

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

NATANI LIMA FLAUZINO

**CONTROLABILIDADE DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS DO PÊNULO SIMPLES VIA MÉTODO
NUMÉRICO**

PALOTINA

2024

NATANI LIMA FLAUZINO

**CONTROLABILIDADE DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS DO PÊNULO SIMPLES VIA MÉTODO
NUMÉRICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Ciências Exatas

Orientador: Rodrigo André Schulz

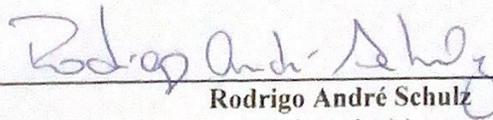
PALOTINA
2024

TERMO DE APROVAÇÃO

NATANI LIMA FLAUZINO

**CONTROLABILIDADE DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS DO PÊNDULO SIMPLES VIA MÉTODO
NUMÉRICO**

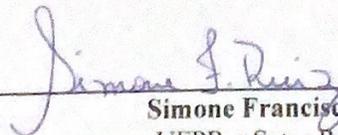
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas na Universidade Federal do Paraná como requisito para a obtenção de Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Matemática e aprovado pela seguinte banca avaliadora:



Rodrigo André Schulz
Orientador(a)



Denis Rogério Sanches Alves
UFPR – Setor Palotina



Simone Francisco Ruiz
UFPR – Setor Palotina

RESUMO

A Teoria do Controle é um campo de estudo da Matemática que tem aplicações em diversos contextos, como no deslocamento de corpos, no enchimento de reservatórios de água e até mesmo no lançamento de foguetes. A importância desse estudo é evidente, dada sua ampla gama de aplicações. Nesse contexto, desenvolvemos o presente trabalho com o objetivo de descrever, de forma teórica, como realizar o controle de um pêndulo simples a partir de um sistema com equações diferenciais. Para isso, foram apresentados conceitos fundamentais, da Álgebra Linear, Equações Diferenciais e Teoria do Controle. Em seguida, foi realizada a modelagem e a aplicação desses conceitos ao pêndulo simples preso a um carrinho por meio de uma haste. Foram analisados diferentes casos, variando o comprimento da haste. Após a aplicação de todos os casos, foram realizadas análises para identificar a abordagem mais adequada. Para facilitar o desenvolvimento, optamos por utilizar um programa computacional. Esse programa foi desenvolvido em Julia, uma linguagem conhecida por seu excelente desempenho em computação científica e ciência de dados. Ao executar o programa, os resultados são apresentados por meio de gráficos, permitindo uma visualização clara do desempenho do controle no sistema escolhido. Além disso, o programa permite a alteração das condições iniciais e finais, possibilitando a exploração de diversas situações com diferentes restrições. Tais condições foram relacionadas a dados físicos presentes no sistema como, posição inicial e final do carrinho e do objeto, velocidade inicial e final do carrinho e do objeto, comprimento da haste e tempo de controle do sistema. A possibilidade dessa versatilidade nas condições impostas contribui para o desenvolvimento de novos resultados e aplicações. Em conclusão, a possibilidade de analisar diversos casos e condições em um determinado sistema de forma computacional, promove tanto a otimização de tempo quanto o alcance de resultados mais adequados e controles mais eficazes.

Palavras-chave: Teoria de Controle; Equações Diferenciais; Álgebra Linear.

ABSTRACT

Control Theory is a field of study in Mathematics that has applications in various contexts, such as moving bodies, filling water tanks, and even launching rockets. The importance of this study is evident, given its wide range of applications. In this context, we developed this work with the objective of describing, in a theoretical way, how to control a simple pendulum from a system with differential equations. To this end, fundamental concepts from Linear Algebra, Differential Equations, and Control Theory were presented. Then, the modeling and application of these concepts to the simple pendulum attached to a cart by means of a rod were carried out. Different cases were analyzed, varying the length of the rod. After applying all the cases, analyses were performed to identify the most appropriate approach. To facilitate development, we chose to use a computer program. This program was developed in Julia, a language known for its excellent performance in scientific computing and data science. When running the program, the results are presented through graphs, allowing a clear visualization of the control performance in the chosen system. Furthermore, the program allows the initial and final conditions to be changed, enabling the exploration of different situations with different restrictions. These conditions were related to physical data present in the system, such as the initial and final position of the cart and the object, the initial and final speed of the cart and the object, the length of the rod and the system control time. The possibility of this versatility in the imposed conditions contributes to the development of new results and applications. In conclusion, the possibility of analyzing different cases and conditions in a given system in a computational way promotes both the optimization of time and the achievement of more appropriate results and more effective controls.

Keywords: Control Theory; Differential Equations; Linear Algebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – PÊNDULO SIMPLES FIXADO A UM CARRO	18
FIGURA 2 – FUNÇÃO CONTROLE - CASO 1	25
FIGURA 3 – SOLUÇÃO - CASO 1	26
FIGURA 4 – VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 2	27
FIGURA 5 – ERRO ASSOCIADO AO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 2	28
FIGURA 6 – FUNÇÃO CONTROLE - CASO 2	28
FIGURA 7 – SOLUÇÃO - CASO 2	29
FIGURA 8 – SOLUÇÃO NÃO ASSOC. AO MENOR ERRO DE $L(T)$ - RETA	30
FIGURA 9 – VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 3	32
FIGURA 10 – ERRO ASSOCIADO AO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 3	33
FIGURA 11 – FUNÇÃO CONTROLE - CASO 3	33
FIGURA 12 – SOLUÇÃO - CASO 3	34
FIGURA 13 – SOLUÇÃO NÃO ASSOC. AO MENOR ERRO DE $L(T)$ - CÚBICA	35

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CONDIÇÕES INICIAIS E FINAIS E CONSTANTES ATUANDO NO SISTEMA	24
TABELA 2 – VALORES DO OBJETO E DO CARRINHO - CASO 2 E 3	36
TABELA 3 – ERROS ASSOCIADOS E SEUS INTERVALOS - CASO 2 E 3	36

SUMÁRIO

1	–	INTRODUÇÃO	7
2	–	PRELIMINARES	8
2.1		Erros Associados a um Sistema	8
2.2		Sistemas de equações	8
2.3		Propriedades de Matrizes	9
2.4		Matriz Escalonada	9
2.5		Posto de Matrizes	10
2.6		Exponencial de Matrizes	10
2.7		Equações Diferenciais	11
3	–	TEORIA DO CONTROLE	14
3.1		Matriz de Controlabilidade	15
3.2		Gramianos de Controlabilidade	16
4	–	CONTROLE DE UM PÊNDULO SIMPLES	18
4.1		Finalidade do Sistema	18
4.2		Variáveis atuando no sistema	18
4.3		Estado final desejado	19
4.4		Candidato a controle	19
4.5		Análise do desempenho do controle	22
5	–	MATERIAIS E MÉTODOS	23
6	–	RESULTADOS E DISCUSSÃO	24
6.1		Caso 1: Pêndulo com haste de comprimento fixo	24
6.2		Caso 2: Pêndulo com haste variável segundo uma reta	27
6.3		Caso 3: Pêndulo com haste variável segundo uma cúbica	30
7	–	CONCLUSÃO	36
		REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

A teoria do controle é um estudo da área da matemática, que pode ser aplicado em diversos contextos, como na realização de deslocamento de um corpo, no enchimento de reservatórios de água e até mesmo no lançamento de foguetes. Dito isso, essa temática é muito abrangente, visto que estuda sistemas dinâmicos, nos quais seus comportamentos podem ser alterados por meio da inserção de controles [1].

Dessa forma, a elaboração deste trabalho teve seu enfoque, inicialmente voltado à construção de conceitos necessários para o desenvolvimento desta temática. De início, foram apresentadas as concepções sobre Cálculo Numérico, Álgebra Linear e Equações Diferenciais. Posteriormente, introduzimos a Teoria do Controle, mostrando para que serve e como a utilizar. Para isso, foram apresentados conceitos importantes como Matriz de Controlabilidade e Gramianos de Controlabilidade apresentando, assim, uma base sólida para a interpretação desta temática.

Em seguida, fornecemos um exemplo aplicado, por meio do controle de um pêndulo simples, em que exibimos a modelagem do pêndulo e apresentamos três casos diferentes, referentes a variação de comprimento da haste: constante, variação segundo uma reta e também segundo uma cúbica. Por fim, apresentamos os resultados obtidos computacionalmente nos três casos e realizamos a análise de cada um deles.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos em torno do Cálculo Numérico, Álgebra Linear e Equações Diferenciais que serão usados como base para a construção dos principais resultados deste trabalho.

2.1 Erros Associados a um Sistema

A resolução de um problema por métodos numéricos envolve várias etapas. Inicialmente construímos um modelo matemático, escolhemos um método numérico mais adequado, implementamos computacionalmente este método e, por fim, analisamos os resultados obtidos. Não é surpreendente quando obtemos resultados finais diferentes do esperado, pois é algo comum de se acontecer, mesmo que toda construção da resolução do problema tenha sido feita de forma correta. Isso ocorre pois, os resultados dependem também de outros fatores, como, a precisão dos dados de entrada, a forma como esses dados são representados computacionalmente e as operações numéricas realizadas [2].

Todos esses fatores atuam diretamente no resultado final do problema e o efeito dessas interferências podem ser chamados de erros associados. Assim, ao tratarmos, por exemplo, de cálculos de integrais por métodos numéricos, cometemos alguns erros em vários momentos, ao fazermos arredondamentos e/ou truncamentos. Além disso, os métodos numéricos utilizados para o cálculo de integrais, como Integral de Simpson ou método dos trapézios usam uma aproximação, por meio de somas finitas, para calcular a área sob a curva sendo este mais uma das fontes de erros.

Dito isso, é necessário conhecer esses erros, a fim de aferir a precisão em torno do problema estudado, uma vez que se estes erros forem muito altos, pode ser necessário reavaliar o modelo matemático ou o método numérico utilizado.

2.2 Sistemas de equações

Ao trabalharmos com equações, se existir uma única incógnita, uma equação pode ser suficiente para determiná-la. No entanto, se existir duas ou mais incógnitas a serem determinadas, é necessário a construção de um sistema de equações [3]. Dessa forma, é chamado de sistema de equações lineares um conjunto finito de m equações e n incógnitas, que pode ser representado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Este sistema é resolvido quando encontram-se valores para as incógnitas que satisfazem simultaneamente todas as equações.

Além disso, sistemas deste tipo são comumente representados na forma matricial por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_B$$

Em que A é a matriz dos coeficientes, x das incógnitas e B dos termos independentes.

2.3 Propriedades de Matrizes

É importante definirmos as propriedades de uma matriz a fim de mitigar as dificuldades numéricas apresentadas na Teoria do Controle. Assim, considere as definições abaixo:

Definição 1. Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é semidefinida positiva se, para todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$, temos $x^T M x \geq 0$.

Assim, pela definição, se M é uma matriz semidefinida positiva, então todos os seus autovalores são não negativos [12].

Definição 2. Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se, para todo vetor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos $x^T M x > 0$.

Assim, se M é uma matriz definida positiva, então todos os seus autovalores são positivos [12].

2.4 Matriz Escalonada

Uma matriz $A = [a_{ij}]^{m \times n}$ está na forma escalonada reduzida quando satisfaz as seguintes condições:

- i)* Todas as linhas nulas (definidas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;
- ii)* O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula, é chamado de pivô e igual a 1;
- iii)* O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.
- iv)* Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Além disso, se uma matriz satisfaz somente o item *i)* e *iv)* ela pode ser considerada matriz escalonada.

Para a realização do processo de escalonamento, podem ser utilizadas as seguintes operações elementares:

- i)* trocar duas linhas;

- ii) multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- iii) adicionar o múltiplo de uma linha a uma outra linha.

2.5 Posto de Matrizes

Ao trabalharmos com sistemas lineares, é comum o representarmos na forma matricial, ou seja, como uma matriz ampliada de um sistema. Isso se justifica pois, dessa forma, conseguimos ter uma maior organização e otimização no momento de resolver esse sistema, visto que há uma variedade de métodos algébricos disponíveis para aplicação neste formato. Dito isto, verificamos a importância de conceituar o posto de uma matriz, pois, com esse resultado obtemos informações, a partir da forma matricial, sobre o conjunto solução de um sistema e o número de equações significativas que não podem ser desprezadas. Dessa forma, definimos o posto de uma matriz A , denotado por $p(A)$, como sendo:

Definição 3. Sejam $A_{m \times n}$ uma matriz e $B_{m \times n}$ a sua matriz escalonada, o $p(A)$ é o número máximo de linhas linearmente independentes da matriz B , ou seja, o $p(A)$ é definido pelo número de linhas não nulas de B .

Então, pela definição, para determinar o posto de uma matriz, primeiro realizamos a sua redução à forma escalonada. Posteriormente, é feita a contagem de linhas não nulas, ou seja, que são linearmente independentes, sendo essa quantidade o valor do posto da matriz original.

De forma equivalente, o posto de A também pode ser definido como a dimensão da imagem de A , ou seja, $p(A) = \dim(\text{Im}(A))$. Entretanto, se o posto da matriz não for igual a sua dimensão, definimos o seu posto a partir do número de linhas linearmente independentes.

2.6 Exponencial de Matrizes

Neste momento, definimos os conceitos relacionados à exponencial de matrizes. Seja A uma matriz quadrada com entradas complexas, isto é, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. A exponencial da matriz A pode ser definida formalmente da seguinte maneira:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad (1)$$

a qual também pode ser representada pela notação $e^A = \exp(A)$.

A série acima é absolutamente convergente, independente de qual seja a matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Isso ocorre devido à desigualdade de normas apresentada a seguir:

$$\|e^A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq e^{\|A\|} < \infty. \quad (2)$$

A partir disso, por consequência dessa propriedade, com o intuito de otimizar os cálculos futuros, temos as seguintes propriedades:

Propriedade 1. Seja O a matriz nula, I a matriz identidade e M uma matriz inversível qualquer. As propriedades a seguir são válidas:

- i) $e^O = I$
- ii) $e^{A+B} = e^A e^B$, quando $AB = BA$
- iii) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$
- iv) $e^{MAM^{-1}} = M e^A M^{-1}$
- v) $Ae^A = e^A A$
- vi) $e^{A^*} = (e^A)^*$, em que A^* é a matriz adjunta de A .

Demonstração: Pode ser encontrada em [10].

2.7 Equações Diferenciais

As equações diferenciais descrevem o comportamento de uma grandeza em relação a outra, frequentemente em termos de taxas de variação. O seu uso se dá em diversos contextos, seja na Física, Matemática ou Engenharia, como movimento dos fluídos, corrente elétrica em circuitos, crescimento populacional, entre outros. As equações diferenciais são ferramentas matemáticas indispensáveis no momento de se desenvolver uma análise de um problema real, permitindo a modelagem de sistemas dinâmicos, ou seja, que se alteram ao longo do tempo. Na linguagem matemática, essas relações envolvendo os cenários citados anteriormente são chamados de equações e as taxas de variação de derivadas. Sendo assim, equações que possuem derivadas são nomeadas de Equações Diferenciais. A construção de uma Equação Diferencial que descreve um processo físico é chamado de modelagem matemática do processo [3].

Além disso, as Equações Diferenciais podem ser classificadas de duas formas: Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Equações Diferenciais Parciais (EDPs). O que diferencia essas duas classificações está ligado ao número de variáveis independentes envolvidas e ao tipo de derivadas utilizadas. Sendo a EDO composta por uma única variável independente, com derivadas simples, ou seja, ordinárias, e a EDP composta por duas ou mais variáveis independentes com derivadas parciais. Dessa forma, de maneira geral, podemos definir uma equação diferencial ordinária de ordem n , sendo uma equação que envolve uma função desconhecida f juntamente com suas derivadas $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, ..., $\frac{d^nf}{dx^n}$. Podendo ser expressa, de forma mais geral, como [3]:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Outrossim, uma característica importante de uma Equação Diferencial é a sua ordem, que é definida pela ordem da maior derivada existente na equação. Também é importante ressaltar que se uma Equação Diferencial é dita linear, ela pode ser escrita da forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y = g(x).$$

Os métodos e teorias matemáticas envolvidas para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias lineares são bem desenvolvidos em comparação aos métodos de equações não lineares. Devido a complexidade das equações não lineares, existe um método chamado de linearização, o qual consiste em aproximar Equações Diferenciais não lineares por equações diferenciais lineares [3].

Além disso, quando um sistema apresenta equações diferenciais, nomeamos o sistema de Sistema de Equações Diferenciais. No caso de um sistema apresentar uma EDO e uma condição inicial definida, nomeia-se este sistema como um problema de valor inicial (PVI), como o exemplo descrito a seguir:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + bu(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$.

Diversas são as abordagens disponíveis para se resolver um PVI, como por exemplo, a partir da separação de variáveis, integração direta, transformada de Laplace e fator integrante. Observe que, para resolver o PVI dado, podemos usar um fator integrante, com o intuito de facilitar a integração e encontrar $x(t)$, sendo

$$\mu(t) = e^{-\int a dt} = e^{-at}. \quad (4)$$

Então, multiplicamos a EDO do PVI por $\mu(t)$ e obtemos:

$$e^{-at}x'(t) + e^{-at}(-ax(t)) = e^{-at}bu(t).$$

Observe que a expressão à esquerda da equação pode ser escrita como uma derivada do produto, assim, temos que:

$$\frac{d}{dt} [e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t).$$

Agora, trocando t por s e integrando ambos os lados em relação a s no intervalo $[0, t]$, obtemos:

$$\int_0^t \frac{d}{ds} [e^{-as}x(s)] ds = \int_0^t e^{-as}bu(s) ds.$$

Assim, a integral da derivada é dada pela expressão dentro da derivada, obtendo:

$$e^{-as}x(s) \Big|_0^t = e^{-at}x(t) - e^{-a \cdot 0}x(0) = \int_0^t e^{-as}bu(s) ds.$$

Posteriormente, substituímos a condição inicial $x(0) = x_0$ dada, temos então:

$$e^{-at}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-as}bu(s) ds.$$

Por fim, multiplicamos ambos os lados da equação por e^{at} para isolar $x(t)$ e obtemos a solução do PVI dado:

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}bu(s) ds. \quad (5)$$

3 TEORIA DO CONTROLE

A prática de Engenharia de Controle tem o enfoque no uso de estratégias para a otimização de processos, seja ele de manufatura, uso de energia, controle de automóveis, dentre outros. O principal desafio em torno do controle é a modelagem do controle de sistemas modernos, complexos e interligados, sendo sua principal característica a oportunidade de desenvolver controles que tragam benefícios, sejam eles industriais ou econômicos, para a sociedade.

Um sistema de controle é uma combinação de várias componentes, que formam uma configuração inicial do sistema e é responsável por produzir uma resposta para alcançar um estado final desejado, onde supõe uma relação de causa e efeito para os componentes que o integram. Dito isso, o primeiro passo para construir um sistema de controle é estabelecer a finalidade do sistema, ou seja, o objetivo principal para o qual o sistema foi projetado. Posteriormente, é preciso identificar as variáveis que estão atuando no sistema, dessa forma, compreendendo as variáveis que devem ser controladas. Depois, é preciso estabelecer, de forma exata, o que se busca alcançar com o controle do sistema, ou seja, qual será o estado final desejado. Após isso, define-se o controlador para atuar no sistema e compara-se a resposta desejada do sistema com a real obtida após a realização do controle, observando os erros obtidos nessa resposta. O último passo, por fim, é o ajuste dos parâmetros empregados no sistema com o intuito de obter o desempenho desejado e realizar a análise final [4].

Dessa forma, com o conceito geral de controle bem estabelecido, é possível associar a teoria do controle a um sistema de equações escrito de forma algébrica. Considere o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in (0, T) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (6)$$

em que

- A é uma matriz real $n \times n$ ($A \in \mathbb{R}^{n,n}$)
- B é uma matriz real $n \times m$ ($B \in \mathbb{R}^{n,m}$)
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa o estado; e
- $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o controle.

Dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, controlar esse sistema significa levar a solução x de um estado inicial x_0 a um estado final desejado x_1 , através da ação do controle u durante um tempo T . Ou seja, é necessário encontrar uma função $u(t)$, de modo que a solução do PVI satisfaça $x(T) = x_1$, para assim dizer que esse sistema está controlado.

Observação 1. Com efeito, quando se tem um sistema de controle, o número de controles atuando (m) é geralmente menor ou igual ao número de variáveis do sistema (n). Ou seja, $m \leq n$. Além disso, busca-se utilizar o menor número possível de controles para otimizar o desempenho do sistema. Isso significa que, idealmente, cada variável do sistema seria controlada

por apenas um único controle.

Então, ao considerar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ ¹ o sistema acima tem uma única solução, dado por $x \in H^1(0, T, \mathbb{R}^n)$ ² definido pela fórmula

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7)$$

Dessa forma, assim como dito inicialmente, tem-se a seguinte definição:

Definição 4. O sistema (6) é exatamente controlável no tempo $T > 0$ se dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ (dados iniciais e finais), existir $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ tal que a solução de (6) dado por (7) satisfaça

$$x(T) = x_1.$$

Além disso, um sistema pode ser considerado parcialmente controlável quando o controle u age somente de forma parcial sob os componentes presentes no sistema, ou seja, o controle u não atua em todas as componentes que fazem parte do sistema. E ainda, ao observar num sistema, o controle u atuando somente em uma equação, onde estão presentes todas as componentes, não se pode definir de imediato que esse sistema não é controlável. Mesmo o controle u não atuando em todas as equações, se ele conduzir a solução de x_0 para x_1 , ele pode ser considerado controlável.

3.1 Matriz de Controlabilidade

Neste tópico vamos apresentar as propriedades qualitativas do sistema, que se refere a Controlabilidade. Os elementos fundamentais para essa propriedade são as matrizes A , B , no qual a controlabilidade tem a capacidade de manipular ou atuar com efeito em todos os estados do sistema [6]. A fim de simplificar, o sistema de controle (6) será chamado de (A, B) .

Definição 5. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de controlabilidade é definida por

$$R(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times n.m} \in \mathbb{R}^{n \times n.m}.$$

A partir dessa matriz, é possível definir se um sistema é ou não controlável. Para isso, basta provar que a Matriz de Controlabilidade possui posto igual ao número de estados (n) do sistema, como pode ser visto na Definição 3. Com isso, em sistemas que apresentam um número elevado de estados, essa aplicação pode ser um trabalho árduo, devido a dimensão das matrizes A e B . Assim, após garantirmos que um sistema é controlável, conseguimos encontrar o controle usando W_T , que é definido na seção posterior.

¹Espaço de Lesbegue, onde as funções finitas possuem uma norma quadrado integrável.

²Espaço Sobolev, no qual contém funções cujas derivadas parciais de 1^a ordem são integráveis a Lesbegue no intervalo $(0, T)$.

3.2 Gramianos de Controlabilidade

Os Gramianos de Controlabilidade são matrizes que representam as propriedades de controlabilidade, ou seja, eles são matrizes semidefinidas positivas, além de serem simétricas por construção. Esse critério se destaca pois, a análise dessas propriedades é feita por meio de uma abordagem qualitativa, o que colabora pois minimiza as dificuldades numéricas [7]. Então, sabendo que, um sistema é dito controlável se for possível influenciar todos os estados do sistema através das entradas disponíveis, permitindo que o sistema seja movido de qualquer estado inicial para qualquer estado final desejado, essa condição é possível se, e somente se, o Gramiano de Controlabilidade for positivo definido [8]. Considerando o sistema apresentado em (6), podemos definir a matriz W_t chamada de Gramiano de Controlabilidade dada por uma matriz quadrada, para esse sistema da forma:

$$W_t = \int_0^t e^{As} B B^* e^{A^*s} ds \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (8)$$

em que A^* e B^* são as matrizes adjuntas de A e B respectivamente.

Então, dessa forma, basta mostrarmos que W_t é positivo para concluirmos que, o sistema é controlável. Em geral podem ser verificados os resultados abaixo.

Proposição 6. *Considere W_t , conforme definido anteriormente. Então:*

- i) W_t é semidefinida positiva para $t > 0$, isto é, $x^T W_t x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- ii) W_t é positiva definida se, e somente se, W_t é invertível.

Demonstração: Pode ser encontrada em [5], página 28.

Definição 7. Se $T \in \mathbb{R}^{p \times q}$ então a imagem de T é definida por

$$Im T = \{y \in \mathbb{R}^p; y = Tx \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^q\}$$

Proposição 8. *Para $t > 0$ temos que*

$$Im W_t = Im R(A, B).$$

O que representa que $Im W_t$ é independente do parâmetro t . Isto é, a imagem do Gramiano de Controlabilidade W_t é igual a imagem da matriz de controlabilidade $R(A, B)$. Em particular, W_t é positiva definida se, e somente se, o posto de $R(A, B) = n$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [5], página 28.

Teorema 9. *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $T > 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *Para $T > 0$ o sistema (A, B) é controlável no tempo T , isto é, para todo $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ existe uma função $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que a única solução de (6) satisfaz $x(T) = x^1$.*
- ii) *O sistema (A, B) é controlável.*
- iii) *O posto de $R(A, B)$ é igual a n .*

Demonstração: Pode ser encontrada em [5], página 29.

Observação 2. O teorema anterior garante que a controlabilidade de (A,B) pode ser verificada analisando o posto de $R(A,B)$. Além disso, a demonstração deste teorema (9), diz que se o sistema for controlável pode-se escolher o controle como sendo

$$u(s) = B^* e^{A^*(T-s)} W_T^{-1} (x^1 - e^{AT} x^0).$$

4 CONTROLE DE UM PÊNDULO SIMPLES

Como visto anteriormente, para realizar a construção de um sistema de controle são necessários cinco passos:

1. estabelecer a finalidade do sistema,
2. identificar as variáveis atuando no sistema,
3. estabelecer o estado final desejado,
4. definir um candidato a controle,
5. ajustar os parâmetros empregados no sistema e analisar o desempenho do controle, os quais são apresentados a seguir.

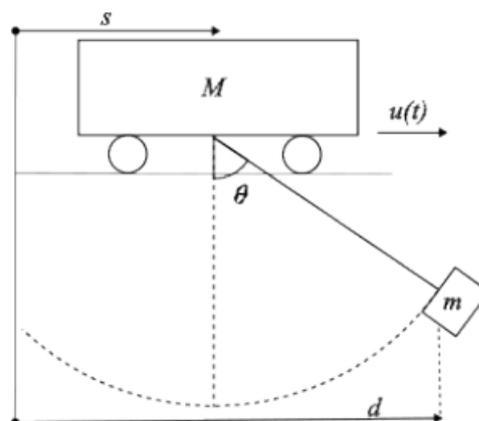
4.1 Finalidade do Sistema

Neste exemplo, a finalidade do sistema é realizar o deslocamento de um carrinho que se move horizontalmente sobre trilhos e no qual a ele está preso um pêndulo, de modo que ambos alcancem uma posição e velocidade final previamente definida.

4.2 Variáveis atuando no sistema

Considere que o carrinho é movido por um motor que no instante t exerce uma força $u(t)$ chamada controle. Imagine que todo o movimento ocorre em um plano, de modo que, o carrinho se mova numa linha reta. Seja $M > 0$ a massa do carrinho, $m > 0$ a massa do pêndulo, que está concentrado na ponta, $l > 0$ o comprimento do pêndulo, s o deslocamento do centro do carrinho em relação a algum ponto fixo, d é o deslocamento horizontal da massa m presa na ponta do pêndulo em relação ao ponto fixado, θ é o ângulo que o pêndulo forma com a vertical e g é a aceleração da gravidade, como é esquematizado pela figura abaixo:

FIGURA 1 – PÊNDULO SIMPLES FIXADO A UM CARRO



4.3 Estado final desejado

O estado final desejado é que ao fim do controle o carrinho e o pêndulo estejam em total repouso em uma posição pré-definida para ambos.

4.4 Candidato a controle

Para a realização desse passo, de início é necessário realizar a modelagem do sistema. Considere um pêndulo com haste de comprimento l e massa desprezível, um objeto de massa m e denotemos a aceleração gravitacional por g . Consideremos que as únicas forças atuantes neste sistema são:

- \vec{T} - tensão na haste; e
- \vec{P} - força peso.

Além disso, estabelecemos também um sistema de coordenadas tangencial e radial ao movimento circular de modo que \vec{P} e \vec{T} possam ser divididos nos componentes tangencial e radial da seguinte forma:

$$\vec{P} = (-mg \sin \theta, -mg \cos \theta),$$

$$\vec{T} = (0, \tau)$$

em que τ é o módulo de força de tração na haste.

Estabelecemos por \vec{F} a soma das forças atuantes neste sistema. Então,

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = (-mg \sin \theta, \tau - mg \cos \theta)$$

Assim, pela segunda lei de Newton (Princípio Fundamental da Mecânica) temos que a resultante das forças que agem num corpo é igual ao produto da sua massa pela aceleração, isto é,

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Porém, note que a aceleração circular é a derivada segunda da posição circular $\sigma = \sigma(t)$. Assim,

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\sigma}{dt^2}, 0 \right),$$

uma vez que não há deslocamento radial. Como

$$\sigma(t) = l\theta(t) \quad (\text{comprimento de arco}),$$

temos que

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\sigma}{dt^2}, 0 \right) = \left(l \frac{d^2\theta}{dt^2}, 0 \right).$$

De (\vec{F}) , $(m\vec{a})$ e (\vec{a}) temos que

$$(-mg \sin \theta, \tau - mg \cos \theta) = m \left(l \frac{d^2\theta}{dt^2}, 0 \right).$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \\ \tau - mg \cos \theta = 0 \end{cases}.$$

Para valores pequenos de θ , os deslocamentos tangencial $\sigma(t)$ e horizontal $d(t)$ são próximos. Então,

$$d(t) \approx \sigma(t) = l\theta(t) \implies d''(t) \approx l\theta''(t).$$

Usando a aproximação $d''(t) \approx l\theta''(t)$, temos

$$md''(t) = -mg \sin \theta.$$

Além disso, ainda considerando pequenos valores para θ , podemos fazer a aproximação $\theta \approx \sin \theta$ e obter

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta,$$

uma equação linear. Determinando as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} Ms''(t) = u(t), & \text{usar que } m\vec{a} = \vec{F} \\ md''(t) = -mg \sin \theta(t) \end{cases}. \quad (9)$$

Note que

$$\begin{aligned} d - s &= l\theta \\ \Rightarrow \theta &= \frac{d-s}{l} \end{aligned}$$

Agora, substituindo na equação (9) tem-se:

$$\begin{cases} Ms'' = u \\ d'' = -\frac{g}{l}(d - s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s' = s' \\ s'' = \frac{1}{M}u \\ d' = d' \\ d'' = -\frac{g}{l}d + \frac{g}{l}s \end{cases},$$

que pode ser escrito na forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s' \\ s'' \\ d' \\ d'' \end{bmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{bmatrix} s \\ s' \\ d \\ d' \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t),$$

em que,

- s : Posição horizontal do carrinho;
- s' : Velocidade horizontal do carrinho;
- s'' : Aceleração horizontal do carrinho (derivada de s);
- d : Posição angular do pêndulo;
- d' : Velocidade angular do pêndulo;
- d'' : Aceleração angular do pêndulo (derivada de d).

ou ainda, de forma mais compacta, como

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

em que,

- $x(t)$: Representa as variáveis do sistema;
- A : Matriz dinâmica que descreve a relação entre as variáveis de estado;
- B : Matriz de entrada que indica como a entrada de controle afeta a taxa de variação das variáveis de estado;
- $u(t)$: Controle que representa as forças ou comandos externos aplicados ao sistema.

Agora, podemos determinar a matriz de controlabilidade $R(A,B)$ a partir da Definição 5. Para isso, calculamos AB , A^2B e A^3B , isto é:

$$R(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g}{lM} \\ \frac{g}{l} & 0 & \frac{g}{lM} & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que o posto $R(A,B)$ é 4, assim, por *iii*) do Teorema 9, o sistema é controlável.

Dessa forma, para determinar o controle de sistema (9) usamos a Observação 2, a qual pontua que o controle é dado por

$$u(s) = B^* e^{A^*(T-s)} W_T^{-1} (x^1 - e^{AT} x^0).$$

Com isso, para definir a função controle resta determinar a matriz W_T . Assim, devido a necessidade de posteriormente desenvolver vários cálculos demasiadamente longos, como o cálculo da inversa de W_T , usamos um programa computacional com o intuito de otimizar esse trabalho, como poderá ser visto nos capítulos posteriores.

4.5 Análise do desempenho do controle

A análise do desempenho apresentado pelo controle pode ser vista no capítulo destinado a apresentação dos resultados.

5 MATERIAIS E MÉTODOS

Para a construção do programa, foi utilizado o VS Code, que é um editor de código fonte. A linguagem de programação escolhida foi a Julia, visto seu ótimo desempenho em computação científica e ciência de dados. A construção do programa se deu inicialmente pela delimitação das condições físicas necessárias para a aplicação, definindo os estados iniciais e finais, sendo eles, as posições iniciais e finais do carrinho e do objeto e a velocidade de ambos, além do tempo de realização do controle e comprimento da haste. Posteriormente, foi estabelecido qual seria a função que descreveria a variação do comprimento da haste durante a realização do controle u , sendo elas: afim ou cúbica.

Após a definição do cenário em que irá ocorrer o controle, foi possível realizar a análise de quais métodos numéricos são necessários para a aplicação. Com isso, foram destacados os seguintes métodos: Runge-Kutta de ordem 4 e Integral de Simpson composta, visto a necessidade de resolver equações diferenciais e calcular integrais de forma numérica. Por fim, foi inserido a função controle u e suas subdivisões de cálculo numérico, como o cálculo da matriz $A(t)$, no qual é a matriz dinâmica do sistema que varia em função do tempo.

Como dito anteriormente, foram selecionados duas formas de se estabelecer como se dará a variação do comprimento da haste. O programa está configurado para a realização dessas duas aplicações separadamente. Além disso, ainda é possível definir se o pêndulo terá haste variável ou não, ou seja, é possível delimitar uma alteração no comprimento da haste durante a realização do controle, ou manter a mesma extensão durante o processo. Visto essa versatilidade, foi possível obter o erro associado ao sistema com o uso de integrais, promovendo a possibilidade de uma melhor análise de quais condições o sistema apresenta melhor resultado.

Outrossim, é possível realizar também alterações em todos os dados físicos envolvidos no programa, desde o tempo até a posição final estabelecida. E, para uma clara visualização das respostas vinculadas a cada sistema, após a execução do programa, são apresentados gráficos dos resultados obtidos, sendo eles: gráfico da função controle ($u(t)$), Função do comprimento da haste ($L(t)$), solução após a aplicação do controle e erro associado ao comprimento da haste.

Para uma visualização completa e detalhada do programa utilizado, o código está disponível em [11].

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção vamos exibir os resultados das soluções encontradas. Esses resultados são apresentados majoritariamente por gráficos gerados através de programas computacionais, visto que as expressões analíticas são, de certa forma, excessivamente longas.

Neste trabalho, foram escolhidas três formas para determinar qual será a função que obtém o melhor desempenho do controle $u(t)$ no pêndulo analisado. São eles:

- Caso 1: Pêndulo com haste de comprimento fixo;
- Caso 2: Pêndulo com haste variável segundo uma reta;
- Caso 3: Pêndulo com haste variável segundo uma cúbica.

Antes, para isso, foram fixados valores para as informações físicas envolvidas no sistema, os quais podem ser visto na tabela a seguir:

Descrição	Condições iniciais	Condições finais
Posição do carrinho	0	2
Posição do objeto	0	2
Velocidade do carrinho	0	0
Velocidade do objeto	0	0
Comprimento da haste	1	0,5 (ou 1 se haste fixa)
Constantes atuando no sistema		
g		10
M		10
Tempo de Controle T		4

TABELA 1 – CONDIÇÕES INICIAIS E FINAIS E CONSTANTES ATUANDO NO SISTEMA

Observe que, o carrinho e o pêndulo nas condições iniciais estão em repouso.

6.1 Caso 1: Pêndulo com haste de comprimento fixo

Neste caso, como dito anteriormente, não foi realizada a variação do comprimento da haste e foi utilizado a função afim para representar o trabalho realizado pelo pêndulo. Denotada pela seguinte expressão:

$$y = m \cdot (t - t_i) + L_i.$$

Onde:

$$m = \frac{L_f - L_i}{t_f - t_i}$$

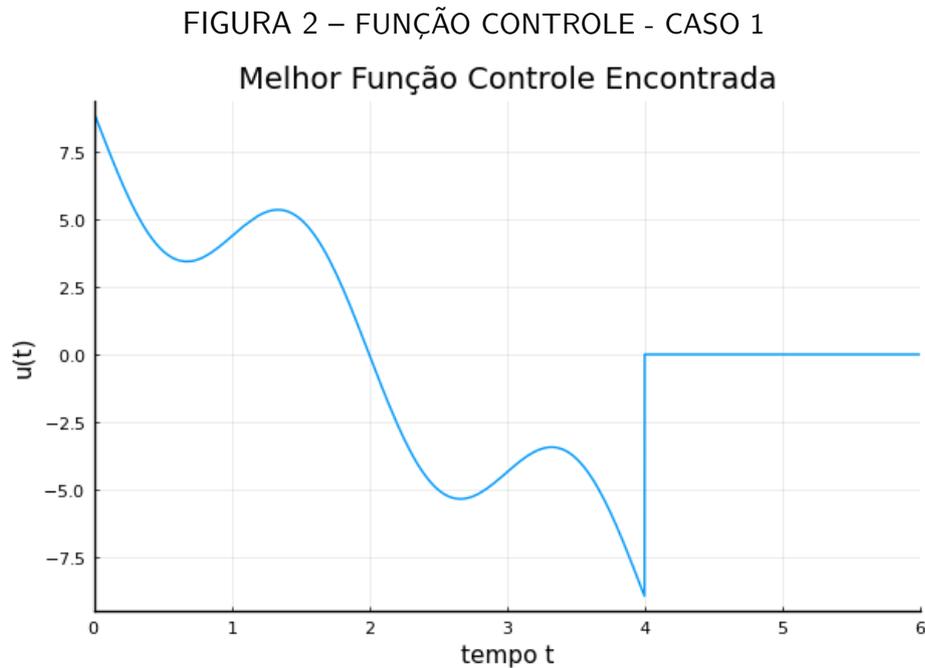
$$t_i = \text{Tempo Inicial}$$

$$t_f = \text{Tempo Final}$$

$$L_i = \text{Comprimento inicial da haste}$$

$$L_f = \text{Comprimento final da haste}$$

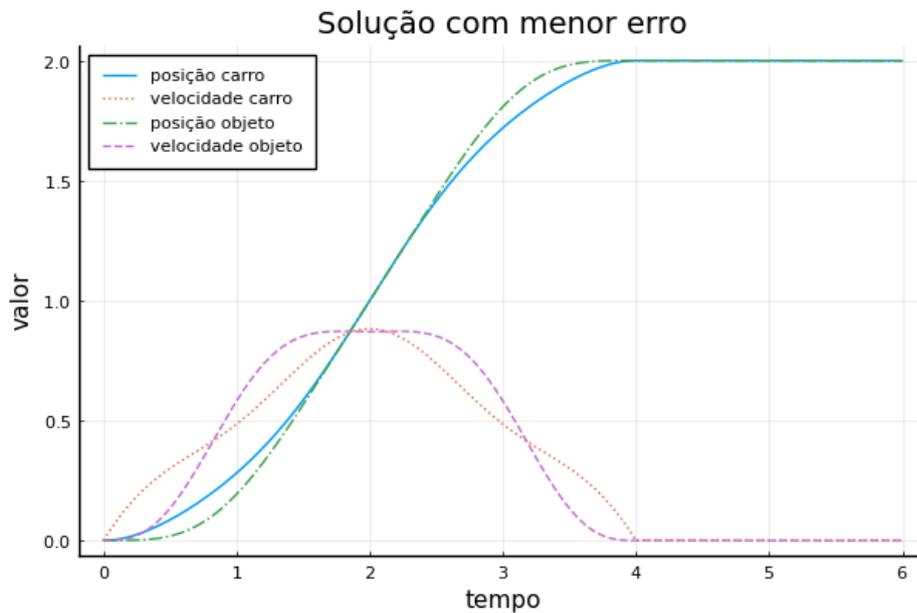
Dito isso, a representação gráfica gerada por $u(t)$, produzida por meio da expressão apresentada na observação 2 é a seguinte:



Note que há uma "inconsistência" no gráfico acima, visto que há uma descontinuidade no tempo $t = 4$. Isso ocorre em todas as representações de controle deste trabalho, devido uma condição imposta no programa computacional, onde o controle atua somente em $0 < t < 4$, ou seja, quando t assume valor superior ao imposto, o programa foi configurado para responder como $u(t) = 0$, explicando então essa representação gráfica

Neste caso, como dito anteriormente, não foi realizado a variação do comprimento da haste e foi utilizado a haste fixa para representar o trabalho realizado pelo pêndulo. Dito isso, a representação gráfica deste caso, após a realização do controle, pode ser observado a seguir:

FIGURA 3 – SOLUÇÃO - CASO 1



Observe que, o gráfico apresenta no eixo das abscissas a variação do tempo e no eixo das ordenadas a variação da posição e velocidade, que combinadas, representam a atuação do controle no sistema, ou seja a variação da posição e velocidade (do carrinho e do objeto) em função do tempo. Dessa forma, é possível, a partir do gráfico, realizar a análise individual de cada variável atuando no sistema.

Observe ainda que, a posição do carrinho, denotada pela linha sólida, inicia em 0, assim como foi pré-estabelecido, e ao decorrer do tempo, apresenta uma trajetória ascendente, ou seja, de crescimento, sem ocorrer oscilações e por fim se estabiliza em 2, levando o carrinho a posição desejada. A velocidade do carrinho, representada pela linha pontilhada, também atingiu o objetivo desejado, porém, apresenta comportamento oscilante, o que indica que houve uma maior aceleração antes de atingir total repouso, demonstrando uma aceleração inicial e em seguida uma desaceleração, algo previsto, em razão do fim esperado.

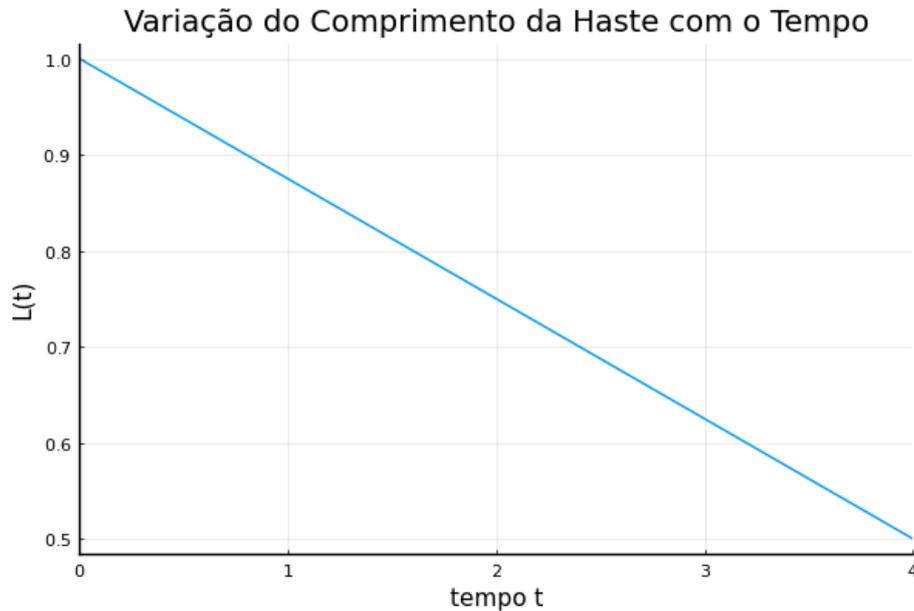
A posição do objeto, simbolizado pela linha mista, apresenta comportamento similar à posição do carrinho e também atinge o posicionamento esperado. A velocidade do objeto, correspondente a linha tracejada, também apresentou comportamento análogo à velocidade do carrinho, também tendo uma aceleração seguida de uma desaceleração.

Dessa forma, podemos confirmar que a atuação do controle $u(t)$, neste caso, foi extremamente satisfatório, visto que, o sistema foi conduzido aos estados desejados, tanto em relação a posição quanto a velocidade nos dois objetos físicos presentes no sistema, estando, ao fim, ambos em repouso como esperado. Também é importante destacar que, ao fim do controle, observado a partir de $t = 4$, o sistema permanece em repouso, indicando a estabilidade do controle mesmo após o fim do movimento.

6.2 Caso 2: Pêndulo com haste variável segundo uma reta

Neste segundo caso, foi utilizada novamente a equação da reta, porém foi inserido o comprimento da haste como função do tempo $L(t)$, onde inicia no sistema com $L(0) = 1$ e ao fim do controle ela se encontra como $L(4) = 0,5$. A variação gráfica desse comprimento é dado pela figura a seguir:

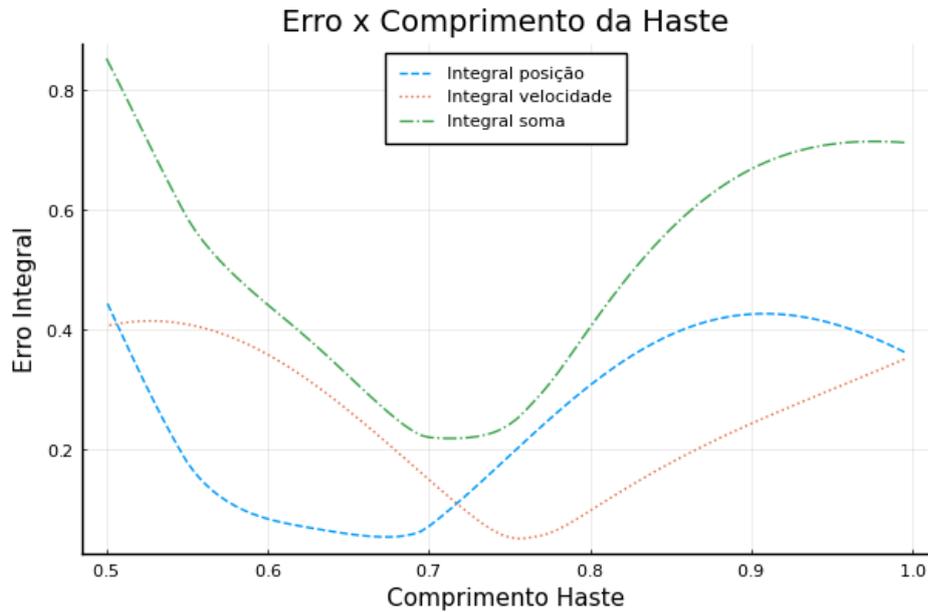
FIGURA 4 – VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 2



Note que essa variação é dada por uma reta e decresce de 1 até 0,5, assim como estabelecido. Para este caso foram realizadas 100 simulações e encontrados 100 controles $u_s(t)$ diferentes para cada comprimento de haste fixo, variando entre 0,5 e 1 e selecionada aquela que melhor controla o sistema de haste variável. O método algorítmico empregado não é capaz de fornecer um controle u para haste variável, por isso a necessidade de várias simulações. Para fazer a escolha do melhor controle, calculamos os erros associados às integrais de posição e da velocidade associado a cada comprimento que a haste apresenta, ou seja, definimos os erros a partir da diferença entre os valores desejados e os valores obtidos das variáveis alterando em função do tempo. E de forma análoga para integral da soma, obtemos o erro a partir da soma do erro de posição e velocidade para cada comprimento da haste.

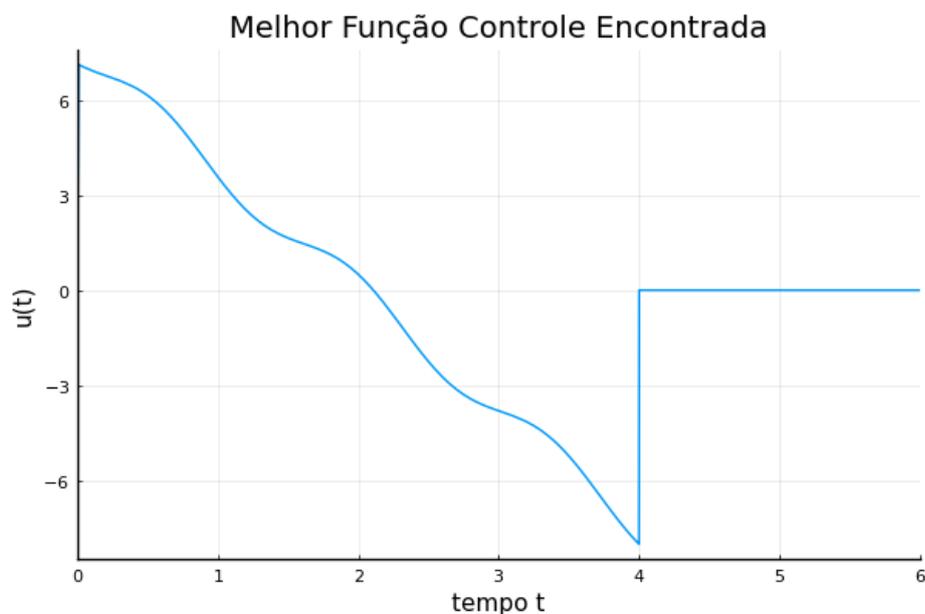
Assim, após a definição do erro associado a cada comprimento da haste, observamos qual o comprimento da haste que possui o menor erro associado de acordo com a soma das integrais a fim de ter erro combinado das duas integrais. Dessa forma, determinamos o comprimento ideal que minimiza os erros e utilizamos esse comprimento para determinar o controle $u(t)$ para este caso. O gráfico do erro com os 100 controles obtido para esta análise está apresentado a seguir:

FIGURA 5 – ERRO ASSOCIADO AO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 2



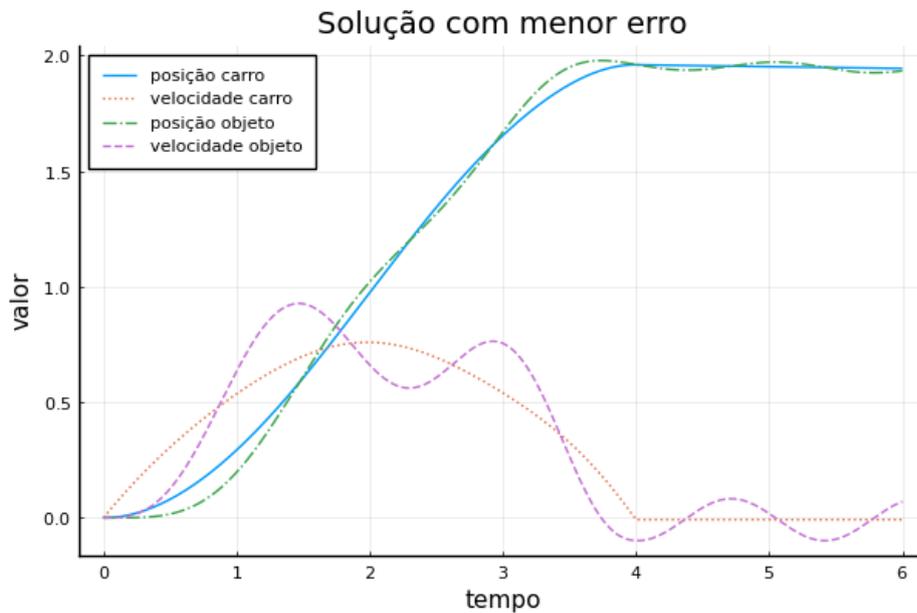
Como dito anteriormente, determinamos o comprimento da haste que possui o menor erro associado com base na integral da soma, no qual está denotado no gráfico acima, pela linha tracejada. Ao consultarmos o programa, o menor erro para a soma se dá ao utilizar o comprimento da haste igual a 0,715. Dessa forma, podemos observar no gráfico que quando o comprimento da haste está entre 0,7 e 0,8, o erro associado (e) apresenta valores entre 0,2 e 0,4, ou seja $0,2 \leq e \leq 0,4$. Com isso, definimos a melhor $u(t)$ para este caso:

FIGURA 6 – FUNÇÃO CONTROLE - CASO 2



Portanto, após definirmos a $u(t)$ e observarmos o erro associado, podemos realizar o controle. O seu emprego deste controle está apresentado no gráfico a seguir:

FIGURA 7 – SOLUÇÃO - CASO 2

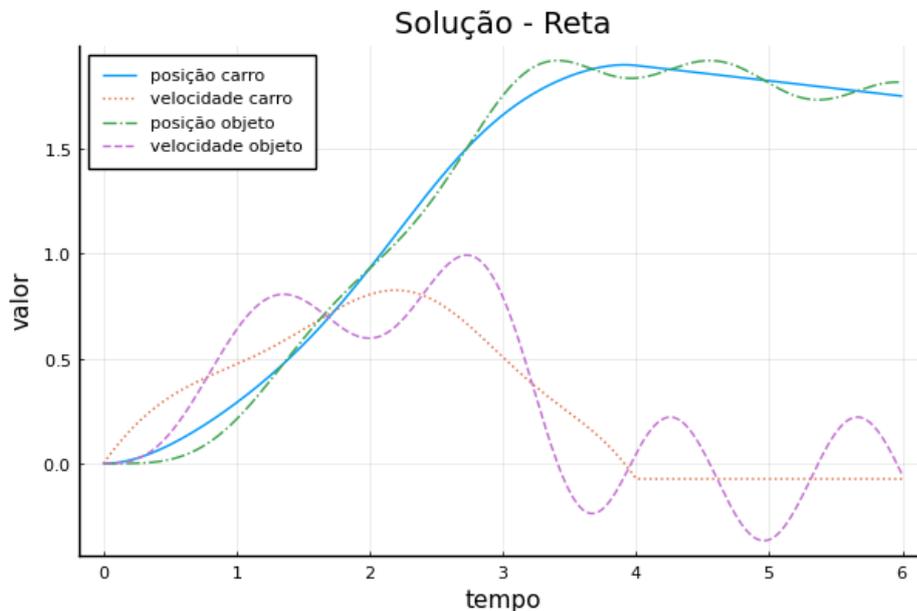


Com isso, podemos analisar de forma independente cada variável atuante do sistema. Observe que, a posição do carrinho, representada pela linha sólida apresenta um desenvolvimento crescente mas em $t = 4$ não ocorre uma estabilidade precisa na posição desejada, algo que era bem evidente na solução anterior. A velocidade do carrinho, denotado pela linha pontilhada apresenta um desenvolvimento, de início de forma crescente, e posteriormente decresce, sugerindo uma aceleração e desaceleração, algo esperado devido o trabalho necessário envolvido no sistema, mas ao fim foi a que apresentou melhor estabilidade ao término da atuação do controle, mantendo-se em repouso.

A posição do objeto, simbolizado pela linha mista, apresentou um desenvolvimento bem similar à posição do carrinho, resultando também ao fim o mesmo comportamento acerca da estabilidade na posição definida, ou seja, também não alcançou a posição final desejada. Por fim, a velocidade do objeto, expressado pela linha tracejada, foi a variável com mais oscilações, e ao chegar ao fim do controle apresentou uma certa instabilidade, não ficando em repouso total.

Dessa forma, podemos concluir que a atuação do controle $u(t)$ neste caso não foi totalmente satisfatória, visto que a condução do controle não levou o sistema inteiramente à condição desejada, o que pode sugerir que discrepância encontrada está relacionada a presença do erro associado observado anteriormente. Mas, se considerarmos o controle utilizado no caso anterior, não empregando o controle associado ao o comprimento da haste que apresentou o menor erro, a atuação do controle seria ainda mais insatisfatória, como pode ser visto a seguir:

FIGURA 8 – SOLUÇÃO NÃO ASSOC. AO MENOR ERRO DE L(T) - RETA



Justificando assim, a necessidade dessa estratégia para a definição do controle nesse caso.

6.3 Caso 3: Pêndulo com haste variável segundo uma cúbica

Neste último caso, a função utilizada para descrever a variação da haste do pêndulo foi a cúbica, denotada pela seguinte expressão:

$$y = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d.$$

Para determinar os coeficientes a , b , c e d , construímos um sistema de equações lineares que utilizam as variáveis atuantes no sistema, ou seja, as condições iniciais e finais de posição e velocidade. Assim, determinamos as equações da matriz dos coeficientes, da seguinte forma:

- Velocidade Inicial: A primeira equação é determinada pela derivada da função cúbica em relação ao tempo inicial (t_i), assim:

$$3a \cdot t_i^2 + 2b \cdot t_i + c.$$

- Velocidade Final: A segunda equação é definida pela derivada da função cúbica em relação ao tempo final (t_f), resultando na equação:

$$3a \cdot t_f^2 + 2b \cdot t_f + c.$$

- Posição Inicial: A terceira equação expressa a função cúbica no tempo inicial (t_i), obtendo a equação:

$$a \cdot t_i^3 + b \cdot t_i^2 + c \cdot t_i + d.$$

- Posição Final: A quarta equação apresenta a função cúbica relacionada com o tempo final (t_f), gerando a seguinte equação:

$$a \cdot t_f^3 + b \cdot t_f^2 + c \cdot t_f + d.$$

Assim, com essas equações determinamos a matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 3t_i^2 & 2t_i & 1 & 0 \\ 3t_f^2 & 2t_f & 1 & 0 \\ t_i^3 & t_i^2 & t_i & 1 \\ t_f^3 & t_f^2 & t_f & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, precisamos determinar também a matriz dos termos independentes, a qual é necessária para representar as condições impostas ao sistema. Dessa forma, as condições são as velocidades iniciais e finais nulas e o comprimento inicial (L_i) e final da haste (L_f). Assim, a matriz dos termos independentes é representada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_i \\ L_f \end{bmatrix}.$$

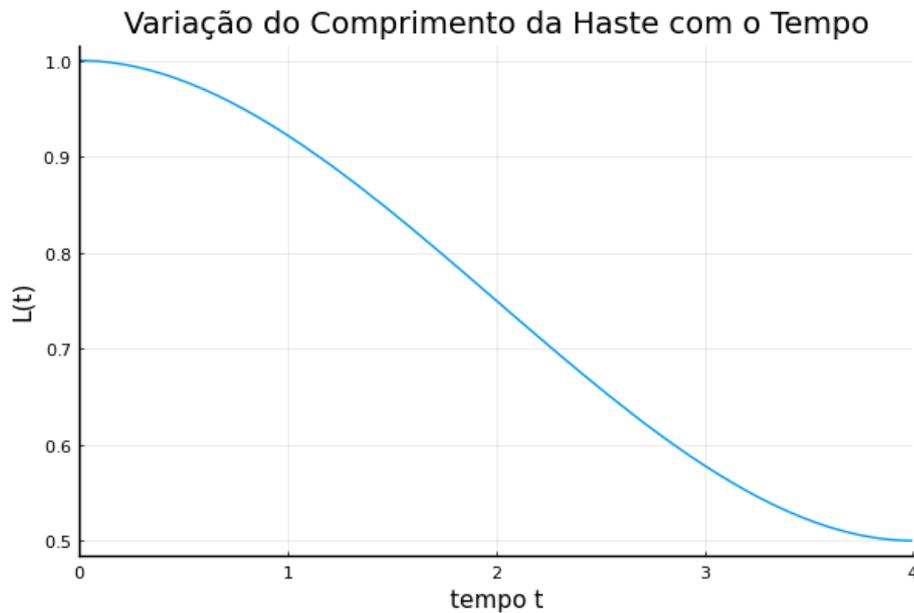
Logo, a partir dessas duas matrizes, temos o seguinte sistema de equações representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3t_i^2 & 2t_i & 1 & 0 \\ 3t_f^2 & 2t_f & 1 & 0 \\ t_i^3 & t_i^2 & t_i & 1 \\ t_f^3 & t_f^2 & t_f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_i \\ L_f \end{bmatrix}.$$

A construção desse sistema é justificada pela continuidade da função cúbica e suas derivadas, onde tais não promovem variações abruptas em seu sistema, resultando em um movimento controlado e suave na alteração do comprimento da haste.

Deste modo, realizamos a variação da haste em função do tempo $L(t)$, onde iniciamos o sistema com $L(0) = 1$ e ao fim do controle ela se encontra como $L(4) = 0,5$. O gráfico que apresenta a variação desse comprimento pode ser observado a seguir:

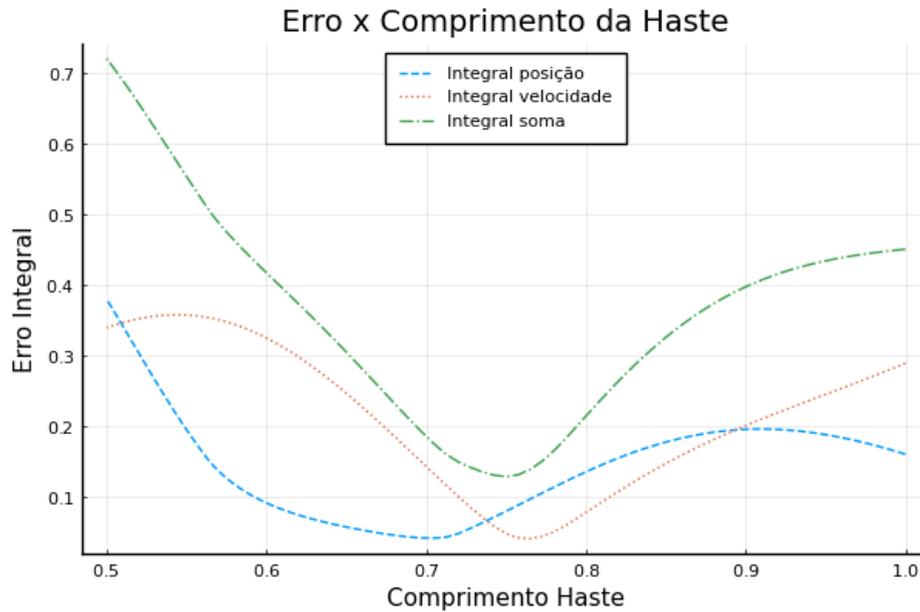
FIGURA 9 – VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 3



Do mesmo modo que no caso anterior, para este caso também foram realizadas 100 simulações e encontrados 100 controles $u_s(t)$ diferentes para cada comprimento de haste fixa, variando também entre 0,5 e 1 e selecionada aquela que melhor controla o sistema de haste variável. A maneira de definir o $u(t)$ para este caso se deu da mesma forma que o caso anterior, ou seja, definimos os erros a partir da diferença entre os valores desejados e os valores obtidos das variáveis alterando em função do tempo para integral da soma.

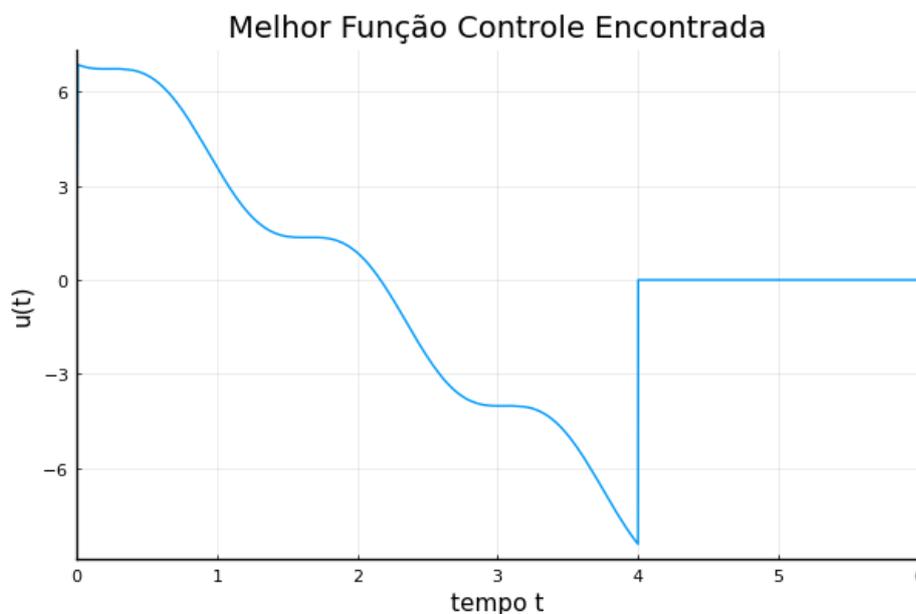
Posteriormente, observamos qual o comprimento da haste que após empregado o controle possui o menor erro associado a integral da soma e determinamos o comprimento ideal que minimiza os erros e utilizamos esse comprimento para determinar o controle $u(t)$ para este caso. O gráfico obtido para esta análise está apresentado a seguir:

FIGURA 10 – ERRO ASSOCIADO AO COMPRIMENTO DA HASTE - CASO 3



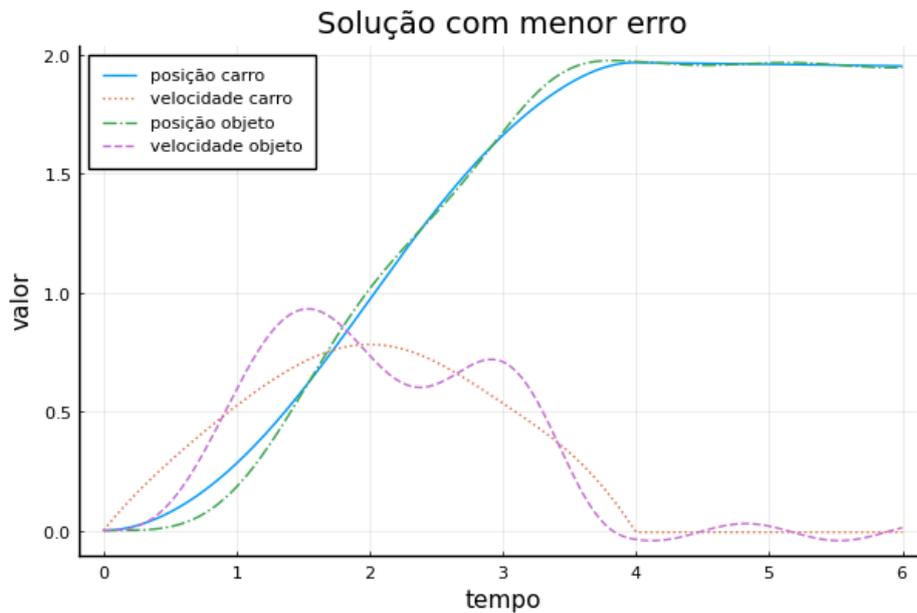
Assim como já estabelecido, determinamos o comprimento da haste que possui o menor erro associado com base na integral da soma, no qual está denotado no gráfico acima, pela linha tracejada. Ao consultarmos o programa, o menor erro para a soma se dá ao utilizar o comprimento da haste igual a 0,75. Dessa forma, podemos observar no gráfico que quando o comprimento da haste está entre 0,7 e 0,8, o erro associado (e) apresenta valores entre 0,1 e 0,2, ou seja $0,1 \leq e \leq 0,2$. A partir disso, determinamos a seguinte função controle $u(t)$:

FIGURA 11 – FUNÇÃO CONTROLE - CASO 3



Sua representação gráfica, após o emprego do controle $u(t)$, pode ser vista a seguir:

FIGURA 12 – SOLUÇÃO - CASO 3



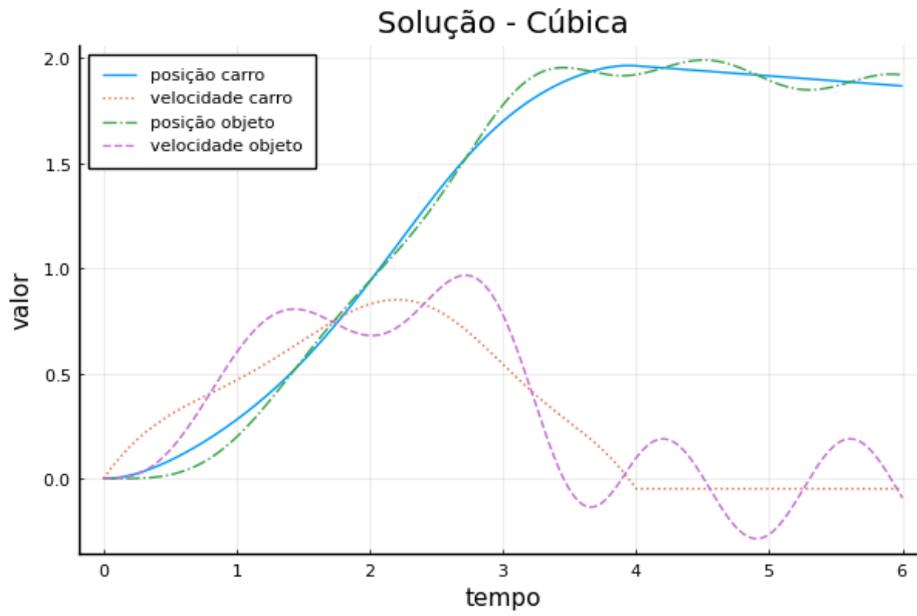
Assim, como feito nos outros dois casos, é possível realizar uma análise individualizada de cada variável atuante.

Observe que, a posição do carrinho, simbolizada pela linha sólida, apresenta comportamento crescente em todo emprego do controle $u(t)$ e atinge, como podemos ver no gráfico, valor bem próximo ao desejado no tempo determinado. A velocidade do carrinho, representada pela linha pontilhada, de início uma velocidade crescente, conjecturando uma aceleração, e posteriormente decresce, representando uma desaceleração. Ao atingir o tempo delimitado o carrinho apresenta velocidade nula, ou seja, se encontra em repouso, assim como pré-estabelecido.

A posição do objeto, denotada pela linha mista, tem comportamento crescente em toda solução, apresentando comportamento similar a posição do carro, porém chega mais próximo da posição esperada. A velocidade do objeto, indicada pela linha tracejada, é a que apresenta comportamento mais variável, tendo apresentado dois picos de oscilação, ao atingir o tempo determinado, mesmo após o fim do controle apresenta variação, presumindo que o objeto não está em total repouso.

Assim, com o exposto acima, podemos deduzir que a atuação do controle $u(t)$ nesta situação não foi inteiramente satisfatória, levando em consideração que o emprego do controle não conduziu o sistema inteiramente à condição desejada, o que nos leva a pensar que essa discrepância se dá por conta do erro associado visto anteriormente.

Mas, novamente, se considerarmos o controle utilizado no primeiro caso, onde não ocorre o emprego do controle associado ao comprimento da haste que apresentou o menor erro, a solução seria ainda mais insatisfatória, como pode ser visto a seguir:

FIGURA 13 – SOLUÇÃO NÃO ASSOC. AO MENOR ERRO DE $L(T)$ - CÚBICA

Justificando novamente a estratégia utilizada.

7 CONCLUSÃO

Com a análise dos resultados anteriores, podemos obter uma boa conclusão sobre qual caso melhor se aplica em cada situação. Se olharmos os casos de maneira geral, podemos considerar a solução utilizando a função afim com haste fixa como a ideal. Visto que ela leva o sistema de maneira completa ao estado desejado e apresenta os seus dois componentes, carro e objeto, em total repouso, uma vez que a teoria foi desenvolvida para esse caso.

Mas a possibilidade de variar o comprimento da haste apresenta uma grande vantagem, promove um trabalho mais rápido em todo o sistema. Dessa forma, observando os dois casos onde a haste é variável, utilizando a função afim e a cúbica, podemos observar que nenhuma foi completamente satisfatória, visto que nem o carrinho nem o objeto chegaram a exata posição desejada e o objeto ao fim do controle ainda estava oscilando nos dois casos. Mas se olharmos para os erros associados empregados em cada caso, podemos concluir qual caso apresentou o melhor resultado.

No gráfico da solução de ambos, é apresentado quando a atuação do controle chegou ao fim, ambos não tiveram resultados totalmente satisfatórios. Sendo assim, para concluirmos o qual se aproximou mais do esperado, recorreremos aos dados numéricos apresentados por cada caso ao fim do sistema, no qual pode ser visto na tabela a seguir:

	Caso 2	Caso 3
Posição do Objeto	1.88268	1.99897
Posição do Carrinho	1.88886	1.95373
Velocidade do Carrinho	-0.000297637	-0.0072369
Velocidade do Objeto	0.0000478097	0.0115076

TABELA 2 – VALORES DO OBJETO E DO CARRINHO - CASO 2 E 3

Note que o caso 2 em relação a velocidade dos componentes apresentou um resultado bastante satisfatório, mas em relação a posição não obteve o mesmo. Já o caso 3, ocorreu o inverso, apresentando resultado mais satisfatório em relação a posição dos componentes e deixando a desejar nas velocidades.

Dessa forma, nos resta analisar os erros apresentados em cada caso. Como pode ser visto abaixo:

	Caso 2	Caso 3
Erro associado	≈ 0.21742	≈ 0.12953
Intervalo do Erro	$0,2 \leq e \leq 0,4$	$0,1 \leq e \leq 0,2$

TABELA 3 – ERROS ASSOCIADOS E SEUS INTERVALOS - CASO 2 E 3

Observe que o Caso 3 apresentou um menor erro associado a solução e ainda um menor intervalo de variação. Assim, considerando também que o mesmo apresentou um melhor desempenho na maioria dos seus componentes se comparado com o Caso 2, podemos concluir

que o caso do pêndulo com haste variável segundo uma cúbica é o ideal se queremos associar um bom desempenho e uma otimização de trabalho, mas se o propósito é somente levar a solução inicial a um estado final desejado, o caso em que utiliza a função afim com haste fixa é o melhor.

REFERÊNCIAS

[1] SILVA, F. Introdução à Controlabilidade de EDO's. Escola de Verão em Matemática da UFPB. 2021. [s.l: s.n.] Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/fchaves/attachments/article/23/Dia-1.pdf>. Acesso em 18 jul. 2024.

[2] RUGGIERO, Márcia A. Gomes. Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Ed. MAKRON BOOKS, 1996.

[3] BOYCE, W.; DIPRIMA, R. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[4] DORF, R.C. Sistema de Controle Modernos - 13^a edição. São Paulo: LTC, 2018.

[5] JACOB, B.; ZWART, H. 14th Internet Seminar: Infinite-dimensional Linear Systems Theory. 2010. Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften, Arbeitsgruppe Funktionalanalysis, Bergische Universität Wuppertal, Gaußstraße 20, D-42097 Wuppertal, Germany, and Department of Applied Mathematics, University of Twente, P.O. Box 217, 7500 AE Enschede, The Netherlands.

[6] MIRANDA, G. Otimização de Dynamic Range e Análise de Espaço de Estados para um Modulador Sigma Delta. Disponível em: <https://bdm.unb.br/handle/10483/13580> Acesso em 18 julho de 2024

[7] GONÇALVES, J. Otimização topológica para localização de atuadores piezeléticos utilizando gramiano de controlabilidade. 2015. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183> Acesso em: 18 de julho de 2024

[8] GAWRONSKI, W. K. Advanced structural dynamics and active control of structures. volume 1. Springer, 2004.

[9] LEE, E. B.; MARKUS, L. Foundations of Optimal Control Theory. 1986. Center for Control Sciences, Institute of Technology, University of Minnesota.

[10] STRANG, G. Introduction to Linear Algebra. 5^a ed. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2016.

[11] <https://github.com/SchulzRodrigo>.

[12] BHAYA, Amit. Matrizes positivas definidas, semidefinidas, etc. 2014. Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.nacad.ufrj.br/amit/alglin/aula8.pdf>. Acesso em: 13 de novembro de 2024.