UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MARCELO PRADO CIONEK





MARCELO PRADO CIONEK

DESENVOLVIMENTO DE SISTEMAS DE IMAGEAMENTO DE FOTODETECTOR ÚNICO EM ALTA VELOCIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Cristiano Barbano

CURITIBA 2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP) UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cionek, Marcelo Prado Desenvolvimento de sistemas de imageamento de fotodetector único em alta velocidade. / Marcelo Prado Cionek. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Cristiano Barbano

1. Imageamento óptico. 2. Imageamento computacional. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Barbano, Emerson Cristiano. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de MARCELO PRADO CIONEK, intitulada: **Desenvolvimento de sistemas de imageamento de fotodetector único em alta velocidade**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 20 de Fevereiro de 2025.

Assinatura Eletrônica 20/02/2025 17:15:35.0 EMERSON CRISTIANO BARBANO Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica 20/02/2025 17:20:05.0 LINO MISOGUTI Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica 20/02/2025 17:14:06.0 JOSÉ PEDRO MANSUETO SERBENA Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Este trabalho é dedicado a todas as mentes criativas que jamais puderam mostrar ao mundo suas maravilhas, por terem sido sufocadas ou apagadas pelas desigualdades, violências e distorções deste mundo.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo carinho e por apoiar as minhas escolhas. À minha mãe, Idinei, e à minha segunda mãe, a vó Maria, por sempre cuidarem de mim, especialmente durante os momentos críticos pessoalmente e academicamente.

Ao meu orientador Emerson Cristiano Barbano, pela confiança e o apoio durante o mestrado, pelo incentivo na busca de novas oportunidades e pela autonomia dada a mim para continuar transformando minhas ideias e obsessões em conhecimento científico.

Aos professores Lino Misoguti e Randy Bartels pelas discussões nos Encontros de Outono, que desencadearam uma série de raciocínios, culminando nas ideias que sustentam a técnica 2DOIT, apresentada neste trabalho.

Ao professor Jinyang Liang, por ter me aceitado como estagiário e me proporcionado uma experiência acadêmica e de vida transformadora no Canadá, e ao Patrick Kilcullen por ter compartilhado comigo seu vasto conhecimento técnico, do qual pude absorver uma fração, e que foi essencial para minha formação como físico.

Ao professor Tsuneyuki Ozaki, por permitir a realização dos testes iniciais do 2DOIT no seu laboratório, assim como aos meus colegas Yohan, Camille e Marcelo, pelos trabalhos que concretizaram a ideia a tempo da escrita deste trabalho.

À Liana, por continuar me auxiliando no enfrentamento dos meus problemas internos e externos, e a priorizar o meu bem estar acima do que se impõe sobre mim.

Aos colegas do UFPR Optica Student Chapter e do GPOEF, e aos demais amigos, de perto ou de muito distante, brasileiros ou gringos, pelo companheirismo, as experiências novas, a diversão e o acolhimento ao longo desses dois anos.

RESUMO

O campo de single-pixel imaging (SPI) consiste no desenvolvimento de métodos de codificação da informação espacial de um objeto no sinal coletado por um único fotodetector, assim como as técnicas computacionais para a decodificação dessa informação. As técnicas de SPI são ordens de grandeza mais lentas que as de imageamento tradicional, por requererem que a informação do conjunto de pixels seja coletada de forma cumulativa ao invés de simultaneamente, mas possuem propriedades especiais, como a capacidade de imagear através de materiais espalhadores, e podem operar em comprimentos de onda para os quais não existem câmeras disponíveis para uso. O tamanho das imagens e a velocidade com que são geradas são limitados pelos dispositivos utilizados pelas técnicas, como os moduladores espaciais de luz e dispositivos de varredura, que, até recentemente, não eram capazes de codificar informações numa taxa comparável à sensibilidade dos fotodetectores, que fornecem os dados. Neste trabalho, apresentam-se os princípios tradicionais utilizados na codificação de informação e as limitações desse processo, que foram em grande parte superados pelo sistema recordista em velocidade, o SPI-ASAP, cuja complexa montagem experimental será descrita aqui, graças ao conhecimento dela que foi adquirido por ocasião de um intercâmbio científico no INRS - Canadá, onde a técnica foi criada. Em seguida, se desenvolve a teoria que resulta em uma nova classe de técnicas SPI, que codificam a informação em taxas de variação - a Derivative Optical Imaging Technique (DOIT). A velocidade dessa técnica é limitada pelo transladador que desloca a amostra perpendicularmente a um feixe laser, que incide sobre ela em formato de linha, sendo periodicamente bloqueado por um chopper óptico. Juntando a informação de múltiplas linhas, toma-se a derivada temporal para reconstruir a imagem. A translação da amostra ao longo de um eixo pode ser substituída pela modulação de um chopper lento, contanto que o formato do feixe não seja mais fino nesse eixo. Demonstra-se então que a imagem surge ao se tomar a derivada temporal (no eixo da modulação rápida) e a diferença entre linhas vizinhas (a derivada no eixo da modulação lenta), o que fundamenta a Double DOIT (2DOIT). O tamanho da imagem e a taxa de quadros dependem apenas da relação entre as frequências de modulação e a taxa de aquisição de dados, acelerando o sistema DOIT em centenas de vezes e simplificando a montagem do sistema, ao custo de problemas majoritariamente corrigíveis com programação. Com uma aquisição de dados de apenas 200 kS/s, foi possível gravar vídeos com quadros na ordem de dezenas pixels a 100 Hz, nos quais é possível distinguir detalhes em amostras em movimento. Com a mesma capacidade de aquisição do SPI-ASAP, será possível gerar imagens com dezenas a centenas de pixels a mais, em taxas de quadro superiores ao recordista, tornando-se um forte candidato para aplicações reais e em comprimentos de onda fora do espectro visível.

Palavras-chaves: Imageamento óptico. Imageamento computacional. Imageamento de pixel único. Alta velocidade.

ABSTRACT

The field of single-pixel imaging (SPI) consists of the development of methods for encoding the spatial information of an object in the signal collected by a single photodetector. as well as computational techniques for decoding that information. SPI techniques are orders of magnitude slower than traditional imaging techniques, because they require that the information from the set of pixels be collected cumulatively rather than simultaneously, but they have special properties, such as the ability to image through scattering materials, and they can operate at wavelengths for which cameras are not available. The size of the images and the speed at which they are generated are limited by the devices used by the techniques, such as spatial light modulators and scanners, which until recently were not capable of encoding information at a rate comparable to the sensitivity of the photodetectors that provide the data. This thesis presents the traditional principles used in information encoding and the limitations of this process, which have been largely overcome by the speed record-breaking SPI-ASAP, whose complex setup is described in detail, based on a laboratory experience provided by an exchange internship. Then, the theory that results in a new class of SPI techniques that encode information in rates of change - the Derivative Optical Imaging Technique (DOIT) is developed. The speed of this technique is limited by the translator that moves the sample perpendicularly to a laser beam, which is focused on it in a line shape, and is periodically blocked by an optical chopper. By combining the information from multiple lines, the temporal derivative is taken to reconstruct the image. The translation of the sample along an axis can be replaced by the modulation of a slow chopper, as long as the beam shape is no longer thin in that axis. It is then demonstrated that the image arises by taking the temporal derivative (on the fast modulation axis) and the difference between neighboring lines (the derivative on the slow modulation axis), which underlies the Double DOIT (2DOIT). The image size and frame rate depend only on the ratios between the modulation frequencies and the data acquisition rate, accelerating the DOIT system by hundreds of times and simplifying the system assembly, at the cost of problems mostly correctable with programming. With a data acquisition of only 200 kS/s, it was possible to record videos with frames in the order of tens of pixels at 100 Hz, in which it is possible to distinguish details in moving samples. With the same acquisition capacity as SPI-ASAP, it will be possible to generate images with tens to hundreds of more pixels, at frame rates higher than the record holder, making it a strong candidate for real applications and at wavelengths outside the visible spectrum.

Key-words: Optical Imaging. Computational imaging. Single-pixel imaging. High speed.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA	1 -	Processo de imageamento digital.	15
FIGURA	2 -	Exemplo de trajetória de feixe no <i>raster scan.</i>	16
FIGURA	3 -	Representação matricial de uma imagem em escala cinza	19
FIGURA	4 -	Representação vetorial de uma imagem em escala cinza após a ope-	
		ração de remapeamento.	20
FIGURA	5 -	Uma imagem como a soma de outras imagens	20
FIGURA	6 –	Produtos entre imagens.	21
FIGURA	7 -	Construção da matriz \mathbf{A} a partir do remapeamento do conjunto	
		$\{\mathbf{M}\}$ em vetores-linha	22
FIGURA	8 -	Fenômeno de <i>aliasing</i> na conversão de um sinal analógico em digital.	23
FIGURA	9 –	Comparação de tamanho de arquivo da fotografia Cameraman em	
		512×512 pixels sob diferentes níveis de compressão JPEG, em con-	
		traste com o formato PNG	26
FIGURA	10 -	Esquemática da matriz de espelhos de um DMD	26
FIGURA	11 -	Matrizes envolvidas no processo de codificação e decodificação	27
FIGURA	12 -	Decodificação em sub-amostragem para número de pixels maior	28
FIGURA	13 -	Matrizes-S cíclicas.	33
FIGURA	14 -	Decodificação em sub-amostragem com matrizes-S	33
FIGURA	15 -	Construção de um padrão agregado	36
FIGURA	16 –	Conversão de um feixe colimado em um feixe varrido pelo espelho	
		poligonal	37
FIGURA	17 -	Diagrama do sistema SPI-ASAP	38
FIGURA	18 -	Passos intermediários de alinhamento do SPI-ASAP	40
FIGURA	19 -	Ajustes do DMD acoplado ao suporte da ThorLabs	41
FIGURA	20 -	Ferramenta auxiliadora de alinhamento no GeoGebra	42
FIGURA	21 -	Padrões agregados refletidos pelo DMD e suas ordens de difração	43
FIGURA	22 -	Calibração da fenda de saída do SPI-ASAP	44
FIGURA	23 -	Passo-a-passo da transformação losangular	46
FIGURA	24 -	Efeito da transformação los angular sobre imagens	47
FIGURA	25 -	Demonstração do SPI-ASAP	49
FIGURA	26 –	Esquema da montagem experimental do DOIT	51
FIGURA	27 -	Representação da modulação do DOIT	52
FIGURA	28 -	Sinal característico do DOIT	53
FIGURA	29 -	Trigonometria das dimensões setoriais de um chopper óptico	54

FIGURA	30 -	Representação da integral do sinal com a presença de dois modula- dores.	61
FIGURA	31 -	Evolução temporal do campo binário formado pelo produto das mo-	01
		dulações independentes $M_x(x, y, t)M_y(x, y, t)$ ao longo de um ciclo	
		da modulação rápida (no eixo x)	62
FIGURA	32 -	Sinal temporal $s(t)$ para um período $T_x = 80$ (unidades arbitrárias) e $N = 20$ linhas na forma unidimensional (à esquerda) e na forma	
		bidimensional (à direita)	65
FIGURA	33 -	Mapa de cor de $s(t,n)$ para um período $T_x = 80$ (unidades arbitrá-	
		rias) e $N=20$ linhas	65
FIGURA	34 -	Sinal temporal $s(t)$ para um período $T_x = 80$ (unidades arbitrárias)	
		e ${\cal N}=20$ linhas na forma unidimensional (à esquerda) e na forma	
		bidimensional (à direita)	66
FIGURA	35 -	Mapa de cor de $s(t,n)$ para um período $T_x = 80$ (unidades arbitrá-	
		rias) e $N=20$ linhas	67
FIGURA	36 -	Mapa de cor da Figura 35 no remapeamento alternativo. \ldots .	68
FIGURA	37 -	Evolução temporal do campo formado pelo produto das modulações	
		independentes $M_x(x,y,t)M_y(x,y,t)$ ao longo de um ciclo da modu-	
		lação rápida (no eixo x) sob discretização	69
FIGURA	38 -	Matriz de medição (4×4) do 2DOIT	71
FIGURA	39 -	Matriz de medição ${\bf A}$ e sua inversa ${\bf A}^{-1},$ disposta também em escala	
		logarítmica.	72
FIGURA	40 -	Matriz de medição binarizada \mathbf{A} e sua inversa \mathbf{A}^{-1}	74
FIGURA	41 -	Construção da matriz de medição para $X=3$ e $Y=3$ e tentativas	
		inviáveis de binarizar a modulação lenta	75
FIGURA	42 -	Imagem-teste, sinal temporal, mapa de cor, derivadas e a imagem	
		reconstruída a partir da derivada mista	77
FIGURA	43 –	Derivada de segunda ordem no eixo lento, imagem após a subtração	
		de fantasmas e após a correção de enviesamento	78
FIGURA	44 -	Sinal, derivadas e imagem antes e pós-correção para linhas de nitidez	
		decrescente ao longo do eixo vertical	78
FIGURA	45 -	Sinal, derivadas e imagem antes e pós-correção para linhas de com-	
		primento crescente na horizontal.	79
FIGURA	46 -	Fotografia processada pela simulação do 2DOIT	79
FIGURA	47 -	Sistema de coordenadas da modulação.	80
FIGURA	48 -	Disposição dos modelos 3D e seus respectivos rótulos	82
FIGURA	49 -	Resultados para quatro tentativas de decodificação do sinal gerado	
		pelo traçado de raios do Blender.	83
FIGURA	50 -	Disposição dos modelos 3D e seus respectivos rótulos	84

FIGURA	51 -	Transformações geométricas no Blender	84
FIGURA	52 -	Teste com a fotografia $\ Cameraman$ $2(100)\times 100$ para $B=20$ e taxa	
		de amostragem 16, decodificada no modo dual	85
FIGURA	53 -	Distorções trapezoidais sobre uma grade quadriculada	86
FIGURA	54 -	Imagem de uma grade quadriculada distorcida e as correções trape-	
		zoidais	87
FIGURA	55 -	Comparações entre quadros de 256×256 pixels da animação gerada	
		no Blender, em momentos diferentes da modulação simultânea, com	
		as derivadas associadas	88
FIGURA	56 -	Inspeção sobre os pixels que "perseguem" o píxel codificado	89
FIGURA	57 -	Quadro de uma animação que mostra a evolução temporal do sinal	
		gerado pela integração numérica simultaneamente com a modulação.	91
FIGURA	58 -	Imagens 40 \times 50 de um feixe homogêneo sob integração numérica,	
		para $B_x = 42$ e $B_y = 10$	91
FIGURA	59 -	Modelagem do sinal do 2DOIT	93
FIGURA	60 -	Mapa de cor no modo dual com valor de deslocamento h crescente	93
FIGURA	61 -	Sinal $s(t)$ antes e após $(s(\alpha t))$ a transformação de <i>stretch</i>	94
FIGURA	62 –	Efeitos da fase maior sobre o sinal e a imagem	94
FIGURA	63 –	Algoritmo de correção da fase maior.	95
FIGURA	64 -	Representação dos efeitos da fase menor sobre o sinal e a imagem. $% \mathcal{A} = \mathcal{A}$	96
FIGURA	65 -	Representação do algoritmo de correção de fase menor	97
FIGURA	66 –	Frequência oscilatória exagerada (acima) e cenário mais realista	
		(abaixo)	97
FIGURA	67 –	Passos para a construção da fenda ideal	99
FIGURA	68 –	Simulação em condições de subamostragem	00
FIGURA	69 –	Montagem experimental do 2DOIT.	103
FIGURA	70 -	Esquemática 3D do sistema 2DOIT	104
FIGURA	71 -	Esquemática do sistema 2DOIT em vista ortográfica 1	104
FIGURA	72 -	Controladores dos <i>choppers</i> ópticos	105
FIGURA	73 –	Calculadora de frequências no GeoGebra	106
FIGURA	74 -	Imagens do feixe laser	108
FIGURA	75 -	Objeto utilizado como teste de sensibilidade do sistema em diferen-	
		tes orientações, segurado sobre um alvo com marcas milimetradas	
		da ThorLabs. A espessura da haste era da ordem de 1,75 mm	109
FIGURA	76 –	Série temporal dos dados experimentais.	109
FIGURA	77 –	Mapa de cor do sinal, derivadas e imagem recuperada para a haste	
		diagonal.	110
FIGURA	78 –	Imagens da haste nas três orientações testadas, após junção de linhas.	.10
FIGURA	79 -	Teste com as letras 'INRS'	111

FIGURA 80 – Antena segurada em frente do foto detector durante a gravação dos
dados
FIGURA 81 – Gravação das linhas de uma antena sendo rotacionada em 270 graus. 112
FIGURA 82 – Rotação da antena para diferentes parâmetros σ
FIGURA $$ 83 – Quadros consecutivos de uma aquisição contínua, agrupados em pa-
res e separados em seis colunas para melhor visualização. \ldots 114
FIGURA 84 – Quadros consecutivos de uma aquisição contínua, separados em pa-
res. As elipses em vermelho destacam a presença dos fantasmas na
borda dos quadros, alternando de acordo com a paridade do quadro. 114
FIGURA 85 – Sobreposição de séries temporais ao longo de uma gravação longa. $$. 115

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ASAP	Accelerated by Swept Aggregate Patterns
DAQ	Data Acquisition
DMD	Digital Micromirror Device
DOIT	Derivative Optical Imaging Technique
2DOIT	Double Derivative Optical Imaging Technique
FFT	Fast Fourier Transform
GPOEF	Grupo de Propriedades Ópticas Eletrônicas e Fotônica
GRI	Globalink Research Internship
GRA	Globalink Research Award
INRS	Institut national de la recherche scientifique
LACI	Laboratory of Applied Computational Imaging
SPI	Single-Pixel Imaging
SPIFI	SPatIal Frequency modulation for Imaging
THz	Terahertz

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO 14
2 2.1 2.2 2.3 2.4	IMAGEAMENTO DE FOTODETECTOR ÚNICO (SPI)19Imagens digitais são números19Sensoriamento Compressivo23O problema da inversão29Matrizes de SPI30
3 3.1 3.2	SPI EM ALTAS VELOCIDADES
4 4.1 4.2 4.3	CODIFICAÇÃO CONTÍNUA50Técnica de Imageamento Óptico Derivativa (DOIT)50Discretização50Modelos de aceleração do DOIT58
5 5.1 5.2 5.3 5.4	DERIVANDO UM SISTEMA MAIS RÁPIDO 60A base teórica do 2DOIT60Modulação simultânea60Formulação matricial64Aproximação Binária74
6 6.1 6.2	SIMULAÇÕES DO 2DOIT
6.2.1	Geração de sinal pelo Blender por traçado de raios
6.2.2	Geração de sinal pelo Blender por geometria $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots $ 82
6.2.3	Analisador de quadros
$6.2.4 \\ 6.3$	Geração de sinal por integral numérica89Correções de sincronia92
6.3.1	Múltiplos incompatíveis
6.3.2	Fase relativa
6.3.3	Oscilações de frequência
$6.3.4 \\ 6.4$	Fenda ideal
7 7.1 7.2 7.3	EXPERIMENTANDO COM O 2DOIT 102 Montagem experimental 102 Limitações 102 Resultados 100
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE FUTURO DO 2DOIT 117
REFER	ÊNCIAS

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros dispositivos capazes de gravar imagens permanentemente datam dentre o final do século XVIII e o início do século XIX com o surgimento das câmeras [1]. Ao permitir que luz entre numa cavidade apenas por um pequeno orifício, ocorre o efeito de câmara escura, projetando uma imagem do exterior a partir do orifício sobre um filme de pigmentos fotossensíveis. Quanto maior o tempo de exposição, maior o número de pigmentos ativados, e sua distribuição espacial é proporcional ao perfil de intensidade projetado. No início, era necessário horas para gravar uma imagem, requerendo uma cena estática. Ao longo das décadas, essa tecnologia foi progressivamente aprimorada ao ponto em que é possível registrar imagens sobre um filme na ordem de milissegundos. Pode-se dizer que isso é uma forma de "imageamento contínuo", pois não há uma grade definida de valores de intensidade, podendo ser dividida arbitrariamente até o nível molecular. É claro, o limite de precisão da fotografia analógica ocorre muito antes dessa escala, pois há limitantes relacionados à composição química do filme, além da resolução óptica do sistema ser limitada pela capacidade dos seus componentes de distinguir dois pontos,

que por sua vez é limitada pela difração. Com o advento das câmeras digitais, os filmes foram substituídos por matrizes de células (pixels) capazes de converter energia luminosa em impulsos elétricos, usados para construir um arquivo de imagem. A resolução do sistema continua determinada pela óptica, mas o espaço correspondente à imagem agora é discretizado, e o tamanho do quadro é determinado pelo número de pixels, como mostra a Figura 1.

Apesar de sua grande sofisticação, as câmeras de luz visível modernas não são apropriadas para imagear em muitas aplicações, como quando há alto espalhamento de luz pela cena, uma vez que a luz de uma fonte pontual, sem espalhamento, seria focalizada numa região muito pequena da matriz da câmera (idealmente apenas um pixel), mas sob espalhamento há redirecionamento dessa luz para múltiplos pixels vizinhos causando desfoque. Além do espalhamento, muitos fenômenos de interesse são opacos à luz visível, o que sugere o uso de outras faixas do espectro da radiação eletromagnética. Exceto por algumas faixas do infravermelho, é muito mais custoso construir um dispositivo com múltiplos fotodetectores, em especial no regime de terahertz (0.1 a 10 THz), pelo qual há amplo interesse [2] devido à sua capacidade de penetrar a maior parte dos materiais não condutores, assim como de atravessar a pele (limitada pelas regiões mais densas em água [3]), o que levou à busca por aplicações industriais, biomédicas, farmacêuticas, de inspeção de segurança [4], etc. Por ser uma faixa de comprimentos de onda de centenas a milhares de vezes maior que o espectro de luz visível, a difração é um efeito muito mais relevante. Mesmo assim, há trabalhos demonstrando imageamento em escalas abaixo do Figura 1 – Processo de imageamento digital. (a) Fonte de luz (não necessariamente monocromática); (b) Objeto (letra 'a'); (c) Lente(s) de imageamento, que focalizam raios partindo de pontos diferentes em regiões distintas; (d) Matriz de 13 × 13 detectores (cada célula pode ser composta de detectores com sensibilidade diferente, como por exemplo, com picos em vermelho, verde e azul, formando o sistema de cores RGB.); (e) A luz coletada por cada detector ao longo de uma janela de tempo resulta em sinais com intensidades diferente. Ao agrupá-los em uma matriz 13 × 13 e definindo uma escala de cor (neste caso, uma escala cinza, onde o preto e branco estão associados aos valores mínimo e máximo, respectivamente), obtém-se uma imagem. Caso o objeto esteja desfocalizado, a luz refletida difusamente de um ponto pode atingir detectores vizinhos ao que seria esperado, o que resultaria em uma perda de nitidez.



Fonte: : O autor.

comprimento de onda ao utilizar um feixe óptico para limitar a interação da radiação THz com a amostra [5]. Há um crescente número de trabalhos sobre imageamento em terahertz desde o final da década de 1990, buscando consolidar a aplicabilidade dos diversos modelos de imageamento em comprimentos de onda distintos [6].

As técnicas de imageamento por medições ponto-a-ponto (*raster scan*), como é o caso da maior parte das técnicas inicialmente desenvolvidas no regime THz, podem ser consideradas como os modelos mais primitivos de imageamento de fotodetector único ou *single-pixel imaging* (SPI) [7], e podem demorar vários minutos para serem completadas. Para que haja a varredura, basta haver movimento relativo entre feixe e amostra. A trajetória dessa varredura pode ser de movimentos discretos e pausados ou em um movimentos contínuos como um *zig-zag*, uma onda dente de serra (como na Figura 2), uma onda senóide, etc. cada uma com seus prós e contras em relação à região total varrida. Porém, sistemas que movem o feixe podem ser mais facilmente acelerados com o uso de espelhos galvanométricos [8, 9], ou poligonais [10]. Com um número N de medições em posições diferentes, é possível compor uma matriz de N pontos de intensidades que corresponde ao perfil espacial da grandeza que altera a quantidade de luz recebida (em relação a uma medição sem amostra), como de transmissividade ou refletividade.

Figura 2 – Exemplo de trajetória de feixe no raster scan. Neste caso, o feixe (ou a amostra) se desloca em passos discretos, permitindo que o fotodetector colete luz por um tempo especificado em cada um dos pontos (em vermelho), seguindo uma trajetória de dente de serra (em ciano). Alternativamente, poderia haver um deslocamento continuo ao longo das linhas horizontais e/ou um passo discreto para baixo ao terminar uma linha, ao invés de realizar-se um movimento diagonal.



Fonte: : O autor.

Em 2008, ao se introduzir a codificação de informação através da iluminação estruturada [7] e a decodificação em sub-amostragem graças ao sensoriamento compressivo [11], eliminou-se a necessidade de um componente mecânico de translação feixe-amostra. Ao se referir ao campo de SPI, a maioria dos autores se refere às técnicas que se baseiam nesses princípios. As distinções fundamentais entre o imageamento tradicional e o imageamento de fotodetector único ou *single-pixel imaging* se tornam mais claras no Capítulo 2. O surgimento das teorias que fundamentam o funcionamento das técnicas de SPI ocorreu antes da sua realização ser viável na prática [12], evidenciando que este é um campo que requer precisão de equipamentos e poder computacional que só se tornaram acessíveis nas últimas décadas. Os princípios de codificação SPI são apresentados de forma generalizada, iniciando a discussão de forma puramente matemática. Também são discutidas as propriedades especiais que permitem reconstruir imagens com uma quantidade de dados menor que o número de pixels de uma imagem.

A capacidade de dispositivos reais de realizarem codificações compatíveis com SPI sobre a luz é abordada no Capítulo 3. Em particular, discute-se sobre a velocidade de codificação e aquisição da imagem, apresentando brevemente os primeiros modelos até chegar no recordista atual, o SPI-ASAP [13], que consegue produzir imagens da ordem de dezenas de pixels a centenas de quadros por segundo. Neste texto, portanto, o SPI-ASAP é a referência principal que estabelece o estado da arte dos sistemas SPI. A velocidade e a taxa de quadros de um sistema possuem significados distintos, pois a primeira se trata dos processos mecânicos e digitais de codificação e decodificação do sinal, enquanto a outra cresce conforme o intervalo temporal entre quadros consecutivos diminui, seja ao vivo ou em processamento *offline*. Nesse contexto, porém, a afirmação de que um sistema é veloz deve ser interpretada como a capacidade de alcançar taxas de quadros similares às do SPI-ASAP.

Graças a um estágio proporcionado pela Mitacs em parceria com a Fundação Araucária, pude ir até o lugar de origem dessa técnica, o *Laboratory of Applied Computational Imaging* (LACI) no *Institut national de la recherche scientifique* (INRS) em Varennes, no Canadá. O estágio consistiu em construir uma réplica do sistema e operá-lo em um novo recorde de velocidade. Nesse processo, foi possível sentir em primeira mão as dificuldades envolvidas no alinhamento óptico e as limitações dos dispositivos, além de empecilhos imprevistos vindo da óptica que tornam seu funcionamento delicado. Esses aprendizados foram de grande relevância para entender os requisitos para desenvolver um novo sistema SPI de alta velocidade.

No Capítulo 4, será apresentada a *Derivative Optical Imaging Technique* (DOIT) [14], desenvolvida por membros e colaboradores do Grupo de Propriedades Ópticas Eletrônicas e Fotônica (GPOEF) da Universidade Federal do Paraná, para a qual eu fiz contribuições teóricas. A DOIT se revelou ser uma nova classe de técnicas de SPI, que se encontra entre os métodos mais primitivos de varredura e os de aquisição codificada. A tarefa inicial de suporte computacional com o processamento e análise das imagens evoluiu para uma busca pela melhoria do sistema, requerendo um aprofundamento na matemática que descreve o sistema, apresentada em detalhes aqui, e na elaboração de modelos alternativos que poderiam acelerar a geração das imagens, a fim de tornar a DOIT mais competitiva para aplicações envolvendo imageamento de objetos móveis.

A inacessibilidade de alguns componentes dos modelos alternativos elaborados para o DOIT culminaram em uma ideia simples que elimina por completo a necessidade de deslocamento relativo entre o feixe e a amostra: a modulação dupla e simultânea. No segundo semestre de 2024, realizei um estudo sobre as condições matemáticas e físicas para que um novo sistema fosse viabilizado, resultando na *Double Derivative Optical Imaging Technique* (2DOIT), introduzida no Capítulo 5. Neste capítulo, demonstra-se que essa nova técnica pode também ser representada com o princípio de codificação bidimensional, mas que sua matriz de medição ideal associada é problemática. Uma simplificação aparentemente ingênua reduz as operações matriciais a uma tomada de derivadas em dois eixos, e a validade dessa decodificação é testada em dados gerados por simulações, abordadas no Capítulo 6. O preço da simplicidade desse sistema é o de distorções, que podem ser mais ou menos relevantes a depender dos parâmetros do sistema e da montagem experimental. Discute-se também como corrigir a separação de dados para cada tipo de imperfeição na sincronização e movimento dos moduladores.

Os resultados simulacionais foram muito positivos e indicaram que seria possível obter imagens maiores e/ou mais rapidamente que o SPI-ASAP. Embora isso já indicasse

um sucesso da missão de acelerar o DOIT e seria conteúdo suficiente para esta dissertação, faltava uma comprovação experimental para a 2DOIT. Ainda a tempo da escrita desta dissertação, surgiu a oportunidade de ter um sistema 2DOIT construído por outros alunos do GPOEF em um laboratório do INRS. Extendeu-se então o escopo desta dissertação: queríamos validar o sistema nos melhores parâmetros de taxas de quadros e tamanhos de imagens que fossem possíveis com o equipamento disponível. Sob a minha orientação e análise de dados remota, realizaram-se os testes iniciais de imageamento, cujos resultados promissores são apresentados no Capítulo 7. Mesmo com as limitações do equipamento utilizado, foi possível provar o conceito e verificar as previsões teóricas em relação às imperfeições de sincronia que causam instabilidades na posição dos pixels, e atingir o que possivelmente é o novo recorde mundial de velocidade de técnicas de SPI para um tamanho de quadro na ordem de dezenas de pixels. O Capítulo 8 conclui este trabalho com uma discussão sobre o futuro do 2DOIT, com suas aplicações e os caminhos habilitados pelo seu sucesso.

2 IMAGEAMENTO DE FOTODETECTOR ÚNICO (SPI)

2.1 IMAGENS DIGITAIS SÃO NÚMEROS

Para entrar na matemática das técnicas de SPI, faz-se necessário primeiro entender imagens digitais como objetos matemáticos. Como apresentado brevemente na Figura 1, as imagens são constituídas de matrizes com valores de intensidade, que determinam as cores dispostas por cada pixel em um monitor, por exemplo. Por simplicidade, tratar-se-á apenas do caso monocromático, que corresponde também à grande maioria dos resultados produzidos por técnicas de SPI. Como mostra a Figura 3, uma dada imagem \mathbf{X} de largura w e altura h, numa escala cinza de 0 a 100, para preto e branco, respectivamente, é equivalente a uma matriz ($w \times h$).

Figura 3 – Representação matricial de uma imagem em escala cinza. Os pixels destacados em ciano nos cantos superior e inferior esquerdos correspondem aos elementos de matriz também destacados em ciano.



Fonte: : O autor.

Sendo assim, é possível definir uma operação de remapeamento, "Remap(objeto, (dimensões))", que reorganiza um objeto matemático, preservando o seu número de elementos. Partindo da matriz \mathbf{X} , pode-se então obter como um vetor linha \vec{x} (equivalente a uma matriz $(w \cdot h \times 1)$):

$$\operatorname{Remap}(\operatorname{matriz}, (\operatorname{linhas}, \operatorname{colunas})) = \operatorname{Remap}(\mathbf{X}, (1, w \cdot h)) = \vec{x}, \quad (2.1)$$

resultando em uma faixa unidimensional em escala cinza, com o mesmo número de componentes da matriz, como mostra a Figura 4.

É possível ir além da reorganização de elementos. Sendo matrizes, as imagens podem passar pelas operações matemáticas de adição, subtração e multiplicação, assim como outras operações definidas a partir delas, como a convolução discreta, contanto que sejam definidas de tal forma a nunca extrapolar os limites da escala, ou tomando como regra sempre normalizar o resultado. Portanto, todo o arcabouço matemático da álgebra Figura 4 – Representação vetorial de uma imagem em escala cinza após a operação de remapeamento. A primeira linha da imagem (os 15 primeiros elementos) estão destacados em verde em ambas as representações.





linear se aplica às teorias de processamento de imagens. Consideremos então que a imagem \mathbf{X} ($w \times h$) pode ser decomposta em outras imagens, que, combinadas através de operações matemáticas, resultam novamente na imagem original. Com o rosto desenhado nas figuras de exemplo, é possível sepára-lo em contorno, boca e os dois olhos, compondo um conjunto de matrizes {**M**}. Essa não é a única maneira de decompor a imagem. Poderia-se usar os quatro quadrantes a partir do centro, ou um número de N_M grupos de pixels distintos, como mostra a Figura 5, a um máximo de $N = w \cdot h$ grupos (nesse caso, cada imagem corresponderia apenas a um pixel da imagem original, se apenas a soma e não a subtração está sendo considerada).

Figura 5 – Uma imagem como a soma de outras imagens: das formas principais; de quatro quadrantes; de quatro grupos escolhidos de forma arbitrária.



Fonte: : O autor.

De forma similar à adição, é possível definir uma multiplicação de imagens, que não deve ser confundida com a multiplicação usual de matrizes. A multiplicação da imagem \mathbf{X} com uma matriz \mathbf{M}_i pode ser pensada como o produto elemento-a-elemento entre as duas [15], de forma que os elementos próximos do valor branco são fatores de 1, e os do preto, fatores próximos de 0. Sendo assim, apenas as regiões brancas de \mathbf{M}_n que coincidirem com as regiões brancas de \mathbf{X} tendem a sobreviver à operação, e os pixels restantes tendem a zero (Figura 6a). Esse resultado pode ser interpretado como uma medida de coincidência entre as duas imagens. Sendo o caso, o conjunto { \mathbf{M} } não precisa necessariamente ser um conjunto de matrizes construídas a partir de \mathbf{X} , ao invés disso, podem ser padrões definidos por fórmulas, rabiscos desenhados manualmente ou ruídos gerados aleatoriamente. A soma desse conjunto de imagens de coincidência $\{\mathbf{Y}\}$ resulta então em uma reconstrução aproximada de \mathbf{X} , como mostra a Figura 6b. Matematicamente [15],

$$\mathbf{Y}_{n}[y,x] \equiv \mathbf{X}[y,x] \cdot \mathbf{M}_{n}[y,x]$$
(2.2)

Figura 6 – Produtos da imagem de teste com: (a) partes da própria imagem; (b) Com imagens aleatórias, resultando em um conjunto $\{\mathbf{Y}\}$. À direita, a soma normalizada de todos as as imagens de $\{\mathbf{Y}\}$.



Fonte: : O autor.

Quanto maior o número de multiplicações utilizadas na reconstrução, potencialmente melhor será a reconstrução. Se $\{\mathbf{M}\}$ possuir ao menos $w \cdot h$ matrizes, e nenhuma dessas matrizes puder ser obtida através de combinações entre outras matrizes do conjunto, então $\{\mathbf{M}\}$ deve ser capaz de descrever completamente \mathbf{X} a partir de uma combinação de todos os seus elementos (e nesse caso, as matrizes receberão pesos, positivos ou negativos, no somatório). Cada \mathbf{M}_n , possui uma representação de vetor. Se organizado como um vetor-linha \vec{m}_n de dimensão ($w \cdot h \times 1$), tem-se:

$$\vec{m_n} \equiv \text{Remap}(\mathbf{M}_n, (1, w \cdot h)).$$
 (2.3)

É possível então definir uma matriz \mathbf{A} de dimensão $(w \cdot h \times N_M)$, sendo cada linha de \mathbf{A} a representação vetorial de cada elemento de { \mathbf{M} }, ou seja, \mathbf{A} é um remapeamento do conjunto { \mathbf{M} }, como mostra a Figura 7. Em termos da função Remap:

$$\mathbf{A} \equiv \operatorname{Remap}(\{\mathbf{M}\}, (N_M, w \cdot h)). \tag{2.4}$$

Agora, fazendo o remapeamento de **X** para um vetor coluna, é possível multiplicálo pela matriz **A** (sob a regra convencional de multiplicação de matrizes) e verificar o resultado. Como a *n*-ésima linha de **A** é determinada a partir \vec{m}_n , o resultado desse Figura 7 – Construção da matriz \mathbf{A} a partir do remapeamento do conjunto { \mathbf{M} } em vetoreslinha. A primeira matriz \mathbf{M} está com as linhas coloridas para facilitar a visualização do remapeamento.



Fonte: : O autor.

produto é:

$$\mathbf{A}\vec{x} \equiv \vec{s} \tag{2.5}$$

$$s_n = [\mathbf{A}\vec{x}]_n = m_n[1]x[1] + m_n[2]x[2] + \dots + m_n[w \cdot h]x[w \cdot h]$$
(2.6)

$$s_n = [\mathbf{A}\vec{x}]_n = \sum_{k}^{w \cdot n} m_n[k]x[k] \equiv \vec{m}_n \cdot \vec{x}$$
(2.7)

$$s_n = [\mathbf{A}\vec{x}]_n = \sum_i^h \sum_j^w \mathbf{M}_n[i,j] \cdot \mathbf{X}_n[i,j], \qquad (2.8)$$

ou seja, o *n*-ésimo componente do vetor \vec{s} é o produto interno entre os vetores-imagem \vec{m}_n e \vec{x} , o que é equivalente à soma de todos os pixels do produto de \mathbf{M}_n com \mathbf{X} . Enquanto o produto definido na Equação 2.2 resultava em uma imagem inteira como medida de coincidência, aqui há apenas um único valor por matriz. Faz-se útil então o conceito de matriz inversa, que torna possível (em princípio) uma reconstrução de \mathbf{x} :

$$\vec{s} = \mathbf{A}\vec{x} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{s} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{s} = \vec{x} \tag{2.11}$$

Contanto que o conjunto {**M**} seja capaz de representar **X** a partir de combinações entre seus elementos. Para que **A** seja invertível, os vetores \vec{m}_n que formam suas linhas devem ser linearmente independentes. Isso é o mesmo que dizer que nenhum \vec{m}_n pode ser obtido pela combinação de outros vetores. Por consequência, se **A** possuir $N = w \cdot h$ linhas e for invertível, a base {**M**} é capaz de descrever **X** por completo. A consequência dessas equações é que deve ser possível reconstruir qualquer imagem a partir das medidas de coincidência s_n , contanto que {**M**} seja bem construída e conhecida. De forma mais geral, especialmente se $N_M < N$, obter-se-á uma aproximação de \vec{x} :

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{s} \approx \vec{x} \tag{2.12}$$

Resta então verificar em quais condições essa aproximação é satisfatória.

2.2 SENSORIAMENTO COMPRESSIVO

Nesta Seção, a fim de discutir os trabalhos que viabilizaram a coleta de medidas de coincidência agrupadas para a reconstrução de imagens, como indica a Equação 2.12, serão introduzidos raciocínios semelhantes aos apresentados anteriormente, em termos mais abstratos da teoria da informação e do processamento de sinais. A revolução nas técnicas de SPI tem suas origens no campo de processamento de sinais e teoria da informação. O teorema da amostragem de Nyquist-Shannon estabelece que, para reproduzir uma onda senóide de frequência f a partir de uma série de medidas, a aquisição dos dados precisa ocorrer em uma frequência f_s ao menos duas vezes maior que a frequência de tal onda [16], do contrário ocorrerá uma distorção denominada *aliasing* que impede a determinação da frequência original, como ilustra a Figura 8.

Figura 8 – Fenômeno de aliasing na conversão de um sinal analógico (à esquerda) em digital (à direita). Os retângulos pintados de preto (mínimo) ao branco (máximo) representam os valores associados a intervalos distintos, em uma escala comum. As barras em magenta indicam o período de aquisição, sendo o valor associado proporcional ao sinal analógico integrado (área sob a curva). No primeiro caso, a frequência de aquisição é $f_s > 2f$, e esse descompasso faz com que o sinal integrado em cada intervalo de tempo não seja binário. No entanto, ao redimensionar os 14 valores para 12 (downsampling), a frequência da onda original se preserva. No caso $f_s = 2f$, a reconstrução é perfeita. Para $f_s < 2f$, redimensionar os 10 valores para 12 (upsampling) resulta em um sinal desfigurado, que não pode ser descrito como tendo frequência f sem informações prévias.





Esse exemplo é generalizado pelos princípios da teoria de Fourier, na qual qualquer sinal pode, em princípio, ser representado por uma combinação de ondas senóides com frequências arbitrariamente grandes. Logo, a frequência de amostragem precisa ser pelo menos duas vezes maior que a componente de maior frequência do sinal, e se essa condição é satisfeita, deve ser possível distinguir suas características totalmente, enquanto que um sinal coletado a uma taxa menor as receberá comprimidas, combinando-se construtiva ou destrutivamente, resultando em um sinal desfigurado em relação ao original. Foi na tentativa de ir contra essa limitação que o campo de **sensoriamento compressivo**

(compressed sensing ou CS) surgiu.

O sensoriamento compressivo, como definido por David Donoho [17] em 2006, baseia-se na seguinte linha de raciocínio: Seja \vec{x} um sinal de N elementos a ser recuperado. A partir de uma matriz \mathbf{A} , cujas linhas são vetores $\vec{\phi}$, de mesma dimensão N e que compoem uma base linearmente independente, deve ser possível escrever \vec{x} como uma combinação linear de $\{\vec{\phi}\}$, onde os coeficientes α_n de cada vetor são dados pelos seus produtos internos com \vec{x} , ou seja:

$$\vec{x} = \sum_{n}^{N} (\vec{\phi}_n \cdot \vec{x}) \vec{\phi}_n = \sum_{n}^{N} \alpha_n \vec{\phi}.$$
(2.13)

Se \vec{x} é um vetor coluna, e cada linha de **A** é um dos vetores da base, então o conjunto dos produtos internos, representado pelo vetor $\vec{\alpha}$, resulta da operação:

$$\vec{\alpha} = \mathbf{A}\vec{x},\tag{2.14}$$

então se $\vec{\alpha}$ é conhecido, e a matriz **A** é invertível, então é possível isolar \vec{x} :

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x},\tag{2.15}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{\alpha} = \vec{x},\tag{2.16}$$

assim como discutido na Seção 2.1. Agora, é possível pensar em uma base escassa (*sparse*), no sentido de que a maior parte dos vetores da base possuem coeficientes próximos ou iguais a zero, e, portanto, uma boa aproximação de \vec{x} pode ser obtida com uma base efetiva de $M \ll N$ vetores. Por consequência, se for possível medir apenas os valores dos coeficientes relevantes α_m , basta considerar os demais elementos de $\vec{\alpha}$ como zero e utilizar a Equação 2.16 para recuperar \vec{x} com boa precisão utilizando apenas M amostragens.

No texto de Donoho, ainda há um extenso desenvolvimento matemático para demonstrar que quase todas as matrizes invertíveis podem ser utilizadas para sensoriamento compressivo, ao ponto que quanto maior N, menor a probabilidade de que uma matriz gerada a partir de uma distribuição uniformemente aleatória (gaussiana) não ser compatível com CS [17]. Trabalhos no mesmo período, como o de Emmanuel Candès [18, 19, 20], chegaram em conclusões semelhantes e generalizaram os princípios do CS para outros ensembles de medições aleatórias, como a partir de matrizes (-1, +1) geradas com distribuições de Bernoulli, matrizes binárias (0, 1) e matrizes geradas a partir da transformada de Fourier discreta, assim como condições e medidas para estimar a efetividade da decodificação em função da razão de amostragem M/N, em particular a propriedade de isometria restrita (restricted isometry property ou RIP): seja **A** de dimensão $N \times N$ a matriz que representa a base dos vetores utilizados na codificação de um sinal qualquer $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ com no máximo $k \geq 1$ componentes não-nulas, e **A**' uma seleção de M vetores de **A** (ou seja, possui dimensão $M \times N$). A matriz **A** possui RIP de ordem k e constante $(1 - \delta) \|\vec{x}\|^2 \le \|\mathbf{A}'\vec{x}\| \le (1 + \delta) \|\vec{x}\|^2, \qquad (2.17)$

para a qual norma utilizada é definida como o comprimento euclideano do vetor:

 $\delta \ (0 \le \delta \le 1)$ se:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2},$$
(2.18)

$$\|\mathbf{A}'\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i}^{M} (\mathbf{A}'\vec{x})_{i}^{2}}.$$
 (2.19)

Então a propriedade se trata da capacidade da codificação de preservar o comprimento entre os espaços de dimensão distinta (isometria) restrita a um intervalo de confiança, de forma que a razão entre a norma do objeto real \vec{x} e o objeto codificado $A'\vec{x}$ estão no intervalo $(1 \pm \delta)$. Candès então prossegue para afirmar que se **A** possui essa propriedade, então o número de medidas para se obter uma reconstrução fiel está relacionado com k. Essa propriedade também está relacionada com a "quase ortogonalidade" entre todas as linhas de **A**. Provar essa propriedade para uma matriz qualquer não é simples. Para as distribuições aleatórias gaussianas e de Bernoulli, a relação foi demonstrada como sendo:

$$\mathcal{O}(k) = M\left(\ln\left(\frac{N}{M}\right)\right)^{-1},$$
(2.20)

onde $\mathcal{O}(k)$ indica a ordem de grandeza de k. No ano seguinte, pensando na problemática de utilizar variáveis aleatórias em circuitos, Ronald DeVore [21] introduziu as matrizes construídas de forma determinística no contexto de CS. Elas serão discutidas na Seção 2.4.

É por ser possível encontrar uma base de M < N vetores, onde N é o número total de pixels de uma imagem, que torna-se viável a compressão de imagens em formatos como o JPEG, que armazena os coeficientes de uma transformada discreta em cossenos, ao invés de armazenar os valores de pixels individuais. Em muitos casos, a perda de qualidade causada pela compressão é irrelevante, e mesmo a uma porcentagem baixa de amostragem ainda é possível discernir todos os detalhes relevantes de uma imagem, como mostra a Figura 9.

Foi na tentativa de coletar sinais comprimidos que o campo de imageamento de fotodetector único ou single-pixel imaging (SPI) floresceu para além do raster scan. Sua inauguração pode ser creditada ao artigo de Duarte et. al. [7, 11], no qual apresentou-se a primeira montagem experimental capaz de comprimir a informação espacial de um objeto em sinais escassos, coletados por um único fotodiodo, de forma que o sinal corresponde aos produtos internos de M vetores de uma matriz com um campo \mathbf{x} representando a reflectividade do objeto, discretizado em N = pq regiões. Isso é possível com o uso de um digital micromirror device (DMD), uma malha de espelhos que podem adquirir orientações neutras (a mesma que a da face frontal do dispositivo), positivas ou negativas em relação a um eixo, como mostra a Figura 10. Figura 9 – Comparação de tamanho de arquivo da fotografia Cameraman em 512×512 pixels sob diferentes níveis de compressão JPEG, em contraste com o formato PNG.



Fonte: : O autor.

Figura 10 – Esquemática da matriz de espelhos de um DMD. (a) Tela do DMD; (b) Espelhos em orientação "positiva"ou "negativa"vistos da mesma perspectiva de (a); (c) Espelhos vistos no plano de incidência da luz; (d) Espelho em orientação neutra (alinhado ao plano A da tela).



Fonte: : Adaptado de 'DLP7000 DLP @ 0.7 XGA 2x LVDS Type A DMD'.

Utilizando uma base **A** de vetores ϕ_m *N*-dimensionais binários (com componentes de valor 0 ou 1), basta redimensionar cada um deles para uma matriz Φ_m ($p \times q$) e ativar os espelhos do DMD com uma disposição equivalente a essa matriz. Ao incidir luz sobre um objeto, de forma que ela é refletida na direção do DMD, e colocar um detector na direção em que a luz dos espelhos de valor 1 é refletida, o sinal coletado é proporcional à soma das multiplicações elemento-a-elemento de *X* por Φ_m , o que equivale ao produto interno entre os vetores $\vec{x} \in \phi_m$:

$$\alpha_m = \sum_i^q \sum_j^p \Phi_m[i,j] \mathbf{x}[i,j] = \vec{\phi_m} \cdot \vec{x}.$$
(2.21)

A partir disso, aplica-se a Equação 2.16 para reconstruir X. Por conter os vetores associados a cada sinal, a matriz **A** é chamada de **matriz de medição**. Ela pode ser interpretada como o conjunto de configurações únicas do modulador espacial de luz em relação ao Figura 11 – Matrizes envolvidas no processo de codificação e decodificação. (1) Parte-se de uma matriz de medição \mathbf{A} , cujas linhas formam uma base linearmente independente. (2) Faz-se uma seleção de M < N linhas (aqui, um terço de N), e constrói-se com elas uma matriz \mathbf{B} . A matriz \mathbf{A}' representa essa seleção sobre \mathbf{A} , com as linhas descartadas em preto. (3) A imagem, representada pela matriz \mathbf{x} , é transformada em um vetor coluna x, e multiplicada pela matriz de medição \mathbf{B} , resultando em um novo vetor coluna y, de dimensão igual ao número de linhas de \mathbf{B} . (4) Calcula-se a pseudoinversa \mathbf{B}^{-1} . (5) O produto $\mathbf{B}^{-1}y$ resulta numa aproximação x' de x, que então é transformada em uma imagem \mathbf{x}' .



No caso de bases aleatórias, sem que haja um algoritmo de seleção otimizada, decodificar o resultado com \mathbf{A}^{-1} pode resultar em uma imagem ruidosa e possivelmente incompreensível. Como \mathbf{A}'^{-1} não é invertível, pode-se utilizar uma matriz \mathbf{B} sem as linhas nulas $(N \times M)$ e então calcular sua pseudoinversa \mathbf{B}^{-1} para fazer a decodificação. A pseudoinversa possui dimensões $(M \times N)$ e é calculada através da decomposição de valores singulares, definida na Seção seguinte, e se faz necessária pois \mathbf{B} é uma matriz retangular, não sendo compatível com o processo de inversão da mesma maneira que as matrizes quadradas. No entanto, para dimensões pequenas de imagem, a validade da estatística demonstrada nos teoremas de Candès é enfraquecida, resultando em uma imagem em que se mal consegue identificar o formato da letra 'a'. A Figura 12 mostra pares de resultados para as dimensões $40 \times 40 = 1600$ pixels e $70 \times 70 = 4900$ pixels, na qual a letra é escalada com o tamanho do quadro ou mantida no mesmo tamanho da Figura 11. Observa-se uma melhora de qualidade com a escala da imagem, e o contraste aumenta ao se manter a letra 'a' com o mesmo número de pixels da letra. Isso pode ser interpretado como um aumento da "escassez" de \mathbf{x} no espaço \mathbf{A} , enquanto que escalar o tamanho da letra com o tamanho do quadro não melhora essa propriedade tão significativamente.

Figura 12 – Decodificação em sub-amostragem para número de pixels de 1600 (esquerda) e 4900 (direita), para a letra 'a' em escala com o quadro (primeira) e mantida em tamanho constante (segunda). A imagem de referência está acima dos resultados.



Fonte: : O autor.

Um dos desafios principais do campo de SPI é então encontrar as bases de vetores que consigam reconstruir uma imagem qualquer a partir da menor razão de amostragem. A partir de um sinal teórico, é possível obter reconstruções com características distinguíveis com razões de amostragem tão pequenas quanto 5%, o que caracteriza um regime supersub-Nyquist [22], porém isso requer uma relação sinal-ruído que na prática não pode ser obtida, e os métodos atuais em geral não conseguem ultrapassar o limite inferior de aproximadamente 30%. Enquanto qualquer base deve ser capaz de reconstruir uma imagem com razão de amostragem igual a 1, a efetividade da reconstrução com uma razão menor pode não ser a mesma para diferentes tipos de imagens, e a ordem com que os vetores são selecionados pode aprimorar a velocidade da convergência do resultado [22].

De todo modo, a codificação de luz na forma de luz estruturada caracteriza uma **multiplexação** da informação [7] [11], isto é, agrupar canais de informação independentes (o valor da imagem em diferentes pontos) em um único sinal. Se o ruído intrínseco do detector e do ambiente forem independentes da intensidade do feixe, então combinar os sinais implica um fluxo de fótons pertencentes à medida muito maior, aumentando a razão sinal-ruido das medições, o que não ocorreria se a luz fosse distribuída em uma matriz de detectores (cada um com seu próprio ruído). Além disso, pela (assumida) independência dos padrões de codificação, não há prioridade em relação a quais medidas são feitas, pois a qualidade do resultado melhora cumulativamente com as medidas. Isso implica que não há uma medida específica que codifica uma determinada região do objeto, em completo

contraste com as técnicas de escaneamento, onde perder um ponto implica em um "buraco" na imagem, que precisa ser interpolado para ser recuperado.

2.3 O PROBLEMA DA INVERSÃO

Um dos problemas na aplicabilidade das matrizes de medição está no poder computacional necessário para gerá-las, assim como calcular suas matrizes inversas, e então armazenar ambas na memória de um computador. Consideremos uma imagem de $p \times q$ pixels. O número total de pixels é N = pq, e a matriz de medição associada **A** é de dimensão $N \times N$. Se p = q = 100, então **A** possui $(10^2 \cdot 10^2)^2 = 10^8$ elementos. Se a matriz for binária, cada valor pode ser guardado em um único bit de memória. Essa matriz iria requerer $10^8/(2^310^6) = 12,5$ MB de memória. Caso p = q = 1000, o valor subiria para 125 GB, sem contar o tempo de processamento e memória RAM necessários para calculá-la [19].

O conceito de **classe de complexidade** na ciência da computação serve para comparar o tempo estimado para uma máquina realizar diferentes tarefas [23] a partir de um parâmetro de escala N, que neste caso é o número de pixels. O tempo da eliminação de Gauss-Jordan para inversão de matrizes pode ser estimado como $\mathcal{O}(N^3)$, então para Ngrande é conveniente calcular as matrizes uma vez e mantê-las guardadas. Por envolver operações aritméticas entre números, esse tempo também varia com o número de dígitos e a precisão dos cálculos. A depender da matriz, os cálculos podem necessitar de truncagem e arredondamentos, e esses erros podem se acumular exponencialmente [24], ao ponto em que é impossível calcular inversas de certas classes de matrizes a partir de um certo Npara uma precisão de dígitos fixa, e nesse caso essa operação é considerada **numericamente instável**. É possível definir um "número de condição" κ que mede a sensibilidade de uma função a erros na sua variável de entrada [25]. Essa medida pode ser determinada a partir dos valores singulares { σ } de \mathbf{A} ao resolver a equação [26]:

$$\det\left(\lambda \mathbf{I} - \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{T}\right)\right) = 0, \qquad (2.22)$$

e tomando as raízes quadradas do conjunto de soluções $\{\lambda\}$. O número de condição é a razão entre o menor e maior valor singular [27]:

$$\sigma_n = \sqrt{\lambda_n},\tag{2.23}$$

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\max \sigma}{\min \sigma}.\tag{2.24}$$

Quanto maior o valor de κ , menor é a probabilidade de **A** ser invertível na prática. Os valores singulares de **A** podem ser utilizados para sua decomposição de valores singulares da matriz (*singular value decomposition* ou SVD). Seja **S** a matriz diagonal na qual o *n*-ésimo elemento é σ_n , e **U** e **V** matrizes cujas colunas são os vetores que satisfazem

 $\mathbf{A}u = \sigma u \in \mathbf{A}^T v = \sigma v$. Se $u \in v$ formarem bases ortogonais, $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathbf{T}} = \mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$ e então é possível fazer a inversão de \mathbf{A} a partir de:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T,\tag{2.25}$$

$$\mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T,$$
(2.26)

$$\left(\mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^{T}\right)\mathbf{A} = \mathbf{I},\tag{2.27}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{A} = \mathbf{I},\tag{2.28}$$

$$\therefore \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T. \tag{2.29}$$

Mesmo por esse procedimento, é possível que \mathbf{A}^{-1} permaneça numericamente instável. É possível filtrar os valores de σ para construir A de tal forma que seu número de condição seja menor, o que retorna uma matriz "comprimida". Se seus elementos forem representados em um mapa de cor, é como se a imagem perdesse qualidade.

No entanto, no contexto do sensoriamento compressivo, já está se trabalhando com sinais escassos, sensíveis ao ruído. Introduzir erros nas matrizes de decodificação poderia comprometer por completo a capacidade de recuperar um sinal real. Por toda essa problemática, os estudos seguintes no campo buscaram matrizes que pudessem ser geradas com algoritmos simples e tivessem inversas tais que o algoritmo de decodificação não necessitasse guardar a matriz de medição em toda a sua extensão.

2.4 MATRIZES DE SPI

Apesar de ter sido concretizado em 2008 por Duarte *et. al.*, a ideia de multiplexação com iluminação estruturada através de padrões especiais para que o sinal de um detector seja decodificado é muito mais antiga. O uso de máscaras de codificação para espectroscopia tem suas origens na década de 1960 [28], assim como a proposta de codificação em sistemas de imageamento, a qual pode ser encontrada em extenso detalhamento no livro *Hadamard Transform Optics* de Martin Harwit [12], que previu corretamente o potencial da multiplexação muito antes da teoria de sensoriamento compressivo ser desenvolvida.

As matrizes de peso A, nas quais cada linha contém um conjunto de pesos w de valor -1, 0 ou 1 aplicada a um grupo de quantias que só são somadas em conjunto, se relacionam totalmente com o princípio de codificação. No caso óptico, as linhas de matrizes (0, 1) são as máscaras de codificação (redimensionadas) para um dado instante de tempo, e os pesos binários referem-se à transmissão, absorção ou reflexão totais da iluminação vinda de cada região discretizada do espaço, e o significado dos pesos depende de como a coleta dos dados é feita. Por exemplo, quando se coleta os dados após uma máscara que bloqueia seletivamente a iluminação, os valores 1 correspondem à transmissão, e 0 para absorção. No caso de uma matriz de espelhos como em um DMD, os valores 1 correspondem à

reflexão na direção de coleta, e 0 para a luz que é refletida no sentido oposto. As matrizes de peso (-1, 1), se referem ao caso em que se separa as quantias em dois instrumentos de medição distintos, e a medida resultante é a diferença entre os dois pesos totais. Nesse caso, os sinais se referem a qual instrumento de medição é utilizado, por exemplo, duas balanças de peso, uma à esquerda (-1) e outra à direita (+1), ou um detector que coleta a luz transmitida (+1) e outro que coleta a luz refletida (-1) após a interação com uma máscara. Ao se considerar que cada medida possui um erro independente do tamanho do agrupamento, é possível demonstrar que a menor variância σ^2 possível sob esse esquema ocorre quando a matriz de peso é uma matriz de Hadamard **H** de ordem N. Por exemplo, para o caso de N = 4, a matriz é:

Para N medidas multiplexadas com a matriz de Hadamard, a variância é N vezes menor em relação a medidas isoladas com o erros da mesma ordem de grandeza associadas. As matrizes de Hadamard possuem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{H}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{H}_N^T, \tag{2.31}$$

$$\mathbf{H}_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \text{se e somente se } N = 4k, \ k \in \mathbb{N}.$$
 (2.32)

Ao remover a primeira linha e coluna da matriz \mathbf{H}_N e trocar o valor de elementos +1 por 0 e os de -1 por 1, obtêm-se as matrizes-S cíclicas. Por exemplo, a partir de \mathbf{H}_4 :

$$\mathbf{S}_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
 (2.33)

Nota-se que esses pesos correspodem à única maneira de se medir três grandezas par-a-par sem redundâncias. A matriz pode ser reordenada de forma a não ser cíclica, porém essa propriedade garante que sempre é possível reordenar suas linhas para torná-la cíclica. As matrizes-S possuem a seguinte inversa:

$$\mathbf{S}_N^{-1} = \frac{2}{N+1} (2\mathbf{S}_N^T - \mathbf{J}_N), \qquad (2.34)$$

sendo $J_{ij} = 1 \quad \forall (i, j)$. Nesse caso, a variância pode ser demonstrada como sendo $(N + 1)^2/4N$ vezes menor do que para medidas isoladas. Como toda matriz de Hadamard é de ordem 4k, toda matriz-S é de ordem 4k - 1. Consideremos os primos gêmeos $p \in q = p + 2$.

Por todos os primos gêmeos serem ímpares, a aritmética modular diz que:

$$p \mod 4 = 1 \text{ ou } 3,$$
 (2.35)

$$q = p + 2 \implies q \mod 4 = 3 \text{ ou } 1, \tag{2.36}$$

$$pq \mod 4 = [(p \mod 4) \cdot (q \mod 4)] \mod 4, \tag{2.37}$$

$$pq \mod 4 = (3 \cdot 1 \text{ ou } 1 \cdot 3) \mod 4,$$
 (2.38)

$$pq + 1 \mod 4 = 3 + 1 \mod 4,$$
 (2.39)

$$pq + 1 \mod 4 = 0.$$
 (2.40)

Logo, se toda matriz-S é uma ordem a menos que sua matriz de Hadamard associada, então sua ordem é o produto de primos gêmeos. A matriz-S cíclica pode então ser gerada a partir de uma única sequência (pois é cíclica) de tamanho N = pq, utilizando a função quad(x, y), que verifica se x é um resíduo quadrático do número y, definida como [29]:

$$quad(x,y) = \begin{cases} se & x \mod y \neq 0, \\ -1 & caso \ contrário \end{cases} \begin{cases} 1 & se \ existe \ z \ tal \ que \ (x^2) \mod y = z \mod y \\ 0 & caso \ contrário \end{cases}$$
(2.41)

A partir disso, cada elemento da linha que define a matriz-S é calculado utilizando uma composição de funções dessa classe. Ao fim da sequência, as linhas seguintes correspondem ao deslocamento cíclico em um índice da linha anterior [13]:

$$S_{0,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } [\operatorname{quad}(j,p) - \operatorname{quad}(j,q)] \operatorname{quad}(j,q) = 0 \\ +1 & \text{caso contrário} \end{cases},$$
(2.42)

$$S_{i,j} = S_{0,k}, \quad k = (j-i) \mod pq.$$
 (2.43)

As matrizes resultantes para os primeiros primos gêmeos, assim como as máscaras associadas, estão dispostas na Figura 13.

Utilizando os primos gêmeos mais próximos das dimensões das imagens reconstruídas na Figura 12, uma qualidade similar (porém com padrões mais uniformes) pode ser obtida sob sub-amostragem das matrizes-S, como mostra a Figura 14.

Portanto, a grande vantagem das matrizes-S é prover padrões de codificação pseudo-aleatórios a partir de uma única sequência determinística. A decodificação pelo produto $\mathbf{B}^{-1}y$ pode ser substituída pela convolução circular discreta (denotada por \circledast) com o vetor da primeira linha de B^{-1} , ou de S^{-1} tomando passos de tamanho N/M caso Figura 13 – Representação gráfica das matrizes-S cíclicas para os primos gêmeos (1,3), (3,5), (5,7), (11,13) e (17,19) e a máscara associada à primeira linha das matrizes (preto = 0, branco = 1).



Fonte: : O autor.

Figura 14 – Decodificação em sub-amostragem com matrizes-S para número de pixels de 1600 (esquerda) e 4900 (direita), para a letra 'a' em escala com o quadro (primeira) e mantida em tamanho constante (segunda). A imagem de referência está acima dos resultados.



Fonte: : O autor.

a seleção de máscaras esteja igualmente espaçada:

$$\mathbf{B}^{-1}y = \left[y \circledast B_0^{-1}\right]_{\Delta j=1} = \left[y \circledast S_0^{-1}\right]_{\Delta j=\frac{N}{M}}.$$
(2.44)

Existem outras matrizes úteis para aquisição multiplexada, podendo até não serem compostas de números inteiros, como é o caso da transformada discreta de cossenos (DCT) - para um espaço $X \times Y$, existem XY frequências espaciais discretas distintas que podem ser distinguidas eixos $x \in y$, cada par gerando uma matriz (que se torna uma linha da matriz de medição). Quando não é possível utilizar um projetor [30], como em técnicas que utilizam DMDs binários, os valores não inteiros podem ser simulados através de superpixels, isto é, agrupamentos de pixels que produzem um efeito desejado [7]. Por exemplo, uma matriz com múltiplos inteiros de 1/4 pode ser simulada com super-pixels 2×2 , ativando apenas $k \leq 4$ pixels, e essa técnica é conhecida como dithering. Os padrões escolhidos podem introduzir defeitos característicos, no entanto. Para minimizar esses efeitos, é comum utilizar algoritmos de difusão de erro que levam em consideração toda a imagem (ou ao menos, regiões vizinhas) para melhor distribuir os pixels ativados [31, 32].

3 SPI EM ALTAS VELOCIDADES

Como apresentado até o momento, as técnicas comuns de *single-pixel imaging* se baseiam na codificação da luz através da estruturação a partir de uma base de vetores e na decodificação do sinal utilizando a matriz inversa da base. A princípio, qualquer sistema que consiga fazer a estruturação e separar devidamente os dados coletados é válido. Por exemplo, é possível imaginar os padrões das matrizes-**S** cíclicas impressos sobre um rolo de filme transparente, que fica esticado na região por onde passa o feixe de luz, e o movimento do rolo por um motor faz as máscaras serem trocadas a uma taxa quase linear. No entanto, dada a quantidade de medidas necessárias para a reconstrução de imagens na ordem das dezenas de pixels, isso pode ser imprático. Não é à toa que todos os trabalhos no campo utilizam moduladores espaciais de luz (*spatial light modulators* ou SLMs) como os *digital micromirror devices* (DMDs) para trocar os padrões sem a necessidade de componentes mecânicos para deslocamento no sistema. Mesmo assim, pelo número de dados escalar com o quadrado do comprimento do quadro, até mesmo os DMDs com a maior taxa de atualização começam a ser um limitante para a velocidade da geração de imagens a partir da ordem das centenas de pixels.

3.1 ALMEJANDO O LIMITE

A taxa de quadros f_r de um sistema SPI padrão pode ser determinada com base em algumas considerações. Primeiro, a taxa de aquisição f_s deve ser suficiente para coletar os M dados para a reconstrução com uma razão de amostragem M/N = s e com número de pontos por máscara $w \ge 1$:

$$f_s \ge Nwsf_r. \tag{3.1}$$

Na prática, o lado esquerdo da Desigualdade 3.1 apresenta valores muito maiores (da ordem de kS/s a MS/s) do que o lado direito. Seja f_m a taxa de atualização das máscaras codificadoras, então a taxa de quadros também é limitada pelo tempo para trocar entre todas as máscaras:

$$f_r \le \frac{1}{Ns} f_m. \tag{3.2}$$

É possível compor uma tabela com o tempo de coleta $1/f_r$ a partir de valores diferentes de f_m . Sejam $f_1 = 6,37$ kHz, $f_2 = 22$ kHz e $f_3 = 32$ kHz, que são taxas de atualização comuns para DMDs disponíveis comercialmente. Para s = 100%, $N = L^2$, a Tabela 1 mostra o escalamento do tempo de coleta.

Como referência, um dos menores padrões para taxa de quadros de vídeos é de 24 Hz ou aproximadamente 42 ms por quadro, a partir da qual percebem-se movimentos
L (px)	$N (px^2)$	$t_1 (ms)$	$t_2 (ms)$	$t_3 (ms)$
10	100	15,7	4,5	3,1
20	400	62,7	18,2	12,5
30	900	141,3	40,9	28,1
50	2500	392,5	$113,\!6$	78,1
100	10000	1569,9	$454,\!5$	312,5
200	40000	6279,4	1818,2	1250
300	90000	14128,7	4090,9	2812,5

Tabela 1 – Tempo necessário para compor um quadro de dimensões L crescentes, para taxas de atualização distintas, correspondendo aos tempos t_1 , t_2 e t_3 .

Fonte: : O autor.

como "suaves" [33]. Nota-se na Tabela 1 que os DMDs não conseguem atingir esse critério exceto para quadros de poucas dezenas de pixels.

Buscando contornar essa limitação, o Laboratory of Applied Computational Imaging (LACI) utilizou a propriedade cíclica das matrizes-**S** para reduzir drasticamente o tempo de coleta. Na Seção 2.4, as matrizes-**S** para diferentes pares de primos gêmeos foram apresentadas. Pela Equação 2.43, a *i*-ésima linha é igual à anterior deslocada ciclicamente por uma coluna. O resultado disso sobre a máscara é também apenas o deslocamento cíclico de uma coluna. O processo pode ser repetido q vezes, o que ocasionará da próxima máscara ser igual à primeira da sequência deslocada ciclicamente por uma linha. Repetindo o processo p vezes, tem-se todas as máscaras possíveis. Define-se então um **padrão agregado**, que consiste na sobreposição da última máscara de uma sequência de q passos sobre a última coluna da primeira máscara, formando assim um padrão de largura 2q - 1, como mostra a Figura 15.





Suponhamos que haja movimento horizontal (à direita) de um feixe de luz sobre o padrão agregado, e essa luz estruturada é filtrada para chegar com um formato retangular e proporções q: p, então ao longo dessa varredura a luz será estruturada com q máscaras distintas (desconsiderando os instantes de transição). Se antes o DMD necessitava atualizar pq vezes para fazer uma codificação completa, agora necessita de apenas p padrões agregados! A técnica que realiza isso é chamada de *Single-Pixel Imaging Accelerated by Swept Aggregate Patterns* (SPI-ASAP) [13]. No modelo desenvolvido pelo LACI, a varredura do feixe sobre o DMD é realizada através de um espelho poligonal. Um feixe incidindo a 45° num espelho poligonal de 16 faces sofre uma variação angular de aproximadamente $\pm 21^{\circ}$ quando o espelho passa a girar, como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Conversão de um feixe colimado em um feixe varrido pelo espelho poligonal de 16 faces. Na Figura, espelho está orientado de tal forma que o feixe, paralelo ao eixo horizontal, incide sobre o centro da face com um ângulo de 45°, resultando num ângulo de saída de 90°. Quando o espelho gira, a orientação da face varia e por consequência o feixe de saída, criando uma varredura de abertura de aproximadamente 42°.



Fonte: : O autor.

A variação angular precisa ser "colimada" de forma a converter-se apenas em translação, e então redirecionada para varrer os padrões agregados dispostos no DMD. A luz estruturada é então focalizada sobre um ponto simétrico da primeira incidência no espelho poligonal e re-colimada na saída, ficando pronta para ser utilizada na codificação de um objeto. Essas etapas permitem praticamente anular a variação angular e posicional introduzida ao feixe pelo espelho poligonal, pois do contrário a posição das máscaras poderia oscilar horizontalmente, diminuindo a precisão do sistema.

O sistema também requer uma série de componentes para que seja possível atualizar os padrões agregados no DMD e coletar os dados de forma que não haja assincronia. Apesar da velocidade de escaneamento do espelho poligonal ser relativamente estável, essa integração torna-o robusto contra oscilações que poderiam resultar num intervalo de aquisição ou na associação incorreta dos sinais às máscaras de cada instante de tempo. O diagrama do sistema está disposto na Figura 17. As funções de cada componente, assim como os passos necessários para introduzi-los, serão discutidos na Seção seguinte.

3.2 CONSTRUINDO O SPI-ASAP

No ano de 2023, o Professor Jinyang Liang, líder do LACI, enviou um projeto envolvendo o SPI-ASAP para o programa *Globalink Research Internship* (GRI), promovido pela organização canadense Mitacs, que possui parceria no Brasil com a Fundação Araucária. Após a aprovação no processo seletivo de duas etapas, realizado no final daquele ano, tornou-se possível ir até o *Institut national de la recherche scientifique* (INRS) Figura 17 – Diagrama do sistema SPI-ASAP. As proporções dos componentes eletrônicos não são realistas. As letras L indicam lentes e M os espelhos. O feixe do laser é focalizado pela lente L_1 sobre o espelho poligonal M_0 (integrado à placa GECKO e à placa Arduino com um Relay Module (INO+RM)). Os vetores $\vec{o_i}$, $\vec{o_f}$, $\vec{o_c}$ representam as direções de saída do raio central no início, fim e meio do período de escaneamento de M_0 , respectivamente. O feixe é colimado pela L_2 e a L_3 , refletido pelo M_1 e o M_2 , e então sobre os padrões agregados no DMD. O feixe (estruturado) volta para M_0 em um ponto simétrico à primeira incidência após a focalização pela L_4 . O padrão agregado é re-colimado pela L_5 e filtrado pela fenda (S) de forma que apenas uma máscara chega até o M_3 , que é então imageada pela lente (IL), dividida por um divisor de feixe (BS), para que uma fração de luz chegue ao fotodetector TC-PD, e o restante interaja com o objeto. O fotodetector SA-PD tem sensibilidade aumentada pelo amplificador de transimpedância TI-A e coleta a luz focalizada pela CL. No início do ciclo, parte da luz escapa do sistema a partir de M_1 (tracejado em verde) e atinge o fotodetector SOS-PD (i), que envia um sinal para um gerador de delay (DG) (ii). O DG envia um sinal para a placa ALP, que dispõe os padrões no DMD. e para o cartão de aquisição DAQ (iii). A luz estruturada pelo DMD (iv) é filtrada pela fenda (v), chega ao fotodetector TC-PD (vi) e ao SA-PD após interação com o objeto (na região em magenta) (vii), enviando os dados para decodificação no PC.



Fonte: : O autor.

em Varennes, na província de Quebec, participar das atividades do LACI como estagiário por doze semanas, iniciando em julho de 2024. Nessa experiência, foi possível fazer contato com pesquisadores de diferentes origens e participar das reuniões de grupo, onde são discutidos diversos projetos envolvendo a integração de componentes existentes em provas de conceito de novos sistemas de imageamento, voltados para aplicações multidisciplinares. O estágio contou com a supervisão direta do pós-doutorando Patrick Kilcullen, o principal responsável pelo design de *software* e montagem experimental, assim como lidar com todas as dificuldades técnicas para tornar o SPI-ASAP funcional. O objetivo primário do projeto era construir uma réplica do SPI-ASAP, que havia sido desmontado para que seus componentes fossem utilizados em outros projetos. Para isso, peças novas foram adquiridas para o sistema, mudando apenas o DMD para o DLP4100 da Texas Instruments com o controlador ALP-4.2 V-4000 Hi-Speed V-Module da ViALUX, operado com a *Application Programming Interface* (API) ALP-4 API, que possibilita desenvolver programas personalizados que acessam as funções do controlador. Anteriormente, o DMD utilizado tinha taxa de atualização de 6,37 kHz, inferior à taxa de varredura máxima de 12 kHz do espelho poligonal. Esse modelo de DMD possuía taxa de atualização de 22,727 kHz ou 44 μs por quadro para imagens binárias, fazendo com que o espelho poligonal se tornasse o maior limitante da taxa de quadros sistema.

Após as instruções para práticas de segurança em laboratório, como o cuidado com o manuseio de lasers e a utilização de proteções apropriadas para a potência e comprimento de onda da luz, os trabalhos foram iniciados. As etapas principais de alinhamento óptico estavam documentados na forma de esquemas com as medidas do sistema, e a configuração final dos componentes estava registrada em fotos. A estratégia envolvia utilizar espelhos temporários para estabelecer linhas de feixe e alinhar as sete lentes antes de inserir o espelho poligonal e o DMD ao longo do caminho do feixe, então a posição dos grampos precisava ser planejada com antecedência, do contrário seria impossível utilizar as iris em etapas posteriores pela falta de espaço, ou seria necessário desalinhar componentes. O trabalho manual do alinhamento foi atribuído como uma tarefa de treinamento de laboratório com bastante autonomia, desenvolvida ao longo de semanas. As etapas apresentavam complexidade crescente, o que foi uma experiência intensa para quem tinha pouca prática de alinhamento.

O início é resumido ao alinhamento de espelhos e dois pares de íris, um para a breadboard, onde os principais componentes são montados, e outro para a mesa óptica. A breadboard podia ser desacoplada da mesa óptica, tornando-se uma plataforma portátil, o que seria útil caso o sistema precisasse ser transportado sem desalinhar os componentes. As três linhas de feixe do sistema foram então estabelecidas: a principal, que incidia sobre um espelho M'_0 , em 45°, formando uma segunda linha, que incidia sobre um par de espelhos M_1 e M_2 , também em 45°, onde M_2 precisava ser transladado (sem mudança de orientação) ao longo da linha que o ligava com M_1 , enviando o feixe por uma terceira linha. O espelho M'_0 foi então substituído pelo espelho poligonal (M_0) que, numa orientação onde quaisquer de suas faces estão perpendiculares às entradas da breadboard, o feixe incidia sobre a face que estava em 45° em relação a esses eixos, reproduzindo o mesmo resultado que M'_0 , como mostra a Figura 18.

Figura 18 – Passos intermediários de alinhamento do SPI-ASAP, antes e após a substituição do espelho temporário M'_0 pelo espelho poligonal M_0 . Os rótulos 'I' referem às íris, e 'M' aos espelhos. A linha em vermelho indica a trajetória do feixe a partir da fonte, e a seta dupla em branco a direção de translação do espelho M_2 .



Fonte: : O autor / LACI.

A capacidade de translação de M_2 então servia para que a terceira linha de feixe pudesse ser ajustada para incidir sobre o espelho poligonal na outra face de 45°, em uma posição espelhada em relação ao ponto de início da segunda linha. Após isso, introduziramse lentes para "colimar" a "divergência" do feixe varrido pelo espelho poligonal em rotação.

O modelo do espelho poligonal era o GECKO-45-HSS, fabricado pela Precision Laser Scanning (PLS), com 16 faces. Ao adquirir esse produto, o espelho vem integrado a um motor e a uma placa de controle que envia ou recebe sinais a partir de cinco cabos. Porém, não há como integrá-lo diretamente a um sistema óptico. Para isso, P. Kilcullen criou um design de base feita em acrílico e cortada a laser, compatível com os componentes da ThorLabs. Também era necessário conectar a placa do controlador e um relay module (para fornecer a voltagem correta de 24V ao motor) a uma plataforma Arduino, possibilitando ajustar a velocidade do motor através de um programa escrito para tal propósito. Esse nível de voltagem era necessário para que o espelho chegasse à taxa de escaneamento de $f_p = 12$ kHz, e o controlador para garantir que não passasse desse limite superior ou do limite inferior de 2,66 kHz, a partir do qual o air bearing do motor não consegue mais atuar como "lubrificante" para impedir atrito entre as peças, tornando-o instável e causando desgaste. Apesar do design desses componentes de software e hardware estar pronto desde o SPI-ASAP original, a integração de um novo espelho poligonal ainda requeria perfuração das placas de suporte e soldagem dos circuitos.

Após o alinhamento de posição e nivelamento do espelho (feito com o espelho em rotação, com duas íris colocadas ao longo de um eixo perpendicular à saída principal), era necessário verificar o alinhamento das sete lentes: duas para expansão do feixe de aproximadamente 2,5 mm para 5 mm, a lente L_1 para focalização sobre o espelho poligonal, o par L_2 e L_3 para colimação e conversão de variação angular em translação, a lente L_4 para re-focalização sobre o espelho poligonal e a lente L_5 para re-colimação para a linha de saída do sistema.

Com isso feito, restava inserir o DMD. A matriz 1024×768 (padrão XGA) de espelhos, de *pitch* (tamanho efetivo na matriz) de $13,68 \,\mu$ m, possuía área de apenas $14,0 \times$ $10,5 \,\mathrm{mm}^2$. A disposição dos pixels era alinhada aos eixos da tela, porém as dobradiças que introduzem a inclinação de $\pm 12^{\circ}$ são diagonais, então para manter as reflexões no mesmo plano, era necessário orientar o DMD em 45° em relação ao plano perpendicular à mesa. Um encaixe de acrílico feito para torná-lo compatível com os suportes de espelho da ThorLabs também estava à disposição, facilitando a fixação na mesa óptica e permitindo o ajuste de orientação em três dimensões, como mostra a Figura 19, então para fazer esse ajuste bastava ligá-lo numa configuração com toda a tela positiva e mudar a orientação do suporte até que o feixe de saída estivesse no mesmo plano do restante do sistema (*xy*). O passo seguinte envolvia um número muito grande de variáveis para serem ajustadas

Figura 19 – DMD acoplado ao suporte da ThorLabs. As setas curvadas indicam as peças utilizadas no ajuste de orientação em cada um três planos mutuamente perpendiculares. A orientação correta no plano yz era de 45°, como está na foto, mas no sentido oposto.



Fonte: : O autor / LACI.

simultaneamente, sob restrições que precisavam ser satisfeitas:

1. O feixe varrido deve chegar ao DMD em 24°, para incidir sobre sua rede de espelhos

ativos com ângulo normal de 12° e sair pela terceira linha de feixe com 0° .

- 2. O feixe de saída do DMD, para a orientação neutra (de 45°) do espelho poligonal, deve estar alinhado ao centro da lente L_4 .
- 3. O DMD deve estar a uma distância fixa da lente L_4 no eixo x.
- 4. A posição do espelho M_1 ao longo da segunda linha de feixe e sua orientação são livres, mas a iluminação passada adiante deve ser maximizada.
- 5. A posição em ambos os eixos e a orientação de M_2 são livres, mas M_2 não pode bloquear a saída do feixe para L_4 .
- Uma fração de luz à esquerda (início da varredura) deve escapar do sistema para atingir um fotodetector necessário para sincronização (*start-of-scan photodetector* ou SOS-PD).
- 7. É necessário que chegue luz suficiente sobre toda a tela do DMD para que os maiores padrões possam ser dispostos.

Uma ferramenta de auxílio de alinhamento foi desenvolvida em GeoGebra (Figura 20) considerando todos os graus de liberdade possíveis, para obter uma melhor noção de como a perturbação em cada variável do sistema afetaria o feixe de saída.

Figura 20 – Ferramenta auxiliadora de alinhamento no GeoGebra. Os raios de entrada (que parte do ponto O), intermediários e de saída (que chega à L_4) são calculados em tempo real ao ajustar os parâmetros, e as dimensões dos componentes ópticos estão aproximadamente em escala com as reais.



Fonte: : O autor. Disponível em geogebra.org/m/eadqkw8u.

Na prática, existem complicações ainda maiores: é virtualmente impossível ajustar a posição do DMD ao longo do plano *xy* sem mudar sua orientação: se o grampo de mesa é afrouxado para transladá-lo, a sua orientação também fica "solta" e sensível a qualquer movimento; se o ângulo em xy é mudado no ajuste do suporte com o grampo fixado, por estar em uma distância radial considerável do eixo de rotação, a posição do DMD também é alterada. Além disso, o espaço disponível era da ordem de poucos centímetros, tornando o ajuste muito delicado. Quando há poucos graus de liberdade simultâneos, é comum fazer ajustes alternados entre componentes, convergindo gradualmente para o resultado correto de forma iterativa, o que leva poucos minutos. Neste caso, existem **infinitas** soluções para a combinação de parâmetros, e mesmo obtendo resultados corretos no GeoGebra, os ajustes necessários ainda eram milimétricos e da ordem de poucos graus, sendo impossível verificar se correspondiam ao resultado matemático mesmo com ferramentas improvisadas.

Algumas tardes de trabalho foram necessárias para chegar em configurações insatisfatórias, pois cumpriam apenas cinco ou seis das sete condições. Ao fim, concluiu-se que não era possível satisfazer totalmente a condição 7 sem impedir que a 6 fosse satisfeita: a parcela de luz "sacrificada" para ativar o SOS-PD correspondia à luz que faltava para a tela do DMD ser totalmente varrida, e o único cenário em que isso não ocorria necessitava que M_2 bloqueasse parcialmente o feixe de saída que deveria chegar em L_4 . Em alguns cenários, o feixe poderia parecer estar satisfazendo todas as condições, mas após passar por L_4 , não incidia sobre o ponto simétrico do espelho poligonal, ou saía desalinhado na linha de feixe após L_5 . Tinha-se então ao menos quatro pontos distintos do sistema para os quais era necessário prestar atenção ao mesmo tempo em que movia os espelhos. Como era necessário manter o espelho poligonal e o DMD ligados, pela grande abertura angular do feixe varrido, luz dispersa podia chegar próxima ao DMD, necessitando bloqueá-la com barreiras improvisadas. Além disso, a matriz de espelhos do DMD acaba atuando como uma rede de difração, criando diversas cópias do feixe, como mostra a Figura 21, com a segunda ordem de difração tendo intensidade (visualmente) comparável à primeira ao ser focalizada sobre o espelho poligonal, então houveram situações em que o sistema foi alinhado em relação à ordem errada.



Figura 21 – Padrões agregados refletidos pelo DMD e suas ordens de difração.

Fonte: : O autor / LACI.

Após ter maximizado as condições dentro do possível, as etapas seguintes envolveram a filtragem do padrão agregado com uma fenda horizontal (Figura 22a), para que apenas uma máscara saísse do sistema por instante de tempo. Isso pode ser realizado dispondo alternadamente a área da máscara central e a área restante do padrão agregado na tela do DMD, coletando a luz após a fenda com um fotodetector. Quando a fenda está no tamanho certo, o sinal deve alternar entre uma onda triangular (centro) e duas ondas triangulares com platôs na metade da intensidade da onda central. O processo está representado nas Figuras 22b, 22c.

Figura 22 – Calibração da fenda de saída do SPI-ASAP. (a) Foto do feixe sobre a fenda. (b) Representação do feixe efetivo sobre a tela do DMD, que alterna entre as áreas de máscara (em preto) central (acima) e externa (abaixo), antes (à esquerda) e após (à direita) a introdução da fenda calibrada. (c) Sinais coletados pelo do fotodetector ao longo de um intervalo maior que o período de varredura do espelho poligonal, de forma que é possível ver o espaçamento temporal entre dois picos gerados pelo mesmo padrão no DMD. Os sinais acima correspondem à área de máscara central (uma onda triangular), e os de baixo às áreas externas à esquerda e direita, resultando em duas ondas triangulares truncadas em metade da intensidade do outro padrão.



Fonte: : O autor / LACI.

Essa calibração precisa ser feita sempre que um dos parâmetros do padrão agregado é alterado, pois o comprimento de uma máscara muda. Tendo isso resolvido, o feixe de saída está pronto para ser redirecionado para fazer o imageamento. No entanto, ainda há algumas etapas envolvendo a parte eletrônica do sistema, para que ele seja autosincronizável: a tela do DMD deve ser atualizada a cada varredura, e os dados devem ser coletados e selecionados corretamente independente de oscilações do tempo de varredura do espelho poligonal. Para robustez máxima, o sistema utiliza três fotodetectores (PDs):

- 1. O start-of-scan (SOS-PD), ativado no início de cada varredura do espelho poligonal, que envia o sinal para um gerador de *delay*. Do gerador, saem dois sinais: o primeiro, para que o DMD avance para o próximo padrão agregado; o segundo, para que a *Data Acquisition Card* (DAQ) instalada em um computador comece a registrar os dados do ciclo atual.
- 2. O time-coding (TC-PD), que estabelece o intervalo de tempo da aquisição de dados. Para isso, no início de toda sequência, a primeira varredura ocorre sobre uma máscara vazia, a segunda apenas sobre a área da primeira máscara, e a terceira apenas sobre a área da última máscara (ambas totalmente ativadas). Combinando a informação dos dois PDs, o sistema é capaz de identificar que o quadro iniciou (pois recebeu sinal do SOS-PD mas não do TC-PD) e pela diferença temporal entre os picos gerados pelas duas máscaras (em relação ao início da varredura), calcula-se o intervalo de tempo em que o feixe varrido está de fato sobre os padrões agregados.
- 3. O signal-acquisition (SA-PD), que coleta a luz estruturada após a interação com o objeto. Para que a luz chegue em ambos o SA-PD e o TC-PD, é necessário introduzir um divisor de feixe que priorize o SA-PD (para isso, um filtro de densidade neutra pode ser usado). A largura de banda nominal do fotodetector era de 11 MHz, mas foi aumentada para 24 MHz conectando-o a um amplificador de transimpedância externo construído para o sistema.

Com a introdução dos três quadros necessários para a sincronização, tem-se p+3 atualizações do DMD para uma razão de amostragem de 100%. Para sub-amostragem, é possível fazer uma quantidade de varreduras L < p. A outra maneira seria pulando máscaras dentro dos padrões agregados, o que só é possível se o tempo de transição for menor que o período de aquisição, inferior a 41 ns. À taxa de 12 kHz, e considerando que o sistema possui uma *duty cycle* de apenas ~ 8% (ou seja, o período de modulação corresponde apenas a essa porcentagem do ciclo total) do tempo sobre o DMD, a janela temporal da coleta dura em torno de 6666 ns, então essa condição ocorre quando $q \sim 162$. No entanto, tendo um número de pontos por máscara inferior a 1 deve comprometer significativamente, se não por completo, a reconstrução. Portanto, a equação da taxa de

quadros torna-se [13]:

$$f_r = \frac{f_p}{L+3}, \quad L = p, \tag{3.3}$$

$$f_r = \frac{f_p}{L + \frac{3(L-1)}{p}}, \quad L < p.$$
(3.4)

Havia uma última complicação para ser resolvida, que era a orientação de 45° do DMD. O DMD do sistema original possuía uma grade losangular de espelhos com dobradiças ao longo de uma das diagonais, permitindo que os padrões fossem dispostos alinhados aos eixos da tela. Portanto, foi necessário portar o código escrito em C++ por P. Kilcullen para a API da ViALUX e inserir uma função de transformação sobre as imagens para cancelar o efeito da rotação. Existem muitas maneiras de rotacionar uma imagem pixelizada, porém nem todas preservam a quantidade de pixels. Em geral, mantendo a mesma escala de imagem, uma máscara codificadora sob rotação tem regiões que ficam desfiguradas. Por isso, optou-se por fazer uma transformação que dobra o número de pixels relativos à imagem original. Além disso, a transformação também pode ampliar os pixels para blocos de dimensões $b_x \times b_y$ ao longo de eixos diagonais, conforme mostram as Figuras 23, 24a e 24b (para $b = b_x = b_y$).





Na realidade, a ampliação para blocos de dimensões $b_x > 1$ e $b_y > 1$ se fez necessária, pois a qualidade óptica do sistema, assim como a difração, faziam com que as máscaras efetivas estruturadas por apenas dois pixels por elemento não fossem resolúveis o suficiente, impedindo a reconstrução de imagens. Para o padrão XGA (1024×768 pixels), os valores máximos de p que resultam em uma imagem totalmente contida na tela, podem ser calculados pelo conjunto de equações 3.6 no caso original, onde os eixos das imagens

Figura 24 – Efeito da transformação los
angular sobre imagens. (a) Par de imagens (padrão xadrez e letras 'SPI'), para blocos de pixel quadrados de comprimento
 b = 1 e b = 2. (b) Dimensões da imagem resultante.



estavam alinhados à tela:

$$b_y p \le 768, \quad b_x(2(p+2)-1) < 1024$$
(3.5)

$$p \le \lfloor \frac{768}{b_y} \rfloor, \quad p \le \lfloor \frac{1024 - 3b_x}{2b_x} \rfloor \tag{3.6}$$

Para o caso do novo sistema, a rotação de 45° faz a largura X_{img} e largura Y_{img} do padrão agregado serem somadas (em ambos os eixos), então há apenas a restrição pela menor dimensão da tela (a altura, de 768 pixels):

$$(X_{\rm img} + Y_{\rm img}) - 1 \le 768 \implies b_x(2(p+2) - 1) + b_y p \le 769$$
 (3.7)

$$\therefore p \le \lfloor \frac{769 - 3b_x}{2b_x + b_y} \rfloor \tag{3.8}$$

Para diferentes dimensões de bloco, os valores máximos do primo gêmeo p_{max} estão dispostos nas Tabelas 2 e 3 (eixos alinhados), e 4 (desalinhamento de 45°).

Tabel	a 2 -	$-p_{\max}$	em função	de b_x .	Tabel	a 3 –	p_{\max}	em função	de b_y .
	b_x	p	Largura	-		b_y	p	Altura	
	1	461	461			1	659	659	
	2	239	478			2	347	694	
	3	149	447			3	239	717	
	4	107	428			4	191	764	
	5	107	535			5	149	745	
0			67	-					

Fonte: : O autor.

Fonte: : O autor.

	1 man	0	c	(20 / 9 /
(b_x, b_y)	$b_x = 1$	$b_x = 2$	$b_x = 3$	$b_x = 4$
$b_y = 1$	$239(721 \times 720)$	$149(753 \times 752)$	$107(761 \times 760)$	$107(655 \times 654)$
$b_y = 2$	$191(768 \times 767)$	$107(650 \times 649)$	$71(580 \times 579)$	$71(726 \times 725)$
$b_y = 3$	$149(749 \times 748)$	$71(505 \times 504)$	$71(651 \times 650)$	$59(665 \times 664)$
$b_y = 4$	$107(646 \times 645)$	$71(576\times575)$	$71\left(722\times721\right)$	$59\left(724\times723\right)$

Tabela 4 – p_{max} e dimensões da imagem resultante em função de (b_x, b_y) .

Fonte: : O autor.

A implicação da Tabela 4 é que a maior máscara utilizável seria a 109×107 , o que não seria muito maior que a maior máscara de 103×101 utilizada na publicação original do SPI-ASAP. Na prática, nem mesmo esse valor de p pôde ser usado, necessitando que ao menos b_x ou b_y fossem iguais a 3, o que limitou o tamanho de máscara para 73 × 71. Para contornar esse problema, seria necessário trocar o DMD ou inspecionar qual dos elementos ópticos era o maior responsável pela perda de qualidade das máscaras de tamanho de bloco menor (o que não só é difícil, como envolveria o desalinhamento do sistema), ou refazer o design do sistema para utilizar o DMD em 0°, o que tornaria o caminho do feixe tridimensional, adicionando camadas de complicação ao sistema, especialmente pelo requerimento de que o feixe estruturado precisa retornar ao espelho poligonal. Apesar disso, ainda foi possível operar o sistema e fazer imagens em ambos os extremos da taxa de varredura do espelho poligonal, atingindo o novo recorde mundial para quadros até 73×71 pixels. A Figura 25 apresenta os resultados para os tamanhos de quadro 43×41 nos limites do espelho poligonal (2,6 kHz e 12 kHz) e o quadro 61×59 para 2,6 kHz com a fenda descalibrada, o que fez a imagem adquirir padrões semelhantes a ondulações. O programa de imageamento em tempo real foi escrito por P. Kilcullen na linguagem CUDA da Nvidia, feito para utilizar diretamente os núcleos da placa de vídeo Nvidia GeForce GTX 1060 para o processamento dos dados. O programa não exibia todos os quadros acima de uma taxa devido à sobrecarga de processamento, então os valores mostrados no painel não correspondiam exatamente à Equação 3.4, mas era possível verificar com um osciloscópio que o espelho poligonal e o DMD estavam operando nas velocidades que resultavam nos valores dispostos na Figura 25.

Infelizmente, a janela de tempo do estágio encerrou-se neste ponto, então não foi possível fazer os ajustes descritos acima ou tentar levar o sistema para os próximos modos, que envolviam inverter o caminho do feixe (interação com objeto antes da estruturação) e a transição para comprimentos de onda na região do infravermelho. Figura 25 – Demonstração do SPI-ASAP com um alvo contendo letras transparentes em diferentes tamanhos de quadro e velocidades (nominais). As imagens em verde estão relacionadas aos dados pré-decodificação.



Fonte: : O autor / LACI.

4 CODIFICAÇÃO CONTÍNUA

Como apresentado até aqui, as técnicas de SPI que utilizam codificação são em geral bidimensionais e utilizam relações matriciais para recuperar a imagem a partir de uma sequência temporal de sinais, e o tamanho do quadro está associado ao tamanho das máscaras geradas pelos moduladores. Essa não é a única maneira de elaborar um princípio de codificação e decodificação. No domínio das frequências espaciais, existe uma forma de codificação que envolve a modulação binária de um feixe unidimensional com frequências espaciais que crescem continuamente ao longo do seu comprimento, de forma que a presença de um objeto é revelada ao se obter a transformada de Fourier do sinal e analisando quais faixas de frequências foram atenuadas ou totalmente bloqueadas. Deslocando o objeto em relação ao feixe com, por exemplo, um transladador, obtém-se múltiplos perfis unidimensionais que podem ser compostos em uma imagem bidimensional. Isso caracteriza a técnica SPatIal Frequency modulation for Imaging (SPIFI) [34] [35] [36] e essa forma de modulação pode ser realizada rotacionando uma máscara [37] que satisfaz tais condições, como o retículo de Lovell, com o feixe paralelo à direção radial desse modulador. Aqui tem-se um caso de **codificação contínua**, pois o espectro de uma transformada de Fourier calculada a partir dos dados é, em princípio, tão precisa quanto as limitações do sistema óptico, da aquisição dos dados e do processamento permitirem, neste caso possibilitando até ultrapassar o limite de difração quando aliado com óptica não linear [38]. Além disso, só é possível criar uma representação matricial dessa codificação ao se impor intervalos de espaço e tempo discretos - enquanto a aquisição de dados é discretizada, a estrutura e o movimento do modulador são "contínuos", então discretizá-los é uma aproximação.

4.1 TÉCNICA DE IMAGEAMENTO ÓPTICO DERIVATIVA (DOIT)

Inspirando-se na montagem experimental do SPIFI, foi desenvolvido no GPOEF o *Derivative Optical Imaging Technique* (DOIT), que utiliza um *chopper* óptico para bloquear um feixe unidimensional gradualmente ao longo do seu comprimento, ou seja, orientando-o perpendicularmente à direção radial do modulador, conforme mostram as Figuras 26a e 26b. Os aspectos experimentais da técnica estão detalhados na dissertação de Yohan Szuszko Soares [14] e no nosso artigo publicado na Optics Letters [39]. Nesta seção, a técnica será descrita de um ponto de vista teórico, cujos formalismos diferencial e matricial foram elaborados por mim na busca por um melhor entendimento das propriedades matemáticas para otimizar o processo de codificação e decodificação.

O sinal s(t), coletado pelo fotodetector único ao longo do tempo, é proporcional à soma de todas as contribuições de energia luminosa do feixe unidimensional que conseguem

Figura 26 – Esquema da montagem experimental do DOIT. Os rótulos 'L' indicam lentes, sendo 'C' a cilíndrica e 'O' a objetiva. A 'CO' garante que o feixe após interação com o *chopper* óptico e a amostra incida sobre o fotodetector (PD). (a) Vista alinhada aos eixos. (b) Vista ortográfica.



Fonte: : Soares et. al. [14].

chegar até ele. Sendo y a direção do feixe,

$$s(x,t) \propto \int I(x,y,t) \, \mathrm{d}y \propto \int \left| \vec{E}(x,y,t) \right|^2 \, \mathrm{d}y,$$
(4.1)

onde o perfil de intensidade I(y,t), considera o efeito de todos os elementos ópticos que atuam para bloquear o campo elétrico E(y,t), sejam os objetos imageados ou os moduladores, ao longo do eixo de propagação z, com escala normalizada, uma vez que o feixe muda de tamanho ao longo do caminho óptico. Essa função é composta pelo produto de funções independentes que variam de 0 a 1, cada uma representando um bloqueador. Essa função também pode ser interpretada como o feixe "visto" pelo fotodetector com a sombra de todos os objetos no caminho. Seja O(x, y) o perfil de transmissividade ou reflectividade da projeção de um objeto sobre um plano perpendicular ao eixo de propagação, e u(x, y) o perfil adimensional do campo elétrico do feixe neste plano, assumido como tendo dimensões desprezíveis no eixo x. Para um x fixo, o perfil do objeto pode ser escrito como o(x, y). O sinal então permanece constante com o valor proporcional a $|u(x, y)o(x, y)|^2$ até que o modulador, representado pela função binária M(y, t), elimina gradualmente as contribuições da integral até que o sinal vai a zero, então:

$$s(x,t) = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} |M(y,t)u(x,y)o(x,y)|^2 \,\mathrm{d}y,$$
(4.2)

onde I_0 é o valor máximo do perfil de intensidade luminosa $I_0 |u(y)|^2$. Por ser uma função binária, $|M(y,t)|^2 = M(y,t)$. Se o comprimento L do feixe é tal que ele está totalmente contido em apenas um setor do *chopper*, então só existe um ponto de transição entre 0 e 1 de M(y,t), localizado na borda entre o espaço livre e a lâmina, cuja coordenada é uma função a(t), discutida posteriormente. A Figura 27 apresenta um esquema dessa modulação.

Figura 27 – Representação da modulação do DOIT. As linhas vermelhas representam o feixe luminoso em formato de linha, centrado em diferentes posições x. A lâmina do chopper, cuja borda é representada pela coordenada a(t), se move para a direita, bloqueando gradualmente o feixe.



Se a lâmina do *chopper* está vindo na direção do eixo y positivo, Se é possível considerar que todas as contribuições relevantes do feixe estão contidas em $0 \le y \le L$, então a lâmina de um chopper se deslocando no sentido positivo do eixo y, cuja borda é representada pela coordenada a(t), elimina também todas as contribuições de $y \le a(t)$, o que simplifica a integral para:

$$s(x,t) = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} M(y,t) |u(x,y)o(x,y)|^2 \, \mathrm{d}y = I_0 \int_{a(t)}^{L} |u(x,y)o(x,y)|^2 \, \mathrm{d}y.$$
(4.3)

Essa redução perde a validade conforme a difração se torna mais relevante, e o estudo desses efeitos está fora do escopo deste trabalho. Seja o perfil de intensidade do feixe mesclado com o do objeto uma função $I(x,y) \equiv I_0^{-1} |u(x,y)o(x,y)|^2$. Para um x fixo,

essa função deve possuir uma primitiva $\xi(y)$. O resultado da integral é então uma função do tempo, que depende exclusivamente do movimento da borda do modulador:

$$s(x,t) = I_0\xi(x,L) - I_0\xi(x,a(t)).$$
(4.4)

Pelo teorema fundamental do cálculo, é possível recuperar o integrando:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(x,t) = I_0 \left(\underbrace{\frac{d\xi(x,L)}{dt}}_{dt} - \frac{d}{dt}\xi(x,a(t)) \right) = -I_0 I(x,a(t)) \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \tag{4.5}$$

contanto que a(t) seja linear, pois seu efeito como argumento de u(a) e o(a) será apenas de definir uma escala comum, sem distorções ao longo do eixo t, e sua derivada será apenas uma constante v associada à velocidade da modulação. Se a(t) = vt = y',

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(x,t) = -vI_0 |u(x,y') o(x,y')|^2.$$
(4.6)

Temos então uma codificação contínua da informação do integrando (o perfil mesclado do feixe e do objeto) na taxa de variação temporal do sinal. Assim como no SPIFI, a composição de múltiplas linhas pelo deslocamento relativo entre o feixe e o objeto consequentemente compõe um perfil bidimensional. A imagem de um sinal caracterísco de um feixe gaussiano com um objeto bloqueando seu centro é apresentada na Figura 28.

Figura 28 – Sinal experimental característico do DOIT (suavizado) e sua derivada, com (vermelho) e sem (preto) a presença de uma amostra bloqueando um feixe gaussiano. A escala de tempo está associada com a frequência de modulação, e compreende aproximadamente um período de modulação completo (sendo o comprimento do feixe em torno de metade do espaçemento entre as lâminas dos choppers, criando regiões com valores próximos a zero.



Fonte: : Adaptado de Soares et. al. [14].

54

Podemos agora verificar se a condição da Equação 4.6 é satisfeita. Para isso, precisamos analisar os aspectos geométricos e cinemáticos da modulação. Consideremos uma máscara giratória com frequência angular ω , que possui *B* setores simétricos, alternando entre totalmente preenchidos ou vazios (um *chopper* óptico de *duty cycle* de 50%), que será utilizado para modular a intensidade de um feixe. Como o setor de um chopper corresponde a uma abertura angular de $2\pi/2B$ rad, uma variação angular $\Delta\theta = 2\pi/B$ é necessária para que a máscara retorne a um estado idêntico da máscara. No entanto, após metade desse ciclo, as regiões livres tornam-se bloqueadas e vice-versa. O semi-ciclo seguinte produzirá essencialmente a mesma variação no sinal (mas positiva), então ao tomar o valor absoluto da derivada, obtém-se a mesma imagem. Logo, uma modulação ocorre em uma variação angular de $\Delta\theta = \pi/B$. Quanto maior o número de setores, menor a variação angular para completar um ciclo, então a frequência angular de modulação efetiva é:

$$\omega' = 2\omega B,\tag{4.7}$$

e consequentemente, o periodo da modulação é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega B}.$$
(4.8)

Agora, considerando um feixe de luz de largura desprezível e comprimento L, orientado perpendicular a linha que liga seu centro ao eixo de rotação da máscara, posicionado a uma distância r dessa origem. A largura máxima em que o feixe ainda está totalmente contido em um setor é, por trigonometria (Figura 29):

$$L_{\max} = 2r \tan\left(\frac{\pi}{2B}\right). \tag{4.9}$$

Figura 29 – Trigonometria das dimensões setoriais de um *chopper* óptico. O feixe em formato de linha (em) vermelho está com o espaçamento ideal L_{\max} em relação à posição radial do seu ponto central.



Fonte: : O autor.

A coordenada da borda da lâmina de um *chopper* pode ser descrita por uma equação da reta, centrada na origem e com coeficiente angular variando no tempo. O valor de y'(x',t) na posição x' = r (onde o feixe está centrado) corresponde à coordenada a(t):

$$a(t) = \tan\left(\omega t - \frac{\pi}{2B}\right)r.$$
(4.10)

Pode-se observar que a(t) é uma função trigonométrica, e não linear. A fase $\pi/(2B)$ garante que a(T/2) = 0. Seguindo para a sua derivada, temos:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega r}{\cos^2(\omega t - \pi/2B)}.\tag{4.11}$$

Se L for muito menor que L_{max} , o bloqueio do *chopper* sobre o feixe ocorrerá apenas em torno de t = T/2, com velocidade v_c :

$$v_c = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=T/4} = \frac{\omega r}{\cos^2\left(\omega \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{B\omega}\right) - \left(\frac{\pi}{2B}\right)\right)} = \frac{\omega r}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2B} - \frac{\pi}{2B}\right)} = \omega r.$$
(4.12)

O que corresponde à velocidade tangencial $v_t = \omega r$ da máscara na posição radial r. Consequentemente, o tempo de varredura será de aproximadamente:

$$T' = \frac{L}{\omega r}.\tag{4.13}$$

O mesmo resultado pode ser obtido considerando $\tan(u) \approx u$ (se $u \to 0$) na Equação 4.10, e isso recebe o nome de **aproximação linear do DOIT**. No entanto, usar um feixe de $L \ll L_{\text{max}}$ desperdiça grande parte da janela de modulação, resultando em vários pontos onde o sinal é constante e a imagem é vazia. O passo seguinte é verificar até onde essa aproximação é válida analisando a diferença percentual entre v_0 , a velocidade no início da modulação (na borda do feixe), e no centro da modulação, quando $L = L_{\text{max}}$:

$$v_0 = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\omega r}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2B}\right)},\tag{4.14}$$

$$\frac{v_0 - v_c}{v_c} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2B}\right)} - 1 = \tan^2\left(\frac{\pi}{2B}\right). \tag{4.15}$$

A diferença de velocidade cai para menos de 1% a partir de B = 15 e chega a 0.025% para B = 100. Portanto, é razoável assumir que a derivada de a(t) é constante para fins práticos, e que as possíveis distorções decorrentes de B baixo são relevantes na direção das bordas, correspondendo a uma contração gradual da imagem, uma vez que mais espaço é codificado por unidade de tempo. Tomando como válida a aproximação

linear, é possível modelar o efeito desse bloqueador com uma função degrau que evolui linearmente no tempo e ao longo do eixo de propagação H(y, t, z):

$$M(y,t,z) = H(k(z)(y-vt)), \quad H(y) = \begin{cases} 1, & y \ge 0\\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$
(4.16)

4.2 DISCRETIZAÇÃO

Nesta seção, as equações desenvolvidas acima serão utilizadas para construir a matriz de medição do DOIT, a fim de demonstrar que a geração de imagens do método encaixam-se no mesmo princípio de codificação dos métodos SPI ao discretizar o espaço e o tempo.

Consideremos a modulação da Equação 4.16 e que o sinal coletado pelo fotodetector é obtido em intervalos discretos. Em $t_1, H = 1$ para todo $y \ge 0$; em $t_2, H = 1$ para todo $y \ge t_2/v$; em $t_3, H = 1$ para todo $x \ge t_3/v$... Isso significa que se a taxa de aquisição dos dados $1/\Delta t$ é constante, Δx também é:

$$\Delta x = v\Delta t, \quad \Delta t = \frac{1}{v}\Delta x, \tag{4.17}$$

e essa é a relação fundamental entre o tamanho do espaço codificado e o tempo de codificação do DOIT. Para N valores do sinal, pode-se então escrever a modulação na forma de uma matriz **A** com N linhas e N colunas, onde cada linha mapeia o valor da função de Heaviside ao longo do espaço discretizado de separação Δx para cada instante de tempo separado por um intervalo de Δt . Se o feixe começa desbloqueado, e a coleta termina quando está totalmente bloqueado, temos que $A_{ij} = H(j-i)$. Por exemplo, para N = 5:

Seja o sinal coletado representado pelo vetor \vec{s} , onde cada componente corresponde a um intervalo de tempo. O perfil espacial unidimensional do objeto, mesclado com o perfil de intensidade do feixe, deve ser discretizado em N intervalos considerados constantes, constituindo um vetor \vec{o} . Suponhamos então que $\vec{s} = \mathbf{A}\vec{o}$:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ o_4 \\ o_5 \end{bmatrix} .$$
 (4.19)

O sinal s_i pode ser escrito como o produto interno entre o vetor linha $\vec{A_i}$ e o vetor coluna $\vec{o:}$

$$s_i = \vec{A}_i \cdot \vec{o} = A_{i1}o_1 + A_{i2}o_2 + \cdots$$
(4.20)

e como $A_{ij} = 1$ se $j \ge i$ e $A_{ij} = 0$ se j < i, a soma se simplifica para:

$$s_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} o_i = \sum_{j=i}^N o_i.$$
(4.21)

Por essas propriedades, s_i é equivalente a uma soma de Riemann sobre uma função o, ou seja, uma integral discretizada. Isso não corresponde exatamente ao sinal medido, pois aqui o(x) é discretizado, enquanto que na realidade o fotodetector recebe as contribuições de uma distribuição contínua de intensidade (conforme a Equação 4.1). Com um número de pontos grande o suficiente, essa aproximação não causa tantas perdas.

A partir do sinal, podemos reobter \vec{o} utilizando a matriz inversa de A:

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{s} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{A}}\vec{o},$$

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{s} = \vec{o},$$
(4.22)

onde A^{-1} é uma matriz composta por duas diagonais de sinais opostos:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 (4.23)

Por exemplo, seja $\vec{o} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ o perfil de um feixe homogêneo bloqueado totalmente por um objeto na coordenada do centro, então o produto da Eq. 4.19 resulta em:

$$\vec{s} = \mathbf{A}\vec{o} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
 (4.24)

Aplicando a inversa, naturalmente recupera-se a matriz \vec{o} :

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 \\ 3-2 \\ 2-2 \\ 2-1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{o}.$$
(4.25)

De forma generalizada,

$$[\mathbf{A}^{-1}]_i \vec{s} = \frac{s_i - s_{i+1}}{\Delta i}.$$
(4.26)

A matriz \mathbf{A}^{-1} pode ser identificada como a matriz derivada discreta ao considerar que uma variação Δi nas matrizes é uma variação de Δt no tempo:

$$\frac{s(t) - s(t + \Delta t)}{\Delta t} \approx -\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}.$$
(4.27)

Verifica-se assim a equivalência entre a operação de decodificação pela construção da matriz de medição e a prevista pelo formalismo diferencial. Como a operação é resumida à diferença entre valores vizinhos, é desnecessário guardar uma matriz de decodificação, o que diminui o custo computacional do método. Nota-se que aqui o princípio de codificação é utilizado para cada linha que constitui uma imagem, enquanto em métodos SPI convencionais as operações são feitas com objetos bidimensionais transformados em sequências unidimensionais.

4.3 MODELOS DE ACELERAÇÃO DO DOIT

O modelo utilizado atualmente, representado pela Figura 26b, permite a sincronização entre o translador e o controlador do *chopper*, de forma que é possível tomar múltiplas medidas sobre a mesma linha e reduzir o ruído tomando a média antes de fazer o deslocamento da amostra para medir a linha seguinte. Apesar de fornecer boa precisão, esse modelo é incompatível com imageamento rápido, pois uma imagem pode levar de segundos a minutos para ser feita. Qualquer sistema que consiga realizar o bloqueio gradual do feixe e então causar um deslocamento relativo entre a amostra e o feixe gera um sinal que pode ser decodificado pelos princípios do DOIT. Sendo assim, pode-se pensar em outros modelos que gerem imagem mais rapidamente.

O primeiro modelo cogitado envolvia a inversão da relação de movimento entre o feixe e a amostra, mantendo a amostra estática e varrendo o feixe sobre a amostra lentamente com um espelho poligonal, enquanto o *chopper* faz a modulação sobre o feixe algumas ordens de grandeza mais rápido. Como discutido no Capítulo 3, os espelhos poligonais disponíveis no mercado possuem um limite inferior na sua frequência de rotação (abaixo do qual seus componentes passam a se desgastar mais rapidamnte), o que inviabiliza esse modelo, pois a frequência do espelho teria de ser muito abaixo desse valor. A alternativa nesse caso seria inverter a ordem de grandeza relativa da velocidade entre o componente responsável pela translação e o da modulação, isto é, fazer com que o objeto seja escaneado pelo espelho poligonal múltiplas vezes em uma única modulação do *chopper*, e então tomar a derivada entre linhas após juntar o sinal. Um defeito intrínseco desse modelo seria uma distorção de enviesamento no eixo de translação. No DOIT tradicional, dentro de um período de modulação em y, a coordenada x do pixel codificado é constante. Neste modelo, o pixel codificado sofre um deslocamento gradual de Δx ao longo de um período de modulação, de forma que se o período de escaneamento T_P dividido pelo número de linhas for igual ao período de modulação T_C , a linha codificada termina na mesma coordenada x em que a seguinte começa. Sendo assim, as linhas codificadas adquirem um enviesamento de um pixel, e o formato real do quadro é o de um paralelogramo. Esse efeito tornaria-se menos relevante (proporcionalmente) conforme o tamanho da imagem fosse aumentado.

Embora seja teoricamente possível, o alinhamento óptico desse sistema seria complexo: seria necessário usar uma ou mais lentes para converter a variação de orientação criada pelo espelho poligonal em variação de posição, assim como no SPI-ASAP, mas mantendo o feixe como uma linha. Além disso, não há sincronização entre o escaneamento e modulação, exigindo que $T_C = p_y T_P$, onde p_y é um número inteiro de pixels, e que as frequências permaneçam em torno desses valores nominais, de forma que as oscilações não as façam acumular atrasos com o tempo, o que dificultaria a separação de dados para a tomada de derivada entre linhas. Se um espelho de 16 faces fosse utilizado, a sua grande abertura angular faria uma parte considerável da janela de escaneamento ser descartada - utilizando o caso do SPI-ASAP, em torno de 92% dos pontos seriam vazios pois o feixe não chega à amostra, então mais idealmente o período de modulação do *chopper* deve corresponder a esse intervalo, o que não é algo medido facilmente.

5 DERIVANDO UM SISTEMA MAIS RÁPIDO

Como discutido na seção 4.3, a aceleração do DOIT através de componentes optomecânicos não é trivial. Pode-se argumentar que, considerando todo o trabalho para tornar um modelo com espelho poligonal viável, é melhor utilizar uma técnica mais sofisticada como o SPI-ASAP. Sendo assim, é melhor buscar uma alternativa que mantenha sua simplicidade. Neste Capítulo, será apresentada a teoria que revela um novo método diferencial com potencial de gerar imagens em altas velocidades.

5.1 A BASE TEÓRICA DO 2DOIT

O princípio do DOIT até então foi utilizado em uma única direção, obtendo linhas de dados distintas. A necessidade de deslocamento relativo entre feixe e objeto se provou um empecilho na tentativa de aceleração do sistema, então consideremos um feixe bidimensional estático representado por U(x, y) e um perfil de transmissividade ou refletividade de um objeto bidimensional O(x, y). A modulação ao longo de y agora codifica a soma de todos os perfis unidimensionais ao longo da direção perpendicular. Partindo da equação 4.2, temos:

$$s(t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_y(x, y, t) \left| U(x, y) O(x, y) \right|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y.$$
(5.1)

Novamente, o integrando é identificado como o perfil mesclado do objeto e do feixe, que será a imagem I(x, y) a ser recuperada:

$$I(x,y) \equiv |U(x,y)O(x,y)|^{2}.$$
(5.2)

A equação da reta que definia a coordenada a(t) era função da posição ao longo do eixo x, o que agora apresenta um problema para os limites de integração. Isso decorre do formato do setor ser trapezoidal ao invés de retangular, e da modulação ser um movimento rotacional ao invés de translacional. Consideremos que o modulador faça um movimento perfeitamente vertical, de forma que a(t) é invariante com x. Isso permite remover $M_y(x, y)$ do integrando, assim como antes:

$$s(t) \propto \int_{a(t)}^{L_y} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y.$$
(5.3)

Consideremos que a integral dupla possui uma solução $\Phi(x, y)$, então:

$$\phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int I(x, y) \, \mathrm{d}y, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \,\partial y} \equiv I(x, y),\tag{5.5}$$

então a integral dupla resulta em:

$$s(t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi(x, L_y) - \phi(x, a(t))\right) \,\mathrm{d}x,\tag{5.6}$$

$$s(t) \propto [\Phi(\infty, L_y) - \Phi(-\infty, L_y)] - [\Phi(\infty, a(t)) - \Phi(-\infty, a(t))],$$
 (5.7)

e sua derivada temporal retorna:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \propto \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \left(\phi(-\infty, a(t)) - \phi(\infty, a(t)) \right), \tag{5.8}$$

o que evidentemente é uma função unidimensional. Sendo assim, deve-se introduzir uma nova modulação a fim de tornar Φ bidimensional. Inserindo um modulador perpendicular representado por $M_x(x, y)$, cuja borda é descrita pela coordenada b(y, t), assumida como constante ao longo de y, tem-se o esquema representado pela Figura 30.

Figura 30 – Representação da integral do sinal com a presença de dois moduladores.



Fonte: : O autor.

A integral dupla sobre o perfil de intensidade se torna:

$$s(t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_x(x, y, t) M_y(x, y, t) |U(x, y)O(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
(5.9)

$$s(t) \propto \int_{b(t)}^{L_x} \int_{a(t)}^{L_y} |U(x,y)O(x,y)|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x, \tag{5.10}$$

$$s(t) \propto \int_{b(t)}^{L_x} \left(\phi(x, L_y) - \phi(x, a(t))\right) \,\mathrm{d}x,$$
 (5.11)

$$s(t) \propto \left[\Phi(L_x, L_y) - \Phi(b(t), L_y)\right] - \left[\Phi(L_x, a(t)) - \Phi(b(t), a(t))\right],$$
(5.12)

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\Phi(b(t), a(t)) - \Phi(b(t), L_y) - \Phi(L_x, a(t)) \right].$$
(5.13)

Essa derivada requer cautela, pois Φ agora é uma função de duas variáveis distintas que dependem do tempo. Pode-se tentar tomar a derivada total:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(b(t),a(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\Phi_x(b(t),a(t)) + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\Phi_y(b(t),a(t)).$$
(5.14)

Seguir com esse cálculo, no entanto, não resolve o problema de que a função resultante ainda será unidimensional. Façamos as seguintes imposições:

- 1. A modulação descrita por a(t) percorre uma distância L_y em tempo T_y .
- 2. A modulação descrita por b(t) percorre uma distância L_x em tempo $T_x \ll T_y$.
- 3. Ao fim de cada periodo T_x , a borda descrita por b(t) retorna instantaneamente para x = 0.
- 4. A razão entre os períodos das modulações, T_x/T_y , é um número inteiro N.

Nessas condições, o produto das duas modulações da Equação 5.9 resulta no campo representado pela Figura 31:

Figura 31 – Evolução temporal do campo binário formado pelo produto das modulações independentes $M_x(x, y, t)M_y(x, y, t)$ ao longo de um ciclo da modulação rápida (no eixo x).



Fonte: : O autor.

Isso permite fazer um remapeamento com s(t), de forma a torná-la uma função bidimensional s(t, n), aproveitando a relação periódica da modulação rápida:

$$s(t + (n-1)T_x) \to s(t,n), \quad 0 \le t \le T_x,$$
(5.15)

sendo n uma variável discreta chamada **número de linha** restrita a $0 < n \le N$. Se s(t) for tratado como um conjunto de valores (um vetor), então, em termos da função Remap, ele se torna uma s matriz $(T_x \times N)$:

$$\mathbf{s} = \operatorname{Remap}(\vec{s}, (N, T_x)) \tag{5.16}$$

A coordenada da borda da modulação rápida permanece como b = b(t), mas a da modulação lenta se torna a = a(t, n), de acordo com a seguinte função:

$$a(t,n) = \frac{L_y}{N} \left(\frac{t}{T_x} + n\right).$$
(5.17)

Temos as derivadas parciais:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_n = \frac{L_y}{NT_x}, \quad \left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)_t = \frac{L_y}{N}, \quad \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_n = \frac{L_x}{T_x}, \quad \left(\frac{\partial b}{\partial n}\right)_t = 0.$$
(5.18)

Prossigamos agora para tomar a derivada mista do sinal:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t \,\partial n} \propto \frac{\partial^2}{\partial t \,\partial n} \Phi(b(t), a(t, n)) - \frac{\partial^2}{\partial t \,\partial n} \Phi(b(t), L_y) - \frac{\partial^2}{\partial t \,\partial n} \Phi(L_x, a(t, n))$$
(5.19)
$$\frac{\partial a}{\partial t \,\partial n} \left(\frac{\partial a}{\partial t \,\partial n} \Phi(b(t), a(t, n)) - \frac{\partial^2}{\partial t \,\partial n} \Phi(b(t), L_y) - \frac{\partial^2}{\partial t \,\partial n} \Phi(L_x, a(t, n)) \right)$$

$$= \frac{\partial n}{\partial t} \left(\frac{\partial t}{\partial t} \Phi_{yy}(b(t), a(t, n)) + \frac{\partial t}{\partial t} \Phi_{xy}(b(t), a(t, n)) \right)$$

$$+ \frac{\partial^2 a}{\partial n \partial t} \Phi_y(b(t), a(t, n)) - \frac{\partial a}{\partial n} \frac{\partial a}{\partial t} \Phi_{yy}(L_x, a(t, n)) - \frac{\partial^2 a}{\partial n \partial t} \Phi_y(L_x, a(t, n))$$

$$= \frac{L_y^2}{N^2 T_x} \Phi_{yy}(b(t), a(t, n)) + \frac{L_y L_x}{N T_x^2} \Phi_{xy}(b(t), a(t, n)) - \frac{L_y^2}{N^2 T_x} \Phi_{yy}(L_x, a(t, n))$$

$$= \frac{L_y L_x}{N T_x^2} \Phi_{xy}(b(t), a(t, n)) + \frac{L_y^2}{N^2 T_x} \left(\Phi_{yy}(b(t), a(t, n)) - \Phi_{yy}(L_x, a(t, n)) \right).$$
(5.20)
(5.21)

Fazendo $b(t) \to x'$ e $a(t, n) \to y'$, temos $\Phi_{xy}(x', y') \equiv I(x', y')$ pela Equação 5.4. Essa mudança de variáveis não recupera exatamente o sistema de coordenadas original, pois a dependência de *a* com *t* implica que a coordenada *y'* possui dependência com *x*, de acordo com as equações:

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{L_y}{NL_x}x,$$
 (5.22)

de forma que y avança L_y/N ao longo de um comprimento L_x no eixo x. O remapeamento que corrige isso analiticamente é trivial:

$$x' \to x', \quad y' \to y' - \frac{L_y}{NL_x}x.$$
 (5.23)

No entanto, ao se tratar de valores discretos, como será demonstrado adiante, esse remapeamento corrige a posição dos pixels ao custo da qualidade da imagem. Resta analisar o par de termos residuais, dependentes da derivada de segunda ordem de Φ em relação ao eixo da modulação lenta. Esses termos são provenientes da modulação lenta ocorrer simultaneamente com a modulação rápida, pois, se considerássemos $\partial a/\partial t = 0$, ou seja, o caso ideal em que a(t) avança de forma descontínua ao fim de toda linha, apenas o termo de ordem mista sobreviveria na Equação 5.20. Além disso, os termos de segunda ordem possuem um fator 1/N a mais, indicando que sua intensidade deve ser de ordem menor que a da imagem. No limite de $N \to \infty$, o avanço de a(t) por linha tende a uma quantia infinitesimal, e essa contribuição torna-se cada vez menor em relação à dimensão da imagem, o que é uma situação semelhante ao caso em que a(t) não se move durante a modulação do eixo x. Por fim, diferenças de segunda ordem em y devem se acentuar em regiões de transição rápida nesse eixo, mas a forma da função sugere que padrões horizontais surgirão, pois a combinação dos termos é a de uma diferença entre o valor de borda (em $x = L_x$) e cada valor de x.

Talvez seja possível isolar o efeito dos "fantasmas" de segunda ordem a partir do

próprio sinal a partir de $\partial^2 s / \partial n^2$:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} \propto \frac{\partial^2}{\partial n^2} \Phi(b(t), a(t, n)) - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \Phi(b(t), L_y) - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \Phi(L_x, a(t, n)),$$
(5.24)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} \propto \left[\left(\frac{\partial a}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial n^2} \frac{\partial}{\partial n} \right] \left[\Phi(b(t), a(t, n) - \Phi(L_y, a(t, n))) \right], \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} \propto \frac{L_y^2}{N^2} \left(\Phi_{yy}(b(t), a(t, n) - \Phi_{yy}(L_y, a(t, n))) \right).$$
(5.26)

Dividindo a derivada de segunda ordem por T_x , tem-se exatamente o par de termos de segunda ordem indesejados da Equação 5.21. Sendo assim, basta subtrair as duas equações a fim de isolar a imagem:

$$s_{xy}(x',y') - \frac{1}{T_x} s_{yy}(x',y') = \frac{L_y^2}{NT_x^2} \Phi_{xy}(x',y') \equiv I(x',y').$$
(5.27)

Esse resultado confirma que, matematicamente, é possível fazer uma recuperação perfeita de uma imagem tomando as derivadas mistas, caracterizando assim a *Double Derivative Optical Imaging Technique* ou **2DOIT**. O restante deste capítulo irá partir deste caso contínuo e idealizado e encarar progressivamente os problemas esquivados através de aproximações, a fim de criar um aparato matemático que possa reconstruir imagens a partir de dados obtidos de um sistema real.

5.2 MODULAÇÃO SIMULTÂNEA

Nesta seção, as características da evolução temporal do sinal serão abordadas em mais detalhes. Supondo uma imagem perfeitamente homogênea I(x, y) = k, a evolução temporal do sinal depende apenas dos limitantes integral da Equação 5.10. Ainda sob as condições ideais, tem-se:

$$s(t) \propto \int_{a(t)}^{L_y} \int_{b(t)}^{L_x} dy \, dy = (L_y - a(t))(L_x - b(t)).$$
 (5.28)

A periodicidade de b(t) pode ser representada pela função modular:

$$b(t) = \frac{L_x}{T_x} (t \mod T_x), \tag{5.29}$$

:

$$\therefore s(t) \propto L_y \left(1 - \frac{t}{NT_x} \right) L_x \left(1 - \frac{1}{T_x} (t \mod T_x) \right).$$
(5.30)

Fazendo o remapeamento, a função modular desaparece:

$$s(t,n) \propto L_x L_y \left(1 - \frac{t + (n-1)T_x}{NT_x} \right) \left(1 - \frac{t}{T_x} \right).$$
(5.31)

Portanto, o sinal ideal característico é composto de polinômios de segundo grau, variando apenas o coeficiente n. As características dessa função podem ser facilmente identificadas

na Figura 32. A independência das modulações faz com que o sinal decaia de acordo com uma função linear ao longo de uma imagem, multiplicada por uma função de decaimento linear com período N vezes menor. Após o remapeamento, tem-se um mapa de cor equivalente à multiplicação de dois gradientes perpendiculares, como mostra a Figura 33.





Fonte: : O autor.

Figura 33 – Mapa de cor de s(t,n) para um período $T_x = 80$ (unidades arbitrárias) e N = 20 linhas.



No entanto, a imposição de que b(t) seja restaurada para o início do campo de visão a cada ciclo de modulação só é possível com um DMD, o que não será o ideal para atingir o objetivo de aceleração, pois estaria sob as mesmas limitações discutidas no Capítulo 3. No caso de um objeto que module através de movimento, como um *chopper*, a modulação seguinte a um bloqueio é um desbloqueio, alterando a função $M_x(x,t)$ para:

$$M_x(x,t) = H\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L_x} - \frac{\pi t}{T_x}\right)\right),\tag{5.32}$$

sendo H(x) é a função degrau. O resultado da integral de 0 a L_x de $M_x(x,t)$ torna-se a onda triangular, que, multiplicado pela integral de M_y , resulta na função apresentada na

Figura 34:

$$L_x - b(t) = \frac{L_x}{2} + \frac{L_x}{\pi} \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_x}\right)\right)$$
(5.33)

ou
$$L_x - b(t) = \begin{cases} L_x(1 - t/T_x), & 0 \le t < T_x \\ L_x(t/T_x - 1), & T_x \le t < 2T_x \\ L_x(3 - t/T_x), & 2T_x \le t < 3T_x \\ \vdots \end{cases}$$
 (5.34)





Fonte: : O autor.

Após o remapeamento, surge um impedimento imediato para a tomada de derivadas na direção y: a modulação em x faz o sinal alternar entre descidas e subidas simultaneamente com o decaimento devido à modulação em y. Os valores das linhas em ne n + 1 para um t constante encontram-se em configurações opostas da modulação em x, como é evidenciado pela Figura 35. Embora o pixel codificado seja o mesmo, a direção da derivada em x é invertida em relação à linha vizinha. No DOIT, bastaria tomar o módulo das derivadas para tornar as duas linhas compatíveis e compor a imagem, enquanto no 2DOIT, apenas tomar o módulo de $\partial s/\partial t$ não leva em conta o decrescimento do sinal devido à modulação em y.

É possível tentar aplicar uma transformação sobre as linhas pares a fim de gerar uma série temporal semelhante à Figura 34. Numericamente, a seguinte transformação:

$$s(t,n) \rightarrow 1 - \bar{s}(t,n) - n/N, \quad n \text{ par}, \quad \bar{s} = \frac{s - \min s}{\max s - \min s}$$

$$(5.35)$$

é uma tentiva razoável a se fazer, uma vez que o sinal sem modulação em x deve decair uma fração de 1/N do valor total a cada linha. No entanto, qualquer desvio pode comprometer por completo a decodificação da imagem devido à sensibilidade da operação de derivada. Esse modo de decodificação recebe o nome de **modo singular**. A efetividade de tentativas



Figura 35 – Mapa de cor de s(t,n) para um período $T_x = 80$ (unidades arbitrárias) e N = 20 linhas.

de regularização do sinal no modo singular será discutida posteriormente. Consideremos o seguinte remapeamento:

$$s(t+2(n'-1)T_x) \to s(t,n'), \quad 0 \le t \le 2T_x,$$
(5.36)

$$\mathbf{s} = \operatorname{Remap}(\vec{s}, (N/2, 2T_x)) \tag{5.37}$$

que é equivalente ao remapeamento da Equação 5.15, mas considerando dois períodos de modulação rápida por número de linha. O mapa de cor da Figura 35 agora possui o dobro da largura temporal, contendo duas linhas, uma de modulação decrescente em x e outra de modulação crescente, como mostra a Figura 36. A derivada temporal (sobre o eixo x) segue inalterada, exceto possivelmente pelo ponto de transição entre duas linhas.

A derivada em relação ao número de linha reduzido n' agora equivale à diferença entre as linhas n' e n' + 1, o que, no sistema de coordenadas singular, é uma diferença entre as linhas n e n + 2, que sempre possuem a mesma orientação de modulação. O resultado dessa transformação é o surgimento de um par de imagens, que pode então ser remapeado de I(t, n') para I(t, n) e compor uma imagem de dimensões semelhantes às do modo singular. Esse método alternativo de decodificação recebe o nome de **modo dual** de imageamento.

5.3 FORMULAÇÃO MATRICIAL

Considerando que as medições são discretas, é mais apropriado escrever os comprimentos em pixels. Isso é importante para o ajuste de variáveis, como ficará claro. Seja o intervalo entre a coleta de dois dados T_d , então a quantidade de pixels p_x em x é o número de intervalos inteiros de coleta dentro de um período de modulação em x. Em

Figura 36 – Mapa de cor da Figura 35 no remapeamento alternativo, seguido das derivadas relevantes em cor azul-branco-vermelho (negativo a positivo) e o módulo da imagem recuperada em escala cinza.



termos de frequências, temos:

$$p_x = \operatorname{int}\left(\frac{f_d}{f_x}\right). \tag{5.38}$$

Para a direção y, o número de pixels p_y é a razão entre o número de pixels dentro do período total da coleta de dados da imagem, o que corresponde a uma modulação no eixo y, e o número de pontos por linha:

$$p_y = \frac{Np_x}{p_x} = \operatorname{int}\left(\frac{f_x}{f_y}\right),\tag{5.39}$$

a proporção do quadro será da ordem:

$$\frac{p_x}{p_y} \sim \frac{f_d f_y}{f_x^2},\tag{5.40}$$

e o número N_d de pontos de coleta necessários para formar uma imagem independe da frequência em x, pois é a modulação no eixo lento que determina o início e fim do quadro:

$$N_d \sim p_x p_y \sim \operatorname{int}\left(\frac{f_d}{f_y}\right)$$
 (5.41)

A função int(x) é de escolha arbitrária, contanto que garanta que o resultado seja um número inteiro. Para fins práticos, escolheremos sempre valores que resultarão em valores inteiros diretamente. Os números que não satisfazerem essas condições de multiplicidade serão chamados de **múltiplos incompatíveis**. Assim como para o DOIT, é possível representar a codificação e decodificação matricialmente, construindo uma matriz de medição. Isso requer discretizar espaço e tempo, escrevendo elementos de matrizes a partir dos valores médios dos intervalos dos campos contínuos que eles representam. Por exemplo, para um campo como o da Figura 31, discretizaremos o tempo de forma que a modulação rápida permanece binária, ou seja, avança uma coluna por unidade de tempo. A consequência disso é que a modulação lenta deixa de ser binária, e seu valor passa a ser a porcentagem da região que não está bloqueada, como mostra a Figura 37. Ao escolher o número de dados por modulação rápida como p_x e o número de linhas como p_y , a matriz associada terá as dimensões $p_x \times p_y$.

Figura 37 – Evolução temporal do campo formado pelo produto das modulações independentes $M_x(x, y, t)M_y(x, y, t)$ ao longo de um ciclo da modulação rápida (no eixo x) sob discretização.



Fonte: : O autor.

Para as dimensões 5×5 , temos:

e a modulação total é dada pelos produtos dos elementos individuais das matrizes:

$$M(i, j, t) = M_x(i, j, t)M_y(i, j, t).$$
(5.44)

O objeto matemático que contém todas essas informações é um tensor de ordem 3, de dimensões $p_x \times p_y \times p_x p_y$. Desejamos que o sinal *s*, a matriz de medição **A** e o objeto *o* sejam bidimensionais e que respeitem o princípio de codificação:

$$s = \mathbf{A}o, \tag{5.45}$$

$$o = \mathbf{A}^{-1}s. \tag{5.46}$$

O campo que descreve o perfil do objeto I(x, y) pode ser representado por uma matriz **O** de dimensões $p_x \times p_y$, que pode então ser remodelada em um vetor o de dimensão $p_x p_y$. Nas condições corretas, o sinal medido deve ser um vetor s de $p_x p_y$ componentes. Após a multiplicação pela matriz de medição inversa \mathbf{A}^{-1} , o resultado pode ser remodelado em uma matriz $p_x \times p_y$, compondo assim a imagem. Para transformar o tensor M em uma matriz de medição \mathbf{A} quadrada (para que haja uma inversa), basta remapear as matrizes correspondentes a cada instante de tempo em vetores de $p_x p_y$ elementos, de forma que a t-ésima linha da nova matriz contém p_y submatrizes de dimensão $1 \times p_x$, correspondendo às linhas de M(t):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_{1,1,0} & M_{1,2,0} & \cdots & M_{1,p_x,0} & M_{2,1,0} & \cdots & M_{p_y,p_x,0} \\ M_{1,1,1} & M_{1,2,1} & \cdots & M_{1,p_x,1} & M_{2,1,1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ M_{1,1,p_xp_y} & M_{1,2,p_xp_y} & \cdots & M_{1,p_x,p_xp_y} & M_{2,1,p_xp_y} & \cdots & M_{p_y,p_x,p_xp_y} \end{bmatrix}.$$
(5.47)

Seja A de dimensões $XY \times XY$ e \mathbf{B}_{ij} um conjunto de submatrizes de dimensões $X \times X$, então A pode ser gerada a partir da seguinte estrutura:

$$F(i,x) = \begin{cases} x, & i \mod 2 = 0\\ 1-x, & i \mod 2 = 1 \end{cases}$$
(5.48)

Para $1 \le i \le Y$ e $1 \le j \le Y$: Para $1 \le m \le X$ e $1 \le n \le X$:

$$\mathbf{B_{ij}}(m,n) = F(i, H(m-n))\frac{X-n}{X}, \qquad i = j$$
(5.49)

$$\mathbf{B_{ij}}(m,n) = F(i, H(m-n)), \qquad i < j$$
(5.50)

$$B_{ij}(m,n) = 0, \qquad i > j$$
 (5.51)

$$\mathbf{A}(Xi:X(i+1),Xj:X(j+1)) \to \mathbf{B}_{\mathbf{ij}}$$
(5.52)

A matriz **A** para N = X = Y = 4 é apresentado na Figura 38. Como o período de modulação rápida compreende 4 intervalos de tempo e cobre 4 intervalos espaciais, a matriz de medição apresenta 4 grupos de 4 submatrizes 4×4 , cada uma representando a evolução temporal de uma mesma linha ao longo de um período da modulação rápida, para cada 1/4 da modulação lenta. Por consequência, apenas as submatrizes dentro da diagonal principal apresentam os valores não inteiros. Há um grande problema aqui: existem elementos nulos ao longo de todas as diagonais e antidiagonais da matriz, o que implica em determinante igual a zero. Isso significa que **A** não possui inversa!

Figura 38 – Matriz de medição (4×4) do 2DOIT, com diagonais principais destacadas.

(a) Representação matricial com grupos semelhantes destacados em cor.









Consideremos então o caso idealizado onde b(t) retorna a x = 0 a cada ciclo. Isso equivale a fazer os elementos das submatrizes de períodos pares serem substituidos por $A(i, j) \rightarrow 1 - A(i, j)$, ou redefinir F(i, x) = x. A matriz resultante, assim como sua inversa, estão dispostas na Figura 39.


Figura 39 – Matriz de medição \mathbf{A} e sua inversa \mathbf{A}^{-1} , disposta também em escala logarítmica.



$$\max\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = N^2 (N-1)^{N-2} \tag{5.53}$$

Tabela 5 – Valores máximos da matriz \mathbf{A}^{-1} e o ajuste exato em função de N

N	\mathbf{A}^{-1}	Ajuste
2	4	$N^2(N-1)^0$
3	18	$N^2(N-1)^1$
4	144	$N^2(N-1)^2$
5	1600	$N^2(N-1)^3$
6	22500	$N^2(N-1)^4$
7	381024	$N^2(N-1)^5$
8	7529536	$N^2(N-1)^6$
-		

Fonte: : O autor.

Essa função cresce em velocidade semelhante à função fatorial. É possível verificar isso tomando a razão entre as funções em escala logaritmica:

$$\ln\left(N^2(N-1)^{N-2}\right) = N\ln\left(N-1\right) + 2\ln\left(\frac{N}{N-1}\right),\tag{5.54}$$

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N \qquad \text{(Pela fórmula de Stirling)}, \qquad (5.55)$$

$$\frac{N\ln(N)}{N\ln(N-1)} - \frac{N}{N\ln(N-1)} \approx 1 - \frac{1}{\ln(N)} \xrightarrow{N \to \infty} 1.$$
 (5.56)

Isso é um indicador muito ruim para a estabilidade numérica da função, o que é coerente com o resultado obtido para \mathbf{A}^{-1} com N alto. Também é possível generalizar a Equação

5.53 para os valores máximos de todas as diagonais. Sejam (m, n) os índices que localizam as submatrizes $\mathbf{D}_{m,n}$ de dimensão $N \times N$ dentro de \mathbf{A}^{-1} . Pela simetria diagonal, existem apenas N diagonais únicas, caracterizadas pelo número $\delta = n - m$. Então:

$$\max(\mathbf{D}_{\delta}) = \begin{cases} N^2 (N-1)^{\delta-1}, & 1 \le n-m \le N-1\\ N, & n=m \end{cases}$$
(5.57)

Analisando os demais valores de perto, é natural suspeitar que haja um padrão bem definido para os pares de valores ao longo de cada diagonal, o que poderia sugerir uma fórmula geral para a matriz inversa, evitando assim a necessidade de fazer cálculos pesados e instáveis de inversão de matriz. A partir de N = 2 até N = 8, foi possível elaborar fórmulas para os fatores de decaimento ao longo das diagonais a partir dos números naturais. O método é o seguinte: partindo do valor máximo, uma mesma coluna dentro de cada submatriz é analisada. Divide-se o valor daquela coluna pelo valor máximo da submatriz, e então busca-se os coeficientes que compõem aquele número partindo do pressuposto que eles serão potências do menor número natural possível. Se existe um padrão entre submatrizes dependente de δ , então existe uma fórmula para o expoente de cada coeficiente em função da ordem da diagonal, para cada coluna. Seja d o valor máximo de uma diagonal, então os demais pares de valores dentro do subgrupo satisfazem:

$$\begin{array}{ll} \text{Para } 0 \leq \delta \leq 1 \text{:} \quad C_m = \begin{bmatrix} \left(\frac{N}{N}\right)^{1+\delta}, \left(\frac{N}{N-1}\right)^{1+\delta}, \cdots, \left(\frac{N}{1}\right)^{1+\delta} \end{bmatrix} \\ \\ \left\{ \begin{array}{ll} N = 3 \text{:} \ C_m = \\ N = 4 \text{:} \ C_m = \\ N = 5 \text{:} \ C_m = \\ N = 5 \text{:} \ C_m = \\ N = 6 \text{:} \ C_m = \\ \end{array} \right. \begin{bmatrix} 0, \frac{d}{2^{\delta}}, d \\ 0, \frac{d}{3^{\delta}}, \frac{d}{2^{2}3^{\delta-2}}, d \\ 0, \frac{d}{3^{\delta}2^{\delta-2}}, \frac{d}{2^{\delta}3^{\delta-2}4^{\delta-2}}, d, \\ \end{bmatrix} \\ \\ \left[0, \frac{d}{5^{2\delta}}, \frac{d}{2^{m+2}5^{\delta-2}}, \frac{d}{3^{2}5^{\delta-2}}, \frac{d}{2^{4-\delta}5^{\delta-2}}, d \\ \\ \end{array} \right] \end{array}$$

Como para o N seguinte sempre há uma coluna a mais, é difícil dizer qual fórmula a descreverá. Talvez haja um padrão bem definido para N par e outro para N ímpar. Além disso, para N = 7 e N = 8, mais coeficientes por termo começam a surgir. A partir desse ponto, também há uma incerteza sobre a expressão correta quando um número pode ser múltiplo de outro. Por exemplo, $2^{3\delta-4} = 4^{m-2}2^m$, e ambos parecem igualmente válidos. Todos esses problemas impedem que indução matemática seja utilizada para prever os coeficientes das diagonais para um N qualquer. De todo modo, a instabilidade numérica da matriz já é razão suficiente para abandonar essa abordagem.

5.4 APROXIMAÇÃO BINÁRIA

Os problemas da matriz de medição do 2DOIT parecem grandes o suficiente para concluir-se que o método não funciona na prática. No entanto, pelo formalismo diferencial da Seção 5.1, sabemos que a decodificação deve ser possível. A instabilidade numérica de \mathbf{A}^{-1} se dá exclusivamente pelos valores não binários associados à modulação lenta. Façamos então novamente a aproximação em que a(t) permanece parada ao longo das modulações rápidas, movendo-se instantaneamente para a linha seguinte ao fim de cada uma. Sendo assim, a Equação 5.50 torna-se idêntica à 5.49. Isso recupera a binariedade da matriz de medição, e por consequência sua matriz inversa também deve ser binária. Sabemos que sob essas condições, a operação de derivada mista retorna **exatamente** o perfil do objeto, sem quaisquer distorções. Os resultados para N = 4 estão dispostos na Figura 40.





Tem-se dois pares de diagonais, o que se assemelha à matriz de derivada discreta do DOIT (um par de diagonais). A simetria das submatrizes preserva-se para N crescente, e os valores permanecem fixos em [-1, 1] pela binaridade de **A**. Vejamos o que acontece com o sinal s para N = 3 (indexado ciclicamente por construção):

$$o' = \mathbf{A}^{-1}s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \\ s_{31} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} - s_{12} - s_{21} + s_{22} \\ s_{12} - s_{23} - s_{22} + s_{23} \\ s_{13} - s_{31} \\ \vdots \end{bmatrix}$$
(5.58)

Esse resultado pode ser identificado como a derivada mista em relação a x e y:

$$o_{i}' = \left[\underbrace{\frac{\partial s/\partial x}{s_{i,j} - s_{i,j+1}} - \left(\underbrace{\frac{\partial s/\partial x}{s_{i+1,j} - s_{i+1,j+1}}}_{\partial s/\partial y}\right)}_{\partial s/\partial y}\right]$$
(5.59)

Nota-se que o N-ésimo termo sempre produz um valor que não possui significado físico (considerando todas as linhas, compõe-se uma coluna de valores descartáveis), e que a última submatriz de \mathbf{A}^{-1} não possui uma segunda diagonal, então os últimos N valores de O' (sua última linha) também não possuem significado. Isso é a consequência natural da operação de diferença ser tomada entre pares, sempre resultando em um conjunto com um elemento a menos no eixo em que foi aplicada. Sendo assim, a matriz de medição viável possui uma decodificação equivalente à prevista pelo formalismo diferencial.

Pode-se perguntar o que aconteceria se o tamanho da matriz de medição fosse alterado para considerar passos discretos da modulação lenta. Para isso, a dimensão vertical da matriz teria de ser esticada em N elementos, como mostra Figura 41.





Fonte: : O autor.

No entanto, se o número de intervalos de tempo permanecer constante, a matriz de medição resultante não é quadrada, uma vez que o número de medições precisa ser igual ao número de pixels. Pode-se então considerar N cópias de cada medição para regularizar o tamanho da matriz, mas isso gera linhas idênticas na matriz de medição, implicando que sua inversão é impossível. A partir daí, as tentativas de regularizar a matriz envolvem inserir padrões arbitrários ou recorrer novamente a valores não binários, o que vai na contramão de simplificar o problema.

6 SIMULAÇÕES DO 2DOIT

Neste capítulo, o processo de geração e decodificação de dados será feito no âmbito das simulações. Houve um trabalho extensivo de testes com diferentes tipos de padrões e parâmetros do sistema, realizado antes mesmo da teoria estar satisfatoriamente desenvolvida. Revisitando os resultados, os efeitos observados têm razões muito mais intuitivas do que naquele primeiro momento. Por isso, o que será apresentado é apenas um recorte dos aprendizados gerais obtidos nesses testes. Os conhecimentos obtidos na Seção 5.1 serão utilizados para interpretar os defeitos de imagem que surgem das aproximações feitas para se obter a derivada mista como um método de decodificação, mas agora utilizando variáveis discretas, pois se adentrará no uso prático com dados simulacionais e experimentais.

6.1 VALIDAÇÃO DA APROXIMAÇÃO BINÁRIA

O primeiro teste a ser vencido é o da validade da decodificação através da tomada da derivada mista. Para gerar o sinal de teste, é possível converter uma imagem em escala cinza para uma matriz $p_x \times p_y$, redimensioná-la para um vetor de dimensão $p_x p_y$ e então aplicar a matriz de medição não binária. Não será necessário aplicar a matriz \mathbf{A}^{-1} , pois a operação de derivada mista é apenas a diferença entre pares de valores. Espera-se então que o resultado apresente as falhas advindas da aproximação binária. Para isso, imagens teste com características espaciais bem definidas foram desenhadas num editor de imagem, a fim de verificar possíveis efeitos dependentes de formato. A Figura 42 mostra os resultados para uma imagem-teste de 30 × 30 pixels.

Assim como previsto através do formalismo diferencial, dois efeitos indesejados surgiram na reconstrução da imagem. O primeiro é notadamente o surgimento de "fantasmas" a partir de transições bruscas na direção vertical. De acordo com a Equação 5.27, subtrair um termo $(1/p_x)(\partial^2 s/\partial y^2)$ deve ser suficiente para removê-los. Espera-se que a contração de dimensões por tomada de derivada possa impedir uma sobreposição perfeita entre as duas funções. Além disso, observa-se um deslocamento gradual de um pixel para cima ao longo do eixo horizontal, pois a decodificação da aproximação binária não leva em consideração o movimento contínuo da modulação lenta, o que faz com que a região codificada se mova gradualmente ao longo de uma linha, resultando em um quadro em formato de paralelogramo, assim como foi previsto para o modelo alternativo do DOIT na Seção 4.1. Isso deve ser corrigido pela transformação de enviesamento inversa da Equação 5.23. O resultado está disposto na Figura 43.

Se tratando de funções, essas duas correções deveriam resultar em uma recuperação perfeita da imagem, mas como a imagem já está "danificada" pela decodificação Figura 42 – Imagem-teste, sinal temporal, mapa de cor, derivadas e a imagem reconstruída a partir da derivada mista. O padrão xadrez da imagem-teste (abaixo das letras 'DOIT') serve como guia para observação do efeito de deslocamento gradual de um pixel para cima ao longo do eixo horizontal. As regiões em torno do centro (horizontal) possuem um deslocamento muito próximo de "meio-pixel", de forma que o valor resultante tende ao cinza. É possível notar também fantasmas de segunda ordem (linhas brancas) se propagando para a esquerda a partir de todas as transições de preto para branco ao longo do eixo vertical.



incorreta, é natural que a transformação cause perda de nitidez.

Pode-se também testar em quais condições os fantasmas de segunda ordem devem aparecer. Como a imagem acima era binária, qualquer variação entre pixels brancos e pretos resulta no valor máximo possível da derivada de segunda ordem. Para múltiplas linhas verticais com nitidez diferentes, os resultados estão dispostos na Figura 44, e para linhas de nitidez máxima, mas com comprimentos diferentes, na Figura 45. Nota-se que, devido à propagação dos fantasmas a partir do ponto de transição à esquerda de toda a imagem, não é necessariamente onde há a transição mais brusca que a imagem será mais comprometida, e sim na região vertical onde há mais transições de valores, pois os fantasmas se acumulam.

Por fim, utilizou-se fotografias de teste para verificar efeitos em um sinal mais complexo. Os resultados estão dispostas na Figura 46. Efeitos além dos que já foram discutidos não foram observados. Figura 43 – À esquerda, a derivada de segunda ordem no eixo lento (vertical). Ao centro, a imagem pós-subtração de fantasmas. À direita, a imagem após a correção de enviesamento. As linhas verdes transparentes destacam o viés da imagem sem correção.



Figura 44 – Sinal, derivadas e imagem antes e pós-correção para linhas de nitidez decrescente ao longo do eixo vertical. A primeira possui uma transição brusca de branco para preto, enquanto as demais possuem um, dois e quatro valores de transição, respectivamente. Os fantasmas de segunda ordem são mais notáveis na linha mais nítida.



6.2 TESTES COM MODULAÇÃO REALISTA

Até aqui, a decodificação foi feita no modo singular, sob as condições idealizadas de que a(t) e b(t) são constantes ao longo dos respectivos eixos perpendiculares, e que b(t)é restaurada para a posição inicial a cada ciclo de modulação, ao invés de alternar entre modulações positivas e negativas, permitindo assim o imageamento em modo singular. Realisticamente, isso só pode ser reproduzido com um DMD, o qual não permitiria uma codificação contínua e limitaria o sistema com a sua taxa de atualização. Assim como no DOIT, almejamos fazer a modulação com *choppers* ópticos de frequências de rotação f_x e f_y , em ambos os eixos. No Capítulo 4, vimos que as consequências de usar um movimento rotacional para aproximar uma varredura linear são desprezíveis na prática. Para um feixe de largura $L_x = L_y$, centrado em (r, 0), pela Equação 4.10, podemos estabelecer a equação Figura 45 – Sinal, derivadas e imagem antes e pós-correção para linhas de comprimento crescente na horizontal. Todas possuem a mesma variação na vertical, no entanto, os fantasmas são mais intensos na linha de maior comprimento, indicando que todos os pontos geram fantasmas para a esquerda, que se acumulam.



Figura 46 – Fotografia processada pela simulação do 2DOIT. (a) Imagem original. (b) Objeto 40 × 40 pré-medição. (c) Derivada mista. (d) Derivada vertical de segunda ordem. (e) Correção de fantasmas. (f) Correção de enviesamento. O resultado se assemelha bastante à imagem original, com uma perda de nitidez no eixo vertical devido às distorções e fantasmas.



Fonte: : O autor.

da reta para a borda da lâmina da modulação lenta (vertical) que parte de (r, L/2) e desce até (r, -L/2) em um ciclo de modulação:

$$a(t,x) = \tan\left(\frac{\pi}{2B_x} - 2\pi B_x f_x t\right) x.$$
(6.1)

A lâmina rápida precisa partir de uma origem em (X_0, Y_0) e sua varredura deve ser perpendicular à da lâmina lenta (ou seja, horizontal), o que impõe que $X_0 = Y_0 = r$ caso os números de lâmina B_x e B_y sejam iguais, como será assumido nos cálculos seguintes. A equação para b(t) escrita em termos da coordenada y, partindo de (r - L/2, 0) para a direita em (r + L/2, 0), é:

$$b(t,y) = \tan\left(2\pi B_y f_y t - \frac{\pi}{2B_y}\right)(Y_0 - y) + X_0$$
(6.2)

O sistema resultante está disposto na Figura 47.

Figura 47 – Sistema de coordenadas da modulação, com *choppers* de B = 10 posicionados simetricamente a uma distância r do feixe quadrado de largura L. Os eixos de rotação determinam a direção do movimento das bordas $a(t) \in b(t)$.



Fonte: : O autor.

Pela condição de múltiplicidade das frequências de modulação, $p_y B_y f_y = B_x f_x$. Se a independência das modulações for verdadeiramente válida, os efeitos do caso $B_x \neq B_y$ devem corresponder apenas às combinações das distorções associadas aos seus próprios eixos, então por simplicidade bastaria estudar o caso simétrico $B_x = B_y$ para números de lâminas distintos. Caso essa suposição não seja totalmente válida, então devem surgir efeitos de segunda ordem.

A seguir, uma opção seria resolver novamente a integral da Equação 5.9, o que requer cautela pois agora o limitante da integral em x depende de y e vice-versa. É possível trocar b ou a pelas suas inversas para mudar a dependência de variável, mas no fim ainda é necessário uma mudança de sistema de coordenadas para que a integral dupla seja feita. Ao invés disso, três abordagens distintas foram utilizadas para gerar o sinal.

6.2.1 Geração de sinal pelo Blender por traçado de raios

O programa de modelagem 3D Blender havia sido utilizado para gerar uma representação do sistema do 2DOIT de forma que seria possível observá-lo de múltiplos ângulos, o que facilitaria a apresentação do conceito e permitiria prever efeitos do sistema com base nas observações, sem a necessidade de ter o sistema ou mesmo seus componentes em mãos. No processo, surgiu a ideia de utilizar as próprias ferramentas do Blender para a geração de sinal. O programa dispõe de duas *engines* de renderização de imagens tridimensionais: a Eevee, muito otimizada para uso em tempo real do programa, sem necessidade de muito poder computacional, mas (até recentemente) incapaz de reproduzir iluminações realistas como as feitas com traçado de raios; a Cycles, que gera imagens a partir do resultado do traçado de raios de uma distribuição de aleatória com precisão, tamanho de amostragem e número de interações por raio ajustáveis, mais utilizada para processamento de imagens e animações profissionais, requerendo o poder computacional de uma GPU. Essa ferramenta permite testar a modulação em condições que não são tão facilmente escritas em termos matemáticos.

A primeira ideia de geração de sinal consistiu em converter quadros renderizados pela função de animação do programa em um sinal, somando os valores de todos os seus píxels em escala cinza. Se a modelagem do programa conseguir reproduzir imagens análogas às que chegam em um fotodetector, então deve ser possível compor o sinal s(t)a partir de $N_d = p_x p_y$ quadros. Sendo assim, os modelos dos *choppers*, C_X e C_Y foram configurados para rotacionarem a uma taxa constante, fazendo o deslocamento angular necessário dentro de $N_d = p_x p_y$ quadros de animação, para satisfazer as condições de modulação que devem gerar uma imagem de dimensões $p_x \times p_y$. Em seguida, foi colocada uma fonte de luz U com vergência baixa, centralizada com os *choppers*, para incidir sobre um plano P cuja transmissividade dependia dos valores em escala cinza do negativo de uma imagem de teste, utilizada como textura para o modelo do plano. Então, colocando um segundo plano I após essa interação para representar um anteparo de detecção, e configurando a câmera ortográfica (sem efeitos de perspectiva) para enquadrar apenas a projeção do plano da imagem sobre o anteparo, basta renderizar a animação. O resultado está disposto na Figura 48.

Os N_d quadros podem então ser salvos em formato de vídeo ou isoladamente em imagens. Os parâmetros de qualidade relevantes aqui são o tamanho das imagens e o número de amostragem por quadro. Quanto maior a imagem, mais precisa será a diferença entre os valores dos quadros, enquanto o parâmetro de amostragem reduz o ruído e melhora a precisão do traçado de raios e, consequentemente da projeção final.

São necessárias algumas dezenas de minutos para gerar as animações, a depender do tamanho e qualidade desejados. Para gerar dados de uma imagem de dimensões $2(100) \times 100$, são necessários 20000 quadros. O tamanho dos quadros da animação foram de 256×256 , totalizando em torno de 600 MB em disco. Um vídeo contendo todos os quadros possui apenas 1,57 MB, porém a compressão dos quadros adiciona ruídos na imagem, então optou-se por utilizá-las sem perdas. Utilizando a fotografia '*Cameraman*' como teste, para B = 20 e B = 100, os resultados para a decodificação em modo dual de

Figura 48 – Disposição dos modelos 3D e seus respectivos rótulos. O ponto POV representa a posição da câmera ortográfica.



Fonte: : O autor.

dados $2(40) \times 40$ estão dispostos na Figura 49.

Ficou evidente que o parâmetro de amostragem (s) é muito mais relevante para a qualidade da imagem que o tamanho dos quadros gerados para a animação, contanto que eles sejam maiores que a imagem codificada. Também é possível notar rastros muito bem definidos nas imagens, o que não foi previsto teoricamente. Como isso diminuiu com a amostragem, supôs-se que tal ruído origina-se das imperfeições da renderização da borda dos *choppers* a cada quadro. Contraintuitivamente, a imagem para B = 20 apresentou um ruído característico muito menos intenso. As razões serão discutidas na seção 6.2.3.

Esse método, no entanto, não é muito eficiente, pois mesmo com uma GPU Nvidia GeForce GTX 1060, a quantidade de dados necessários para fazer uma imagem de dezenas de pixels implica em centenas a milhares de quadros, o que pode levar muitos minutos para ser renderizado, com parâmetros de qualidade não tão satisfatórios. As imagens apresentaram um ruído característico na forma de diversas curvas fantasmas orientadas de acordo com o movimento dos *choppers*, mais acentuadas que a própria imagem em alguns casos, e desviaram o foco dos resultados relevantes. Esses resultados deram uma falsa impressão de que isso era um ruído intrínseco do 2DOIT, mas melhorar os parâmetros de qualidade do sinal mostrou que a fonte do problema era o Blender.

6.2.2 Geração de sinal pelo Blender por geometria

Devido às complicações na geração de sinal utilizando o traçado de raios da Cycles, buscou-se uma alternativa mais simples que não dependesse de computações pesadas e Figura 49 – Resultados para quatro tentativas de decodificação do sinal gerado pelo traçado de raios do Blender em parâmetros de qualidade distintos, para B = 100, em comparação com um resultado para B = 20.



Fonte: : O autor.

pudesse ser renderizada com a Eevee, apresentada na Figura 50.

Graças à geometria simples do sistema, foi possível utilizar a função Add Modifier para fazer operações lógicas (booleanos) entre modelos diferentes sem muito custo computacional. Para criar a projeção da imagem sobre o plano de detecção, é possível partir de um plano de transmissão P_Y que será interceptado pelo primeiro chopper C_Y . O booleano de diferença do plano em relação ao chopper gera uma nova forma geométrica equivalente ao campo M(x, y) limitado entre as dimensões do plano original. Uma cópia desse novo objeto, P_X , sofre a mesma operação booleana em relação ao chopper seguinte C_X . Finalmente, um objeto F' copia o resultado da operação de diferença entre um plano preto F e uma cópia (com espessura não nula) de P_X . Essas operações estão representadas na Figura 51.

O objeto F' pode ser visto como uma fenda que possui exatamente o formato da luz que consegue passar pelos *choppers* vindo de uma fonte perfeitamente colimada. Colocando a câmera sobre essa fenda em projeção ortográfica e totalmente alinhada com o eixo de propagação do feixe, basta inserir um plano I representando o objeto a ser Figura 50 – Disposição dos modelos 3D e seus respectivos rótulos. O ponto POV representa a posição da câmera ortográfica.



Fonte: : O autor.

Figura 51 – Transformações geométricas utilizadas para a criar o efeito de sombra sobre o plano do objeto modulado, em perspectiva ortográfica alinhada ao eixo de propagação da luz.



Fonte: : O autor.

modulado e ajustar seu tamanho às dimensões da fenda, e torná-lo a única fonte de luz da simulação (utilizando o modo de material emissivo).

Ao avançar o tempo, a fenda muda sua geometria, e torna-se o equivalente da sombra dos *choppers* (por ser totalmente preta), o que equivale às mesmas condições criadas na simulação com Cycles mas sem qualquer traçado de raios. Isso permite gerar mais imagens em menos tempo e com parâmetros de qualidade superiores aos utilizados anteriormente. Os resultados estão dispostos na Figura 52.

Com os ruídos intrínsecos do Blender drasticamente reduzídos, foi possível observar melhor os efeitos da decodificação de derivada mista sobre uma modulação não ideal. Nitidamente, uma imagem que era quadrada agora possui um formato distorcido. Isso está associado com a equação da velocidade tangencial de um ponto em rotação ser proporcional à distância radial ($v_t = \omega r$). O campo de visão foi definido como um quadrado tal que sua largura é igual ao espaçamento entre os *choppers* no seu centro. No entanto, a largura do campo de visão é menor que o espaçamento à direita, e maior à esquerda, assim como

Figura 52 – Teste com a fotografia Cameraman 2(100) × 100 para B = 20 e taxa de amostragem 16, decodificada no modo dual.



é maior acima, e menor abaixo, mas são as variações angulares dos *choppers* que fazem modulação, independes das posições radiais. Isso faz com que mais espaço seja varrido em menos tempo, proporcionalmente à distância radial, o que equivale dizer que um mesmo comprimento L adquire uma nova escala, inversamente proporcional a r, se a imagem for projetada em um quadro retangular. Este efeito será denominado **distorção trapezoidal**. Apesar do formato final não ser o de um trapézio, essa distorção é obtida pela aplicação de duas distorções trapezoidais perpendiculares sobre um espaço retangular, como mostra a Figura 53. Esse formato também pode ser obtido pela operação de intersecção entre dois trapézios orientados perpendicularmente, o que é exatamente o formato da abertura de luz efetiva devido aos *choppers*.

Sabendo a posição radial do centro do feixe, as seguintes transformações remapeiam um quadrado centrado em (r, 0) para um formato de trapézio:

$$y \to y\left(\frac{x}{kr}\right), \qquad x \to x\left(\frac{ky}{r}\right), \quad k = \frac{B_x}{B_y}.$$
 (6.3)

A transformação inversa é mais convenientemente definida no sistema de coordenadas centrado sobre o feixe:

$$y \to y\left(\frac{1}{1 \mp kx/r}\right), \quad x \to x\left(\frac{1}{1 \mp y/kr}\right),$$
(6.4)

$$|x| \le \frac{L_x}{2}, \quad L_x = 2r \tan\left(\frac{\pi}{2B_x}\right), \qquad |y| \le \frac{L_y}{2}, \quad L_y = 2r \tan\left(\frac{\pi}{2B_y}\right). \tag{6.5}$$

Figura 53 – Distorções trapezoidais sobre uma grade quadriculada. Nota-se que o lado de maior tamanho aponta para a direção do chopper que causa a distorção.



Fonte: : O autor.

Os sinais dependem dos sentidos das distorções a partir do centro, o que depende da posição do objeto em relação aos *choppers*. Essas transformações de correção não possuem dependência explícita com as dimensões do feixe, mas os limitantes das suas coordenadas sim. Quanto maior o B, menor o L associado, o que implica em uma variação menor de coordenadas e um fator de escala mais homogêneo. Isso é a representação matemática do fato de que a abertura angular dos setores tende a zero com $B \to \infty$, e a diferença de largura ao longo do comprimento é proporcional a essa abertura. A Figura 54 mostra os resultados para B = 20, com as distorções corrigidas de forma isolada e simultaneamente.

Essa imagem apresentou um grande ruído horizontal na faixa central, onde esperariase menos problemas, pois é a região onde as lâminas movem-se mais próximo do ideal. Por isso, foi necessário usar uma função de recorte que substitui todos os valores acima de um limiar pelo valor do limiar. Além disso, apesar de ser difícil enxergar, surgiram padrões de linhas divergentes em meio ao ruído, o que também pode ter origens similares. A origem desses ruídos será discutida na próxima seção.

6.2.3 Analisador de quadros

Os quadros de animações geradas em programas como o Blender também podem ser utilizados para verificar as contribuições de cada ponto do objeto para cada pixel resultante da decodificação com derivada mista, antes de todas as contribuições serem condensadas em um único valor. Seja F(i, x, y) um quadro da animação, então as seguintes Figura 54 – Imagem (100 × 200) de uma grade quadriculada distorcida (100 × 200 no modo dual, taxa de amostragem de renderização igual a 6) e as correções trapezoidais, com os formatos de quadro destacados em cor.



operações correspondem às tomadas de derivada:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \approx F(i) - F(i+1), \qquad \frac{\partial F}{\partial n} \approx F(i) - F(i+mX),$$
(6.6)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \,\partial n} \approx F(i) - F(i+1) - F(i+mX) + F(i+1+mX), \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \approx (F(i) - F(i + mX)) - F(i + 2mX), \tag{6.8}$$

Onde m = 1 para o modo singular e m = 2 para o modo dual. Os resultados para a imagem de teste *Cameraman*, nas configurações $2(40) \times 40$, estão dispostas na Figura 55.

Os pontos não nulos na derivada mista ao longo das bordas das lâminas sugerem que o movimento circular dos *choppers* contribuem para o ruído. Os ruídos devido ao *anti-alias* das imagens geradas apresentam-se como pontos que surgem de forma "aleatória" entre instantes de tempo ao longo das bordas das lâminas nas derivadas. A derivada mista gera uma contribuição forte de uma área delimitada exatamente pelos pontos de encontro das lâminas nos quatro quadros utilizados para calculá-la, e essa região corresponde ao pixel codificado (idealmente). Essa ferramenta permite então ver o píxel codificado evoluindo no tempo junto da modulação. Além disso, existe um rastro que propaga-se do pixel codificado até a borda da imagem, o que condiz com o termo teórico $\Phi_{yy}(b,a) - \Phi_{yy}(L,a)$ ser a diferença da derivada de segunda ordem entre o ponto codificado *até* uma das bordas, com *a* constante. Em momentos em que a modulação lenta

 $\label{eq:Figura} \begin{array}{l} 55-\text{Comparações entre quadros de } 256\times 256 \text{ pixels da animação gerada no Blender, em momentos diferentes da modulação simultânea, com as derivadas associadas.} \end{array}$



Fonte: : O autor.

possui inclinação, o rastro acompanha com o mesmo ângulo. Isso está em concordância com a hipótese de que a origem dos fantasmas horizontais está no movimento contínuo do modulador lento.

Essa ferramenta também foi utilizada para investigar a origem do ruído horizontal inesperado da Figura 54. Na animação da derivada mista, é possível ver que muitos pontos não desprezíveis surgem ao longo da linha *quase* horizontal da modulação lenta "perseguindo" o píxel codificado, como mostra a Figura 56.

Utilizando um editor de imagem, é possível sobrepor a derivada mista com o quadro da animação. Isso permitiu verificar que as transições bruscas no *anti-alias* da borda do *chopper* lento quase sempre coincidem com o surgimento de pontos fantasmas na derivada mista. Isso também sugere a explicação para a dependência de ruídos dessa classe com a taxa de amostragem conforme a Figura 49, pois a suavidade do *anti-aliasing* cresce com esse parâmetro. Também pode-se supor porque tal efeito é menos acentuado para B menor: o movimento não linear das lâminas é muito mais relevante que imperfeições desse tipo e/ou o fato do movimento ser quase perfeitamente linear para B grande implica

Figura 56 – Inspeção sobre os pixels que "perseguem" o píxel codificado (circulado em verde). A transição brusca de valores em escala cinza no *anti-alias* coincide com a presença dos fantasmas. Idealmente, a variação de Δ valores seria distribuída entre aproximadamente Δ pixels, então a diferença de valores entre o quadro de t e t + 1 seria muito pequena ao longo da borda. Como isso não ocorre, essas regiões descontínuas produzem contribuições significativas para $\partial F/\partial t$ e sobrevivem à operação $\partial/\partial n$.





em maior precisão necessária para renderizar as pequenas variações das inclinações das lâminas, necessitando de mais amostragem para obter resultados suaves.

De todo modo, esse conjunto de resultados confirma que os ruídos observados são provenientes das falhas naturais da geração das imagens que por acaso geram valores altos sob a derivada mista, e não são defeitos intrínsecos do 2DOIT.

6.2.4 Geração de sinal por integral numérica

Apesar das suas utilidades, as simulações via Blender possuem fontes de ruído características que contaminam a codificação em variações devido à finitude do tamanho das imagens utilizadas para gerar o sinal, e não há paralelos com efeitos físicos que tornariam suas correções úteis. Sendo assim, para completar a análise da modulação simultânea, é mais sábio utilizar integração numérica para gerar o sinal. Para isso, precisamos de uma definição explícita dos campos de modulação para compor M(x, y, t). Números de lâminas distintos serão considerados adiante, $(B_x \neq B_y)$. É conveniente escrever um sistema de coordenadas auxiliares que oscile de acordo com as frequências dos *choppers*:

$$X_x = -\frac{B_x r}{B_y \sqrt{2}}, \quad Y_x = 0, \tag{6.9}$$

$$t_x = 2\pi f_x(t - \varphi), \quad \varphi = -\frac{1}{4B_x f_x}, \tag{6.10}$$

$$x_x = (x - X_x)\cos(t_x) + (y - Y_x)\sin(t_x),$$
(6.11)

$$y_x = (x - X_x)\sin(t_x) - (y - Y_x)\cos(t_x), \tag{6.12}$$

$$\theta_x = \arctan(y_x, x_x), \tag{6.13}$$

$$M_x(\theta_x(x, y, t)) = H(\sin(\theta_x B_x)).$$
(6.14)

As equações para a modulação lenta são análogas, exceto pela orientação da rotação e o centro do sistema de coordenadas auxiliar:

$$X_y = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad Y_y = \frac{r}{\sqrt{2}}, \tag{6.15}$$

$$t_y = 2\pi f_y(t - \varphi), \quad \varphi = \frac{1}{4B_y f_y}, \tag{6.16}$$

$$x_y = (x - X_y)\cos(t_y) + (y - Y_y)\sin(t_y),$$
(6.17)

$$y_y = (x - X_y)\sin(t_y) - (y - Y_y)\cos(t_y), \tag{6.18}$$

$$\theta_x = \arctan(y_y, x_y), \tag{6.19}$$

$$M_y(\theta_y(x, y, t)) = H(\sin(\theta_y B_y)), \tag{6.20}$$

sendo arctan2 é a função que mapeia corretamente os ângulos entre 0 e 2π com base no quadrante de (x, y). Define-se então o sistema de coordenadas para a integração,

$$|x - r| \le \frac{L}{2}, \quad |y| \le \frac{L}{2}$$
 (6.21)

A integração numérica pode levar até mais tempo do que a geração de quadros no Blender, a depender do número de pontos da malha de integração. Para inserir uma imagem-teste, é necessário converte-la em uma função que adeque-se à essa malha. A Figura 57 mostra uma animação feita para estudar a evolução do sinal, sem a presença do objeto, com uma função super-gaussiana de ordem 4 para representar um feixe suficientemente homogêneo em torno do centro, decaindo rapidamente próximo das bordas.

Para um perfil de feixe completamente homogêneo, as imagens antes e após a correção da distorção trapezoidal estão dispostas na Figura 58. Observa-se que o ruído associado às configurações *quase* verticais ou horizontais das lâminas apresenta-se mesmo na integração numérica. Pela binariedade das funções degrau utilizadas para as modulações, o integrando também é binário, o que implica na ausência de *anti-aliasing* ao longo Figura 57 – Quadro de uma animação que mostra a evolução temporal do sinal gerado pela integração numérica simultaneamente com a modulação, para $B_x = 42, B_y = 10$, para gerar uma imagem 40×50 .



Figura 58 – Imagens 40 × 50 de um feixe homogêneo sob integração numérica, para $B_x = 42$ e $B_y = 10$. À esquerda, a imagem decodificada em modo dual após junção do par. À direita, a imagem após a correção trapezoidal. Abaixo, a mesma integração para modulação lenta partindo do bloqueio total.



das bordas, mas como uma malha de 1000×1000 valores de $x \in y$ foi utilizada, o ruído central resultante ainda foi menor.

Nota-se pouca distorção ao longo do eixo y devido ao B_x alto, enquanto no eixo x não só há o formato trapezoidal, como também a presença de uma curvatura, de forma que a correção trapezoidal é insuficiente para transformar o quadro da imagem em um quadrado. Isso se deve ao fato da trajetória do pixel codificado ser cada vez mais curvilínea conforme B diminui. Como os resultados para o modulador lento partindo do bloqueio

ou desbloqueio completo são essencialmente idênticos, conclui-se que a transformação de correção correta só deve depender da geometria dos *choppers* e da posição do campo de visão.

6.3 CORREÇÕES DE SINCRONIA

Ao longo deste Capítulo, foi possível estudar e corrigir em grande parte as distorções espaciais e fantasmas devido às aproximações feitas para obter-se o método de decodificação por derivada mista. A decodificação do 2DOIT só é possível devido às condições periódicas assumidas na Equação 5.15 - em sistemas reais, no entanto, os períodos de modulação podem não ser múltiplos perfeitos, e suas oscilações podem causar um descompasso entre as linhas de sinal, comprometendo a derivada em relação ao número de linha. Sendo assim, é necessário desenvolver técnicas de correção que minimizem os efeitos da assincronia do sistema.

6.3.1 Múltiplos incompatíveis

As condições periódicas do 2DOIT produzem um sinal característico com duas frequências nominais, $f'_x = 2B_x f_x$ e $f'_y = 2B_y f_y$. Para que a derivada em relação ao número de linhas possa ser tomada, tem-se a condição $f'_x = Nf'_y$. O sinal pode ser representado pela multiplicação de duas funções oscilatórias com tais frequências, como mostra a Figura 59a. Quando N não é um número inteiro, mais ou menos modulações rápidas são completadas em uma modulação lenta, como é o caso na Figura 59b.

Ao tentar separar os dados considerando o valor inteiro mais próximo de N, observa-se um de deslocamento (shift) do perfil de modulação de h píxels por linha, totalizando um deslocamento total de h int(N). Isso é equivalente a uma distorção de paralelogramo cíclica sobre o mapa de cor do sinal, cuja inclinação cresce rapidamente com h, como mostra a Figura 60.

Pela independência das modulações, a informação do eixo x está codificada entre valores vizinhos no tempo, e a informação do eixo y está codificada entre as linhas. Alterar a duração temporal do sinal não altera (proporcionalmente) a sua derivada temporal e a diferença de valores entre suas linhas permanece igual, então para corrigir esse problema, basta definir um **fator de esticamento** (*stretch*) α definido como:

$$\alpha = \frac{\operatorname{int}(N)}{N},\tag{6.22}$$

sendo int(x) é uma função que transforma o argumento no número inteiro mais próximo. O resultado é representado na Figura 61. Enquanto no campo da matemática a transformação funciona igualmente se o numerador da Equação 6.22 for $\lceil N \rceil$ ou $\lfloor N \rfloor$, para valores discretos a perda de qualidade deve ser maior se o esticamento aumentar o número de Figura 59 – Modelagem do sinal do 2DOIT. Em azul, o sinal resultante. Em vermelho e verde, as ondas associadas às modulações lenta e rápida, respectivamente. (a) Cenário ideal onde N é inteiro. (b) Cenário onde N não é inteiro, terminando o quadro antes do desejado. As linhas tracejadas auxiliam a observar como o sistema não retorna para o mesmo estado após duas modulações.



Fonte: : O autor.

Figura 60 – Mapa de cor no modo dual com valor de deslocamento h crescente. A distância entre pontos simétricos da modulação rápida cresce com h, ao ponto em que na última imagem a distância aumenta em torno de 41%.



Fonte: : O autor.

valores temporais, uma vez que dados intermediários são criados, enquanto que diminuir N apenas comprime os valores existentes para um espaço menor.

6.3.2 Fase relativa

O conceito de fase de uma oscilação também é relevante para a geração das imagens. Como o valor da onda de modulação em um dado instante de tempo está diretamente associado com a posição da lâmina do modulador no respectivo eixo, uma onda de mesma



frequência com fase distinta codifica um ponto diferente no mesmo valor de tempo. A fase da modulação lenta em relação ao período de coleta de dados será denominada **fase maior**, enquanto a fase relativa entre as modulações será denominada **fase menor**.

Os dados coletados podem vir na forma de uma série temporal contínua, ou em conjuntos separados, contendo informação de um quadro por elemento. Em ambos os casos, não há garantia de que a primeira linha da imagem gerada corresponderá à linha mais externa de fato, o que é uma consequência da modulação lenta possuir uma fase com o gatilho da aquisição, como mostra a Figura 62a. A onda associada a cada quadro possui $p_y/2$ zeros, mas apenas um máximo global, que deve corresponder à linha mais externa, quando o feixe está totalmente desbloqueado pelo modulador lento.

Figura 62 – Efeitos da fase maior sobre o sinal e a imagem. (a) O envelope da modulação (tracejado em azul) não termina no valor de tempo esperado (como o envelope tracejado em vermelho). (b) A imagem resultante possui linhas de pixels que deveriam estar associados à imagem anterior.



O algoritmo de correção da fase maior baseia-se em encontrar a posição do máximo global do sinal, e então deslocá-lo até que esse ponto situe-se sobre o início ou fim do quadro. Devido à possível assincronia com a modulação rápida, o sinal pode jamais atingir o valor de pico esperado caso as fases fossem zero, porém isso não apresenta um problema, uma vez que todas as linhas sofrem da mesma diferença de fase. No entanto, essa correção não é garantida, como é ilustrado pelas Figuras 63a e 63b - para que o máximo correto seja encontrado, é preciso que o envelope da modulação lenta seja "afiado" o suficiente para que haja distinção entre os máximos nessa região, o que pode ser obtido quando o movimento do *chopper* é linear e o perfil do feixe com o objeto não decai a zero nas bordas. Os máximos vizinhos do correto podem ser erroneamente identificados como o máximo global devido ao ruído. Além disso, caso haja um bloqueio vertical homogêneo nas bordas do objeto, é de se esperar que linhas consecutivas sejam iguais - o que implica que o envelope efetivo do sinal é constante nessa região, e, portanto, não existe um máximo global verdadeiro, de forma que o ruído determinará totalmente quais dos máximos será escolhido pelo algoritmo. O mesmo ocorre caso o feixe não esteja nas dimensões otimizadas, pois haverá ciclos de modulação codificando píxels fora da sua área, e portanto são constantes sob derivação. Essa variedade de condições que causam constância serão denominadas **efeitos platô**. Quando presentes, deve-se verificar se o ponto extremo utilizado para o alinhamento é também **central** entre os pontos vizinhos de valor próximo, diminuindo a probabilidade do ruído levar o algoritmo a uma conclusão errônea.

Figura 63 – Algoritmo de correção da fase maior. (a) O envelope da modulação lenta (tracejado em azul) possui inclinação tendendo a zero no início/fim do ciclo, dificultando com que o máximo global seja identificado e deslocado para o máximo ideal (do envelope tracejado em vermelho). (b) Envelope "afiado" da modulação ideal.



Fonte: : O autor.

A Figura 64a mostra duas configurações em fases menores opostas. Nesse caso, a informação codificada em um dado valor de tempo é a mesma, mas com sinal oposto na derivada temporal. Para fases intermediárias, não é o caso. Uma diferença de fase de $\pi/2$, por exemplo, faz com que o ponto codificado no início do quadro esteja sobre o centro do

objeto, e por consequência, a imagem adquire uma translação de $p_x/2$, como ilustrado na Figura 64b.

Figura 64 – Representação dos efeitos da fase menor sobre o sinal e a imagem. (a) Fases simétricas (acima) e fases intermediárias (b), demonstrando que qualquer onda dentro do envelope definido pela modulação lenta é possível. (c) Resultado de uma fase de $\pi/2$ sobre a posição horizontal da imagem em relação ao quadro.



A correção da fase menor requer definir um ponto de início (fase de 0 ou π), e então considerar os instantes de tempo para os quais o sinal cairia a zero (nas bordas da imagem) a partir de uma função ideal. Seja f_d a taxa de aquisição de dados, então o *i*-ésimo zero dessa série temporal encontra-se no valor p_i :

$$p_i = i \frac{f_d}{f'_x}.\tag{6.23}$$

Basta então encontrar o valor mínimo do sinal real em um índice p_j entre 0 e $2p_i - 1$. O deslocamento temporal do sinal que o sinal deve sofrer será de $p_j - p_i$ valores. O algoritmo está retratado na Figura 65. Também é possível definir p_i como a média dessa distância calculada para cada par de linhas da modulação, o que pode aumentar a precisão. Assim como para encontrar o máximo global na correção de fase maior, aqui as posições dos mínimos locais podem ser incertas caso hajam efeitos platô na modulação rápida.

6.3.3 Oscilações de frequência

Até aqui, apenas as imperfeições associadas à geometria dos *choppers* foram discutidas. Existem ainda dois fenômenos que podem comprometer a codificação da imagem:

(b)

Figura 65 – Representação do algoritmo de correção de fase menor. Em azul, o sinal fora de fase; em cinza, a onda idealizada. A região verde representa o intervalo de busca de mínimos.



a descontinuidade do movimento e a oscilação da frequência de modulação. O primeiro é improvável de acontecer devido à inércia da máscara, que rotaciona múltiplas vezes por segundo. O segundo caso, no entanto, não só é factível como é presente nos limites inferiores e superiores de operação dos *choppers* disponíveis no mercado. Pela Equação 5.39, a altura da imagem é inversamente proporcional à frequência do *chopper* lento. Como será discutido no Capítulo 7, uma taxa de aquisição na ordem das centenas de milhares de pontos por segundo restringe as frequências da modulação lenta para o limite inferior quando é desejável maximizar o tamanho das imagens. O efeito de uma frequência instável sobre a série temporal é ilustrada na Figura 66.





Suponha que a oscilação da frequência de modulação lenta possa ser modelada como:

$$f'_{y}(t) = 2B_{y}f_{y}\left(1 + \varepsilon \sin(2\pi f_{o}t - \varphi_{o})\right), \qquad (6.24)$$

sendo ε é a amplitude de oscilação, f_o a frequência de oscilação e φ_o uma fase qualquer. Nesse cenário, a frequência oscila igualmente para cima e para baixo do valor nominal, de forma que após n períodos T_y , a quantidade de modulações será n exceto por um valor decimal, como é o caso na Figura 66. Caso a frequência oscile assimetricamente para cima/baixo do valor nominal, então haverá um acúmulo de adiantamento/atraso e essa condição não será satisfeita. Supondo uma oscilação "ideal", a sua relevância depende então de f_o e ε . Contanto que $f_0 \ll 2B_y f_y$ e $\varepsilon \ll 1$, não há comprometimento da decodificação da imagem, uma vez que a frequência será suficientemente constante entre linhas, porém ainda há a possibilidade de tal oscilação ser observável na imagem como uma variação de comprimento de linhas, ou até uma distorção de ondulação. Algo semelhante pode acontecer caso a frequência da modulação rápida oscile, pois o período de varredura de uma linha também oscilará e por consequência o comprimento codificado, de forma que linhas vizinhas de uma imagem que deveria ser quadrada podem apresentar mudança de comprimento gradual, alternada, etc. de acordo com a razão entre f_o e f'_x .

Caso essas condições não sejam válidas, então as correções envolvem análise de Fourier da série temporal para determinar f_0 e tentar buscar uma transformação que readeque o sinal, o que não será abordado neste trabalho.

6.3.4 Fenda ideal

A Seção 6.3.2 indica que a presença de platôs nos picos e vales das modulações são um empecilho para a estabilização da imagem devido às fases maior e menor não serem sincronizadas com a aquisição. Para minimizar esse efeito, é possível utilizar uma fenda que garanta que o feixe possuirá exatamente o formato do setor de ambos os *choppers* nos respectivos planos de modulação. Para calcular o seu formato, é necessário considerar a inclinação das lâminas de B diferente e a transformação de escala do feixe entre os *choppers*, como é representado na Figura 67

Suponhamos que o *chopper* da modulação vertical tenha $B_y < B_x$ e esteja centrado em (0,0), então um feixe centrado em (r,0) está limitado pelo setor representado pelo par de retas a_{\pm} :

$$a_{\pm}(x) = \pm \tan\left(\frac{\pi}{2B_y}\right)x. \tag{6.25}$$

Na posição x = r, a distância entre as retas é dada por:

$$L_y = a_+(r) - a_-(r) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{2B_y}\right) r.$$
 (6.26)

Analogamente, o setor do *chopper* da modulação horizontal, centrado em (X_0, Y_0) , é representado pelas retas b_{\pm} :

$$b_{\pm}(y) = \mp \tan\left(\frac{\pi}{2B_x}\right)(y - Y_0) + X_0, \quad X_0 = Y_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$
 (6.27)

Na posição y = 0, a distância entre as retas é dada por:

$$L_x = b_+(r) - b_-(r) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{2B_x}\right) Y_0.$$
 (6.28)

Figura 67 – Passos para a construção da fenda ideal. (1) Determinação da largura L_y entre as retas a_{\pm} em (r, 0); (2) Determinação da largura L_x entre as retas b_{\pm} ; (3) Reajuste das retas b_{\pm} para terem largura L_y em y = 0; (4) Região delimitada pelas quatro retas.



Fonte: : O autor.

Para que o feixe adeque-se a ambos os *choppers*, é necessário que ele possua a largura L_x no plano do *chopper* horizontal. Reversamente, o espaçamento entre as retas b_{\pm} precisa ser de largura L_y no plano do *chopper* vertical. Sendo assim, basta subtrair $L_x/2$ e somar $L_y/2$ para obter as novas retas b'_{\pm} :

$$b'_{\pm} = b_{\pm} \mp \frac{1}{2}L_y \pm \frac{1}{2}L_x, \tag{6.29}$$

$$b'_{\pm} = \mp \tan\left(\frac{\pi}{2B_x}\right)(y - Y_0) + X_0 \mp \tan\left(\frac{\pi}{2B_x}\right)Y_0 \pm \tan\left(\frac{\pi}{2B_y}\right)r, \qquad (6.30)$$

$$b'_{\pm}(y) = \frac{r}{\sqrt{2}} \mp \tan\left(\frac{\pi}{2B_x}\right) y \pm \tan\left(\frac{\pi}{2B_y}\right) r.$$
 (6.31)

Portanto, a fenda ideal é a região delimitada pelas retas $a_{\pm} e b'_{\pm}$. Para outras configurações, como o caso $B_y > B_x$, basta espelhar e/ou rotacionar a fenda, considerando que os lados de menor tamanho devem apontar para o centro ds *choppers*.

6.4 SUBAMOSTRAGEM

A relação um-a-um entre tamanho do pixel decodificado pela derivada mista e um região discretizada do espaço parece indicar que o 2DOIT é incapaz de fazer sensoriamento compressivo. No entanto, simulações em condições de subamostragem indicam que é possível obter uma imagem com nível de detalhe comparável à uma imagem obtida com número de dados igual ao número de pixels, quando a amostragem ocorre em períodos aleatórios e quando o espaçamento temporal é regular e está associado à razão de amostragem. Em ambos os casos, é possível aproveitar o formato de gradiente do sinal característico do 2DOIT para preencher as regiões vazias do mapa de cor com uma simples interpolação linear ou cúbica entre os sinais presentes. Os resultados possuem mais detalhes do que uma imagem processada a partir do mesmo número de dados considerando taxa de amostragem de 100% porque a separação temporal entre os valores por si só carrega informação, de tal forma que o desalinhamento dos dados no mapa de cor faz com que as informações sobre detalhes se complementem, como mostra a Figura 68.

Figura 68 – Simulação em condições de subamostragem. (a) Referência em 100% amostragem;
(b) Imagem com 1/3 dos dados à 100% de amostragem;
(c) Imagem a partir de sinal regular com razão de amostragem 1/3.
(d) Imagem a partir de um sinal coletado a uma taxa aleatória, resultando em 1/3 dos dados totais.



Fonte: : O autor.

No entanto, é possível que essas condições não correspondam ao que acontece na situação real. Aqui, foi considerado uma razão de amostragem S < 1 para um tamanho de quadro 1/S vezes maior que o número de dados, resultando em uma largura $p'_x = p_x/S$, onde p_x seria a largura se apenas os valores não nulos fossem considerados. Os pontos são coletados escassamente, isto é, na série temporal do sinal há 1/S-1 valores nulos antes do seguinte, e por consequência seus valores correspondem a um intervalo de coleta igual correspondendo a ST_x/p_x . Experimentalmente, os pontos são coletados "consecutivamente"

e é necessario espaçá-los propositalmente de um quadro de largura p_x para p'_x no processamento. No entanto, a coleta consecutiva indica que cada sinal corresponde à média de s(t) em um intervalo de aproximadamente T_x/p_x . Portanto, é necessário investigar se a "escassificação" artificial de pontos consecutivos (*upsampling*) produz o mesmo resultado que a coleta escassa de pontos 1/S vezes mais curtos temporalmente. Esse tipo de processamento foi testado com os dados apresentados no Capítulo seguinte. Os sinais foram escassificados de forma a gerar um mapa similar ao da Figura 68, e então interpolados e decodificados com a derivada mista. As imagens resultantes naturalmente eram maiores, mas o ruído foi muito amplificado, sendo necessário aplicar filtros de suavização gaussiana antes da decodificação, o que acabou por manter a nitidez da imagem em *upsampling* próxima (mas nunca melhor), do que a imagem no tamanho nominal, sem escassificação. Isso é um indicativo de que esse método não é capaz de revelar mais detalhes com esse tipo de aquisição, mas ainda não é possível tirar conclusões.

7 EXPERIMENTANDO COM O 2DOIT

O escopo inicial deste trabalho encerrava-se nos resultados simulacionais do método 2DOIT. Iniciando em outubro de 2024, houve uma colaboração de pesquisa entre o GPOEF e o Laboratory for Producing Isolated High Energy Laser Pulses in the Attosecond Domain do Prof. Tsuneyuki Ozaki, no Institut national de la recherche scientifique, também financiado pela Mitacs em parceria com a Fundação Araucária. Os resultados iniciais de simulação do 2DOIT haviam sido apresentados por mim em reunião para todos os envolvidos, e houve aprovação do Prof. Tsuneyuki para que o sistema fosse testado em um momento oportuno. Ao longo de outubro e novembro, surgiram múltiplas janelas de tempo livre nos projetos dos alunos Yohan Szuszko Soares, Marcelo Jean Machado e Camille Vitória Unger, o que possibilitou, sob a minha orientação remota, a testagem do sistema no INRS, uma vez que todos os componentes necessários para a montagem do sistema estavam à disposição. O roteiro dos testes foi ajustado conforme a qualidade dos resultados e o feedback dos membros no laboratório. O programa desenvolvido em Python por mim para a decodificação dos dados simulacionais foi adaptado para processar os dados experimentais, aplicando a teoria da correção de fase, discutida na Seção 6.3.2, para estabilizar o alinhamento das animações. Isso foi feito concomitantemente com os trabalhos no INRS, e a validação do sistema na capacidade máxima permitida com os componentes em mãos foi atingida. Devido aos choppers ópticos serem usados em outros projetos de pesquisa, um deles frequentemente precisava ser removido do sistema ao fim do dia de trabalho, então a calibração de posições dos *choppers* em relação ao feixe precisava ser refeita. Isso acabou por demonstrar a facilidade da montagem experimental do 2DOIT, que possui alinhamento mais simples e rápida que o do DOIT. Os resultados serão discutidos ao longo deste capítulo.

7.1 MONTAGEM EXPERIMENTAL

As condições necessárias para a operação do 2DOIT são apenas a modulação de um feixe em dois eixos perpendiculares sob a condição de multiplicidade das frequências. A depender dos números de lâmina dos *choppers* e o diâmetro do feixe do laser, o modelo mais compacto do 2DOIT não requer mais nada. Com esse princípio em mente, buscou-se a montagem mais simples possível para a validação do sistema, resultando na montagem experimental disposta nas Figuras 69a e 69b. As esquemáticas em 3D nas Figuras 70 e 71 auxiliam a visualização do sistema com todos os componentes ópticos e eletrônicos integrados.

A fonte de luz utilizada foi um laser HeNe vermelho ($\lambda = 638$ nm). O fotodetector (PD) utilizado foi o PDA100A2 da ThorLabs, com largura de banda de 11 MHz, mas não

Figura 69 – Montagem experimental do 2DOIT. A linha em vermelho indica o caminho do feixe laser. $C_X \in C_Y$ denotam os *choppers* ópticos, BE o expansor de feixe; I a íris e PD o fotodetector. (a) Vista de cima. (b) Vista em perspectiva.







Fonte: : GPOEF.

foi possível operar no seu limite de sensibilidade, pois a taxa de aquisição máxima da Data Acquisition Card myDAQ, da National Instruments, era de 200 kS/s.

Os controladores dos *choppers* ópticos utilizados foram o MC2000B da ThorLabs para a modulação horizontal (C_X) , fornecendo um sinal de referência de frequência $B_x f_x$ para a DAQ, enquanto o 3502-BASE da Oriel Instruments foi utilizado para a modulação vertical (C_Y) . Os seus painéis de controle estão dispostos nas Figuras 72a e 72b. Figura 70 – Esquemática 3D do sistema 2DOIT. O laser é modulado pelo chopper lento C_X , tem seu diâmetro reduzido por um expansor de feixe (invertido) (BE), modulado pelo chopper rápido C_Y e coletado pelo fotodetector (PD), que envia o sinal para a DAQ, acoplada a um laptop. Os controladores (Ctrl) dos dois choppers estão conectados aos motores que rotacionam as máscaras, e o controlador do chopper lento envia um sinal de referência para a DAQ iniciar a coleta de cada quadro.



Fonte: : GPOEF.

Figura 71 – Esquemática em vista ortográfica alinhada ao eixo de propagação do laser, mostrando a necessidade de um expansor de feixe para o ajuste correto do diâmetro em relação ao espaçamento das lâminas em ambos os eixos.



Fonte: : GPOEF.

As frequências de rotação dos motores possuem limitantes nominais de $2\text{Hz} \leq f_x \leq 105 \text{ Hz} \in 2 \text{ Hz} \leq f_y \leq 106,5 \text{ Hz}$. É importante distinguir a frequência de rotação (f) da chopping frequency (Bf), disposta nos manuais e painéis de controle, e da frequência de modulação (2Bf). Uma calculadora dos parâmetros de imagem foi criada no GeoGebra a fim de auxiliar a escolha de parâmetros (disposta nas Figuras 73a e 73b), assim como





Fonte: : GPOEF.

um código que busca múltiplos de frequência compatíveis abaixo de um limiar de *shift* total.

A calculadora de frequências apontou que, para obter imagens de dimensões significativas, seria necessário operar um dos *choppers* nas menores frequências disponíveis, de forma que o *chopper* horizontal foi escolhido como o modulador lento, com $B_x = 10$ (**Portanto, os eixos rápido e lento estão invertidos em relação às convenções teóricas**). A imposição de que $B_x \neq B_y$ também implicou em espaçamentos feixe-setor distintos $(L_x \neq L_y)$, e ajustar o feixe no plano do *chopper* de $B_y = 42$ apenas aumentando sua posição radial não foi suficiente, por isso foi necessário utilizar um expansor de feixe BE02-O5-B da ThorLabs (magnificação de 2 a 5 vezes), em orientação reversa para contrair o feixe. Figura 73 – Calculadora de frequências no GeoGebra. (a) Primeira versão, onde os parâmetros $B \in f$ são inseridos para os cálculos. (b) Segunda versão, onde utiliza-se o valor Bf disposto nos controladores e considera-se a possibilidade de contrair a imagem a partir de médias entre pontos vizinhos.



Fonte: : O autor.

7.2 LIMITAÇÕES

Inserindo os parâmetros do sistema limite na calculadora de frequências, fez-se uma busca do maior tamanho de quadro com aspecto mais próximo de 1 : 1, resultando nas frequências de modulação $f'_x = 40$ Hz e $f'_y = 2840$ Hz e $p_x \times p_y \approx 70,42 \times 71$ pixels. No outro lado do espectro, a imagem mais rápida possível pelo sistema seria de $f'_x = 200$ Hz e $f'_y = 6400$ Hz, com dimensões em torno de 30×30 pixels. Para evitar a necessidade de esticar os dados para compatibilizar as frequências, no entanto, optou-se majoritariamente por usar frequências que produzissem um número inteiro de píxels ou resultassem em um valor de *shift* total menor que 10% do que o tamanho de quadro.

Os primeiros dados obtidos eram ruidosos demais, impossibilitando a decodificação. Fez-se então uma medida do sinal puro do laser sem modulação, que foi então comparado com o sinal modulado. O ruído oscilava em torno de um valor médio com uma periodicidade semi-aleatória na ordem de poucos pontos de aquisição, e comparado com o sinal modulado, sua amplitude de oscilação representava um valor 41 vezes menor que o sinal máximo, resultando em uma razão sinal-ruído de 16 dB, o que não era ideal, especialmente considerando a sensibilidade da operação derivada e que a informação é codificada em pequenas variações. As primeiras imagens a serem decodificadas necessitaram do uso de filtro gaussiano junto da tomada de média entre pontos vizinhos, comprimindo o tamanho do quadro. Em algumas medidas, a derivada do ruído revelava uma periodicidade consideravelmente regular, então, dependendo do número de pontos por média entre vizinhos, o ruído poderia ser cancelado ou amplificado, de forma que usar n pontos por média poderia ser melhor do que n+1. A derivada em relação ao eixo de modulação lenta apresentou-se mais estável do que no outro eixo em todas as medidas.

O fotodetector foi então configurado para ter ganho amplificado de 20 dB a 40 dB. Isso possibilitou a decodificação das imagens sem a necessidade de compressão por médias, apenas no máximo um filtro gaussiano entre pontos vizinhos no tempo. O ganho de 40 dB, no entanto, gerou regiões bem localizadas onde a derivada mista apresentava valor muito maior que o restante da imagem, então optou-se por utilizar ganho de 20 dB ou 30 dB. A partir disso, as imagens passaram a ser identificáveis mesmo sem qualquer tratamento, mas a suavização gaussiana ainda é necessária para eliminação de ruído.

Em relação à aquisição de dados, foi utilizado o programa em LabVIEW feito para a sincronização do DOIT, pois não houve tempo para desenvolver um programa próprio para o novo sistema, mas isso não comprometeu os testes. A aquisição do modelo da myDAQ utilizado podia ser configurada em dois modos: a aquisição por trigger ou a aquisição contínua, até um máximo de $N_{\rm max} = 1997761$ valores ou 9,988 s. Na aquisição com trigger, a DAQ aguarda um sinal de referência, emitido pelo modulador lento, para iniciar o registro de sinais, coletando uma quantidade especificada. Na maior parte dos testes, o valor de dados por frame N_d ficou entre 2000 e 2500. Como a frequência de referência enviada pelo controlador à DAQ é duas vezes menor que a frequência de modulação, deveria-se obter então $2N_d$ dados por trigger. Esperava-se que seria possível, por exemplo, configurar a DAQ para registrar 3900 valores, abrindo mão de 100 para dar uma janela de $500\mu s$ em aguardo para a próxima ativação (e preenchendo os valores ausentes com zeros para preservar o tamanho do segundo quadro). Na prática, utilizar o valor ideal de N_d resultou em dados corrompidos ou vazios. Por razões que não foram determinadas, a DAQ sempre registrava os últimos ~ 3600 valores como zero e não registrava outros \sim 3300 valores para o arquivo de dados, independente da forma de aquisição. Isso implica que o período entre uma aquisição de outra é, no mínimo $\sim (2N_d + 7000)/f_d$, causando uma queda na taxa de quadros efetiva para um valor 3 a 4 vezes menor do que o esperado no caso da aquisição por trigger de $N_d = 2000$.

7.3 RESULTADOS

Durante os primeiros testes, buscou-se os pares de frequências que produzissem sinais mais estáveis e apropriados para a separação de dados, uma vez que a correção de esticamento para múltiplos incompatíveis ainda não havia sido implementada no código. Tomando a transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* ou FFT) dos sinais com a biblioteca SciPy do Python, era possível observar se havia instabilidade. Em sinais estáveis, a FFT resultava em f'_x para o eixo lento, com contribuições de no máximo um quarto do valor nominal de $2f'_x$, e $f'_y/2$ para o eixo rápido, com contribuições de $f'_y/2\pm f'_x$ de
no máximo metade do valor nominal. O significado dessas contribuições não foi analisado, e a FFT foi utilizada mais como um diagnóstico qualitativo do que quantitativo.

A primeira imagem significativa obtida foi a do próprio feixe do laser no par de frequências (50 Hz, 1200 Hz). O feixe apresentou um formato circular, com um degradê indicando assimetria de intensidade, o que era visível a olho nu, como está disposto nas Figura 74a e 74b. Nota-se o grande espaço vazio devido ao espaçamento não otimizado.

Figura 74 – (a) Imagem do feixe (83×24) decodificada no modo dual, após junção de linhas. (b) Fotografia do feixe sobre o *chopper* de $B_x = 10$.



 $\label{eq:Fonte: GPOEF. Video disponível em doi.org/10.6084/m9.figshare.28352207.$

Em seguida, foram obtidas imagens da haste de uma chave (Figura 75) em diferentes orientações para testar a sensibilidade do sistema às variações em eixos diferentes. Observando a série temporal das hastes nas orientações horizontal e vertical (Figuras 76a e 76b, respectivamente), verificou-se o efeito esperado sobre o sinal: se está alinhado ao eixo de modulação lenta, o sinal tende a ficar rápido numa mesma faixa do período da modulação rápida; se está alinhado ao eixo de modulação rápida, então o envelope do sinal não deve mudar durante uma faixa do período da modulação lenta.

As derivadas para a haste orientada na diagonal estão dispostas na Figura 77. Embora a haste represente fisicamente uma transição brusca, os fantasmas associados à derivada de segunda ordem no eixo lento não surgiram em nenhuma das imagens obtidas, não necessitando de correção. As imagens após junção de linhas nos três eixos estão dispostas na Figura 78.

Concluiu-se então que a sensibilidade do sistema é igual em ambos os eixos de modulação (o que não significa que a resolução é igual). Na haste horizontal, observase uma "tremedeira" entre linhas verticais da imagem. Enquanto no DOIT isso ocorria devia ao descompasso do *trigger* da aquisição de linhas vizinhas, no 2DOIT isso só pode ocorrer devido a uma oscilação na frequência do modulador rápido na ordem da sua Figura 75 – Objeto utilizado como teste de sensibilidade do sistema em diferentes orientações, segurado sobre um alvo com marcas milimetradas da ThorLabs. A espessura da haste era da ordem de 1,75 mm.



Fonte: : GPOEF.

Figura 76 – Série temporal dos dados experimentais. (a) Haste alinhada ao eixo lento (horizontal).
(b) Haste alinhada ao eixo rápido (vertical).



própria frequência, ou na junção incorreta das linhas pares e ímpares da imagem após a decodificação em modo dual (nas simulações, esse erro era de no máximo um píxel). A altura da imagem possui 82 pixels, e numa inspeção com editor de imagem, verificou-se que não é possível fazer as linhas ficarem alinhadas, pois elas sequer têm um comprimento parecido. Esse efeito foi observado em todas as frequências, mas em intensidades diferentes, e as frequências mais estáveis foram priorizadas para imagens futuras.

Na etapa seguinte, buscou-se identificar detalhes e formatos mais complexos. O código para estabilizar a fase menor de cada quadro já estava funcional, o que permitia gerar animações com estabilidade de posição da imagem entre quadros. Propôs-se então fazer imagens de amostras em movimento, gravando o experimento com um celular simultaneamente, a fim de juntar os vídeos. Como a taxa de quadros efetiva era menor do que deveria devido à limitação da DAQ, não era possível definir uma duração exata para os vídeos processados, então foi necessário utilizar um cartão como "claquete" para bloquear o feixe rapidamente ao menos uma vez ao início e ao fim da aquisição de dados,



Figura 77 – Mapa de cor do sinal, derivadas e imagem recuperada para a haste diagonal.

Figura 78 – Imagens da haste nas três orientações testadas, após junção de linhas.



Fonte: : O autor.

possibilitando assim que os instantes fossem pareados, sincronizando os vídeos.

Utilizando uma placa transparente com as letras 'INRS' impressas em ouro (Figuras e 79a 79b) em diferentes escalas, e movendo-a lentamente sobre o feixe, foram geradas várias animações em diferentes frequências, como mostram as Figuras 79c e 79d. Os dados haviam sido gerados em coleta por *trigger*, o que resultou numa taxa de quadros efetiva seis vezes menor do que o número de quadros produzidos pela modulação. A qualidade das imagens manteve-se num nível semelhante em todos os testes, com um bom contraste das letras apesar das bordas estarem suavizadas por causa da redução de ruído.

Na aquisição com trigger, a fase maior não deveria precisar de correção, pois a aquisição é ativada pelo próprio modulador lento, de forma que sua diferença de fase é desprezível. No entanto, os dados gerados com a frequência $f'_x = 40$ Hz apresentaram oscilações horizontais suficientemente suaves (entre quadros) de quase uma dezena de pixels de amplitude, indicando fase maior diferente de zero, o que pode estar associado à oscilação de frequência (uma vez que o período de modulação de fato não é igual ao

Figura 79 – Teste com as letras 'INRS'. (a) Letras impressas; (b) Gravação de celular da amostra em movimento; (c) $f'_x = 100$ Hz, $f'_y = 5000$ Hz; (d) $f'_x = 40$ Hz, $f'_y = 3120$ Hz (76×63) ;



Fonte: : GPOEF/INRS. Vídeo disponível em doi.org/10.6084/m9.figshare.28352207.

período da onda de referência). Apesar dessas frequências possibilitarem quadros maiores, as imagens apresentaram estabilidade garantida a partir de $f'_x = 100$ Hz, que foi o valor máximo utilizado para a modulação lenta.

Havia à disposição uma antena composta de várias linhas finas (Figura 80), e ajustando a proporção de quadro para uma configuração quase quadrada (100 Hz, 4600 Hz, 44 × 42), esperava-se que seria possível testar a previsão de que a resolução do 2DOIT cai pela metade no eixo lento na decodificação em modo dual (pois toma-se a diferença entre as linhas $n \in n + 2$ na derivada do eixo lento), pois o comprimento das linhas era convenientemente da ordem de um pixel codificado. A Figura 81 parecia comprovar essa previsão, pois as linhas aparecem com aparecem com bom contraste no eixo vertical, e desaparecem gradualmente até deixarem de ser detectadas ao alinharem-se com o eixo horizontal. No entanto, o resultado deveria ser o oposto!

O parâmetro de suavização gaussiana utilizado foi de $\sigma = 2$. Essa suavização é aplicada sobre a série temporal antes do remapeamento dos dados para s(t, n), o que signi-



Figura 80 – Antena segurada em frente do fotodetector durante a gravação dos dados.

Fonte: : GPOEF..

Figura 81 – Gravação das linhas de uma antena sendo rotacionada em 270 graus.



Fonte: : O autor. Vídeo disponível em doi.org/10.6084/m9.figshare.28352207.

fica que a suavização ocorre no eixo do tempo, e por consequência os detalhes suavizam-se no eixo da modulação rápida. Refazendo o processamento da animação com $\sigma = 1.2$ e $\sigma = 1$, as linhas passaram a aparecer em todas orientações, ao custo do ruído ser intensificado, como mostra a Figura 82. Com essa qualidade de imagem, não é possível inferir sobre a perda de resolução relativa entre eixos.





Fonte: : O autor.

Nas gravações com aquisição contínua, a estabilidade da frequência de modulação lenta passou a ser muito mais relevante, uma vez que qualque oscilação implicaria em ganho de fase maior. Para estabilizar esses dados, o algoritmo desenvolvido separa os dados da seguinte forma:

- Calcule o número esperado de dados por quadro N_d .
- Calcule a razão entre o número de dados total e N_d . Arredondando esse valor para baixo, tem-se o número de quadros inteiros N_f . Descarte os dados excedentes.
- Selecione o primeiro conjunto de N_d dados. Considere todos os zeros esperados de uma onda com fase menor zero, e todos os mínimos desse conjunto, e então tome a média da defasagem.
- Translade os dados pela defasagem média, e remova-os do conjunto total. Repita para o próximo conjunto de N_d dados até N_f quadros serem ajustados.

Em aquisições longas, a incerteza do valor da frequência deveria ser suficiente para que a diferença de algumas casas decimais com o valor nominal causasse um acúmulo de defasagem por quadro, traduzindo-se numa migração contínua do centro real da imagem para a borda esquerda ou direita ao longo da animação. No entanto, isso não foi observado. Para frequências estáveis como a $f'_x = 100$ Hz, a imagem manteve-se na mesma posição com pouca oscilação horizontal. Por isso, não houve grande necessidade de aplicar correção de fase maior.

Em testes com as frequências menores (até $f'_x = 40$ Hz), o número maior de quadros permitiu ver a oscilação horizontal de forma mais suave, fazendo o centro da imagem oscilar em uma trajetória semelhante a uma onda senóide, com amplitude de até oito pixels (isso é mais de 10% da largura da imagem!). A Figura 83 mostra os quadros de uma animação 77 × 63 a (40 Hz, 3120 Hz). Julgando apenas por essa seleção, o período da oscilação parece ser de 2 · 12 quadros, o que resulta em 5000/200000 × 24 = 0,6 s. Isso não é surpresa, pois essa frequência de modulação corresponde à frequência de 2 Hz do motor, que é o seu limite inferior de operação. Com a correção de fase maior, seria possível operar com oscilações de amplitude ainda maior, mas infelizmente os *choppers* disponíveis no mercado não operam abaixo desse valor.

Visualmente, desconsiderando essa oscilação horizontal, a animação ainda parece altamente instável. No entanto, separar seus quadros de acordo com a paridade resulta em duas animações razoavelmente estáveis. A integração numérica com os parâmetros do sistema apresentada na Figura 58 resultou em uma distorção de quadro idêntica para quadros pares e ímpares. No entanto, essa mudança de características dependente de paridade indica um efeito que escapou do estudo de distorções do Capítulo 6.

Outro indício de que existem efeitos de paridade é a presença sutil de uma contribuição quase onipresente em todos os quadros, independente da amostra e da frequência Figura 83 – Quadros consecutivos de uma aquisição contínua, agrupados em pares e separados em seis colunas para melhor visualização. As linhas em cor (vermelho para quadro par e azul para ímpar, correspondendo à vinda e saída do *chopper* lento, respectivamente) indicam a amplitude da oscilação de posição devida à instabilidade da frequência de modulação lenta.



Fonte: : O autor. Vídeo disponível em doi.org/10.6084/m9.figshare.28352207.

utilizada, localizada no canto inferior esquerdo ou direito, a depender da paridade do quadro, como mostra a Figura 84.

Figura 84 – Quadros consecutivos de uma aquisição contínua, separados em pares. As elipses em vermelho destacam a presença dos fantasmas na borda dos quadros, alternando de acordo com a paridade do quadro.



Fonte: : O autor. Vídeo disponível em doi.org/10.6084/m9.figshare.28352207.

Esse "fantasma de paridade" muito possivelmente está associado a contribuições do movimento não linear da modulação lenta de B_x baixo para a derivada mista. Nas configurações do sistema, a não linearidade da modulação é mais esperada nas bordas horizontais, inversamente proporcional à posição radial, o que coincide com a posição do fantasma. Esse efeito dificilmente seria detectado se o espaçamento e o formato de feixe ideais fossem utilizados desde o início, pois as bordas estariam ocupadas pelo feixe. Não foi possível investigar mais à fundo a origem dos fantasmas de paridade a partir dos dados experimentais. As séries temporais dos primeiros e últimos quadros de uma gravação estável após correção da fase menor estão disposta na Figura 85. O algoritmo de correção de fase menor precisa ser melhorado, pois quando há bloqueio de grande parte do campo de visão, o cálculo da posição dos mínimos pode resultar em valores irrealistas, podendo deslocar a imagem em até uma linha. Apesar disso, para uma amostragem de 900 quadros de uma amostra dinâmica (o alvo com as letras INRS), observa-se que a maior parte dos quadros possui zeros da modulação rápida coincidindo com os da onda ideal, além de possuírem fase maior próxima de zero.

Figura 85 – Sobreposição de séries temporais ao longo uma gravação de nove segundos. As ondas de envelope constante são usadas de referência para a correção da fase menor de cada quadro.



Até então o feixe em formato circular estava sendo utilizado. Além de desperdiçar ao menos 20% dos pixels, isso também implicou em um efeito platô em ambos os eixos, dificultando o cálculo de pontos extremos para a estabilização da imagem. Esperava-se minimizar esse problema inserindo uma fenda improvisada, o que também permitiria observar melhor os efeitos da distorção trapezoidal e a de curvatura (no eixo lento, pois $B_x = 10$). Uma fenda ideal para o par (10, 42) também foi impressa em ouro, mas sua qualidade ficou abaixo do esperado e não era própria para o ajuste fino do espaçamento do laser. Embora seja difícil identificar devido ao ruído e à assimetria do perfil do feixe, é possível ver um formato trapezoidal. Antes da correção de distorção ser aplicada, é necessário que a correção de fase menor esteja correta, do contrário o sistema de coordenadas será centrado sobre a posição errada. Mesmo assim, com a qualidade de dados e calibração obtida não foi possível concluir sobre o grau da distorção e a efetividade da correção.

De todo modo, a aquisição contínua permitiu gravar animações longas, com saltos de aproximadamente 35 ms a cada N_{max} dados, alterando a fase maior do quadro, devido à limitação descrita na Seção 7.2. Foram testadas frequências de modulação lenta de até 100 Hz, o que corresponde também a uma taxa de quadros de 100 Hz, com quadros da ordem de 48×39 pixels. Esses testes indicam que **o 2DOIT é capaz de alcançar o modelo**

atual do SPI-ASAP, ao menos no quesito de velocidade. O recorde mundial de velocidade para o tamanho de quadro 43 × 41, atingido durante o estágio, era da ordem de 272 quadros por segundo (Figura 25). Para chegar à mesma taxa de quadros com o 2DOIT, bastaria aumentar a frequência de rotação do modulador lento (f_y) de 5 Hz $(f'_y = 100 \text{ Hz})$ para 14 Hz $(f'_y = 280 \text{ Hz})$. Isso não foi feito pois tornaria a imagem muito achatada com apenas 200 kS/s. É necessário recordar que a aquisição do SPI-ASAP foi feita na ordem das dezenas de MS/s, com uma largura de banda de 24 MHz. Sob os mesmos parâmetros de aquisição, as imagens do 2DOIT teriam no mínimo 120 vezes mais pixels. Por exemplo, com $(B_x, B_y) = (100, 20)$ e $(f_x, f_y) = (92, 4 \text{ Hz}, 7 \text{ Hz})$, o quadro seria de 1297 × 64 pixels. Para melhor distribuir os pixels, é possível criar máscaras com B_x na ordem das centenas (é claro, focalizando o feixe para se adequar ao pequeno espaçamento dos setores).

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE FUTURO DO 2DOIT

Com este trabalho, foi possível percorrer passos muito significativos do desenvolvimento de uma nova técnica de imageamento de fotodetector único em alta velocidade. extrapolando muito o objetivo inicial de apenas acelerar uma técnica existente. Partindo de princípios matemáticos, as ideias foram elaboradas analiticamente em duas vias, a matricial, conforme o formalismo tradicional do campo de SPI, e também no formalismo diferencial, único à nova classe de técnicas possibilitadas pelo princípio derivativo do DOIT. As aproximações feitas em ambos os formalismos convergiram para as mesmas previsões, o que incentivou a exploração da geração do sinal em diferentes parâmetros e condições, cujas consequências foram verificadas a partir de resultados de simulações e explicadas por análises qualitativas com base na geometria e cinemática do sistema. Por fim, os testes experimentais comprovaram que o processo de codificação e decodificação persiste mesmo em meio a tantas variáveis que impossibilitam a geração de dados no formato idealizado, atingindo o objetivo extendido de validar a técnica em um cenário real. Este certamente é apenas um começo e não o fim, pois o 2DOIT ainda não foi testado no seu potencial total. Com a DAQ utilizada nos testes iniciais, o sistema esteve longe de operar na sua capacidade máxima, tanto pela ausência de um *trigger* apropriado, quanto pela taxa de aquisição baixa para um sistema de alta velocidade. Se sua taxa aquisição estiver no limite do fotodetector utilizado (11 MHz), então um par de choppers $(B_y = 20, B_x = 100)$ poderá gerar um quadro de até 550×100 pixels a 200 quadros por segundo, o que será indiscutivelmente o sistema SPI mais rápido da atualidade para quadros grandes em razão de amostragem de 100%. A impressão de máscaras com número de setores maiores que 100 também pode possibilitar melhor redistribuição entre os pixels para aumentar o tamanho de quadro no eixo lento. É claro, o sucesso desses avanços também dependerá da estabilidade da fonte de radiação utilizada. No teste inicial, a oscilação do laser era capaz de codificar informação de ordem comparável à da própria imagem, e não está claro se num regime de aquisição mais rápida, oscilações em frequência ainda maior podem destruir por completo a codificação em variações em intervalos de tempo menores do que os atuais.

Entre os passos futuros, pode-se buscar o processamento de dados em tempo real, a fim de fazer um comparativo com o SPI-ASAP. O tempo atual do processamento de dados, sem quaisquer otimizações, é em torno de 2,5 ms por quadro. Em C++, deve ser possível obter os mesmos resultados em dezenas de vezes menos tempo, ou até centenas de vezes caso linguagens voltadas para o uso direto dos núcleos de uma GPU, como a CUDA, sejam utilizadas no processamento, o que seria mais do que o suficiente dado que as operações de decodificação são simples. Isso também significa que há espaço para algoritmos de tratamento de dados mais refinados, como correções mais robustas dos defeitos de fase e oscilações de frequência, sem tanta preocupação de comprometer a capacidade de operação em tempo real devido ao custo computacional. Sendo assim, o maior desafio para a geração de imagens em tempo real é a sincronização do sistema com o programa de processamento de dados.

Caso o 2DOIT consiga ser levado ao seu verdadeiro limite operacional na faixa de luz visível, a etapa seguinte é naturalmente buscar aplicações onde a técnica possa trazer inovações, ou ao menos ser competitiva com outras técnicas existentes. A simplicidade da sua montagem experimental demonstra que o sistema é um bom candidato para operação em comprimentos de onda fora do espectro visível, pois são necessários poucos componentes ópticos, com alinhamento simples em uma única linha de feixe, não sendo necessário o uso de lentes para redimensioná-lo caso as máscaras de modulação possuam as dimensões corretas. Por consequência, há menos perda de energia ao longo do caminho óptico por reflexões e absorção pelos componentes do sistema. Como, em geral, as imagens em boas circunstâncias de aquisição possuirão muito mais pixels no eixo rápido, que é mais sensível ao ruído, do que no lento, há espaço para a compressão do quadro tomando médias entre grupos de muitos pontos (caso seja necessário), resultando em uma proporção de quadro aproximadamente quadrada e eliminando consideravelmente o ruído. Isso se fará necessário ao migrar para espectros como o do THz, onde o ruído ambiente é muito mais forte. Por utilizar um feixe colimado, a posição do objeto ao longo do eixo de propagação que o intercepta é pouco relevante para a qualidade da imagem, permitindo uma operação fácil e sem restrições de movimento. Isso também o torna mais facilmente replicável e com menos restrições em relação ao tamanho do sistema. Portanto, concluo esta dissertação com a certeza de que há muito mais frutos a serem colhidos dessa série de trabalhos no campo de *single-pixel imaging*.

REFERÊNCIAS

- BENJAMIN, W. A short history of photography. Screen, Oxford University Press, v. 13, n. 1, p. 5–26, 1972. DOI: 10.1093/screen/13.1.5. Citado na p. 14.
- [2] CHAN, W. L.; DEIBEL, J.; MITTLEMAN, D. M. Imaging with terahertz radiation. Reports on progress in physics, IOP Publishing, v. 70, n. 8, p. 1325, 2007. DOI: 10.1088/0034-4885/70/8/R02. Citado na p. 14.
- YOU, B.; CHEN, C.-Y.; YU, C.-P.; WANG, P.-H.; LU, J.-Y. Frequency-dependent skin penetration depth of terahertz radiation determined by water sorption-desorption. **Opt. Express**, Optica Publishing Group, v. 26, n. 18, p. 22709-22721, set. 2018. DOI: 10.1364/0E.26.022709. Citado na p. 14.
- [4] KARPOWICZ, N.; ZHONG, H.; ZHANG, C.; LIN, K.-I.; HWANG, J.-S.; XU, J.; ZHANG, X.-C. Compact continuous-wave subterahertz system for inspection applications. Applied Physics Letters, AIP Publishing, v. 86, n. 5, 2005. DOI: 10.1063/1.1856701. Citado na p. 14.
- [5] CHEN, Q.; JIANG, Z.; XU, G.; ZHANG, X.-C. Near-field terahertz imaging with a dynamic aperture. **Optics letters**, Optica Publishing Group, v. 25, n. 15, p. 1122–1124, 2000. DOI: 10.1364/OL.25.001122. Citado na p. 15.
- [6] GUERBOUKHA, H.; NALLAPPAN, K.; SKOROBOGATIY, M. Toward real-time terahertz imaging. Advances in Optics and Photonics, Optical Society of America, v. 10, n. 4, p. 843–938, 2018. DOI: 10.1364/A0P.10.000843. Citado na p. 15.
- [7] GIBSON, G. M.; JOHNSON, S. D.; PADGETT, M. J. Single-pixel imaging 12 years on: a review. Optics express, Optica Publishing Group, v. 28, n. 19, p. 28190–28208, 2020. DOI: 10.1364/0E.403195. Citado 5 vezes, nas páginas 15, 16, 25, 28, 33.
- [8] KATLETZ, S.; PFLEGER, M.; PÜHRINGER, H.; VIEWEG, N.; SCHERGER, B.; HEINEN, B.; KOCH, M.; WIESAUER, K. Efficient terahertz en-face imaging. **Optics express**, Optica Publishing Group, v. 19, n. 23, p. 23042–23053, 2011. DOI: 10.1364/0E.19.023042. Citado na p. 15.
- YEE, D.-S.; JIN, K. H.; YAHNG, J. S.; YANG, H.-S.; KIM, C. Y.; YE, J. C. High-speed terahertz reflection three-dimensional imaging using beam steering.
 Optics Express, Optica Publishing Group, v. 23, n. 4, p. 5027–5034, 2015. DOI: 10.1364/0E.23.005027. Citado na p. 15.
- [10] OK, G.; PARK, K.; CHUN, H. S.; CHANG, H.-J.; LEE, N.; CHOI, S.-W. High-performance sub-terahertz transmission imaging system for food inspection.
 Biomedical optics express, Optica Publishing Group, v. 6, n. 5, p. 1929–1941, 2015. DOI: 10.1364/B0E.6.001929. Citado na p. 15.

- [11] DUARTE, M. F.; DAVENPORT, M. A.; TAKHAR, D.; LASKA, J. N.; SUN, T.; KELLY, K. F.; BARANIUK, R. G. Single-pixel imaging via compressive sampling. IEEE Signal Processing Magazine, v. 25, n. 2, p. 83–91, 2008. DOI: 10.1109/MSP.2007.914730. Citado 3 vezes, nas páginas 16, 25, 28.
- [12] HARWIT, M. **Hadamard transform optics**. [S. l.]: Elsevier, 2012. Citado 2 vezes, nas páginas 16, 30.
- [13] KILCULLEN, P.; OZAKI, T.; LIANG, J. Compressed ultrahigh-speed single-pixel imaging by swept aggregate patterns. Nature Communications, Nature Publishing Group UK London, v. 13, n. 1, p. 7879, 2022. DOI: 10.1038/s41467-022-35585-8. Citado 4 vezes, nas páginas 16, 32, 36, 46.
- SOARES, Y. S. Derivative optical imaging technique via transmission and reflection with single-element photodetector. 2024. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/handle/1884/94079. Citado 2 vezes, nas páginas 17, 50, 51, 53.
- [15] HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. Matrix analysis. [S. l.]: Cambridge university press, 2012. Citado 2 vezes, nas páginas 20, 21.
- [16] LUKE, H. D. The origins of the sampling theorem. IEEE Communications Magazine, IEEE, v. 37, n. 4, p. 106–108, 1999. DOI: 10.1109/35.755459. Citado na p. 23.
- [17] DONOHO, D. L. Compressed sensing. IEEE Transactions on information theory, IEEE, v. 52, n. 4, p. 1289–1306, 2006. DOI: 10.1109/TIT.2006.871582. Citado na p. 24.
- [18] CANDES, E. J.; TAO, T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? **IEEE transactions on information theory**, IEEE, v. 52, n. 12, p. 5406–5425, 2006. DOI: 10.1109/TIT.2006.885507. Citado na p. 24.
- [19] CANDES, E.; ROMBERG, J. Sparsity and incoherence in compressive sampling. Inverse problems, IOP Publishing, v. 23, n. 3, p. 969, 2007. DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/008. Citado 2 vezes, nas páginas 24, 29.
- [20] CANDÈS, E. J.; WAKIN, M. B. An introduction to compressive sampling. IEEE signal processing magazine, IEEE, v. 25, n. 2, p. 21–30, 2008. DOI: 10.1109/MSP.2007.914731. Citado na p. 24.
- [21] DEVORE, R. A. Deterministic constructions of compressed sensing matrices.
 Journal of complexity, Elsevier, v. 23, n. 4-6, p. 918-925, 2007. DOI: 10.1016/j.jco.2007.04.002. Citado na p. 25.

- [22] YU, X.; STANTCHEV, R. I.; YANG, F.; PICKWELL-MACPHERSON, E. Super sub-Nyquist single-pixel imaging by total variation ascending ordering of the Hadamard basis. Scientific Reports, Nature Publishing Group UK London, v. 10, n. 1, p. 9338, 2020. DOI: 10.1038/s41598-020-66371-5. Citado na p. 28.
- [23] JOHNSON, D. S. A catalog of complexity classes. In: ALGORITHMS and complexity. [S. l.]: Elsevier, 1990. p. 67–161. DOI: 10.1016/B978-0-444-88071-0.50007-2. Citado na p. 29.
- [24] FANG, X. G.; HAVAS, G. On the worst-case complexity of integer gaussian elimination. *In:* PROCEEDINGS of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation. [S. l.: s. n.], 1997. p. 28–31. DOI: 10.1145/258726.258740. Citado na p. 29.
- [25] BELSLEY, D. A.; KUH, E.; WELSCH, R. E. Regression diagnostics: Identifying influential data and sources of collinearity. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2005. p. 100–104. Citado na p. 29.
- SHEN, J. On the singular values of Gaussian random matrices. Linear Algebra and its Applications, Elsevier, v. 326, n. 1-3, p. 1–14, 2001. DOI: 10.1016/S0024-3795(00)00322-0. Citado na p. 29.
- [27] KLEMA, V.; LAUB, A. The singular value decomposition: Its computation and some applications. IEEE Transactions on automatic control, IEEE, v. 25, n. 2, p. 164–176, 1980. Citado na p. 29.
- [28] FELLGETT, P. Conclusions on multiplex methods. Le Journal de Physique Colloques, EDP Sciences, v. 28, n. C2, p. c2-165, 1967. DOI: 10.1051/jphyscol:1967230. Citado na p. 30.
- [29] STANTON, R. G.; SPROTT, D. A. A family of difference sets. Canadian Journal of Mathematics, Cambridge University Press, v. 10, p. 73–77, 1958. DOI: 10.4153/CJM-1958-008-5. Citado na p. 32.
- [30] ZHANG, Z.; MA, X.; ZHONG, J. Single-pixel imaging by means of Fourier spectrum acquisition. Nature communications, Nature Publishing Group UK London, v. 6, n. 1, p. 6225, 2015. DOI: 10.1038/ncomms7225. Citado na p. 33.
- [31] ZHANG, Z.; WANG, X.; ZHENG, G.; ZHONG, J. Fast Fourier single-pixel imaging via binary illumination. Scientific reports, Nature Publishing Group UK London, v. 7, n. 1, p. 12029, 2017. DOI: 10.1038/s41598-017-12228-3. Citado na p. 34.
- [32] LIANG, Z.-Y.; CHENG, Z.-D.; LIU, Y.-Y.; YU, K.-K.; HU, Y.-D. Fast Fourier single-pixel imaging based on Sierra–Lite dithering algorithm. Chinese physics B,

IOP Publishing, v. 28, n. 6, p. 064202, 2019. DOI: 10.1088/1674-1056/28/6/064202. Citado na p. 34.

- [33] KANABUS, M.; SZELAG, E.; ROJEK, E.; PÖPPEL, E. Temporal order judgement for auditory and visual stimuli. Acta neurobiologiae experimentalis, v. 62, n. 4, p. 263–270, 2002. Citado na p. 36.
- [34] FUTIA, G.; SCHLUP, P.; WINTERS, D. G.; BARTELS, R. A. Spatially-chirped modulation imaging of absorbtion and fluorescent objects on single-element optical detector. **Opt. Express**, Optica Publishing Group, v. 19, n. 2, p. 1626–1640, jan. 2011. DOI: 10.1364/0E.19.001626. Citado na p. 50.
- [35] COTTRELL, S.; HUNTER, S.; ERES-CASTELLANOS, A.; ADAMS, D.; CLARKE, A.; KLEMM-TOOLE, J.; SQUIER, J. Spatial frequency modulation imaging for laser processing applications. Additive Manufacturing Letters, v. 11, p. 100231, 2024. ISSN 2772-3690. DOI: 10.1016/j.addlet.2024.100231. Citado na p. 50.
- [36] SOARES, Y. S.; MACHADO, M. J.; MISOGUTI, L.; BARBANO, E. C. Imageamento Óptico com Fotodetector de Elemento Único. Revista Brasileira de Ensino de Física, SciELO Brasil, v. 45, e20230180, 2023. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0180. Citado na p. 50.
- [37] SANDERS, J. S.; DRIGGERS, R. G.; HALFORD, C. E.; GRIFFIN, S. T. Imaging with frequency-modulated reticles. **Optical Engineering**, SPIE, v. 30, n. 11, p. 1720–1724, 1991. DOI: 10.1117/12.55994. Citado na p. 50.
- [38] FIELD, J. J.; WERNSING, K. A.; DOMINGUE, S. R.; ALLENDE MOTZ, A. M.; DELUCA, K. F.; LEVI, D. H.; DELUCA, J. G.; YOUNG, M. D.; SQUIER, J. A.; BARTELS, R. A. Superresolved multiphoton microscopy with spatial frequency-modulated imaging. Proceedings of the National Academy of Sciences, National Acad Sciences, v. 113, n. 24, p. 6605–6610, 2016. DOI: 10.1073/pnas.1602811113. Citado na p. 50.
- [39] SOARES, Y. S.; MACHADO, M. J.; CIONEK, M. P.; MISOGUTI, L.; BARBANO, E. C. Derivative optical imaging technique. **Optics Letters**, Optica Publishing Group, v. 50, n. 5, p. 1504–1507, 2025. Citado na p. 50.