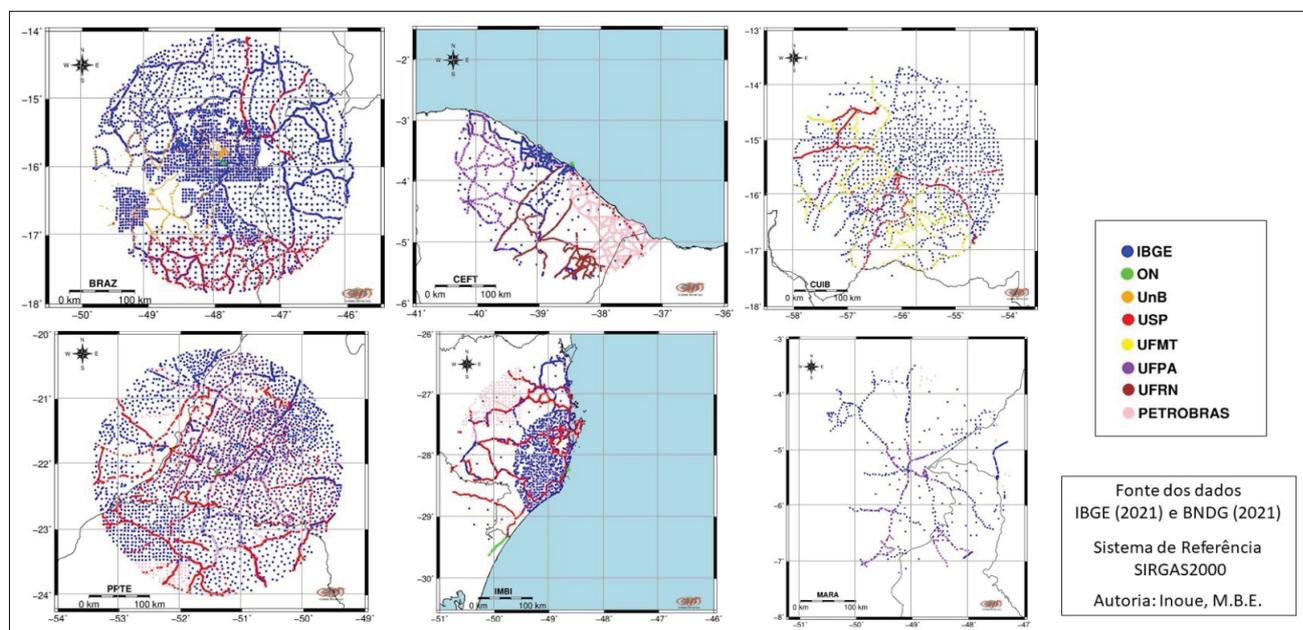
Figura 14 – Estações compõem o IHRF no Brasil (Os círculos vermelhos representam a área da densificação gravimétrica).



Fonte: O Autor.

Em relação aos estudos voltados ao estabelecimento do IHRF no Brasil, pode-se citar o artigo de [Guimarães et al. \(2022\)](#), que apresenta a situação atual deste processo no país e faz uma análise de diferentes modelos geoidais no cálculo da altitude geoidal da estação BRAZ. Neste artigo também é apresentado como se dá a distribuição gravimétrica no entorno destas estações (Figura 15).

Figura 15 – Distribuição gravimétrica no entorno das estações IHRF.



Fonte: [Guimarães et al. \(2022\)](#).

Vale ressaltar que estas distribuições são referentes ao ano de 2021, não estando de acordo com as distribuições atuais, como, por exemplo, em MABA, onde houve uma

grande densificação realizada pelo IBGE.

Como demais estudos, pode-se citar a tese de doutorado de [Ribeiro \(2022\)](#) que contribuiu para a geração de um modelo gravimétrico e o cálculo do potencial gravitacional em estações costeiras do IHRF, como a estação CEFT e SCIM, vinculando dados de gravimetria marinha e terrestre. A dissertação de [Silva \(2020\)](#) contribuiu com uma pesquisa voltada à modernização do sistema gravimétrico de São Paulo, além de propor uma solução para a geração de um modelo geoidal e quase-geoidal para a região. O trabalho de [Guimarães et al. \(2024\)](#) que aborda a geração do modelo geoidal para a América do Sul SAM\_GEOID2023, e por fim, os trabalhos de [Blitzkow et al. \(2024\)](#) e [Blitzkow et al. \(2022\)](#) que apresentam os resultados obtidos a partir de sua solução para diferentes estações IHRF brasileiras.

### 3 METODOLOGIA

Os seguintes tópicos abordam toda metodologia empregada para desenvolvimento desta pesquisa. Esta pesquisa se divide em duas partes. Na primeira parte, foi abordada a solução para cálculo do quase-geoide na região onde foi feito o Experimento Colorado ([WANG et al., 2021](#)), com o mesmo conjunto de dados gravimétricos, e MGG's e MDT's que foram utilizados pelas instituições participantes.

A ideia desta primeira parte foi reproduzir o Experimento Colorado com a solução proposta, para que se possa validar o uso do PVCG Fixado pelas séries de Brovar e o uso da solução numérica das integrais de Hotine. Foram analisados os resultados desta metodologia, no qual, ao se encontrarem concordantes em termos de comportamento de discrepâncias e de precisão com as demais soluções dos quatorze grupos de pesquisa, se deu prosseguimento para a segunda parte desta pesquisa.

A segunda parte, consiste em aplicar a metodologia da primeira parte para a estação IHRF PPTE, utilizando dados de entrada semelhantes, porém com a liberdade de testar um novo conjunto de modelos, mais atuais, que permitiu a comparação dos resultados e a investigação do impacto de diferentes dados na modelagem do Geopotencial. Foram utilizados dados de gravimetria terrestre e aérea para reproduzir o Experimento Colorado e gravimetria terrestre para aplicação do método na estação PPTE, conforme disponibilizado nas regiões de estudo. A estação PPTE foi escolhida com base na disponibilidade de dados de gravimetria distribuídos de forma que a modelagem seja realizada de forma adequada, sendo considerada uma estação "modelo" para estudos que envolvem a modelagem do geopotencial na época em que foi realizada esta pesquisa, além de ser uma das estações do IHRF.

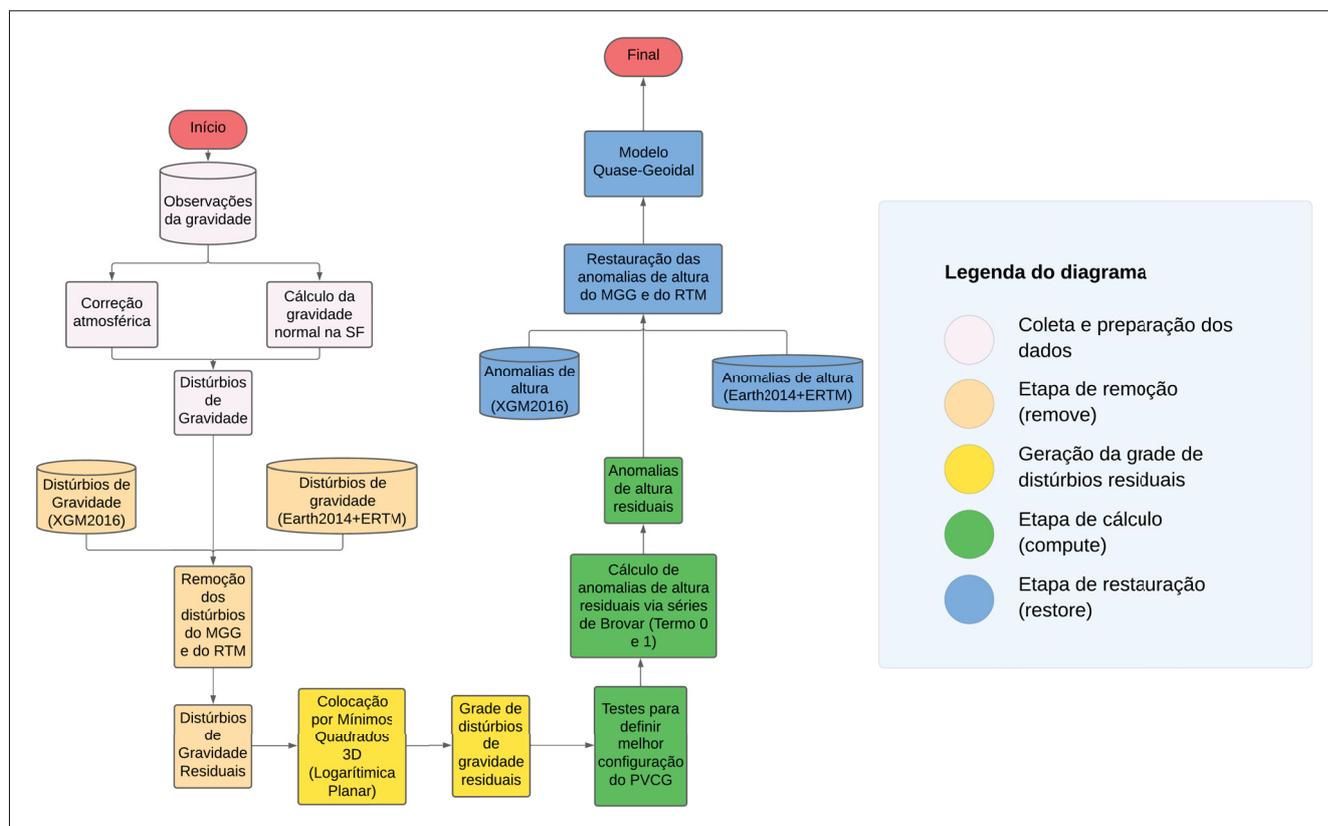
Em ambas as partes da pesquisa, foram abordadas como se deram as análises, escolhas e coletas dos dados, os processamentos envolvidos para suas padronizações, as técnicas e soluções para cálculo do geopotencial, a validação da solução proposta e a obtenção dos produtos finais para a análise dos resultados. É importante destacar que todos os processos foram realizados a partir de rotinas desenvolvidas em MATLAB pelo prof. Dr. Tiago Lima Rodrigues do Departamento de Geomática da UFPR e serão disponibilizadas na plataforma online Github.

#### 3.1 SOLUÇÃO APLICADA AO EXPERIMENTO COLORADO

Neste item é abordada a etapa de validação da solução proposta, na região onde foi feito o Experimento Colorado, como sugerido por [Sánchez et al. \(2021\)](#). Os dados gravimétricos terrestres e aéreos, e o MDE que foram utilizados foram providenciados pela NGS (*US National Geodetic Survey*) e pela NGA (*National Geospatial-Intelligence Agency*) e encontram-se disponíveis no site do ISG ([ISG - International Service for the](#)

Geoid, 2024). O fluxograma metodológico desta etapa se encontra na figura 16 e serve como guia para os próximos capítulos.

Figura 16 – Fluxograma Metodológico para o Experimento Colorado.



Fonte: Autor.

### 3.1.1 PREPARAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Os dados gravimétricos que se encontram disponíveis são dados terrestres, com 59303 pontos observados disponíveis ao longo da região, cobrindo uma área entre a latitude 35° N e 40° N, e a longitude 110° W e 102° W (Figura 12). No arquivo disponibilizado encontram-se a latitude e longitude das observações referentes ao Sistema de Referência Terrestre NAD83, a altitude ortométrica referenciada ao NAVD88 (AHLGREN, 2024), o valor de gravidade, um índice para cada observação e o ano em que foram obtidos estes valores. Todos estes dados estão no conceito de Maré-Livre (WANG et al., 2021).

Os dados gravimétricos aéreos foram disponibilizados através do projeto GRAV-D (*Gravity For the Redefinition of the American Vertical Datum*), que teve como objetivo a redefinição do Datum vertical dos Estados Unidos. Para mais informações sobre como se deu o projeto e o processamento dos dados utilizados, consultar Damiani, Youngman e Johnson (2017). Foram utilizados e disponibilizados os dados aéreos referentes ao bloco MS05 já re-amostrados para 1Hz e já filtrados de variações de alta

frequência nos valores de gravidade, devido às pequenas e constantes variações da aeronave utilizada, referenciados ao Sistema de Referência Terrestre IGS08 à uma altitude média de 6000m.

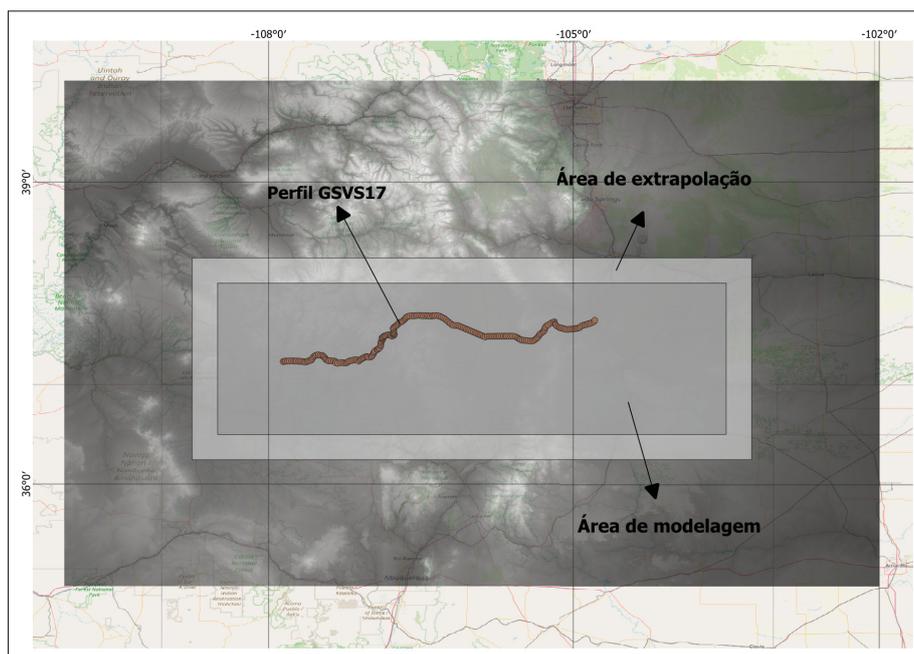
Foi aplicada uma reamostragem nos dados aéreos, alterando sua frequência de 1Hz para 5Hz , para diminuir o número de dados à serem processados em cada faixa de voo, visando um menor esforço computacional no processamento destes dados. Isto foi feito através de uma rotina em MATLAB que obtém um valor de dado aéreo a cada 5 observações. Referente aos dados terrestres, também através de uma rotina em ambiente MATLAB foram removidos os dados duplicados, no qual, deletou-se sempre a segunda observação repetida.

Para o "Experimento Colorado" (EC), o MDE disponibilizado é referente ao SRTM v4.1 (JARVIS et al., 2008), com resolução de 3". A modelagem do Quase-Geoide foi realizada para extensão entre 108,5° W e 103,5° W de longitude e 36,5° N e 38° N de latitude, mesma extensão utilizada por Grigoriadis et al. (2021) que contém todo perfil GSVS17 para a validação da metodologia.

Afim de evitar o efeito de borda no raio de integração dos pontos mais extremos, foi necessário ter uma área extrapolada de grade de distúrbios residuais para poder calcular as anomalias de altura residuais. A extensão desta grade foi extrapolada em relação à extensão da modelagem adotada, concordante com os diferentes valores de grau e ordem (G/O) utilizados para modelagem dos longos e parte dos médios comprimentos de onda de acordo com a regra prática de Rapp.

Foram realizados testes utilizando diferentes G/O na etapa de remoção, sendo estes, 300, 500 e 719 respectivamente. A ideia de testar diferentes valores de G/O é avaliar o impacto dos MGGs no resultado final, o que poderá indicar o quão vantajoso ou desvantajoso é permitir uma maior faixa espectral ao MGG, já que, em contrapartida, haverá erros de comissão agregados a esses modelos.

Figura 17 – Área de modelagem (Cinza escuro) e área de extrapolação (Cinza claro) na região do Experimento Colorado.



Fonte: Autor.

Na figura 17, pode-se observar polígonos identificando a área de modelagem em cinza escuro, que é a área onde foi modelado o Quase-Geoide, e em cinza mais claro, a área de extrapolação, que é a área onde foi feita a grade de distúrbios residuais para posteriormente calcular o Quase-Geoide. Na figura, o perfil GSVS17 encontra-se inteiramente no interior da área de modelagem, permitindo que a etapa de validação fosse realizada adequadamente.

Os MGGs utilizados pelas equipes participantes do experimento são o xGEOID17REFB (WANG et al., 2017), XGM2016 (PAIL et al., 2018) e o GOCO05S (MAYER-GUERR, 2015) conforme Sánchez et al. (2018). Neste trabalho foi utilizado o XGM2016 com G/O de desenvolvimento de 300, 500 e 719 derivado de dados altimétricos, gravimétricos e do próprio GOCO05S (PAIL et al., 2018). A escolha deste MGG se justifica pelo G/O adequado de 719 que será necessário para obter os longos e parte dos médios comprimentos de onda e também pela facilidade em obtenção de diferentes funcionais deste MGG, já que se encontra disponibilizado através da plataforma do ICGEM, diferente do xGEOID17REFB.

A partir dos dados terrestres, foi necessário obter os distúrbios da gravidade para a solução do PVCG Fixado. A obtenção dos distúrbios da gravidade se deu a partir da diferença entre o valor da gravidade real medido em campo e o valor da gravidade normal em um mesmo ponto (Equação 16).

O principal problema para a realização deste cálculo está no fato de que para calcular a gravidade normal na superfície terrestre em um ponto  $p$  ( $\gamma_p$ ), é necessário

conhecer a altitude elipsoidal  $h$  do ponto, que não se encontra disponibilizada nos dados terrestres do experimento. Porém, uma vez que as altitudes ortométricas estão referenciadas ao NAVD88, foi utilizado o modelo geoidal híbrido GEOID18, referenciado ao mesmo Datum Vertical, para obtenção de valores de altitude geoidal. A ferramenta de cálculo "INTG" permitiu obter  $N$  e já propôs a transformação para IGS08 (NOAA, 2019). Assim, esta opção foi escolhida para a obtenção de  $h$  utilizando a Eq. (87).

$$h = H + N. \quad (87)$$

O próximo passo foi obter  $\gamma_P$ , através da equação 88, dada por Gemael (1999),

$$\gamma_P = \gamma \left[ 1 - \frac{2h(1 + \alpha - 2\alpha \sin^2 \phi + m)}{\alpha} + \frac{3h^2}{a^2} \right] \quad (88)$$

onde  $h$  é a altitude elipsoidal,  $\gamma$  é a gravidade normal do ponto no elipsoide,  $\phi$  é a latitude geodésica do ponto,  $a$  é o semi-eixo maior do elipsoide,  $\alpha$  é o achatamento e  $m$  é a razão entre a força centrífuga no equador e a gravidade no equador. Os valores utilizados estão relacionados ao elipsoide GRS80, que serviu como base para o NAD83 e foi adotado para o Experimento Colorado (SÁNCHEZ et al., 2021), e pode ser acessado em (MORITZ, 2000). Vale destacar que  $\gamma$  foi obtido com a fórmula internacional da gravidade do GRS80 (MORITZ, 2000), conforme eq. 89.

$$\gamma = \gamma_e(1 + 0.0052790414 \sin^2 \varphi + 0.0000232718 \sin^4 \varphi + 0.0000001262 \sin^6 \varphi + 0.0000000007 \sin^8 \varphi), \quad (89)$$

onde  $\gamma_e$  é a gravidade normal no equador e  $\varphi$  é a latitude do ponto.

O último passo realizado nos dados gravimétricos terrestres antes de calcular o distúrbio da gravidade foi a correção da gravidade atmosférica, pois o elipsoide de referência (Terra Normal) possui a massa atmosférica atribuída ao mesmo. Para esta correção, foram somados os valores de correção aos dados gravimétricos, através da equação 90 dada por Wenzel (1985).

$$C_{ATM} = 0,874 - 9,9 \times 10^{-5}H + 3,5625 \times 10^{-9}H^2 \quad (90)$$

Com isto, calculou-se o distúrbio da gravidade completo para cada observação gravimétrica através da equação 16.

Referente aos dados gravimétricos aéreos, os pré-processamentos utilizados foram semelhantes aos apresentados para os dados terrestres. Foi aplicada a correção atmosférica, e  $\gamma_P$  foi calculado na altitude elipsoidal do gravímetro a bordo da aeronave, logo, os distúrbios foram obtidos nesta altura. Cabe dizer que não foram feitas filtragens adicionais de erros de alta frequência de variação em gravidade, uma vez que a reamostragem diminui o efeito e a NGS já realizou filtragens nos dados.

Após todos estes processos, foi obtido o espectro completo dos distúrbios da gravidade para os dados aéreos e terrestres do Experimento Colorado, no qual, se deu prosseguimento para a etapa de remoção dos longos, parte dos médios, curtos e curtíssimos comprimentos de onda, para obtenção dos distúrbios da gravidade residuais. Estas etapas (incluindo a etapa de remoção) foram feitas para os três casos de G/O testados em planilhas eletrônicas do software EXCEL.

### 3.1.2 ETAPA DE REMOÇÃO

Para garantir um maior nível de suavização na etapa de remoção, é importante verificar os valores de média e desvio padrão do conjunto de dados residuais. Espera-se que a grade de distúrbios residuais tenha a média de seus valores o mais próximo de zero, para que os dados estejam o mais suavizados possível para geração da grade de anomalias de altura residuais (SANSÒ; SIDERIS, 2013).

Para a etapa de remoção, foi necessário obter distúrbios da gravidade relacionados aos longos, parte dos médios, curtos e curtíssimos comprimentos de onda. Referente aos longos e parte dos médios comprimentos de onda, os distúrbios foram obtidos através da plataforma do ICGEM para todos os pontos gravimétricos terrestres e aéreos. Como os dados gravimétricos utilizados se encontram no conceito de maré-livre, a parte do espectro que será removida também se encontra neste conceito.

Nesta etapa, foram testados G/O de 300, 500 e 719 como já mencionado, e foi selecionado para modelagem do Quase-Geoide àquele que obteve o melhor desvio padrão em relação ao perfil GSVS17. Este teste foi realizado, solucionando o PVCG Fixado pontualmente para cada estação deste perfil, esta etapa é abordada nos próximos tópicos desta dissertação. Isto permite uma avaliação do erro de comissão do MGG utilizado em equilíbrio com a suavização adequada da grade de distúrbios de gravidade residuais. Os dados encontram-se vinculados ao elipsoide GRS80 e o termo de grau zero foi calculado pelo próprio serviço do ICGEM.

Referente aos curtos e curtíssimos comprimentos de onda, a técnica RTM foi aplicada no domínio espectral. Para isto, utilizou-se o modelo topográfico Earth2014 (HIRT; REXER, 2015) para obter os valores de  $\delta g_{RTM}$  entre os G/O de 301, 501 ou 720 (de acordo com o grau de remoção utilizado) até G/O máximo do modelo de 2189. Para complementar os curtos comprimentos de onda com G/O mais desenvolvidos, foi utilizado o modelo ERTM2160 (HIRT et al., 2014) para obtenção de G/O superiores até o máximo de aproximadamente 81000. Vale ressaltar que os dados aéreos utilizaram somente o modelo EARTH2014 até G/O máximo de 2189, já que, por não serem tão susceptíveis aos efeitos da topografia do terreno, os valores obtidos com o ERTM2160 eram insignificantes (GRIGORIADIS; VERGOS, 2020).

A justificativa para utilização destes modelos, além da fácil disponibilidade em acesso aberto, se dá no fato de que diversas instituições do Experimento Colorado

utilizaram estes modelos para modelagem dos curtos comprimentos de onda (GRIGORIADIS; VERGOS, 2020), (LIU; SCHMIDT; SÁNCHEZ, 2019), (WILLBERG; ZINGERLE; PAIL, 2019), o que permite validar a solução proposta com a menor tendência possível devido à utilização de outros dados.

O modelo Earth2014 é facilmente obtido na plataforma do ICGEM, inserindo as coordenadas das observações gravimétricas. Para o modelo ERTM2160, a Universidade Curtin disponibiliza o modelo gratuitamente em seu site. Nele, são baixados os dados RTM globalmente distribuídos em forma de imagens e a rotina MATLAB para obter os valores de  $\delta g_{RTM}$  para cada observação. Com isto, a soma entre os valores obtidos com o EARTH2014 e o ERTM2160 permitiu a obtenção dos curtos e curtíssimos comprimentos de onda até G/O máximo de aproximadamente 81000.

Os distúrbios de gravidade obtidos através dos modelos foram removidos do espectro completo calculado na seção anterior, e assim, obteve-se os distúrbios da gravidade residuais que foram necessários para a realização da solução fixada do PVCG.

### 3.1.3 GERAÇÃO DA GRADE DE DISTÚRBIOS DA GRAVIDADE RESIDUAIS

A geração da grade de distúrbios residuais se deu através do método de Colocação por Mínimos Quadrados, no qual, a partir da covariância das observações, neste caso, a covariância dos distúrbios da gravidade residuais, estimou-se a função covariância empírica que melhor descreveu a distribuição da covariância original e interpolou-se à funcional desejada para criação de uma grade destes valores. Assim, a técnica de Colocação realizou o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) ao mesmo tempo em que realizou a interpolação para geração da grade (SANSÒ; SIDERIS, 2013).

A técnica de colocação foi empregada através de uma rotina MATLAB que utilizou a função "griddataLSC" desenvolvida por Jack (2024) para aplicação desta técnica. Os dados de entrada foram as coordenadas dos pontos e os distúrbios da gravidade residuais para os dados terrestres e aéreos. Também foi necessário uma lista de coordenadas que definissem a grade de interpolação, no qual conteve valores de latitude, longitude e altitude elipsoidal.

A função logarítmica planar 3D foi utilizada tendo em vista que ela foi utilizada por diversas instituições no EC (AUTH, Curtin, DTU, GSI, ITU, NTIS-GEOF, Polimi) e pelo fato de que, por ser uma função tridimensional, ela é mais benéfica quando se utiliza dados terrestres e aéreos, o que indica uma maior proximidade estatística entre os valores empíricos e o modelo de covariância ajustado (GRIGORIADIS et al., 2021). Para mais informações sobre a aplicação e a construção desta função pode-se consultar Forsberg (1987).

Ao utilizar a interpolação 3D, todos os dados utilizados são reduzidos para a superfície física, através de suas altitudes elipsoidais. Isto faz com que tanto os dados aéreos

como os terrestres fiquem em uma mesma superfície de referência (superfície terrestre), ao mesmo tempo em que é gerada a grade de distúrbios da gravidade residuais, ou seja, a interpolação e a etapa de *Downward Continuation* é realizada simultaneamente nos dados. As altitudes elipsoidais no terreno para a grade interpolada foi obtida a partir do MDE, dos quais foi retirado de cada pixel o valor de  $N$  em EGM96, a partir da função "geoidheight" do MATLAB. Mais informação sobre Colocação por Mínimos Quadrados podem ser acessadas em [Ruffhead \(1987\)](#).

Por fim, com a variância empírica ajustada para a covariância dos dados, foram interpolados os distúrbios da gravidade residuais conforme a lista de coordenadas que definem uma grade com resolução espacial de 1' (tamanho da grade ideal de acordo com a frequência de Nyquist). Com esta grade, foi possível dar prosseguimento para a etapa de solução do PVCG que será abordada no próximo tópico.

### 3.1.4 SOLUÇÃO FIXADA DO PVCG

Após obter a grade de distúrbios da gravidade residuais, foram calculadas as anomalias de altura residuais através do PVCG Fixado pelas séries de Brovar, utilizando a solução numérica das integrais. Os parâmetros de entrada foram os distúrbios da gravidade residuais calculados, permitindo com que fosse calculado o potencial anômalo  $T$  na superfície terrestre em cada ponto, e, através da equação 91, obteve-se as anomalias de altura residuais  $\zeta_{res}$  para modelagem do quase-geoide.

$$T_P = \zeta_P \gamma_0, \quad (91)$$

no qual  $\gamma_0$  é a gravidade normal no teluroide, calculada a partir da equação 88, porém, utilizando a altitude normal ao invés da elipsoidal.

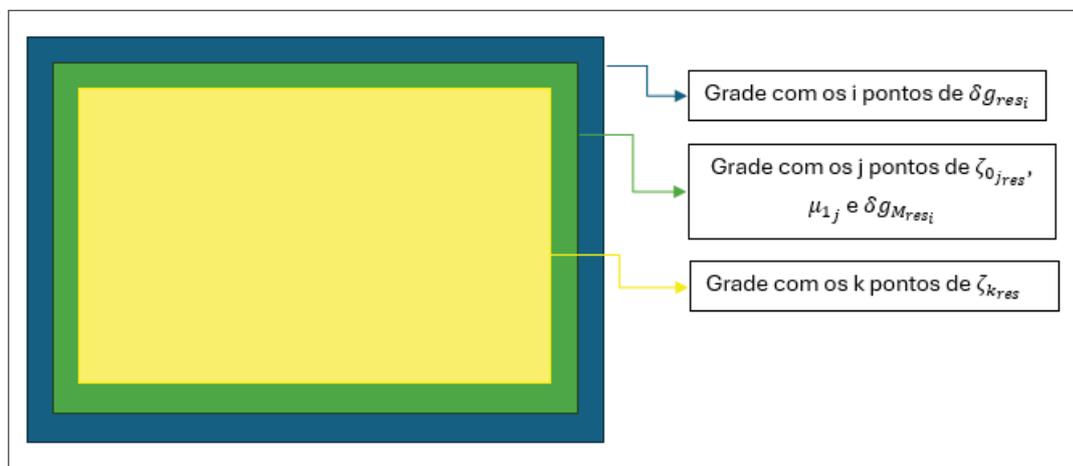
Para obtenção de  $T$ , foram utilizados os termos de grau 0 e 1 da série de Brovar (Equações 64 e 65), no qual permitiu a solução de forma analítica em que  $T$  fosse representado através de uma camada superficial generalizada com uma densidade de superfície associada a função núcleo  $H(\psi)$ . Devido ao fato de que a topografia da região do EC é muito acidentada, foi utilizado o termo  $\zeta_1$  para agregar maior precisão e confiabilidade no resultado final.

O núcleo utilizado foi o de Hotine, com as modificações de [Wong e Gore \(1969\)](#), por serem amplamente utilizadas no EC (AUth, Curtin, DTU, NGS). O grau de modificação foi escolhido através de testes no qual foi calculada as soluções do PVCG diretamente para os pontos do perfil GSVS17, e feita a restauração das anomalias de altura residuais diretamente nestes pontos utilizando o XGM2016 e a combinação entre o Earth2014 e ERTM2160. As anomalias de altura foram calculadas utilizando graus de modificação a cada 30 valores, até o grau máximo de 300. Além disso, foram testados estes valores a cada 0,1° de raio de integração, até um grau máximo de 4°.

O conjunto escolhido foi aquele que obteve o menor desvio padrão para com o perfil GSVS17. Esta etapa foi realizada através de uma rotina MATLAB que utilizou como dados de entrada, a grade de  $\delta g_{res}$ , o MDE SRTM v4.1, um arquivo de texto contendo a latitude e a longitude das estações GSVS17, e outro arquivo de texto contendo os dados de restauração ( $\zeta_{MGG}$ ,  $\zeta_{RTM}$ ), o termo de grau zero do IHRS, os dados de  $\zeta$  de referência do perfil GSVS17 e o  $\zeta_{Médio}$  da média das soluções realizadas no EC.

Após a escolha adequada do grau de modificação e do raio de integração, foi solucionado o PVCG através de três rotinas MATLAB. A primeira, tratou de calcular  $\zeta_0$  utilizando  $\delta g_{res}$  como termo  $\mu_0$  das séries de Brovar. Para isto, utilizou-se como dados de entrada a grade de  $\delta g_{res}$  (grade com  $i$  pontos de  $\delta g_{res_i}$  conforme figura 18) e o MDE. A segunda rotina calculou a grade do termo  $\mu_1$  (Grade com  $j$  pontos de  $\mu_{1_j}$ ), utilizando a grade de  $\delta g_{res}$ , o MDE e a grade  $\zeta_0$  calculada na rotina anterior (grade com  $j$  pontos de  $\zeta_{0_jres}$ ). E por fim, a terceira rotina tratou de calcular o termo  $\zeta_1$  e combiná-lo com o termo  $\zeta_0$ , utilizando a grade de  $\delta g_{res}$ , a grade com  $\zeta_1$ , a grade com  $\mu_1$  e o MDE, gerando, por fim, a grade com valores de  $\zeta_{res}$ . A figura 18 ilustra as diferentes grades utilizadas neste processo.

Figura 18 – Grades utilizadas para solução do PVCG.



Fonte: Autor.

Por fim, com as anomalias de altura residuais, deu-se prosseguimento para a etapa de restauração, para obtenção do modelo de Quase-Geoide para o Experimento Colorado.

### 3.1.5 ETAPA DE RESTAURAÇÃO, CÁLCULO DO MODELO DE QUASE-GEOIDE E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na etapa de remoção, foram subtraídas as contribuições dos longos, partes dos médios, curtos e curtíssimos comprimentos de onda, resultando no distúrbio da gravidade residual. Através do PVCG, abordado no capítulo anterior, com  $\delta g_{res}$ , foram calculadas

as anomalias de altura residuais  $\zeta_{res}$ . Para a obtenção do modelo Quase-Geoidal, foi necessário todo o espectro das anomalias de altura, logo, foi necessário restaurar a parte que foi removida na etapa "remove".

Referente aos longos e parte dos médios comprimentos de onda, assim como na etapa de remoção, foi utilizado o mesmo MGG para realizar sua restauração. Então, foram obtidas as anomalias de altura através do MGG XGM2016 até G/O que obteve o menor desvio padrão nos testes apresentados anteriormente.

Estes valores foram obtidos para as coordenadas de cada pixel da grade das anomalias de altura residuais. As especificações deste processo foram as mesmas apresentadas anteriormente, utilizando o elipsoide GRS80, o conceito Maré-Livre, e o termo de grau zero calculado pelo ICGEM.

Os curtos e curtíssimos comprimentos de onda foram restaurados utilizando a técnica RTM com a combinação do modelo Earth2014 e o ERTM2160. A principal diferença se deu no fato de que foram calculados os efeitos RTM para cada pixel da grade residual e não somente nos dados gravimétricos e aéreos como antes.

Com isto, estes valores foram somados à grade de anomalias residuais, e assim, obteve-se um Modelo Quase-Geoidal para o Experimento Colorado através da solução proposta. Como último passo, o termo de grau zero referente ao IHRS foi adicionado em todos os pontos do modelo, conforme eq. (92),

$$\zeta_{IHRS} = \zeta - \frac{W_{0IHRS} - U_0}{\gamma}, \quad (92)$$

no qual  $\zeta_{IHRS}$  é a anomalia de altura com o termo de grau zero adicionado,  $\zeta$  é a anomalia de altura somente com o termo de grau zero do ICGEM e  $\gamma$  é a gravidade normal do ponto no elipsoide de referência. Os cálculos e métodos apresentados nesta seção foram todos realizados em ambiente EXCEL.

A validação disto se deu através da comparação dos resultados com o perfil topográfico GSVS17 e com 12 soluções para o modelo Quase-Geoidal do Experimento Colorado, sendo elas, POLIMI, CASM, DGFI, DTU, GEOF, IAPG, KTH, NGS, AUTH, Curtin, GSI e CGS, no qual, encontrando-se dentro das discrepâncias obtidas por estas soluções, e obtendo valores estatísticos adequados em relação ao perfil GSVS17, foi considerada validada a solução, e assim, a mesma foi aplicada na estação PPTE no Brasil, para o cálculo do Geopotencial.

As 12 soluções foram obtidas através dos modelos Quase-Geoidais disponibilizados pelo ISG - International Service for the Geoid (2024) e seus modelos foram interpolados para cada ponto do perfil GSVS17. Os valores de  $\zeta$  do perfil GSVS17 foram obtidos através dos valores de altitude normal e altitude elipsoidal disponibilizados por VanWes-trum (2024), assim,  $\zeta$  foi calculado a partir da relação  $\zeta_{GSVS17} = h - H^N$ . Isto permitiu que fossem calculadas as discrepâncias de cada solução (inclusive a solução proposta nesta pesquisa), para com os valores de  $\zeta$  do perfil GSVS17 e fossem calculados

valores estatísticos de desvio padrão, média, erro médio quadrático e discrepância máxima e mínima.

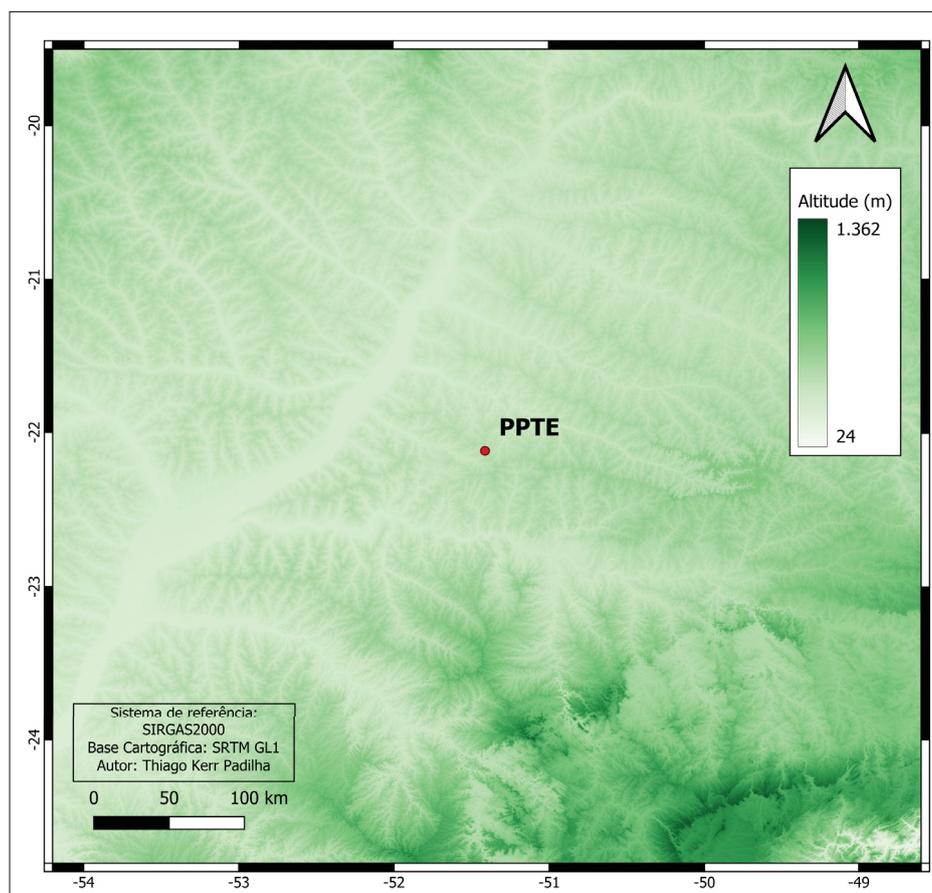
Para analisar a importância da escolha adequada dos graus de modificação de Wong e Gore (WG), foram obtidos valores de anomalias de altura pontualmente para cada estação GSVS17 utilizando o mesmo raio de integração porém com valores de modificação de 180 e 210. Estes resultados são apresentados no tópico 4.1.

### 3.2 SOLUÇÃO APLICADA À ESTAÇÃO PPTTE

Com a solução proposta validada, aplicou-se a mesma no cálculo do número geopotencial na estação IHRF PPTTE, referenciado ao  $W_0$  do IHRF, no qual buscou-se analisar os resultados e compará-los com outras soluções aplicadas por outros estudos e metodologias nesta região. Foram testadas diferentes configurações como G/O de remoção dos MGGs, graus de modificação WG e raios de integração, a fim de definir a melhor configuração para obtenção de  $T$  e demais funcionais para a estação IHRF PPTTE.

A estação RBMC PPTTE está localizada no Campus da UNESP (Universidade Estadual Paulista), no município de Presidente Prudente, no estado de São Paulo. As coordenadas da estação utilizadas para os cálculos deste trabalho encontram-se no descritivo desta estação dado pelo IBGE, com latitude de -22,1199, longitude de -51,4085 e altitude elipsoidal de 431,049. A topografia da região pode ser vista na figura 19 que apresenta o MDE SRTM GL1 (USGS, 2015) com 30m de resolução espacial para uma região de aproximadamente 300km de raio no entorno da estação.

Figura 19 – Topografia da estação PPTE com o MDE SRTM GL1.



Fonte: O autor.

O relevo no entorno da estação PPTE varia entre 24m e 1362m, com um valor médio de 480,94m e um desvio padrão de 162,70m. A região próxima à estação é pouco acidentada, com altitudes variando entre 300m e 400m. A região mais acidentada se encontra à Sudeste da estação PPTE, próximo ao estado do Paraná. Nesta região há variações na altitude entre aproximadamente 400m e 1300m, devido ao segundo planalto paranaense, no qual se encontram diversas formações rochosas que tornam o relevo acidentado.

Em comparação com a região do EC, a estação PPTE possui uma topografia pouco significativa, com isto, houve um impacto menor na modelagem dos curtos comprimentos de onda (Técnica RTM).

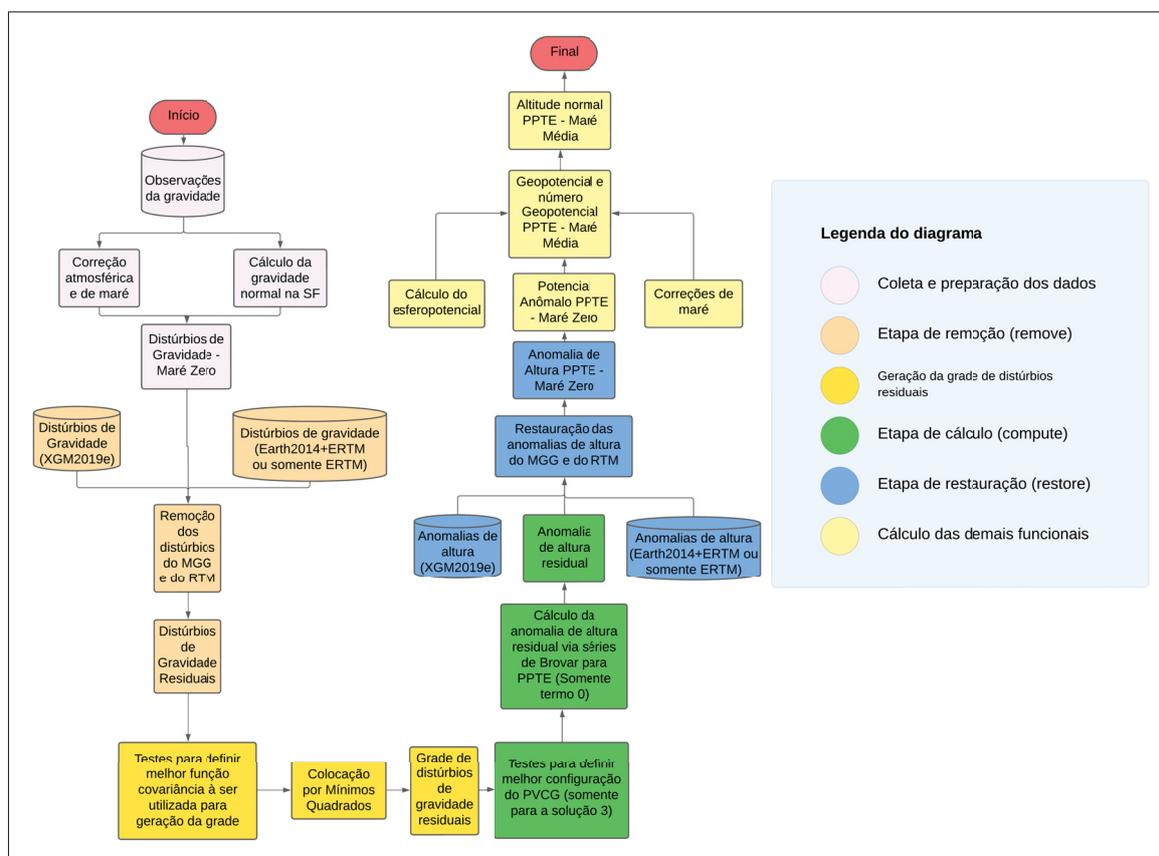
Os próximos tópicos irão orientar o leitor referente a metodologia já aplicada no tópico anterior, porém adaptada à região da estação PPTE. A Figura 20 apresenta o fluxograma metodológico que foi seguido para obtenção das funcionais do geopotencial na estação PPTE. Vale ressaltar que foram testadas diversas soluções, variando seus dados de entrada e configurações da solução do PVCG (Tabela 3).

Tabela 3 – Diferentes configurações propostas para as soluções

Soluções	G/O do MGG	Raio de integração	Grau de modificação WG
1	100	200	100
2	200	100	200
3	TESTES		

Assim, o fluxograma mostra a metodologia para obtenção individual de cada solução.

Figura 20 – Fluxograma Metodológico para a estação PPTE.



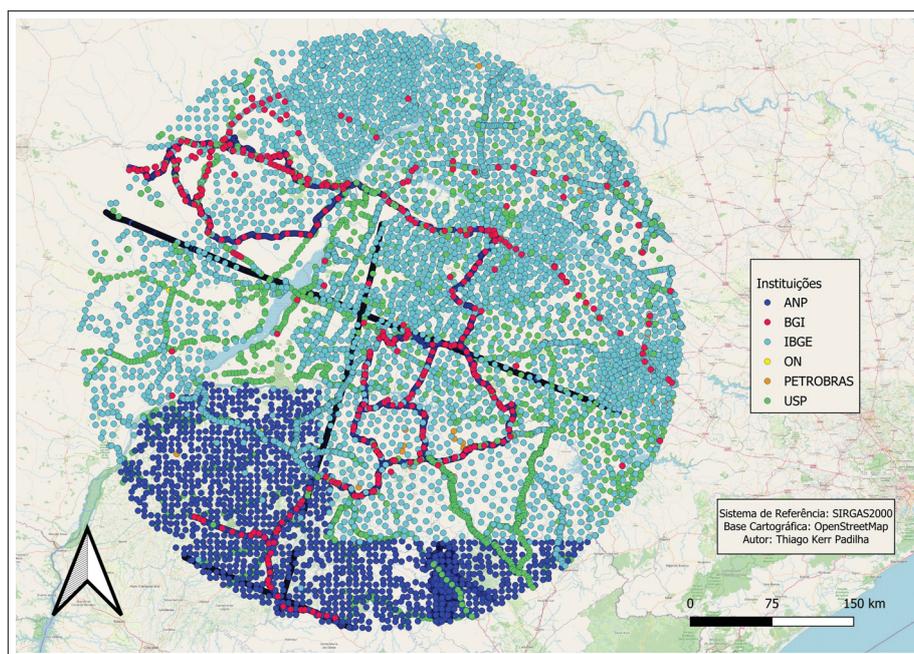
Fonte: Autor.

### 3.2.1 CÁLCULO DOS DISTÚRBIOS DE GRAVIDADE E ETAPA DE REMOÇÃO

Para a modelagem do Geopotencial na estação PPTE foi necessário obter dados gravimétricos no entorno da estação até um raio de 210 km conforme recomendado por Sánchez (2017) e Sánchez et al. (2021). Foram utilizados dados gravimétricos terrestres do IBGE, USP (Universidade Federal de São Paulo), ON (Observatório Nacional), ANP (Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis do Brasil), BGI (*Bureau Gravimetrique International*) e Petrobrás. A estes dados, foram acrescentados dados de levantamentos próprios da UFPR.

Ao total, foram obtidos 26738 dados de gravimetria terrestre, cobrindo um raio de 300km no entorno da estação PPTE (Figura 21). O raio de 300km, maior do que o recomendado, foi utilizado para que se tivesse uma extrapolação de dados para a geração da grade de distúrbios residuais e solução do PVCG. Estes dados se encontram no conceito de Maré-Média, para os dados de gravidade, e Maré-Livre para as coordenadas de latitude, longitude e altitude elipsoidal.

Figura 21 – Dados Gravimétricos em um raio de 300 km da estação PPTE.



Fonte: Autor.

Primeiramente, foi realizada uma análise de dados duplicados, assim como no caso do EC, removendo-os. Foram encontrados um total de 2805 dados repetidos, totalizando um total de 23933 dados para uso. Esta detecção e remoção foi feita através de uma rotina em ambiente MATLAB que definiu limiares de distância e valores de gravidade. Todos os dados que estavam a uma distância de  $0,003^\circ$  e com uma diferença de gravidade de até 0,5 mgal foram removidos.

Vale ressaltar que nem todos os dados gravimétricos tinham a altitude elipsoidal como sua coordenada altimétrica. Alguns dados tinham altitude ortométrica ou normal, nestes casos, utilizou-se o modelo de ondulação geoidal MAPGEO2015 (IBGE, 2015) para transformar as altitudes ortométricas em altitudes elipsoidais e o modelo de conversão de altitudes hgeoHNOR2020 (IBGE, 2021) para converter as altitudes normais em altitudes elipsoidais.

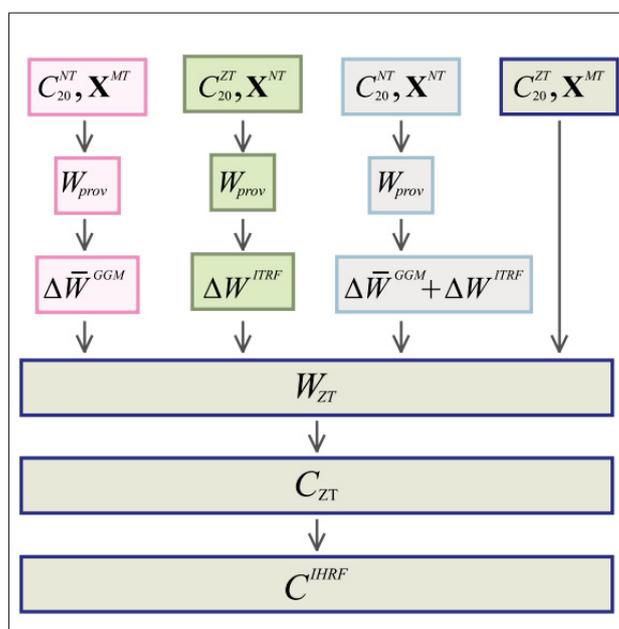
A próxima etapa foi obter os distúrbios de gravidade a partir dos dados gravimétricos, para isto, foi necessário obter o valor de gravidade normal na superfície terrestre de cada observação. Também foi necessário que os distúrbios estivessem no conceito de

Maré-Zero conforme a metodologia proposta por [Sánchez et al. \(2021\)](#).

As observações de gravidade inicialmente se encontravam no conceito de Maré-Média e não Maré-Zero, assim, após realizar a correção atmosférica conforme Eq. 90, transformou-se  $g$  para o conceito Maré-Zero. A obtenção de  $\gamma_P$  a partir da Eq. 88 fornece o valor no conceito de maré-média, uma vez que desconsidera os efeitos de maré permanente ([MORITZ, 1980](#)). Portanto, houve a necessidade da conversão do valor de  $\gamma_P$  para o conceito de maré-zero. Assim, através da Eq. 16, obteve-se os valores de  $\delta g$  das observações no conceito Maré-Zero.

Somente após o cálculo do geopotencial  $W$  é que houve a conversão para o conceito Maré-Média. Estas transformações são realizadas utilizando a metodologia proposta por [Sánchez et al. \(2021\)](#) a partir das equações de [Ekman \(1989\)](#) conforme [Rapp \(1989\)](#), mais especificamente a metodologia em verde na Figura 22.

Figura 22 – Metodologia para conversão de marés para o IHRF.



Fonte: [Sánchez et al. \(2021\)](#).

Na etapa de remoção, foram utilizados dois G/O de remoção advindos de MGGs, sendo estes 100 e 200 respectivamente. A escolha destes G/O se deu devido ao uso de raios de integração de 100km e 210km conforme recomendado em [Sánchez et al. \(2021\)](#) e também utilizados na dissertação de [Silva \(2020\)](#). Com isto os G/O de remoção de MGGs são concordantes com os raios de integração segundo a regra de Rapp ([RAPP, 1977](#)).

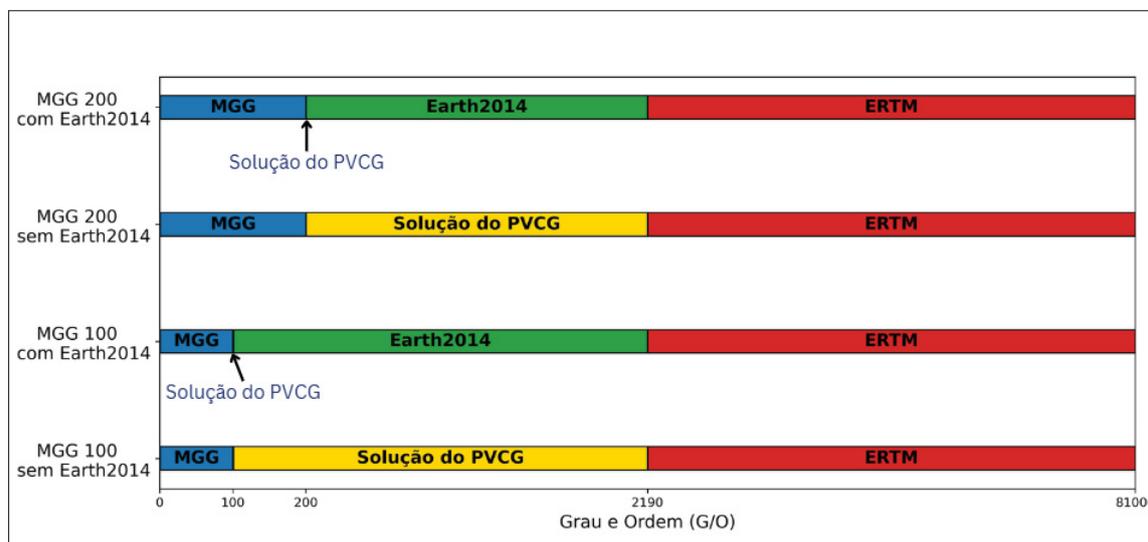
O uso destes dois raios de integração para os cálculos permitiu testar se há a necessidade de se utilizar um raio de integração maior, como o de 210 km, ou se o uso do raio de 100 km já é adequado para a estação PPTE. O MGG utilizado para esta etapa foi o XGM2019e, que utiliza como base o MGG GOCO6S ([KVAS et al., 2019](#)),

nova versão do GOCO05s que foi base do XGM2016, e também a combinação com dados terrestres.

Os curtos comprimentos de onda foram modelados utilizando a combinação do Earth2014 com o ERTM, modelando parte do espectro entre o G/O de remoção do MGG até aproximadamente 81000, como feito em 3.1.2. Os curtos comprimentos de onda também foram obtidos utilizando somente o modelo ERTM2160, o que permitiu a modelagem entre G/O 2190 até G/O de aproximadamente 81000. Com isto, obteve-se dois conjuntos de  $\delta g_{res}$ , aquele que utilizou o G/O de remoção de 100 (que será chamado de conjunto 1) e o que utilizou o G/O de 200 (que será chamado de conjunto 2) a partir do XGM2019e, e para cada conjunto foi testada a utilização e não utilização do Earth2014 para modelagem dos G/O entre o MGG e o ERTM.

A ideia de não utilizar o modelo Earth2014 para modelar os G/O até 2189 foi para permitir que uma maior parte do espectro gravitacional fosse modelada pela solução do PVCG Fixado, a fim de verificar os resultados disto na modelagem das anomalias de altura residuais, como é apresentado no Tópico 4.2. A figura 23 apresenta como se dá a faixa espectral entre cada modelo e o PVCG utilizado. Para os casos em que há o uso do Earth2014, o PVCG trata de modelar apenas a parcela residual da remoção acima do G/O 81000 e regiões transitórias entre o MGG e o modelo Earth2014.

Figura 23 – Graus e ordens dos modelos e do PVCG utilizado.



Fonte: O Autor.

Após obtidos os distúrbios de gravidade residuais nos conjuntos de dados com diferentes G/O de remoção, um procedimento para detecção/identificação/remoção de outliers foi realizado. Este foi baseado no uso do critério dos 3-sigma na vizinhança local de cada ponto, considerando os 15 pontos mais próximos. Para tal propósito, também foi desenvolvida uma rotina em ambiente MATLAB. Em todos os casos foram considerados outliers e removidos da amostra 17 pontos.

### 3.2.2 GERAÇÃO DA GRADE DE DISTÚRBIOS DE GRAVIDADE RESIDUAIS PARA PPTTE

A geração da grade de  $\delta g_{res}$  se deu a partir do uso da Colocação por Mínimos Quadrados, seguindo a mesma metodologia apresentada na etapa de validação desta dissertação em 3.1.3. Como os dados de gravimetria utilizados para a estação PPTTE foram somente dados terrestres, teve-se mais liberdade para testar outras funções covariância bi-dimensionais, diferente da etapa de validação no EC, em que era necessário utilizar a função logarítmica planar 3D devido ao uso de dados aéreos e terrestres em conjunto.

Foram testadas nove funções covariância para definir qual a mais adequada para geração da grade, sendo elas, a função covariância exponencial, a função de Fourier, Gaussiana, de Hirvonen, Logarítmica 3D, Markov de 2ª ordem, Polinomial de seno, Polinomial e função de Reilly. Para mais informações sobre o modelo matemático destas funções, consultar [Duquenne, Everaerts e Lambot \(2005\)](#). Com isto, utilizou-se para geração da grade a função que apresentou o melhor índice  $R^2$ . Os resultados encontram-se apresentados nos capítulos posteriores desta dissertação.

Ao considerar a frequência de Nyquist e o raio de integração de 210km, a resolução espacial das grades foram de 3'. Com as grades geradas (utilizando o conjunto 1 e o conjunto 2), deu-se prosseguimento para a etapa de "Compute", para cálculo das anomalias de altura residuais.

### 3.2.3 CÁLCULO DAS ANOMALIAS DE ALTURA RESIDUAIS PARA A ESTAÇÃO PPTTE

Assim como na seção 3.1.4, o cálculo de  $\zeta_{res}$  se deu pela solução do PVCG Fixado pelas séries de Brovar com a modificação do núcleo de Wong-Gore. Para descobrir a configuração mais adequada para a estação PPTTE, como o grau de modificação WG e o raio de integração, foi realizado o mesmo teste abordado anteriormente, utilizando apenas o termo  $\zeta_0$  das séries de Brovar. A ideia destes testes para o caso da estação PPTTE foi definir uma solução alternativa às soluções que seguem a regra de Rapp, para identificar se é possível obter melhores resultados na modelagem final.

Ao seguir a regra de Rapp, o conjunto 1 que utilizou o G/O de remoção de 100 a partir do MGG, deverá ter um raio de integração de aproximadamente 200 km, enquanto que o conjunto 2 (G/O de remoção de 200), deverá ter um raio de integração de aproximadamente 100 km. O grau de modificação WG também deverá respeitar o G/O de remoção do MGG para cada conjunto, ou seja, no conjunto 1, WG deverá ser de 100 e no conjunto 2 de 200.

Além destas duas configurações para o conjunto 1 e 2, submeteu-se estes conjuntos ao mesmo teste realizado na seção 3.1.4. Para isto, utilizou-se como validação,

a anomalia de altura da estação PPTE, obtida através de seu memorial descritivo disponibilizado pelo IBGE, através da relação  $\zeta = h - H_N$ .

Com a rotina MATLAB, calculou-se  $\zeta_{res}$  para a estação PPTE através das séries de Brovar apresentadas em 2.5.1, e realizou-se a restauração pontualmente para PPTE. Com isto, a configuração escolhida, foi a que apresentou a menor diferença para com o  $\zeta$  calculado a partir do descritivo da estação PPTE.

Vale ressaltar que para a estação PPTE, o cálculo de  $\zeta_1$  chegou em um valor considerado insignificante no resultado final. Foi feito um teste para analisar o valor de  $\zeta_1$  utilizando G/O de remoção do XGM2019 de 200, raio de integração de 100km e grau de WG de 200, isto resultou em um  $\zeta_1$  de  $-5,05 \times 10^{-6}$ m (aproximadamente -0,05mm) com isto, foi somente o utilizado o  $\zeta_0$  neste caso.

Assim, foram calculadas 3 soluções de  $W$  e demais funcionais para PPTE (Tabela 3). A solução 1, utilizou o conjunto 1 de dados de  $\delta g_{res}$ , e seguiu a regra de Rapp, com raio de integração de 200km, e valor de WG de 100. A solução 2 também seguiu a regra de Rapp para o conjunto 2 de dados de  $\delta g_{res}$ , com raio de integração de 100km, e valor de WG de 200. Por fim, a solução 3 utilizou o conjunto e as configurações que apresentaram a menor diferença para com  $\zeta_{IBGE}$ , sem estar concordante com a regra de Rapp.

Com as 3 soluções definidas, como já abordado na seção 2.5.1, deu-se prosseguimento aos processamentos para cálculo de  $\zeta_{res0}$ , obtendo o valor final de  $\zeta_{res}$ .

Após a etapa de restauração, foi obtido o valor de  $\zeta$  para a estação PPTE, e, através da fórmula de Bruns adaptada para o quase-geoide, foi obtido o potencial anômalo  $T$  no conceito de Maré-Zero (Equação 91).

Para o cálculo do Geopotencial (Equação 12), foi necessário conhecer o valor do esferopotencial  $U_P$ , que foi calculado através da equação rigorosa de Heiskanen e Moritz (1967) conforme eq. 93.

$$U_P(u, \beta) = \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta, \quad (93)$$

onde,

$$u = \sqrt{r^2 - E^2 \cos^2 \beta}, \quad (94)$$

$$q = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right], \quad (95)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right]. \quad (96)$$

Nas quais,  $E$  é a excentricidade linear.  $a$  e  $b$  são o semi-eixo maior e menor do elipsoide de referência GRS80 e  $\beta$  é a latitude reduzida do ponto (no caso, estação PPTE). Mais informações sobre a construção matemática das equações acima podem ser encontradas em Heiskanen e Moritz (1967) e Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006).

Com a obtenção de  $T_P$  e  $U_P$  foi obtido o valor de Geopotencial provisório  $W_{prov}$  para PPTE. Conforme abordado em [Sánchez et al. \(2021\)](#), para o caso em que foram utilizadas coordenadas geodésicas no conceito de Maré-Livre e a modelagem de funcionais do geopotencial no conceito Maré-Zero, foi necessário aplicar um fator de correção  $\Delta W_{ITRF}$  (Equação 97) em  $W_{prov}$ , para assim, obter  $W$  no conceito Maré-Zero.

$$\Delta W^{ITRF} = -0,5901 + 1,7475 \cdot \text{sen}^2\varphi + 0,0273 \cdot \text{sin}^4\varphi [m^2/s^2] \quad (97)$$

Por fim, com a aplicação desta correção, adicionou-se o termo  $W_T$  também abordado em [Sánchez et al. \(2021\)](#) a partir da eq. 98. Este termo permitiu a conversão de  $W$  no conceito Maré-Zero para  $W$  no conceito Maré-Média, como é recomendado para o IHRS.

$$W_T = 0.9722 - 2.8841 \cdot \text{sen}^2\varphi - 0.0195 \cdot \text{sen}^4\varphi [m^2 s^{-2}]. \quad (98)$$

Por fim, o número geopotencial  $C_P$  foi obtido através da eq. 99.

$$C_P = W_{0_{IHRS}} - W_P, \quad (99)$$

Este processo conduziu a um valor de  $C^{IHRF}$  similar aos números geopotenciais usados em redes de nivelamento nacionais e continentais, como indicado por [Mäkinen \(2021\)](#). A partir da equação 100 abordada em [Hofmann-Wellenhof e Moritz \(2006\)](#), também foi possível calcular o valor de altitude normal  $H_N$  para PPTE.

$$H_N = \frac{C_P}{\gamma} \left[ 1 + (1 + f + m - 2f \sin^2\varphi) \frac{C_P}{a\gamma} + \left( \frac{C_P}{a\gamma} \right)^2 \right], \quad (100)$$

onde  $f$  é o achatamento do elipsoide de referência.

A comparação entre as 3 soluções calculadas nesta dissertação permitiu concluir se a utilização de modelos mais atuais e aprimorados tem um impacto significativo, positivo ou negativo (em comparação com os valores apresentados pelo SGB), na modelagem do número geopotencial e, conseqüentemente, na altitude normal nas estações do IHRF. Além disso, a utilização do raio de integração e o grau de modificação WG também foram analisados, para definir qual a configuração mais vantajosa para este estudo.

Estes resultados foram comparados com os resultados obtidos por demais estudos e pelo valor de  $\zeta$  calculado pelo IBGE, o qual permitiu saber se o método proposto é eficiente e pode ser uma solução alternativa para cálculo de valores relacionados ao IHRF. Dentre os estudos utilizados para comparação dos resultados encontram-se os dados do SAMQGEOID2023 ([GUIMARÃES; MATOS; BLITZKOW, 2024](#)), o modelo quase-geoidal para américa do sul de 2021 ([MATOS et al., 2021](#)), o modelo quase-geoidal de São Paulo ([SILVA et al., 2020](#)), os valores encontrados para PPTE por

Blitzkow et al. (2022), Ribeiro (2019) e Blitzkow et al. (2024) para comparação das altitudes normais, Silva (2020) e Blitzkow et al. (2022) para o potencial perturbador  $T$  e, por fim, Blitzkow et al. (2022) e Ribeiro (2019) para o geopotencial  $W$ .

No próximo capítulo são apresentados os resultados da etapa de validação no EC e posteriormente os resultados encontrados nesta seção.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo foi subdividido em duas sessões, a primeira, referente aos resultados obtidos na região do Experimento Colorado, no qual foi analisado o modelo quase-geoidal estatisticamente com o perfil GNSS-Nivelamento GSVS17 e com 12 soluções de instituições participantes do Experimento.

A segunda sessão é referente aos resultados obtidos utilizando a solução abordada para calcular o valor do Número Geopotencial  $C_P$  e demais funcionais na estação PPTe, em Presidente Prudente. Os resultados serão comparados com os valores dados pelo IBGE e também por demais estudos mencionados anteriormente.

### 4.1 VALIDAÇÃO NO EXPERIMENTO COLORADO

A primeira análise feita foi em relação aos dados de  $\delta g_{res}$ , para concluir se a etapa de remoção se demonstrou satisfatória na suavização dos dados. Para isto, como valores ideais a serem alcançados têm-se a média de todas as observações de  $\delta g_{res}$  próxima de zero, menor desvio padrão e menor amplitude (GRIGORIADIS; VERGOS, 2020). A Tabela 4 apresenta os resultados.

Tabela 4 – Estatísticas referentes à etapa de remoção utilizando diferentes valores de Grau e Ordem.

Distúrbios de gravidade Residuais	Dados Terrestres			Dados Aéreos		
	300	500	719	300	500	719
<b>Grau e Ordem de Remoção</b>						
<b>Média (mgal)</b>	0,71	0,46	0,78	0,57	0,51	0,49
<b>Desvio Padrão (mgal)</b>	10,94	8,32	6,98	6,64	4,18	3,19
<b>Mínimo (mgal)</b>	-228,98	-218,45	-202,72	-25,39	-21,28	-20,47
<b>Máximo (mgal)</b>	60,96	70,00	75,68	33,08	26,26	21,49

Todos os valores de G/O de remoção utilizados obtiveram uma média dos resíduos próxima de zero e desvio padrão na unidade do mgal, com exceção do G/O 300 para dados terrestres, o que indica uma suavização adequada nos dados para adentrar a etapa de Colocação por Mínimos Quadrados 3D. Os altos valores de mínimos e máximos nos dados terrestres indicam que algumas observações de distúrbios de gravidade não tiveram uma remoção adequada através dos MGGs e da técnica RTM,

obtendo um valor residual significativo. Além disso, em comparação com os dados aéreos, o desvio padrão também apresentou valores maiores, indicando uma maior flutuação nos valores residuais e sugerindo que o problema pode estar na modelagem dos curtos e curtíssimos comprimentos de onda utilizando o modelo ERTM2160, em função de sua resolução espacial de 250 m.

Como a técnica RTM nos dados aéreos utilizou somente o modelo topográfico EARTH2014 até G/O máximo de 2189, já que valores calculados com o ERTM2160 mostraram-se insignificantes nestes dados, há uma grande possibilidade de que o modelo ERTM2160 possa estar realizando uma modelagem menos fidedigna pela resolução espacial de 250 m em algumas observações.

Com isto, seria interessante o uso de um modelo digital de elevação com maior resolução espacial para utilizar a técnica RTM no domínio espacial, além de considerar também as densidades provenientes de modelos como UNB Topo\_DensT (SHENG et al., 2019), como feito por (LIN; LI, 2022). Vale ressaltar que a região onde se encontram estes dados é uma região muito acidentada, com altitudes variando entre aproximadamente 1800 m e 3400 m, ou seja, os efeitos da topografia do terreno são muito mais evidentes e a técnica RTM deve ser realizada com muito cuidado.

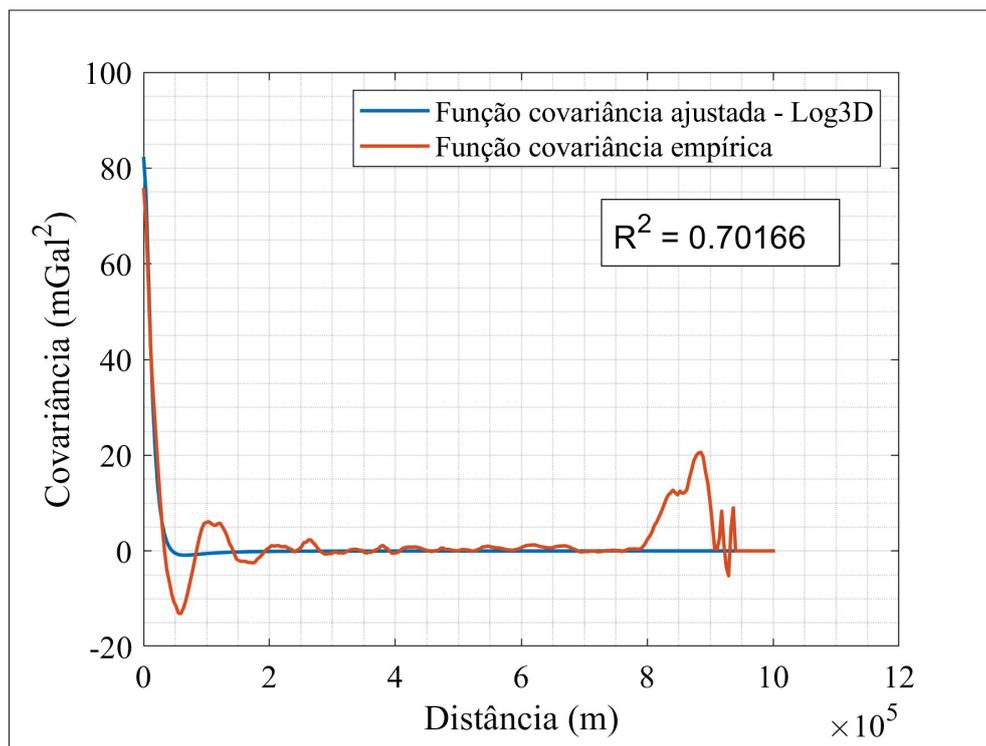
Apesar de algumas observações terem obtido valores residuais altos, a média ainda se encontrou próxima de zero, o que indica que a flutuação dos valores de distúrbios residuais foi suavizada adequadamente para a etapa de Colocação por Mínimos Quadrados 3D.

A grade de  $\delta g_{res}$  foi gerada para as 3 configurações de G/O utilizados, a função Logarítmica Planar 3D utilizada apresentou resultados adequados conforme figura 24 que apresenta a função covariância ajustada e a função covariância empírica dos dados, em conjunto com o coeficiente  $R^2$ . A tabela 5 apresenta os coeficientes que descrevem a função covariância ajustada.

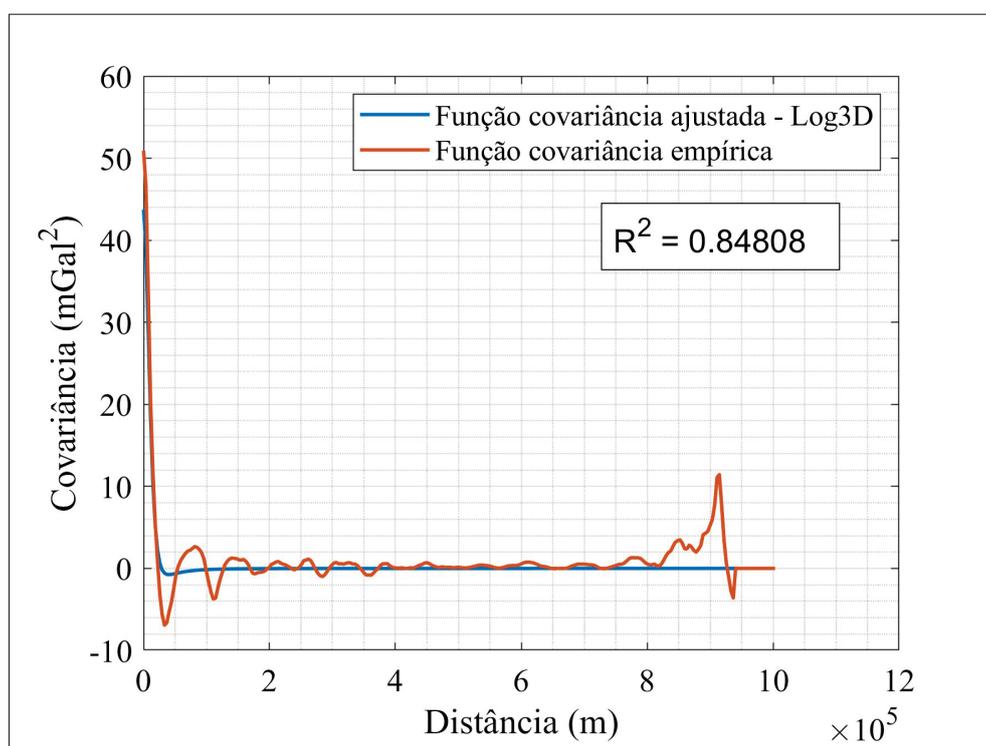
Tabela 5 – Coeficientes da função covariância ajustada.

<b>Coeficientes</b>	<b>G/O 300</b>	<b>G/O 500</b>	<b>G/O 719</b>
<b>C0 (mgal<sup>2</sup>)</b>	82,329	43,708	29,739
<b>D (m)</b>	7376,097	14752,194	11064,146
<b>T (m)</b>	18440,243	3688,049	3688,049

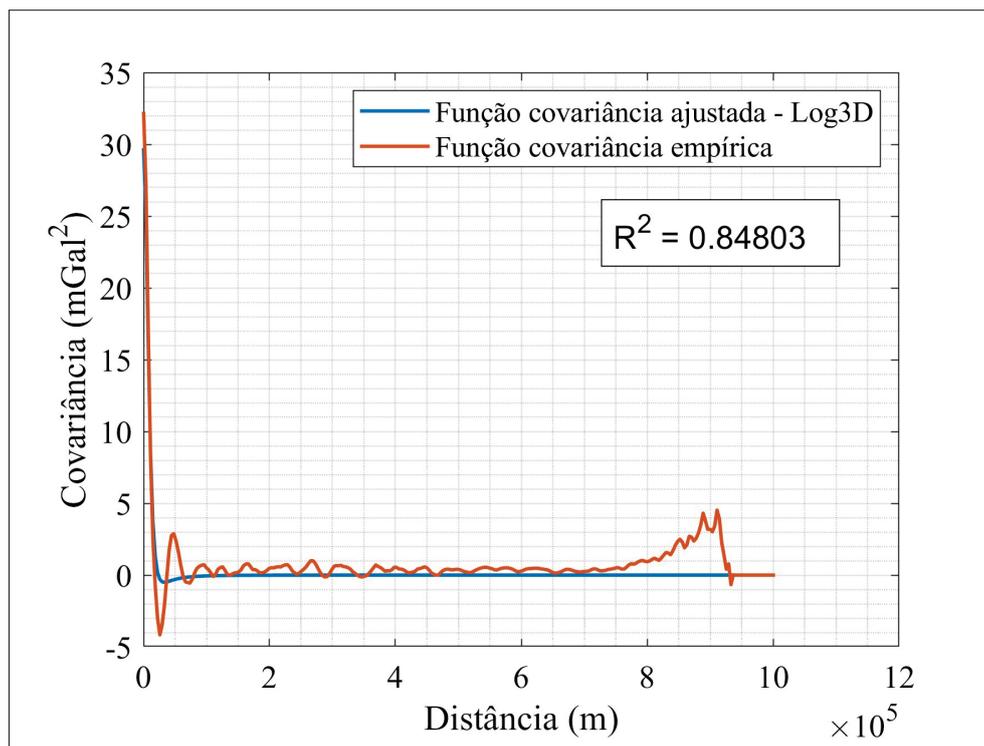
Figura 24 – Função covariância ajustada e empírica. (a) Para G/O de 300. (b) Para G/O 500. (c) Para G/O 719.



(a)



(b)



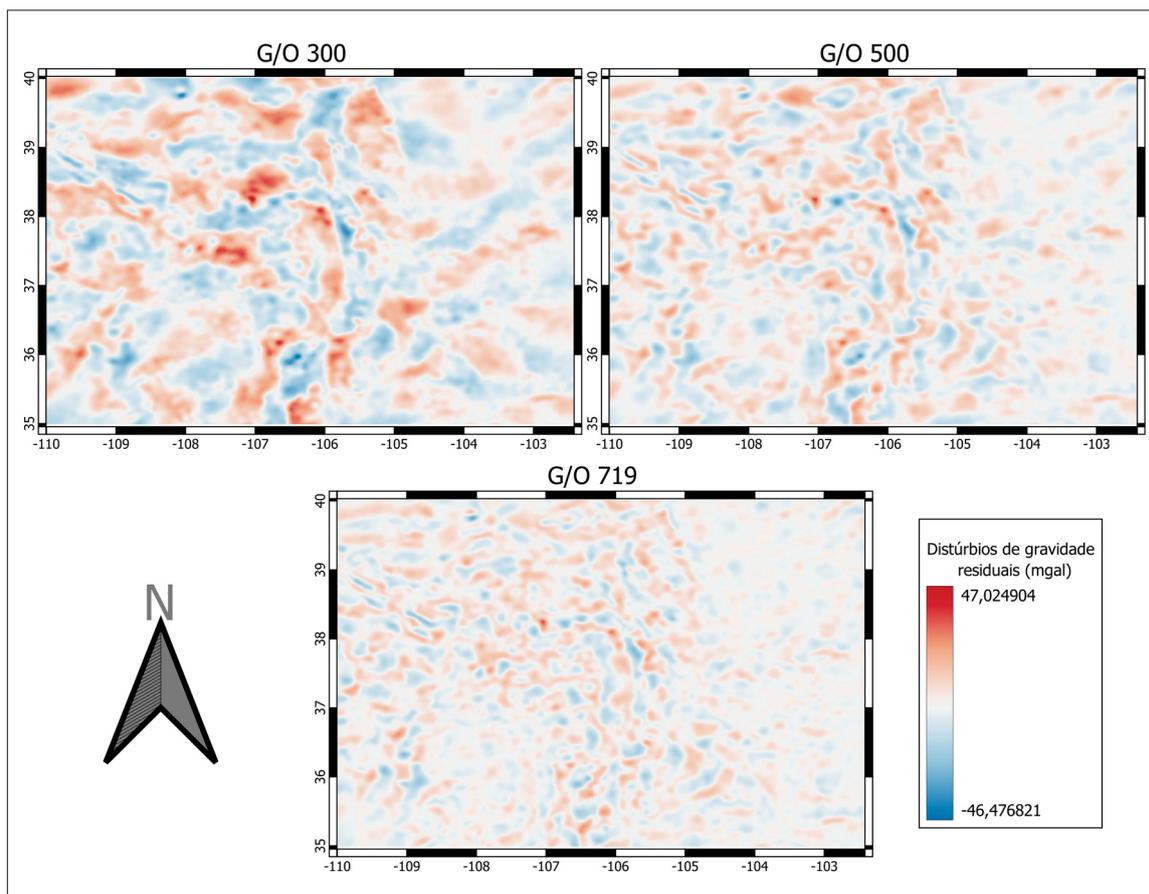
(c)

Fonte: O Autor

Conforme pode ser visto, a medida que aumenta-se o G/O de remoção, mais suave tornam-se as funções ajustadas. Na figura 24 é possível concluir que a convergência da função covariância ajustada à função covariância empírica torna-se cada vez mais próxima a medida que utiliza-se G/O de remoção maiores, inclusive o índice  $R^2$  é mais próximo de 1 com valores de G/O maiores.

Isto pode ocorrer devido à utilização do MGG XGM2016 para remoção dos longos e parte dos médios comprimentos de onda ou devido ao uso do modelo Earth2014, no qual, quanto menor o G/O de remoção utilizando o MGG, maior a parcela do espectro que deve ser modelada pelo Earth2014, o que pode ter feito com que a suavização da solução que utilizou G/O 300 tenha sido menos efetiva com a utilização do ERTM2160 (Figura 25). É necessário realizar mais estudos analisando as interseções das curvas de potências espectrais para se obter melhores conclusões sobre este assunto.

Figura 25 – Grade de distúrbios de gravidade residuais para os valores de G/O de remoção de 300, 500 e 719.

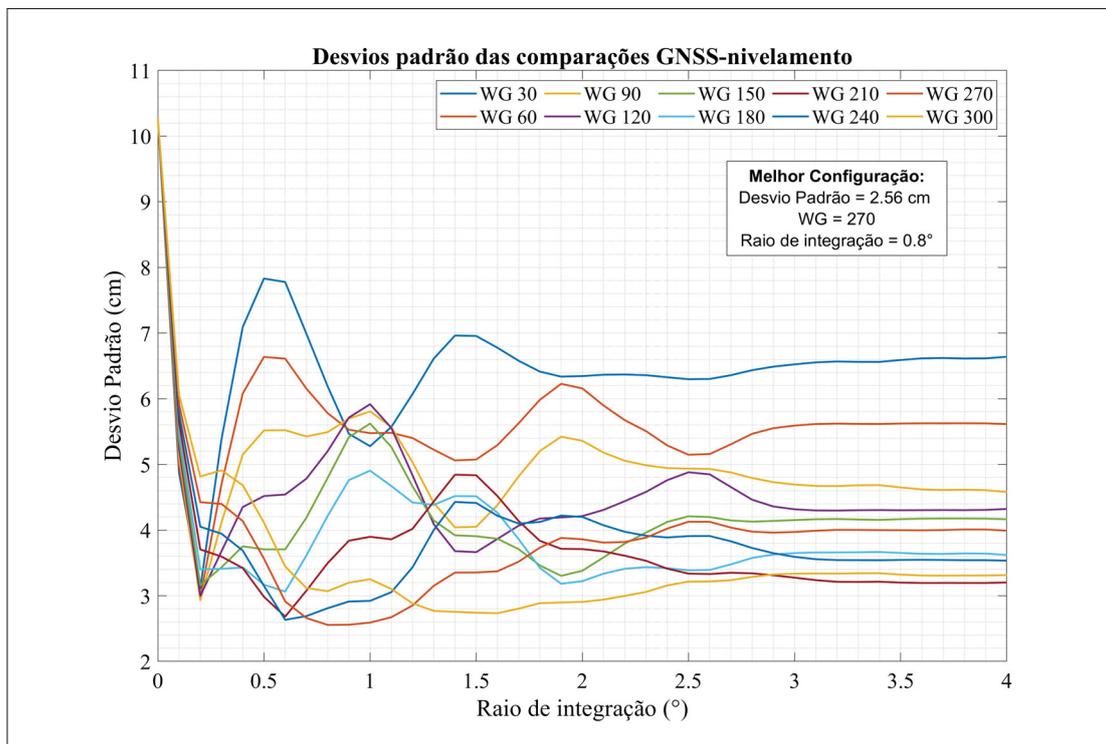


Fonte: O Autor.

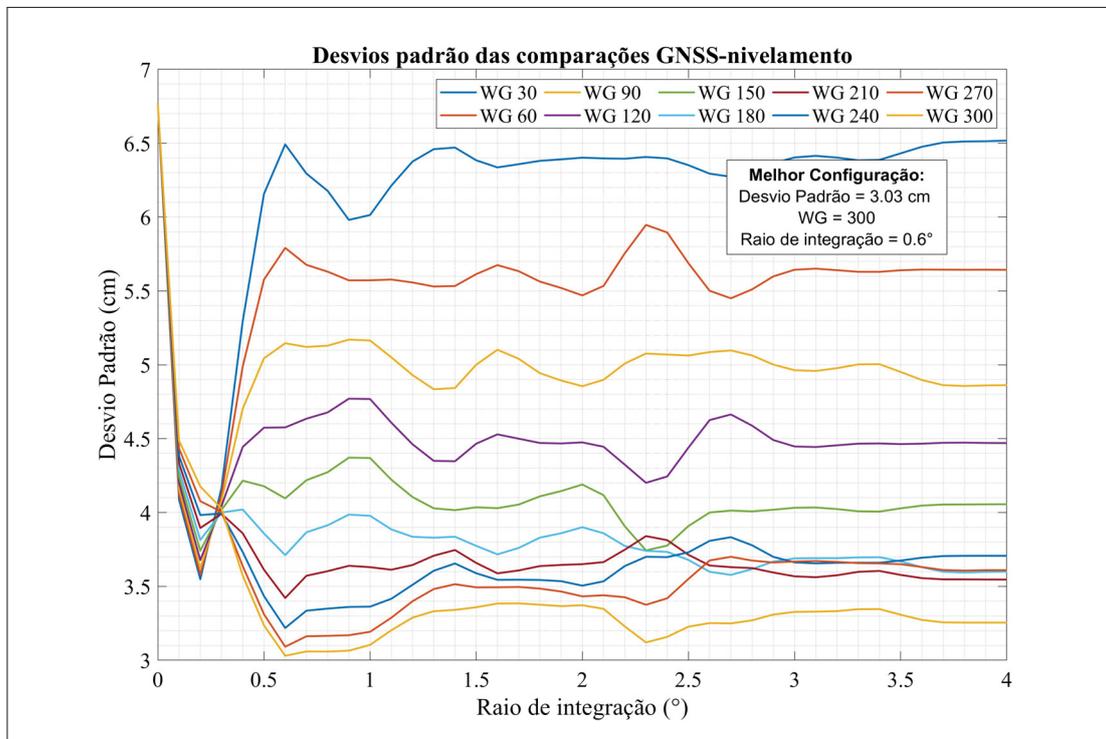
Vale ressaltar que a relação entre o XGM2019 e o Earth2014 se deu de forma que (como pode-se ver na figura 23) quanto menor o G/O do MGG, maior a faixa espectral do Earth2014 e vice-versa, e, como ambos possuem erros de comissão agregados, é válida a realização de testes para definir qual agrega menos erros e mais contribuições no resultado final.

Já na etapa de *COMPUTE*, no que diz respeito à análise de melhor configuração em termos de raio de integração, grau de modificação WG, considerando os três G/O, têm-se os resultados apresentados na Figura 26.

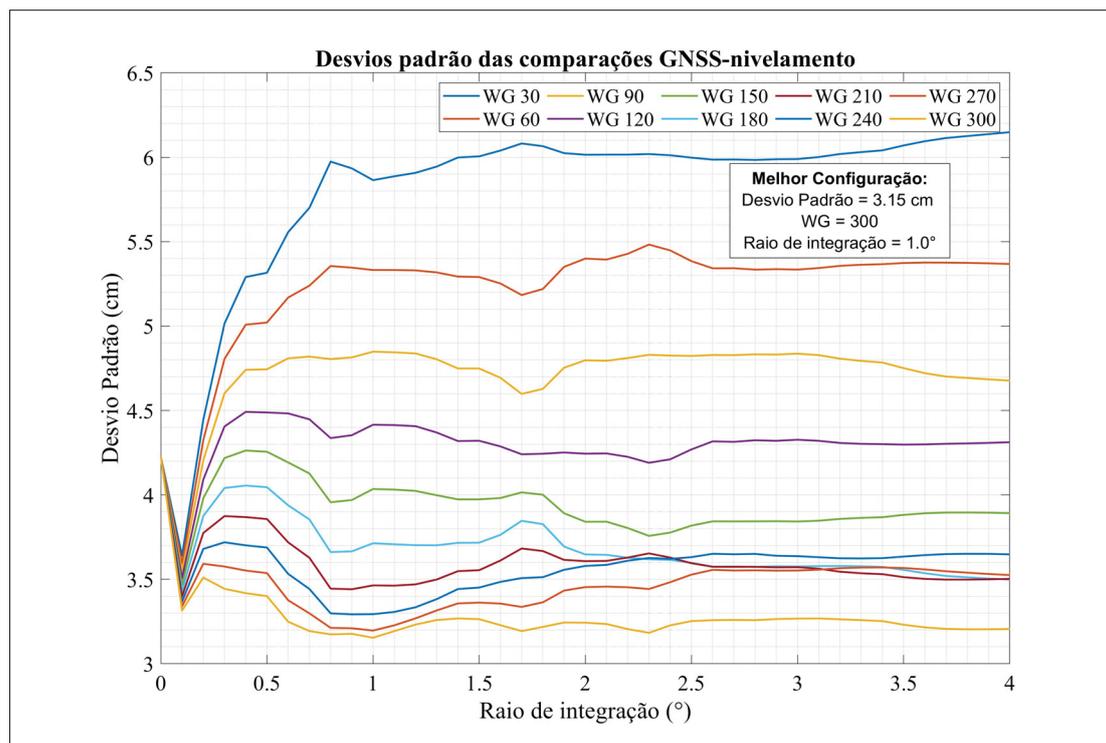
Figura 26 – Testes de G/O de remoção, grau de modificação Wong-Gore e raios de integração. (a) Para G/O de remoção de 300. (b) Para G/O de remoção de 500. (c) Para G/O de remoção de 719.



(a)



(b)



(c)

Fonte: O Autor.

Nos testes apresentados, o eixo das abscissas apresenta os valores de raio de integração testados nos cálculos a cada  $0,1^\circ$  (equivalente a aproximadamente 11 km). O eixo das ordenadas apresenta o desvio padrão que a configuração apresentou para com o perfil GSVS17, ou seja, a configuração mais adequada é aquela que obteve o menor valor de desvio padrão. Cada item da legenda representa um grau de modificação WG diferente, começando pelo valor 30, e sendo testados a cada 30 valores até o grau máximo de 300.

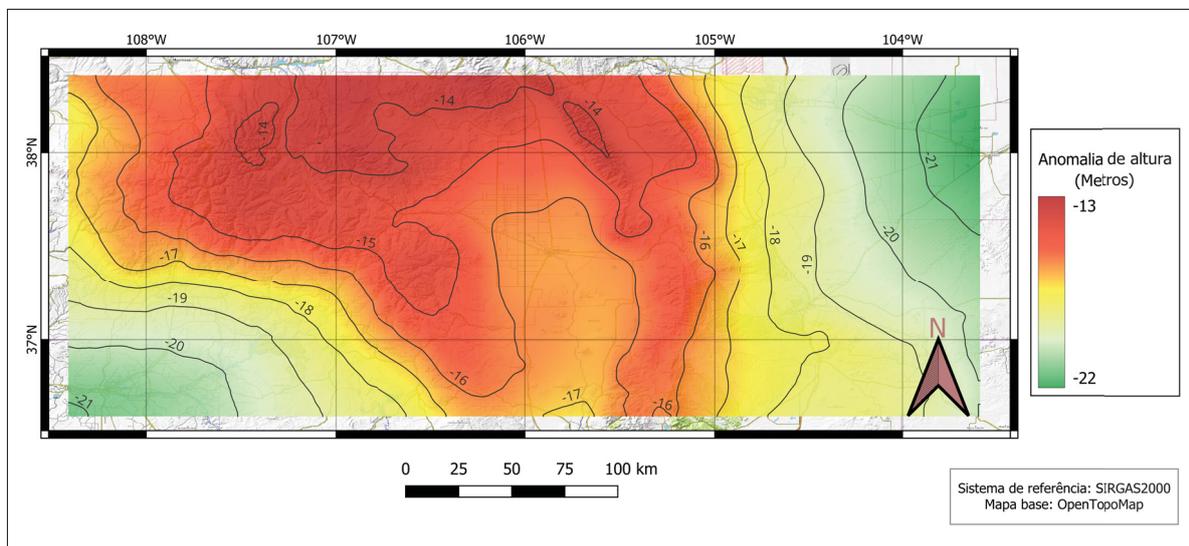
Para o G/O de remoção de 300, o menor desvio padrão foi de 2,56 cm, que utilizou a configuração com o grau de modificação de 270 e raio de integração de  $0,8^\circ$ . O G/O de remoção 500 alcançou o menor desvio padrão com o grau de modificação de 300 e raio de integração de  $0,6^\circ$ , obtendo um desvio padrão de 3,03 cm. E, por fim, o G/O 719 obteve seu melhor desvio padrão em 3,15 cm, com a configuração que utilizou o grau de modificação também de 300 e raio de integração de  $1^\circ$ .

Apesar do uso de G/O maiores, como 500 e 719 terem proposto uma melhor suavização na grade de distúrbios residuais, o G/O de remoção de 300 obteve uma melhor adequação ao perfil GSVS17. Isto pode estar relacionado aos erros de comissão do MGG XGM2016 serem maiores que os de comissão do Earth2014, que agregaram incertezas na solução final. Levando em consideração que a validação do modelo quase-geoidal se deu com a comparação dos dados do perfil GSVS17, para esta pesquisa, utilizou-se a configuração que teve o G/O de remoção de 300, grau de modificação WG de 270 e raio de integração de  $0,8^\circ$ , pelo fato de ter obtido o melhor

desvio padrão de todas as configurações testadas.

Com isto, a etapa de *Compute* se deu apenas utilizando esta configuração, obtendo como resultado final um único modelo Quase-Geoidal (Figura 28).

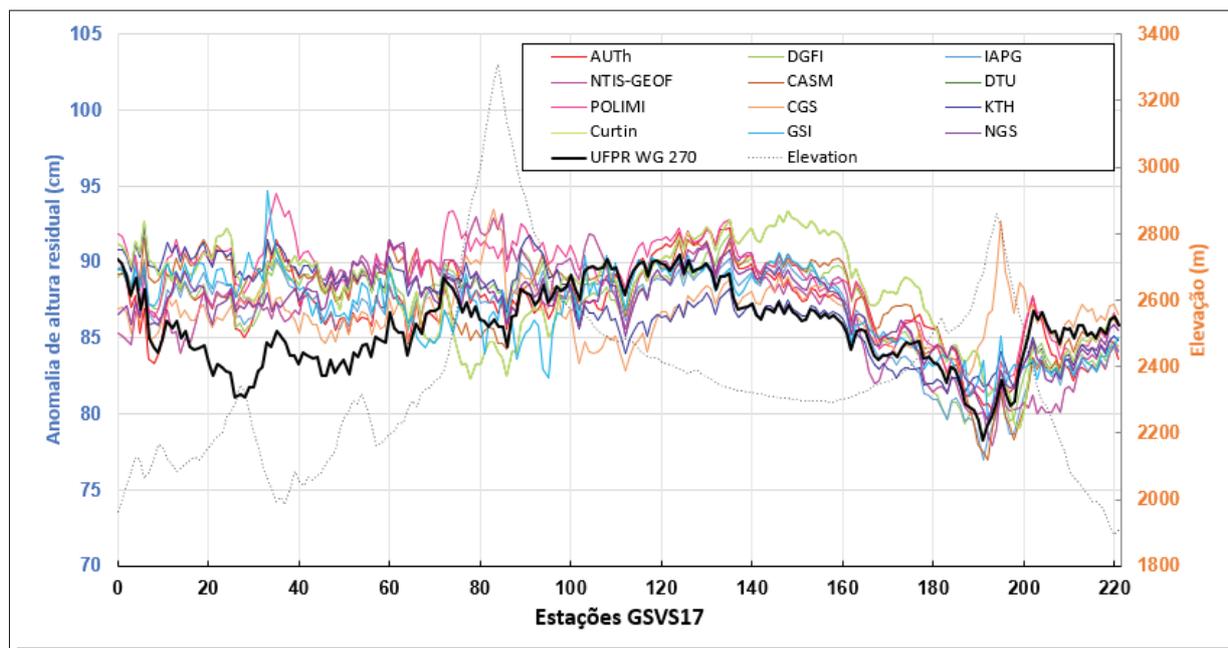
Figura 28 – Modelo Quase-Geoidal gerado pela melhor configuração em comparação com o perfil GSVS17.



Fonte: O autor.

O modelo Quase-Geoidal se encontrou próximo do modelo apresentado em Wang et al. (2021) gerado a partir da média de 14 soluções do Experimento Colorado, o que indica que a solução proposta obteve resultados promissores e concordantes com a realidade. As anomalias de altura variaram entre -22 m nas regiões mais planas, até um máximo de -13 m nas regiões mais acidentadas da área de estudo. A validação estatística deste modelo se deu a partir das discrepâncias para com o perfil GSVS17 que passa por entre a região modelada (Figura 12). A figura 29 apresenta uma adaptação da figura 13, porém com a solução da UFPR, proposta neste trabalho.

Figura 29 – Solução da UFPR e 12 soluções do EC.



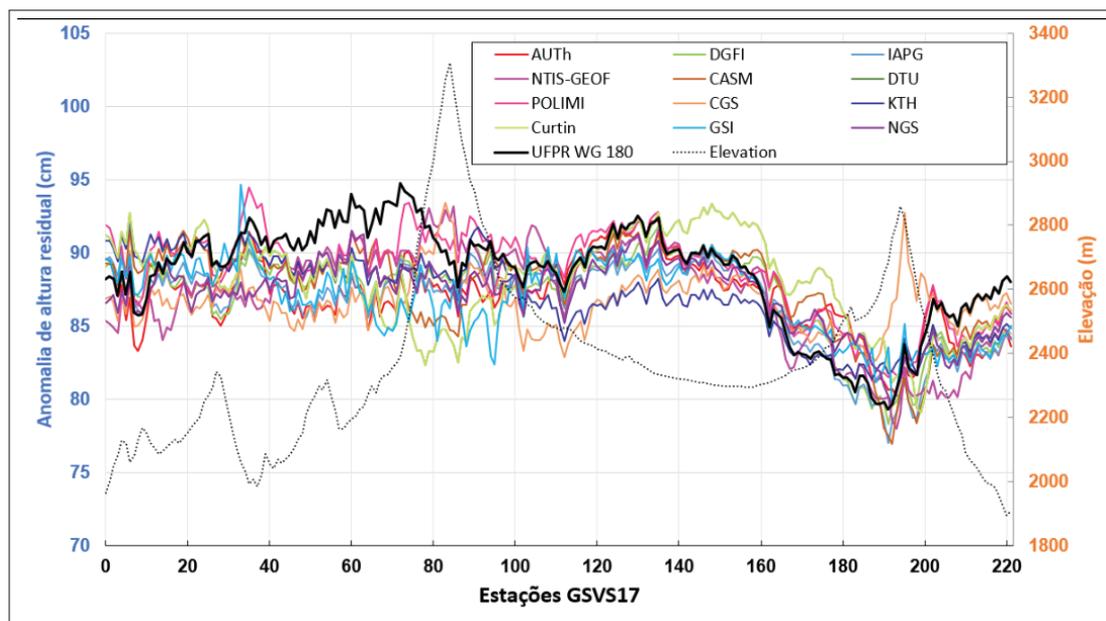
Fonte: Adaptado de Wang et al. (2021).

No eixo X, encontram-se as 222 estações GSVS17, no eixo Y à esquerda, são as diferenças entre a solução calculada para o perfil ( $\zeta_{GSVS17}$ ) e cada solução do EC e da UFPR. À direita, têm-se a elevação do terreno da região por onde passa o perfil, variando de 1800 m até 3400 m.

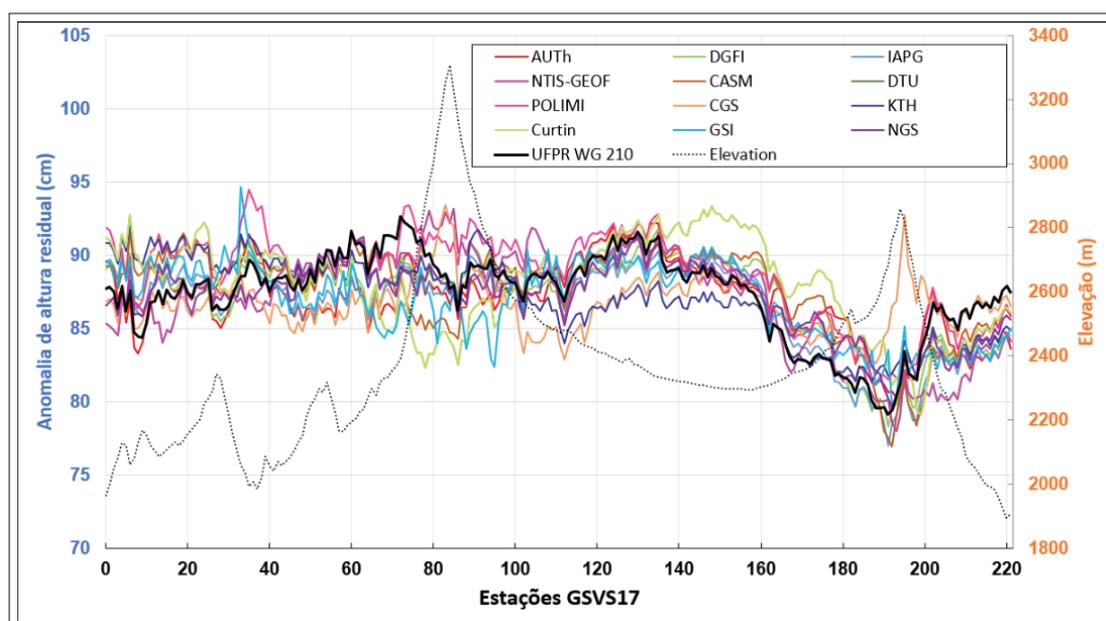
A solução proposta encontrou-se dentro da faixa de valores das 12 soluções do EC, o que mostra que a solução utilizada é uma alternativa para modelagem Quase-Geoidal e pode ser testada em outras regiões, como a estação PPTE abordada no capítulo 4.2. Vale ressaltar que entre as estações 20 e 60 houve uma divergência da solução proposta para com as demais soluções, nas quais as diferenças entre  $\zeta_{UFPR}$  e  $\zeta_{GSVS17}$  obtiveram valores menores do que as outras 12 soluções do EC.

Para avaliar a importância da escolha adequada do grau de modificação WG na integral de Hotine, foram calculadas pontualmente para cada estação do perfil GSVS17 mais duas soluções utilizando os graus de modificação de 180 e 210. Os resultados são apresentados na figura 30.

Figura 30 – Soluções da UFPR utilizando diferentes graus de modificação Wong e Gore. (a): Grau de modificação de 180. (b): Grau de modificação de 210.



(a)



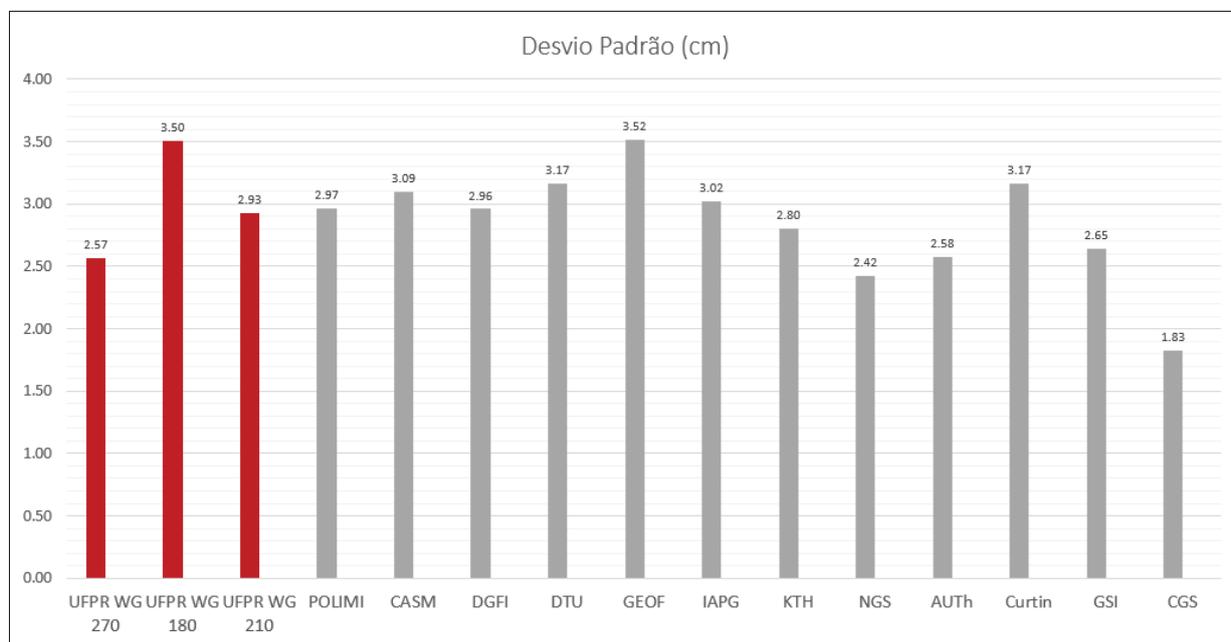
(b)

Fonte: O Autor.

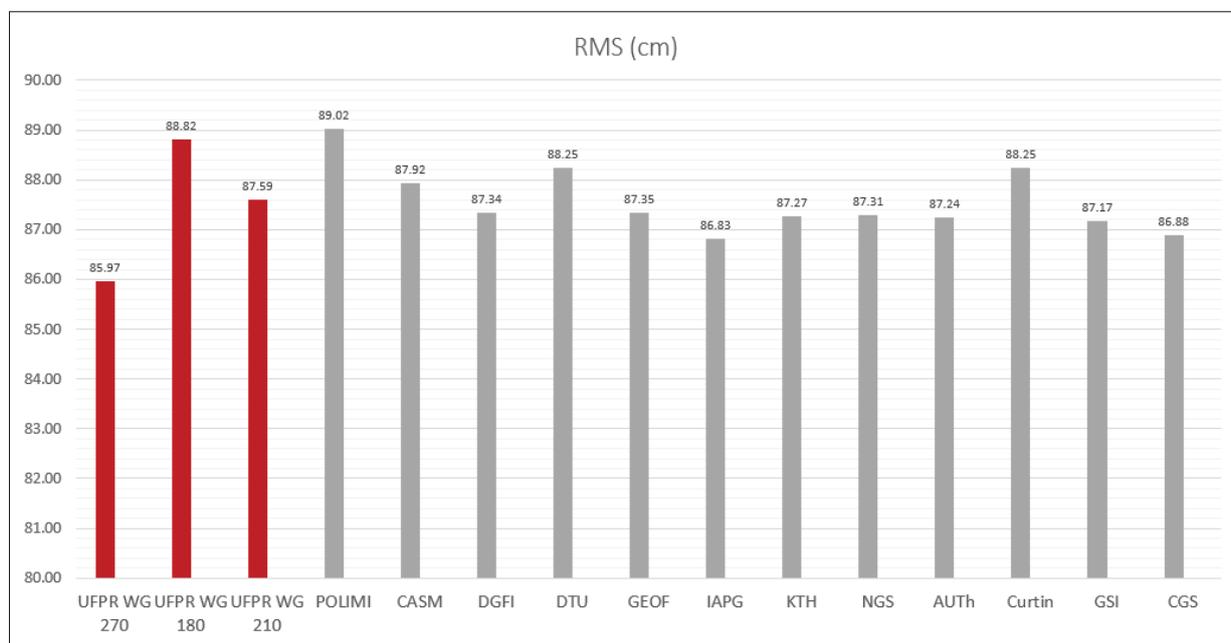
Em comparação com a figura 29, pode-se observar que ao alterar os valores de grau de modificação WG resultou em valores com quase 10cm de diferença nas discrepâncias para com o perfil GSVS17. A modificação de 210 encontrou-se mais alinhada às 12 soluções do EC (Figura 30b), não havendo a discrepância entre as estações 20 e 60 que houve com a modificação de 270. Em relação a modificação de 180, por volta das estações 40 e 80, houve uma discrepância para as demais soluções do EC, e também resíduos maiores em comparação com o perfil GSVS17.

Em relação às análises estatísticas, a figura 31 apresenta a média, o erro médio quadrático (RMS) e o desvio padrão que estas 3 soluções da UFPR, e as demais soluções do EC obtiveram, em relação às discrepâncias com o perfil GSVS17.

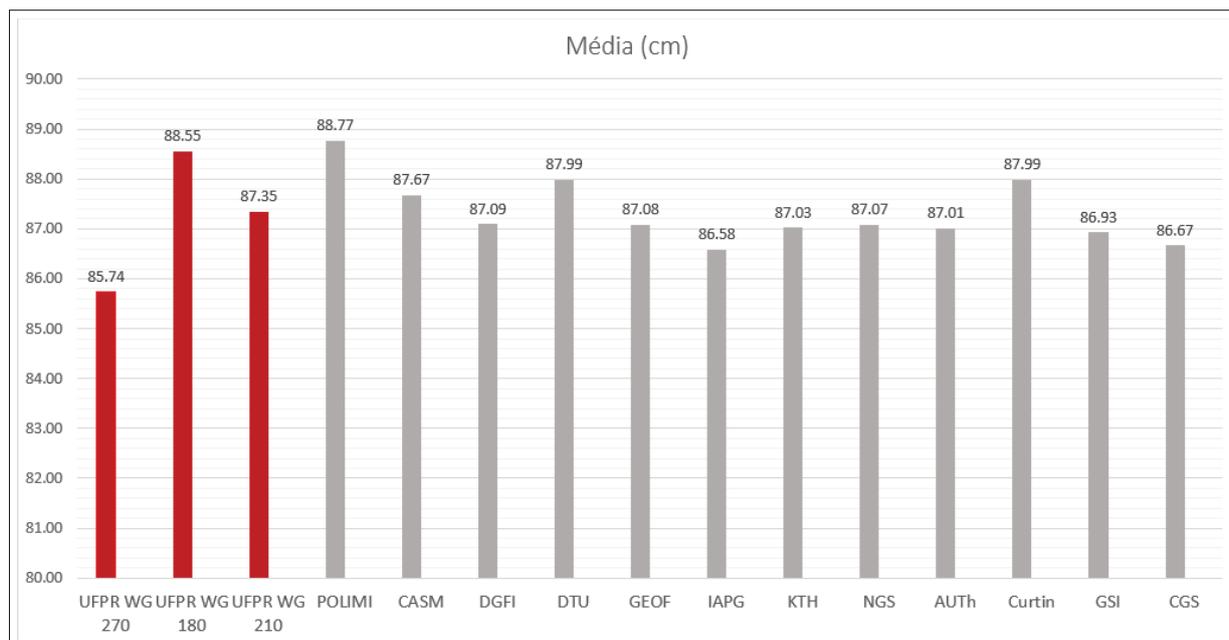
Figura 31 – Valores estatísticos entre anomalias de altura calculadas e as anomalias de altura de validação do perfil GSVS17.



(a)



(b)



(c)

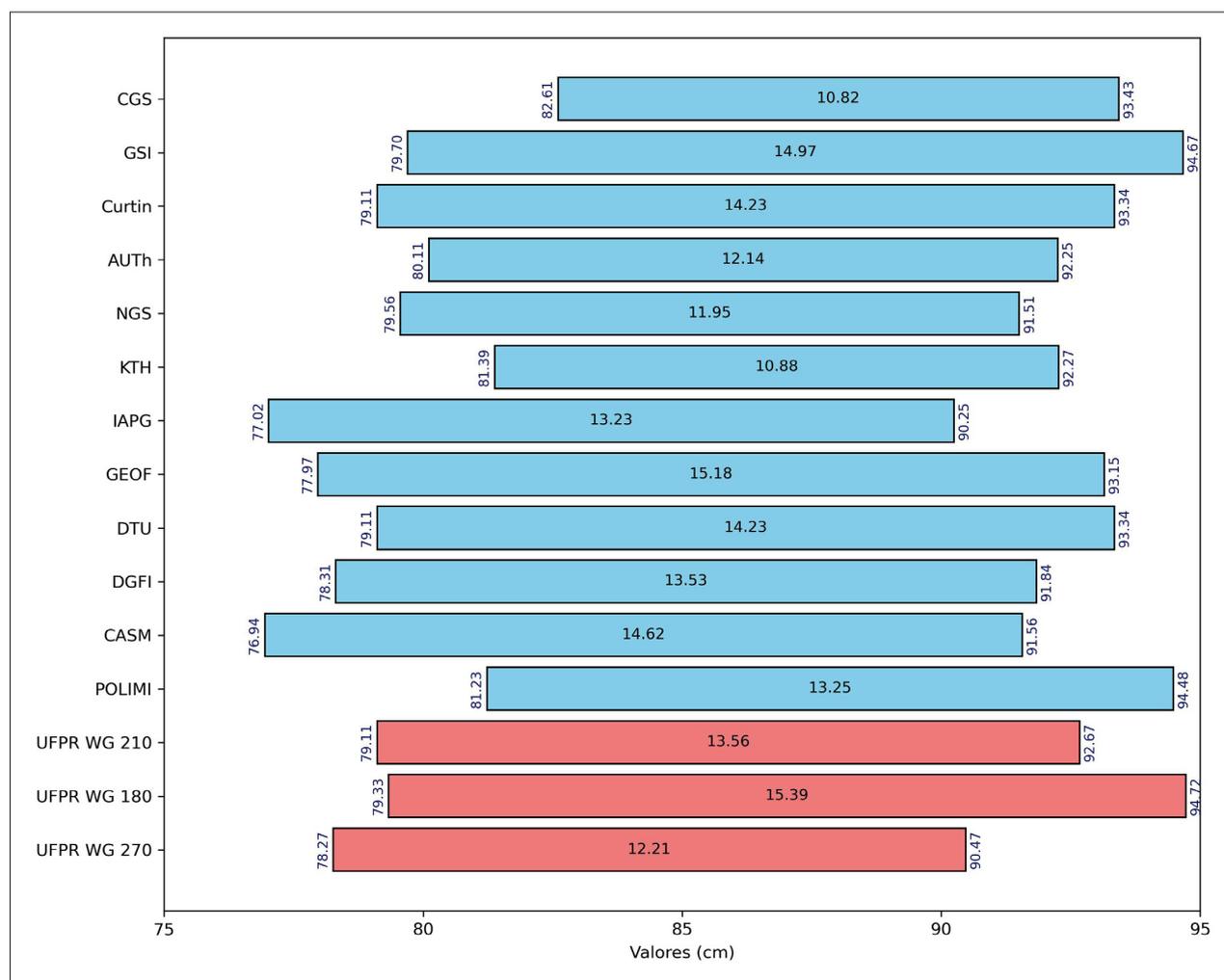
Fonte: O Autor.

Apesar do grau de modificação WG de 210 estar mais concordante com as demais soluções do EC, o desvio padrão da solução principal (que foi definida através dos testes apresentados) obteve o menor valor em relação aos graus de modificação testados, o que indica uma melhor precisão ao perfil GSVS17. Em relação às demais soluções do EC, a solução proposta ficou entre os 3 melhores desvios padrão do experimento. À medida que o grau de modificação se afasta do grau de 270, maior é o desvio padrão, chegando ao segundo maior desvio padrão ao utilizar o grau de 180.

O mesmo ocorre para os valores de média e erro médio quadrático (RMS), no qual a solução principal apresentou os melhores valores dentre as soluções propostas, o que indica discrepâncias mais baixas num aspecto geral em relação ao perfil GSVS17. Por outro lado, a diferença entre o datum NAVD88, datum vertical oficial dos Estados Unidos, e o IHR5 não permite concluir com propriedade que as diferenças foram realmente menores. Com isto, o desvio padrão serve como o indicador principal na análise estatística destes dados. Os valores de média de todas as soluções permite concluir que a diferença entre os dois data verticais está em torno de 85,74 cm e 88,77 cm.

Para analisar a consistência dos resultados de cada solução, a figura 33 apresenta as discrepâncias mínima, máxima e a amplitude entre elas.

Figura 33 – Valores de mínimo, máximo e amplitudes das soluções do EC e da UFPR.



Fonte: O autor.

Na figura apresentada, o eixo X apresenta os valores de discrepâncias em centímetros, o eixo Y apresenta as instituições. No gráfico, em azul são representadas as barras das instituições que participaram do EC e em vermelho, as soluções da UFPR realizadas neste trabalho. Na extremidade esquerda de cada barra, encontram-se os valores mínimos de discrepâncias para com o perfil GSVS17, enquanto que na extremidade direita, os valores máximos. Ao centro das barras, os valores apresentados representam as amplitudes entre os valores máximos e mínimos. Com isto, quanto menor o valor mínimo, máximo e o valor de amplitude, mais consistente se mostrará a solução proposta ao perfil GSVS17.

A menor discrepância para com o perfil GSVS17 foi do CASM com valor de 76,94 cm. Dentre as soluções da UFPR a menor discrepância se deu com a solução principal com a configuração escolhida através dos testes, com um valor de 78,27 cm. O valor máximo dentre as soluções da UFPR foi da solução que utilizou um grau de modificação de 180, chegando a 94,72 cm, e o menor valor máximo foi da solução principal com

90,47 cm. A menor amplitude também foi da solução principal com 12,21 cm enquanto que a solução que utilizou um grau de modificação de 180 obteve 15,39 cm, sendo a maior amplitude dentre todas as soluções do EC.

Estes resultados apontam uma boa consistência na solução proposta com os testes de grau de modificação de WG, evidenciando a importância da realização destes testes. A solução proposta obteve discrepâncias máxima e mínima baixas em conjunto com um baixo valor de amplitude em relação às demais soluções, o que permite concluir uma boa precisão nos resultados.

Todas as análises estatísticas permitiram concluir que a solução proposta obteve resultados promissores para serem utilizados em outras regiões do planeta. No capítulo 4.2, são apresentados os resultados desta solução na estação PPTE em Presidente Prudente, no estado de São Paulo.

## 4.2 RESULTADOS PARA A ESTAÇÃO PPTE

Primeiramente, a Tabela 6 apresenta os resultados estatísticos após a etapa de remoção para as duas configurações de G/O utilizadas, considerando as duas configurações de faixas espectrais modeladas pela técnica RTM.

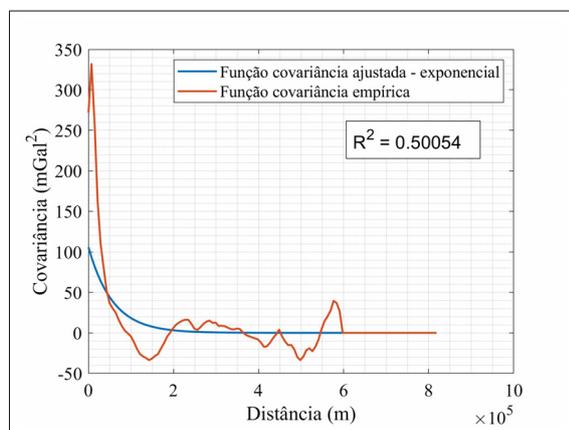
Tabela 6 – Estatísticas referentes à etapa de remoção para a estação PPTE.

Distúrbios de gravidade Residuais	Conjunto 1		Conjunto 2	
	G/O 100		G/O 200	
G/O do MGG	G/O 100		G/O 200	
RTM	ERTM	Earth2014+ERTM	ERTM	Earth2014+ERTM
Média (mgal)	3,74	2,68	4,34	2,57
Desvio Padrão (mgal)	12,21	10,29	10,79	7,37
Mínimo (mgal)	-53,64	-63,58	-46,25	-57,26
Máximo (mgal)	69,85	62,13	52,61	65,87

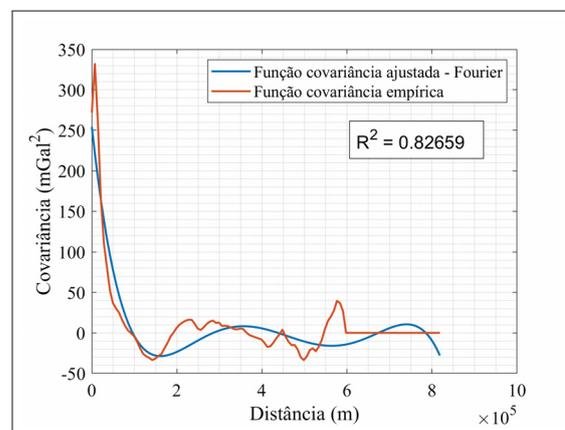
A média dos valores de  $\delta g_{res}$  não foi tão próxima de zero quanto àquelas obtidas no EC, com valores que variaram em um intervalo entre 2,57 mgal até 4,34 mgal. Os dados residuais que não utilizaram o modelo Earth2014 na etapa de *remove* apresentaram maiores magnitudes em comparação aos que utilizaram. Isto ocorre pois houve uma menor parcela do espectro gravitacional removida nestes casos, o que permitiu uma parcela maior do espectro de  $\delta g_{res}$  para modelar  $\zeta_{res}$  com o uso da solução do PVCG. O desvio padrão mostrou que para G/O de remoção maiores, a suavização foi mais efetiva, com valores menos dispersos. Porém, a média dos valores mostra que o conjunto 1 obteve valores residuais mais próximos de zero quando se utilizou a combinação do Earth2014 com o modelo ERTM. Os valores mínimos e máximos foram semelhantes entre os 2 conjuntos de dados, isto também é devido à filtragem de  $3\sigma$  realizada, que permitiu remover os dados discrepantes.

Referente aos testes das funções covariância, a figura 34 apresenta os resultados da função covariância ajustada a partir dos diferentes modelos matemáticos para o conjunto 1 de dados.

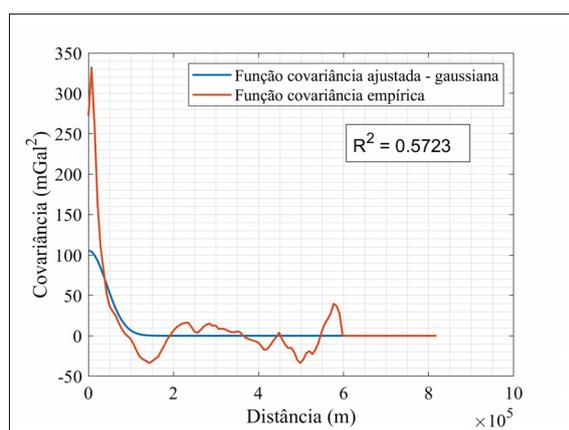
Figura 34 – Funções de covariância ajustadas e empíricas para o conjunto 1 da estação PPTe.



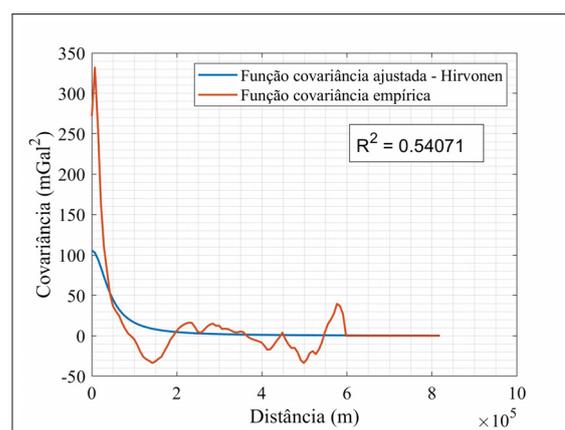
(a) Exponencial



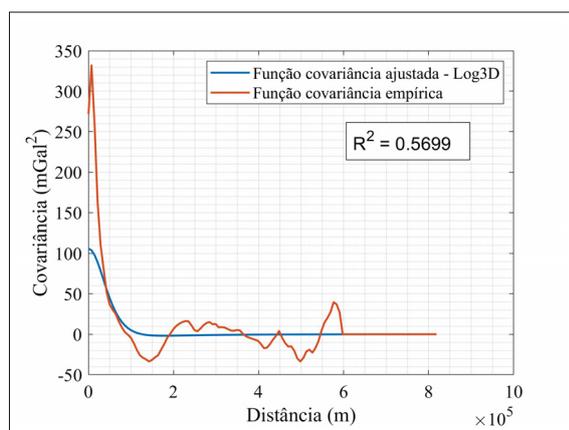
(b) Fourier



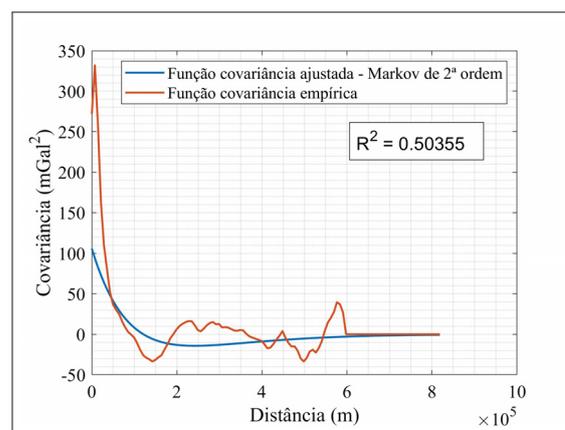
(c) Gaussiana



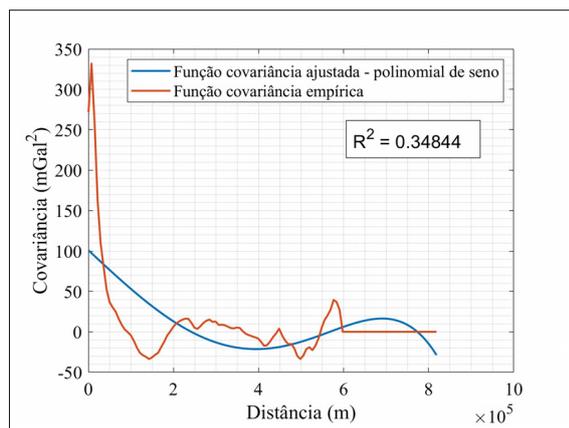
(d) Hirvonen



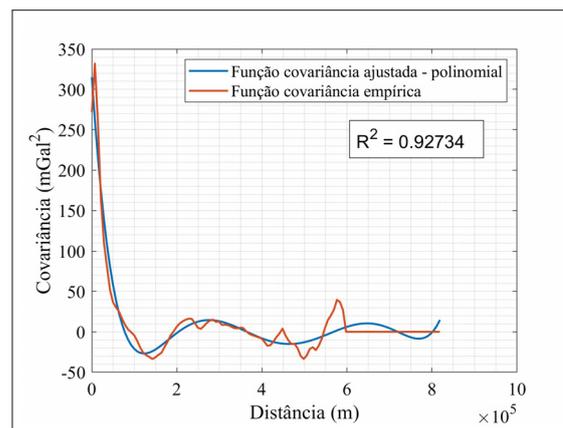
(e) Log3D



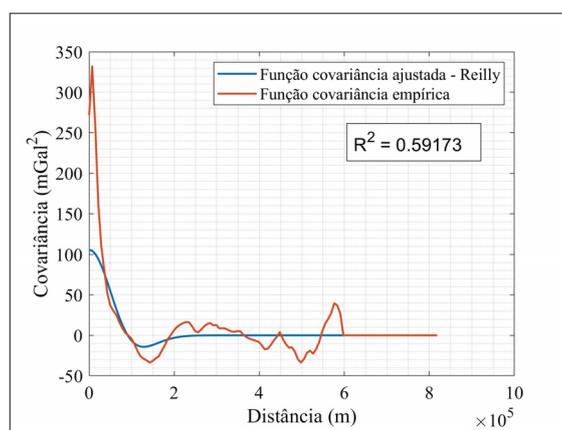
(f) Markov



(g) Polinomial de seno



(h) Polinomial



(i) Reilly

Fonte: O Autor.

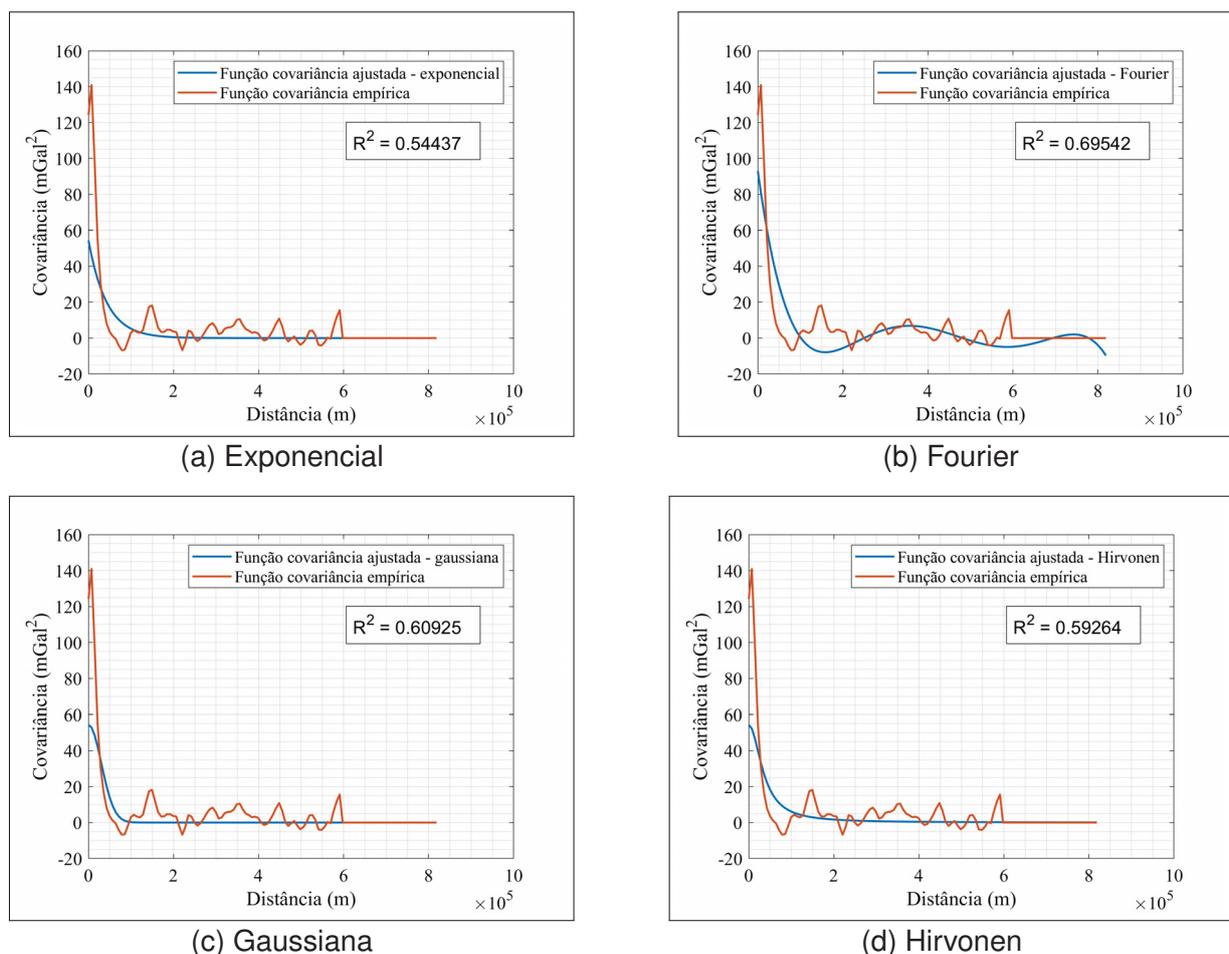
Referente ao conjunto 1 de dados, os resultados utilizando os dados com o modelo Earth2014 e sem ele foram quase idênticos, mostrando que a covariância dos dados não se alterou significativamente ao remover a parte do espectro advinda deste modelo. Para o conjunto 1 de dados houve uma pequena variação no índice  $R^2$  da função polinomial apenas, no qual o índice  $R^2$  no conjunto de dados que utilizou o Earth2014 foi de 0,93041, e o apresentado na figura 34 foi de 0,92734.

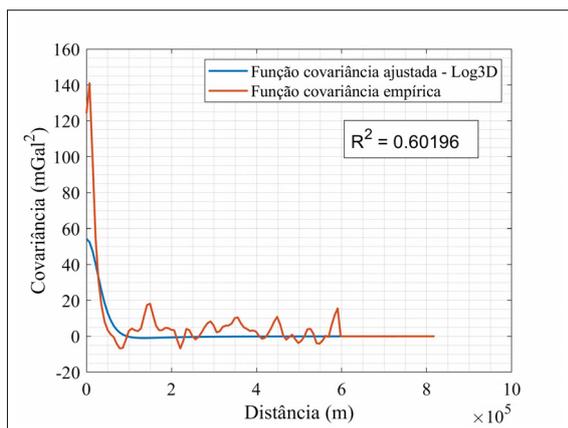
O uso das diferentes funções covariância obteve um coeficiente  $R^2$  que variou entre 0,35 e 0,93. Isto evidencia a importância de escolher a função covariância adequada, pois a geração da grade de  $\delta g_{res}$  pode ser muito boa, ou muito ruim de acordo com a escolha. Vale destacar que, por exemplo, o uso da krigagem, algoritmo comumente utilizado nesta etapa por outros autores, é dependente também do melhor ajuste da função semivariograma. Portanto, o uso direto deste interpolador sem investigação do semivariograma pode resultar em interpolações com baixa acurácia (PEREIRA et al., 2011).

A função que obteve o melhor coeficiente foi a função polinomial até grau 6, que atingiu um valor de 0,93, se ajustando muito bem à covariância empírica e sendo a função utilizada para geração da grade de  $\delta g_{res}$  do conjunto 1. A função que obteve o

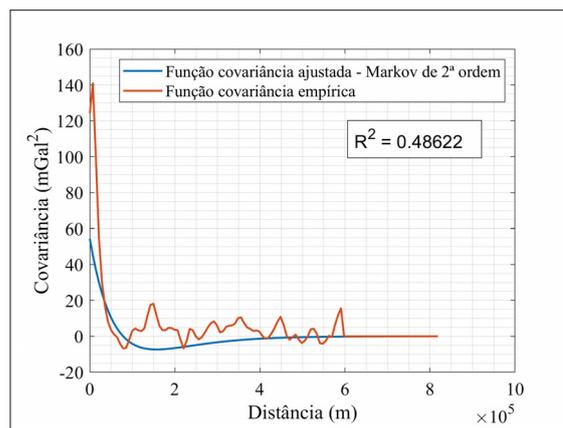
piores resultados foram a função polinomial de seno, com um coeficiente de 0,35, podendo ser considerado inadequado por estar mais próximo de zero. As funções exponencial, gaussiana, Hirvonen, Logarítmica 3D, Markov de 2ª ordem e de Reilly obtiveram coeficientes medianos, variando entre 0,5 e 0,6. E a função de Fourier se adaptou bem ao conjunto de dados, com um coeficiente de 0,83 considerado bom, porém, não foi melhor que a função polinomial. Na Figura 35, são apresentados os resultados das funções covariância para o conjunto 2 de dados.

Figura 35 – Funções de covariância ajustadas e empíricas para o conjunto 2 da estação PPTe.

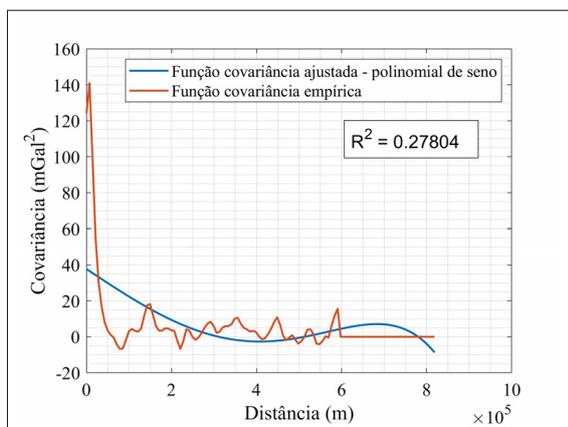




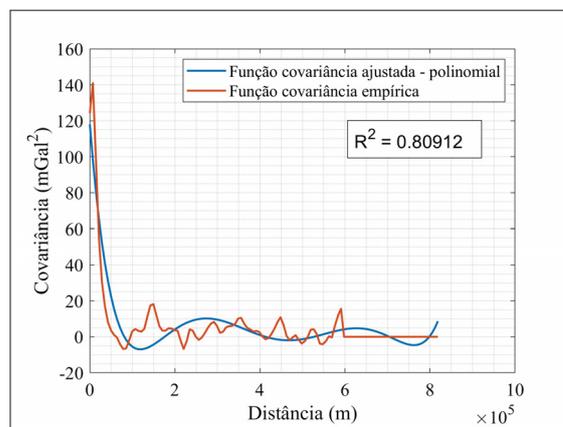
(e) Log3D



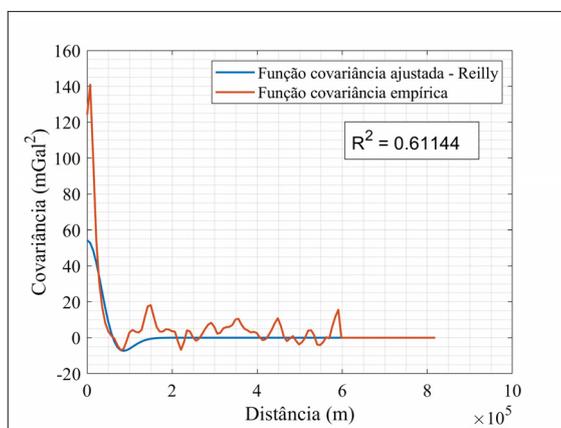
(f) Markov de 2º ordem



(g) Polinomial de seno



(h) Polinomial



(i) Reilly

Fonte: O Autor.

Para o conjunto 2, os resultados com e sem o uso do modelo Earth2014 também foram idênticos para quase todas as funções utilizadas, somente a função polinomial e a função de Reilly variaram. Na função polinomial o índice  $R^2$  variou de 0,80912 sem o uso do Earth2014 para 0,86902 com o uso. A função de Reilly variou de 0,59173 sem o uso do modelo para 0,61144 com o uso do modelo.

Em ambos os conjuntos de dados, aqueles que utilizaram o modelo Earth2014 na etapa de remoção apresentaram índices  $R^2$  melhores, provavelmente devido ao fato de

que houve uma maior parcela do espectro gravitacional removida nestes casos. Assim, a parcela residual foi mais suavizada e a função ajustada pode se adequar melhor.

Assim como na Figura 34, para o conjunto 2, a função que melhor se ajustou à covariância empírica foi a polinomial, com um coeficiente de 0,81 e 0,86, enquanto que a função polinomial de seno obteve o pior resultado, com um coeficiente de 0,28. Os resultados foram semelhantes aos abordados no conjunto 1, o que mudou foram apenas os valores dos coeficientes, e isto se dá pelo G/O de remoção do XGM2019e utilizado, no qual para o conjunto 1 o valor de 100 fez com que parte dos longos e parte dos médios comprimentos de onda (entre G/O 101 e 2189) não fossem removidas. O conjunto 2, que utilizou G/O de remoção de 200, teve uma maior parte do espectro modelada pelo XGM2019e.

Isto levanta a hipótese de que erros de comissão do MGG possam estar influenciando desde a geração da grade de distúrbios residuais, o que justifica tentar modelar uma maior parte do espectro com a solução do PVCG.

Já que ambos os conjuntos de dados tiveram um melhor ajuste utilizando a função polinomial, esta foi escolhida para geração da grade residual em ambos os conjuntos. A função polinomial é descrita pelo modelo matemático apresentado na eq. 101.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (101)$$

onde  $n$  é o grau do polinômio, que foi definido como 6 para a presente dissertação, tendo em vista que este grau foi o que obteve o melhor índice  $R^2$ .  $a_n$  são os coeficientes do polinômio e seus respectivos graus, apresentados na tabela 7, tendo em vista que o grau 6 foi o grau máximo no qual o valor de  $R^2$  se estabilizou ao nível de  $10^{-2}$ .

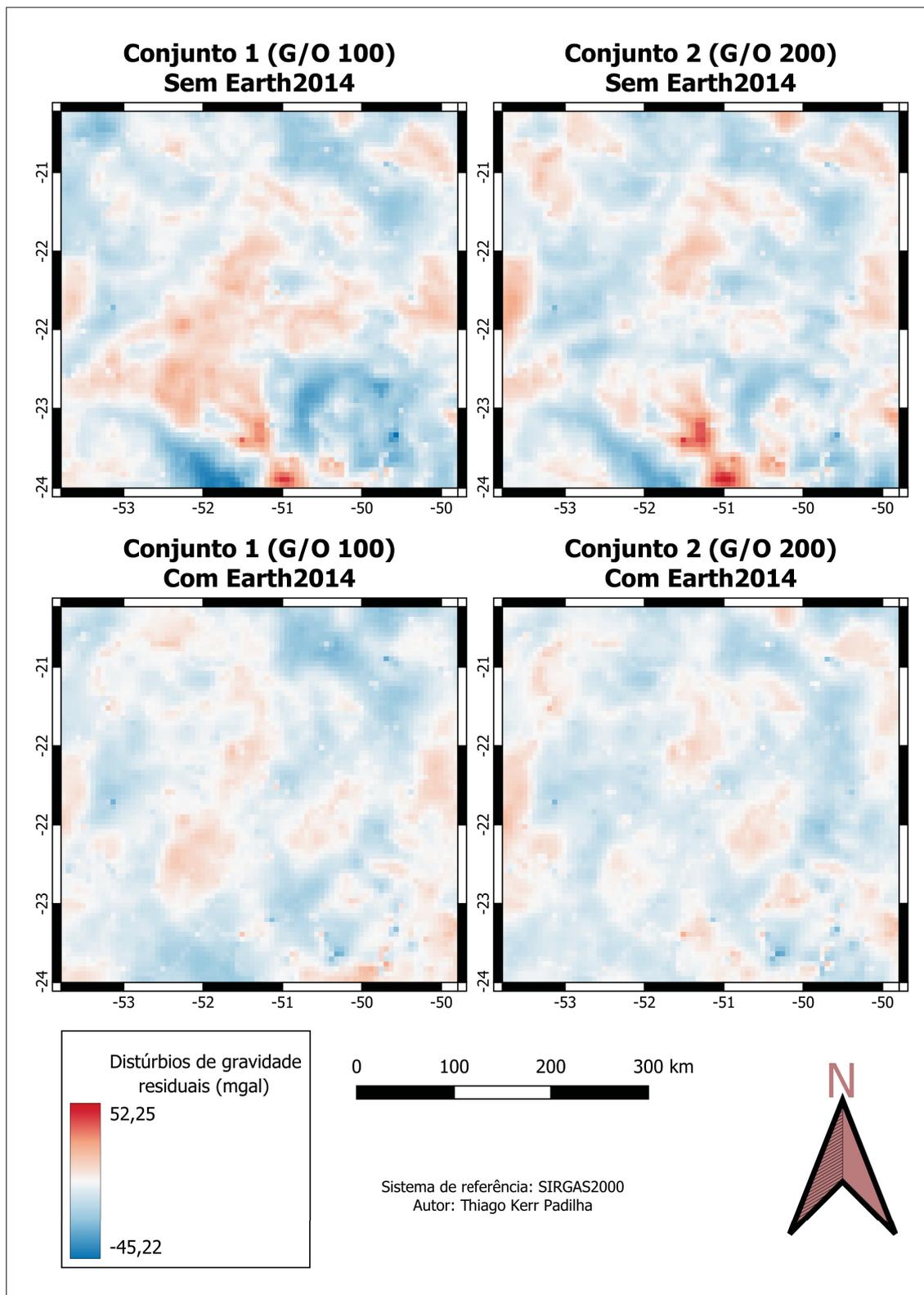
Cabe ressaltar que o uso de maiores graus pode resultar em problemas de super-parametrização e perda de significância dos parâmetros polinomiais. Isso pode levar a resultados inconsistentes. Para mais informações sobre a construção matemática da função polinomial para Colocação por Mínimos Quadrados, consultar em [Burden e Faires \(2011\)](#).

Tabela 7 – Coeficientes da função polinomial para os dois conjuntos de dados, com e sem o modelo Earth2014.

Coeficientes	Conjunto 1		Conjunto 2	
	com Earth2014	sem Earth2014	com Earth2014	sem Earth2014
$a_0$	323,7772	315,0255	133,0790	117,9660
$a_1$	-0,0085	-0,0079	-0,0041	-0,0030
$a_2$	$7,7537 \times 10^{-8}$	$6,5965 \times 10^{-8}$	$4,5269 \times 10^{-8}$	$2,5286 \times 10^{-8}$
$a_3$	$-3,3274 \times 10^{-13}$	$-2,5298 \times 10^{-13}$	$-2,3617 \times 10^{-13}$	$-9,8450 \times 10^{-14}$
$a_4$	$7,5689 \times 10^{-19}$	$4,8694 \times 10^{-19}$	$6,5813 \times 10^{-19}$	$1,9196 \times 10^{-19}$
$a_5$	$-9,3452 \times 10^{-25}$	$-4,5791 \times 10^{-25}$	$-1,0059 \times 10^{-24}$	$-1,8283 \times 10^{-25}$
$a_6$	$5,8854 \times 10^{-31}$	$1,6742 \times 10^{-31}$	$7,9494 \times 10^{-31}$	$6,7722 \times 10^{-32}$

Com isto, foi possível gerar as grades de distúrbios residuais de cada conjunto, apresentadas na Figura 36.

Figura 36 – Grade de distúrbios residuais utilizando os dois conjuntos de dados para a estação PPTE.



Fonte: O autor.

Visualmente é possível identificar que os conjuntos sem o Earth2014 apresentaram distúrbios residuais mais elevados em termos de valor absoluto, o que já era esperado, tendo em vista que menor parte do espectro foi removida. Em relação às estatísticas das grades residuais, a Tabela 8 apresenta os resultados.

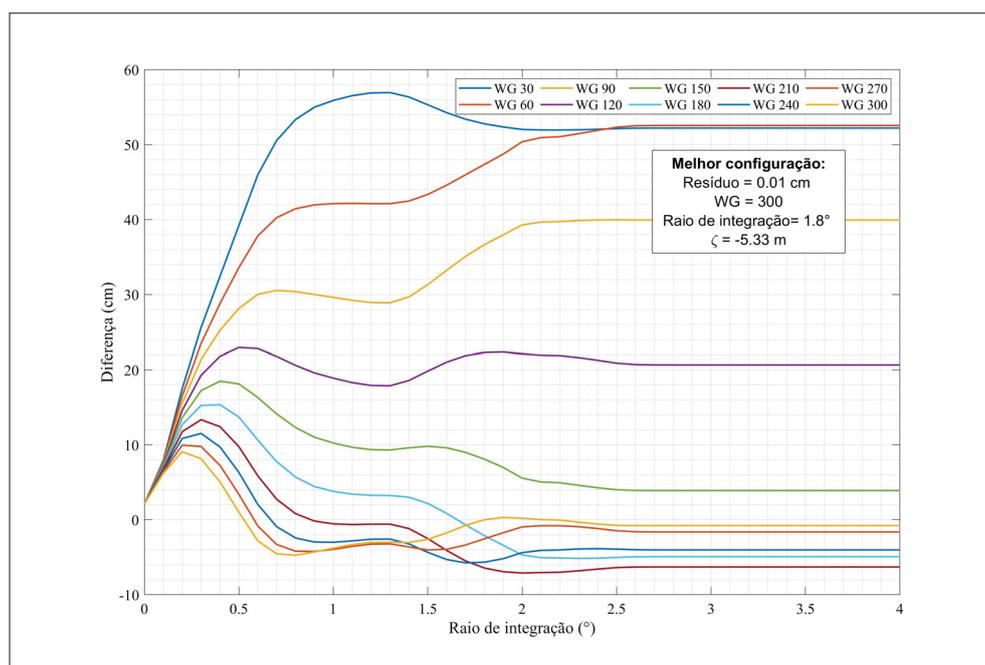
Tabela 8 – Estatísticas das grades de distúrbios residuais

Conjunto	Conjunto 1		Conjunto 2	
	com Earth2014	sem Earth2014	com Earth2014	sem Earth2014
<b>Média (mgal)</b>	-0,57	-0,95	-0,46	-0,29
<b>Desvio Padrão (mgal)</b>	7,36	11	6,18	9,67
<b>Amplitude (mgal)</b>	55,17	90,62	55,67	87,30

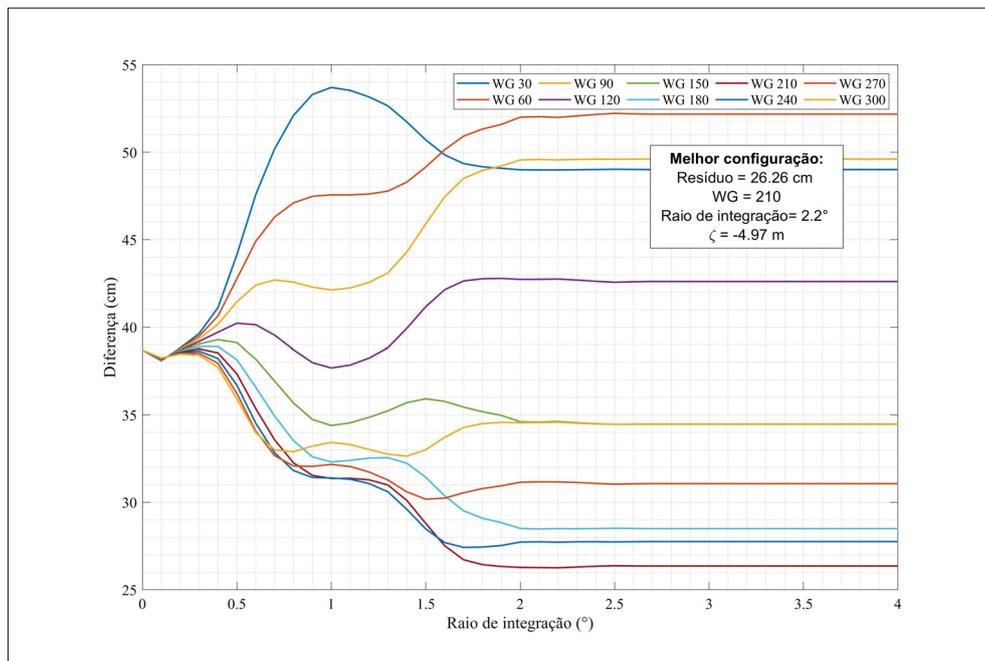
Os dados estatísticos mostram que as grades do conjunto 2 tiveram dados residuais mais próximos de zero e com menor dispersão. Isto pode ser devido ao maior grau de remoção utilizando MGGs para o conjunto 2. Com isto, o conjunto 1 de dados, terá maior parte do espectro gravitacional modelada pelo PVCG ou pelo Earth2014.

De qualquer forma, todas as grades residuais apresentaram valores satisfatórios para adentrar a etapa de cálculo das anomalias de altura residuais. Nesta etapa, inicialmente é apresentado os testes para  $\zeta_0$  que permitiu definir a melhor configuração entre o raio de integração, o grau de modificação WG e o G/O de remoção que mais se aproxima da anomalia de altura calculada na estação PPTE com base nos dados do IBGE. Os testes são apresentados na Figura 37.

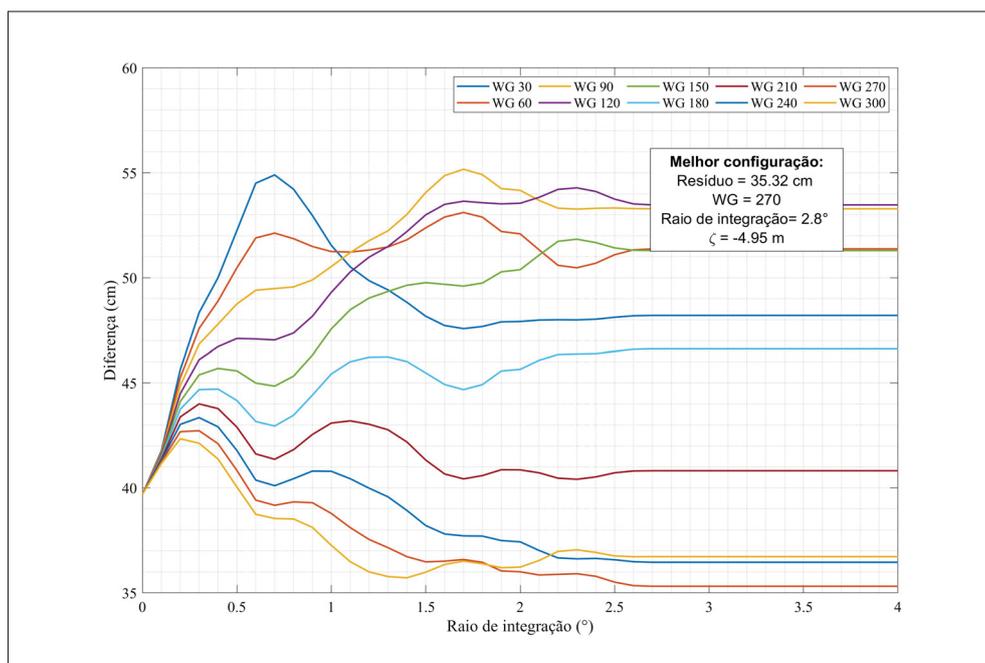
Figura 37 – Testes para definir melhor configuração para cálculo de anomalia de altura na estação PPTE.



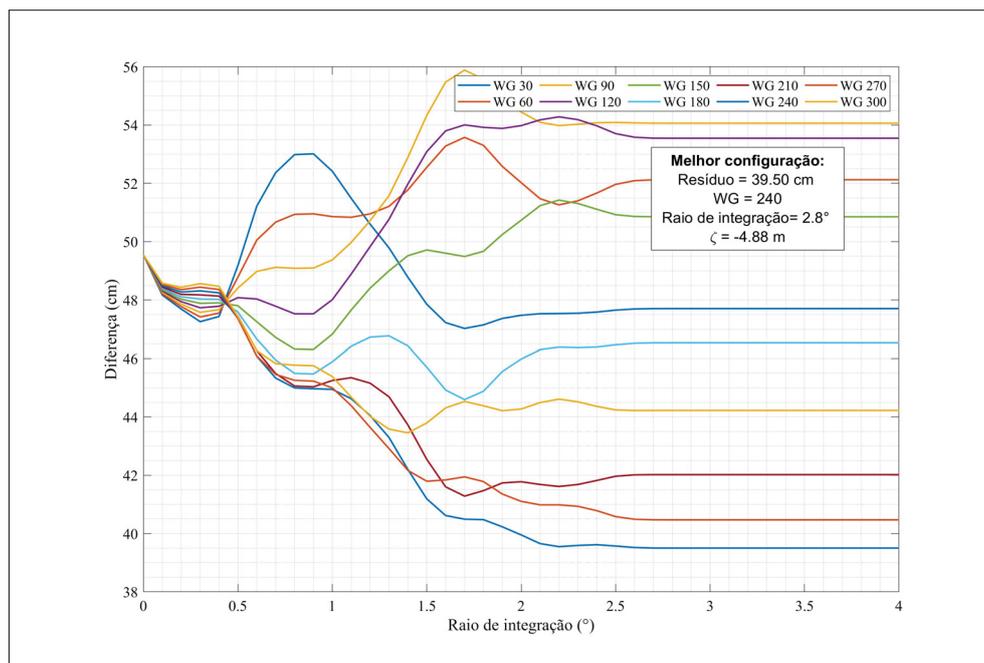
(a) Conjunto 1 sem Earth2014



(b) Conjunto 1 com Earth2014



(c) Conjunto 2 sem Earth2014



(d) Conjunto 2 com Earth2014

Fonte: O Autor.

Para os conjuntos que utilizaram o modelo Earth2014, a configuração que teve o valor de  $\zeta$  mais próximo ao do IBGE foi a que utilizou G/O do MGG de 100, raio de integração de 2.2° (aproximadamente 245 km) e grau de WG de 210. Com isto, a solução 3 para o conjunto com o modelo Earth2014 utilizou esta configuração. Para os conjuntos que não utilizaram o modelo Earth2014, a melhor configuração foi a que utilizou o G/O do MGG de 100, raio de integração de 1.8° e grau de WG de 300, sendo a configuração utilizada para a solução 3 destes conjuntos.

O menor resíduo obtido a partir dos testes foi para a solução 3 que não utilizou o modelo Earth2014, com um valor de 0,01 cm de diferença para o valor de  $\zeta$  obtido com os dados do IBGE, o que dá indícios de que dar maior faixa espectral à solução do PVCG é mais vantajoso para obter resultados favoráveis na modelagem de anomalias de altura, já que o valor foi quase o mesmo do dado pelo IBGE. Vale ressaltar que para os presentes testes, não foram realizadas conversões de marés seguindo o recomendado por [Sánchez et al. \(2021\)](#), esta etapa foi realizada somente após a escolha da configuração, ou seja, o valor de  $\zeta$  foi analisado no conceito de Maré-Zero.

Os valores de  $\zeta$  variaram consideravelmente ao não utilizar o modelo Earth2014, o que reforça a diferença que se tem no resultado final quando se dá maior faixa espectral à componente obtida com a solução do PVCG. Para obter conclusões mais concretas, é necessário analisar os resultados finais com as transformações de marés feitas corretamente em  $W$  e  $H_N$ . Os valores de  $\zeta$  no conceito de maré-zero de todas as soluções realizadas podem ser vistos na Tabela 9.

Tabela 9 – Valores de anomalia de altura na estação PPTE para cada solução proposta.

Soluções	$\zeta$ com Earth2014 (m)	$\zeta$ sem Earth2014 (m)	Contribuição XGM2019 (m)	Contribuição PVCG com Earth2014 (m)	Contribuição PVCG sem Earth2014 (m)	Contribuição Earth2014 + ERTM (m)	Contribuição ERTM (m)
1	-4,9971	-4,8426	-6,0875	0,0844	0,3301	0,3992	-0,0009
2	-4,8866	-4,8669	-5,6955	-0,0517	0,0485	0,1189	-0,0009
3	-5,3893	-5,3182	-6,0875	-0,1322	0,0090	0,3992	-0,0009

Nesta tabela, os valores finais de  $\zeta$  (coluna 2 e 3) foram obtidos a partir da soma do XGM2019, da solução do PVCG e da contribuição do Earth2014 (caso utilizado) e do ERTM, também foi aplicado o termo 0 do IHRF como 0,76 m. Todos esses resultados encontram-se em planilhas Excel e podem ser acessados em: <https://github.com/ThiagoKerr/MasterThesis.git>.

Os valores de  $\zeta$  nas soluções que tiveram contribuição do modelo Earth2014 foram maiores, em termos de valor absoluto, em relação aos que não utilizaram, com diferenças de aproximadamente 15 cm para a solução 1, 2 cm para a solução 2 e 7 cm para a solução 3. A menor diferença se dá, provavelmente pelo fato de que a solução 2 foi a única que utilizou o XGM2019 e até G/O de 200, o que deu menos faixa espectral ao modelo Earth2014 e mais faixa espectral ao MGG. Isto levanta a hipótese de que o modelo Earth2014 acaba contribuindo significativamente para o resultado final. Para definir se a contribuição é positiva ou negativa para este caso, é necessário analisar demais resultados em comparação com outras soluções de demais trabalhos.

A contribuição do modelo ERTM para modelagem dos curtos comprimentos de onda é mínima, não chegando a 1 mm de contribuição, ou seja, a maior contribuição que o ERTM teve nestas soluções não alcançou 1% da contribuição total da sua combinação com o Earth2014. Com isto, as soluções que não utilizaram o modelo Earth2014, tiveram uma parcela maior de contribuição advinda da solução do PVCG, modelando uma porcentagem significativamente maior do espectro.

A próxima etapa foi realizar o cálculo do potencial anômalo  $T$  no conceito Maré-Zero, a Tabela 10 apresenta os resultados levando em conta os termos de grau zero referentes ao GM e referentes ao  $W_0$  do IHRF.

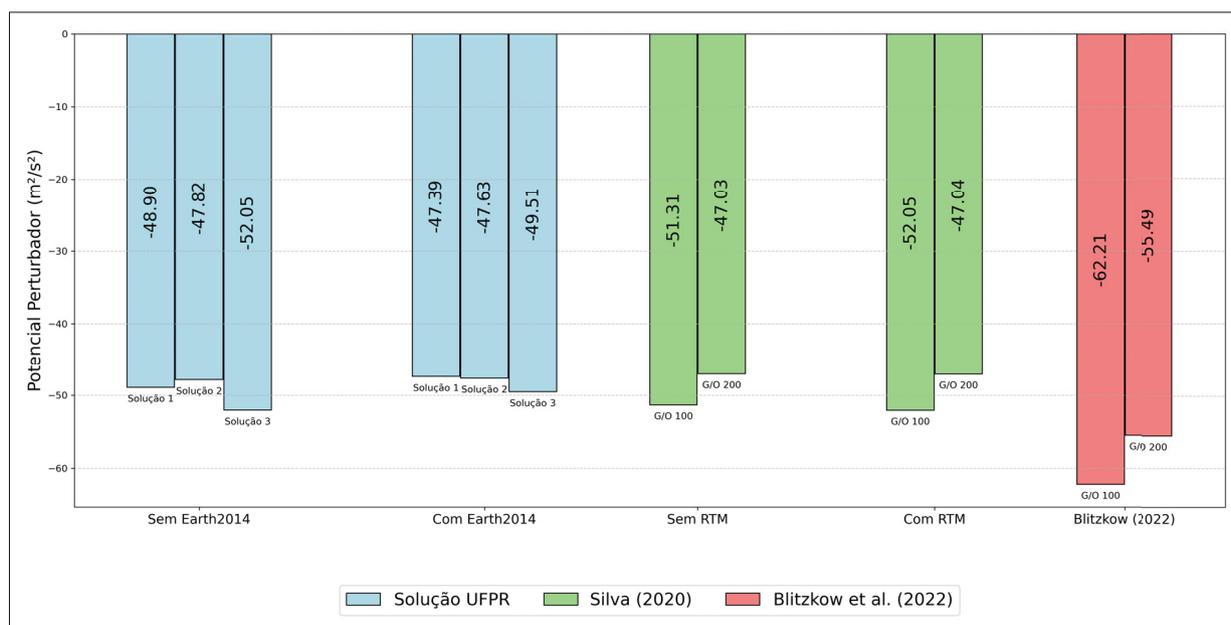
Tabela 10 – Valores de potencial anômalo final para cada solução proposta.

Soluções	$T$ com Earth2014 ( $m^2/s^2$ )	$T$ sem Earth2014 ( $m^2/s^2$ )
1	-47,3910	-48,9034
2	-47,6294	-47,8222
3	-49,5108	-52,0460

Estudos feitos por Silva (2020) também calcularam  $T$  para a estação PPTE, utilizando o PVCG Fixado, porém usando Transformada Rápida de Fourier para cálculo das

integrals de Hotine. Foi utilizado o satélite GOCO05S para remoção dos longos e parte dos médios comprimentos de onda até G/O de 100 e 200, com e sem a técnica RTM implementada, raio de integração seguiu a regra de Rapp, sendo de 100 km e 200 km aproximadamente. Estudos realizados por [Blitzkow et al. \(2022\)](#) também apresentaram os valores de  $T$  no Simpósio Sirgas 2022 para a estação PPTE, utilizando o PVCG Fixado e o MGG GOCO06s com G/O de 100 e 200. Os resultados de  $T$  destes estudos em comparação com o realizado nesta pesquisa podem ser analisados na Figura 38.

Figura 38 – Comparação entre  $T$  obtido pela presente pesquisa e por demais estudos.



Fonte: O autor.

As soluções variaram em um intervalo de  $-47,03 \text{ m}^2/\text{s}^2$  até  $-62,21 \text{ m}^2/\text{s}^2$ , com uma amplitude de  $15,19 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Vale destacar que os valores indicados na Figura 38 foram obtidos com diferentes valores de termo de ordem zero  $T_0$ , e em diferentes conceitos de maré, sendo estes os motivos das principais divergências. Posteriormente nos resultados, estes termos serão padronizados para uma comparação mais justa em termos de altitude normal.

Com o potencial anômalo, obteve-se os valores do Geopotencial  $W$  e do número Geopotencial  $C_P$  já no conceito de maré-média seguindo o roteiro matemático indicado em [Sánchez et al. \(2021\)](#) no item 7.1. Os resultados podem ser vistos na Tabela 11.

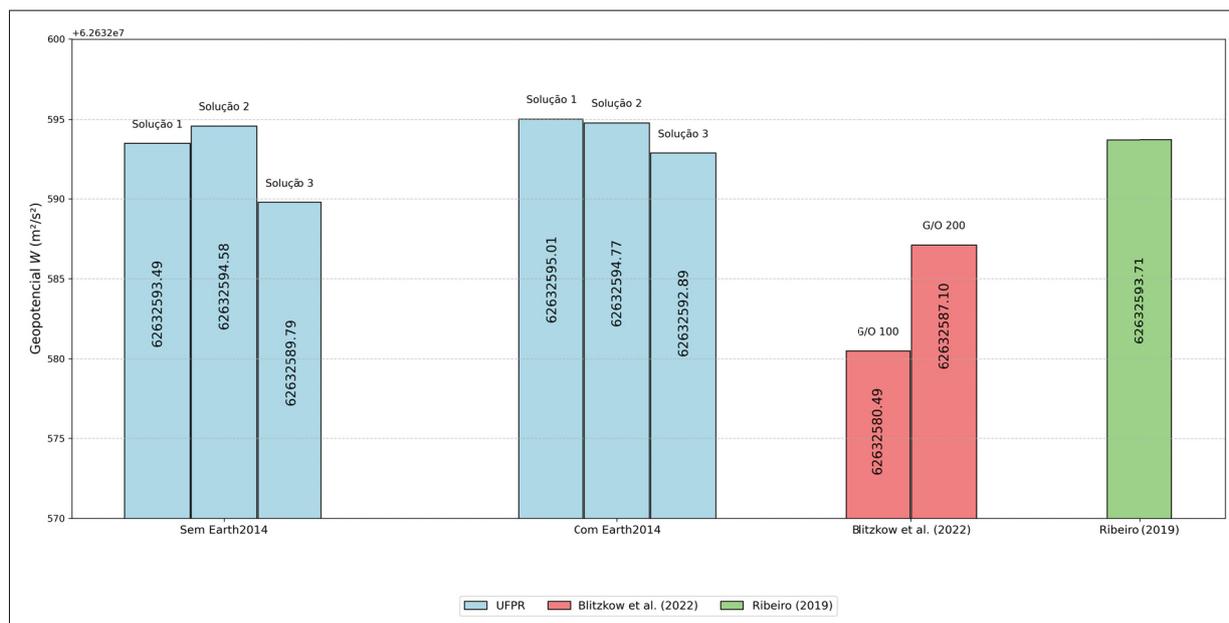
Tabela 11 – Valores de Geopotencial e número geopotencial para todas as soluções realizadas.

Soluções	$W$ com Earth2014 (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$W$ sem Earth2014 (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$C_P$ com Earth2014 (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$C_P$ sem Earth2014 (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
<b>1</b>	62632595,01	62632593,49	4258,39	4259,91
<b>2</b>	62632594,77	62632594,58	4258,63	4258,82
<b>3</b>	62632592,89	62632589,79	4260,51	4263,05

Referente aos valores encontrados, as soluções que utilizaram o modelo Earth2014 foram numericamente mais altas para o cálculo de  $W$  e, conseqüentemente, mais baixas para o valor de  $C_P$ , o que pode indicar que o modelo pode estar agregando erros de comissão nos dados. Para isto, é necessário validar com outros resultados. A figura 39 permite a comparação das soluções obtidas com as de Ribeiro (2019) e valores atualizados da dissertação de Silva (2020) apresentados no Simpósio SIRGAS 2022 (BLITZKOW et al., 2022) utilizando o MGG GOCO06s com G/O 100 e 200 e a técnica RTM e a solução do PVCG via integral de Hotine.

A solução de Ribeiro (2019) utilizou os MGGs EIGEN-6C4, GOCO05s e XGM2016 para o cálculo, além de realizar a solução do PVCG via Colocação por mínimos quadrados, Integral de Stokes via FFT, e via integral de Hotine. Neste estudo, o G/O dos MGGs foi 200 e o raio de integração foi 210 km, o que, assim como na solução 3 deste trabalho, não segue com rigor a regra de Rapp. Como Ribeiro (2019) teve muitas soluções, nesta pesquisa foi utilizado a solução que utilizou o MGG XGM2016 e a integral de Hotine, já que são as soluções que mais se assemelham à solução aqui proposta. Vale ressaltar que, conforme mencionado anteriormente, cada solução teve diferentes valores de  $T_0$  atribuídos e conceitos de marés diferentes, o que agravou as divergências entre as soluções.

Figura 39 – Comparação entre  $W$  obtido pela presente pesquisa e por demais estudos.



Fonte: O autor.

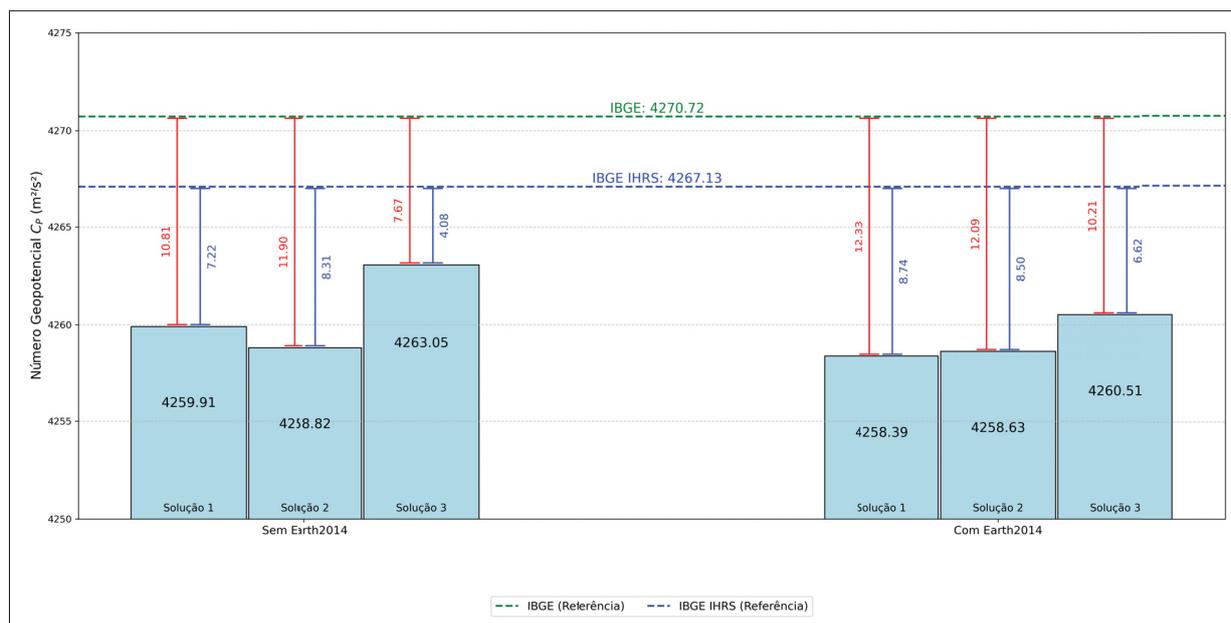
Desta vez, a amplitude entre as soluções foi de  $14,52 m^2/s^2$ , isto pode ser devido às soluções de [Blitzkow et al. \(2022\)](#) terem sido discrepantes em relação à da presente pesquisa e à de [Ribeiro \(2019\)](#).

A solução 1 sem o modelo Earth2014 foi muito próxima da solução encontrada por [Ribeiro \(2019\)](#), com uma diferença de  $0,22 m^2/s^2$ . Apesar do uso de G/O advindo dos MGGs terem sido diferentes, é possível que o uso de um MGG semelhante (como no caso do XGM2016 e o XGM2019) possa ter contribuído para esta semelhança. Além disso ambos utilizaram a integral de Hotine para solução do PVCG. Isto indica uma consistência no resultado final quando se utiliza dados de entrada semelhantes.

Os valores encontrados por [Blitzkow et al. \(2022\)](#) foram significativamente discrepantes em relação às demais soluções. isto pode estar vinculado ao uso de gravidade sintética proveniente de MGG onde há vazios gravimétricos, o que não foi considerado para a presente pesquisa, mas será investigado futuramente, ou também devido ao uso de dados gravimétricos mais recentes.

Em relação aos números geopotenciais  $C_P$  a Figura 40 apresenta os resultados obtidos em comparação com o valor encontrado no descritivo da estação PPTTE, do IBGE, que servirá como validação para os resultados finais. Devido ao fato de que o valor do IBGE está relacionado ao DVBI (Datum Vertical Brasileiro de Imbituba), a Figura 40 também apresenta o valor do IBGE vinculado ao IHRS, utilizando o parâmetro de translação de  $3,79 m^2/s^2$  obtido por [Sánchez e Sideris \(2017\)](#).

Figura 40 – Comparação entre  $C_P$  obtido pela presente pesquisa e o valor dado pelo IBGE.



Fonte: O autor.

As soluções sem uso do modelo Earth2014 tiveram diferenças com o valor dado pelo IBGE menores em relação às soluções que utilizaram este modelo. Isto reforça que permitir uma maior faixa espectral à componente de  $\zeta$  obtida com a solução do PVCG pode ser vantajoso e agrega menos erros de comissão de modelos utilizados.

Entre todas as soluções a que teve a maior discrepância foi a solução 1 (G/O 100, WG 100 e raio de integração de 200 km) com uso do Earth2014, com uma diferença de 12,33 m²/s² para o valor oficial do IBGE e 8,74m²/s² para o valor vinculado ao IHRS. Em contrapartida a que apresentou a menor discrepância foi a solução 3 (G/O 100, WG 210, raio de integração de 220 km) sem o uso do modelo, com uma diferença de apenas 7,67 m²/s² para o valor oficial e 4,08 m²/s² para o valor vinculado ao IHRS.

Em ambos conjuntos de soluções (com e sem Earth2014), a solução que teve a menor discrepância foi a solução 3, que foi definida através de testes que já buscavam a configuração que mais se adequava ao valor de  $\zeta$  do IBGE. Isto mostra que, ao utilizar a configuração correta, apesar de não seguir a regra de Rapp, pode-se chegar em resultados mais acurados em comparação a soluções que seguem esta regra, e até melhores, como foi apresentado nesta pesquisa e no âmbito do EC, como praticado por algumas soluções (ver Wang et al. (2021)).

Os últimos resultados obtidos foram referentes às altitudes normais  $H_N$ , a Tabela 12 apresenta os resultados.

Tabela 12 – Valores de altitude normal para todas as soluções realizadas.

<b>Soluções</b>	<b><math>H_N</math> com Earth2014 (m)</b>	<b><math>H_N</math> sem Earth2014 (m)</b>
<b>1</b>	435,108	435,263
<b>2</b>	435,132	435,152
<b>3</b>	435,325	435,584

Conforme pode ser visto, os resultados obtidos variam ao nível decimétrico com as diferentes configurações no âmbito da técnica RCR. Isso destaca a importância de se realizar experimentos analisando diferentes configurações e suas validações. Inclusive com de outros autores.

Como foi abordado nos resultados anteriores, um fator que deve ser investigado e que agrava as divergências entre as soluções obtidas por diferentes autores é o conceito de maré e o termo  $T_0$  utilizado por cada um dos estudos. Referente ao termo  $T_0$ , algumas soluções utilizaram somente o termo oriundo dos MGGs, com o valor de -0,93 m em termos de anomalias de altura para grande parte dos estudos e -0,41 m para o caso do trabalho de [Ribeiro \(2019\)](#).

Outras soluções utilizaram o termo de grau 0 do IHRS com o valor de 0,76 m, assim, em combinação com o termo de -0,93 m, resultaria em um  $T_0$  no valor de -0,17 m, como foi o caso desta dissertação. Além disto, os conceitos de marés que cada pesquisa utilizou também não são concordantes, no qual têm-se os conceitos Livre de Maré, Maré Zero e Maré Média (utilizado nesta dissertação) sendo comparados. A Tabela 13 apresenta as configurações utilizadas nos seis últimos trabalhos que se propuseram a calcular valores de número geopotencial para estação PPTTE no âmbito do IHRS.

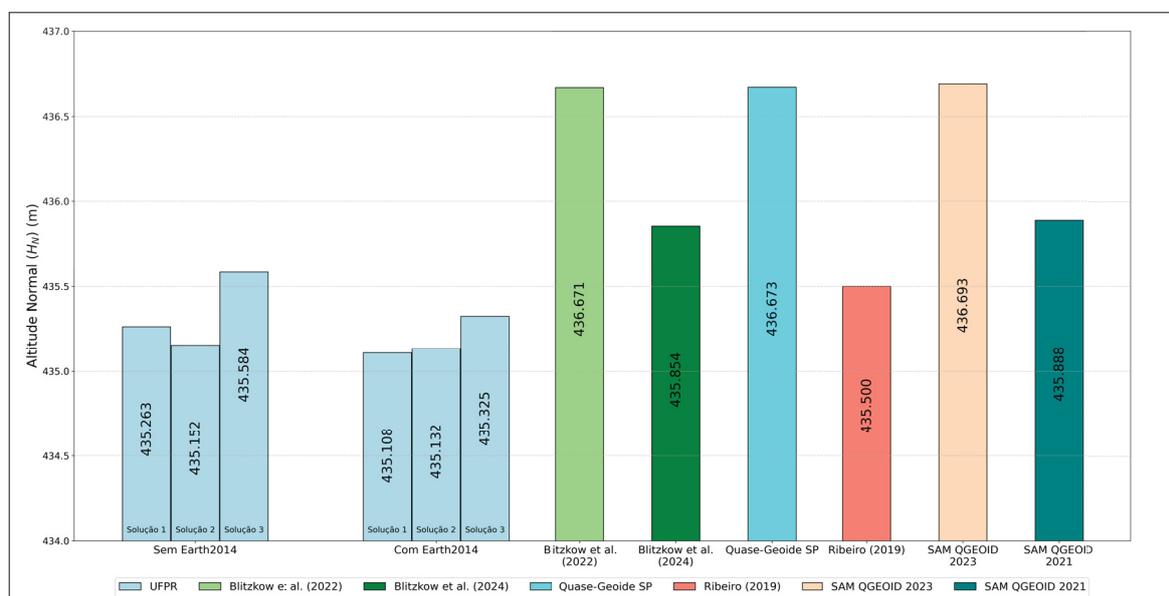
Tabela 13 – Configurações de  $T_0$  e dos conceitos de maré dos autores a serem comparados

<b>Autor</b>	<b><math>T_0</math></b>	<b>Conceito de maré</b>
UFPR	-0,17	Maré Média
SAM QGEOID2023	-0,93	Maré Zero
SAM QGEOID2021	-0,17	Maré Zero
Modelo quase-geoidal de São Paulo	-0,93	Maré Zero
Blitzkow et al. 2022	-0,93	Maré Zero
Blitzkow et al. 2024	-0,17	Maré Zero
Ribeiro 2019	-0,41	Maré Livre

A Figura 41 ilustra a comparação entre os resultados desta pesquisa, com os resultados destes autores sem nenhum tipo de adaptação nos valores. Assim, cada solução está com seu devido valor de  $T_0$  e seu conceito de maré conforme Tabela 13. Os valores de  $H_N$  para SAMQGEOID2023, SAMQGEOID2021 e o modelo quase-

geoidal de São Paulo foram obtidos através da interpolação do valor de  $\zeta$  dos modelos para a estação PPTE, utilizando o interpolador bilinear. Assim obteve-se  $H_N$  diminuindo o valor de  $\zeta$  da altitude elipsoidal da estação PPTE no conceito de maré-zero. Os demais valores foram retirados da referência bibliográfica.

Figura 41 – Comparação entre valores de  $H_N$ .



Fonte: O autor.

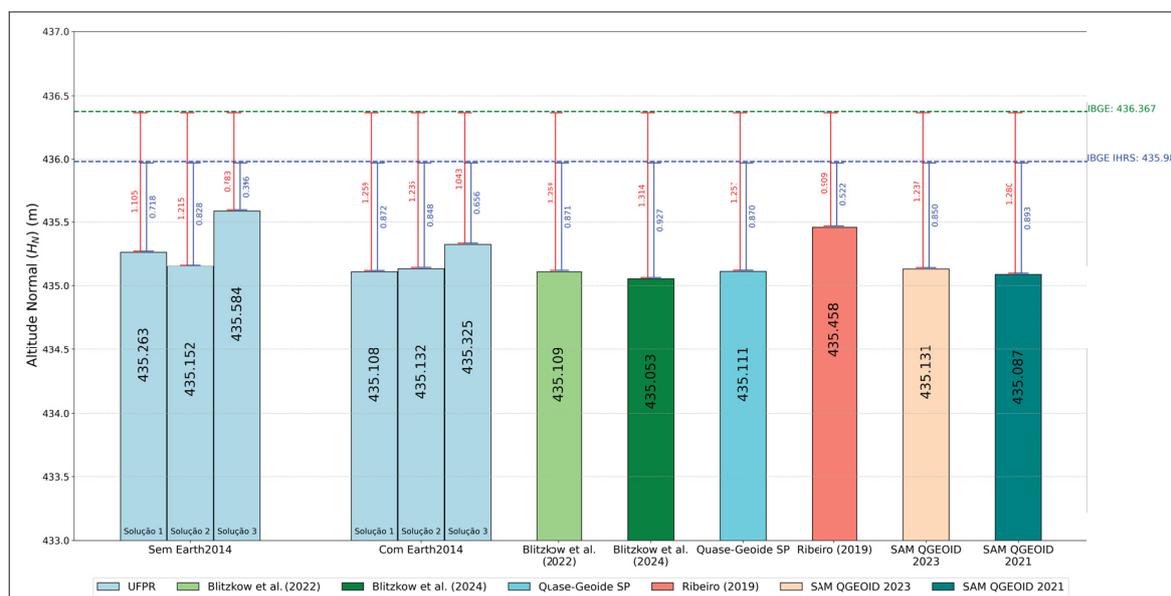
O desvio padrão dos valores foi de 54 cm, o que mostra resultados com uma precisão decimétrica. Os resultados foram concordantes em um intervalo que variou de 435,108 m até 436,693m, representando uma diferença máxima de 1,585 m, o que é um valor muito elevado para a precisão que se busca em  $H_N$ , isto reforça a importância de se atentar aos conceitos de maré e ao termo  $T_0$ , pois grande parte desta diferença se dá pelo fato de que estão sendo comparadas grandezas em diferentes sistemas e conceitos.

Cabe ressaltar que quando aplicado somente o termo  $T_0$  referente à diferença dos termos GM, o potencial de origem é o GRS80 ( $U_0$ ). Quando é aplicado os dois termos de  $T_0$ , tem-se como potencial de origem o  $W_0$  do IHRS.

Para uma comparação mais justa, todos os resultados acima foram transformados para o conceito de maré média conforme feito para a solução proposta nesta dissertação seguindo a metodologia de [Sánchez et al. \(2021\)](#). Os termos  $T_0$  também foram padronizados para que seguissem a metodologia do IHRS, com o valor de -0,17 m. Os valores de  $U_P$ ,  $\gamma$  e  $\gamma_0$  foram também padronizados como 62632642,18 m<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>, 978765,1919 mgal e 978630,4953 mgal respectivamente. Com isto é possível comparar todos os resultados sem que haja problemas relacionados a estas configurações. A Figura 42 apresenta estes resultados e também compara eles com o valor dado pelo

IBGE. Foi também feita a comparação do valor do IBGE vinculado ao IHRS, obtido a partir do uso do valor de offset obtido por (SÁNCHEZ; SIDERIS, 2017).

Figura 42 – Comparação entre valores de  $H_N$  padronizados ao IHRS.



Fonte: O autor.

Com todos os resultados no mesmo conceito de maré e o mesmo termo  $T_0$  adicionado, o desvio padrão destes resultados foi de 27 cm, a metade do valor encontrado anteriormente, e o intervalo máximo destes valores foi de 0,53 m entre a solução 3 sem o uso do modelo Earth2014 e a solução de Blitzkow et al. (2024).

Na presente pesquisa, a solução que mais se aproximou do valor do IBGE foi a solução 3 sem o modelo Earth2014, com uma diferença de 78 cm do valor oficial do IBGE e 40 cm para o valor adaptado ao IHRS. Isto continua reforçando a ideia de que dar maior faixa espectral ao PVCG pode ser vantajoso na modelagem final do Geopotencial e das funcionais derivadas deste. Inclusive, todas as soluções que não utilizaram o modelo Earth2014 se aproximaram mais do valor dado pelo IBGE. A realização de testes para definir a melhor configuração também permite obter resultados melhores, já que a solução 3 é a solução que ignora a regra de Rapp e utiliza a configuração que mais se aproximou do valor de  $\zeta$  do IBGE.

Alguns resultados foram muito próximos, como por exemplo, a solução 1 com o uso do Earth2014 e a solução dada por Blitzkow et al. (2022) com uma diferença de 1 mm nos valores. Isto provavelmente se dá pela semelhança nas configurações utilizadas, enquanto a solução 1 utilizou o XGM2019 até G/O 100 Blitzkow et al. (2022) utilizou o GOCO06s, onde é idêntico ao XGM2019 para o G/O 100, além disto, em ambos os casos foi utilizada a integral de Hotine para solução do PVCG. Além disto, a solução 1 com uso do Earth2014 também foi muito próxima do modelo quase-geoidal de São Paulo, com uma diferença de aproximadamente 3 mm no valor de  $H_N$ .

A solução 2 com o uso do modelo Earth2014 também foi próxima do valor obtido pelo SAMQGEOID2023, com uma diferença de aproximadamente 1 mm. O que pode estar ligado ao uso do XGM2019 como MGG utilizado nestas duas soluções.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este trabalho buscou analisar o uso da solução de Brovar no PVCG Fixado com solução numérica das integrais de Hotine, testando diferentes configurações relacionadas aos graus de truncamento da modificação de Wong-Gore, diferentes raios de integração e diferentes faixas espectrais para a solução do PVCG. Inicialmente foram realizados testes na região onde foi feito o Experimento Colorado para que depois a solução pudesse ser aplicada no Brasil, mais especificamente, na estação IHRF PPTE.

Referente aos resultados obtidos no Experimento Colorado, foi possível concluir que os resultados obtidos com o uso da solução de Brovar com solução numérica das integrais encontrou-se alinhado com os resultados dos demais pesquisadores do experimento. O que indica que a presente solução pode ser testada em outras regiões, como feito nesta dissertação, para a estação IHRF PPTE.

Os diferentes testes e soluções utilizadas permitiram concluir que o grau de modificação WG tem uma grande influência no resultado final, com diferenças de quase 10 cm para mudanças de 100 graus de modificação. Com isto, a escolha do grau de modificação deve ser cuidadosamente embasada para obter uma solução adequada. A utilização dos testes que alteraram o grau de modificação e o raio de integração foram uma boa forma de definir o melhor grau de modificação WG para a região do EC. Assim, sendo também implementada para o cálculo do Geopotencial na estação PPTE. Inclusive, para o EC, a solução advinda dos testes, definiu o grau de modificação WG que obteve o resultado final mais concordante com a rede GSVS17.

A concordância do grau de modificação WG e o G/O do MGG na remoção é uma prática adotada por diversos pesquisadores, além disto, o raio de integração deve ser definido a partir da eq. 30. Por exemplo, para casos em que o G/O do MGG foi de 200, o raio de integração deverá ser de 100 km e para casos em que o G/O foi de 100, o raio de integração deverá ser de 200 km. A partir dos resultados obtidos, foi possível concluir que, as soluções que não seguiram esta regra, apresentaram valores mais próximos e concordantes com os valores de validação, como os valores do IBGE, por exemplo. Inclusive, algumas instituições participantes do EC não seguiram a regra de Rapp, definindo seu grau de truncamento a partir de testes como feito neste trabalho.

O termo  $\mu_1$  da série de Brovar obteve um valor considerado insignificante para a presente pesquisa para a estação PPTE, o que não compensou o esforço computacional para calcular o termo  $\zeta_1$  da série. Isto ocorreu, provavelmente, pela topografia do terreno ser pouco acidentada, em comparação com a região do EC, e alterações

no campo de gravidade estão fortemente relacionadas à topografia do terreno. Além disto, o uso da técnica RTM na etapa de remoção permite remover boa parte do espectro gravitacional, tornando os campos residuais mais suaves, o que contribui para a insignificância de termos além do termo  $\mu_1$ . Com isto, para regiões planas, somente o termo  $\zeta_0$  já é suficiente para obter um resultado satisfatório, caso esteja-se utilizando a técnica RTM.

Referente às funcionais do Geopotencial obtidas, a amplitude dos resultados foi de 15,19 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> para  $T$  em comparação com os resultados obtidos por [Blitzkow et al. \(2022\)](#) e [Silva \(2020\)](#). Para  $W$  a solução foi comparada com [Ribeiro \(2019\)](#) e com resultados atualizados de [Blitzkow et al. \(2022\)](#), e foram de 14,52 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>. Estes valores poderiam ser menores caso as soluções comparadas utilizassem o mesmo conceito de maré e o mesmo termo  $T_0$ .

Ao comparar com os valores do IBGE, a solução 1, 2 e 3 sem o uso do modelo Earth2014 foi mais próxima do valor do IBGE do que as soluções que utilizaram o modelo. Assim conclui-se que a utilização do modelo Earth2014 para contribuir na modelagem dos curtos comprimentos de onda apresentou resultados não favoráveis quando comparados aos valores do IBGE e dos demais estudos abordados. Isto pode ser devido à faixa do espectro modelada por este modelo, que variou entre G/O 101 até 2190 e 201 até 2190 dependendo do conjunto de dados. Ou seja, nestes casos ele também foi utilizado para modelar parte do espectro relacionada aos médios e até parte dos longos comprimentos de onda, o que pode ter agregado erros de comissão deste modelo na solução final. Isto também pode estar relacionado ao fato de que permitir uma componente espectral maior para a solução PVCG permite obter uma solução mais dependente da solução do PVCG e dos dados gravimétricos terrestres, e menos dependente de modelos (ver [Figura 23](#)), além de que evita agregar erros de comissão de outros modelos nas soluções finais.

Os estudos apresentados mostraram a importância de comparar resultados nos mesmos termos e conceitos, como foi apresentado nas [Figuras 41 e 42](#). Na [Figura 41](#), grande parte da discrepância envolvida nos resultados se deu justamente devido ao fato de que foram utilizados diferentes termos  $T_0$  e conceitos de marés. Após a adaptação de todos os resultados para o conceito de maré média e utilização de um  $T_0$  como -0,17 m, a diferença nos resultados diminuiu. Isto também evidencia a importância de deixar claro as configurações utilizadas na modelagem para que estudos posteriores possam ser feitos de maneira adequada.

A solução mais consistente, e que mais se aproximou do valor do IBGE foi a solução 3 sem o uso do modelo Earth2014. A solução 3 é a solução que propôs um resultado que mais se aproximou do valor de  $\zeta$  para PPTTE, ela utilizou um raio de integração de 1,8°, G/O de remoção do MGG de 100 e grau de modificação WG de 300. Com isto, assim como os resultados obtidos no EC, o uso dos testes para definir o melhor

grau de truncamento de WG e o raio de integração foram fundamentais para obter resultados mais acurados. Isto fica mais evidente devido ao fato de que a solução 3 sem o Earth2014 obteve melhores resultados do que a solução 3 com o modelo Earth2014, já que foi dada a ela uma maior contribuição espectral da solução do PVCG e uma maior parcela na modelagem do resultado final.

O uso da solução numérica das integrais permitiu que a solução do PVCG fosse feita de forma vetorizada, o que agregou em um esforço computacional muito menor em comparação com o uso de *Loops* no processamento. Apesar de não terem sido feitos testes que comprovassem a redução deste esforço neste trabalho, a pesquisa feita por [Abdalla e Ferreira \(2022\)](#) apresenta este método, que foi utilizado nesta pesquisa.

Em relação ao cálculo de  $H_N$  para a estação, a diferença da solução 3 para com o valor do IBGE foi de 39,6 cm, estando próximo ao nível centimétrico de soluções elaboradas por outros autores como [Blitzkow et al. \(2022\)](#) e o SAM QGEOID 2023. Isto evidencia que o uso da solução de Brovar com solução numérica das integrais é uma alternativa para cálculo de funcionais do Geopotencial, além de que a presente pesquisa permitiu obter uma nova solução para a estação PPTe, propondo otimizações no que se tem como estado da arte nesta área.

Vale destacar que o valor de 0,39 m obtido por [Sánchez e Sideris \(2017\)](#) para vincular o  $H_N$  obtido pelo IBGE ao IHRF utilizou toda parte da RAAP (Rede Altimétrica de Alta Precisão) referenciada ao DVBI. Isto inclui trechos com diferentes níveis de distorções e precisões. Por isso é explicada a diferença em geral dos valores de  $H_N$  das diversas soluções para com o valor dado pelo IBGE referenciado ao IHRS. Mas, este valor serve como uma referência aproximada para comparação, melhor que o valor original do IBGE referenciado ao DVBI.

O tratamento matemático final para obtenção dos valores de geopotencial e altitudes normais não seguiu exatamente as diretrizes dadas por [Guimarães et al. \(2024\)](#), já que o desenvolvimento deste trabalho se deu antes da publicação do mesmo. Para trabalhos futuros, é interessante seguir estas diretrizes para obter estes valores de forma mais padronizada. A formulação matemática desta pesquisa pode ser encontrada neste documento ou ser analisada mais detalhadamente através das planilhas de cálculo encontradas em: <https://github.com/ThiagoKerr/MasterThesis.git>.

Como um breve resumo, as diferenças encontradas entre as soluções podem ser devido a diferenças na base de dados gravimétricos, no que tange a novos dados não inclusos, uso de gravidade sintética, tratamento de outliers e forma de obtenção da grade de dados residuais, sendo um fator crucial para o resultado final, já que a grade é o dado de entrada para a solução do PVCG. Outras diferenças incluem o uso de diferentes MDS e diferentes faixas espectrais para as componentes de MGG, RTM e de solução do PVCG.

Como recomendações futuras, é interessante utilizar as séries de Brovar e a so-

lução numérica das integrais em conjunto com dados cada vez mais modernos para acompanhar a evolução no resultado final. Uma boa sugestão é a troca do MDE SRTM por MDEs mais modernos, como o FABDEM por exemplo, assim, pode-se trabalhar com superfícies mais concordantes com a realidade. O uso da técnica RTM no domínio espacial também é muito interessante de se testar, inclusive com o uso de modelos de densidades que permitirão um melhor conhecimento sob a superfície terrestre, permitindo uma modelagem mais fiel à área de estudo.

Outra recomendação é aplicar esta metodologia para calcular o valor do Geopotencial e suas funcionais nas demais estações que compõem o IHRS no Brasil, como BRAZ, SCIM, CUIB, CEFT e MABA. Isto permite obter mais soluções que irão contribuir para futuras otimizações do IHRF no país. A aplicação de correções como a correção elipsoidal pode ser testada para tentar diminuir o erro causado pela aproximação esférica na etapa de solução PVCG. Por fim, é de grande importância continuar trabalhando e estudando novas maneiras de modelar funcionais do geopotencial para que assim, possa-se estar obtendo sistemas de referência altimétricos cada vez mais modernos e precisos.

Por fim, a adição de dados de gravimetria sintética pode vir a contribuir no refinamento do resultado final, já que foram utilizados somente dados de gravidade terrestre, sem uso de gravidade sintética nas regiões de vazios. Algo interessante a acrescentar futuramente é a determinação da potência espectral global e local, no qual, permitirá fornecer a melhor combinação dos dados globais e locais como o G/O do MGG e a técnica RTM. Isto evitaria a realização de testes empíricos para definir qual o G/O mais adequado. A tese de [Ferreira \(2011\)](#) aborda este método.

# REFERÊNCIAS

ABDALLA, A.; FERREIRA, V. A semi-vectorized and relationally-operated algorithm for fast geoid computation using stokes's integration. **Earth Science Informatics**, Springer, v. 15, n. 3, p. 2017–2029, 2022. 18, 42, 104

AHLGREN, K. **Sistema de Referencia utilizado no "Experimento Colorado"**. 2024. E-mail enviado para Nome do Destinatário, 13 de Junho de 2024. 53

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física. **Campus**, vol. **Sexta edição**, 2007. 21, 23, 34

BARTHELMES, F. Global models. **Encyclopedia of Geodesy**, Springer International Publishing, p. 1–9, 2014. 31

BLITZKOW, D.; GUIMARÃES, G. N.; BARZAGHI, R.; BASTOS, L.; FERRARO, C. C.; MARQUES, H. A. Primeros esfuerzos para el establecimiento del IHRF en brasil. In: **Actas del Simposio SIRGAS 2017**. Mendoza, Argentina: SIRGAS, 2017. Disponível em: <[https://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol22/20\\_Blitzkow\\_et\\_al\\_Primeros\\_esfuerzos\\_para\\_establecimiento\\_IHRF\\_en\\_Brasil.pdf](https://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol22/20_Blitzkow_et_al_Primeros_esfuerzos_para_establecimiento_IHRF_en_Brasil.pdf)>. 19

BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. de; SILVA, V. C.; GUIMARÃES, G. do N.; JUNIOR, E. S. da F. **Efforts for the Regional IHRF Computation in the São Paulo State**. Curitiba, PR, Brasil: [s.n.], 2024. Apresentação no XIII Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. 19, 51, 71, 101

BLITZKOW, D.; SILVA, V. C.; MATOS, A. C. O. C. de; GUIMARÃES, G. do N.; JUNIOR, E. S. da F.; FILHO, F. G. V. de A. Esfuerzos para el establecimiento regional del IHRF en el estado de são paulo. In: SIRGAS. **Simposio SIRGAS 2022**. Quito, Ecuador, 2022. Apresentação realizada por el autor Denizar Blitzkow. 19, 51, 71, 95, 96, 97, 101, 103, 104

BROVAR, V. A possible improvement in the accuracy of gravimetric results in geodesy. **Soviet Astronomy**, Vol. 15, p. 1055, v. 15, p. 1055, 1972. 18, 36

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9th. ed. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011. 89

DAMIANI, T.; YOUNGMAN, M.; JOHNSON, J. **GRAV-D General Airborne Gravity Data User Manual**. v2.1. United States, 2017. Disponível em: <[https://geodesy.noaa.gov/GRAV-D/data/NGS\\_GRAV-D\\_General\\_Airborne\\_Gravity\\_Data\\_User\\_Manual\\_v2.1.pdf](https://geodesy.noaa.gov/GRAV-D/data/NGS_GRAV-D_General_Airborne_Gravity_Data_User_Manual_v2.1.pdf)>. 53

DUQUENNE, H.; EVERAERTS, M.; LAMBOT, P. Merging a gravimetric model of the geoid with gps/levelling data: an example in belgium. In: SPRINGER. **Gravity, Geoid and Space Missions: GGSM 2004 IAG International Symposium Porto, Portugal August 30–September 3, 2004**. [S.l.], 2005. p. 131–136. 68

EKMANN, M. Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity. **Bulletin Géodésique**, Springer, v. 63, p. 281–296, 1989. 66

- European Space Agency. **GOCE: Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer**. 2009. Acesso em: 12/03/2025. Disponível em: <[https://www.esa.int/Applications/Observing\\_the\\_Earth/GOCE](https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/GOCE)>. 28
- FEATHERSTONE, W. Expected contributions of dedicated satellite gravity field missions to regional geoid determination with some examples from australia. **Journal of Geospatial Engineering**, THE HONG KONG INSTITUTION OF ENGINEERING SURVEYORS, v. 4, n. 1, p. 1–20, 2002. 32
- \_\_\_\_\_. Deterministic, stochastic, hybrid and band-limited modifications of hotine's integral. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 87, n. 5, p. 487–500, 2013. 43
- FEATHERSTONE, W.; EVANS, J.; OLLIVER, J. A meissl-modified vaníček and kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. **Journal of geodesy**, Springer, v. 72, p. 154–160, 1998. 44, 46
- FERREIRA, V. **Solução do tipo Brovar para o Segundo Problema de Valor de Contorno da Geodésia com vistas à modernização de Sistemas de Altitudes**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011. Tese de Doutorado em Ciências Geodésicas. 18, 27, 28, 29, 36, 37, 38, 40, 44, 45, 46, 105
- FERREIRA, V. G. Novas estratégias de solução do pvcg para a modernização de redes altimétricas. 2013. 43
- FORSBERG, R. **A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling**. [S.l.]: Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, 1984. v. 5. 33
- \_\_\_\_\_. A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, Wiley Online Library, v. 92, n. B2, p. 1305–1310, 1987. 58
- FORSBERG, R.; TSCHERNING, C. C. The use of height data in gravity field approximation by collocation. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, Wiley Online Library, v. 86, n. B9, p. 7843–7854, 1981. 30, 32
- GEMAEL, C. Introdução à geodésia física. **Curitiba: Editora da UFPR**, v. 302, p. 2002, 1999. 25, 34, 41, 42, 46, 56
- GGOS. **Establishment of a Global Unified Height Reference System: A GGOS priority**. 2023. Disponível em: <<https://ggos.org/about/org/fa/unified-height-system/>>. 47
- \_\_\_\_\_. **The Importance of Geodetic Reference Frames**. 2023. Disponível em: <<https://ggos.org/news/importance-reference-frames/>>. 17
- \_\_\_\_\_. **Why GGOS**. 2023. Disponível em: <<https://ggos.org/about/why-ggos/>>. 47
- GRIGORIADIS, V.; VERGOS, G. **The AUTH quasi-geoid based on 1D FFT with Wong-Gore modification of the Stokes kernel for the Colorado Experiment: CoIFFTWG2020**. GFZ Data Services, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.5880/isg.2020.003>>. 57, 58, 71
- GRIGORIADIS, V. N.; VERGOS, G. S.; BARZAGHI, R.; CARRION, D.; KOÇ, Ö. Collocation and fft-based geoid estimation within the colorado 1 cm geoid experiment. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 95, p. 1–18, 2021. 54, 58

- GROMBEIN, T.; SEITZ, K.; HECK, B. Height system unification based on the fixed gbvp approach. In: SPRINGER. **IAG 150 Years: Proceedings of the IAG Scientific Assembly in Postdam, Germany, 2013**. [S.l.], 2016. p. 305–311. 35
- GUIMARÃES, G.; MATOS, A. de; BLITZKOW, D. El modelo geoidal para américa del sur (sam\_geoid2023) y la conexión de los data verticales locales con ihref. In: **SIRGAS Symposium 2024**. [S.l.: s.n.], 2024. 70
- GUIMARÃES, G. D. N.; BLITZKOW, D. Problema de valor de contorno da Geodésia: uma abordagem conceitual. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 17, n. 4, p. 607–624, dez. 2011. ISSN 1982-2170. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1982-21702011000400007&lng=pt&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1982-21702011000400007&lng=pt&tlng=pt)>. 35, 36
- GUIMARÃES, G. do N.; BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. de; CRISTINA, V. O Estabelecimento do IHRF no Brasil: Situação Atual e Perspectivas Futuras. **Rev. Bras. Cartogr**, v. 74, n. 3, 2022. 50
- GUIMARÃES, G. do N.; MATOS, A. C. O. C. de; BLITZKOW, D.; SIRGAS, G.-I. Conexão do sistema vertical brasileiro ao referencial altimétrico internacional (ihrf) por meio da estimativa dos parâmetros do datum vertical. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. **XIII Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas**. Curitiba, Brasil, 2024. 19, 51
- GUIMARÃES, G. do N.; TOCHO, C.; PIÑA, W. H. S.; MATOS, A. C. O. C. de; GÓMEZ, A.; ANOKOLETZ, E. D.; BLITZKOW, D. **Guía 06: Directrices para el cálculo de los valores de potencial de gravedad en las estaciones IHRF de la región SIRGAS**. 1.0. ed. Buenos Aires, 2024. Disponível em: <<https://sargas.ipgh.org/wp-content/uploads/2024/11/Directrices-para-El-Calculo-De-Los-Valores-de-Potencial-de-Gravedad-en-las-Estaciones-IHRF-de-la-Region-SIRGAS.pdf>>. 104
- GUO, J.-Y. **Physical geodesy: A theoretical introduction**. [S.l.]: Springer Nature, 2023. 24
- HECK, B. A contribution to the scalar free boundary value problem of physical geodesy. **Manuscripta geodaetica**, v. 14, n. 2, p. 87–99, 1989. 35
- \_\_\_\_\_. A brovar-type solution of the fixed geodetic boundary-value problem. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Springer, v. 55, p. 441–454, 2011. 18, 19, 36, 40
- HECK, B.; GRUNINGER, W. Modification of stokes's integral formula by combining two classical approaches. In: **Proceedings of the XIX General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics**. Vancouver, Canada: [s.n.], 1987. v. 2, p. 309–337. 46
- HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. Physical geodesy. **Bulletin Géodésique (1946-1975)**, Springer, v. 86, n. 1, p. 491–492, 1967. 69
- HIRT, C. Prediction of vertical deflections from high-degree spherical harmonic synthesis and residual terrain model data. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 84, n. 3, p. 179–190, 2010. 32
- HIRT, C.; GRUBER, T.; FEATHERSTONE, W. Evaluation of the first goce static gravity field models using terrestrial gravity, vertical deflections and egm2008 quasigeoid heights. **Journal of geodesy**, Springer, v. 85, p. 723–740, 2011. 28

- HIRT, C.; KUHN, M. Band-limited topographic mass distribution generates full-spectrum gravity field: Gravity forward modeling in the spectral and spatial domains revisited. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, Wiley Online Library, v. 119, n. 4, p. 3646–3661, 2014. 32, 33, 34
- HIRT, C.; KUHN, M.; CLAESSENS, S.; PAIL, R.; SEITZ, K.; GRUBER, T. Study of the earth's short-scale gravity field using the ertm2160 gravity model. **Computers & geosciences**, Elsevier, v. 73, p. 71–80, 2014. 57
- HIRT, C.; REXER, M. Earth2014: 1 arc-min shape, topography, bedrock and ice-sheet models - available as gridded data and degree-10,800 spherical harmonics. **International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation**, v. 39, p. 103–112, 2015. 33, 57
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 40, 41, 42, 69, 70
- IAG. **Definition and Realization of an International Height Reference System (IHR)**. 2015. Resolução n° 1/2015. 47
- \_\_\_\_\_. **Establishment of the International Height Reference Frame (IHRF)**. 2019. Resolução n° 3/2019. 18, 48
- IAG. **Description of the Global Geodetic Reference Frame**. 2023. Disponível em: <<https://www.iag-aig.org/topic>>. 17
- \_\_\_\_\_. **What is Geodesy?** 2023. Disponível em: <<https://www.iag-aig.org/geodesy>>. 17
- IBGE. **MAPGEO2015: Modelo de Ondulação Geoidal no Brasil**. 2015. Acesso em: 18 dez. 2024. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/geociencias/informacoes-sobre-posicionamento-geodesico/servicos-para-posicionamento-geodesico/10855-modelo-de-ondulacao-geoidal.html>>. 65
- \_\_\_\_\_. **hgeoHNOR2020: Modelo para Conversão de Altitudes Geométricas em Altitudes Normais**. 2021. Acesso em: 18 dez. 2024. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/geociencias/modelos-digitais-de-superficie/modelos-digitais-de-superficie/31283-hgeohnor2020-modeloconversaoaltitudesgeometricasgnss-dataverticaisgb.html>>. 65
- IHDE, J.; SÁNCHEZ, L.; BARZAGHI, R.; DREWES, H.; FOERSTE, C.; GRUBER, T.; LIEBSCH, G.; MARTI, U.; PAIL, R.; SIDERIS, M. Definition and proposed realization of the International Height Reference System (IHR). **Surveys in geophysics**, Springer, v. 38, p. 549–570, 2017. 48
- INCE, E. S.; BARTHELMES, F.; REIBLAND, S.; ELGER, K.; FÖRSTE, C.; FLECHTNER, F.; SCHUH, H. Icgem – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services and future plans. **Earth System Science Data**, v. 11, p. 647–674, 2019. 32
- ISG - International Service for the Geoid. **Colorado Experiment**. 2024. Disponível em: <[https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/colorado\\_experiment.html](https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/colorado_experiment.html)>. 53, 61
- JACK. **griddataLSC**. 2024. <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/57342-griddatalsc>>. MATLAB Central File Exchange. Acesso em: 2024-05-16. 58

- JAMUR, K. P. **ANÁLISE DE ALTERNATIVAS PARA A DETERMINAÇÃO DOS EFEITOS GRAVITACIONAIS DE MASSAS ANÔMALAS NA REGIÃO DO DVB**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR, 2012. 29
- JARVIS, A.; REUTER, H. I.; NELSON, A.; GUEVARA, E. **Hole-filled SRTM for the globe Version 4**. 2008. Available from the CGIAR-CSI SRTM 90m Database. Disponível em: <<http://srtm.csi.cgiar.org>>. 54
- JEKELI, C. Modifying stokes' function to reduce the error of geoid undulation computations. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, Wiley Online Library, v. 86, n. B8, p. 6985–6990, 1981. 45
- JIANG, T. The casm quasi-geoid based on spectral combination approach for the colorado experiment: Colscas-casm2019. **GFZ Data Services**, v. 1.0, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.5880/isg.2019.009>>. 49
- KVAS, A.; MAYER-GÜRR, T.; KRAUSS, S.; BROCKMANN, J. M.; SCHUBERT, T.; SCHUH, W.-D.; PAIL, R.; GRUBER, T.; JÄGGI, A.; MEYER, U. The satellite-only gravity field model goco06s. 2019. 66
- LEMOINE, F. G.; KENYON, S. C.; FACTOR, J. K.; TRIMMER, R. G.; PAVLIS, N. K.; CHINN, D. S.; COX, C. M.; KLOSKO, S. M.; LUTHCKE, S. B.; TORRENCE, M. H. et al. **The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96**. [S.l.], 1998. 35
- LIN, M.; LI, X. Impacts of using the rigorous topographic gravity modeling method and lateral density variation model on topographic reductions and geoid modeling: a case study in colorado, usa. **Surveys in Geophysics**, Springer, v. 43, n. 5, p. 1497–1538, 2022. 72
- LIU, C.; WANG, Z. **Ellipsoidal Harmonic Forward Model derived from Earth2014 topographies up to d/o 7200: EHF<sub>M</sub>\_Earth\_7200**. GFZ Data Services, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.5880/icgem.2024.002>>. 33
- LIU, Q.; SCHMIDT, M.; SÁNCHEZ, L. **The DGFI quasi-geoid based on spherical radial basis functions for the Colorado Experiment: CoISRBF-DGFI2019**. GFZ Data Services, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.5880/isg.2019.007>>. 58
- LIU, Q.; SCHMIDT, M.; SÁNCHEZ, L.; WILLBERG, M. Regional gravity field refinement for (quasi-) geoid determination based on spherical radial basis functions in colorado. **Journal of geodesy**, Springer, v. 94, p. 1–19, 2020. 36, 49
- MÄKINEN, J. The permanent tide and the international height reference frame ihf. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 95, n. 9, p. 106, 2021. 70
- MATOS, A. de; BLITZKOW, D.; GUIMARÃES, G.; SILVA, V. **The South American gravimetric quasi-geoid: QGEOID2021**. [S.l.]: GFZ Data Services, 2021. 70
- MAYER-GUERR, T. The combined satellite gravity field model goco05s. In: **EGU general assembly conference abstracts**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 12364. 55
- MEADOWS, M.; JONES, S.; REINKE, K. Vertical accuracy assessment of freely available global dems (fabdem, copernicus dem, nasadem, aw3d30 and srtm) in flood-prone environments. **International Journal of Digital Earth**, Taylor & Francis, v. 17, n. 1, p. 2308734, 2024. 35

- MEISSL, P. **Preparations for the numerical evaluation of second order Molodensky-type formulas**. [S.l.]: Ohio State University, Research Foundation, 1971. v. 78. 7, 45, 46
- MERSON, R. H.; KING-HELE, D. G. Use of artificial satellites to explore the earth's gravitational field: Results from sputnik 2 (1957). **Nature**, v. 182, p. 640–641, 1958. 31
- MOLODENSKII, M. Grundbegriffe der geodatischen gravimetrie. **Berlin**, 1958. 44
- MORITZ, H. Advanced physical geodesy. **Advances in Planetary Geology**, 1980. 39, 40, 66
- \_\_\_\_\_. Geodetic reference system 1980. **Journal of geodesy**, Springer Science and Business Media LLC, v. 74, n. 1, p. 128–133, 2000. 56
- NICACIO, E.; DALAZOANA, R. Passado e presente dos modelos globais do geopotencial: uma abordagem conceitual sobre sua evolução. **Revista Eletrônica Multidisciplinar FACEAR**, v. 2, n. 6, p. 1–15, 2017. 31
- \_\_\_\_\_. O emprego da Solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia à Vinculação Nacional a um Sistema Vertical de Referência Global: uma Revisão Conceitual. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 71, n. 1, p. 122–148, mar. 2019. ISSN 1808-0936, 0560-4613. Disponível em: <<http://www.seer.ufu.br/index.php/revistabrasileiracartografia/article/view/46667>>. 35, 36
- NOAA. **INTG**. 2019. Accessed: 2024-07-30. Disponível em: <<https://geodesy.noaa.gov/GEOID/GEOID18/downloads.shtml>>. 56
- ONU. **A global geodetic reference frame for sustainable development**. 2015. Resolução 69/266. 17
- PAIL, R.; FECHER, T.; BARNES, D.; FACTOR, J.; HOLMES, S.; GRUBER, T.; ZINGERLE, P. Short note: the experimental geopotential model xgm2016. **Journal of geodesy**, Springer, v. 92, p. 443–451, 2018. 55
- PAVLIS, N. K.; HOLMES, S. A.; KENYON, S. C.; FACTOR, J. K. The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (egm2008). **Journal of geophysical research: solid earth**, Wiley Online Library, v. 117, n. B4, 2012. 35
- PEREIRA, R. A. D. **MODELAGEM DO POTENCIAL PERTURBADOR COM BASE EM WAVELETS APLICADA À CONEXÃO DE REDES VERTICAIS**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná - Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 2013. 33
- PEREIRA, R. A. D.; CASTRO, H. M.; FREITAS, S. R. C. d.; DALMOLIN, Q.; FERREIRA, V. G. Determinação de função covariância local para a predição de anomalias da gravidade bouguer e valores da gravidade visando à obtenção de números geopotenciais. **Boletim de Ciências Geodésicas**, SciELO Brasil, v. 17, p. 239–256, 2011. 86
- RAPP, R. H. The relationship between mean anomaly block sizes and spherical harmonic representations. **Journal of Geophysical Research**, Wiley Online Library, v. 82, n. 33, p. 5360–5364, 1977. 66

- \_\_\_\_\_. The treatment of permanent tidal effects in the analysis of satellite altimeter data for sea surface topography. **Manuscripta geodaetica**, Springer, v. 14, n. 5, p. 368–372, 1989. 66
- RIBEIRO, L. C. **Contribuição para o estabelecimento do IHRF no estado de São Paulo**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de São Paulo, Presidente Prudente, 2019. Dissertação de Mestrado em Ciências Cartográficas. 19, 71, 96, 97, 99, 103
- RIBEIRO, L. C. **INFLUÊNCIA DA INTEGRAÇÃO DE DADOS DE GRAVIMETRIA MARINHA E TERRESTRE NO CÁLCULO DO POTENCIAL DE GRAVIDADE DAS ESTAÇÕES IHRF DO BRASIL**. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília - Programa de Pós-Graduação em Geociências Aplicadas e Geodinâmica, Brasília, 2022. 51
- RUFFHEAD, A. An introduction to least-squares collocation. **Survey review**, Taylor & Francis, v. 29, n. 224, p. 85–94, 1987. 59
- SÁNCHEZ, J. L. C. **VÍNCULO DO DATUM VERTICAL EQUATORIANO AO INTERNATIONAL HEIGHT REFERENCE SYSTEM - IHRS**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017. 64
- SÁNCHEZ, L.; ÅGREN, J.; HUANG, J.; WANG, Y.; FORSBERG, R. Basic agreements for the computation of station potential values as ihrs coordinates, geoid undulations and height anomalies within the colorado 1-cm geoid experiment. **Version 0.5, October**, v. 30, p. 2018, 2018. 55
- SÁNCHEZ, L.; DAYOUB, N.; ČUNDERLÍK, R.; MINARECHOVÁ, Z.; MIKULA, K.; VATRT, V.; VOJTÍŠKOVÁ, M.; ŠÍMA, Z. W 0 estimates in the frame of the ggos working group on vertical datum standardisation. In: SPRINGER. **Gravity, Geoid and Height Systems: Proceedings of the IAG Symposium GGHS2012, October 9-12, 2012, Venice, Italy**. [S.l.], 2014. p. 203–210. 47
- SÁNCHEZ, L.; SIDERIS, M. G. Vertical datum unification for the International Height Reference System (IHRS). **Geophysical Journal International**, Oxford University Press, v. 209, n. 2, p. 570–586, 2017. 47, 48, 97, 101, 104
- SÁNCHEZ, L.; ÅGREN, J.; HUANG, J.; WANG, Y. M.; MÄKINEN, J.; PAIL, R.; BARZAGHI, R.; VERGOS, G. S.; AHLGREN, K.; LIU, Q. Strategy for the realisation of the International Height Reference System (IHRS). **Journal of Geodesy**, v. 95, n. 3, p. 33, mar. 2021. ISSN 0949-7714, 1432-1394. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s00190-021-01481-0>>. 18, 32, 48, 52, 56, 64, 66, 70, 93, 95, 100
- SANSÒ, F. The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy. **Manuscripta geodaetica**, Berlin: Springer-Verlag, 1976-1995., v. 20, n. 5, p. 326–344, 1995. 34
- SANSÓ, F.; RUMMEL, R. **Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid**. [S.l.]: Springer, 1997. 34
- SANSÒ, F.; SIDERIS, M. G. **Geoid determination: theory and methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. 19, 28, 30, 31, 57, 58
- SCHWARZ, K. Data types and their spectral properties. **Local gravity field approximation, Beijing International Summer School**, 1984. 27, 29

- SEEBER, G. **Satellite geodesy**. [S.l.]: Walter de Gruyter, 2003. 28
- SHENG, M.; SHAW, C.; VANÍČEK, P.; KINGDON, R.; SANTOS, M.; FOROUGH, I. Formulation and validation of a global laterally varying topographical density model. **Tectonophysics**, Elsevier, v. 762, p. 45–60, 2019. 72
- SILVA, V.; FILHO, F. de A.; BLITZKOW, D.; MATOS, A. de. **The gravimetric quasi-geoid of São Paulo State: QGEOID-SP-2020-GGM250**. [S.l.]: GFZ Data Services, 2020. 70
- SILVA, V. C. **Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo: Contribuição ao referencial geodésico**. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2020. 19, 51, 66, 71, 94, 96, 103
- SJÖBERG, L. A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove–compute–restore technique in regional geoid modelling. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 78, p. 645–653, 2005. 30
- SJÖBERG, L. E. Least-squares modification of Stokes's and Vening Meinesz's formula by accounting for truncation and potential coefficient errors. **Manuscripta Geodaetica**, v. 9, p. 209–229, 1984. 47
- \_\_\_\_\_. Refined least-squares modification of Stokes's formula. **Manuscripta Geodaetica**, v. 16, p. 367–375, 1991. 47
- SNEEUW, N. Physical geodesy. **Lecture notes**, University of Stuttgart, 2006. 21, 24, 25
- USGS. **Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Global 1 arc second (SRTMGL1) Version 003**. 2015. Acesso: 2025-01-27. Disponível em: <<https://lpdaac.usgs.gov/products/srtmgl1v003/>>. 62
- VANÍČEK, P.; FEATHERSTONE, W. Performance of three types of Stokes's kernel in the combined solution for the geoid. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 72, p. 684–697, 1998. 42
- VANÍČEK, P.; SJÖBERG, L. E. Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, Wiley Online Library, v. 96, n. B4, p. 6529–6539, 1991. 47
- VANÍČEK, P.; KLEUSBERG, A. The Canadian geoid – Stokesian approach. **Manuscripta Geodaetica**, v. 12, p. 86–98, 1987. 46
- VANWESTRUM, D. **E-mail sobre dados solicitados**. 2024. E-mail enviado para Salomão Soares e outros. Recebido em 27 de agosto de 2024. Disponível em: <<mailto:derek.vanwestrum@noaa.gov>>. 61
- VERMEER, M. et al. Physical geodesy. Aalto University, 2020. 22, 23
- WANG, Y. M.; HOLMES, S.; LI, X.; AHLGREN, K. NGS Annual Experimental Geoid Models – xGEOID17: What is new and the results. In: **IAG-IASPEI**. Kobe, Japan: [s.n.], 2017. 55
- WANG, Y. M.; SÁNCHEZ, L.; ÅGREN, J.; HUANG, J.; FORSBERG, R.; ABD-ELMOTAAL, H. A.; AHLGREN, K.; BARZAGHI, R.; BAŠIĆ, T.; CARRION, D. et al. Colorado geoid computation experiment: overview and summary. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 95, p. 1–21, 2021. 18, 19, 40, 45, 48, 49, 52, 53, 78, 79, 98

- WENZEL, H.-G. Geoid computation by least squares spectral combination using integral kernels. In: **Paper presented at the General Meeting of the International Association of Geodesy**. Tokyo: [s.n.], 1982. 47
- \_\_\_\_\_. Hochauflösende kugelfunktionsmodelle für das gravitationspotential der erde. **Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover**, n. 137, p. 1–154, 1985. 56
- WILLBERG, M.; ZINGERLE, P.; PAIL, R. **The IAPG quasi-geoid based on Residual Least-Squares Collocation for the Colorado Experiment: CoIRLSC-IAPG2019**. GFZ Data Services, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.5880/isg.2019.001>>. 58
- \_\_\_\_\_. Integration of airborne gravimetry data filtering into residual least-squares collocation: example from the 1 cm geoid experiment. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 94, p. 1–17, 2020. 49
- WITTE, L. D. Truncation errors in the stokes and vening meinesz formulae for different order spherical harmonic gravity terms. **Geophysical Journal International**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 12, n. 5, p. 449–464, 1967. 46
- WONG, L.; GORE, R. Accuracy of geoid heights from modified stokes kernels. **Geophysical journal international**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 18, n. 1, p. 81–91, 1969. 7, 18, 45, 46, 59
- YILDIZ, H.; FORSBERG, R.; ÅGREN, J.; TSCHERNING, C.; SJÖBERG, L. Comparison of remove-compute-restore and least squares modification of stokes' formula techniques to quasi-geoid determination over the auvergne test area. **Journal of Geodetic Science**, Versita, v. 2, n. 1, p. 53–64, 2012. 40
- ZINGERLE, P.; PAIL, R.; GRUBER, T.; OIKONOMIDOU, X. The combined global gravity field model xgm2019e. **Journal of geodesy**, Springer, v. 94, n. 7, p. 66, 2020. 29