

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VANESSA TEREZINHA ALES

UMA NOVA ABORDAGEM ESPAÇO-TEMPO USANDO O SUAVIZADOR UZAWA
COM O MÉTODO *MULTIGRID* PARA O PROBLEMA DA POROELASTICIDADE

CURITIBA

2024

VANESSA TEREZINHA ALES

UMA NOVA ABORDAGEM ESPAÇO-TEMPO USANDO O SUAVIZADOR UZAWA
COM O MÉTODO *MULTIGRID* PARA O PROBLEMA DA POROELASTICIDADE

Tese apresentada ao curso de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), Setor de Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto

Coorientador: Prof. Dr. Sebastião Romero Franco

Coorientadora: Prof^a Dr^a Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ales, Vanessa Terezinha

Uma nova abordagem espaço-tempo usando o suavizador Uzawa com o método Multigrid para o problema da poroelasticidade / Vanessa Terezinha Ales. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Marcio Augusto Villela Pinto

Coorientador: Sebastião Romero Franco

1. Poroelasticidade. 2. Método de Uzawa. 3. Método Multigrid. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. III. Pinto, Marcio Augusto Villela. IV. Franco, Sebastião Romero. V. Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

No dia trinta de agosto de dois mil e vinte e quatro às 14:00 horas, na sala Sala Microsoft Teams, Ambiente Remoto, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de tese da doutoranda **VANESSA TEREZINHA ALES**, intitulada: **Uma nova abordagem espaço-tempo usando o suavizador Uzawa com o método Multigrid para o problema de poroelasticidade**, sob orientação do Prof. Dr. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), NEYVA MARIA LOPES ROMEIRO (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA), ROBERTO DALLEDONE MACHADO (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), VIVIANA COCCO MARIANI (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de doutora está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 30 de Agosto de 2024.

Assinatura Eletrônica

02/09/2024 14:26:25.0

MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

02/09/2024 14:35:22.0

NEYVA MARIA LOPES ROMEIRO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA)

Assinatura Eletrônica

06/09/2024 10:38:42.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

02/09/2024 14:52:17.0

VIVIANA COCCO MARIANI

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **VANESSA TEREZINHA ALES** intitulada: **Uma nova abordagem espaço-tempo usando o suavizador Uzawa com o método Multigrid para o problema de poroelasticidade**, sob orientação do Prof. Dr. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutora está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 30 de Agosto de 2024.

Assinatura Eletrônica

02/09/2024 14:26:25.0

MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

02/09/2024 14:35:22.0

NEYVA MARIA LOPES ROMEIRO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA)

Assinatura Eletrônica

06/09/2024 10:38:42.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

02/09/2024 14:52:17.0

VIVIANA COCCO MARIANI

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram para esta jornada acadêmica, que culminou na conclusão da minha tese de doutorado.

Primeiramente, agradeço a Deus por tornar este trabalho possível.

Expresso meu agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto, por todos os ensinamentos, pela paciência e pela confiança ao longo desses anos. Também agradeço aos meus coorientadores, Prof. Dr. Sebastião Romero Franco e Profa. Dra. Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves, pela grande ajuda e apoio.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Profa. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro, Profa. Dra. Viviana Cocco Mariani e Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado, pelo tempo dedicado à leitura e à análise criteriosa deste trabalho, e pelas suas contribuições, que permitiram o aprimoramento dessa pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) pela oportunidade de realizar o doutorado.

À Universidade Federal do Paraná (UFPR) e à Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR) pelo apoio ao doutorado.

Agradeço especialmente aos meus pais, Moisés e Terezinha, pelo dom da vida, pela educação, e por todo o amor e paciência. Ao João Pedro pelo apoio, carinho e incentivo. Gratidão aos meus irmãos e cunhadas, e com muito carinho aos meus sobrinhos lindos: Arthur, Bianca e Alice, que chegaram como presentes durante o doutorado e usaram algumas horas com muitos aprendizados.

Aos colegas do PPGMNE pela amizade e disposição em ajudar.

Aos meus amigos, que incentivaram e participaram dessa jornada, minha gratidão. Particularmente, a Gezelda Christiane Moraes, pela alegria e fé, ao Wilson Gorges, pelo incentivo e pela precisão de detalhes, e ao Rui Mário Schubak, *in memoriam*, pela forma simples e descomplicada de enfrentar os desafios.

"The essence of mathematics lies in its freedom."

(Georg Cantor)

*"If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is."*

(John von Neumann)

RESUMO

A pesquisa aborda a interação entre a deformação de materiais porosos elásticos e o escoamento de fluidos em seu interior, fundamentada nas equações de poroelasticidade, que possuem ampla aplicação em áreas como engenharia, medicina e geologia. Essas equações, que modelam deslocamento, pressão e tempo, apresentam desafios significativos devido às instabilidades numéricas associadas ao problema de ponto de sela, dificultando a obtenção de soluções precisas e eficientes. O estudo propõe uma abordagem inovadora para resolver problemas de poroelasticidade em uma e duas dimensões, introduzindo uma nova varredura espaço-temporal. A metodologia combina o Método de Volumes Finitos para discretização espacial e o método de Euler implícito para discretização temporal. O método *Multigrid* com ciclo *W* é integrado com suavizadores, como *Vanka*, *Fixed-Stress* e *Uzawa*, para acelerar a convergência e otimizar o desempenho computacional. Para o caso unidimensional, foram comparados os métodos *Vanka*, *Fixed-Stress* e *Uzawa* em termos de fator de convergência e tempo computacional, avaliando tanto a abordagem tradicional *Time-Stepping* quanto a nova varredura espaço-temporal, esta última aplicada especificamente ao método *Uzawa*, pois possui características que permitem a aplicação dessa nova varredura. Em duas dimensões, a técnica proposta alcançou um fator de convergência médio inferior a 0,31 e reduziu significativamente o tempo computacional, atingindo uma aceleração de até 4800 vezes melhor em malhas de alta resolução (1024×1024) em comparação ao método *Singlegrid*. Conclui-se que a varredura espaço-temporal proposta é altamente paralelizável, proporcionando ganhos substanciais em tempo de processamento e taxas de convergência. Esses resultados destacam seu potencial como uma solução eficiente e robusta para problemas de poroelasticidade uni e bidimensionais.

Palavras-chave: Poroelasticidade. *Uzawa*. *Multigrid*. Varredura temporal. *Solver* paralelizável.

ABSTRACT

This research investigates the interaction between the deformation of elastic porous materials and fluid flow within them, grounded in the equations of poroelasticity, which have broad applications in fields such as engineering, medicine, and geology. These equations, which model displacement, pressure, and time, pose significant challenges due to numerical instabilities associated with the saddle-point problem, complicating the attainment of precise and efficient solutions. The study introduces an innovative approach to solving poroelasticity problems in one and two dimensions by developing a novel space-time sweeping technique. The methodology combines the Finite Volume Method for spatial discretization with the implicit Euler method for temporal discretization. The Multigrid method with W -cycle is integrated with smoothers such as Vanka, Fixed-Stress, and Uzawa to accelerate convergence and optimize computational performance. For the one-dimensional case, the Vanka, Fixed-Stress, and Uzawa methods were compared in terms of convergence factor and computational time, evaluating both the traditional Time-Stepping approach and the new space-time sweeping technique, the latter applied specifically to the Uzawa method. In two dimensions, the proposed technique achieved an average convergence factor below 0.31 and significantly reduced computational time, achieving up to 4800 times acceleration on high-resolution grids (1024×1024) compared to the Singlegrid method. The study concludes that the proposed space-time sweeping technique is highly parallelizable, offering substantial gains in processing time and convergence rates. These results underscore its potential as an efficient and robust solution for one- and two-dimensional poroelasticity problems.

Key-words: Poroelasticity. Uzawa. Multigrid. Temporal Sweep. Parallelizable Solver.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – MEIO POROSO.	33
FIGURA 2 – VOLUME REPRESENTATIVO ELEMENTAR.	35
FIGURA 3 – ATUALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS COM ORDENAÇÃO LEXICOGRÁFICA.	40
FIGURA 4 – ATUALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS COM ORDENAÇÃO <i>RED-BLACK</i>	41
FIGURA 5 – MODO SUAVE $k = 2$ PARA UMA MALHA COM $\mathcal{N} = 64$ VOLUMES.	42
FIGURA 6 – MODO OSCILATÓRIO $k = 32$ PARA UMA MALHA COM $\mathcal{N} = 64$ VOLUMES.	42
FIGURA 7 – NORMA INFINITO DO ERRO <i>VERSUS</i> NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA ESTIMATIVAS INICIAIS COM MODOS $k = 2$, $k = 4$ E $k = 32$, USANDO GAUSS-SEIDEL LEXICOGRÁFICO PARA A EQUAÇÃO DE POISSON.	43
FIGURA 8 – MODOS OSCILATÓRIOS E SUAVES APÓS: (a) 1 E (b) 10 ITERAÇÕES.	44
FIGURA 9 – MÚLTIPLAS MALHAS COM RAZÃO DE ENGROSSAMENTO 2 NO ESPAÇO 2D.	45
FIGURA 10 – MODOS SUAVES (CONSIDERANDO 9 PONTOS) E OSCILATÓRIOS (CONSIDERANDO 5 PONTOS).	46
FIGURA 11 – OPERADOR DE RESTRIÇÃO COM PONDERAÇÃO EM 1D.	47
FIGURA 12 – OPERADOR DE RESTRIÇÃO COM PONDERAÇÃO EM 2D.	48
FIGURA 13 – OPERADOR DE PROLONGAÇÃO EM 1D.	48
FIGURA 14 – OPERADOR DE PROLONGAÇÃO EM 1D.	50
FIGURA 15 – ESTRUTURA DOS CICLOS V, W E F COM QUATRO NÍVEIS DE MALHA.	51
FIGURA 16 – SUAVIZADOR VANKA NO PROBLEMA 1D.	54
FIGURA 17 – SUAVIZADOR VANKA NO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE 2D.	55
FIGURA 18 – ORDENAÇÃO VANKA 1D EM 4 CORES.	55
FIGURA 19 – ORDENAÇÃO VANKA EM 12 CORES.	56
FIGURA 20 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO DA VARIÁVEL TEMPORAL.	59
FIGURA 21 – CONEXÕES ESPACIAIS E TEMPORAIS NO VOLUME DE CONTROLE P	60
FIGURA 22 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM A VARREDURA <i>TIME-STEPPING</i> 1D.	61

FIGURA 23 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM A VARREDURA <i>TIME-STEPPING</i> 2D.	61
FIGURA 24 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM VARREDURA <i>WAVEFORM RELAXATION</i> 1D.	62
FIGURA 25 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM VARREDURA <i>WAVEFORM RELAXATION</i> 2D.	63
FIGURA 26 – ENGROSSAMENTO DA MALHA COM VARREDURA <i>SPACE-TIME</i>	64
FIGURA 27 – MODELO DO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE UNIDIMENSIONAL.	66
FIGURA 28 – VOLUME DE CONTROLE (DESTACADO) EM UMA MALHA UNIDIMENSIONAL.	72
FIGURA 29 – CONDIÇÃO DE CONTORNO USANDO MEIO VOLUME NA FRONTEIRA	77
FIGURA 30 – CONDIÇÃO DE CONTORNO USANDO VOLUMES FICTÍCIOS NA FRONTEIRA.	78
FIGURA 31 – CONDIÇÃO DE CONTORNO USANDO BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA.	78
FIGURA 32 – DESCRIÇÃO DO VOLUME DE CONTROLE EM UMA MALHA 2D.	88
FIGURA 33 – MALHA UNIFORME 2D COM AS VARIÁVEIS COLOCALIZADAS.	89
FIGURA 34 – MALHA UNIFORME 2D COM VARIÁVEIS DESENCONTRADAS.	89
FIGURA 35 – ESQUEMA NOVA VARREDURA ESPAÇO-TEMPO	103
FIGURA 36 – ERRO DE DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO <i>FIXED-STRESS</i> COM $E = 10^4$ E $K = 1$	107
FIGURA 37 – FATOR DE CONVERGÊNCIA MÉDIO ρ_m EM FUNÇÃO DO VALOR DE K PARA A MALHA COM $N = 1024$ VOLUMES E $E = 10^4$ E VÁRIOS VALORES DE K	108
FIGURA 38 – TEMPO COMPUTACIONAL EM FUNÇÃO DO VALOR DE K COM $N = 1024$ E $E = 10^4$ E VÁRIOS VALORES DE K	109
FIGURA 39 – MÉTODO UZAWA	110
FIGURA 40 – TEMPO COMPUTACIONAL PARA O MÉTODO UZAWA	111
FIGURA 41 – FATOR DE CONVERGÊNCIA COM A VARREDURAS <i>TIME-STEPPING</i> E A NOVA VARREDURA PARA O CASO 3.	112
FIGURA 42 – COMPARATIVO DE ρ_m ENTRE <i>SINGLEGRID</i> E <i>MULTIGRID</i> PARA O CASO 1.	113
FIGURA 43 – COMPARATIVO DE ρ_m ENTRE <i>SINGLEGRID</i> E <i>MULTIGRID</i> PARA OS CASOS 2, 3 e 4.	114

FIGURA 44 – COMPARATIVO ρ_m PARA O <i>MULTIGRID</i> DEFINIDO PARA OS 4 CASOS ESTUDADOS.	115
FIGURA 45 – TEMPO DE CPU PARA SG E MG COM O REFINO DAS MALHAS.	117
FIGURA 46 – <i>SPEED-UP</i> PARA O CASO 4.	118
FIGURA 47 – VOLUME ELEMENTAR DE SOLO	133
FIGURA 48 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA O MÉTODO VANKA	136
FIGURA 49 – TEMPO COMPUTACIONAL PARA O MÉTODO VANKA	137
FIGURA 50 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA O MÉTODO <i>FIXED-STRESS</i>	137
FIGURA 51 – TEMPO COMPUTACIONAL PARA O MÉTODO <i>FIXED-STRESS</i>	138

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – VALORES DA PERMEABILIDADE E CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA	67
TABELA 2 – VALORES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE DE YOUNG	67
TABELA 3 – PARÂMETROS DE AJUSTE GEOMÉTRICO.	110
TABELA 4 – COMPARATIVO DE NÚMERO DE CICLOS W NECESSÁRIOS ATÉ O CRITÉRIO DE PARADA PARA OS CASOS ESTUDADOS.	116
TABELA 5 – PARÂMETROS c E γ	116

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CN	Método de Crank-Nicolson
CS	<i>Correction Scheme</i>
DDS	<i>Downstream Differencing Scheme</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
FAS	<i>Full Approximation Scheme</i>
FMG	<i>Full Multigrid</i>
GS-RB	Gauss-Seidel <i>Red-Black</i>
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEF	Método de Elementos Finitos
MG	Método <i>Multigrid</i>
MVF	Método de Volumes Finitos
SG	Método <i>Singlegrid</i>
ST	<i>Space-Time</i>
SOR	<i>Successive Over-Relaxation</i>
TS	<i>Time-Stepping</i>
UDS	<i>Upwind Differencing Scheme</i>
VC	Volume de Controle
WR	<i>Waveform Relaxation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz de coeficientes
D	Matriz diagonal
E	Módulo de elasticidade de Young
e	Vetor dos erros numéricos
f	Vetor dos termos independentes
h	Espaçamento entre os volumes de controle da malha
Δx	Tamanho do volume de controle na direção x
Δy	Tamanho do volume de controle na direção y
i, j	Contadores na direção espacial
I_h^{2h}	Operador de restrição
I_{2h}^h	Operador de prolongação
K	Condutividade hidráulica
L	Matriz triangular inferior
N	Número total de volumes de controle
N_x	Número de volumes de controle na direção x
N_y	Número de volumes de controle na direção y
N_t	Número de pontos na discretização temporal t
p	Pressão do fluido
\mathbf{r}	Vetor dos resíduos
$\ \cdot\ _\infty$	Norma do máximo (ou norma infinito)
re	Razão de engrossamento
t_{CPU}	Tempo de CPU (<i>Central Processing Unit</i>)
t_0	Tempo inicial
t_f	Tempo final

U	Matriz triangular superior
\mathbf{u}	Vetor das incógnitas ou vetor deslocamento
u	Componente de \mathbf{u} na direção x
\mathbf{v}	Aproximação da variável de interesse \mathbf{u}
v	Componente de \mathbf{u} na direção y
$w_{k,j}$	j -ésima componente do k -ésimo modo de Fourier

Letras Gregas

λ	Constante de Lamé
μ	Viscosidade do fluido
ν_1	Número de pré-suavizações
ν_2	Número de pós-suavizações
Ω	Domínio contínuo
Ω^h	Malha fina
Ω^{2h}	Malha grossa com engrossamento padrão
ϕ	Variável genérica
ρ_h	Fator de convergência empírico
ρ_m	Fator de convergência médio
τ	Tamanho do passo de tempo

Índices

E	Volume localizado a leste do volume de controle central
e	Face leste do volume de controle central
i	Posição do volume de controle na direção x
h	Malha fina
$2h$	Malha grossa
N	Volume localizado ao norte do volume de controle central
n	Face norte do volume de controle central
P	Volume de controle central
S	Volume localizado ao sul do volume de controle central
s	Face sul do volume de controle central
W	Volume localizado ao oeste do volume de controle central
w	Face oeste do volume de controle central

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	MOTIVAÇÃO	20
1.2	OBJETIVOS	23
1.2.1	Objetivo geral	23
1.2.2	Objetivos específicos	23
1.3	DELINEAMENTO DO TEXTO	23
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1	GENERALIDADES EM CFD	25
2.2	MÉTODO <i>MULTIGRID</i>	27
2.3	PROBLEMA DA POROELASTICIDADE	29
2.4	VARREDURAS ESPAÇO-TEMPO	30
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	32
3.1	ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE	32
3.2	MÉTODOS DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES	36
3.2.1	Método de Jacobi	38
3.2.2	Método de Gauss-Seidel	39
3.2.3	Noções de análise de Fourier	41
3.3	<i>MULTIGRID</i>	45
3.3.1	Metodologia do <i>Multigrid</i>	46
3.3.2	Operadores de restrição	47
3.3.3	Operador de prolongação	48
3.3.4	Esquema de correção e ciclo do <i>Multigrid</i>	50
4	SUAVIZADORES E VARREDURAS ESPAÇO-TEMPO	53
4.1	SUAVIZADORES	54
4.1.1	Método Vanka	54
4.1.2	Método <i>Fixed-Stress</i>	57
4.1.3	Método Uzawa	58
4.2	VARREDURAS ESPAÇO-TEMPO	59
4.2.1	<i>Time-Stepping</i>	60
4.2.2	<i>Waveform Relaxation</i>	62
4.2.3	<i>Space-Time</i>	63
5	MODELOS MATEMÁTICOS	66
5.1	MODELO UNIDIMENSIONAL	67

		18
5.2	MODELO BIDIMENSIONAL	69
6	MODELOS NUMÉRICOS	71
6.1	PROBLEMA DA POROELASTICIDADE 1D	71
6.1.1	Discretização do Problema da Poroelasticidade 1D	72
6.1.2	<i>Solvers</i>	79
6.1.2.1	Método Vanka 1D	79
6.1.2.2	Método <i>Fixed-Stress</i> 1D	84
6.1.2.3	Método Uzawa 1D	86
6.2	PROBLEMA DA POROELASTICIDADE 2D	88
6.2.1	Discretização do Problema da Poroelasticidade 2D	90
6.2.2	Método Uzawa	94
7	NOVO MÉTODO DE VARREDURA ESPAÇO-TEMPO	102
8	RESULTADOS E DISCUSSÕES	105
8.1	PROBLEMA 1D	106
8.1.1	Erro de discretização	107
8.1.2	Fator de convergência	108
8.1.3	Ordem de complexidade	109
8.2	PROBLEMA 2D UTILIZANDO A NOVA VARREDURA	112
8.2.1	Fator de convergência	113
8.2.2	Complexidade	116
8.2.3	Tempo computacional e <i>speed-up</i>	116
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	119
9.1	ESCOPO DO TRABALHO	119
9.2	CONCLUSÃO GERAL	119
9.3	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES	120
9.4	PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	120
	REFERÊNCIAS	122
	ANEXO A MODELAGEM DO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE	132
A.1	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	132
A.2	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	133
A.3	ESCOAMENTO DE UM FLUIDO EM UM MEIO POROSO	135
	ANEXO B TESTES REALIZADOS	136

1 INTRODUÇÃO

O problema da poroelasticidade linear, proposto por Biot (1941), considera um meio poroso elástico linear e isotrópico com os poros totalmente preenchidos por um fluido. A poroelasticidade é o termo usado para descrever a interação entre o escoamento de fluido e a deformação do sólido dentro do meio poroso, que é composto de estruturas sólidas. Quando uma carga externa é aplicada ao meio poroso, todo o sistema é afetado. Os poros preenchidos com fluido sofrem uma variação de pressão, o que implica no movimento do fluido e na consequente deformação elástica do material sólido (WANG, 2000).

O estudo na poroelasticidade é fundamental para o desenvolvimento de modelos precisos que descrevem o comportamento de materiais porosos em diferentes situações. A poroelasticidade permite a modelagem da subsuperfície terrestre para exploração de petróleo (BIOT, 1956; HADDAD; EICHHUBL, 2020), a modelagem do movimento de fluidos subterrâneos utilizando salmoura em meios porosos (BEAR, 2013; WU *et al.*, 2017), a avaliação de deslocamentos de estruturas geotécnicas (GENS, 2010; AMMOSOV *et al.*, 2023), o estudo das propriedades mecânicas de ossos e tecidos biológicos (COWIN, 1999; PERRIN *et al.*, 2020; TICKY; BOU-SAID, 2023), e a modelagem do fundo do mar para análise do ruído causado pela cravação de estacas na indústria eólica (HE *et al.*, 2023), entre outras aplicações.

Devido à sua ampla aplicabilidade, o problema da poroelasticidade tem sido alvo de muitos estudos nas Engenharias. Desde o trabalho pioneiro de Biot (1941), as pesquisas se aprofundaram, revelando a complexidade do problema e a necessidade de novas ferramentas para sua resolução.

A modelagem matemática do problema da poroelasticidade envolve duas relações principais: o deslocamento e a pressão do fluido dentro do meio poroso, e o deslocamento estrutural da matriz porosa, conforme descrito pela teoria de Biot. Isso resulta em um sistema de equações que inclui a equação de equilíbrio de momento para o sistema poroso e a equação de conservação de massa para o fluido nos poros.

Uma maneira de resolver esse sistema de equações diferenciais é utilizando métodos numéricos, que requerem a discretização das equações diferenciais. Essa discretização pode ser realizada por meio do Método de Diferenças Finitas (BURDEN; FAIRES, 2016), Método de Volumes Finitos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), entre outros.

Para o problema da poroelasticidade, o processo de obtenção da solução é desafiador devido à presença de elementos na matriz de coeficientes com valores

muito próximos de zero. Isso torna o processo iterativo extremamente sensível aos parâmetros módulo de elasticidade de Young (E) e condutividade hidráulica (K), que estão relacionados à elasticidade, porosidade e permeabilidade do meio. As variações nesses parâmetros podem ter um impacto significativo na convergência e precisão da solução.

Dada essa sensibilidade, muitas pesquisas estão sendo conduzidas para se resolver eficientemente o problema da poroelasticidade, especialmente quando se consideram dados realistas das constantes E e K . Esses esforços visam desenvolver métodos numéricos robustos e algoritmos eficazes que possam lidar com a complexidade inerente do problema e garantir resultados precisos e confiáveis, mesmo diante de variações nos parâmetros físicos do meio poroso.

1.1 MOTIVAÇÃO

Nas Engenharias, muitas aplicações envolvem taxas de variação, resultando na necessidade de resolver equações diferenciais, como a equação do calor e a equação da onda. No entanto, ao adicionar mais hipóteses a esses problemas, as equações diferenciais resultantes nem sempre têm soluções analíticas, tornando necessário o uso de métodos numéricos para sua resolução.

As equações do problema da poroelasticidade derivam das equações de equilíbrio, da relação deformação-deslocamento e tensão-deformação, obtidas da teoria da elasticidade e da lei de Darcy. A complexidade das equações governantes desse problema torna a busca por soluções analíticas, que se baseiam em integrais, uma tarefa difícil. Os métodos numéricos tornam-se convenientes e necessários para obter resultados, embora ainda enfrentem dificuldades de convergência.

Para resolver equações diferenciais por métodos numéricos, é necessária a discretização das equações, que é o processo de converter funções contínuas em funções discretas. Com a discretização, o problema se transforma em um sistema linear, cujo número de incógnitas depende do número de volumes de controle escolhidos para o domínio. Quanto maior o número de volumes de controle, melhor a aproximação da solução. No entanto, isso resulta em um número maior de equações e incógnitas no sistema linear e, conseqüentemente, aumenta o tempo computacional necessário para a resolução (BURDEN; FAIRES, 2016).

A solução de sistemas lineares é realizada por métodos diretos ou iterativos, chamados de *solver* neste trabalho. A vantagem do método iterativo é que ele pode ser aplicado a problemas de grande porte, especialmente em matrizes esparsas (BURDEN; FAIRES, 2016).

As discretizações para soluções numéricas baseiam-se em diversos métodos,

como o Método de Diferenças Finitas (MDF) (BURDEN; FAIRES, 2016; PLETCHER *et al.*, 2013), o Método de Volumes Finitos (MVF) (MALISKA, 2004; FERZINGER *et al.*, 2020) e o Método de Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ *et al.*, 2014), entre outros. Inicialmente, o MDF foi amplamente aplicado na Mecânica dos Fluidos devido à sua capacidade de lidar com escoamentos não lineares, enquanto o MEF foi utilizado em análises estruturais para resolver problemas de elasticidade, que são frequentemente lineares, mesmo em malhas complexas (MALISKA, 2004).

O MDF baseia-se na discretização diferencial das equações de conservação, enquanto o MVF utiliza a discretização das formas integrais dessas equações (CEBECI *et al.*, 2005). As pesquisas com o MDF focaram-se em lidar com as não linearidades dos termos advectivos e no acoplamento das equações. No entanto, devido a dificuldades com malhas complexas, o MDF passou a ser aplicado principalmente a geometrias mais simples, como malhas ortogonais (MALISKA, 2004). Por outro lado, o MEF foi aplicado a problemas de elasticidade em malhas triangulares, desenvolvendo métodos para resolver problemas em malhas complexas.

Até a década de 1970, o MDF era utilizado para resolver problemas de Mecânica dos Fluidos, mas não tinha sucesso em malhas complexas. O MEF, embora eficaz em malhas complexas, não possuía ferramentas adequadas para tratar os termos advectivos nas equações de movimento. Isso motivou o aprimoramento do MVF. No MVF, cada equação aproximada é obtida pelo balanço de conservação no volume elementar, enquanto os métodos de MEF e MDF trabalham, respectivamente, apenas com elementos e pontos da malha.

O MVF é robusto devido às suas características conservativas, especialmente no estudo de escoamento de fluidos (MALISKA, 2004). O MEF, embora possua fundamentos matemáticos rigorosos, é matematicamente equivalente à discretização em volumes finitos, mas com um esforço numérico visivelmente maior. Isso explica por que o MVF se tornou mais popular para problemas de fluxo padrão (BLAZEK, 2015).

Os sistemas gerados pela discretização por MDF e MVF são de grande porte, e para obter melhores resultados, necessitam de um maior número de pontos no domínio. Conseqüentemente, demandam alto custo computacional devido ao número de incógnitas, operações, memória e tempo computacional. Geralmente, os *solvers* clássicos não são capazes de suavizar todas as componentes de erro devido à relação entre os modos de Fourier dos erros e o dimensionamento da malha. Para solucionar esse tipo de problema, pode-se trabalhar com diversos níveis de refinamento de malha.

Os suavizadores, como o Jacobi Ponderado e o Gauss-Seidel, são altamente eficazes na redução de erros associados a modos de alta frequência, mas perdem eficiência após algumas iterações (BRIGGS *et al.*, 2000). Ao utilizar uma malha mais

grossa, alguns modos de baixa frequência são transformados em modos de alta frequência, permitindo que o suavizador mantenha sua eficiência.

O método *Multigrid*, proposto por Fedorenko (1964), reduz significativamente o tempo computacional na resolução de sistemas lineares e não lineares. Esse método consiste em realizar a relaxação do sistema de equações em um conjunto de malhas, transferindo informações entre elas através de operadores de restrição (da malha fina para a malha mais grossa) e prolongação (da malha grossa para a malha mais fina), intercalando com esquemas de relaxação. O processo de transferência entre malhas pode ser repetido em ciclos, como os ciclos V, W e F (WESSELING, 1992). Dependendo do problema ser linear ou não linear, diferentes tipos de informações são transferidas. Para problemas lineares, adota-se o Esquema de Correção (*Correction Scheme*, CS), enquanto para problemas não lineares, utiliza-se o Esquema de Aproximação Completa (*Full Approximation Scheme*, FAS). Mais detalhes sobre o método *Multigrid* serão dados na seção 3.3.

O sistema de equações relacionado ao problema da poroelasticidade gera um problema de ponto de sela (BENZI *et al.*, 2005). Considera-se o sistema a seguir:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

onde os blocos A , B e C são de grande porte e esparsos. O processo de obtenção da solução é complexo, pois apresenta elementos com valores muito próximos de zero no bloco C , que tornam o processo iterativo muito sensível aos parâmetros E e K , relacionados à elasticidade, à porosidade e à permeabilidade do meio. A matriz do sistema Eq. (1.1) é frequentemente mal condicionada e altamente indefinida, devido à falta de diagonal dominância, resultando em instabilidade e convergência lenta, características de um problema de ponto de sela (BENZI *et al.*, 2005).

Grandes sistemas lineares do tipo ponto de sela surgem em uma ampla variedade de aplicações. Tais sistemas representam um desafio significativo para os desenvolvedores de *solvers*. Nas últimas décadas, Gaspar *et al.* (2007), Franco *et al.* (2018b), Franco e Pinto (2024) e outros trabalhos foram dedicados ao desenvolvimento de métodos para resolver esse problema de maneira eficiente para dados realísticos das constantes E e K .

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo deste estudo é propor uma nova abordagem de varredura espaço-tempo, visando a criação de uma técnica robusta, eficiente e altamente paralelizável, capaz de melhorar significativamente a solução numérica para problemas complexos de poroelasticidade. A proposta visa otimizar a precisão e a velocidade de convergência dos métodos tradicionais, e também integrar estratégias avançadas, como o uso dos métodos *Multigrid*, para garantir um desempenho computacional superior em simulações de grande escala.

1.2.2 Objetivos específicos

- Comparar os suavizadores Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa na varredura *Time-Stepping* para o problema da poroelasticidade 1D, com foco na aceleração da convergência utilizando o método *Multigrid*.
- Identificar o suavizador que apresenta melhor desempenho em termos de convergência e tempo computacional para o problema da poroelasticidade 1D.
- Avaliar a aplicação de outras varreduras, como *Waveform Relaxation* e *Space-Time*, sobre o suavizador identificado como o mais eficiente para o problema da poroelasticidade.
- Implementar o suavizador e a varredura no problema da poroelasticidade 2D, utilizando o método *Multigrid* para otimização da solução.

1.3 DELINEAMENTO DO TEXTO

Além do capítulo introdutório, este documento está distribuído em mais sete capítulos, estruturados de forma que as informações sejam apresentadas sequencialmente. O capítulo 2 contém uma revisão bibliográfica que aborda alguns problemas sobre Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamic*, CFD), *Multigrid* e as equações do problema da poroelasticidade. No capítulo 3 são apresentados alguns elementos gerais do problema da poroelasticidade, fundamentos teóricos a respeito dos métodos iterativos e do método *Multigrid*. O capítulo 4 apresenta fundamentos teóricos dos suavizadores Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa, seguido pelos tipos de varredura no espaço-tempo, abordados nessa pesquisa. No capítulo 5 são apresentados os modelos matemáticos 1D e 2D para a equação da poroelasticidade. No capítulo 6 é realizado o detalhamento do modelo numérico e do processo de obtenção das equações discretizadas, considerando as condições de contorno empregadas. O

capítulo 7 apresenta a nova varredura espaço-tempo. Os resultados, comparações e discussões estão reservados para o capítulo 8. As considerações finais, tais como conclusão, contribuições e propostas para trabalhos futuros são apresentados no capítulo 9.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, é realizada uma revisão bibliográfica das principais frentes de pesquisa relacionadas ao tema desta tese: generalidades em CFD, método *Multigrid*, o problema da poroelasticidade e varreduras espaço-tempo.

2.1 GENERALIDADES EM CFD

O escoamento de fluidos que envolve transferência de calor é avaliado nos processos de produção de energia, equipamentos térmicos, nas Engenharias de reatores, Aeronáutica e Aeroespacial. A simulação numérica desses escoamentos é essencial para quantificar e qualificar esses fenômenos, pois permite executar muitas análises mais rapidamente do que em túneis de vento (MALISKA, 2004).

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) é uma área da Engenharia que utiliza métodos numéricos e algoritmos para resolver e analisar problemas envolvendo escoamentos de fluidos. A CFD permite simular o comportamento de fluidos através de um computador, oferecendo uma visão detalhada sobre como os fluidos se movem e interagem com superfícies (SHARMA, 2017).

As pesquisas de CFD englobam a análise de desempenho de aeronaves, foguetes e drones (JIRASEK, 2012); bem como o estudo do fluxo de ar sobre as asas e a fuselagem (KROLL; FASSBENDER, 2005); estudo do fluxo de ar no motor e sistemas de resfriamento (KIM; KIM, 2006); análise de impacto de vento em edifícios (KATSURA; GEORGAKIS, 2016); estudo de inundações e escoamento em regiões urbanas (BATES *et al.*, 2010; TOMINAGA *et al.*, 2008); estudo do fluxo de ar e marés para melhorar a captação de energia (LI; CALISAL, 2010); simulação do fluxo sanguíneo em artérias e veias para estudar doenças cardíacas (QUARTERONI *et al.*, 2016), engenharia agrícola (RIGONI *et al.*, 2022) entre outras.

Em CFD utiliza-se métodos computacionais para simular o escoamento de fluidos de maneira precisa e eficiente. Essa técnica permite que o computador realize simulações numéricas do escoamento de fluido, seja dentro ou ao redor de um sistema material. Durante a simulação, as equações fundamentais que descrevem o movimento dos fluidos são resolvidas numericamente.

Ao transformar o sistema físico em um ambiente virtual, a CFD oferece níveis notáveis de realismo e fidelidade, permitindo uma análise detalhada e precisa do comportamento do fluido. Essa capacidade de simulação precisa torna possível estudar e analisar completamente sistemas complexos, como carros, edifícios e outras estruturas, antes mesmo de serem construídos ou implementados no mundo real.

O uso de CFD está se tornando mais interdisciplinar, ajudando a estreitar os laços entre aerodinâmica, estruturas, propulsão e controles de voo (BECKER, 2002).

O uso eficaz de CFD é um ingrediente chave no *design* de aeronaves e tem sido utilizada para o desenvolvimento de produtos da área. Essa ferramenta proporcionou maior efeito no projeto aerodinâmico de aeronaves e auxiliou na solução de problemas cada vez mais relevantes nos projetos. Com o uso de CFD, a necessidade de testes em túnel de vento para a cabine das aeronaves foi eliminado e o número de testes de asas em túnel de vento reduzido (JOHNSON *et al.*, 2003).

Algumas aplicações de CFD relacionadas aos fluxos internos, têm sido usadas para resolver problemas reais de Engenharia, como: entradas subsônicas, transônicas e supersônicas, compressores e turbinas, câmaras de combustão e motores de foguetes (CEBECI *et al.*, 2005).

Dessa forma, a CFD desempenha um papel fundamental em projetos, fornecendo aos engenheiros e projetistas uma poderosa ferramenta para otimizar o desempenho, melhorar a eficiência e reduzir custos, ao permitir a análise e aprimoramento de projetos de forma virtual, antes de investimentos significativos serem feitos na fabricação e construção física (HIRSCH, 2007).

De forma geral, a CFD desempenha um papel essencial no design de produtos devido a capacidade de modelar com precisão o comportamento dos fluidos e permitindo otimizar processos e soluções com eficiência (SHARMA, 2017).

Além disso, Jones e Lee (2019) destacam como a CFD promove uma abordagem mais integrada na Engenharia, no qual diferentes disciplinas colaboram simultaneamente. Essa integração aumenta a eficiência dos projetos e melhora a qualidade, ao permitir uma análise multidisciplinar detalhada desde as etapas iniciais de desenvolvimento.

Hadjisophocleous (2020) apresentou uma abordagem detalhada sobre os modelos matemáticos e físicos utilizados para descrever a geração de calor, a liberação de gases e a formação de fumaça durante um incêndio. Com o uso de ferramentas da CFD, é realizada a simulação da propagação da fumaça, permitindo o cálculo preciso da sua velocidade, direção e dispersão em um ambiente afetado pelo incêndio. Essa análise proporciona percepções valiosas sobre os efeitos da propagação de fumaça na evacuação do ambiente, bem como possibilita a proposição de estratégias de ventilação mais eficientes e seguras.

Alkhabbaz *et al.* (2022) apresentaram um estudo comparativo entre CFD e análises experimentais para avaliar a influência de um difusor compacto no comportamento aerodinâmico de turbinas eólicas de pequena escala. Os resultados tanto de simulação como experimentais mostram-se semelhantes, evidenciando a importância de CFD.

Mirzaei *et al.* (2022) propuseram uma estrutura para gerar dados de eventos respiratórios em ambientes fechados, com base em parâmetros clínicos (a velocidade de liberação de gotículas) e fatores ambientais (temperatura ambiente e umidade relativa) nos modos de liberação de gotículas. Esse estudo foi impulsionado pela pandemia do COVID-19. Com simulações utilizando ferramentas de CFD, foi gerada uma estimativa de distância social segura em ambientes fechados, a partir de um modelo de dispersão de gotículas no ar.

2.2 MÉTODO MULTIGRID

O método *Multigrid* é uma técnica numérica que consiste em acelerar a convergência dos métodos iterativos de solução de sistemas de equações algébricas, consequentemente, reduzindo o tempo de solução. Essa técnica pode ser aplicada em qualquer tipo de discretização, inclusive usando método de Volumes Finitos, e para métodos iterativos que possuem a propriedade de suavização, ou seja, rápida redução dos modos oscilatórios do erro (BRIGGS *et al.*, 2000).

O método *Multigrid* foi proposto por Fedorenko (1964) com o objetivo de obter uma convergência mais rápida para resolver sistemas de equações do tipo $Au = f$. A ideia principal desse método é alternar suavizações em diversos níveis de malhas e as aproximações destas soluções em malhas mais grossas, atingindo as diversas frequências de erros, oscilatórias e suaves.

Brandt (1977) justificou a necessidade desse método pelo fato de que as primeiras iterações dos métodos iterativos reduzem rapidamente as componentes oscilatórias do erro e em seguida, essas componentes se tornam suaves e passam a diminuir cada vez mais lentamente, fazendo com que o método iterativo necessite de muitas iterações para atingir a acurácia esperada.

Por convenção, denomina-se Método *Singlegrid* quando se usa apenas uma malha e *Multigrid* quando são utilizados mais níveis de malhas na resolução do problema. Assim, quanto mais refinada a malha, maior é a vantagem do método *Multigrid* em relação ao método *Singlegrid* (FERZIGER; PERIC, 1999).

Segundo Wesseling (1992) e Trottenberg *et al.* (2000), para se transportar informações entre a malha fina e a malha imediatamente mais grossa, deve-se utilizar um operador de restrição; o inverso deve ser feito com um operador de prolongação. A sequência em que as diversas malhas são visitadas determina um ciclo *Multigrid*, sendo V, W e F os ciclos mais comuns. Para problemas lineares utiliza-se o Esquema de Correção (*Correction Scheme*, CS), onde o resíduo é a única informação transportada entre as malhas. Para problemas não lineares é recomendado o Esquema de

Aproximação Completa (*Full Approximation Scheme*, FAS), onde o resíduo e a solução de cada malha são transportadas pelos operadores.

Wienands *et al.* (2003) descreveram um método *Multigrid* eficiente para o sistema de equações da poroelasticidade por meio de um suavizador ponto a ponto tornando o problema desacoplado. As propriedades de suavização foram melhoradas com a análise de suavização de Fourier.

Oliveira *et al.* (2012) propuseram variações na equação do calor bidimensional acrescido de anisotropia na malha. A discretização utilizada foi com o uso do MDF. Os autores mostraram que para grandes anisotropias o tipo de restrição aplicado no *Multigrid* não afeta o tempo do CPU e apresentam melhor desempenho quando estão associados ao Método Gauss-Seidel *Red-Black*.

Hu *et al.* (2020) propuseram o método *Multigrid* com *Waveform Relaxation* (um tipo diferente de varredura temporal) para resolver equação do calor com derivada fracionária. Foram realizados experimentos numéricos com uma e duas dimensões espaciais para ilustrar a eficiência e robustez em relação às ordens fracionárias.

Oliveira *et al.* (2020) mostraram a formulação pressão-pressão para resolver o problema de escoamento multifásico em meio poroso rígido. A discretização espacial é realizada pelo MVF, Euler implícito para o tempo e a linearização pelo método de Picard modificado associado ao método *Multigrid* com ciclo W. Essa combinação mostrou convergência com poucas iterações e tempo computacional reduzido para o problema abordado.

Le e Ooi (2021) mostraram que a estrutura do Método *Multigrid* aplicada a redes neurais obtiveram resultados mais precisos do sistema neural para problemas de dinâmica dos fluidos no estado estacionário.

Malacarne *et al.* (2021) apresentaram a solução de equações hiperbólicas unidimensional comparando o método *Singlegrid* e *Multigrid* usando a varredura temporal *Time-Stepping*. Os resultados mostram que o desempenho dos métodos depende da variação entre o tamanho do elemento da malha e o passo de tempo.

Malacarne *et al.* (2022a) resolveram a equação da onda unidimensional e bidimensional, com discretização usando MDF, e comparando o método *Singlegrid* e *Multigrid* usando a varredura temporal *Time-Stepping*. Obteve-se o método implícito de quarta ordem para o problema unidimensional e de segunda ordem para o caso bidimensional, quando o passo de tempo é igual ao intervalo espacial.

Zen *et al.* (2024) usaram o método *Multigrid* com o esquema FAS e a varredura *Waveform Relaxation* para resolver o problema não linear da condução de calor em uma barra de silício com condições de contornos relaxantes e obtiveram excelentes fatores de convergência e *speed-up*.

2.3 PROBLEMA DA POROELASTICIDADE

A Teoria de Biot (1941) descreve o comportamento mecânico de meios porosos saturados com fluidos. Um meio poroso natural é constituído por uma fase sólida, denominada grãos, e por espaços entre esses grãos, conhecidos como poros, os quais podem estar preenchidos ou não por fluidos.

Estudar o comportamento de um meio poroso envolve a descrição das deformações da matriz sólida e a cinética do fluido que escoia através dos poros interconectados. A matriz sólida é caracterizada pelos princípios da elasticidade, enquanto o fluido é considerado um material viscoso, cujo escoamento é regido pela lei de Darcy (COUSSY, 2010).

A solução computacional de problemas de poroelasticidade exige suavizadores capazes de tratar eficientemente o acoplamento entre deslocamento e pressão. Embora os métodos acoplados sejam mais robustos, os suavizadores que trabalham com as variáveis de forma desacoplada são amplamente utilizados devido à sua facilidade de implementação e eficiência, desde que se mostrem eficazes.

Oosterlee e Gaspar (2008) apresentaram o suavizador Vanka, que trata as variáveis de forma acoplada para as equações de Stokes¹ e as equações do problema da poroelasticidade incompressíveis, considerando o espaço 2D. Os resultados mostraram maior desempenho nas malhas colocadas (malhas onde todas as variáveis compartilham a mesma posição espacial, geralmente nos nós da grade).

Luo *et al.* (2016) aplicaram o suavizador Uzawa nas equações do problema da poroelasticidade 2D com a discretização pelo MVF, associado ao método *Multigrid*. Esse suavizador é uma combinação de iterações de Gauss-Seidel para os deslocamentos, e iterações de Richardson para o complemento de Schur no campo da pressão. Os parâmetros de relaxação foram obtidos usando Análise de Fourier Local. Os resultados numéricos confirmam a eficiência e robustez do esquema proposto.

Franco *et al.* (2018b) utilizaram a ordenação colorida aplicada ao suavizador Vanka usando método de diferenças finitas, o método *Multigrid* e a varredura temporal *Waveform Relaxation* para resolver o problema da poroelasticidade.

Borregales *et al.* (2019) propuseram a resolução para o problema da poroelasticidade 2D e 3D com uma nova versão para o método *Fixed-Stress*, em que considera a variável temporal como uma direção adicional para a paralelização do problema de Biot e apresenta experimentos numéricos e análise de convergência para demonstrar a robustez do método.

¹ As equações de Stokes são uma simplificação das equações de Navier-Stokes.

Honorio *et al.* (2018) discretizaram o problema usando o MVF baseado em elementos (*Element-based Finite Volume Method*, EbFVM) para malhas não estruturadas para o problema da poroelasticidade 1D, 2D e 3D. A utilização de função de interpolação denominada de Esquema de Influência Física mostrou redução do tempo computacional e eliminou a instabilidade gerada pela pressão.

Rodrigues *et al.* (2020) resolveram o problema da poroelasticidade unidimensional, utilizando a discretização com o Método de Diferenças Finitas, suavizador Vanka e o método *Multigrid*. Adotaram o Método de Múltipla Extrapolação de Richardson para reduzir os erros de discretização e obtiveram melhora da acurácia dos erros.

Adler *et al.* (2020) propuseram uma discretização por elementos finitos para o problema da poroelasticidade. Desenvolveram pré-condicionadores em bloco, com *Multigrid* e *Fixed-Stress*, exibindo um método robusto em relação a variações nos parâmetros físicos, tamanhos de malha e passos de tempo para o problema da poroelasticidade.

2.4 VARREDURAS ESPAÇO-TEMPO

Varreduras espaço-tempo são técnicas utilizadas para analisar e visualizar a evolução de fenômenos ao longo das dimensões do espaço e do tempo. Esses métodos foram desenvolvidos a partir de propostas de substituição de algoritmos sequenciais por algoritmos que realizassem várias subtarefas de forma independente (NIEVERGELT, 1964).

Algumas das varreduras espaço-tempo abordadas na literatura incluem os métodos *Time-Stepping* (GASPAR; RODRIGO, 2015; MALACARNE *et al.*, 2022a), *Waveform Relaxation* (VANDEWALLE; PIESSENS, 1992; FRANCO *et al.*, 2018b; MALACARNE *et al.*, 2022b; SANTIAGO *et al.*, 2022; ZEN *et al.*, 2024) e *Space-Time* (HORTON; VANDEWALLE, 1995; FRANCO *et al.*, 2018a; FRANCO; PINTO, 2024).

O método *Time-Stepping* é sequencial, utilizando a solução do passo de tempo anterior como estimativa inicial para o próximo passo. Dessa forma, resolve-se um problema transiente através de uma sequência de sistema de equações em estado permanente em cada passo de tempo, ou seja, em cada passo de tempo é resolvido um problema elíptico, onde o *Multigrid* é comprovadamente eficiente (LENT, 2006; TROTTEBERG *et al.*, 2000).

Inicialmente, esse método *Time-Stepping* foi proposto para a solução de problemas elípticos, como a equação de advecção-difusão (BAKHVALOV, 1966). No entanto, pode ser aplicado a problemas parabólicos, como a equação do calor (TANNEHILL *et al.*, 1997), e a problemas hiperbólicos, como a equação da onda (DEGHAN; MOHEBBI, 2008; MALACARNE *et al.*, 2022b). A principal vantagem do método *Time-*

Stepping é a facilidade de implementação computacional. No entanto, uma limitação a ser considerada é não ser um método paralelizável.

Diferentemente do método *Time-Stepping*, o método *Waveform Relaxation* considera todas as variáveis, espaciais e temporais, simultaneamente. Neste caso, cada EDP é transformada em um conjunto de EDOs, e em cada ponto espacial, a EDO associada é resolvida de forma direta até o passo de tempo final (VANDEWALLE, 1993). Esse método foi utilizado para o problema da poroelasticidade (FRANCO *et al.*, 2018b) e o problema da equação da onda (MALACARNE *et al.*, 2022b).

O método *Space-Time* caracteriza-se por utilizar um suavizador por pontos, como o Gauss-Seidel *Red-Black*, atualizando todos os pontos no espaço e tempo a cada iteração. Quando associado ao método *Multigrid*, adota-se a estratégia de semiengrossamento no espaço e no tempo (VANDEWALLE; HORTON, 1995).

Diversas variações foram desenvolvidas a partir do método *Space-Time* proposto por Horton e Vandewalle (1995). Entre as variações, destaca-se o método *Space-Time* com engrossamento padrão, no qual reduz-se o número de pontos da malha na direção espacial e temporal na mesma proporção, conforme proposto por Franco *et al.* (2018a), que combina engrossamento padrão com suavizadores por linha ou blocos, proporcionando eficiência e robustez para todos os casos analisados.

A vantagem do método *Space-Time* é o fato de ser altamente paralelizável no espaço e no tempo. No entanto, a limitação é a dificuldade de programar e alcançar robustez.

Dentro do contexto (CFD, método *Multigrid*, problema da poroelasticidade e varreduras temporal), este trabalho busca resolver o problema da poroelasticidade por meio dos métodos Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa, utilizando diferentes varreduras no tempo, como *Time-Stepping* e *Space-Time*, associado com o *Multigrid*. Especificamente, não há literatura usando o método Uzawa associado com a varredura *Space-Time* para o problema da poroelasticidade, sendo uma lacuna a ser estudada.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, apresenta-se a fundamentação teórica necessária para dar continuidade aos temas de interesse da tese. Pretende-se compreender alguns aspectos do problema da poroelasticidade, dos métodos iterativos básicos e do método *Multigrid*.

3.1 ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE

Poroelasticidade é o termo usado para descrever a interação entre o escoamento de fluido e a deformação do sólido no interior do meio poroso, que é composto de estruturas sólidas com poros preenchidos de fluido. A teoria da poroelasticidade é amplamente utilizada em diversas áreas: engenharia biomédica, de petróleo, agrícola, estrutural; mecânica das rochas, geofísica, hidrogeologia, geotecnia e outras.

Nesse trabalho, a poroelasticidade é direcionada para a área específica de engenharia geotécnica, que estuda fenômenos físicos como consolidação ou adensamento de solos, estabilidade de taludes, subsidência de terra, entre outros.

O acréscimo de tensão, ao qual está submetido o solo saturado, faz com que a pressão dos poros aumente imediatamente. Para solos arenosos, o recalque elástico e o adensamento ocorrem de forma aproximadamente instantânea¹. No entanto, para solos argilosos, o adensamento ocorre ao longo do tempo. Essa dependência temporal está relacionada com as propriedades do solo tais como a porosidade, a permeabilidade, a velocidade que o fluido se move entre os poros, espaços entre as partículas sólidas do solo (DAS; KHALED, 2019).

Um fluido é um meio que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento. Quando se aplica uma força de cisalhamento o fluido tende a se deformar e a razão de deformação depende da viscosidade do fluido. Um fluido pode apresentar-se na forma líquida ou gasosa (FOX *et al.*, 2018).

A dinâmica dos fluidos estuda o movimento dos fluidos, incluindo suas interações quando dois ou mais fluidos entram em contato um com o outro. O movimento do fluido depende da densidade e da pressão, e a viscosidade determina a resistência às mudanças no fluido (VILANOVA, 2011).

O fluxo é o movimento do fluido. Se as características do movimento não mudarem com o tempo, denomina-se fluxo em regime permanente; caso contrário, o fluxo é denominado transiente. Se o fluxo contém um movimento aparentemente caótico, ele é denominado de turbulento, caso contrário é denominado de laminar. A

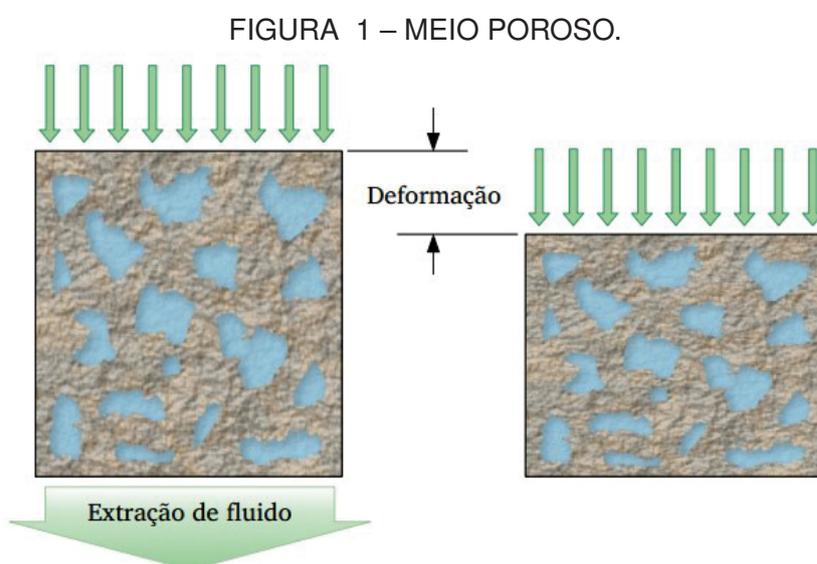
¹ Recalque se refere à deformação sofrida pelo solo, quando submetido a carregamentos; o adensamento é o fenômeno de redução do volume do solo, quando este é comprimido.

diferença entre um fluxo laminar ou turbulento está relacionada ao número de Reynolds (Re). O número de Reynolds depende das especificações do fluido e das condições de seu fluxo, definido como a razão das forças inerciais pelas forças viscosas. Se a razão entre as forças for baixa, indica fluxo laminar suave (VILANOVA, 2011).

Os fluidos também podem ser caracterizados quanto à variação em sua densidade. Os gases são geralmente tratados como fluidos compressíveis porque o volume que os contém pode ser reduzido. Se a densidade de qualquer região do fluido não muda em função do tempo, conforme ele se move através do fluxo, significa que o fluido é incompressível. Os líquidos também podem ser comprimidos, mas há mais uma limitação na quantidade de compressão que pode ser feita. Além disso, tem-se o princípio de Bernoulli, que relaciona o aumento de velocidade em um líquido a uma diminuição na pressão.

Segundo Coussy (2004), um meio poroso é um meio heterogêneo, composto por uma matriz sólida e um conjunto de poros preenchidos por um fluido. Se os poros são conectados, existe espaço para um fluido escoar por esse meio.

O sistema todo é afetado quando é aplicada uma carga externa no meio poroso. Os poros preenchidos de fluidos sofrem uma variação de pressão que por sua vez, implica no movimento do fluido, o que provoca deformação elástica do material sólido, conforme pode ser observado na FIGURA 1.



FONTE: Ribeiro (2016)

De acordo com Biot (1941), o conceito básico do comportamento de um meio sólido poroso é como um sistema deformável trocando massa fluida com a vizinhança.

O meio poroso é tratado na mecânica do contínuo como a superposição de duas fases contínuas: uma sólida e outra fluida. Estudar o comportamento de um meio poroso envolve descrever tanto as deformações da matriz sólida quanto a dinâmica

do fluido que escoar através dos poros interconectados. A matriz sólida segue os princípios da elasticidade, enquanto o escoamento do fluido é descrito pela lei de Darcy, caracterizando-o como um material viscoso (COUSSY, 2010).

O tratamento matemático do processo que ocorre no solo devido a tensão, foi inicialmente proposto por Terzaghi (1923), baseado em seus experimentos de laboratório, conhecido como Teoria do Adensamento. Os estudos foram aprofundados e a teoria da poroelasticidade foi formulada por Biot (1941), que considera o solo como meio poroso e a água como fluido e propõe o termo *meio poroelástico*. Nesta teoria são admitidas as seguintes hipóteses:

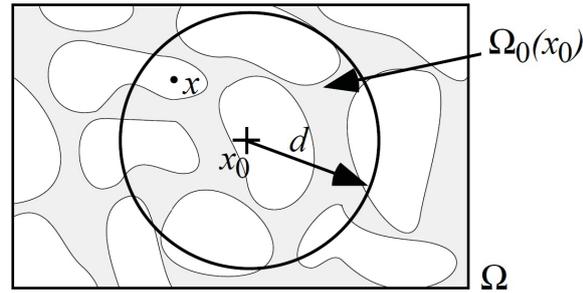
- o material é considerado isotrópico, ou seja, suas propriedades físicas são iguais independentemente da direção;
- o material é considerado perfeitamente elástico, ou seja, o carregamento e o descarregamento seguem o mesmo caminho no gráfico tensão-deformação;
- as deformações do material são pequenas;
- o fluido contido nos vazios é considerado incompressível;
- o escoamento do fluido no meio poroso ocorre segundo a lei de Darcy;
- o meio poroso é considerado saturado, ou seja, os vazios são totalmente preenchidos pelo fluido.

Biot (1941), a fim de descrever completamente a condição macroscópica do solo, considera uma variável adicional que fornece a quantidade de água nos poros. Ele denota esta variável por θ e a denomina de variação de volume de água, que representa o incremento do volume de água por unidade de volume do solo. O acoplamento dos termos mecânicos no problema de fluxo é caracterizado pela relação de dependência entre a variação do volume de água e as tensões atuantes no solo. Para o acoplamento dos termos de fluido no problema mecânico, introduziu-se o termo de pressão de água nos poros nas relações constitutivas derivadas da lei de Hooke e descritas pela teoria da elasticidade.

O meio poroso tem uma geometria complexa, e portanto considera-se o Volume Elementar Representativo (*Representative Elementary Volume*, REV) como sendo o menor volume possível que pode conter uma quantidade representativa de espaço vazio (poro) e sólido, conforme ilustrado na FIGURA 2.

Supõe-se que o meio poroso preenche o domínio de volume Ω . Seja $\Omega_0(x_0) \subset \Omega$ um subdomínio de Ω centrado no ponto x_0 em nível macroscópico. Além disso, define-se

FIGURA 2 – VOLUME REPRESENTATIVO ELEMENTAR.



FONTE: Bastian (1999)

uma função indicadora de espaço vazio em nível microscópico dada por:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{caso } x \in \text{espaço vazio} \\ 0 & \text{caso } x \in \text{matriz sólida} \end{cases}, \quad (3.1)$$

para $x \in \Omega$.

Então, a porosidade $\Phi(x_0)$ na posição x_0 com relação ao volume médio $\Omega_0(x_0)$, é definida pela expressão (BASTIAN, 1999; OLIVEIRA, 2022):

$$\Phi(x_0) = \frac{1}{\text{medida}(\Omega_0(x_0))} \int_{\Omega_0(x_0)} \gamma(x) dx. \quad (3.2)$$

onde $\text{medida}(\Omega)$ é comprimento, área ou volume, dependendo da dimensão.

Assim, a porosidade (Φ) é definida pela razão entre o volume do espaço vazio e o volume total. Essa quantidade é adimensional e está entre 0 e 1.

A modelagem matemática do problema da poroelasticidade envolve duas equações diferenciais acopladas obtidas a partir de duas leis: a lei que descreve a relação entre o movimento e a pressão do fluido dentro do meio poroso; e a lei de deslocamento estrutural da matriz porosa, conhecida como teoria de Biot. A demonstração completa desta modelagem está disponível no Anexo A.

Assim, considerando forças de corpo, o problema é governado por um sistema de equações (GASPAR *et al.*, 2003). A primeira equação representa a condição de equilíbrio do meio poroso saturado em termos dos deslocamentos $\mathbf{u} = (u, v)$ da matriz sólida:

$$-\mu \cdot \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div}(\mathbf{u})) + \text{grad}(p) = \mathcal{U}, \quad (3.3)$$

onde λ é o coeficiente de Lamé, $\mu = G$ é o módulo de elasticidade transversal e \mathcal{U} representa o vetor de densidade de forças de corpo aplicadas. Os termos $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ e $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ estão relacionadas ao módulo de Young E (módulo de elasticidade) e razão de Poisson ν (cisalhamento de materiais homogêneos e isotrópicos). Esta equação contém uma variável em excesso, a pressão do fluido p (poropressão).

Uma equação adicional é necessária para complementar o problema de valor de contorno, que é obtida a partir da conservação da massa de fluido, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma p + (\text{div}(\mathbf{u}))) - \frac{\kappa}{\eta} \Delta p = \mathcal{P}, \quad (3.4)$$

onde $\gamma = \Phi \cdot \beta$, Φ é a porosidade, β é o coeficiente de compressibilidade do fluido ($\beta = 0$, fluido incompressível), κ é a permeabilidade do meio poroso, η é a viscosidade do fluido e \mathcal{P} é a força específica (N/m³) representando o processo forçado de extração ou injeção de fluido.

O coeficiente de compressibilidade β representa a variação relativa instantânea de volume em função de uma variação de tensão (ou pressão) e é dada por:

$$\beta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial p}, \quad (3.5)$$

onde V é o volume que sofre uma variação ∂V e p é a pressão. Para um fluido incompressível, $\partial V / \partial p = 0$, e portanto, $\beta = 0$.

Desenvolvendo os termos dados pelas Eq. (3.3) e (3.4), considerando os vetores $\mathbf{u} = (u, v)$ e $\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ tem-se:

$$\begin{cases} -\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} \\ -\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mathcal{V} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma p + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \mathcal{P} \end{cases} \quad (3.6)$$

Nesse trabalho, considera-se o fluido incompressível, portanto o termo $\gamma \cdot p$ é nulo.

3.2 MÉTODOS DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

No contexto do *Multigrid* é necessário avaliar os métodos iterativos básicos, onde a análise do raio espectral é essencial para a aplicação do método.

Os sistemas de equações do tipo:

$$A \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.7)$$

onde A é a matriz dos coeficientes, \mathbf{u} é o vetor com os valores exatos das incógnitas e \mathbf{f} é vetor dos termos independentes, podem ser resolvidos usando métodos diretos ou iterativos. Utiliza-se o vetor \mathbf{v} como o vetor dos valores aproximado das incógnitas, para os métodos iterativos.

Definir o tipo de método mais eficiente sem realizar um estudo preliminar é impreciso. Os métodos diretos se mostram mais eficientes para solução de sistemas de pequeno porte, inclusive nos quais a matriz de coeficientes é densa, isto é, com muitos elementos diferentes de zero. Os métodos iterativos, quando é garantida a convergência, são indicados para a solução de sistemas cuja matriz de coeficientes é de grande porte, destacando as situações em a matriz A da Eq. (3.7) é esparsa, ou seja, possui grande quantidade de elementos iguais à zero (BARROSO *et al.*, 1987; BURDEN; FAIRES, 2016).

A solução exata é obtida através de um número definido de operações, com a precisão diretamente relacionada aos dados fornecidos. No entanto, na prática, erros de arredondamento, discretização e truncamento podem ocorrer, sendo possível avaliar seus efeitos. Entre os métodos diretos mais utilizados estão a Eliminação de Gauss e as decomposições de matrizes, como LU, diagonalização, decomposições simétrica e anti-simétrica (BURDEN; FAIRES, 2016). Esses métodos transformam o sistema original em sistemas mais simples, com matrizes triangulares ou diagonais, facilitando a resolução.

Por sua vez, os métodos iterativos caracterizam-se por realizar sucessivas aproximações (iterações) que, dadas algumas condições, convergem para a solução exata (u) em seu limite.

O número de iterações que serão realizadas depende da precisão esperada da solução aproximada. Para limitar o número destas iterações, deve ser estabelecido um critério de parada, particularmente, relacionado a esta tolerância.

Soluções iterativas são amplamente utilizadas em comparação com os métodos diretos. Particularmente, se a matriz dos coeficientes A apresenta muitos elementos nulos isso implica em redução do esforço computacional necessário em cada iteração. No entanto, deve-se garantir que a precisão suficiente seja obtida em um número razoável de iterações (CEBECI *et al.*, 2005).

Os métodos iterativos transformam o sistema $A \mathbf{u} = \mathbf{f}$ em um sistema equivalente $\mathbf{v} = R\mathbf{v} + \mathbf{g}$ para uma matriz iterativa R e um vetor \mathbf{g} . A partir de um vetor inicial \mathbf{v}^0 , a sequência de vetores solução aproximados é gerada pelas iterações $\mathbf{v}^{k+1} = R\mathbf{v}^k + \mathbf{g}$, para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Alguns dos métodos iterativos mais conhecidos são o método de Jacobi, método de Gauss-Seidel, método de Jacobi ponderado e Sobre-Relaxação Sucessiva (*Successive Over Relaxation*, SOR).

Em geral, os métodos de resolução de sistemas lineares (diretos ou iterativos) são chamados de *solvers*.

O fator de convergência do método iterativo $\mathbf{v}^{k+1} = R\mathbf{v}^k + \mathbf{g}$ é dado por:

$$\rho(R) = \max|\lambda(R)|, \quad (3.8)$$

onde $\rho(R)$ representa o raio espectral e $\lambda(R)$ são os autovalores da matriz de iteração (BURDEN; FAIRES, 2016). O valor $\rho(R)$ representa a pior redução do erro com o passo iterativo, usando a matriz R . A convergência do método iterativo é garantida pelo Teorema 3.2.1, a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Burden e Faires (2016):

Teorema 3.2.1. *O método iterativo $\mathbf{v}^{k+1} = R\mathbf{v}^k + \mathbf{g}$ é convergente se, e somente se, $\rho(R) < 1$.*

Se o raio espectral está próximo de 1 os métodos iterativos apresentam uma convergência mais lenta e se os valores são próximos de 0 apresenta convergência rápida (BRIGGS *et al.*, 2000).

O Teorema 3.2.2, a seguir, demonstrado em Saad (2003), estabelece as condições de convergência para os métodos Jacobi e Gauss-Seidel.

Teorema 3.2.2. *Se a matriz A tiver a diagonal estritamente dominante por linhas ou por colunas, os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel convergem, para qualquer vetor inicial \mathbf{v}^0 escolhido.*

As matrizes geradas pela discretização de problemas de valores de contorno, em geral têm boas propriedades de convergência para muitos métodos numéricos, especialmente quando as matrizes são simétricas.

3.2.1 Método de Jacobi

O método de Jacobi consiste em escrever a matriz A como uma soma de matrizes, com os sinais alterados convenientemente², assim:

$$A = -L + D - U, \quad (3.9)$$

onde a matriz L é a matriz triangular inferior que contem apenas os coeficientes da matriz A que estão abaixo da diagonal principal, a matriz U é a matriz triangular superior que contem apenas os coeficientes da matriz A que estão acima da diagonal principal e D é a matriz diagonal que contem os elementos da diagonal principal da matriz A .

² A forma clássica de reescrever uma matriz é $A = L + D + U$, e aqui é alterado para manter os sinais positivos L , U e D .

Considerando que a matriz D é não singular, pode-se escrever o sistema linear Eq. (3.7) utilizando Eq. (3.9) assim, $(-L + D - U)\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Em seguida, pode-se escrever uma aproximação \mathbf{v} para \mathbf{u} como:

$$D\mathbf{v} = (L + U)\mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (3.10)$$

Isolando o vetor \mathbf{v} da iteração atual, obtém-se a forma matricial do método de Jacobi:

$$\mathbf{v}^{k+1} = D^{-1}(L + U)\mathbf{v}^k + D^{-1}\mathbf{f}. \quad (3.11)$$

Nesse caso, cada variável v_i^{k+1} , onde $i = 1, \dots, n$ é atualizada em função das demais variáveis com os valores da iteração k (WESSELING, 1992).

3.2.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel consiste em escrever a matriz A como uma soma de matrizes, de forma conveniente:

$$A = -L + D - U, \quad (3.12)$$

de forma análoga ao método de Jacobi³.

Considerando que a matriz $-L + D$ é não singular, pode-se escrever o sistema linear Eq. (3.7) utilizando a Eq. (3.12) como

$$(-L + D - U)\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.13)$$

Em seguida, pode-se escrever:

$$(-L + D)\mathbf{v} = U\mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (3.14)$$

Isolando o vetor \mathbf{v} da iteração atual, obtém-se a forma matricial do método de Gauss-Seidel:

$$\mathbf{v}^{k+1} = (-L + D)^{-1}U\mathbf{v}^k + (-L + D)^{-1}\mathbf{f}. \quad (3.15)$$

Nesse caso, cada variável v_i^{k+1} do vetor \mathbf{v}^{k+1} é atualizada em função das demais variáveis com os valores da iteração $k+1$ para aquelas que já foram atualizadas (ou seja, para v_1 até v_{i-1}) e com o valor da iteração k para as variáveis não atualizadas (ou seja, para v_{i+1} até v_N , onde N é o número de variáveis) (WESSELING, 1992).

No método Gauss-Seidel clássico com atualização das variáveis na ordem lexicográfica, as variáveis são atualizadas sequencialmente, da esquerda para a direita e de baixo para cima, conforme ilustrado na FIGURA 3 para o caso bidimensional.

³ A forma clássica de reescrever uma matriz é $A = L + D + U$, e aqui é alterado para manter os sinais positivos D e U .

FIGURA 3 – ATUALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS COM ORDENAÇÃO LEXICOGRÁFICA.

•57	•58	•59	•60	•61	•62	•63	•64
•49	•50	•51	•52	•53	•54	•55	•56
•41	•42	•43	•44	•45	•46	•47	•48
•33	•34	•35	•36	•37	•38	•39	•40
•25	•26	•27	•28	•29	•30	•31	•32
•17	•18	•19	•20	•21	•22	•23	•24
•9	•10	•11	•12	•13	•14	•15	•16
•1	•2	•3	•4	•5	•6	•7	•8

FONTE: Adaptada de Franco (2017)

Uma técnica relevante é alternar as variáveis atualizadas seguindo a lógica de um tabuleiro de xadrez. Nesse método, atualizam-se primeiro as variáveis correspondentes a uma das cores (por exemplo, as "casas pretas") e, em seguida, as variáveis correspondentes à outra cor (as "casas brancas"). Essa abordagem dá origem ao método Gauss-Seidel *Red-Black*, amplamente utilizado para melhorar a convergência em soluções iterativas, pois viabiliza o processamento em paralelo. (TROTTEBERG *et al.*, 2000; BRIGGS *et al.*, 2000) (FIGURA 4).

FIGURA 4 – ATUALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS COM ORDENAÇÃO *RED-BLACK*.

• ₆₁	• ₂₉	• ₆₂	• ₃₀	• ₆₃	• ₃₁	• ₆₄	• ₃₂
• ₂₅	• ₅₇	• ₂₆	• ₅₈	• ₂₇	• ₅₉	• ₂₈	• ₆₀
• ₅₃	• ₂₁	• ₅₄	• ₂₂	• ₅₅	• ₂₃	• ₅₆	• ₂₄
• ₁₇	• ₄₉	• ₁₈	• ₅₀	• ₁₉	• ₅₁	• ₂₀	• ₅₂
• ₄₅	• ₁₃	• ₄₆	• ₁₄	• ₄₇	• ₁₅	• ₄₈	• ₁₆
• ₉	• ₄₁	• ₁₀	• ₄₂	• ₁₁	• ₄₃	• ₁₂	• ₄₄
• ₃₇	• ₅	• ₃₈	• ₆	• ₃₉	• ₇	• ₄₀	• ₈
• ₁	• ₃₃	• ₂	• ₃₄	• ₃	• ₃₅	• ₄	• ₃₆

FONTE: Adaptada de Nocedal e Wright (2006)

3.2.3 Noções de análise de Fourier

A escolha adequada da solução inicial em um processo iterativo pode acelerar significativamente a convergência. No caso do método *Multigrid*, a proposta envolve uma solução inicial baseada nos modos de Fourier, em que a aproximação inicial é construída a partir de componentes de uma senoide.

Definição 3.2.3. *Os modos de Fourier são vetores descritos como autofunções, que correspondem aos autovetores da matriz de iteração do método iterativo.*

Para o caso unidimensional tem-se a seguinte forma:

$$w_{k,j} = \text{sen} \left(\frac{jk\pi}{\mathcal{N}} \right), \quad (3.16)$$

onde $0 \leq k \leq \mathcal{N} - 1$ é o número de ondas ou frequência, $0 \leq j \leq \mathcal{N}$ denota a componente do vetor w (BRIGGS *et al.*, 2000).

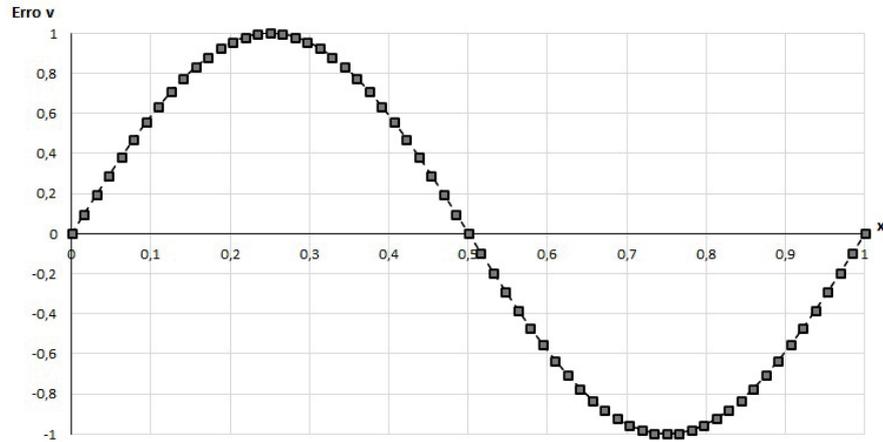
Se $1 \leq k < \mathcal{N}/2$ então k é denominado modo de Fourier de baixa frequência ou modo suave. Se $\mathcal{N}/2 \leq k < \mathcal{N} - 1$ então k é denominado modo de Fourier de alta frequência ou modo oscilatório.

Por exemplo, num domínio com $L = 1$, discretizado em uma malha com $\mathcal{N} = 64$ volumes e $k = 2$, tem-se o modo suave:

$$w_{2,j} = \text{sen} \left(\frac{2j\pi}{64} \right). \quad (3.17)$$

Na FIGURA 5 observa-se o modo $w_{2,j}$.

FIGURA 5 – MODO SUAVE $k = 2$ PARA UMA MALHA COM $\mathcal{N} = 64$ VOLUMES.



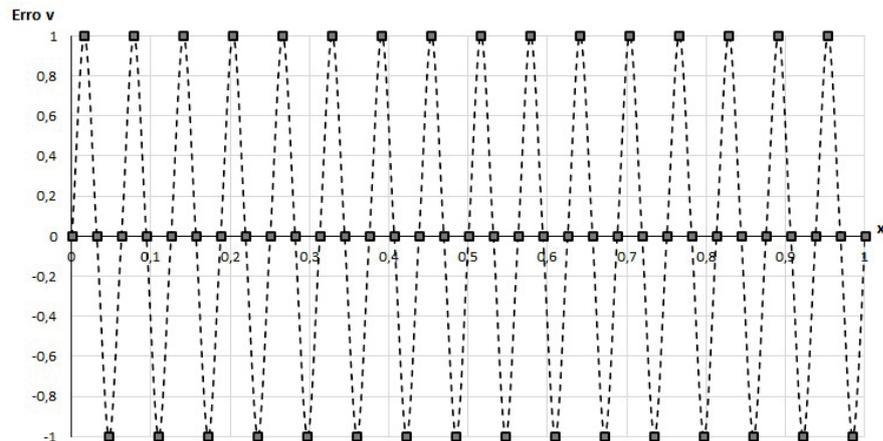
FONTE: A autora (2024)

Se $k = 32$, tem-se o modo oscilatório:

$$w_{32,j} = \text{sen} \left(\frac{32j\pi}{64} \right). \quad (3.18)$$

Note que FIGURA 6 representa um modo oscilatório.

FIGURA 6 – MODO OSCILATÓRIO $k = 32$ PARA UMA MALHA COM $\mathcal{N} = 64$ VOLUMES.

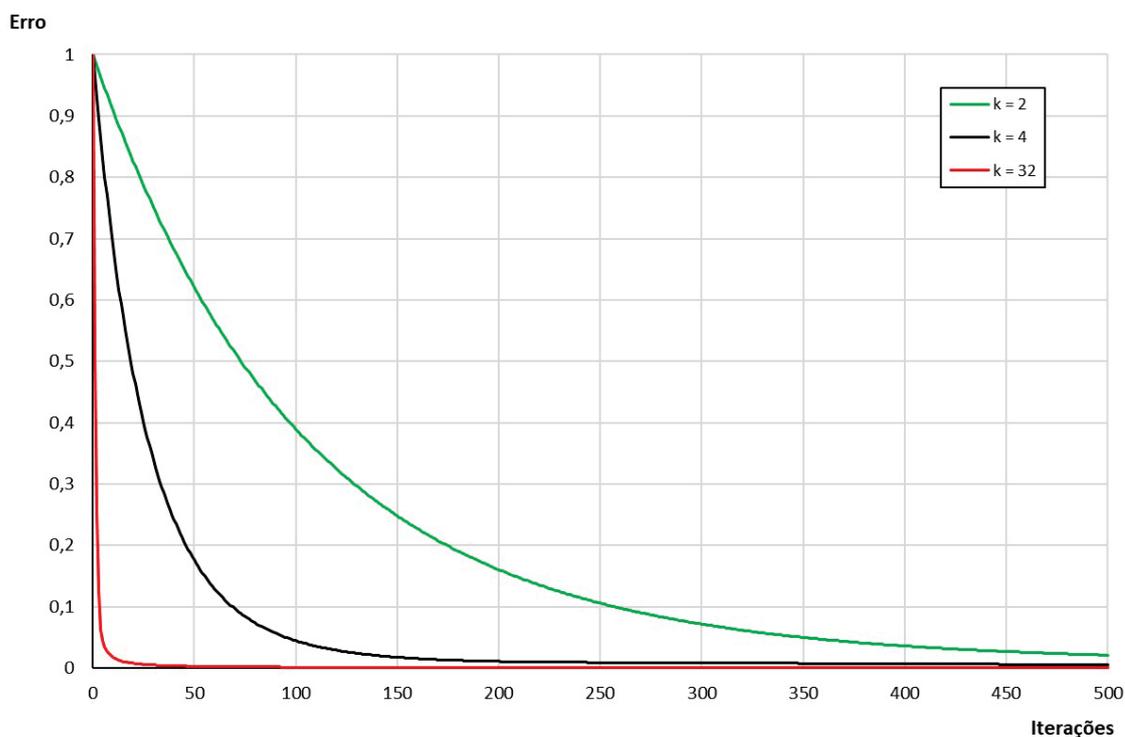


FONTE: A autora (2024)

O método iterativo de Gauss-Seidel tem a característica de suavizar rapidamente os modos oscilatórios, porém, os modos suaves continuam presentes sem grandes melhorias. Essa propriedade pode ser observada na FIGURA 7, que apresenta o gráfico da norma infinito do erro *versus* o número de iterações, para a equação de

Poisson 1D, num domínio com $L = 1$, discretizado em uma malha com $\mathcal{N} = 64$ volumes, sendo propostas três estimativas iniciais com base nos modos de Fourier $k = 2$, $k = 4$ e $k = 32$ (BRIGGS *et al.*, 2000).

FIGURA 7 – NORMA INFINITO DO ERRO *VERSUS* NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA ESTIMATIVAS INICIAIS COM MODOS $k = 2$, $k = 4$ E $k = 32$, USANDO GAUSS-SEIDEL LEXICOGRÁFICO PARA A EQUAÇÃO DE POISSON.

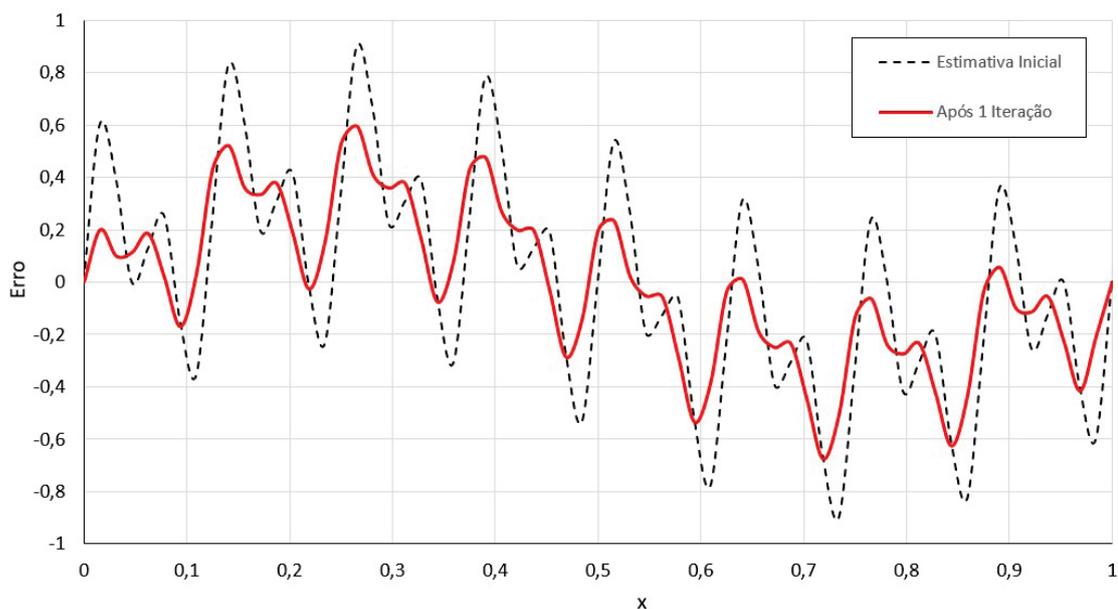


FONTE: A autora (2024)

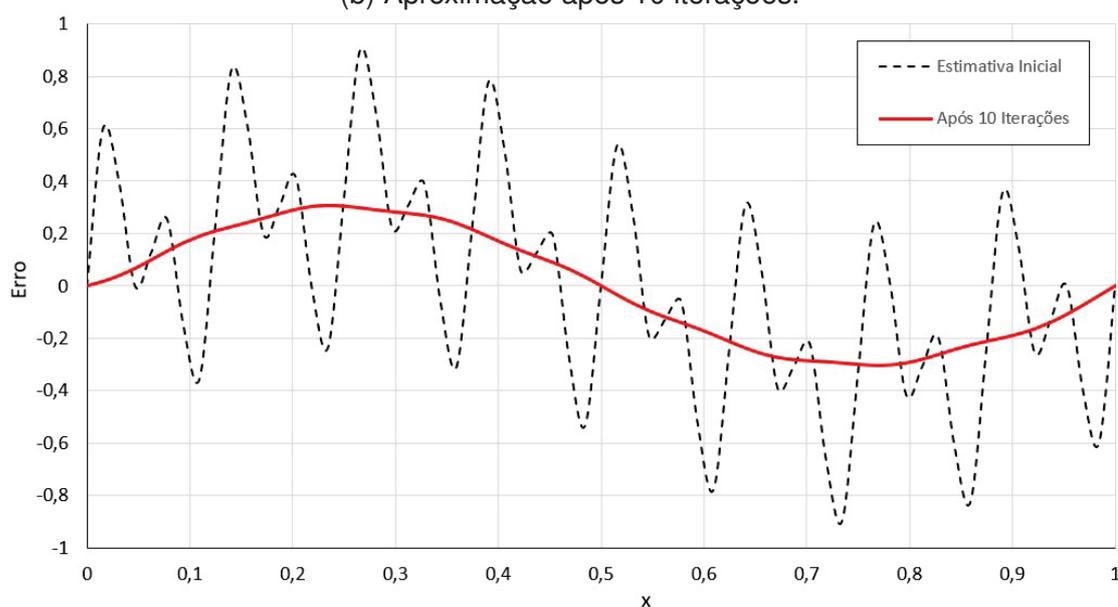
Analisando-se o comportamento qualitativo do processo iterativo, nota-se que o erro diminui claramente a cada iteração, e a taxa de redução é maior quando a frequência é mais oscilatória.

Para mostrar a seletividade da suavização do método de Gauss-Seidel com relação aos modos suaves e oscilatórios, na FIGURA 8, a estimativa inicial é dada por $(w_{2,j} + w_{16,j} + w_{32,j})/3$ (representada pela linha tracejada), após 1 iteração (dado em (a)) e após 10 iterações (dado em (b)). Nota-se que os modos oscilatórios obtiveram uma queda de erro significativa, enquanto que os modos suaves foram apenas atenuados.

FIGURA 8 – MODOS OSCILATÓRIOS E SUAVES APÓS: (a) 1 E (b) 10 ITERAÇÕES.
(a) Aproximação após 1 iteração.



(b) Aproximação após 10 iterações.



FONTE: A autora (2024)

Os métodos iterativos, como Gauss-Seidel e Jacobi ponderado, são chamados de métodos de relaxação ou métodos de suavização quando são usados para fins de suavização de erros (TROTTEBERG *et al.*, 2000). Entretanto, entre os métodos iterativos, aqueles que possuem boas propriedades de suavização dos modos oscilatórios, são considerados bons suavizadores e, no contexto do método *Multigrid*, são chamados de *smoothers*.

Apesar de Gauss-Seidel e Jacobi ponderado serem bons métodos de relaxação (*solvers*), somente o método de Gauss-Seidel possui a propriedade de suavização (*smoother*) (TROTTEMBERG *et al.*, 2000).

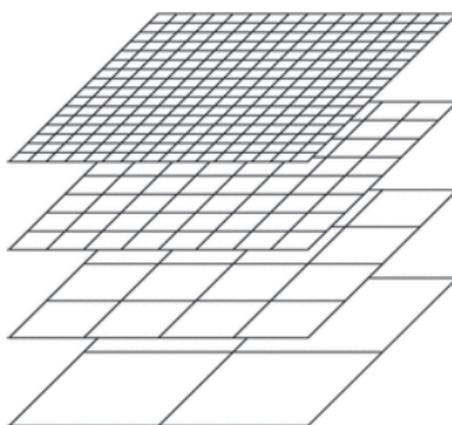
3.3 MULTIGRID

O método *Multigrid* resolve sistemas de equações (lineares e não lineares) por meio da utilização de malhas com diferentes graus de refinamento, o que acelera a convergência do método iterativo de suavização ao abranger todo o espectro de Fourier dos erros, desde os mais suaves até os mais oscilatórios. Dessa forma, ocorre uma redução tanto no número de iterações necessárias quanto no tempo de resolução.

A razão de engrossamento da malha é definida como $re = H/h$, onde H é tamanho do volume da malha grossa e h é o tamanho do volume da malha fina, podendo essa razão variar em direções diferentes, conforme as anisotropias analisadas no estudo.

Neste trabalho, usa-se a razão de engrossamento padrão, $re = 2$ (BRIGGS *et al.*, 2000; TROTTEMBERG *et al.*, 2000). Na FIGURA 9 observa-se múltiplas malhas em 2D com razão de engrossamento $re = 2$.

FIGURA 9 – MÚLTIPLAS MALHAS COM RAZÃO DE ENGROSSAMENTO 2 NO ESPAÇO 2D.



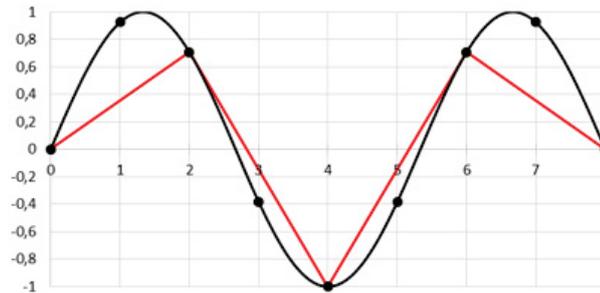
FONTE: Adaptado de Goncalves (2013)

A justificativa da troca de malhas está relacionada a mudança na oscilação do erro. Assim, o erro que é suave na malha Ω^h passa a ser mais oscilatório na malha Ω^{2h} , e aproveita-se esse fato para obter maior queda no erro e otimizar a convergência (TROTTEMBERG *et al.*, 2000).

Observa-se na FIGURA 10 que os pontos conectados pela função senoidal (em preto) apresentam uma frequência de $k = 3$ ondas para uma malha com $\mathcal{N} = 9$ pontos de discretização, caracterizando modos suaves. Quando essas informações são transferidas para uma malha com $\mathcal{N} = 5$ pontos, obtém-se a função poligonal (em

vermelho). Embora a frequência permaneça a mesma, devido ao menor número de pontos na malha, esses são considerados modos oscilatórios e essa é a vantagem da troca de malhas (TROTTEBERG *et al.*, 2000).

FIGURA 10 – MODOS SUAVES (CONSIDERANDO 9 PONTOS) E OSCILATÓRIOS (CONSIDERANDO 5 PONTOS).



FONTE: A autora (2024)

3.3.1 Metodologia do *Multigrid*

Considerando um sistema de equações lineares descrito da forma $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, Eq. (3.7), no qual \mathbf{u} é a solução exata e \mathbf{v} é a solução aproximada, o vetor erro representado por \mathbf{e} é definido como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad (3.19)$$

e o vetor resíduo é dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{v}. \quad (3.20)$$

Pelo fato de que o vetor erro geralmente ser inacessível, utiliza-se o resíduo, que fornece uma ferramenta adequada para precisar a aproximação \mathbf{v} . Multiplicando a Eq. (3.19) pela matriz A , e fazendo algumas manipulações, tem-se:

$$A\mathbf{e} = A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = \mathbf{f} - A\mathbf{v} = \mathbf{r}. \quad (3.21)$$

Obtendo-se a equação denominada de equação residual:

$$A\mathbf{e} = \mathbf{r}. \quad (3.22)$$

Tecnicamente, para encontrar a solução \mathbf{u} do sistema, é realizada a correção $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{e}$.

Na prática, no sistema linear $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ são aplicados processos iterativos, com o objetivo de obter aproximações tanto para a solução \mathbf{u} na equação original, como para \mathbf{e} na equação residual (chamado de refinamento iterativo).

Nesse trabalho, propõe-se utilizar uma estrutura que dispõe de uma hierarquia de malhas com diversos níveis de refinamento. Para fazer a transferência dos dados

entre as malhas são utilizados os operadores de restrição e prolongação. Neste caso utilizando o Esquema de Correção (CS), onde transfere-se o resíduo entre as malhas (esquema indicado para problemas lineares) (TROTTEBERG *et al.*, 2000; WESSE-LING, 1992). A literatura apresenta o Esquema de Aproximação Completa (FAS), onde transfere-se o resíduo e a solução (esquema indicado para problemas não lineares), que não será utilizado nesse trabalho.

3.3.2 Operadores de restrição

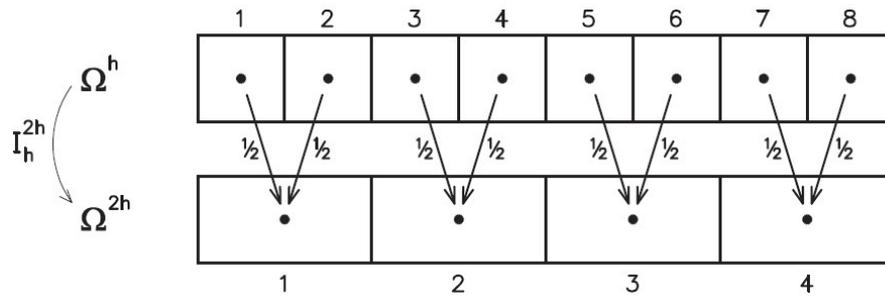
Os operadores de restrição são responsáveis por transferir informações de uma malha fina Ω^h (com espaçamento h) para a malha imediatamente mais grossa Ω^{2h} (com espaçamento $2h$). Esse operador é denotado por I_h^{2h} .

Existem vários operadores que podem ser utilizados no método dos volumes finitos, como a ponderação completa e meia ponderação (BRIGGS *et al.*, 2000).

O operador de restrição por ponderação utiliza as informações dos volumes de controle na malha fina que correspondem ao volume de controle na malha imediatamente mais grossa. Uma das formas para se fazer isso é utilizando-se o processo da média aritmética (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), mas é possível também utilizando-se a soma. Neste trabalho, utiliza-se a média aritmética.

No caso 1D, são usadas as informações de dois volumes de controle consecutivos, conforme a FIGURA 11.

FIGURA 11 – OPERADOR DE RESTRIÇÃO COM PONDERAÇÃO EM 1D.



FONTE: A autora (2024)

Assim, considerando ϕ uma variável genérica para $i = 1, 2, \dots, N$, número de volumes na malha fina, pode-se escrever:

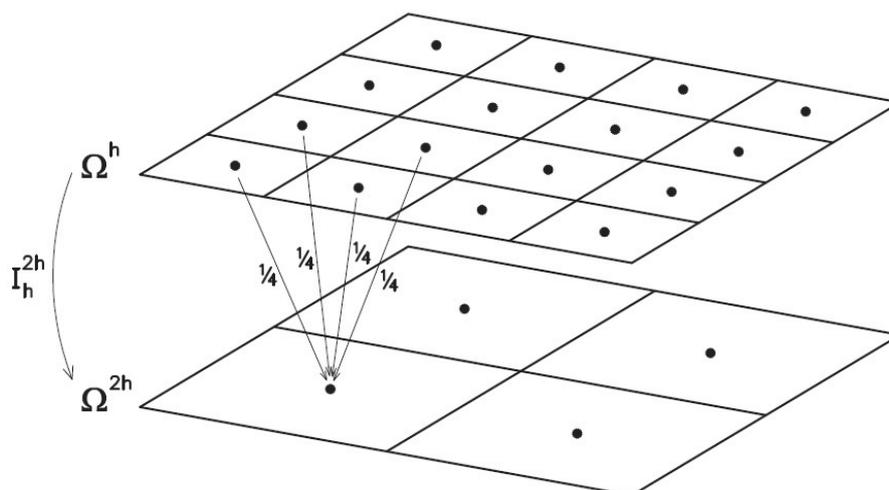
$$\phi_i^{2h} = \frac{1}{2} (\phi_{2i-1}^h + \phi_{2i}^h). \quad (3.23)$$

No caso 2D, são usadas as informações de quatro volumes de controle consecutivos, conforme pode ser observado na FIGURA 12.

Nesse caso, tem-se:

$$\phi_{(i,j)}^{2h} = \frac{1}{4} (\phi_{(2i-1,2j-1)}^h + \phi_{(2i,2j-1)}^h + \phi_{(2i-1,2j)}^h + \phi_{(2i,2j)}^h). \quad (3.24)$$

FIGURA 12 – OPERADOR DE RESTRIÇÃO COM PONDERAÇÃO EM 2D.



FONTE: A autora (2024)

Quando é realizada a transferência dos dados, obtém-se um novo sistema linear a ser suavizado ou resolvido (caso esteja na malha mais grossa possível ou desejada). No caso do esquema CS, na restrição é transferido apenas o resíduo para a malha mais grossa.

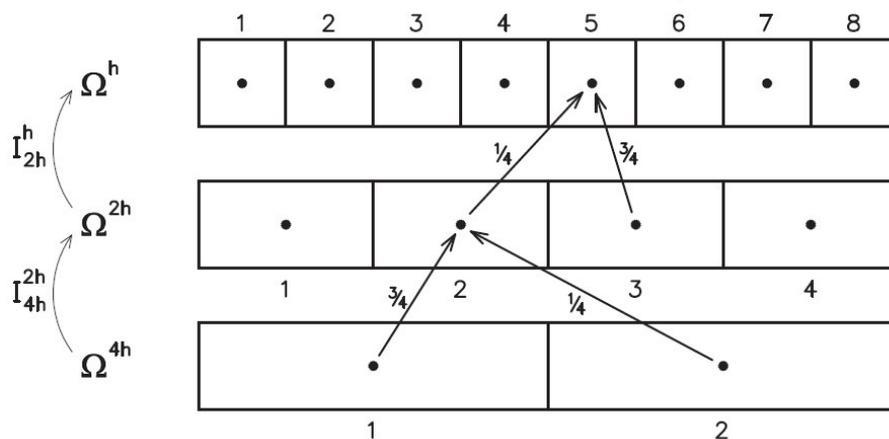
3.3.3 Operador de prolongação

Estes operadores são responsáveis por transferir informações de uma malha grossa Ω^{2h} para a malha imediatamente mais fina Ω^h , e são denotados por I_{2h}^h .

Existem vários operadores que podem ser utilizados no método dos volumes finitos, como as interpolações linear, quadrática, bilinear, trilinear e cúbica (BRIGGS *et al.*, 2000).

A FIGURA 13 apresenta uma proposta de interpolação para o caso 1D. Nesse caso, são usadas as informações de dois volumes de controle consecutivos.

FIGURA 13 – OPERADOR DE PROLONGAÇÃO EM 1D.



FONTE: A autora (2024)

Para a interpolação apresentada, utilizam-se pesos inversamente proporcionais com a proximidade dos volumes de controle (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Assim, considerando ϕ uma variável genérica para $i = 1, 2, \dots, N$, número de volumes na malha grossa, tem-se para o contorno esquerdo a relação que depende de informações da fronteira:

$$\phi_1^h = \phi_1^h + \frac{1}{4} (3\phi_1^{2h} + \phi_0^{2h}). \quad (3.25)$$

Para os elementos internos, tem-se:

$$\phi_{2i}^h = \phi_{2i}^h + \frac{1}{4} (3\phi_i^{2h} + \phi_{i+1}^{2h}), \quad (3.26)$$

$$\phi_{2i+1}^h = \phi_{2i+1}^h + \frac{1}{4} (\phi_i^{2h} + 3\phi_{i+1}^{2h}). \quad (3.27)$$

Para o contorno direito, é necessário ter informações da fronteira, onde se utiliza:

$$\phi_{2N}^h = \phi_{2N}^h + \frac{1}{4} (3\phi_N^{2h} + \phi_{N+1}^{2h}). \quad (3.28)$$

A interpolação Eqs. (3.25)-(3.28), não foi utilizada nesse trabalho, pois não apresentou a convergência esperada.

Outra proposta para os pesos foi aplicada, considerando ϕ uma variável genérica para $i = 1, 2, \dots, N$, número de volumes na malha grossa, resultando em uma relação para o contorno esquerdo que depende de informações da fronteira:

$$\phi_1^h = \phi_1^h + \phi_1^{2h}. \quad (3.29)$$

Para os elementos internos, tem-se:

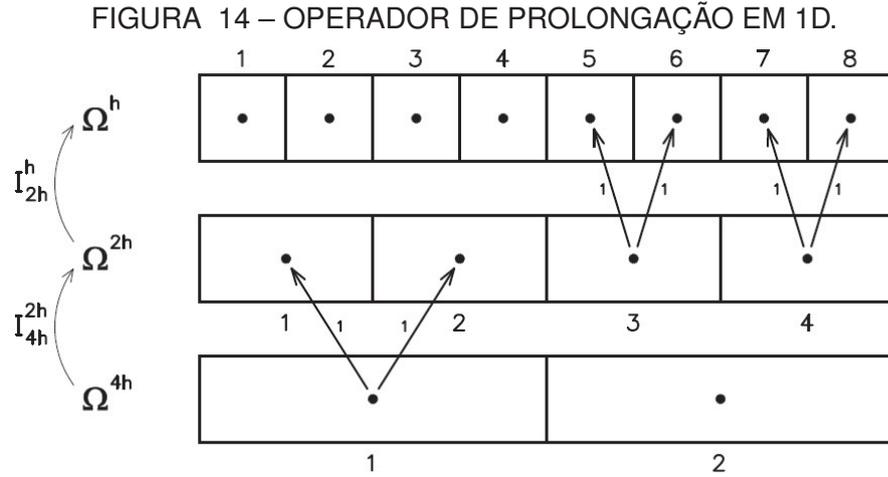
$$\phi_{2i}^h = \phi_{2i}^h + \phi_i^{2h}, \quad (3.30)$$

$$\phi_{2i+1}^h = \phi_{2i+1}^h + \phi_i^{2h}. \quad (3.31)$$

Para o contorno direito, é necessário ter informações da fronteira, utiliza-se:

$$\phi_{2N}^h = \phi_{2N}^h + \phi_N^{2h}. \quad (3.32)$$

A interpolação Eqs. (3.29)-(3.32), chamada de interpolação constante por partes, que é utilizada neste trabalho, é apresentada na FIGURA 14, a seguir:



FONTE: A autora (2024)

3.3.4 Esquema de correção e ciclo do *Multigrid*

Conforme descrito na metodologia do método *Multigrid*, em problemas lineares é indicado o esquema de correção CS (BRIGGS *et al.*, 2000), onde apenas o resíduo é transferido para as malhas mais grossas.

O esquema de correção é representado no ALGORITMO 1, a seguir, para duas malhas (*Two-Grid*, TG):

Algoritmo 1: Esquema CS *Two-grid*

$$\mathbf{v}^h \leftarrow TG(\mathbf{v}^h, \mathbf{f}^h)$$

- 1 Suavizar ν_1 vezes $A^h \mathbf{v}^h = \mathbf{f}^h$ na malha fina Ω^h com estimativa inicial \mathbf{v}_0^h .
 - 2 Calcular o resíduo $\mathbf{r}^h = \mathbf{f}^h - A^h \mathbf{v}^h$ na malha fina e restringir para a malha grossa Ω^{2h} usando $\mathbf{r}^{2h} = I_h^{2h} \mathbf{r}^h$
 - 3 Resolver o sistema $A^{2h} \mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h}$ na malha grossa.
 - 4 Interpolar o erro da malha grossa na malha fina usando $\mathbf{e}^h = I_{2h}^h \mathbf{e}^{2h}$ e corrigir a aproximação da malha fina com $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + \mathbf{e}^h$.
 - 5 Suavizar ν_2 vezes $A^h \mathbf{v}^h = \mathbf{f}^h$ na malha fina para obter uma aproximação para \mathbf{v}^h
-

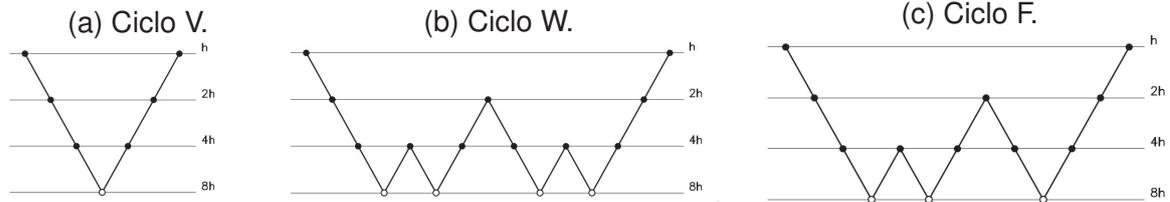
No algoritmo 1, os índices sobrescritos h e $2h$ indicam a malha que o vetor e a matriz estão definidos. O operador A^{2h} pode ser obtido por discretização do problema na malha grossa, Ω^{2h} . O número de suavizações na restrição (pré-suavização) é denotado por ν_1 e o número de suavizações na prolongação (pós-suavização) é denotado por ν_2 . Esses números dependem do suavizador e não precisam ser iguais. Nos problemas sem dificuldade de convergência são empregados de 1 a 3 suavizações (BRIGGS *et al.*, 2000).

O procedimento anterior é facilmente adaptado para casos onde se utiliza mais

níveis de malha, neste caso, chamado *Multigrid*. O número de vezes e ordem que as malhas são visitadas, define o chamado ciclo da suavização.

Briggs *et al.* (2000) apresentam os ciclos V, W e F (FIGURA 15), nesse caso, com quatro níveis de malha. O símbolo \bullet representa a suavização e o símbolo \circ indica a solução exata no nível da malha, a barra inclinada para esquerda (\backslash) representa o operador de restrição e a barra inclinada para a direita ($/$) representa o operador de prolongação.

FIGURA 15 – ESTRUTURA DOS CICLOS V, W E F COM QUATRO NÍVEIS DE MALHA.



FONTE: A autora (2024)

Os ciclos apresentados nas FIGURA 15 pertencem a uma família de ciclos conhecida como μ -Ciclo, onde para $\mu = 1$ tem-se o ciclo V, para $\mu = 2$, tem-se o ciclo W, e o ciclo F é uma combinação destes.

O esquema CS para o Ciclo W é representado no ALGORITMO 2, na forma recursiva.

Algoritmo 2: Esquema CS *Multigrid* para o W-Ciclo

$$\mathbf{v}^h \leftarrow MG - W - Ciclo(l)$$

- 1 **se** $l = L_{max}$ **é o nível de malha mais grossa então**
 - 2 Resolver o sistema $A^{(l)} \mathbf{u}^{(l)} = \mathbf{f}^{(l)}$ na malha mais grossa $\Omega^{2^{l-1}h}$.
 - 3 **senão**
 - 4 Suavizar ν_1 vezes $A^{(l)} \mathbf{u}^{(l)} = \mathbf{f}^{(l)}$ na malha mais fina $\Omega^{2^{l-1}h}$.
 - 5 Calcular e restringir o resíduo $\mathbf{f}^{l+1} = I_{2^{l-1}h}^{2^l h} (\mathbf{f}^{(l)} - A^{(l)} \mathbf{v}^{(l)})$.
 - 6 **para** $ciclo = 1$ **até** 2 **faça**
 - 7 Resolver na próxima malha: $MG - W - Ciclo(l+1)$.
 - 8 **fim**
 - 9 Interpolar e corrigir a aproximação da malha fina com

$$\mathbf{v}^{(l)} \leftarrow \mathbf{v}^{(l)} + I_{2^l h}^{2^{l-1} h} \mathbf{v}^{(l+1)}.$$
 - 10 Suavizar ν_2 vezes $A^{(l)} \mathbf{u}^{(l)} = \mathbf{f}^{(l)}$ na malha mais fina $\Omega^{2^{l-1}h}$.
 - 11 **fim**
-

Neste capítulo, foram apresentados os aspectos fundamentais do problema da poroelasticidade. Desenvolveram-se os conceitos de métodos iterativos básicos, denominados suavizadores.

Foram discutidas as características dos modos de Fourier que surgem nos métodos iterativos durante o processo de convergência, destacando os benefícios de realizar refinamentos e engrossamentos da malha ao longo desse processo. Em particular, os métodos de Jacobi ponderado e Gauss-Seidel atuam como suavizadores eficazes, melhorando a convergência ao eliminar rapidamente os erros de alta frequência.

Além disso, foi apresentado o método *Multigrid*, seus operadores de restrição e prolongamento, seus esquemas de correção e ciclos. O ALGORITMO 1 para duas malhas foi detalhado, seguido pelo ALGORITMO 2 para múltiplas malhas usando o ciclo W.

4 SUAVIZADORES E VARREDURAS ESPAÇO-TEMPO

O problema da poroelasticidade envolve acoplamento entre o escoamento de fluido nos poros e a deformação dos sólidos porosos. Essa interação é complexa e requer suavizadores que possam resolver simultaneamente as equações governantes para o escoamento de fluido e a mecânica dos sólidos, garantindo a consistência entre as duas soluções. A dificuldade ao solucionar numericamente a equação do deslocamento (u) para o problema da poroelasticidade, está no fato das incógnitas u e p (pressão) estarem acopladas em uma mesma equação. Esse acoplamento gera sistemas muito grandes e caracteriza um problema de ponto de sela, que interfere na convergência de métodos iterativos. Assim, o método de Gauss-Seidel não é tão eficiente para sua resolução, devido a lenta convergência, especialmente para casos onde os parâmetros físicos são realísticos.

A resolução das equações pode ser realizada de forma acoplada ou desacoplada. Se as variáveis são atualizadas simultaneamente, o método é denominado acoplado. Se as variáveis são atualizadas separadamente o método é desacoplado.

Os suavizadores podem ser classificados de acordo com o método: acoplado e desacoplado. O método Vanka é um suavizador que atualiza as incógnitas de forma acoplada, trabalha de forma iterativa sobre as variáveis de deslocamento e de pressão em cada passo. Os suavizadores *Fixed-Stress* e Uzawa trabalham de forma desacoplada, com um diferencial que o suavizador *Fixed-Stress*, primeiro trabalha com a variável pressão e depois com o deslocamento. O suavizador Uzawa primeiro suaviza as variáveis relacionadas aos deslocamentos e, em seguida, utilizando o resíduo dos deslocamentos, atualiza as variáveis associadas à pressão.

Ao discretizar o problema envolvendo variáveis espaciais e temporais, existem diferentes maneiras de conduzir a ordem dessas variáveis, conhecidas como varreduras espaço-tempo. Conforme o suavizador utilizado, as varreduras podem apresentar desempenhos distintos na resolução do problema. A varredura mais conhecida é a *Time-Stepping*. Além dela, existem outras varreduras como, por exemplo *Waveform Relaxation* e *Space-Time*.

4.1 SUAVIZADORES

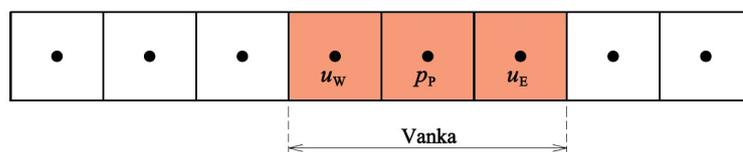
Nesta seção, descrevem-se os três *solvers* que serão tratados neste trabalho: Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa.

4.1.1 Método Vanka

Surya Pratap Vanka (1986), da Universidade de Illinois, propôs um suavizador em blocos especificamente voltado para problemas de ponto de sela. O suavizador é implementado como um algoritmo iterativo no formato Gauss-Seidel, que atualiza simultaneamente a pressão no volume de controle e todas as incógnitas de deslocamento ao redor desse volume (OOSTERLEE *et al.*, 1998).

No caso 1D, a iteração do suavizador Vanka ocorre sobre todos os volumes da malha, onde suaviza-se um sistema linear de ordem 3×3 , considerando-se três volumes consecutivos, sendo duas variáveis de deslocamento e uma de pressão (u_W, p_P e u_E), de forma acoplada (FRANCO, 2017). Conforme pode ser observado na FIGURA 16, em cada iteração, a variável pressão é atualizada uma vez, enquanto o deslocamento é atualizado duas vezes, pois a atualização das variáveis em p se sobrepõem nas variáveis de deslocamento u .

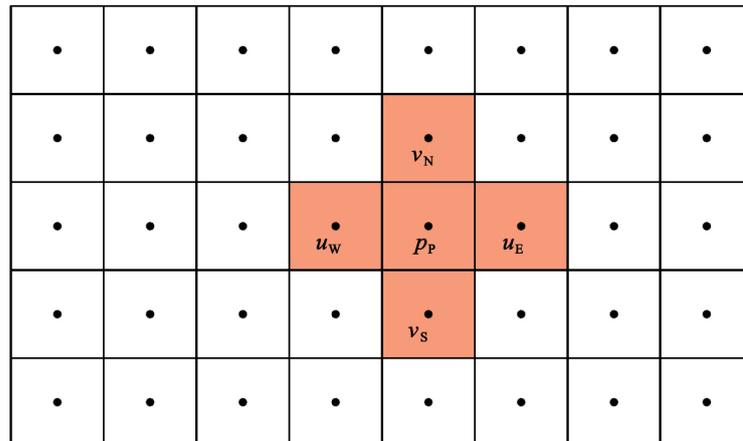
FIGURA 16 – SUAVIZADOR VANKA NO PROBLEMA 1D.



FONTE: A autora (2024)

Para resolver o problema 2D, o suavizador Vanka atualiza uma vez a variável pressão em função de 4 variáveis de deslocamento (v_S, u_W, p_P, u_E e v_N), que pode ser observado na FIGURA 17.

FIGURA 17 – SUAVIZADOR VANKA NO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE 2D.



FONTE: A autora (2024)

Para resolver o sistema de equações em cada ponto da malha com as incógnitas deslocamento e pressão, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

em que A e B são as matrizes dos coeficientes relacionados aos deslocamentos e B^t e C são as matrizes dos coeficientes relacionados à pressão. O problema se caracteriza como problema de ponto de sela em virtude dos valores da matriz diagonal C serem muito próximos de zero para valores realísticos de condutividade hidráulica. Os elementos U e P são vetores com os termos independentes das equações de deslocamento $\mathbf{u} = (u, v)$ e pressão p .

A estratégia desse suavizador é isolar variáveis, assim, podendo-se utilizar um método direto na resolução do sistema linear. A atualização das variáveis, geralmente, é realizada na ordem lexicográfica.

Franco (2017) propõe uma ordem colorida para a atualização das variáveis, tanto para o caso 1D como o 2D. Para o caso 1D pode ser atualizado em 4 cores, conforme FIGURA 18.

FIGURA 18 – ORDENAÇÃO VANKA 1D EM 4 CORES.



FONTE: A autora (2024)

Observe, FIGURA 18, que o método é paralelizável, permitindo que todas as variáveis de uma mesma cor sejam atualizadas simultaneamente, sem a necessidade

de acessar variáveis de outras cores. Após a atualização das variáveis na cor 1, o processo é repetido para as variáveis nas cores 2, 3 e 4, e então retorna à cor 1.

Para o caso 2D, a atualização pode ser realizada num esquema de 12 cores, conforme FIGURA 19, onde as cores são indicadas pelos números de 1 a 12. Isso significa que o método pode ser paralelizável. Ao atualizar as variáveis na cor 1, todas as variáveis dessa cor são atualizadas, sem a necessidade de informações das variáveis de outras cores. O processo é então repetido para as variáveis na cor 2, 3, e assim por diante até a cor 12, retornando depois à cor 1.

FIGURA 19 – ORDENAÇÃO VANKA EM 12 CORES.

10	11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	9
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
10	11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	9
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
10	11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	9
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6

FONTE: A autora (2024)

Franco (2017) propôs algumas melhorias em relação ao método de suavização de Vanka originalmente proposto por Vanka (1986), mais tarde trabalhado por Gaspar e Rodrigo (2015) e Franco *et al.* (2018a). A ordenação colorida permite a paralelização mais eficiente do algoritmo, reduzindo o tempo computacional¹. Destaca-se que Franco (2017) conseguiu reduzir de 16 para 12 cores no processo de resolução.

¹ A ordenação colorida permite o processamento paralelizável.

4.1.2 Método *Fixed-Stress*

O *Fixed-Stress* é um método sequencial que consiste em resolver inicialmente a pressão, mantendo o deslocamento fixado, em seguida, realiza-se o cálculo do deslocamento, por meio da pressão calculada anteriormente (KIM *et al.*, 2011).

Esse método pode ser interpretado como um pré-condicionador de Richardson com um operador triangular em bloco, onde utiliza-se o método Gauss-Seidel Simétrico *Red-Black* (BORREGALES *et al.*, 2019).

Pode-se reescrever a discretização dada pelo sistema de Eqs. (4.1), fazendo-se a decomposição em dois novos sistemas, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C + \frac{\alpha^2}{K_b} M_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B^t & \frac{\alpha^2}{K_b} M_p \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde a matriz M_p é um pré-condicionador triangular superior de blocos, a constante K_b representa o módulo volumétrico drenado e α é o coeficiente de Biot. Esses coeficientes estão relacionados ao módulo volumétrico da fase sólida K_s pela equação:

$$\alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s}. \quad (4.3)$$

O módulo volumétrico (*bulk modulus*) K_b representa a resistência de um determinado material à compressão volumétrica, sendo dado por:

$$K_b = -V \cdot \frac{\partial V}{\partial p}. \quad (4.4)$$

Portanto, de Eq. (3.5) e (4.4), tem-se que o módulo volumétrico é inversamente proporcional ao coeficiente de compressibilidade β .

Assim, o sistema dado pela Eq. (4.2) pode ser resolvido na forma de dois sistemas triangulares por blocos (GASPAR; RODRIGO, 2017b; BORREGALES *et al.*, 2019).

O algoritmo para resolução usando o *Fixed-Stress*, descreve um processo iterativo que atualiza os valores das variáveis da pressão em todos os volumes de controle, utilizando os valores das variáveis deslocamento u da iteração anterior. Em seguida, o vetor deslocamento é atualizado. Esse processo iterativo utiliza o método de Gauss-Seidel *Red-Black* (GASPAR; RODRIGO, 2017b).

4.1.3 Método Uzawa

O método Uzawa é um suavizador desacoplado que consiste em decompor a matriz de coeficientes obtida na discretização em duas matrizes, da maneira descrita a seguir (ARROW *et al.*, 1958; LUO *et al.*, 2016):

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_A & 0 \\ B^t & -\omega^{-1}I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_A - A & -B \\ 0 & C - \omega^{-1}I \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde ω é um termo positivo denominado de parâmetro de relaxação e M_A é um pré-condicionador para a matriz A que torna o processo menos oneroso para cada iteração.

Como *solver*, o método Uzawa utiliza o Gauss-Seidel Simétrico, que pode ser descrito como uma decomposição LU incompleta (LUO *et al.*, 2016).

O método Uzawa é desacoplado e é interpretado como o método de Richardson para resolver a equação do complemento de Schur (CAO, 2003).

O algoritmo para o método Uzawa padrão é realizado em função da atualização dos vetores \mathbf{u} e p em função dos valores nos vetores na iterada anterior \mathbf{u}^0 e p^0 . Descrito como:

$$\mathbf{u} = A^{-1}(U - B^t \mathbf{u}^0) \quad (4.6)$$

$$p = p^0 + \omega(B\mathbf{u} - P). \quad (4.7)$$

Portanto, o método Uzawa é equivalente a uma iteração de Richardson, que pode ser usada para determinar um ω ótimo em termos dos autovalores máximo e mínimo do complemento de Schur da matriz $S = BA^{-1}B^t$ (MIAO, 2017).

Luo *et al.* (2016) forneceram uma análise sistemática do parâmetro de relaxamento ω usando Análise de Fourier Local para aprimorar a eficiência e precisão na resolução de problemas poroelásticos complexos. O parâmetro de relaxação ω que é calculado na malha mais fina no ciclo *Multigrid* é dado por:

$$\omega = \frac{2h^2(\lambda + 2\mu)}{10K(\lambda + 2\mu) + 3h^2}, \quad (4.8)$$

onde λ , μ , h e K são parâmetros físicos e numéricos.

O algoritmo para resolução usando o suavizador Uzawa, descreve um processo iterativo que inicia suavizando as variáveis relacionadas aos deslocamentos \mathbf{u} em todos os volumes de controle, utilizando o vetor pressão p e vetor deslocamento \mathbf{u} da iteração anterior. Em seguida, calcula os resíduos da variável deslocamento, e atualiza o vetor pressão p , de forma ponderada. Esse processo iterativo utiliza o método de Gauss-Seidel *Red-Black*.

4.2 VARREDURAS ESPAÇO-TEMPO

O problema da poroelasticidade é um problema transiente e, portanto, requer a discretização temporal das equações diferenciais parciais (EDPs).

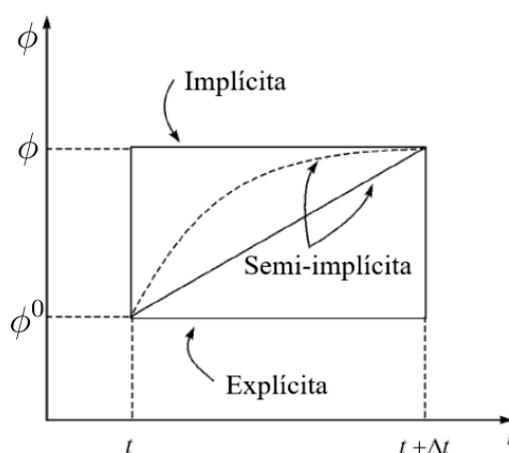
Ao aplicar o teorema da divergência de Gauss nas equações do sistema dado por (3.6) obtêm-se integrais em função do tempo, e estas são simbolizadas pelo sobrescrito θ , que determina a escolha da variável no início ou no final de um intervalo de tempo.

Maliska (2004) aplica funções de interpolação para o esquema de Euler, representada pela função:

$$\phi^\theta = \theta \phi + (1 - \theta) \phi^0, \quad (4.9)$$

onde ϕ é a variável avaliada no tempo atual, ϕ^0 é a variável avaliada no tempo anterior, $0 \leq \theta \leq 1$, e esse valor determina o tipo de formulação, podendo ser formulação explícita, implícita e totalmente implícita, como ilustrado na FIGURA 20:

FIGURA 20 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO DA VARIÁVEL TEMPORAL.



FONTE: Maliska (2004)

A diferença entre os esquemas consiste nas informações escolhidas em relação ao tempo atual e tempo anterior, e esta diferença tem influência considerável na convergência (BURDEN; FAIRES, 2016).

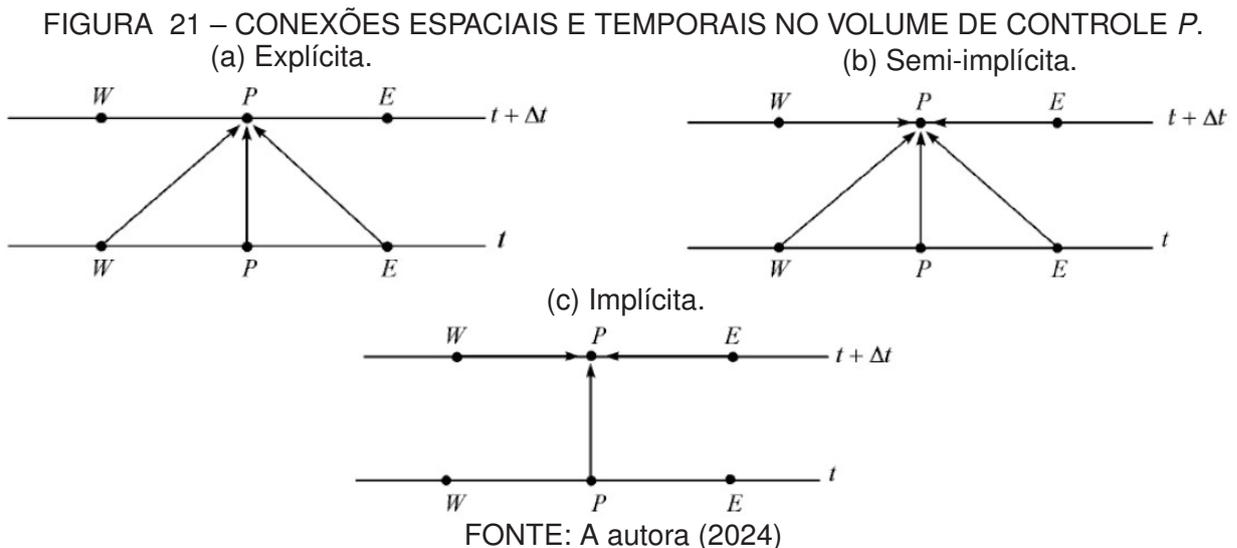
Nesses esquemas, pode-se utilizar diferentes valores para o parâmetro θ , sendo o esquema classificado de acordo com esse valor:

- na formulação explícita apenas o tempo anterior é utilizado, nesse caso $\theta = 0$, denominado *Forward Euler*;
- formulação semi-implícita é uma combinação de tempos anteriores e atuais; o mais conhecido é o parâmetro $\theta = 1/2$ que é denominado Crank-Nicolson.

- formulação implícita apenas o tempo atual é utilizado, nesse caso $\theta = 1$, denominado *Backward Euler*;

Observa-se que para θ diferente de zero as equações ficam acopladas (MALISKA, 2004).

A FIGURA 21 mostra as conexões existentes entre o ponto P e seus vizinhos, no instante de tempo de cálculo ($t + \Delta t$) e no instante de tempo anterior (t) (BURDEN; FAIRES, 2016).



Todas as formulações produzem boas soluções, se o passo de tempo utilizado for pequeno (FERZINGER *et al.*, 2020).

A forma que a varredura espaço-tempo é realizada pode variar e, conseqüentemente, influenciar na convergência da solução. Nesse trabalho, utiliza-se a formulação de Euler totalmente implícito (*Backward Euler*, BE) para a discretização temporal em três formas de varredura espaço-tempo: *Time-Stepping*, *Waveform Relaxation* e *Space-Time*.

A ordem em que os métodos de discretização e solução são aplicados, geram uma variedade de métodos de solução para resolver problemas que são dependentes do tempo (LENT, 2006).

4.2.1 *Time-Stepping*

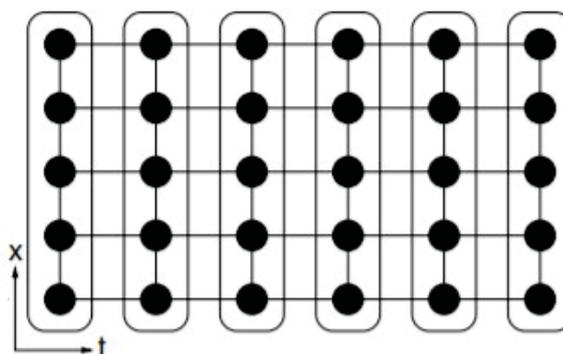
Uma maneira de realizar a varredura espaço-tempo é utilizar o método *Time-Stepping* (VANDEWALLE, 1993), que consiste em resolver um sistema discretizado no espaço em cada passo de tempo de forma consecutiva até o passo de tempo final.

Segundo Franco (2017), a principal característica dessa varredura é que a cada passo de tempo é utilizada a solução do passo de tempo anterior como estimativa

inicial para resolver o sistema de equações no tempo atual. Neste método as variáveis espaciais e temporais são discretizadas de forma independente, obtendo-se uma sequência de sistemas algébricos que são resolvidos de forma estacionária.

No *Time-Stepping* todos os valores para o domínio espacial são atualizados simultaneamente, para um passo de tempo. Em seguida, esse processo é realizado para o próximo passo de tempo. E esse processo se repete até chegar no passo de tempo final t_f , como pode ser observado na FIGURA 22.

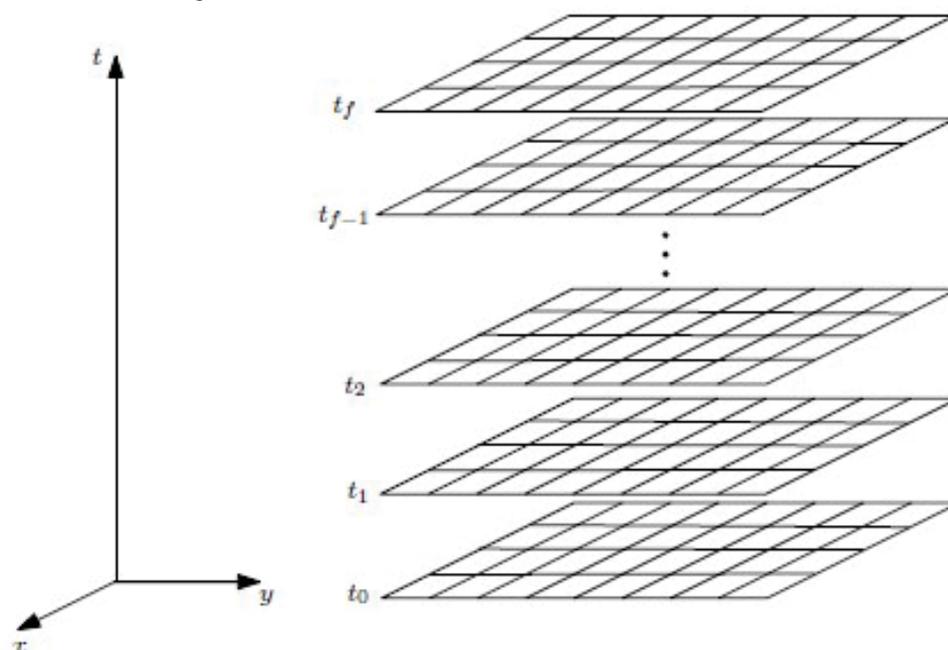
FIGURA 22 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM A VARREDURA *TIME-STEPPING* 1D



FONTE: Lent (2006)

A FIGURA 23 apresenta a atualização das incógnitas com varredura *Time-Stepping* para duas variáveis espaciais (x,y) e uma variável temporal (t).

FIGURA 23 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM A VARREDURA *TIME-STEPPING* 2D.



FONTE: Malacarne (2023)

No *Multigrid*, uma etapa de suavização consiste em um *loop* sobre todos os pontos da grade espacial, atualizando todas as incógnitas para o passo de tempo considerado, simultaneamente (LENT, 2006).

A desvantagem da varredura *Time Stepping* é que esse processo não permite a paralelização temporal.

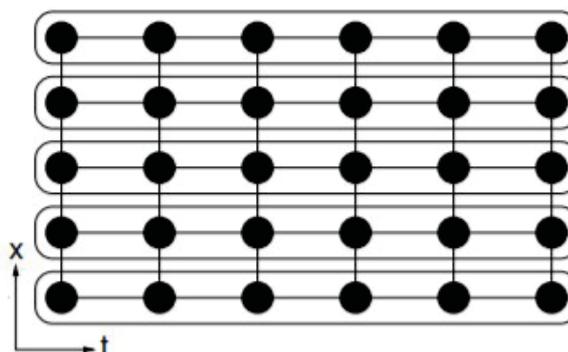
4.2.2 *Waveform Relaxation*

Outra maneira de se fazer a varredura espaço-tempo é usar o método *Waveform Relaxation* (VANDEWALLE, 1993). A ideia dessa varredura consiste em atualizar todos os valores do domínio temporal, para cada volume de controle espacial, em seguida, repetir o processo para o volume de controle da sequência, esse processo é repetido até abranger todo o domínio espacial.

O algoritmo de *Waveform Relaxation* foi criado como um método iterativo de relaxação baseado na resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias em um intervalo finito de tempo. Nessa abordagem, o sistema é dividido em subsistemas que são resolvidos independentemente, onde cada um deles utiliza a iteração anterior como estimativa do comportamento das variáveis nos outros subsistemas. As informações são transferidas entre os subsistemas e estes são resolvidos repetidamente com a informação melhorada sobre os outros subsistemas, até que a convergência seja alcançada (VANDEWALLE, 1993).

Para apenas uma variável espacial, é feita a discretização das EDPs apenas espacialmente, obtendo-se uma semi discretização do problema no tempo (FRANCO, 2017) e transformando-as em um grande sistema de EDOs, que dependem de funções no tempo para cada posição espacial. Conhecendo a posição, resolvem-se as EDOs em função do tempo. A FIGURA 24 apresenta a atualização das incógnitas com essa varredura para uma variável espacial e uma variável temporal. Esse procedimento pode ser realizado utilizando um método iterativo por linhas.

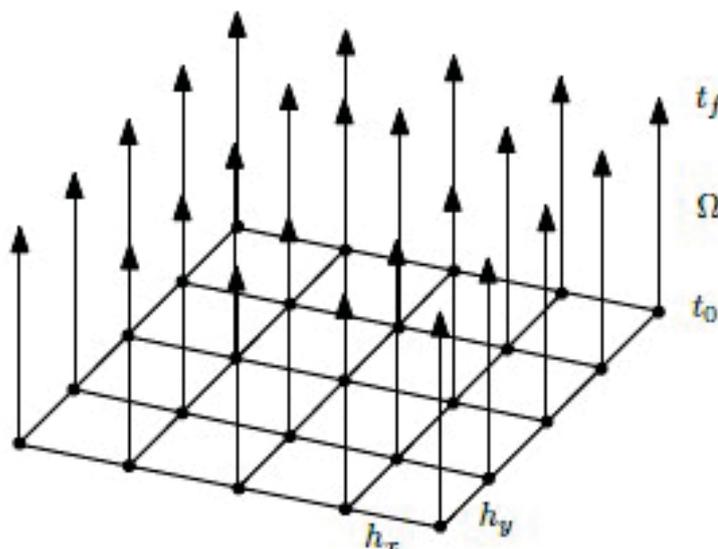
FIGURA 24 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM VARREDURA *WAVEFORM RELAXATION* 1D.



FONTE: Lent (2006)

A FIGURA 25 apresenta a atualização das incógnitas com apenas uma variável, porém, com duas dimensões espaciais e uma dimensão temporal

FIGURA 25 – ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM VARREDURA *WAVEFORM RELAXATION 2D*.



FONTE: Malacarne (2023)

4.2.3 *Space-Time*

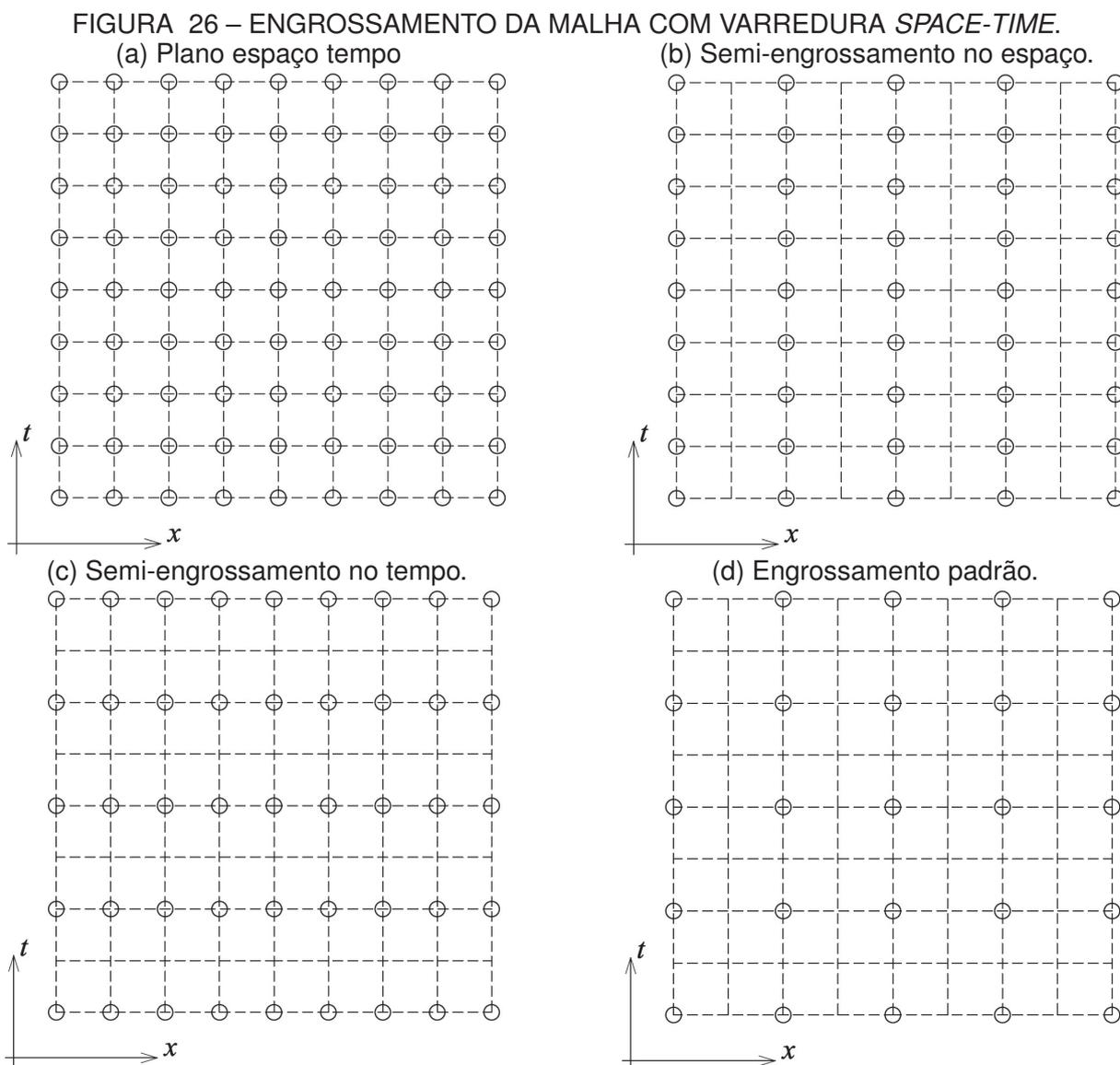
Outra maneira de se fazer a varredura espaço-tempo é o método *Space-Time*, proposto por Horton e Vandewalle (1995).

Esse método tem uma característica específica para o método *Multigrid*, pois adota uma estratégia de semi-engrossamento no espaço e no tempo, que depende de um fator de anisotropia. Esse fator é uma relação entre o passo de tempo e de espaço em cada nível da malha (HORTON; VANDEWALLE, 1995).

Os métodos *Space-Time* apresentam vantagens quando é necessário fazer refinamento local no domínio espaço-tempo. Esse método se caracteriza por usar um suavizador por pontos, como o Gauss-Seidel com ordenação *Red-Black*, e a cada iteração todos os pontos no espaço e no tempo têm as suas informações atualizadas. A proposta é fazer a discretização no espaço e no tempo simultaneamente (NEUMULLER, 2013).

Nesse método, é adotada uma estratégia de engrossamento, juntamente com o prolongamento apropriado e operadores de restrição, que é baseado no grau de anisotropia da malha. Este método permite o uso de algoritmos altamente paralelizáveis, sendo possível resolver de forma paralela, tanto no tempo quanto no espaço (HORTON; VANDEWALLE, 1995).

O método emprega uma hierarquia de malhas e um processo de suavização adaptativo, que seleciona o suavizador adequado com base no fator de anisotropia. A FIGURA 26 apresenta as possibilidades de varredura do *Space-Time*.



FONTE: A autora (2024)

A justificativa do engrossamento apresentado na FIGURA 26 está relacionada ao problema apresentar anisotropia na relação espaço e tempo, o fator de anisotropia é dado por $\lambda = \frac{dx}{(dt)^2}$. Horton e Vandewalle (1995) utilizam engrossamento apenas na direção de x na suavização do *Multigrid*, ilustrado na FIGURA 26(b). Franco *et al.* (2018a) propuseram um método *Multigrid* baseado em uma abordagem espaço-tempo para resolver problemas parabólicos, utilizando engrossamento padrão tanto nas direções espaciais quanto na temporal, ilustrado na FIGURA 26(d). Para assegurar a convergência, é utilizado um *solver* de linhas ou relaxação por blocos na direção de maior anisotropia.

Neste capítulo, foram apresentados os suavizadores: *Vanka*, *Fixed-Stress* e *Uzawa*, métodos conhecidos por apresentarem bons resultados em suas aplicações. Cada método tem suas características, vantagens e desvantagens no processo de resolução de problemas complexos como o problema da poroelasticidade.

Em seguida, foram discutidas as técnicas de varredura espaço-tempo: *Time-Stepping*, *Waveform Relaxation* e *Space-Time*, destacando as características de cada uma, sendo que a varredura *Time-Stepping* tem sido amplamente utilizada em relação às demais varreduras, devido a facilidade de implementação.

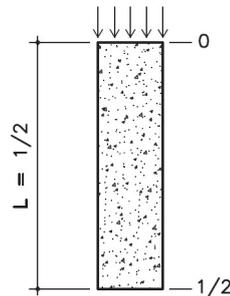
5 MODELOS MATEMÁTICOS

O problema da poroelasticidade pode ser formulado como um sistema acoplado de equações diferenciais parciais dependentes do tempo. Existem formulações de dois, três ou quatro campos do problema de Biot. Aqui, considera-se a formulação de dois campos que inclui a pressão do fluido e os deslocamentos da matriz sólida como incógnitas. Em problemas mais complexos, pode-se incluir: erosão, sedimentação, entre outros efeitos físicos.

Para essas equações considera-se o problema clássico da consolidação de Biot para um meio poroso saturado, homogêneo, isotrópico e fluido incompressível que seguem os modelos descrito por Gaspar *et al.* (2003), Gaspar *et al.* (2007) e Rodrigo (2010).

Na FIGURA 27 é apresentado um modelo desse meio poroso para o caso 1D com domínio $(0, \frac{1}{2})$.

FIGURA 27 – MODELO DO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE UNIDIMENSIONAL.



FONTE: Franco (2017)

Nota-se que existe uma força aplicada nesse modelo, o que provoca o deslocamento do fluido. No caso 1D, analisa-se somente a variável espacial x e a variável temporal t , resultando em um sistema de equações diferenciais parciais com duas variáveis independentes.

Para o caso 2D, analisam-se variáveis espaciais x e y e a variável temporal t , resultando em um sistema de equações diferenciais parciais com três variáveis independentes.

Parâmetros físicos do problema da poroelasticidade

A condutividade hidráulica K guarda informações das propriedades físicas relacionadas à porosidade e à permeabilidade do meio e é uma constante que expressa a facilidade com que o fluido se movimenta no interior da matriz sólida do meio poroso, sendo de extrema importância ao manejo do solo e da água, por exemplo. Alguns valores realísticos de K , podem ser avaliados na TABELA 1.

TABELA 1 – VALORES DA PERMEABILIDADE E CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA

Tipo de rocha	Permeabilidade (m ²)	Condutividade hidráulica (m/s)
Areia à arenito	10 ⁻¹²	10 ⁻⁵
Arenito à calcário	10 ⁻¹⁵	10 ⁻⁸
Granito à xisto	10 ⁻¹⁸	10 ⁻¹¹

FONTE: Adaptado de Wang (2000)

Segundo Ranjan e Rao (2011), outro parâmetro físico de suma importância é o módulo de elasticidade de Young E , cujo valor depende do valor histórico de tensão, densidade e da existência de água. Esses valores são obtidos por ensaio laboratorial, ou ensaio de carregamento de estaca ou por correlação empírica baseada em experimentos. A seguir, a TABELA 2 relaciona o tipo de solo e o intervalo do módulo de elasticidade de Young.

TABELA 2 – VALORES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE DE YOUNG

Tipo de solo	Densidade do solo	E (MPa)	E (kN/m ²)
Silte	muito mole	0.2 – 2	200 – 2.000
Argila	muito mole à dura/arenosa	2 – 250	2.000 – 250.000
Areia/Cascalho	siltosa/solta à densa	7 – 190	7.000 – 190.000

FONTE: Adaptado de Ranjan e Rao (2011)

5.1 MODELO UNIDIMENSIONAL

O problema da poroelasticidade clássico, que considera um meio poroso saturado, homogêneo e isotrópico com fluido incompressível (GASPAR *et al.*, 2003), conduz ao problema descrito por um sistema de equações diferenciais. A partir da Eq. (3.6), para o caso unidimensional, considerando o domínio espacial $\Omega = (0, L)$, em metros (m), na direção x , tem-se:

$$\begin{cases} -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \mathcal{P} \end{cases}, \quad (5.1)$$

em que E é o módulo de Young dado em N/m^2 e a condutividade hidráulica $K = \kappa/\eta$ é dada em m/s . A componente de deslocamento na direção espacial x é dada por $u(x, t)$ e $p(x, t)$ denota a pressão. O intervalo de tempo considerado nos cálculos é $(0, t_f]$, em segundos (s). A primeira equação modela os deslocamentos na direção u e a segunda equação modela a pressão p .

Neste trabalho, as condições de contornos assumem fronteira esquerda sem variação do deslocamento e permeável (drenagem livre); e fronteira direita rígida (deslocamento zero) e sem variação de pressão. Neste caso, considerando $L = \frac{1}{2}$, ou seja, $\Omega = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ se } x = 0 \\ p = 0, \text{ se } x = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

e

$$\begin{cases} u = 0, \text{ se } x = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \text{ se } x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.3)$$

A solução analítica de modelos matemáticos 1D pode ser obtida por meio da resolução de Equações Diferenciais Parciais lineares e não homogêneas, que dependem de duas variáveis, sendo uma temporal. Entretanto, ao incorporar valores realistas para as constantes de Lamé e a condutividade hidráulica, o problema assume características de um ponto de sela, o que torna a obtenção de uma solução analítica desafiadora. Devido a essa complexidade, a resolução frequentemente recai em processos iterativos, no qual as soluções analíticas fabricadas e termos-fonte desempenham um papel essencial, permitindo avaliar a convergência e a estabilidade do método empregado.

Para o modelo proposto pelo sistema de equações dado pela Eq. (5.1), a solução analítica fabricada é dada por:

$$u(x, t) = \cos(\pi x)e^{-t} \quad (5.4)$$

e

$$p(x, t) = \sin(\pi x)e^{-t}, \quad (5.5)$$

satisfazendo às condições de contornos (Eqs. (5.2) e Eq. (5.3)), pode-se definir os termos forçantes \mathcal{U} e \mathcal{P} como:

$$\mathcal{U} = (E\pi + 1)\pi \cos(\pi x)e^{-t} \quad (5.6)$$

e

$$\mathcal{P} = (K\pi + 1)\pi \sin(\pi x)e^{-t}. \quad (5.7)$$

5.2 MODELO BIDIMENSIONAL

Considerando a Eq. (3.6) para o problema bidimensional, tem-se o sistema de equações diferenciais apresentado a seguir:

$$\begin{cases} -(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} \\ -(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mathcal{V} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - K\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = \mathcal{P} \end{cases} \quad (5.8)$$

As variáveis de interesse são os deslocamentos, representadas por $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ e a pressão $p(x, y, t)$ que dependem da posição espacial e do tempo. O intervalo de tempo $(0, t_f]$, onde t_f é o tempo final, e o domínio espacial bidimensional $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Neste trabalho, as condições de contornos assumem fronteira rígida (deslocamento zero) e permeável (drenagem livre). Neste caso, para $(x, y) \in \partial\Omega$, tem-se as condições de contorno de Dirichlet:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 0 \\ v(x, y, t) = 0 \\ p(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Para o modelo proposto pelo sistema de equações dado pela Eq. (5.8), a solução analítica fabricada é dada por:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = p(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t}, \quad (5.10)$$

satisfazendo as condições de contornos (Eq. (5.9)), pode-se definir os termos forçantes \mathcal{U} , \mathcal{V} e \mathcal{P} como:

$$\mathcal{U} = (\lambda + 3\mu)\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t} - (\lambda + \mu)\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} + \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t}, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{V} = (\lambda + 3\mu)\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t} - (\lambda + \mu)\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} + \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} \quad (5.12)$$

e

$$\mathcal{P} = 2K\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t} - \pi \sin(\pi(x + y)) e^{-t}. \quad (5.13)$$

Neste capítulo, foram apresentados os modelos matemáticos unidimensionais e bidimensionais descritos na literatura para o problema da poroelasticidade. Também

foram descritas as características das constantes que aparecem nesse problema, bem como os valores realísticos associados aos respectivos meios porosos.

Além disso, foram especificadas as condições de contorno dos problemas e os termos fontes necessários para a formulação completa. Por fim, foram apresentadas as soluções analíticas fabricadas para verificar os resultados obtidos por métodos numéricos.

6 MODELOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são descritos os modelos 1D e 2D do problema da poroelasticidade, seguidos pela discretização utilizando o MVF.

Gaspar *et al.* (2007) apresentaram uma versão reformulada para o sistema gerado pelas equações da poroelasticidade usando o MDF. Essa nova versão, usada também por Rodrigo (2010), consiste no uso adicional de um termo de suavização no lado esquerdo da igualdade da equação da pressão a fim de minimizar as oscilações não físicas. Este termo não altera o resultado final e melhora a estabilidade do sistema para a solução numérica. Tal termo de suavização é dado por:

$$-\frac{h^2}{4E} \frac{\partial \Delta p}{\partial t}. \quad (6.1)$$

Sendo assim, para o caso unidimensional, acrescenta-se na segunda equação do sistema de equações descrito na Eq. (5.1) o termo:

$$-\frac{h^2}{4E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right), \quad (6.2)$$

e para o caso bidimensional, acrescenta-se na terceira equação do sistema de equações descrito na Eq. (5.8) o termo:

$$-\frac{h^2}{4E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \quad (6.3)$$

Segundo Luo *et al.* (2016), o arranjo colocalizado, como será tratado neste trabalho, é conveniente para a geração de malhas no método *Multigrid*. Porém, para o problema da poroelasticidade, este tipo de arranjo pode ocasionar instabilidade numérica, em especial para avaliar a pressão. Portanto, da mesma forma que o termo de estabilização descrito anteriormente foi utilizado por Rodrigo (2010) para o MDF, aqui será utilizado para o MVF.

6.1 PROBLEMA DA POROELASTICIDADE 1D

Para o modelo numérico, considera-se o modelo matemático 1D apresentado no sistema de equações descrito na Eq. (5.1). Neste caso, consideram-se as próprias variáveis u e p como sendo aproximações das soluções de u e p , respectivamente. O domínio espacial é discretizado utilizando-se o MVF considerando uma malha uniforme com arranjo colocalizado, ou seja, a pressão p e o deslocamento u ficam no centro do volume de controle.

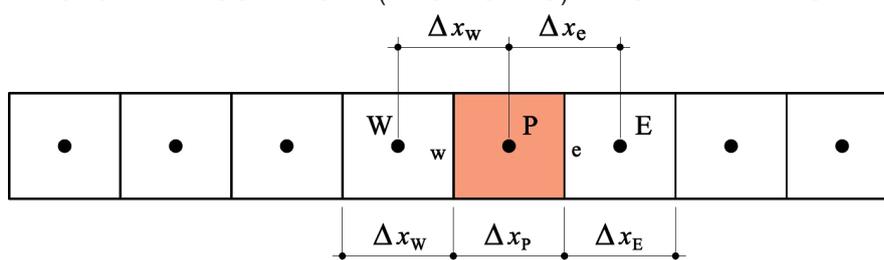
Neste trabalho será usado o método de volumes finitos (MALISKA, 2004) para a discretização espacial. Uma importante propriedade é que os princípios de conservação da massa, do momento e da energia são mantidos quando as equações são deduzidas usando esse método.

6.1.1 Discretização do Problema da Poroelasticidade 1D

Para aplicar o MVF, é necessário decompor o domínio em volumes de controle, formular as equações integrais de conservação para cada volume de controle, aproximar numericamente as integrais, aproximar os valores das variáveis nas faces e as derivadas com a informação das variáveis nodais, montar e resolver o sistema algébrico obtido.

O ponto de partida do método de volumes finitos é a decomposição do domínio em um conjunto de volumes de controle (VCs), que envolvem um ponto nodal da malha, conjunto de volumes de controle que discretizam o domínio de cálculo, onde as variáveis são alocadas. A FIGURA 28 ilustra a discretização do domínio na qual uma variável genérica está localizada no centro do volume de controle, sobre uma malha 1D (MALISKA, 2004).

FIGURA 28 – VOLUME DE CONTROLE (DESTACADO) EM UMA MALHA UNIDIMENSIONAL.



FONTE: A autora (2024)

Da FIGURA 28, tem-se que:

- P é o volume de controle elementar sobre o qual o modelo é discretizado.
- W e E são os volumes vizinhos ao volume de controle P, à esquerda e à direita, respectivamente.
- w e e são as faces do volume de controle P, à esquerda e à direita, respectivamente.
- Δx_w é a distância entre os centros dos volumes de controle W e P.
- Δx_e é a distância entre os centros dos volumes de controle P e E.
- Δx_W é a distância entre as faces laterais esquerda e direita no volume de controle W.

- Δx_P é a distância entre as faces laterais esquerda e direita no volume de controle P.
- Δx_E é a distância entre as faces laterais esquerda e direita no volume de controle E.

Nesse trabalho a malha é considerada uniforme, portanto para todos os volumes de controle, é válido:

$$\Delta x_W = \Delta x_P = \Delta x_E = \Delta x_w = \Delta x_e = h. \quad (6.4)$$

Dado um domínio espacial L , e dividindo-se em N volumes de controle, tem-se o tamanho de cada volume de controle, dado por:

$$h = \frac{L}{N}. \quad (6.5)$$

A aproximação temporal e a conexão espacial-temporal é feita usando o método de discretização de Euler Implícito. O passo de tempo τ é dado por:

$$\tau = \frac{t_f - t_0}{N_t}, \quad (6.6)$$

onde t_f é o tempo final, t_0 é o tempo inicial e N_t é o número de passos de tempo.

Considerando a primeira equação do modelo apresentado na Eq. (5.1), tem-se:

$$-E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U}. \quad (6.7)$$

As equações diferenciais são discretizadas a partir da integração sobre cada volume de controle, aplica-se o teorema da divergência de Gauss (KREYSZING, 2011), que resulta em integrais de superfície envolvendo as variáveis de interesse (PATANKAR, 1980; GONCALVES, 2013; STEWART, 2017). Com isso, tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial p}{\partial x} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \mathcal{U} dx dt. \quad (6.8)$$

Integrando em relação a variável espacial x , tem-se:

$$-E \int_t^{t+\Delta t} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_w^e dt + \int_t^{t+\Delta t} p \Big|_w^e dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{U} x \Big|_w^e dt. \quad (6.9)$$

Integrando em relação a variável temporal t , tem-se:

$$-E \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e^\theta - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w^\theta \right] \Delta t + \left[(p)_e^\theta - (p)_w^\theta \right] \Delta t = \mathcal{U}_P^\theta (e - w) \Delta t. \quad (6.10)$$

Maliska (2004) apresenta diferentes esquemas de interpolação, os quais geram diferentes aproximações e, por conseguinte, soluções distintas, enquanto as malhas não estão suficientemente refinadas. Usando o esquema de diferenças centrais (*Central Differencing Scheme*, CDS), tem-se que o valor da variável na face é a média dos seus valores nos pontos nodais, assim:

$$(p)_e^\theta = \frac{p_E^\theta + p_P^\theta}{2}, \quad (6.11)$$

$$(p)_w^\theta = \frac{p_P^\theta + p_W^\theta}{2}. \quad (6.12)$$

Consequentemente, tem-se as aproximações para avaliar as derivadas nas faces dos volumes de controle, dadas por:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e^\theta = \frac{u_E^\theta - u_P^\theta}{\Delta x}, \quad (6.13)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w^\theta = \frac{u_P^\theta - u_W^\theta}{\Delta x}. \quad (6.14)$$

Substituindo as Eqs. (6.11) - (6.14) na Eq. (6.10) tem-se:

$$-E \left[\frac{u_E^\theta - u_P^\theta}{\Delta x} - \frac{u_P^\theta - u_W^\theta}{\Delta x} \right] \Delta t + \left[\frac{p_E^\theta + p_P^\theta}{2} - \frac{p_P^\theta + p_W^\theta}{2} \right] \Delta t = \mathcal{U}_P^\theta \Delta x \Delta t. \quad (6.15)$$

Simplificando Δt e agrupando os elementos possíveis, tem-se:

$$\frac{-E}{(\Delta x)^2} (u_E^\theta - 2u_P^\theta + u_W^\theta) + \frac{1}{2(\Delta x)} (p_E^\theta - p_W^\theta) = \mathcal{U}_P^\theta. \quad (6.16)$$

Para a segunda equação do modelo apresentado na Eq. (5.1), e acrescentando o termo de suavização (Eq. (6.2)), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{h^2}{4E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = \mathcal{P}. \quad (6.17)$$

Integrando sobre cada volume de controle e aplicando o teorema da divergência de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e -K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx dt + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e -\frac{h^2}{4E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \mathcal{P} dx dt. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Integrando em relação a variável espacial x , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} [(u)_e - (u)_w] dt - K \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w \right] dt + \\ & - \frac{h^2}{4E} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{P} x \Big|_w^e dt. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Considerando as seguintes aproximações para as derivadas espaciais, através das funções interpolação do tipo CDS:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e = \frac{p_E - p_P}{\Delta x}, \quad (6.20)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w = \frac{p_P - p_W}{\Delta x}. \quad (6.21)$$

Considerando as seguintes aproximações lineares, usando médias aritméticas:

$$(u)_e = \frac{u_E + u_P}{2}, \quad (6.22)$$

$$(u)_w = \frac{u_P + u_W}{2}. \quad (6.23)$$

Substituindo as Eqs. (6.20) - (6.23) na Eq. (6.19) tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u_E + u_P}{2} - \frac{u_P + u_W}{2} \right] dt - K \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{p_E - p_P}{\Delta x} - \frac{p_P - p_W}{\Delta x} \right] dt + \\ & - \frac{h^2}{4E} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p_E - p_P}{\Delta x} - \frac{p_P - p_W}{\Delta x} \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{P} x \Big|_w^e dt. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Agrupando os elementos possíveis, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u_E - u_W}{2} \right] dt - K \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{p_E - 2p_P + p_W}{\Delta x} \right] dt + \\ & - \frac{h^2}{4E} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p_E - 2p_P + p_W}{\Delta x} \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{P} (e - w) dt. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Avaliando as integrais em relação à variável temporal t , tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [u_E - u_W]_t^{t+\Delta t} - \frac{K}{\Delta x} [p_E^\theta - 2p_P^\theta + p_W^\theta] \Delta t + \\ & - \frac{h^2}{4E} \left[\frac{p_E - 2p_P + p_W}{\Delta x} \right]_t^{t+\Delta t} = \mathcal{P}_P^\theta \Delta x \Delta t. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Avaliando o intervalo do tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [u_E - u_W - u_E^0 + u_W^0] - \frac{K \Delta t}{\Delta x} [p_E^\theta - 2p_P^\theta + p_W^\theta] + \\ & - \frac{h^2}{4E \Delta x} [p_E - 2p_P + p_W - p_E^0 + 2p_P^0 - p_W^0] = \mathcal{P}_P^\theta \Delta x \Delta t. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Simplificando a expressão, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \Delta x \Delta t} [u_E - u_W - u_E^0 + u_W^0] - \frac{K}{(\Delta x)^2} [p_E^\theta - 2p_P^\theta + p_W^\theta] + \\ & - \frac{1}{4E \Delta t} [p_E - 2p_P + p_W - p_E^0 + 2p_P^0 - p_W^0] = \mathcal{P}_P^\theta. \end{aligned} \quad (6.28)$$

As Eqs. (6.16) e (6.28) podem ser reescritas usando o método de Euler por meio da Eq. (4.9). Considerando:

$$u^\theta = \theta u + (1 - \theta) u^0, \quad (6.29)$$

$$p^\theta = \theta p + (1 - \theta) p^0, \quad (6.30)$$

onde u e p são avaliados no tempo atual, e u^0 e p^0 são avaliados no tempo anterior. Com isso a Eq. (6.16) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} & \frac{-E}{(\Delta x)^2} \{ \theta u_E + (1 - \theta) u_E^0 - 2 [\theta u_P + (1 - \theta) u_P^0] + \theta u_W + (1 - \theta) u_W^0 \} + \\ & + \frac{1}{2 \Delta x} [\theta p_E + (1 - \theta) p_E^0 - \theta p_W - (1 - \theta) p_W^0] = \theta \mathcal{U}_P + (1 - \theta) \mathcal{U}_P^0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

e a Eq. (6.28) é reescrita por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \Delta x \Delta t} (u_E - u_W) - \frac{K}{(\Delta x)^2} \{ \theta p_E + (1 - \theta) p_E^0 + \\ & - 2 [\theta p_P + (1 - \theta) p_P^0] + \theta p_W + (1 - \theta) p_W^0 \} - \frac{1}{4E \Delta t} (p_E - 2p_P + p_W) = \\ & = \theta \mathcal{P}_P + (1 - \theta) \mathcal{P}_P^0 + \frac{1}{2 \Delta x \Delta t} (u_E^0 - u_W^0) - \frac{1}{4E \Delta t} (p_E^0 - 2p_P^0 + p_W^0). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Usando o método de Euler implícito, substituindo Δx por h e Δt por τ , as Eqs. (6.31) e (6.32) podem ser reescritas, na forma:

$$\frac{-E}{h^2} (u_E - 2u_P + u_W) + \frac{1}{2h} (p_E - p_W) = \mathcal{U}_P \quad (6.33)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\tau} (u_E - u_W) - \frac{4KE\tau + h^2}{4E\tau h^2} (p_E - 2p_P + p_W) = \\ & = \mathcal{P}_P + \frac{1}{2h\tau} (u_E^0 - u_W^0) - \frac{1}{4E\tau} (p_E^0 - 2p_P^0 + p_W^0). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Avaliação das condições de contorno

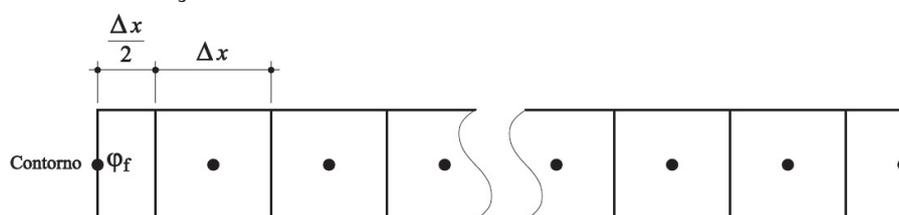
Os problemas envolvendo equações diferenciais apresentam condições sobre os elementos das fronteiras que podem ser classificadas como:

- Condição de contorno de Dirichlet: que especifica os valores que a solução precisa assumir nas fronteiras do domínio. Essas condições são essenciais para garantir a unicidade e a estabilidade da solução em muitos problemas físicos. A imposição de condições de contorno de Dirichlet é geralmente necessária para que o problema seja bem posto e para garantir que a solução numérica obtenha resultados precisos e fisicamente realistas (CHAPRA; CANALE, 2015).

- Condição de contorno de Neumann: que especifica os valores nos quais a derivada da solução é aplicada nas fronteiras do domínio. Em problemas de mecânica dos fluidos, pode ser utilizada para especificar a velocidade ou a pressão em um contorno (CHAPRA; CANALE, 2015).
- Condição de Robin: que é uma combinação entre as condições de Dirichlet e Neumann, ela envolve a solução nos contornos, assim como suas variações. As condições de Robin permitem uma especificação mais detalhada do comportamento da solução ao longo dos limites do problema, sendo úteis em diversos contextos físicos. Em problemas de eletrostática, pode representar uma superfície condutora parcialmente isolada (ZILL; CULLEN, 2001).

Maliska (2004) propõe três maneiras de avaliar as condições de contorno para o método de Volumes Finitos, e essa análise depende das informações da malha. Uma maneira de avaliar os contornos, por exemplo, é o meio-volume, no qual é necessário criar uma malha em que o ponto central de um volume de controle fique sobre o contorno, como é apresentado na FIGURA 29. A aplicação é fácil apenas para as condições de Dirichlet e a malha deve ser uniforme (MALISKA, 2004; PATANKAR, 2009; GONCALVES, 2013).

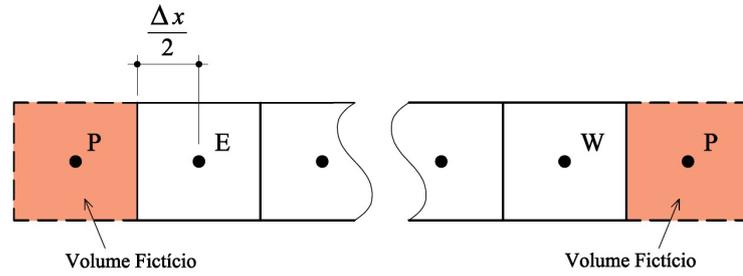
FIGURA 29 – CONDIÇÃO DE CONTORNO USANDO MEIO VOLUME NA FRONTEIRA



FONTE: Adaptado de Maliska (2004)

Outra forma de avaliar os contornos, e que será adotada neste trabalho, é criar volumes fictícios nas fronteiras, assim, os volumes de fronteira passam a ter coeficientes idênticos os volumes internos. Essa aplicação respeita os princípios de conservação para todo o domínio, porém aumenta o número de incógnitas no sistema de equações associado (MALISKA, 2004; GONCALVES, 2013). Na FIGURA 30, apresentam-se os contornos e os volumes fictícios. A análise do contorno depende da condição de contorno apresentada para o problema.

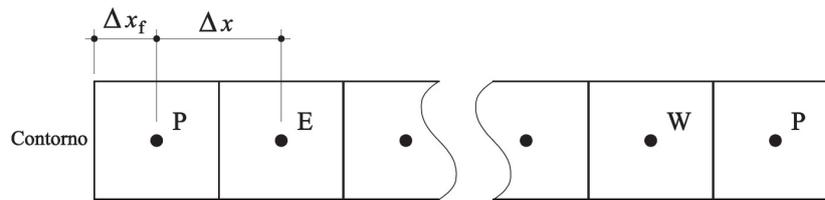
FIGURA 30 – CONDIÇÃO DE CONTORNO USANDO VOLUMES FICTÍCIOS NA FRONTEIRA.



FONTE: Adaptado de Maliska (2004)

Maliska (2004) e Patankar (2009) apresentam o balanço para os volumes de fronteira, que estende a integração das equações de conservação até estes volumes, tais condições ficam embutidas nas equações para os volumes de fronteira. A FIGURA 31 representa a utilização do balanço de volumes na fronteira (GONCALVES, 2013).

FIGURA 31 – CONDIÇÃO DE CONTORNO USANDO BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA.



FONTE: Adaptado de Maliska (2004)

A partir das condições do contorno esquerdo (Eq. (5.2)), pode-se avaliar a variação do deslocamento, usando método de volumes fictícios, obtendo-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_E - u_P}{\Delta x} = 0. \quad (6.35)$$

Portanto, $u_P = u_E$ e usando volumes fictícios, tem-se que $u_0 = u_1$.

Para avaliar a pressão na fronteira p_f , tem-se:

$$p_f = \frac{p_P + p_E}{2} = 0. \quad (6.36)$$

Portanto, $p_P = -p_E$ e usando volumes fictícios, tem-se que $p_0 = -p_1$.

Das condições de contorno direito (Eq. (5.3)), pode-se avaliar o deslocamento na fronteira u_f , obtendo-se:

$$u_f = \frac{u_P + u_W}{2} = 0. \quad (6.37)$$

Portanto, $u_P = -u_W$ e usando volumes fictícios, tem-se que $u_{N+1} = -u_N$.

Para avaliar a variação da pressão na fronteira, tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_W}{\Delta x} = 0. \quad (6.38)$$

Portanto, $p_P = p_W$ e usando volumes fictícios, tem-se que $p_{N+1} = p_N$.

Assim, as condições de contorno discretizadas pelo MVF, para o modelo 1D, podem ser rescritas como:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \\ p_0 = -p_1 \\ u_{N+1} = -u_N \\ p_{N+1} = p_N \end{cases} \quad (6.39)$$

6.1.2 Solvers

Para o problema 1D, escolheu-se os *solvers* Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa, devido às suas características e aplicabilidade em problemas com variáveis espaciais e temporais.

Os resultados obtidos por meio desses *solvers* são utilizados para identificar aquele que apresenta melhor desempenho e maior eficiência na resolução do problema de poroelasticidade.

Ressalta-se a necessidade de fazer a transferência de coordenadas cardinais em vetoriais, para a implementação dos métodos, ou seja, os pontos definidos pelas posições P , E e W passam a ser representados, respectivamente por i , $i + 1$ e $i - 1$.

6.1.2.1 Método Vanka 1D

A pressão e o deslocamento são calculados no centro do volume de controle, dado pelo sistema de equações descrito na Eq. (6.40), em função das incógnitas u_{i-1} , p_i e u_{i+1} . Utiliza-se o método de Euler implícito para a aproximação temporal, no qual o superíndice 0 indica que a variável se refere ao tempo anterior.

$$\begin{cases} -\frac{E}{h^2} (u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}) + \frac{1}{2h} (p_i - p_{i-2}) = \mathcal{U}_{i-1} \\ \frac{1}{2h\tau} [u_{i+1} - u_{i-1}] - \left(\frac{4KE\tau + h^2}{4E\tau h^2} \right) [p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}] = \\ = \mathcal{P}_i + \frac{1}{2h\tau} [u_{i+1}^0 - u_{i-1}^0] - \frac{1}{4E\tau} [p_{i+1}^0 - 2p_i^0 + p_{i-1}^0] \\ -\frac{E}{h^2} (u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i) + \frac{1}{2h} (p_{i+2} - p_i) = \mathcal{U}_{i+1} \end{cases} \quad (6.40)$$

Para obter do sistema de equações descrito em Eq. (6.40), utilizam-se as Eqs. (6.33) e (6.34). Inicialmente, considera-se a posição P como sendo o ponto à oeste, ou seja, $u_P = u_{i-1}$. Aplicando a Eq. (6.33) para o ponto $i - 1$, obtem-se a primeira equação. A segunda equação é obtida ao aplicar a Eq. (6.34) no ponto i . Por fim, considerando a posição P como sendo o ponto a leste, ou seja, $u_P = u_{i+1}$. Aplicando a Eq. (6.33) ao ponto $i + 1$, obtem-se a terceira equação.

Isolando os termos u_{i-1} , p_i e u_{i+1} , nesta ordem, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2}u_{i-1} + \frac{1}{2h}p_i = \mathcal{U}_{i-1} + \frac{E}{h^2}(u_i + u_{i-2}) + \frac{1}{2h}p_{i-2} \\ -\frac{1}{2\tau h}u_{i-1} + 2\left(\frac{4KE\tau + h^2}{4E\tau h^2}\right)p_i + \frac{1}{2\tau h}u_{i+1} = \mathcal{P}_i + \\ + \frac{1}{2h\tau}[u_{i+1}^0 - u_{i-1}^0] - \frac{1}{4E\tau}[p_{i+1}^0 - 2p_i^0 + p_{i-1}^0] + \left(\frac{4KE\tau + h^2}{4E\tau h^2}\right)[p_{i+1} + p_{i-1}] \\ -\frac{1}{2h}p_i + \frac{2E}{h^2}u_{i+1} = \mathcal{U}_{i+1} + \frac{E}{h^2}(u_{i+2} + u_i) - \frac{1}{2h}p_{i+2} \end{array} \right. \quad (6.41)$$

Avaliando o sistema para os pontos $i = 3, 4, \dots, N - 2$ pode-se escrever, em forma matricial:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{2E}{h^2} & \frac{1}{2h} & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & \frac{h^2+4E\tau k}{2E\tau h^2} & \frac{1}{2\tau h} \\ 0 & -\frac{1}{2h} & \frac{2E}{h^2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ p_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{i-1} \\ \mathcal{P}_i \\ \mathcal{U}_{i+1} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \frac{E}{h^2}(u_{i-2} + u_i) + \frac{1}{2h}p_{i-2} \\ \frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2}(p_{i-1} + p_{i+1}) - \frac{1}{2\tau h}(u_{i-1}^0 - u_{i+1}^0) - \frac{1}{4E\tau}(p_{i-1}^0 - 2p_i^0 + p_{i+1}^0) \\ \frac{E}{h^2}(u_i + u_{i+2}) - \frac{1}{2h}p_{i+2} \end{array} \right]. \quad (6.42)$$

Denominando os coeficientes:

$$a_{11} = \frac{2E}{h^2}, \quad a_{12} = \frac{1}{2h}, \quad a_{23} = \frac{1}{2\tau h}, \quad a_{22} = \frac{h^2 + 4KE\tau}{2E\tau h^2}, \quad a_{41} = \frac{1}{4E\tau},$$

além disso,

$$b_1 = \mathcal{U}_{i-1} + 0,5 a_{11}(u_{i-2} + u_i) + a_{12} p_{i-2}, \quad (6.43)$$

$$b_2 = \mathcal{P}_i + 0,5 a_{22}(p_{i-1} + p_{i+1}) + a_{23}(u_{i+1}^0 - u_{i-1}^0) - a_{41}(p_{i-1}^0 - 2p_i^0 + p_{i+1}^0), \quad (6.44)$$

$$b_3 = \mathcal{U}_{i+1} + 0,5 a_{11}(u_i + u_{i+2}) - a_{12} p_{i+2}, \quad (6.45)$$

a Eq. (6.42) pode ser expressa na forma:

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & -a_{12} & a_{11} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ p_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

cuja solução, de forma direta, é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_{i-1} \\ p_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = D_1 \begin{bmatrix} a_{12} a_{23} + a_{11} a_{22} & -a_{12} a_{11} & a_{12} a_{23} \\ a_{23} a_{11} & a_{11}^2 & -a_{23} a_{11} \\ a_{12} a_{23} & a_{12} a_{11} & a_{12} a_{23} + a_{11} a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad (6.47)$$

onde

$$D_1 = \frac{1}{2a_{11} a_{12} a_{23} + a_{11}^2 a_{22}}. \quad (6.48)$$

A partir das condições de contorno (Eq. (6.39)), para o ponto $i = 1$ tem-se, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3\frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2} & \frac{1}{2\tau h} \\ -\frac{1}{2h} & \frac{2E}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2\tau h} u_1 + \frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2} p_2 - \frac{1}{2\tau h} (u_1^0 - u_2^0) - \frac{1}{4E\tau} (p_2^0 - 3p_1^0) \\ \frac{E}{h^2} (u_1 + u_3) - \frac{1}{2h} p_3 \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Chamando os coeficientes:

$$b_4 = \mathcal{P}_1 + 0,5 a_{22} p_2 + a_{23} u_1 + a_{23} (u_2^0 - u_1^0) - a_{41} (p_2^0 - 3p_1^0), \quad (6.50)$$

$$b_5 = \mathcal{U}_2 + 0,5 a_{11} (u_1 + u_3) - a_{12} p_3, \quad (6.51)$$

a Eq. (6.49) pode ser expressa na forma:

$$\begin{bmatrix} 1,5 a_{22} & a_{23} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}, \quad (6.52)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = D_2 \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{23} \\ a_{12} & 1,5 a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

onde

$$D_2 = \frac{1}{1,5 a_{22} a_{11} + a_{12} a_{23}}. \quad (6.54)$$

Para o ponto $i = 2$ tem-se, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{h^2} & \frac{1}{2h} & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & \frac{h^2+4E\tau k}{2E\tau h^2} & \frac{1}{2\tau h} \\ 0 & -\frac{1}{2h} & \frac{2E}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ p_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{h^2} u_2 - \frac{1}{2h} p_1 \\ \frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2} (p_3 + p_1) - \frac{1}{2\tau h} (u_1^0 - u_3^0) - \frac{1}{4E\tau} (p_1^0 - 2p_2^0 + p_3^0) \\ \frac{E}{h^2} (u_2 + u_4) - \frac{1}{2h} p_4 \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Chamando os coeficientes:

$$b_6 = \mathcal{U}_1 + 0,5 a_{11} u_2 - a_{12} p_1, \quad (6.56)$$

$$b_7 = \mathcal{P}_2 + 0,5 a_{22} (p_3 + p_1) + a_{23} (u_3^0 - u_1^0) - a_{41} (p_1^0 - 2p_2^0 + p_3^0), \quad (6.57)$$

$$b_8 = \mathcal{U}_3 + 0,5 a_{11} (u_2 + u_4) - a_{12} p_4, \quad (6.58)$$

a Eq. (6.55) pode ser expressa na forma:

$$\begin{bmatrix} 0,5 a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ p_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ p_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = D_3 \begin{bmatrix} 2(a_{12} a_{23} + a_{11} a_{22}) & -2a_{12} a_{11} & 2a_{12} a_{23} \\ 2a_{23} a_{11} & a_{11}^2 & -a_{23} a_{11} \\ 2a_{12} a_{23} & a_{12} a_{11} & 2a_{12} a_{23} + a_{11} a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

onde

$$D_3 = \frac{1}{3a_{11} a_{12} a_{23} + a_{11}^2 a_{22}}. \quad (6.61)$$

A forma matricial para o ponto $i = N - 1$ é:

$$\begin{bmatrix} \frac{2E}{h^2} & \frac{1}{2h} & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} & \frac{1}{2\tau h} \\ 0 & -\frac{1}{2h} & \frac{3E}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-2} \\ p_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{N-2} \\ \mathcal{P}_{N-1} \\ \mathcal{U}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{h^2} (u_{N-3} + u_{N-1}) + \frac{1}{2h} p_{N-3} \\ \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} (p_{N-2} + p_N) - \frac{1}{2\tau h} (u_{N-2}^0 - u_N^0) - \frac{1}{4E\tau} (p_{N-2}^0 - 2p_{N-1}^0 + p_N^0) \\ \frac{E}{h^2} u_{N-1} - \frac{1}{2h} p_N \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

Chamando os coeficientes:

$$b_9 = \mathcal{U}_{N-2} + 0,5 a_{11} (u_{N-3} + u_{N-1}) + a_{12} p_{N-3}, \quad (6.63)$$

$$b_{10} = \mathcal{P}_{N-1} + 0,5 a_{22} (p_{N-2} + p_N) + a_{23} (u_N^0 - u_{N-2}^0) - a_{41} (p_{N-2}^0 - 2p_{N-1}^0 + p_N^0), \quad (6.64)$$

$$b_{11} = \mathcal{U}_N + 0,5 a_{11} u_{N-1} - a_{12} p_N, \quad (6.65)$$

a Eq. (6.62) pode ser expressa na forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & -a_{12} & 1,5 a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-2} \\ p_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix}, \quad (6.66)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_{N-2} \\ p_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = D_4 \begin{bmatrix} 2a_{12} a_{23} + 3a_{11} a_{22} & -3a_{12} a_{11} & 2a_{12} a_{23} \\ 3a_{23} a_{11} & 3a_{11}^2 & -2a_{23} a_{11} \\ 2a_{12} a_{23} & 2a_{12} a_{11} & 2(a_{12} a_{23} + a_{11} a_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix}, \quad (6.67)$$

onde

$$D_4 = \frac{1}{5a_{11} a_{12} a_{23} + 3a_{11}^2 a_{22}}. \quad (6.68)$$

A forma matricial para o ponto $i = N$ pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{2E}{h^2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2\tau h} & \frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{N-1} \\ \mathcal{P}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{h^2} (u_{N-2} + u_N) + \frac{1}{2h} p_{N-2} \\ \frac{1}{2\tau h} u_N + \frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2} p_{N-1} - \frac{1}{2\tau h} (u_{N-1}^0 + u_N^0) - \frac{1}{4E\tau} (p_{N-1}^0 - p_N^0) \end{bmatrix}. \quad (6.69)$$

Chamando os coeficientes:

$$b_{12} = \mathcal{U}_{N-1} + 0,5 a_{11} (u_{N-2} + u_N) + a_{12} p_{N-2}, \quad (6.70)$$

$$b_{13} = \mathcal{P}_N + a_{23} u_N + 0,5 a_{22} p_{N-1} - a_{23} (u_{N-1}^0 + u_N^0) - a_{41} (p_{N-1}^0 - p_N^0), \quad (6.71)$$

a Eq. (6.69) pode ser expressa na forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{23} & 0,5 a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{13} \end{bmatrix}, \quad (6.72)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_{N-1} \\ p_N \end{bmatrix} = D_5 \begin{bmatrix} 0,5 a_{22} & -a_{12} \\ a_{23} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{13} \end{bmatrix}, \quad (6.73)$$

onde

$$D_5 = \frac{1}{0,5 a_{22} a_{11} + a_{12} a_{23}}. \quad (6.74)$$

Portanto, com o método de Euler implícito para a aproximação temporal, o suavizador Vanka de 3 pontos (GASPAR *et al.*, 2003; GASPAR *et al.*, 2007; FRANCO, 2017) é formado pelos sistemas dados nas Eqs. (6.52), (6.59), (6.46), (6.66) e (6.72), respectivamente para os volumes $i = 1, 2$, volumes internos, $i = N - 1$ e $i = N$, na variável pressão p .

A seguir, apresenta-se o ALGORITMO 3 para o método Vanka.

Algoritmo 3: Método Vanka 1D

```

1 enquanto Não alcançar o critério de parada faça
2   Resolver as variáveis  $u$  e  $p$  nos volumes de controle do contorno
   esquerdo dado pelas Eqs. (6.52) e (6.59) utilizando método direto
3   para  $i = 3$  até  $N - 2$  faça
4     Resolver as variáveis  $u$  e  $p$  em todos os volumes de controle
     internos dado pela Eq. (6.46) utilizando método direto
5   fim
6   Resolver as variáveis  $u$  e  $p$  nos volumes de controle do contorno direito
   dado pelas Eqs. (6.66) e (6.72) utilizando método direto
7 fim

```

Ressalta-se que no ALGORITMO 3, para cada volume de controle, resolve-se de forma direta o sistema associado a variável pressão no volume de controle central P (p_P) e as variáveis associadas aos deslocamentos nos volumes de controle W e E, (u_W e u_E). Assim, todas as variáveis são atualizadas, de forma acoplada.

6.1.2.2 Método *Fixed-Stress* 1D

O sistema de equações é gerado a partir das Eqs. (6.33) e (6.34). Para que o sistema original atenda às condições dadas pela Eq. (4.2) e com isso, obter o método *Fixed-Stress*, basta adicionar em ambos os lados da Eq. (6.34) o termo (GASPAR; RODRIGO, 2017a):

$$\frac{1}{\lambda + \mu} p_P - \frac{1}{\lambda + \mu} p_P^0. \quad (6.75)$$

O termo adicionado à esquerda é utilizado com a iterada atual e o termo adicionado à direita é usado com valores da iterada anterior, tem-se assim:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\tau} (u_E - u_W) - \frac{4KE\tau + h^2}{4E\tau h^2} (p_E - 2p_P + p_W) + \frac{1}{\lambda + \mu} p_P - \frac{1}{\lambda + \mu} p_P^0 = \\ & = \mathcal{P}_P + \frac{1}{2h\tau} (u_E^0 - u_W^0) - \frac{1}{4E\tau} (p_E^0 - 2p_P^0 + p_W^0) + \frac{1}{\lambda + \mu} p_P - \frac{1}{\lambda + \mu} p_P^0. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Isolando o termo p_P do lado esquerdo, contudo, mantendo-o do lado direito também, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\tau} (u_E - u_W) + \left[\frac{4KE\tau + h^2}{2E\tau h^2} + \frac{1}{\lambda + \mu} \right] p_P - \frac{1}{\lambda + \mu} p_P^0 + \\ & - \frac{4KE\tau + h^2}{4E\tau h^2} (p_E + p_W) = \mathcal{P}_P + \frac{1}{2h\tau} (u_E^0 - u_W^0) + \\ & - \frac{1}{4E\tau} (p_E^0 - 2p_P^0 + p_W^0) + \frac{1}{\lambda + \mu} p_P - \frac{1}{\lambda + \mu} p_P^0. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 p_P = \frac{1}{\frac{4KE\tau + h^2}{2E\tau h^2} + \frac{1}{\lambda + \mu}} & \left[-\frac{1}{2h\tau}(u_E - u_W) + \frac{1}{\lambda + \mu}p_P^0 + \right. \\
 & + \frac{4KE\tau + h^2}{4E\tau\tau^2}(p_E + p_W) + \mathcal{P}_P + \frac{1}{2h\tau}(u_E^0 - u_W^0) + \\
 & \left. - \frac{1}{4E\tau}(p_E^0 - 2p_P^0 + p_W^0) + \frac{1}{\lambda + \mu}p_P - \frac{1}{\lambda + \mu}p_P^0 \right]. \quad (6.78)
 \end{aligned}$$

Denominando os termos:

$$a_{42} = \frac{1}{\lambda + \mu}, \quad I_p = \frac{1}{\frac{4KE\tau + h^2}{2E\tau h^2} + a_{42}} = \frac{1}{a_{22} + a_{42}}, \quad (6.79)$$

reescrever a variável pressão para os volumes internos, ou seja, $P = 2$ até $N - 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 p_P = I_p \left[-a_{23}(u_E - u_W) + 0,5 a_{22}(p_E + p_W) + \mathcal{P}_P + \right. \\
 \left. + a_{23}(u_E^0 - u_W^0) - a_{41}(p_E^0 - 2p_P^0 + p_W^0) + a_{42}p_P \right]. \quad (6.80)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, isolando-se o termo u_P na Eq. (6.33), tem-se:

$$u_P = \frac{h^2}{2E} \left[\frac{E}{h^2}u_E + \frac{E}{h^2}u_W - \frac{1}{2h}(p_E - p_W) + \mathcal{U}_P \right]. \quad (6.81)$$

Denominando o termo:

$$I_u = \frac{h^2}{2E}, \quad (6.82)$$

reescrevendo a variável deslocamento para os volumes internos, ou seja, $P = 2$ até $N - 1$, tem-se:

$$u_P = I_u \left[0,5 a_{11}(u_E + u_W) - a_{12}(p_E - p_W) + \mathcal{U}_P \right]. \quad (6.83)$$

As condições de contorno são dadas pela Eq. (6.39). Avaliando os contornos, na equação da pressão, para $i = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 (1,5 a_{22} + a_{42})p_1 = -a_{23}(u_2 - u_1) + 0,5 a_{22}p_2 + \mathcal{P}_1 + \\
 + a_{23}(u_2^0 - u_1^0) - a_{41}(p_2^0 - 3p_1^0) + a_{42}p_1 \quad (6.84)
 \end{aligned}$$

e para $i = N$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 (0,5 a_{22} + a_{42})p_N = -a_{23}(-u_N - u_{N-1}) + 0,5 a_{22}p_{N-1} + \mathcal{P}_N + \\
 + a_{23}(-u_N^0 - u_{N-1}^0) - a_{41}(-p_N^0 + p_{N-1}^0) + a_{42}p_N. \quad (6.85)
 \end{aligned}$$

Avaliando os contornos, na equação do deslocamento, para $i = 1$ tem-se:

$$0,5 a_{11} u_1 = 0,5 a_{11} u_2 - a_{12} (p_2 - p_1) + \mathcal{U}_1 \quad (6.86)$$

e para $i = N$ tem-se:

$$1,5 a_{11} u_N = 0,5 a_{11} u_{N-1} - a_{12} (p_N - p_{N-1}) + \mathcal{U}_N. \quad (6.87)$$

Portanto, com o método de Euler implícito para a aproximação temporal, o suavizador *Fixed-Stress* (GASPAR; RODRIGO, 2017b) consiste em resolver p_P e u_P na sequência apresentada no ALGORITMO 4:

Algoritmo 4: Método *Fixed-Stress* 1D

```

1 enquanto Não alcançar o critério de parada  $tol_{ext}$  faça
2   enquanto Não alcançar o critério de parada  $tol_{int}$  faça
3     Resolver a variável pressão  $p$ , dado pelas Eqs. (6.84), (6.80) e
       (6.85), para os volumes 1, internos e  $N$ , respectivamente,
       utilizando o método de Gauss-Seidel Red-Black Simétrico em
       todos os volumes de controle
4   fim
5   enquanto Não alcançar o critério de parada  $tol_{int}$  faça
6     Resolver a variável deslocamento  $u$ , dado pelas Eqs. (6.86), (6.83)
       e (6.87), para os volumes 1, internos e  $N$ , respectivamente,
       utilizando o método de Gauss-Seidel Red-Black Simétrico em
       todos os volumes de controle
7   fim
8 fim

```

Nesse trabalho, definiu-se os mesmos critérios de parada para o ciclo interno e o externo, ou seja, $tol_{ext} = tol_{int}$.

6.1.2.3 Método Uzawa 1D

Para que o sistema original atenda às condições dadas pela Eq. (4.5) e com isso, obter o método Uzawa, basta resolver primeiramente a variável u e em seguida atualizar a variável p com o resíduo, de forma ponderada. Mais detalhadamente, o método consiste em resolver a variável u usando a Eq. (6.33) por meio de Gauss-Seidel Simétrico *Red-Black*. Assim, calcula-se para os volumes internos, ou seja, $P = 2$ até $N - 1$, tem-se:

$$u_P = I_u [0,5 a_{11} (u_E + u_W) - a_{12} (p_E - p_W) + \mathcal{U}_P]. \quad (6.88)$$

Em seguida, calcula-se o resíduo em u , denotado por R_u :

$$R_u = 0,5 a_{11} (u_E + u_W) - a_{12} (p_E - p_W) + \mathcal{U}_P - a_{11} u_P \quad (6.89)$$

e atualizam-se os valores de u com:

$$u_P = u_P + M_a R_u, \quad (6.90)$$

onde M_a é um peso para o resíduo na atualização da variável deslocamento u .

Em seguida, calcula-se o resíduo em p , denotado por R_p , usando-se a Eq. (6.34), assim:

$$\begin{aligned} R_p = & 0,5 a_{22}(p_E + p_W) - a_{23}(u_E - u_W) + \mathcal{P}_P + a_{23}(u_E^0 - u_W^0) + \\ & - a_{41}(p_E^0 - 2p_P^0 + p_W^0) - a_{22} p_P \end{aligned} \quad (6.91)$$

e atualizam-se os valores de p_P com:

$$p_P = p_P + \omega R_p, \quad (6.92)$$

onde ω é o peso para o resíduo de p .

Aplicando as condições de contorno dadas pela Eq. (6.39) na Eq. (6.88). Assim, para a variável deslocamento no volume do contorno esquerdo, $i = 1$, tem-se:

$$u_1 = \frac{2}{a_{11}} [0,5 a_{11} u_2 - a_{12}(p_2 + p_1) + \mathcal{U}_1] \quad (6.93)$$

e para o contorno direito, $i = N$, tem-se:

$$u_N = \frac{2}{3 a_{11}} [0,5 a_{11} u_{N-1} - a_{12}(p_N - p_{N-1}) + \mathcal{U}_N]. \quad (6.94)$$

Em seguida, aplicando as condições de contorno dadas pela Eq. (6.39) na Eqs. (6.89) e (6.91), obtêm-se as equações para os resíduos avaliados nos volumes dos contornos:

$$R(u_1) = 0,5 a_{11} u_2 - a_{12}(p_2 + p_1) + \mathcal{U}_1 - 0,5 a_{11} u_1, \quad (6.95)$$

$$R(u_N) = 0,5 a_{11} u_{N-1} - a_{12}(p_N - p_{N-1}) + \mathcal{U}_N - 1,5 a_{11} u_1, \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} R(p_1) = & 0,5 a_{22} p_2 - a_{23}(u_2 - u_1) + \mathcal{P}_1 + a_{23}(u_2^0 - u_1^0) + \\ & - a_{41}(p_2^0 - 3p_1^0) - 1,5 a_{22} p_1, \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned} R(p_N) = & 0,5 a_{22} p_{N-1} + a_{23}(u_N + u_{N-1}) + \mathcal{P}_N - a_{23}(u_N^0 + u_{N-1}^0) + \\ & - a_{41}(p_{N-1}^0 - p_N^0) - 0,5 a_{22} p_N. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Portanto, com o método de Euler implícito para a aproximação temporal, o suavizador Uzawa (LUO *et al.*, 2016) consiste em resolver u_P e p_P na sequência apresentada no ALGORITMO 5:

Algoritmo 5: Método Uzawa 1D

```

1 enquanto Não alcançar o critério de parada  $tol_{ext}$  faça
2   enquanto Não alcançar o critério de parada  $tol_{int}$  faça
3     Resolver a variável deslocamento  $u$ , dado pelas Eqs. (6.93), (6.88)
4     e (6.94) utilizando o método de Gauss-Seidel Red-Black Simétrico
5   fim
6   Calcular o resíduo da variável  $p$ , pelas Eqs. (6.97), (6.91) e (6.98).
7   Atualizar a variável  $p$  utilizando a Eq.(6.92) e o parâmetro  $\omega$  escolhido
8 fim

```

Nesse trabalho, definiu-se os mesmos critérios de parada para o ciclo interno e o externo, ou seja, $tol_{ext} = tol_{int}$.

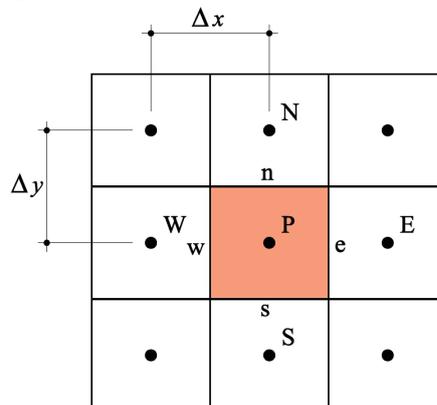
6.2 PROBLEMA DA POROELASTICIDADE 2D

Para o modelo numérico, considera-se o modelo matemático 2D apresentado na Eq. (5.8). Neste caso, consideram-se as próprias variáveis u , v e p como sendo aproximações das soluções de u , v e p , respectivamente. O domínio espacial é discretizado utilizando-se o MVF considerando uma malha uniforme com arranjo colocalizado, ou seja, a pressão p e os deslocamentos u e v ficam no centro do volume de controle. Considerando uma malha uniforme na qual o tamanho de cada volume de controle é padrão, assim:

$$\Delta x = \Delta y = h. \quad (6.99)$$

A FIGURA 32 indica os volumes de controle vizinhos norte (N) e sul (S) e as faces n e s , em uma malha uniforme 2D. Nessa malha a distância entre os centros dos volumes adjacentes de controle na direção horizontal é denotada por Δx e na direção vertical Δy .

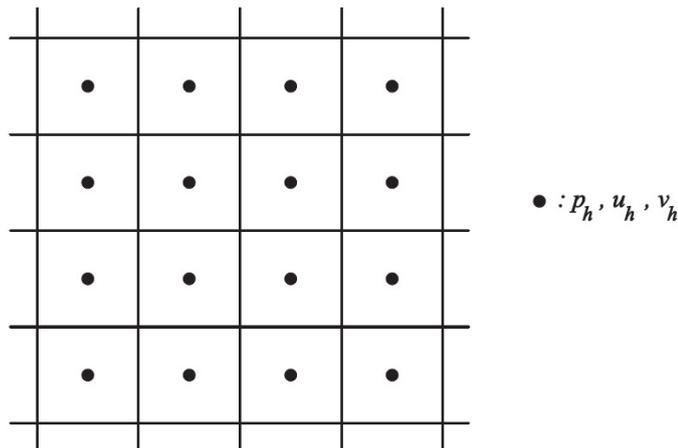
FIGURA 32 – DESCRIÇÃO DO VOLUME DE CONTROLE EM UMA MALHA 2D.



FONTE: A autora (2024)

Como existe mais de uma variável de interesse envolvida na discretização, u_h , v_h e p_h , pode-se ter diferentes arranjos para as respectivas posições dentro de cada volume de controle. Um arranjo é dito colocalizado, quando todos os valores discretos estão no centro do volume de controle, como pode ser observado na FIGURA 33 para o espaço 2D, no qual fica mais evidente esse arranjo.

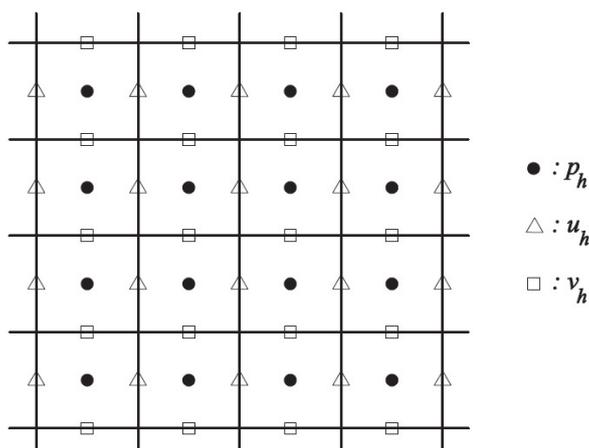
FIGURA 33 – MALHA UNIFORME 2D COM AS VARIÁVEIS COLOCALIZADAS.



FONTE: A autora (2024)

Outro arranjo conhecido é o desencontrado, ou seja, os valores discretos das variáveis estão em diferentes posições no volume de controle. Por exemplo, as variáveis u_h e v_h , estão localizados nas faces do volume e a variável p_h , no centro, como pode ser observado na FIGURA 34 (OOSTERLEE; GASPAR, 2008).

FIGURA 34 – MALHA UNIFORME 2D COM VARIÁVEIS DESENCONTRADAS.



FONTE: A autora (2024)

Ressalta-se que na discretização de equações diferenciais são usadas posições cardinais e posições vetoriais (i, j) . As posições cardinais são definidas pelos volumes de controles em que a solução da equação diferencial é calculada, cobrindo toda a região de interesse, usando as direções da rosa dos ventos (leste E, oeste W,

norte N, sul S). Essas posições cardinais podem ser definidas por índices indicando a localização desses nós sobre a malha, relacionando com vetores. Portanto, a posição P é definida como posição central relacionada com a posição vetorial (i, j) e as posições dos volumes de controle E, W, N, S são representadas pelas posições vetoriais $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$ e $(i, j-1)$, respectivamente (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Dado um domínio espacial $(0, L) \times (0, L)$, e dividindo-se em $N \times N$ volumes de controle, com N sendo o número de volumes em cada direção coordenada x e y , tem-se o tamanho de cada volume de controle.

A aproximação temporal e a conexão espacial-temporal é feita usando o método de discretização Euler Implícito. O passo de tempo τ é dado por:

$$\tau = \frac{t_f - t_0}{N_t}, \quad (6.100)$$

onde t_f é o tempo final, t_0 é o tempo inicial e N_t é o número de passos de tempo.

Para o caso bidimensional, o termo de suavização que será utilizado é dado na Eq. (6.3).

6.2.1 Discretização do Problema da Poroelasticidade 2D

Considerando a primeira equação do modelo apresentado na Eq. (5.8), tem-se:

$$-(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U}. \quad (6.101)$$

Integrando sobre cada volume de controle e aplicando o teorema da divergência de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dt + \\ & - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dt = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \mathcal{U} dx dy dt. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Aplicando as integrais em relação a variável x , tem-se:

$$\begin{aligned} & -(\lambda + 2\mu) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] dy dt - \mu \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta x dy dt + \\ & -(\lambda + \mu) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_e - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_w \right] dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n [p_e - p_w] dy dt = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \mathcal{U} \Delta x dy dt. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Aplicando as integrais em relação a variável y , tem-se:

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + 2\mu) \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y dt - \mu \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x dt + \\
& -(\lambda + \mu) \int_t^{t+\Delta t} [v_{ne} - v_{se} - v_{nw} + v_{sw}] dt + \int_t^{t+\Delta t} [p_e - p_w] \Delta y dt = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{U} \Delta x \Delta y dt.
\end{aligned} \tag{6.104}$$

Aplicando as integrais em relação a variável t , tem-se:

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + 2\mu) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta t - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta t + \\
& -(\lambda + \mu) [v_{ne} - v_{se} - v_{nw} + v_{sw}] \Delta t + [p_e - p_w] \Delta y \Delta t = \mathcal{U} \Delta x \Delta y \Delta t.
\end{aligned} \tag{6.105}$$

A segunda equação do modelo dado na Eq. (5.8) é dada por:

$$-(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mathcal{V}. \tag{6.106}$$

Integrando sobre cada volume de controle e aplicando o teorema da divergência de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy dt + \\
& - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dt = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \mathcal{V} dx dy dt.
\end{aligned} \tag{6.107}$$

Aplicando as integrais em relação a variável x , tem-se:

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \mu) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \right] dy dt - \mu \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \right] dy dt + \\
& -(\lambda + 2\mu) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Delta x dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial p}{\partial y} \Delta x dy dt = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \mathcal{V} \Delta x dy dt.
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Aplicando as integrais em relação a variável y , tem-se:

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \mu) \int_t^{t+\Delta t} [u_{ne} - u_{se} - u_{nw} + u_{sw}] dt - \mu \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y dt + \\
& -(\lambda + 2\mu) \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} [p_n - p_s] \Delta x dt = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{V} \Delta x \Delta y dt.
\end{aligned} \tag{6.109}$$

Aplicando as integrais em relação a variável t , tem-se:

$$\begin{aligned} & - (\lambda + \mu) [u_{ne} - u_{se} - u_{nw} + u_{sw}] \Delta t - \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta t + \\ & - (\lambda + 2\mu) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta t + [p_n - p_s] \Delta x \Delta t = \mathcal{V} \Delta x \Delta y \Delta t. \end{aligned} \quad (6.110)$$

A terceira equação do modelo dado na Eq.(5.8), tendo sido acrescentado o termo de estabilidade, é reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2}{4E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \mathcal{P}. \quad (6.111)$$

Integrando sobre cada volume de controle e aplicando o teorema da divergência de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e K \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) dx dy dt + \\ & - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{h^2}{4E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \mathcal{P} dx dy dt. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Aplicando as integrais em relação a variável x , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e - u_w + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta x \right) dy dt - K \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Delta x \right) dy dt + \\ & - \frac{h^2}{4E} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Delta x \right) dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \mathcal{P} \Delta x dy dt. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Aplicando as integrais em relação a variável y , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} ([u_e - u_w] \Delta y + [v_n - v_s] \Delta x) dt + \\ & - K \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y + \left(\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \right] dt + \\ & - \frac{h^2}{4E} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y + \left(\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \right) dt = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{P} \Delta x \Delta y dt. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Aplicando as integrais em relação a variável t , tem-se:

$$\begin{aligned} & ([u_e - u_w] \Delta y + [v_n - v_s] \Delta x) - K \left[\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e^\theta - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w^\theta \right) \Delta y + \left(\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_n^\theta - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_s^\theta \right) \Delta x \right] + \\ & - \frac{h^2}{4E} \left(\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y + \left(\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \right) = \mathcal{P}^\theta \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Considerando as seguintes aproximações para as derivadas espaciais, através das funções de interpolação do tipo CDS:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e = \frac{u_E - u_P}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w = \frac{u_P - u_W}{\Delta x} \quad (6.116)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_e = \frac{v_E - v_P}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_w = \frac{v_P - v_W}{\Delta x} \quad (6.117)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e = \frac{p_E - p_P}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w = \frac{p_P - p_W}{\Delta x}, \quad (6.118)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_n = \frac{u_N - u_P}{\Delta y}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s = \frac{u_P - u_S}{\Delta y} \quad (6.119)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_n = \frac{v_N - v_P}{\Delta y}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s = \frac{v_P - v_S}{\Delta y}, \quad (6.120)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_n = \frac{p_N - p_P}{\Delta y}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_s = \frac{p_P - p_S}{\Delta y}. \quad (6.121)$$

Considerando as seguintes aproximações lineares, usando médias aritméticas:

$$(u)_e = \frac{u_E + u_P}{2}, \quad (u)_w = \frac{u_P + u_W}{2}, \quad (u)_n = \frac{u_N + u_P}{2}, \quad (u)_s = \frac{u_P + u_S}{2}, \quad (6.122)$$

$$(v)_e = \frac{v_E + v_P}{2}, \quad (v)_w = \frac{v_P + v_W}{2}, \quad (v)_n = \frac{v_N + v_P}{2}, \quad (v)_s = \frac{v_P + v_S}{2}, \quad (6.123)$$

$$(p)_e = \frac{p_E + p_P}{2}, \quad (p)_w = \frac{p_P + p_W}{2}, \quad (p)_n = \frac{p_N + p_P}{2}, \quad (p)_s = \frac{p_P + p_S}{2}. \quad (6.124)$$

Além disso, aplicando uma combinação das aproximações nas faces para os cantos dos volumes de controle, tem-se:

$$(u)_{ne} = \frac{u_{nne} + u_e}{2} = \frac{\left(\frac{u_{NE} + u_N}{2} + \frac{u_E + u_P}{2}\right)}{2} = \frac{u_{NE} + u_N + u_E + u_P}{4}, \quad (6.125)$$

$$(u)_{se} = \frac{u_e + u_{sse}}{2} = \frac{\left(\frac{u_E + u_P}{2} + \frac{u_{SE} + u_S}{2}\right)}{2} = \frac{u_E + u_P + u_{SE} + u_S}{4}, \quad (6.126)$$

$$(u)_{nw} = \frac{u_{nnw} + u_w}{2} = \frac{\left(\frac{u_{NW} + u_N}{2} + \frac{u_W + u_P}{2}\right)}{2} = \frac{u_{NW} + u_N + u_W + u_P}{4}, \quad (6.127)$$

$$(u)_{sw} = \frac{u_w + u_{ssw}}{2} = \frac{\left(\frac{u_{SW} + u_S}{2} + \frac{u_W + u_P}{2}\right)}{2} = \frac{u_{SW} + u_S + u_W + u_P}{4}. \quad (6.128)$$

Dessa forma é possível reescrever a parte da discretização na Eq. (6.110), tem-se:

$$u_{ne} - u_{se} - u_{nw} + u_{sw} = \frac{1}{4} (u_{NE} - u_{SE} - u_{NW} + u_{SW}). \quad (6.129)$$

Substituindo as aproximações dadas pelas Eqs. (6.116) - (6.128), na Eq. (6.105) e utilizando-se volumes de controle no qual $\Delta x = \Delta y = h$, tem-se:

$$\begin{aligned} & -\frac{(\lambda + 2\mu)}{h} \left[\frac{u_E - u_P}{h} - \frac{u_P - u_W}{h} \right] - \frac{\mu}{h} \left[\frac{u_N - u_P}{h} - \frac{u_P - u_S}{h} \right] + \\ & -\frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} (v_{NE} - v_{SE} - v_{NW} + v_{SW}) + \frac{1}{2h} (p_E - p_W) = \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Substituindo as aproximações dadas pelas Eqs. (6.116) - (6.128), Eq. (6.129) na Eq. (6.110) e utilizando-se volumes de controle no qual $\Delta x = \Delta y = h$, tem-se:

$$\begin{aligned} & -\frac{(\lambda + \mu)}{4h} (u_{NE} - u_{SE} - u_{NW} + u_{SW}) - \frac{\mu}{h} \left[\frac{v_E - v_P}{h} - \frac{v_P - v_W}{h} \right] + \\ & -\frac{(\lambda + 2\mu)}{h} \left[\frac{v_N - v_P}{h} - \frac{v_P - v_S}{h} \right] + \frac{1}{2h} (p_N - p_S) = \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (6.131)$$

Substituindo as aproximações dadas pelas Eqs. (6.116) - (6.128) na Eq. (6.115) e utilizando-se volumes de controle no qual $\Delta x = \Delta y = h$ e $\Delta t = \tau$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h\tau} \left(\frac{u_E + u_P}{2} - \frac{u_P + u_W}{2} - \frac{v_N + v_P}{2} + \frac{v_P + v_S}{2} \right) + \\ & -\frac{K}{h} \left[\left(\frac{p_E - p_P}{h} \right)^\theta - \left(\frac{p_P - p_W}{h} \right)^\theta + \left(\frac{p_N - p_P}{h} \right)^\theta - \left(\frac{p_P - p_S}{h} \right)^\theta \right] + \\ & -\frac{h^2}{4Eh\tau} \left(\frac{p_E - p_P}{h} - \frac{p_P - p_W}{h} + \frac{p_N - p_P}{h} - \frac{p_P - p_S}{h} \right) = \mathcal{D}^\theta. \end{aligned} \quad (6.132)$$

Para aplicar o método de Euler implícito utiliza-se a Eq. (4.9). Nesse caso, o ponto P no tempo atual recebe informações dos vizinhos no tempo atual e do próprio P e dos vizinhos no tempo anterior, como pode ser observado na Fig. 21.

Realizada a discretização do problema da poroelasticidade 2D, é possível resolvê-lo utilizando *solvers* previamente definidos e as diferentes varreduras temporais.

Ressalta-se a necessidade de fazer a transferência de coordenadas cardinais em vetoriais (x, y) , para a implementação dos métodos, ou seja, os pontos definidos pelas posições P, E, W, N e S passam a ser representados, respectivamente por (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$ e $(i, j - 1)$.

6.2.2 Método Uzawa

Com os dados apresentados em Ales *et al.* (2011), e que serão relatados na seção de resultados desta tese, pode-se concluir que o método Uzawa parece promissor na composição de um *solver* eficiente e robusto com novas varreduras espaço-tempo para o problema da poroelasticidade. Esta análise refere-se ao fator de convergência, tempo computacional e ordem de complexidade alcançados. Por isso, no estudo do caso 2D, dedica-se apenas a este método.

Para resolver o problema, inicialmente isolando u_P na Eq. (6.130), tem-se:

$$\begin{aligned} & 2\frac{(\lambda + 3\mu)}{h^2} u_P = \mathcal{U} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{h^2} (u_E + u_W) + \frac{\mu}{h^2} (u_N + u_S) + \\ & -\frac{1}{2h} (p_E - p_W) + \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} (v_{NE} - v_{NW} - v_{SE} + v_{SW}). \end{aligned} \quad (6.133)$$

Isolando v_P na Eq. (6.131), tem-se:

$$2 \frac{(\lambda + 3\mu)}{h^2} v_P = \mathcal{V} + \frac{\mu}{h^2} (v_E + v_W) + \frac{(\lambda + 2\mu)}{h^2} (v_N + v_S) + \frac{1}{2h} (p_N - p_S) + \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} (u_{NE} - u_{NW} - u_{SE} + u_{SW}). \quad (6.134)$$

Isolando p_P na Eq. (6.132), tem-se:

$$\left(\frac{4\tau K(\lambda + 2\mu) + h^2}{\tau h^2(\lambda + 2\mu)} \right) p_P = \mathcal{P} + \left(\frac{4\tau K(\lambda + 2\mu) + h^2}{4\tau h^2(\lambda + 2\mu)} \right) (p_E + p_W + p_N + p_S) + \frac{1}{2h\tau} (u_E - u_W + v_N - v_S) + \frac{1}{2h\tau} (u_E^0 - u_W^0 + v_N^0 - v_S^0) + \frac{1}{4\tau(\lambda + 2\mu)} (p_E^0 + p_W^0 - 4p_P^0 + p_N^0 + p_S^0). \quad (6.135)$$

Denominam-se os coeficientes:

$$c_1 = 2 \frac{(\lambda + 3\mu)}{h^2}, \quad c_2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{h^2}, \quad c_3 = \frac{\mu}{h^2}, \quad c_4 = \frac{\lambda + \mu}{4h^2}, \quad c_5 = \frac{1}{2h},$$

$$c_6 = \frac{4\tau K(\lambda + 2\mu) + h^2}{\tau h^2(\lambda + 2\mu)}, \quad c_7 = \frac{1}{2h\tau}, \quad c_8 = \frac{c_6}{4} = \frac{4\tau K(\lambda + 2\mu) + h^2}{4\tau h^2(\lambda + 2\mu)},$$

$$c_9 = \frac{1}{4\tau(\lambda + 2\mu)}.$$

Reescrevendo o sistema dado pelas Eqs. (6.133) - (6.135) em termos dos coeficientes internos, ou seja, i e j variando de 2 até $N - 1$, tem-se:

$$c_1 u_P = \mathcal{U}_P + c_2(u_E + u_W) + c_3(u_N + u_S) - c_5(p_E - p_W) + c_4(v_{NE} - v_{NW} - v_{SE} + v_{SW}), \quad (6.136)$$

$$c_1 v_P = \mathcal{V}_P + c_3(v_E + v_W) + c_2(v_N + v_S) - c_5(p_N - p_S) + c_4(u_{NE} - u_{NW} - u_{SE} + u_{SW}), \quad (6.137)$$

$$c_6 p_P = \mathcal{P}_P + c_8(p_E + p_W + p_N + p_S) - c_7(u_E - u_W + v_N - v_S) + c_7(u_E^0 - u_W^0 + v_N^0 - v_S^0) + c_9(p_E^0 + p_W^0 - 4p_P^0 + p_N^0 + p_S^0). \quad (6.138)$$

Avaliando os contornos, para todo (x, y) sobre a fronteira, como na Eq. (5.9), tem-se:

$$u_f(x, y, t) = v_f(x, y, t) = p_f(x, y, t) = 0. \quad (6.139)$$

Tem-se no contorno leste:

$$u_f = \frac{u_P + u_E}{2} = 0$$

$$v_f = \frac{v_P + v_E}{2} = 0, \quad (6.140)$$

$$p_f = \frac{p_P + p_E}{2} = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u_P &= -u_E \\ v_P &= -v_E \cdot \\ p_P &= -p_E \end{aligned} \quad (6.141)$$

Avaliando o contorno oeste, tem-se:

$$\begin{aligned} u_f &= \frac{u_P + u_W}{2} = 0 \\ v_f &= \frac{v_P + v_W}{2} = 0, \\ p_f &= \frac{p_P + p_W}{2} = 0 \end{aligned} \quad (6.142)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u_P &= -u_W \\ v_P &= -v_W \cdot \\ p_P &= -p_W \end{aligned} \quad (6.143)$$

Analogamente, para os contornos norte e sul, respectivamente, tem-se :

$$\begin{aligned} u_P &= -u_N \\ v_P &= -v_N \\ p_P &= -p_N \end{aligned} \quad (6.144)$$

e

$$\begin{aligned} u_P &= -u_S \\ v_P &= -v_S \cdot \\ p_P &= -p_S \end{aligned} \quad (6.145)$$

Avalia-se agora as Eqs. (6.136) - (6.138) para cada um dos contornos. Para tanto, nesse momento, faz-se necessário o uso da notação (i, j) ao invés da notação por pontos cardeais.

Iniciando pelo contorno oeste, ou seja, para $i = 1$ e $j = 2, \dots, N-1$, e aplicando as condições de contorno: $u(0, j) = -u(1, j)$, $v(0, j) = -v(1, j)$ e $p(0, j) = -p(1, j)$, tem-se:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) u(1, j) &= \mathcal{U}(1, j) + c_2 u(2, j) + c_3 (u(1, j+1) + u(1, j-1)) + \\ &- c_5 (p(2, j) - p(1, j)) + \\ c_4 (v(2, j+1) + v(1, j+1) - v(2, j-1) - v(1, j-1)), \end{aligned} \quad (6.146)$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_3) v(1, j) &= \mathcal{V}(1, j) + c_3 v(2, j) + c_2(v(1, j + 1) + v(1, j - 1)) + \\
&- c_5(p(1, j + 1) - p(1, j - 1)) + \\
c_4(u(2, j + 1) + u(1, j + 1) - u(2, j - 1) - u(1, j - 1)), &
\end{aligned} \tag{6.147}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + c_8) p(1, j) &= \mathcal{P}(1, j) + c_8(p(2, j) + p(1, j + 1) + p(1, j - 1)) + \\
&- c_7(u(2, j) + u(1, j) + v(1, j + 1) - v(1, j - 1)) + \\
&+ c_7(u^0(2, j) + u^0(1, j) + v^0(1, j + 1) - v^0(1, j - 1)) + \\
&- c_9(p^0(2, j) - 5p^0(1, j) + p^0(1, j + 1) + p^0(1, j - 1)). &
\end{aligned} \tag{6.148}$$

Avaliando o contorno leste, ou seja, para $i = N$ e $j = 2, \dots, N - 1$, e aplicando as condições de contorno: $u(N + 1, j) = -u(N, j)$, $v(N + 1, j) = -v(N, j)$ e $p(N + 1, j) = -p(N, j)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2) u(N, j) &= \mathcal{U}(N, j) + c_2 u(N - 1, j) + c_3(u(N, j + 1) + u(N, j - 1)) + \\
&- c_5(-p(N, j) - p(N - 1, j)) + \\
&+ c_4(-v(N, j + 1) - v(N - 1, j + 1) + v(N, j - 1) + v(N - 1, j - 1)), &
\end{aligned} \tag{6.149}$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_3) v(N, j) &= \mathcal{V}(N, j) + c_3 v(N - 1, j) + c_2(v(N, j + 1) + v(N, j - 1)) + \\
&- c_5(p(N, j + 1) - p(N, j - 1)) + \\
&+ c_4(-u(N, j + 1) - u(N - 1, j + 1) + u(N, j - 1) + u(N - 1, j - 1)), &
\end{aligned} \tag{6.150}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + c_8) p(N, j) &= \mathcal{P}(N, j) + c_8(p(N - 1, j) + p(N, j + 1) + p(N, j - 1)) + \\
&+ c_7(u(N, j) + u(N - 1, j) - v(N, j + 1) + v(N, j - 1)) + \\
&- c_7(u^0(N, j) + u^0(N - 1, j) - v^0(N, j + 1) + v^0(N, j - 1)) + \\
&- c_9(p^0(N - 1, j) - 5p^0(N, j) + p^0(N, j + 1) + p^0(N, j - 1)). &
\end{aligned} \tag{6.151}$$

Avaliando o contorno sul, ou seja, para $i = 2, \dots, N - 1$ e $j = 1$, e aplicando as condições de contorno: $u(i, 0) = -u(i, 1)$, $v(i, 0) = -v(i, 1)$ e $p(i, 0) = -p(i, 1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_3) u(i, 1) &= \mathcal{U}(i, 1) + c_2(u(i + 1, 1) + u(i - 1, 1)) + c_3 u(i, 2) + \\
&- c_5(p(i + 1, 1) - p(i - 1, 1)) + \\
c_4(v(i + 1, 2) - v(i - 1, 2) + v(i + 1, 1) - v(i - 1, 1)), &
\end{aligned} \tag{6.152}$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2) v(i, 1) &= \mathcal{V}(i, 1) + c_3(v(i + 1, 1) + v(i - 1, 1)) + c_2v(i, 2) + \\
&- c_5(p(i, 2) + p(i, 1)) + \\
c_4(u(i + 1, 2) - u(i - 1, 2) + u(i + 1, 1) - u(i - 1, 1)), &
\end{aligned} \tag{6.153}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + c_8) p(i, 1) &= \mathcal{P}(i, 1) + c_8(p(i + 1, 1) + p(i - 1, 1) + p(i, 2)) + \\
&- c_7(u(i + 1, 1) - u(i - 1, 1) + v(i, 2) + v(i, 1)) + \\
&+ c_7(u^0(i + 1, 1) - u^0(i - 1, 1) + v^0(i, 2) + v^0(i, 1)) + \\
&- c_9(p^0(i + 1, 1) + p^0(i - 1, 1) - 5p^0(i, 1) + p^0(i, 2)). &
\end{aligned} \tag{6.154}$$

Avaliando o contorno norte, ou seja, para $i = 2, \dots, N - 1$ e $j = N$, e aplicando as condições de contorno: $u(i, N + 1) = -u(i, N)$, $v(i, N + 1) = -v(i, N)$ e $p(i, N + 1) = -p(i, N)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_3) u(i, N) &= \mathcal{U}(i, N) + c_2(u(i + 1, N) + u(i - 1, N)) + c_3u(i, N - 1) + \\
&- c_5(p(i + 1, N) - p(i - 1, N)) + \\
&+ c_4(-v(i + 1, N) + v(i - 1, N) - v(i + 1, N - 1) + v(i - 1, N - 1)), &
\end{aligned} \tag{6.155}$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2) v(i, N) &= \mathcal{V}(i, N) + c_3(v(i + 1, N) + v(i - 1, N)) + c_2v(i, N - 1) + \\
&- c_5(-p(i, N) - p(i, N - 1)) + \\
c_4(-u(i + 1, N) + u(i - 1, N) - u(i + 1, N - 1) + u(i - 1, N - 1)), &
\end{aligned} \tag{6.156}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + c_8) p(i, N) &= \mathcal{P}(i, N) + c_8(p(i + 1, N) + p(i - 1, N) + p(i, N - 1)) + \\
&+ c_7(-u(i + 1, N) + u(i - 1, N) + v(i, N) + v(i, N - 1)) + \\
&- c_7(-u^0(i + 1, N) + u^0(i - 1, N) + v^0(i, N) + v^0(i, N - 1)) + \\
&- c_9(p^0(i + 1, N) + p^0(i - 1, N) - 5p^0(i, N) + p^0(i, N - 1)). &
\end{aligned} \tag{6.157}$$

Avalia-se agora as equações para os cantos. Iniciando-se pelo volume de controle sudoeste, ou seja, para $i = 1$ e $j = 1$ e as condições de contorno $u(i, 0) = -u(i, 1)$, $v(1, 0) = -v(1, 1)$ e $p(1, 0) = -p(1, 1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) u(1, 1) &= \mathcal{U}(1, 1) + c_2u(2, 1) + c_3u(1, 2) + \\
&- c_5(p(2, 1) - p(1, 1)) + \\
c_4(v(2, 2) + v(1, 2) + v(2, 1) + v(1, 1)), &
\end{aligned} \tag{6.158}$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) v(1, 1) &= \mathcal{V}(1, 1) + c_3(v(2, 1)) + c_2(v(1, 2)) + \\
&- c_5(p(1, 2) + p(1, 1)) + \\
&+ c_4(u(2, 2) + u(1, 2) + u(2, 1) + u(1, 1)),
\end{aligned} \tag{6.159}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + 2c_8) p(1, 1) &= \mathcal{P}(1, 1) + c_8(p(2, 1) + p(1, 2)) + \\
&- c_7(u(2, 1) + u(1, 1) + v(1, 2) + v(1, 1)) + \\
&+ c_7(u^0(2, 1) + u^0(1, 1) + v^0(1, 2) + v^0(1, 1)) + \\
&- c_9(p^0(2, 1) - 6p^0(1, 1) + p^0(1, 2)).
\end{aligned} \tag{6.160}$$

No volume de controle noroeste, ou seja, para $i = 1$ e $j = N$ e as condições de contorno são dadas por $u(1, N + 1) = -u(1, N)$, $v(1, N + 1) = -v(1, N)$ e $p(1, N + 1) = -p(1, N)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) u(1, N) &= \mathcal{U}(1, N) + c_2u(2, N) + c_3u(1, N - 1) + \\
&- c_5(p(2, N) - p(1, N)) + \\
&+ c_4(-v(2, N) - v(1, N) - v(2, N - 1) - v(1, N - 1)),
\end{aligned} \tag{6.161}$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) v(1, N) &= \mathcal{V}(1, N) + c_3v(2, N) + c_2v(1, N - 1) + \\
&- c_5(-p(1, N) - p(1, N - 1)) + \\
&+ c_4(-u(2, N) - u(1, N) - u(2, N - 1) - u(1, N - 1)),
\end{aligned} \tag{6.162}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + 2c_8) p(1, N) &= \mathcal{P}(1, N) + c_8(p(2, N) + p(1, N - 1)) + \\
&- c_7(u(2, N) + u(1, N) - v(1, N) - v(1, N - 1)) + \\
&+ c_7(u^0(2, N) + u^0(1, N) - v^0(1, N) - v^0(1, N - 1)) + \\
&- c_9(p^0(2, N) - 6p^0(1, N) + p^0(1, N - 1)).
\end{aligned} \tag{6.163}$$

No volume de controle nordeste, ou seja, para $i = N$ e $j = N$ e as condições de contorno são dadas por $u(N, N + 1) = -u(N, N)$, $v(N, N + 1) = -v(N, N)$ e $p(N, N + 1) = -p(N, N)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) u(N, N) &= \mathcal{U}(N, N) + c_2u(N - 1, N) + c_3u(N, N - 1) + \\
&- c_5(-p(N, N) - p(N - 1, N)) + \\
&c_4(v(N, N) + v(N - 1, N) + v(N, N - 1) + v(N - 1, N - 1)),
\end{aligned} \tag{6.164}$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) v(N, N) &= \mathcal{V}(N, N) + c_3 v(N - 1, N) + c_2 v(N, N - 1) + \\
&- c_5(-p(N, N) - p(N, N - 1)) + \\
&+ c_4(u(N, N) + u(N - 1, N) + u(N, N - 1) + u(N - 1, N - 1)),
\end{aligned} \tag{6.165}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + 2c_8) p(N, N) &= \mathcal{P}(N, N) + c_8(p(N - 1, N) + p(N, N - 1)) + \\
&+ c_7(u(N, N) + u(N - 1, N) + v(N, N) + v(N, N - 1)) + \\
&- c_7(u^0(N, N) + u^0(N - 1, N) + v^0(N, N) + v^0(N, N - 1)) + \\
&- c_9(p^0(N - 1, N) - 6p^0(N, N) + p^0(N, N - 1)).
\end{aligned} \tag{6.166}$$

Finalmente, no volume de controle sudeste, ou seja, para $i = N$ e $j = 1$ e as condições de contorno são dadas por $u(N + 1, 1) = -u(N, 1)$, $v(N + 1, 1) = -v(N, 1)$ e $p(N + 1, 1) = -p(N, 1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) u(N, 1) &= \mathcal{U}(N, 1) + c_2 u(N - 1, 1) + c_3 u(N, 2) + \\
&- c_5(-p(N, 1) - p(N - 1, 1)) + \\
&+ c_4(-v(N, 2) - v(N - 1, 2) - v(N, 1) - v(N - 1, 1)),
\end{aligned} \tag{6.167}$$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2 + c_3) v(N, 1) &= \mathcal{V}(N, 1) + c_3 v(N - 1, 1) + c_2 v(N, 2) + \\
&- c_5(p(N, 2) + p(N, 1)) + \\
&+ c_4(-u(N, 2) - u(N - 1, 2) - u(N, 1) - u(N - 1, 1)),
\end{aligned} \tag{6.168}$$

$$\begin{aligned}
(c_6 + 2c_8) p(N, 1) &= \mathcal{P}(N, 1) + c_8(p(N - 1, 1) + p(N, 2)) + \\
&- c_7(-u(N, 1) - u(N - 1, 1) + v(N, 2) + v(N, 1)) + \\
&+ c_7(-u^0(N, 1) - u^0(N - 1, 1) + v^0(N, 2) + v^0(N, 1)) + \\
&- c_9(p^0(N - 1, 1) - 6p^0(N, 1) + p^0(N, 2)).
\end{aligned} \tag{6.169}$$

As Eqs. (6.136) e (6.136) são definidas para os volumes internos e as Eqs. (6.146) - (6.169) para os volumes de fronteira formam a discretização 2D do problema da poroelasticidade com o uso do *solver* Uzawa.

Neste capítulo, foram apresentados os modelos numéricos 1D e 2D do problema da poroelasticidade. Descreveu-se os passos necessários para obtenção das equações através do método de volumes finitos, assim como suas condições de contorno usando o processo de volumes fictícios.

Para o caso 1D, as equações foram preparadas para os métodos Vanka de 4 cores, *Fixed-Stress* e Uzawa. Para o caso 2D, as equações foram desenvolvidas apenas para o método Uzawa, devido as características da varredura proposta.

7 NOVO MÉTODO DE VARREDURA ESPAÇO-TEMPO

O algoritmo Uzawa clássico é baseado no ALGORITMO 5, em que primeiro suaviza os vetores u e v para todos os volumes de controle, utilizando u^0 , v^0 e p^0 . Os sistemas desse processo iterativo faz uso do método de Gauss-Seidel simétrico como suavizador no ciclo W. Com esses dados determina-se o resíduo da pressão para em seguida atualizar p .

Diferentemente do *solver* Uzawa clássico, aqui propôs-se ALGORITMO 6, usando o método de Uzawa com o *Multigrid*:

Algoritmo 6: Uzawa(l)

```

1 para  $It_{int} = 1$  até  $it_{uv}$  faça
2   | Resolver o sistema dado pelas Eqs. (6.136) - (6.137) usando
   | MG-W-Ciclo(I) (ALGORITMO 2)
3 fim
4 Calcular:  $res(p)$  obtida a partir da Eq. (6.138)
5 Atualizar: a variável  $p \leftarrow p + \omega.res(p)$ 

```

No ALGORITMO 6, o *Multigrid* no passo interno é limitado a dois ciclos, It_{int} é o número de suavizações internas, it_{uv} é o número de suavizações das variáveis deslocamento u e v que são realizadas dentro do ciclo W, $res(p)$ corresponde ao resíduo da variável pressão e o valor de ω é calculado pela Eq. (4.8).

A varredura temporal *Space-Time* (VANDEWALLE; HORTON, 1995) possui uma característica específica para o método *Multigrid*, pois adota a estratégia de semi-engrossamento no espaço e no tempo baseada no fator de anisotropia λ . Esse fator é uma relação entre o passo de tempo e de espaço em cada nível da malha. Os métodos espaço-tempo apresentam vantagens quando é necessário fazer refinamento local no domínio espaço-tempo. Esse método se caracteriza por usar um suavizador por pontos, e a cada iteração, todos os pontos no espaço e no tempo têm as suas informações atualizadas (FALGOUT *et al.*, 2014; FALGOUT *et al.*, 2017).

Franco e Pinto (2024) descreveram uma adaptação do método *Space-Time*, que envolve o engrossamento padrão tanto no espaço quanto no tempo. Para isso, utilizaram uma estratégia de suavização adaptativa com base em λ , resolvendo o problema com *solver* linha no espaço, ou plano de relaxação, e linha no tempo.

Neste trabalho, propõe-se uma nova varredura espaço-tempo, descrita no ALGORITMO 7, onde \mathbb{I}_h^H and \mathbb{I}_H^h são, respectivamente os operadores de restrições

e prolongação do espaço tempo; h representa o espaçamento na malha fina e H o espaçamento na malha grossa; and ν_1 e ν_2 , respectivamente os números de pré e pós-suavização.

Algoritmo 7: Novo-STMG-W-Ciclo(l)

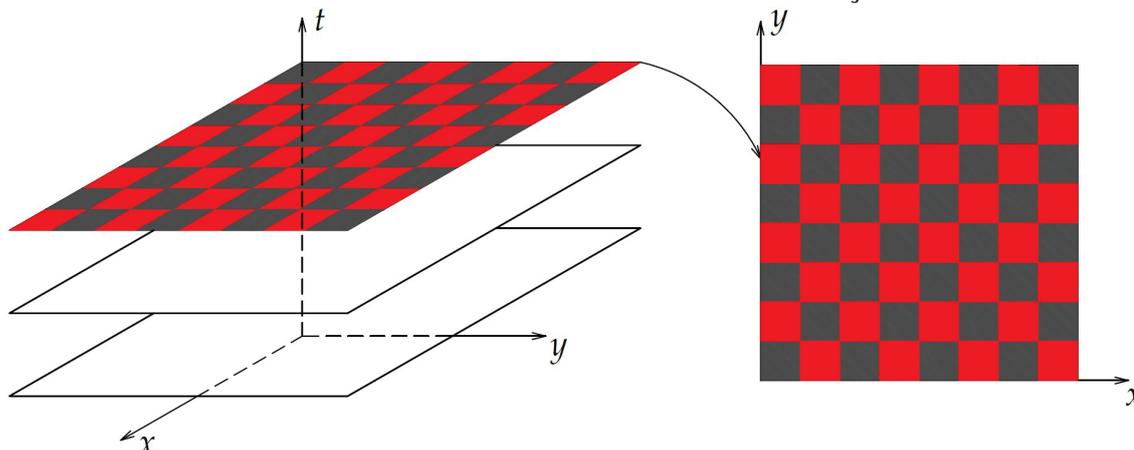
```

1 Entrada: dados de entrada
2 Calcular: coeficientes e termos fontes
3 Calcular:  $u, v$  e  $p$  para todos os volumes de controle
4 Calcular: resíduos de  $u, v$  e  $p$ 
5 enquanto Não alcanç $ar$  o critério de parada faça
6   se  $l$  é o nível de malha mais grossa então
7     Resolver o sistema dado pelas Eqs. (6.136) - (6.137) na malha
        $\Omega^{2^{l-1}h}$  usando o solver Uzawa( $l$ ) (ALGORITMO 6)
8   senão
9     Suavizar  $\nu_1$  vezes sistema dado pelas Eqs. (6.136) - (6.137) na
       malha  $\Omega^{2^{l-1}h}$  usando o Uzawa( $l$ )
10    Calcular e restringir o resíduo de  $u, v$  e  $p$  usando o operador  $\mathbb{I}_{2^{l-1}h}^{2h}$ 
11    para  $It_{int} \leftarrow 1$  até  $it_{uv}$  faça
12      Resolver o sistema dado pelas Eqs. (6.136) - (6.137) usando
        Novo-STMG-W-Ciclo( $l+1$ )
13    fim
14    Interpolar e corrigir a aproximação usando o operador  $\mathbb{I}_{2^lh}^{2^{l-1}h}$ 
15    Suavizar  $\nu_2$  vezes sistema dado pelas Eqs. (6.136) - (6.137) na
       malha mais fina  $\Omega^{2^{l-1}h}$ 
16  fim
17 fim

```

Pode-se mostrar na FIGURA 35 que a varredura ocorre em planos no tempo e que o Uzawa é aplicado na variável deslocamento.

FIGURA 35 – ESQUEMA NOVA VARREDURA ESPAÇO-TEMPO



FONTE: A autora (2024)

Pode-se notar que tal varredura é altamente paralelizável, pois permite a paralelização no tempo e no espaço. Note que os passos 7 e 9 deste ALGORITMO 7, pode ser feito para todos os passos de tempo em paralelo e o ALGORITMO 6, pode ser feito usando um *solver* paralelo no espaço.

A escolha do ciclo W, em vez do ciclo V, se baseia em sua maior robustez para problemas de poroelasticidade, como demonstrado em diversos estudos como em Franco *et al.* (2018b), Luo *et al.* (2016), Luo *et al.* (2018), entre outros.

Destaca-se que o método Gauss-Seidel Red-Black simétrico é utilizado, pois garante a paralelização do algoritmo.

Neste capítulo, foram apresentados os algoritmos para o método Uzawa, seguidos pelo algoritmo com a nova varredura do tipo *Space-Time*, proposta neste trabalho.

8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O comparativo entre os desempenhos das metodologias *Singlegrid* e *Multigrid* é realizado por meio do fator de convergência médio (ρ_m), a ordem de complexidade (γ) e *speed-up* (S).

O fator de convergência, que aproxima o fator de convergência assintótica, é calculado por (TROTTEBERG *et al.*, 2000):

$$\rho = \frac{\|res_{MC}\|_{\infty}}{\|res_{MC-1}\|_{\infty}}, \quad (8.1)$$

onde res_{MC} é o valor do resíduo no MC -ésimo ciclo *Multigrid* ou iteração do *Singlegrid*.

O fator de convergência médio é dado por:

$$\rho_m = \sqrt[MC]{\frac{\|res_{MC}\|_{\infty}}{\|res_0\|_{\infty}}}, \quad (8.2)$$

onde res_0 é o valor do resíduo na estimativa inicial.

Sabe-se que, quanto mais próximo de zero está o fator ρ_m , melhor será a convergência (TROTTEBERG *et al.*, 2000). O contrário se dá quando ρ_m está próximo de uma unidade.

O resultado do tempo computacional (t_{cpu}) permite realizar um ajuste geométrico (BURDEN; FAIRES, 2016) para verificar a complexidade de um algoritmo utilizando a equação:

$$t_{cpu} = c \cdot \mathbf{N}^{\gamma}, \quad (8.3)$$

onde c é coeficiente relacionado ao método, γ representa a ordem de complexidade do suavizador (geometricamente, γ está associado à inclinação da curva de ajuste), e $\mathbf{N} = N_x \times N_t$ (para o caso unidimensional) ou $\mathbf{N} = N_x \times N_y \times N_t$ (para o caso bidimensional) é o número total de incógnitas do problema, onde N_x , N_y e N_t representam o número de volumes de controle nas direções x , y e t , respectivamente.

Teoricamente, valores de γ próximos de 1 e c tendendo a 0 representam melhores desempenhos do algoritmo empregado (TROTTEBERG *et al.*, 2000). Particularmente, no *Multigrid*, estes valores implicam que o tempo de CPU aumenta de forma linear com o crescimento do tamanho da malha, demonstrando a eficiência computacional do método em diferentes escalas.

Para avaliar o *speed-up* (S), métrica adotada para medir o aumento da velocidade do algoritmo *Multigrid* em relação ao *Singlegrid*, utiliza-se (MALACARNE *et al.*, 2022a):

$$S = \frac{t_{cpu}(SG)}{t_{cpu}(MG)}. \quad (8.4)$$

Os experimentos numéricos foram baseados em Wang (2000) que utiliza o valor da constante E e de K com valores realísticos, escolhidos da seguinte maneira:

- Caso 1: $K = 1$ e $E = 1$ com o intuito de verificação;
- Caso 2: $K = 10^{-9}$ e $E = 10^6$ representando um material equivalente a argila;
- Caso 3: $K = 10^{-6}$ e $E = 10^4$ representando um material equivalente ao silte;
- Caso 4: $K = 10^{-3}$ e $E = 10^6$ representando um material equivalente a areia.

O *software* utilizado para o código computacional foi o MatLab R2023b - academic. Os testes foram executados em um computador com processador 13th Gen Intel(R) Core (TM) i5-13600K, 3500 MHz, 14 Núcleos e 20 processadores lógicos, 64 GB de RAM, Microsoft Windows 11 Home e Sistema operacional de 64 bits.

8.1 PROBLEMA 1D

Nessa seção, utilizou-se a constante E com valor fixo de 10^4 , variando os valores da constante K entre 10^{-12} até 10^0 , para avaliar as características dos *solvers*. Em seguida, comparou-se com os resultados apresentados em Franco (2017).

Para a varredura *Time-Stepping* utiliza-se o método *Multigrid* ciclo W, com operador de restrição do tipo ponderação completa e operador de prolongação do tipo interpolação constante por partes, definiu-se $\nu_1 = \nu_2 = 1$ como sendo o número de pré e pós-suavização, considerou-se $it_{MC} = 30$ como sendo o número de ciclos *Multigrid*. O número de níveis de malhas para o *Singlegrid* e *Multigrid* limitou-se a 10, ou seja, $N_x = 2^{10} = 1024$ volumes na malha espacial, esses limitantes se deram pelo uso de memória e de tempo computacional.

O critério de parada para os três *solvers* Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa foi baseado no resíduo adimensionalizado pela estimativa inicial, ou seja,

$$\frac{\|res_{MC}\|_{\infty}}{\|res_0\|_{\infty}} < \epsilon, \quad (8.5)$$

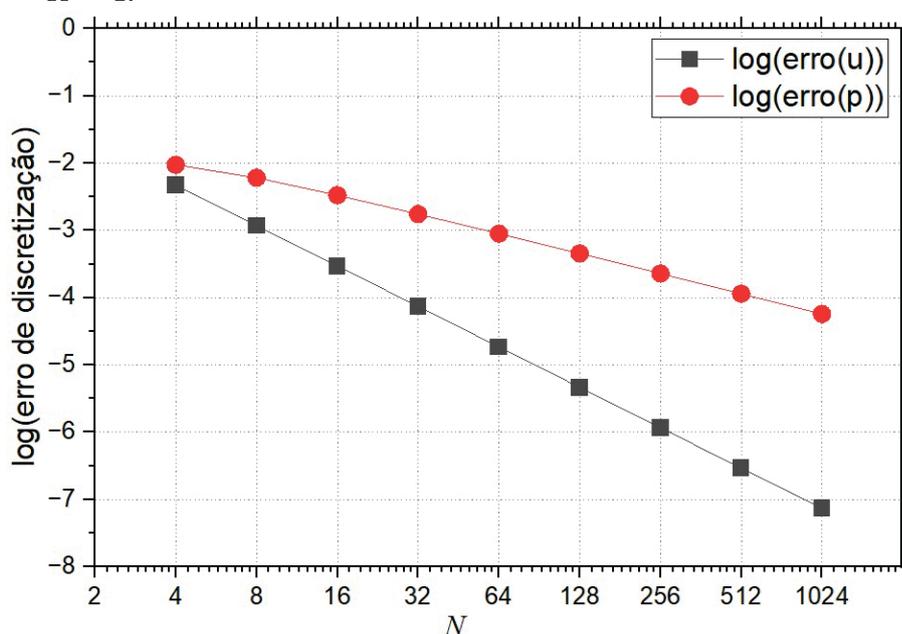
considerando $\epsilon = 10^{-6}$ fixado.

Para fazer o comparativo proposto, utiliza-se o erro de discretização, o fator de convergência e a ordem de complexidade.

8.1.1 Erro de discretização

Na FIGURA 36, apresenta-se o gráfico para o *solver Fixed-Stress* analisado em $K = 1$ e $E = 10^4$. Percebe-se que a queda do erro de discretização é diretamente proporcional ao número de incógnitas N . Comparando o número de malhas com o erro obtido, pode-se verificar a convergência do método. Os *solvers* Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa apresentam o mesmo tipo de queda de erro. Esse comportamento é semelhante qualitativamente para outros valores de K , e quantitativamente para os outros *solvers*. O processo iterativo foi aplicado até atingir o erro de máquina (erro de arredondamento), pois, como aqui o interesse é avaliar o erro de arredondamento, tem-se que minimizar outras fontes de erro.

FIGURA 36 – ERRO DE DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO *FIXED-STRESS* COM $E = 10^4$ E $K = 1$.



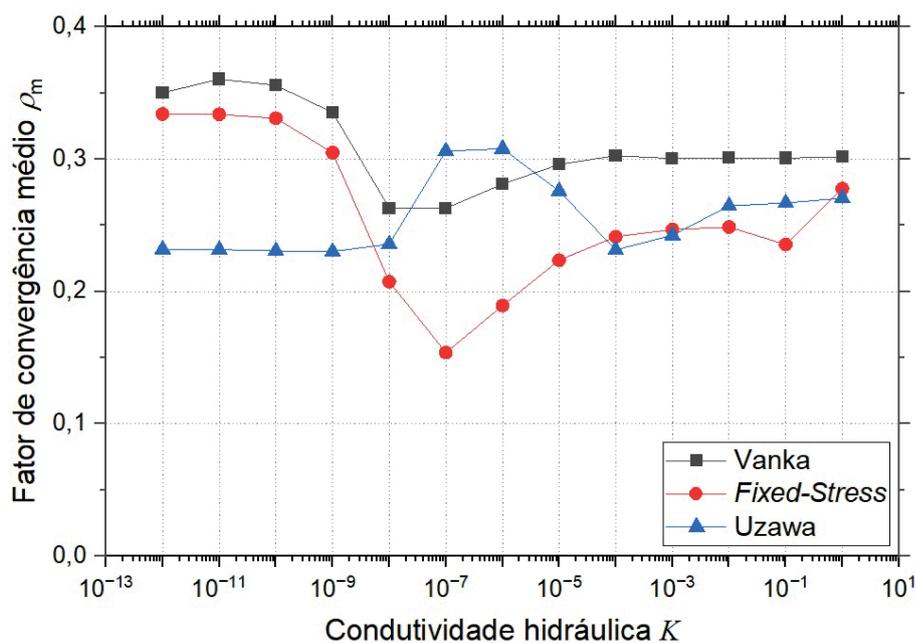
FONTE: A autora (2024)

Uma característica do problema da poroelasticidade é que o erro para a variável deslocamento é sempre menor do que o erro para a variável pressão (MARCHI, 2001). Além disso, como pode ser observado na FIGURA 36, as inclinações das curvas referentes aos erros destas variáveis demonstram que a queda do erro de discretização é mais acentuada para a variável deslocamento, à medida que N cresce.

8.1.2 Fator de convergência

Na FIGURA 37 apresenta-se a comparação entre os fatores de convergência médio (ρ_m) dos métodos *Multigrid* quando utilizam-se os suavizadores Vanka 4 cores, *Fixed-Stress* e Uzawa para $N = 1024$ volumes (10 níveis de malha), $E = 10^4$ e vários valores de K :

FIGURA 37 – FATOR DE CONVERGÊNCIA MÉDIO ρ_m EM FUNÇÃO DO VALOR DE K PARA A MALHA COM $N = 1024$ VOLUMES E $E = 10^4$ E VÁRIOS VALORES DE K .



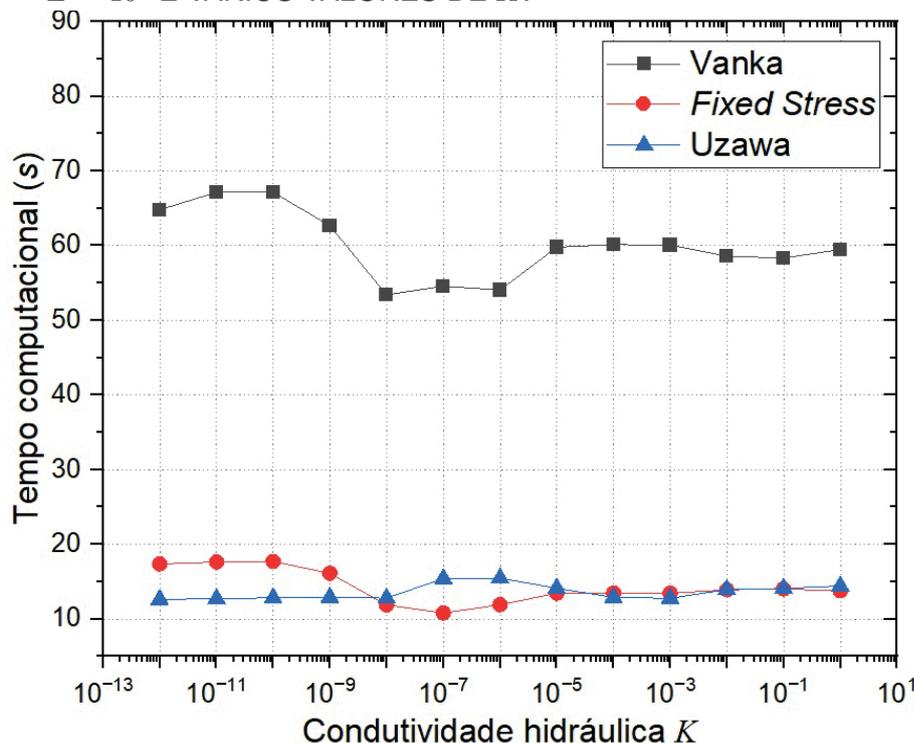
FONTE: A autora (2024)

Nota-se que o ρ_m tem valor máximo menor que 0,3, o que significa que o problema tem bom fator de convergência (convergência rápida) para os três *solvers* analisados. Além disso, o *solver* Uzawa tem melhores ρ_m para valores de K entre 10^{-12} e 10^{-9} , e para K entre 10^{-4} e 10^0 . No intervalo complementar, ou seja, K entre 10^{-8} e 10^{-5} , *Fixed-Stress* é que apresenta os melhores valores de ρ_m .

8.1.3 Ordem de complexidade

Na FIGURA 38 apresenta-se a análise do tempo computacional *versus* $\log(K)$ com os suavizadores analisados utilizando-se *Multigrid* para $N = 1024$, $E = 10^4$ e vários valores de K .

FIGURA 38 – TEMPO COMPUTACIONAL EM FUNÇÃO DO VALOR DE K COM $N = 1024$ E $E = 10^4$ E VÁRIOS VALORES DE K .



FONTE: A autora (2024)

Comparando o tempo computacional, tem-se que os métodos *Fixed-Stress* e Uzawa gastam menos tempo para atingir o critério de parada, do que o método Vanka 4 cores, que apresenta tempo computacional, pelo menos 5 vezes maior que os tempos necessários para os outros dois suavizadores comparados. Uma justificativa para o tempo computacional do método Vanka ser superior ao *Fixed-Stress* e ao Uzawa está na filosofia do método que consiste em resolver um sistema de equações para cada ponto, enquanto que para os outros métodos apenas suavizam.

Luo *et al.* (2017) comparam os métodos Uzawa e Vanka, destacando que o método Uzawa requer 50% menos operações em relação ao Vanka. Além disso, o método Uzawa é aproximadamente 30% mais rápido comparado com o método Vanka.

Para o problema analisado, os dados sobre os parâmetros c e γ para $K = 10^{-12}$, $K = 10^{-6}$ e $K = 10^{-2}$, $E = 10^4$ e os valores de N variando de 32 até 1024, estão disponibilizado na TABELA 3.

TABELA 3 – PARÂMETROS DE AJUSTE GEOMÉTRICO.

Solver	$K = 10^{-12}$		$K = 10^{-6}$		$K = 10^{-2}$	
	c	γ	c	γ	c	γ
Vanka 4 cores	0,020	1,09	0,017	1,12	0,025	1,03
Fixed-Stress	0,009	1,10	0,008	1,11	0,008	1,12
Uzawa	0,008	1,12	0,008	1,12	0,009	1,06

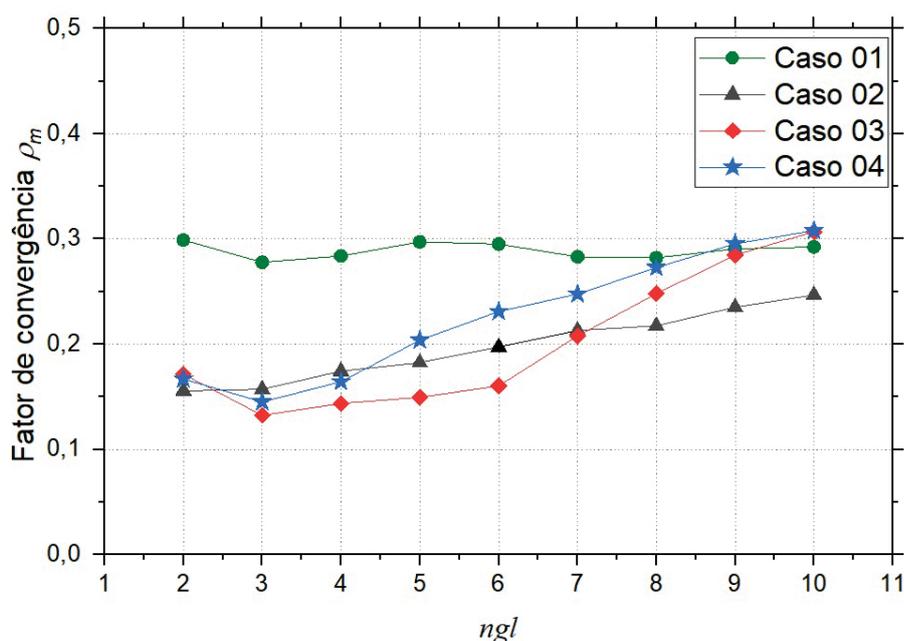
FONTE: A autora (2024)

Na TABELA 3, pode-se notar que os valores de c e de γ estão de acordo com a literatura, ou seja, $c \approx 0$ e $\gamma \approx 1$ (WESSELING, 1992; TROTTEBERG *et al.*, 2000). Com isso, pode-se ver também que os métodos estudados Vanka 4 cores, *Fixed-Stress* e Uzawa possuem ordens de complexidade γ equivalentes, portanto, não seria este o único parâmetro de análise de robustez e/ou eficiência.

Analisando-se os dados das FIGURAS 37 e 38 e da TABELA 3, pode-se concluir que os métodos Uzawa e *Fixed-Stress* requerem uma atenção especial no que diz respeito à eficiência e robustez.

Com o objetivo de fazer testes usando a nova varredura, foram realizados testes para o método Uzawa para os 4 casos escolhidos na varredura *Time-Stepping*. A FIGURA 39 apresenta os resultados para o fator de convergência. Evidencia-se que n_{gl} é o número de níveis de malha no método *Multigrid* e representa $2^{n_{gl}}$ volumes de controle.

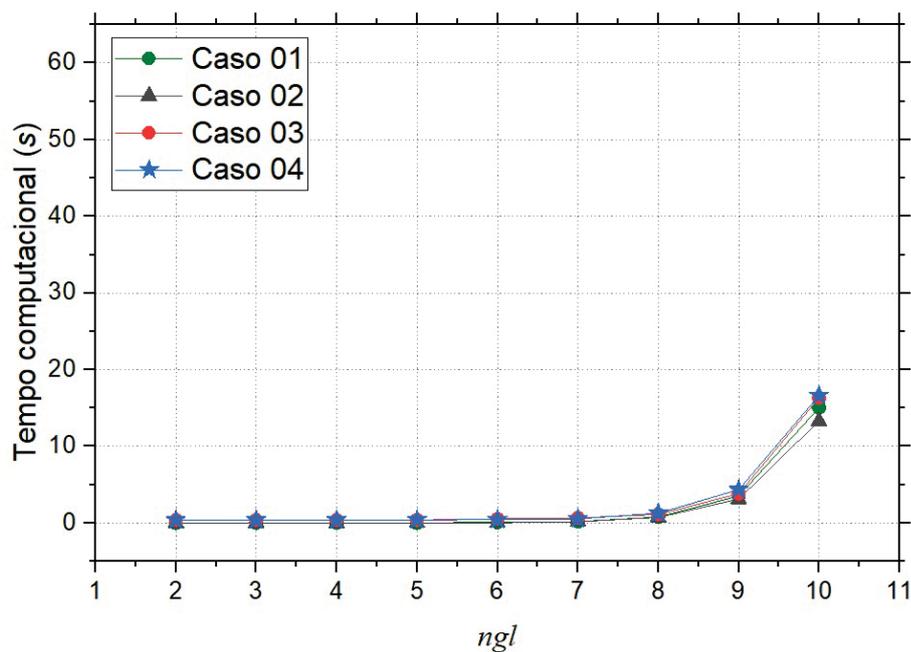
FIGURA 39 – MÉTODO UZAWA



FONTE: A autora (2024)

A FIGURA 40 apresenta os resultados para o tempo computacional:

FIGURA 40 – TEMPO COMPUTACIONAL PARA O MÉTODO UZAWA



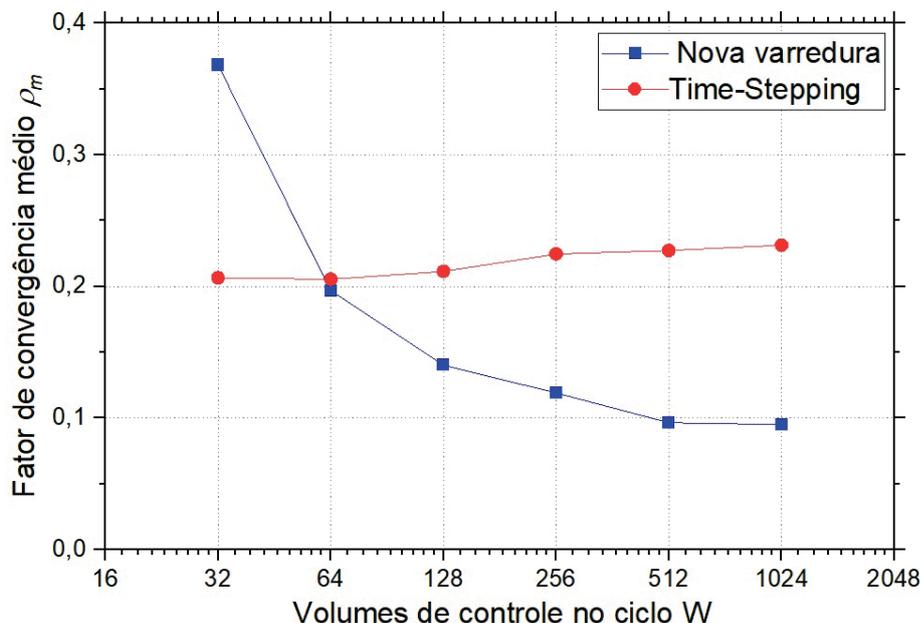
FONTE: A autora (2024)

Esses testes mostram a eficiência do Método Uzawa. Testes similares com os *solvers* Vanka e *Fixed-Stress* estão disponíveis no Anexo B.

Com os testes realizados, foi identificado que os métodos Uzawa e *Fixed-Stress* se destacam em relação ao Vanka, devido à economia de tempo computacional. Para a varredura no espaço-tempo proposta, o objetivo é resolver primeiro a variável deslocamento e, em seguida, a pressão, o que não é possível com o método *Fixed-Stress*, que segue a abordagem inversa.

Foram realizados testes utilizando a nova varredura com o *solver* Uzawa, e comparada com a varredura *Time-Stepping*, conforme apresentado na FIGURA 41.

FIGURA 41 – FATOR DE CONVERGÊNCIA COM A VARREDURAS *TIME-STEPPING* E A NOVA VARREDURA PARA O CASO 3.



FONTE: A autora (2024)

8.2 PROBLEMA 2D UTILIZANDO A NOVA VARREDURA

Os métodos Uzawa e *Fixed-Stress* tiveram destaque em relação ao tempo computacional em comparação ao método Vanka 4 cores. Nesta seção, o *Fixed-Stress* foi descartado devido ao processo inicial na variável da pressão p , o que impossibilitou a aplicação desta nova varredura proposta. Além disso, na literatura não foram encontrados estudos envolvendo o *solver* Uzawa com a varredura *Space-Time*. Assim, foi selecionado apenas o método Uzawa para avaliar a nova varredura *Space-Time*.

Para a nova varredura *Space-Time*, proposta no ALGORITMO 7, utiliza-se o método *Multigrid* ciclo W, com operador de restrição do tipo ponderação completa e operador de prolongação do tipo interpolação constante por partes e define-se $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 1$ (pré- e pós-suavização). Para a relaxação no plano, o *solver* Uzawa é aplicado $it_{MC} = 2$ para as variáveis u e v , considerando it_{MC} como sendo o número de ciclos *Multigrid*. O número de níveis de malhas para o *Multigrid* limitou-se a 13, ou seja, $N_{xy} = N_x \times N_y = 2^{13} \times 2^{13} = 8192 \times 8192$ volumes na malha espacial, e no *Singlegrid* em 10, ou seja, $N_{xy} = 2^{10} \times 2^{10} = 1024 \times 1024$ volumes na malha espacial, esses limitantes se deram pelo uso de memória e de tempo computacional, respectivamente. Além disso, o tempo final ficou definido como $t_f = 10$ s. O critério de parada foi baseado na queda do resíduo adimensionalizado pela estimativa inicial, fixada em 10^{-8} , como sendo:

$$res = ||res_u||_{\infty} + ||res_v||_{\infty} + ||res_p||_{\infty}, \quad (8.6)$$

onde res_u , res_v e res_p representam, respectivamente, o resíduo obtido nas variáveis u , v e p (WIENANDS *et al.*, 2004; FRANCO; PINTO, 2024). O *software* utilizado para o código computacional foi o MatLab R2023b - academic. Os testes foram executados em um computador com processador 13th Gen Intel(R) Core (TM) i5-13600K, 3500 MHz, 14 Núcleos e 20 processadores lógicos, 64 GB de RAM, Microsoft Windows 11 Home e Sistema operacional de 64 bits.

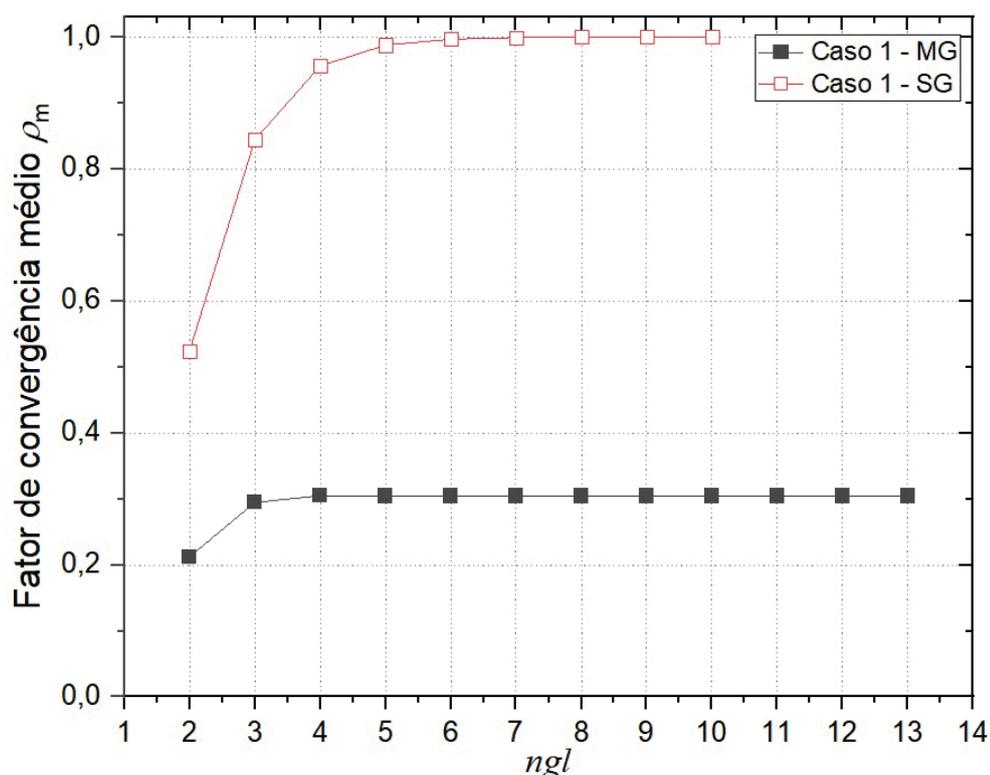
A verificação do código utilizado nesta tese foi realizada em comparação com as soluções apresentadas nos artigos de Franco *et al.* (2018b) e Luo *et al.* (2016).

A seguir, são apresentadas as métricas que demonstram a robustez, a eficiência e o desempenho do método *Multigrid* com o *solver* Uzawa e a varredura proposta.

8.2.1 Fator de convergência

Na FIGURA 42 tem-se o comparativo do fator de convergência médio (ρ_m) com o refino das malhas para o método *Multigrid* e para o *Singlegrid*, considerando as constantes $K = 1$ e $E = 1$ (Caso 1). Deve-se lembrar que n_{gl} é o número de níveis de malha no método *Multigrid* e representa $2^{n_{gl}}$ volumes de controle.

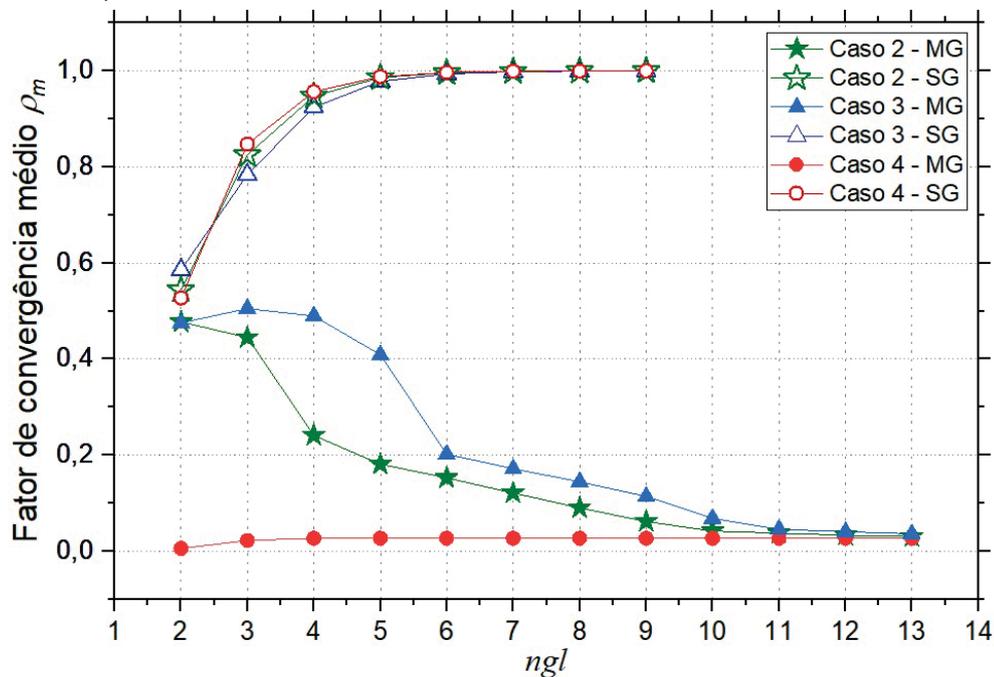
FIGURA 42 – COMPARATIVO DE ρ_m ENTRE *SINGLEGRID* E *MULTIGRID* PARA O CASO 1.



FONTE: A autora (2024)

Na FIGURA 43 tem-se o comparativo do fator de convergência médio (ρ_m) com o refino das malhas para o método *Multigrid* e para o *Singlegrid*, considerando os casos 2, 3 e 4.

FIGURA 43 – COMPARATIVO DE ρ_m ENTRE *SINGLEGRID* E *MULTIGRID* PARA OS CASOS 2, 3 e 4.

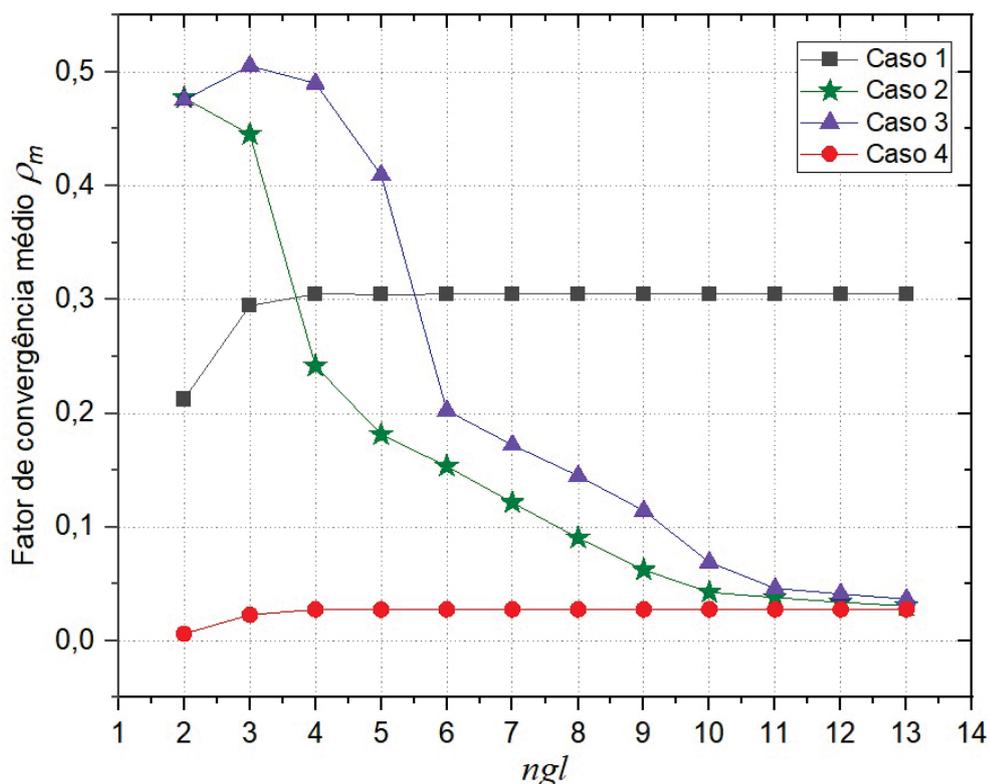


FONTE: A autora (2024)

Os resultados obtidos mostram que o ρ_m para o *Singlegrid* converge para a constante 1 e para o *Multigrid* permanece próximo de 0.

A FIGURA 44 apresenta o fator de convergência médio (ρ_m) relacionado com $N = 2^{ngl}$ somente para o método *Multigrid* para os 4 casos estudados.

FIGURA 44 – COMPARATIVO ρ_m PARA O *MULTIGRID* DEFINIDO PARA OS 4 CASOS ESTUDADOS.



FONTE: A autora (2024)

Observa-se que o fator de convergência médio para os casos 2, 3 e 4 para o *Multigrid* fica abaixo de 0,1, mostrando-se muito eficiente. Os resultados do fator de convergência ρ da primeira iteração do *solver* Uzawa, se mostram muito eficientes, obtendo valores tendendo a 0, porém, as iterações seguintes não possuem a mesma eficiência, e a o fator de convergência médio tende a 0,31 para o Caso 1, tendendo a zero nos demais casos estudados. O número de ciclos nos 4 casos, estão com tempos diferentes devido às constantes K e E , e que acabam relacionadas ao fator de anisotropia, por esse motivo, os casos 2 e 3 demoram mais para estabilizar. Os resultados do ρ_m deste trabalho são melhores se comparados com Franco *et al.* (2018b) e Luo *et al.* (2016)

A TABELA 4 apresenta o número de ciclos W necessários até que se atinja o critério de parada com o refinamento das malhas, que está de acordo com a literatura (WESSELING, 1992; TROTTENBERG *et al.*, 2000).

TABELA 4 – COMPARATIVO DE NÚMERO DE CICLOS W NECESSÁRIOS ATÉ O CRITÉRIO DE PARADA PARA OS CASOS ESTUDADOS.

Caso \ ngl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Caso 1	12	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Caso 2	26	23	13	11	10	9	8	7	6	6	6	6
Caso 3	26	27	27	21	12	11	10	9	7	6	6	6
Caso 4	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

FONTE: A autora (2024)

Observa-se que em todos os casos estudados, o número de iterações tende a tornar-se constante a medida que a malha é refinada, que é uma propriedade altamente desejável.

Luo *et al.* (2017) apresenta resultados de número de ciclos $W(1, 1)$ entre 30 e 45 ciclos para valores diferentes de condutividade hidráulica, três vezes superior aos apresentados nos testes realizados.

8.2.2 Complexidade

Para o tempo computacional (t_{cpu}) dessas simulações, utiliza-se a Eq (8.3) e $\mathbf{N} = N_x \times N_y \times N_t$. Os resultados para os casos estudados estão apresentados na TABELA 5:

TABELA 5 – PARÂMETROS c E γ .

Caso	c	γ
Caso 1	$6,01870 \times 10^{-6}$	1,0341
Caso 2	$3,53100 \times 10^{-6}$	1,0073
Caso 3	$1,77174 \times 10^{-5}$	0,9246
Caso 4	$1,92350 \times 10^{-6}$	1,0353

FONTE: A autora (2024)

Como pode ser visto, a complexidade apresentada está de acordo a literatura (WESSELING, 1992; TROTTENBERG *et al.*, 2000). Particularmente significando que no método *Multigrid*, o t_{CPU} cresce linearmente com o tamanho da malha.

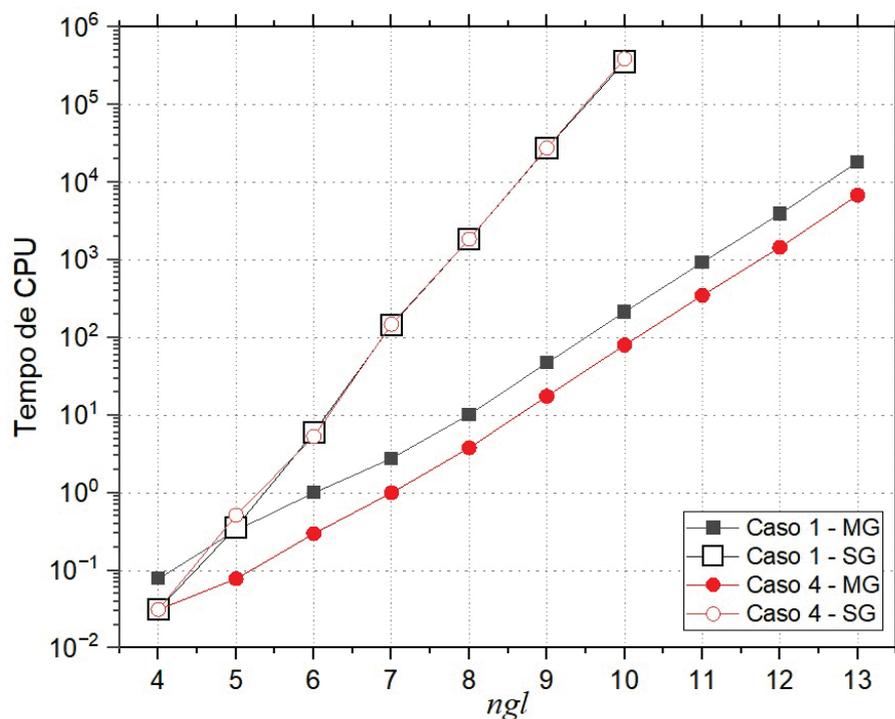
8.2.3 Tempo computacional e *speed-up*

Para avaliar o desempenho dos métodos *Singlegrid* e *Multigrid*, foram utilizados como métricas o tempo computacional e o *speed-up*, (t_{CPU}) e (S), respectivamente.

Na FIGURA 45 observa-se o t_{CPU} com o refino das malhas usando os métodos *Singlegrid* e o *Multigrid* para os Casos 1 e 4. Pode-se notar que o tempo do *Singlegrid* é superior se comparado ao do *Multigrid* e vai crescendo ainda mais com o refino, não

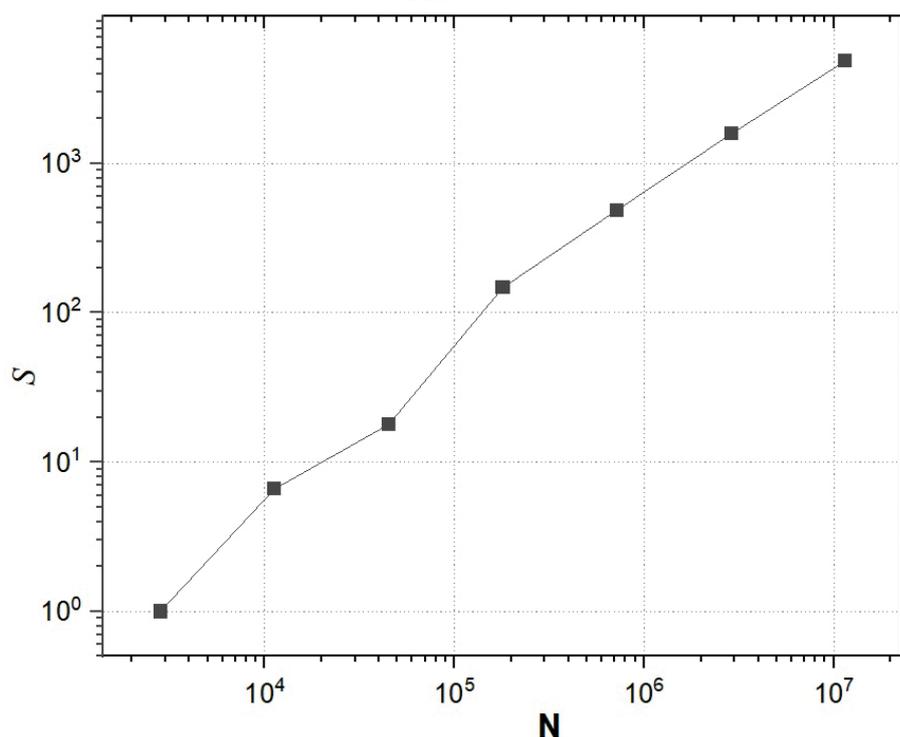
sendo viável executar simulações para os problemas usando *Singlegrid* com mais do que $N_x = N_y = 1024$ volumes de controle na malha.

FIGURA 45 – TEMPO DE CPU PARA SG E MG COM O REFINO DAS MALHAS.



FONTE: A autora (2024)

Observa-se que pela FIGURA 45, por exemplo, para o Caso 4 ($K = 10^{-3}$ e $E = 10^6$), com $ngl = 10$ tem-se $t_{cpu}(SG) = 389514,11$ s, aproximadamente 108 horas, $t_{cpu}(MG) = 79,79$ s, e $S = 4881,74$. Isto implica em uma substancial vantagem do método *Multigrid*, sendo aproximadamente 4881 vezes mais rápido que o *Singlegrid*, como pode ser confirmado pela FIGURA 46 para o Caso 4.

FIGURA 46 – *SPEED-UP* PARA O CASO 4.

FONTE: A autora (2024)

Além disso, é notável o comportamento crescente da curva, FIGURA 46, significando o aumento de S com o aumento do número de níveis de malhas n_{gl} , uma propriedade altamente desejável. Resultados análogos foram alcançados para os casos 1, 2 e 3.

Neste capítulo, foram apresentados os resultados dos experimentos realizados. Inicialmente, foram discutidos os critérios para comparação, que incluem o fator de convergência médio, o tempo de CPU relacionado à ordem de complexidade e o *speed-up*.

Para o problema unidimensional, apresentou-se os erros de discretização avaliados, seguidos dos demais critérios. Isso permitiu a comparação dos métodos Vanka de 4 cores, *Fixed-Stress* e Uzawa em termos de velocidade de convergência e desempenho do *Multigrid* associado.

No problema bidimensional, os experimentos foram realizados com casos definidos pelas constantes associadas ao problema, focando apenas no método Uzawa com a nova varredura proposta.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresenta-se um resumo das principais constatações e contribuições desta tese. Ao final, são propostas sugestões de temas para trabalhos futuros.

9.1 ESCOPO DO TRABALHO

Neste trabalho, estudou-se um problema da poroelasticidade em meio poroso uni e bidimensional com fluidos incompressíveis. A resolução do problema matemático da poroelasticidade com fronteira permeável (drenagem livre) foi realizada por meio da discretização usando o MVF, obtendo-se um sistema de equações diferenciais parciais para as funções deslocamento u e v , e para a função pressão p , que dependem das variáveis espaciais x e y , e da variável temporal t .

Para o caso unidimensional, foram realizados experimentos numéricos usando os *solvers* Vanka, *Fixed-Stress* e Uzawa, sendo que os métodos *Fixed-Stress* e Uzawa foram aplicados na varredura temporal *Time-Stepping*. Para o problema bidimensional, foram realizados experimentos utilizando somente o *solver* Uzawa na nova varredura *Space-Time*.

Na nova varredura *Space-Time*, o método *Multigrid* foi aplicado em dois momentos: internamente, na suavização do sistema de equações u e v ; e externamente, na suavização da pressão através do resíduo, com critério de parada baseado na tolerância do erro.

9.2 CONCLUSÃO GERAL

A partir dos testes realizados e suas implicações, pode-se concluir que:

- Os valores para o fator de convergência médio, obtidos nas simulações em que foram considerados valores realísticos para as constantes K e E , foram menores do que 0,31 quando aplicado o método *Multigrid* ciclo W.
- O tempo computacional obtido nas simulações com o *Multigrid* foi significativamente inferior ao tempo obtido com o *Singlegrid* para todos os casos testados.
- Para todos os casos testados, a ordem de complexidade do método *Multigrid* se mostrou em conformidade com o previsto na literatura, ou seja, p tende a 1 e c tende a 0.

- A combinação do *solver* Uzawa com o método *Multigrid* e a nova varredura temporal, da forma proposta, demonstrou notável eficiência e forte paralelização, visto que resultou em um algoritmo completamente paralelizável no espaço e no tempo.

Durante o estudo, inicialmente propôs-se utilizar a varredura *Waveform Relaxation*, no entanto, a filosofia desse método não pode ser aplicada no método Uzawa, pois remete a uma varredura temporal onde as variáveis deslocamento não apresentam variável temporal.

A varredura proposta é altamente paralelizável, conceitualmente; no entanto não foram realizados testes usando a arquitetura em paralelo.

9.3 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

Em conformidade com os resultados obtidos, considera-se que o objetivo geral da tese foi alcançado. As contribuições podem ser resumidas da seguinte forma:

- Estudo comparativo entre os *solvers* acoplado (Vanka) e desacoplado (*Fixed-stress* e Uzawa).
- Utilização do *Multigrid* como *solver* para o método Uzawa.
- Desenvolvimento de uma nova abordagem para varredura *Space-Time*.
- Proposição de uma metodologia altamente paralelizável, devido ao agrupamento da nova varredura espaço-tempo com o método Uzawa e *Multigrid*.

9.4 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

A pesquisa realizada nesta tese trouxe importantes avanços no entendimento e na modelagem do problema da poroelasticidade em meios porosos unidimensionais e bidimensionais. Apesar dos resultados significativos alcançados, há diversas oportunidades para aprofundar e expandir este estudo.

Inicialmente, é necessário explorar a aplicação dos métodos desenvolvidos em diferentes contextos e condições, especialmente em situações que envolvem variabilidade nas propriedades dos materiais ou em escalas maiores. Adicionalmente, a integração de novos métodos numéricos e técnicas de otimização pode contribuir para a melhoria da eficiência e precisão das soluções obtidas.

Em seguida, investigar a aplicação dos métodos de varredura *Space-Time* em problemas tridimensionais e em diferentes campos das Engenharias pode abrir novas perspectivas e aplicações práticas, ampliando o impacto desta pesquisa.

Assim, as propostas de trabalhos futuros podem ser assim resumidas:

- Explorar a eficácia dos métodos desenvolvidos em outras situações práticas.
- Conduzir estudos para obter dados pertinentes a escolha mais eficiente e precisa do parâmetro ω utilizado no Uzawa.
- Expandir a aplicação do método de varredura *Space-Time* em problemas tridimensionais.

Como pode-se ver, essas propostas visam continuar o desenvolvimento teórico e numérico já desenvolvidos nesta tese.

REFERÊNCIAS

- ADLER, J. H.; GASPAR, F. J.; HU, X.; OHM, P.; RODRIGO, C.; ZIKATANOV, L. T. Robust preconditioners for a new stabilized discretization of the poroelastic equations. *Computational Methods in Science and Engineering*, v. 42, p. B761–B791, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/19M1261250>>. Citado na página 30.
- ALES, V. T.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R.; GONÇALVES, S. F. T. A comparison among vanka, uzawa and fixed-stress smoothers for the one-dimensional poroelasticity problem using multigrid time-stepping. *XLII CILAMCE*, 2011. Citado na página 94.
- ALKHABBAZ, A.; YANG, H. S.; TONGPHONG, W.; LEE, Y. H. Impact of compact diffuser shroud on wind turbine aerodynamic performance: CFD and experimental investigations. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 21, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106978>>. Citado na página 26.
- AMMOSOV, D.; GRIGOREV, A.; STEPANOV, S.; TYRYLGIN, A. Partial learning using partially explicit discretization for multicontinuum/multiscale problems with limited observation: Language interactions simulation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 424, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115034>>. Citado na página 19.
- ARROW, K. J.; HURWICZ, L.; UZAWA, H. *Iterative methods for concave programming*. In: *Studies in linear and nonlinear programming*. Stanford: Stanford University Press, 1958. Citado na página 58.
- BAKHVALOV, N. S. On the convergence of relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 1, n. 101-135, 1966. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(66\)90118-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90118-2)>. Citado na página 30.
- BARROSO, L. C.; BARROS, M. M. A.; FILHO, F. F. C.; CARVALHO, M. L. B.; MAIA, M. L. *Cálculo numérico (com aplicações)*. São Paulo: Harbra Ltda, 1987. Citado na página 37.
- BASTIAN, P. *Numerical computation of multiphase flows in porous media*. Tese (Doutorado) — Christian-Albrechts-Universität Kiel, Kiel, 1999. Citado na página 35.
- BATES, P. D.; HORRITT, M. S.; FEWTRELL, T. J. A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modelling. *Journal of Hydrology*, v. 387, p. 33–45, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2010.03.027>>. Citado na página 25.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications: Courier Corporation, 2013. Citado na página 19.
- BECKER, K. *Perspectives for CFD*. Germany: DGLR Jahrbuch, 2002. Citado na página 26.
- BENZI, M.; GOLUB, G.; LIESEN, J. *Numerical solution of saddle point problems*. [S.l.]: Acta Numerica, 2005. Citado na página 22.

BIOT, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *Journal of Acoustical Society of America*, v. 28, p. 168–178, 1956. Citado na página 19.

BIOT, M. A. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, p. 155–164, 1941. Citado 4 vezes nas páginas 19, 29, 33 e 34.

BLAZEK, J. *Computational Fluid Dynamics Principles and Application*. UK: Elsevier Ltd, 2015. Citado na página 21.

BORREGALES, M.; KUMAR, K.; RADU, F. A.; RODRIGO, C.; GASPAR, F. J. A parallel-in-time fixed-stress splitting method for biot's consolidation model. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 77, p. 1466–1478, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.005>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 57.

BRANDT, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, v. 31, p. 333–390, 1977. Citado na página 27.

BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*. 2nd. ed. Philadelphia: SIAM, 2000. Citado 11 vezes nas páginas 21, 27, 38, 40, 41, 43, 45, 47, 48, 50 e 51.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 10nd. ed. Boston: Cengage Learning, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 19, 20, 21, 37, 38, 59, 60 e 105.

CAO, Z.-H. Fast uzawa algorithm for generalized saddle point problems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 46, p. 157–171, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(03\)00023-0](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(03)00023-0)>. Citado na página 58.

CEBECI, T.; KAFYEKE, F.; SHAO, J. P.; LAURENDEAU, E. *Computational Fluid Dynamics for Engineers - From Panel to Navier-Stokes Methods with Computer Programs*. California: Horizons Publishing Inc., 2005. Citado 3 vezes nas páginas 21, 26 e 37.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical Methods for Engineers*. New York: McGraw-Hill Education, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.

COUSSY, O. *Poromechanics*. England: Wiley, 2004. Citado na página 33.

COUSSY, O. *Mechanics and Physics of Porous Solids*. United Kingdom: John Wiley and Sons, Ltd, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.

COWIN, S. C. Bone poroelasticity. *Journal of Biomechanics*, v. 121, p. 217–238, 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(98\)00161-4](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(98)00161-4)>. Citado na página 19.

DAS, B. M.; KHALED, S. *Fundamentos de engenharia geotécnica*. São Paulo: Cengage, 2019. Citado na página 32.

DEHGHAN, M.; MOHEBBI, A. The combination of collocation, finite difference, and multigrid methods for solution of the two-dimensional wave equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, v. 24, p. 897–910, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/num.20295>>. Citado na página 30.

- FALGOUT, R. D.; FRIEDHOFF, S.; KOLEV, T. V.; MACLACHLAN, S. P.; SCHRODER, J. B.; VANDEWALLE, S. Parallel time integration with multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 36, p. C625–C661, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/130944230>>. Citado na página 102.
- FALGOUT, R. D.; FRIEDHOFF, S.; KOLEV, T. V.; MACLACHLAN, S. P.; SCHRODER, J. B.; VANDEWALLE, S. Multigrid methods with space-time concurrency. *Computing and Visualization in Science*, v. 18, p. 123–143, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00791-017-0283-9>>. Citado na página 102.
- FEDORENKO, R. P. On the speed of convergence of an iteration process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, p. 227–235, 1964. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90253-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90253-8)>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 27.
- FERZIGER, J.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluids Dynamics*. Berlin: Springer, 1999. Citado na página 27.
- FERZINGER, J. H.; PERIC, M.; STREET, R. L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 60.
- FOX, W.; MCDONALD, R. T.; PRITCHARD, A. J.; MICHTELL, P. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Rio de Janeiro: Grupo Gen, 2018. Citado na página 32.
- FRANCO, S. R. *Métodos multigrid espaço-tempo para resolver as equações do calor e da poroelasticidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba -PR, 2017. Citado 9 vezes nas páginas 40, 54, 55, 56, 60, 62, 66, 83 e 106.
- FRANCO, S. R.; PINTO, M. A. V. A space-time multigrid method for poroelasticity equations with random hydraulic conductivity. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, v. 85, p. 1226–1235, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10407790.2023.2262746>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 30, 102 e 113.
- FRANCO, S. R.; RODRIGO, C.; GASPAR, F.; PINTO, M. A. V. Multigrid method based on a space-time approach with standard coarsening for parabolic problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 317, p. 25–34, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.043>>. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 56 e 64.
- FRANCO, S. R.; RODRIGO, C.; GASPAR, F.; PINTO, M. A. V. A multigrid waveform relaxation method for solving the poroelasticity equations. *Computational and Applied Mathematics*, v. 37, p. 4805–4820, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40314-018-0603-9>>. Citado 7 vezes nas páginas 22, 29, 30, 31, 104, 113 e 115.
- GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; OOSTERLEE, C. W.; VABISHCHEVICH, P. N. An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, v. 196, p. 1447–1457, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.03.020>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 66, 71 e 83.

GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; VABISHCHEVICH, P. N. A finite difference analysis of biot's consolidation model. *Applied Numerical Mathematics*, v. 44, p. 487–506, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(02\)00190-3](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(02)00190-3)>. Citado 4 vezes nas páginas 35, 66, 67 e 83.

GASPAR, F. J.; RODRIGO, C. Local fourier analysis of vanka smoother based multigrid for staggered discretization of biot's consolidation problem. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, v. 9, p. 18–25, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 56.

GASPAR, F. J.; RODRIGO, C. Multigrid waveform relaxation for the time-fractional heat equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 39, p. A1201–A1224, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/16M1090193>>. Citado na página 84.

GASPAR, F. J.; RODRIGO, C. On the fixed-stress split scheme as smoother in multigrid methods for coupling flow and geomechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 326, p. 526–540, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.025>>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 86.

GENS, A. Soil – environment interactions in geotechnical engineering. *Geotechnique*, v. 60, p. 3–74, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/geot.9.P.109>>. Citado na página 19.

GONCALVES, S. F. T. *Estudo de Parâmetros do Método Multigrid Geométrico para Equações 2D em CFD e Volumes Finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 45, 73, 77 e 78.

HADDAD, M.; EICHHUBL, P. Poroelastic models for fault reactivation in response to concurrent injection and production in stacked reservoirs. *Geomechanics for Energy and the Environment*, v. 24, p. 5079–5084, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.gete.2020.100181>>. Citado na página 19.

HADJISOPHOCLEOUS, G. *Computational Fluid Dynamics in Fire Engineering: Theory, Modelling and Practice*. [S.l.: s.n.], 2020. Citado na página 26.

HE, R.; XIANG, Y.; GUO, Z. A poroelastic model for near-field underwater noise caused by offshore monopile drivin. *Journal of Sound and Vibration*, v. 564, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023.117878>>. Citado na página 19.

HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. 2nd. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, 2007. Citado na página 26.

HONORIO, H. T.; MALISKA, C. R.; FERRONATO, M.; JANNA, C. A stabilized element-based finite volume method for poroelastic problems. *Journal of Computational Physics*, v. 364, p. 49–72, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.03.010>>. Citado na página 30.

HORTON, G.; VANDEWALLE, S. A space time multigrid method for parabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 16, p. 848–864, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0916050>>. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 63 e 64.

HU, X.; RODRIGO, R.; GASPAR, F. J. Using hierarchical matrices in the solution of the time-fractional heat equation by multigrid waveform relaxation. *Journal of Computational Physics*, v. 416, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109540>>. Citado na página 28.

HUBBERT, M. K. Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids. *International Association of Scientific Hydrology*, v. 2, p. 23–59, 1957. Citado na página 135.

JIRASEK, A. Aerodynamic shape optimization using computational fluid dynamics. *Journal of Aircraft*, v. 49, p. 241–249, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/2.1474>>. Citado na página 25.

JOHNSON, F. T.; TINOCO, E. N.; YU, N. J. Thirty years of development and application of CFD at boeing commercial airplanes. *Computational & Fluid*, v. 34, p. 1115–1151, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2004.06.005>>. Citado na página 26.

JONES, A.; LEE, K. Future directions in computational fluid dynamics for multidisciplinary design optimization. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, v. 45, p. 1089–1105, 2019. Citado na página 26.

KATSURA, T.; GEORGAKIS, C. T. CFD in bridge aerodynamics: An advanced tool for an advanced discipline. *Wind and Structures*, v. 23, p. 409–440, 2016. Citado na página 25.

KIM, J.; TCHELEPI, H.; JUANES, R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, p. 2094–2116, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.011>>. Citado na página 57.

KIM, M.; KIM, Y. CFD analysis of the cooling performance of automotive engine. *International Journal of Automotive Technology*, v. 7, p. 519–524, 2006. Citado na página 25.

KREYSZING, E. *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2011. Citado na página 73.

KROLL, N.; FASSBENDER, J. K. *MEGAFLOW - Numerical Flow Simulation for Aircraft Design*. Berlin: Springer, 2005. Citado na página 25.

LE, Q. T.; OOI, C. Surrogate modeling of fluid dynamics with a multigrid inspired neuralnetwork architecture. *Machine Learning with Applications*, v. 6, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mlwa.2021.100176>>. Citado na página 28.

LENT, J. V. *Multigrid Method for Time-Dependent Partial Differential Equations*. Tese (Doutorado) — Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 30, 60, 61 e 62.

LI, Y.; CALISAL, S. M. Three-dimensional effects and arm effects on modeling a vertical axis tidal current turbine. *Renewable Energy*, v. 35, p. 2325–2334, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.renene.2010.03.002>>. Citado na página 25.

LUO, P.; RODRIGO, C.; GASPAR, F.; OOSTERLEE, C. Monolithic multigrid method for the coupled stokes flow and deformable porous medium system. *Journal of Computational Physics*, v. 353, p. 148–168, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.09.062>>. Citado na página 104.

LUO, P.; RODRIGO, C.; GASPAR, F. J.; OOSTERLEE, C. W. On an uzawa smoother in multigrid for poroelasticity equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 24, p. 1–14, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nla.2074>>. Citado 6 vezes nas páginas 29, 58, 87, 104, 113 e 115.

LUO, P.; RODRIGO, C.; GASPAR, F. J.; OOSTERLEE, C. W. Uzawa smoother in multigrid for the coupled porous medium and stokes flow system. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 39, p. S633–S661, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/16M1076514>>. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 116.

MALACARNE, M. F. *Resolução da equação da onda utilizando métodos Multigrid espaço-tempo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 63.

MALACARNE, M. F.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R. Computational simulation of one-dimensional waves with the multigrid method. *Brazilian Journal of Development*, v. 7, p. 83763–83775, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.34117/bjdv7n8-538>>. Citado na página 28.

MALACARNE, M. F.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R. Performance of the multigrid method with time-stepping to solve 1d and 2d wave equation. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, v. 1, p. 45–56, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/15502287.2021.1910750>>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 105.

MALACARNE, M. F.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R. Subdomain method in time with waveform relaxation in space applied to the wave equation combined with the multigrid method. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria*, v. 38, p. 1–24, 2022. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4089078>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacionais*. 2nd edição. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado 8 vezes nas páginas 21, 25, 59, 60, 72, 74, 77 e 78.

MARCHI, C. H. *Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001. Citado na página 107.

MIAO, X. S. A new uzawa-type method for saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 300, p. 95–102, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.12.008>>. Citado na página 58.

MIRZAEI, P. A.; A., M.; H., M.; SHEIKHNEJAD, Y.; BORDBAR, H. A simplified time-spatial model to predict airborne pathogen release risk in enclosed spaces: An eulerian-lagrangian CFD approach. *Building and Environment*, v. 207, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2021.108428>>. Citado na página 27.

NEUMULLER, M. Space-time methods: Fast solvers and applications. *Computation in Engineering and Science*, v. 20, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.3217/978-3-85125-290-3>>. Citado na página 63.

NIEVERGELT, J. Parallel methods for integrating ordinary differential equations. *Communications of the ACM, ACM New York*, v. 7, p. 731–733, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/355588.365137>>. Citado na página 30.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization*. New York: Springer, 2006. Citado na página 41.

OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; K., A. L. Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. *Applied Mathematical Modelling*, v. 36, p. 4665–4676, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.084>>. Citado na página 28.

OLIVEIRA, M. L. *Métodos de resolução eficientes para escoamentos multifásicos em meios porosos rígidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2022. Citado na página 35.

OLIVEIRA, M. L.; PINTO, M. A. V.; RODRIGO, C.; GASPAR, F. J.; FRANCO, S. R. L-scheme and modified picard with multigrid method for a 1d two-phase problem in rigid porous media with analytical solution. *XLI CILAMCE*, 2020. Citado na página 28.

OOSTERLEE, C. W.; GASPAR, F. J. Multigrid relaxation methods for systems of saddle point type. *Applied Numerical Mathematics*, v. 58, p. 1933–1950, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2007.11.014>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 89.

OOSTERLEE, C. W.; GASPAR, F. J.; WASHIO, T.; WIENANDS, R. Multigrid line smoothers for higher order upwind discretizations of convection-dominated problems. *Journal of Computational Physics*, v. 274–307, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5854>>. Citado na página 54.

PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington: Hemisphere, 1980. Citado na página 73.

PATANKAR, S. V. *Computation of Conduction and Duct Flow Heat Transfer*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

PERRIN, E.; BOU-SAID, B.; MASSI, F. Numerical modeling of bone as a multiscale poroelastic material by the homogenization technique. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 91, p. 373–382, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.12.015>>. Citado na página 19.

PLETCHER, R. H.; TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York: Taylor and Francis Group, LLC, 2013. Citado na página 21.

QUARTERONI, A.; VENEZIANI, A.; VERGARA, C. Geometric multiscale modeling of the cardiovascular system, between theory and practice. *Computers & Fluids*, v. 302, p. 193–252, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.01.007>>. Citado na página 25.

RANJAN, G.; RAO, A. S. R. *Basic and applied soil mechanics*. New Delhi: New Age International, 2011. Citado na página 67.

RIBEIRO, G. G. *Volumes finitos baseado em elementos para problemas de poroelasticidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2016. Citado na página 33.

RIGONI, D.; PINTO, M. A.; JR, J. E. K. Verification and error analysis for the simulation of the grain mass aeration process using the method of manufactured solutions. *Biosystems Engineering*, v. 223, p. 149–160, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2022.08.006>>. Citado na página 25.

RODRIGO, C. *Geometric Multigrid Methods on Semi-Structured Triangular Grids*. Tese (Doutorado) — Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España, 2010. Citado na página 66.

RODRIGUES, S. *Estimativa e redução do erro de discretização para o problema de poroelasticidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2023. Citado na página 133.

RODRIGUES, S.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R.; MARTINS, M. A. Reducing the discretization error for global and local variables in poroelasticity problems. *XLI CILAMCE*, 2020. Citado na página 30.

SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd. ed. Philadelphia: PWS, 2003. Citado na página 38.

SANTIAGO, C. D.; STROHER, G. R.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. F. A multigrid waveform relaxation method for solving the penne's bioheat equation. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 83, p. 976–990, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10407782.2022.2156411>>. Citado na página 30.

SHARMA, A. *Introduction to Computational Fluid Dynamics Development: Application and Analysis*. UK: John Wiley and Sons Ltd, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

STEWART, J. *Cálculo*. 8 ed. ed. São Paulo, Brazil: Cengage Learning Brasil, 2017. Citado na página 73.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Philadelphia: Taylor & Francis, 1997. Citado na página 30.

TERZAGHI, K. Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen akademie der wissenschaften in wien. *Mathematisch-Naturwissen-Schaftliche Klasse*, v. 132, p. 125–138, 1923. Citado na página 34.

TICKY, J.; BOU-SAID, B. A lumped model for long bone behavior based on poroelastic deformation and darcy flow. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 139, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2023.105649>>. Citado na página 19.

TOMINAGA, Y.; MOCHIDA, A.; YOSHIE, R.; KATAOKA, H.; NOZU, T.; YOSHIKAWA, M.; SHIRASAWA, T. AIJ guidelines for practical applications of CFD to pedestrian wind environment around buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 96, p. 1749–1761, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jweia.2008.02.058>>. Citado na página 25.

TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C.; SCHULLER, A. *Multigrid*. San Diego: Academic Press, 2000. Citado 11 vezes nas páginas 27, 30, 40, 44, 45, 46, 47, 105, 110, 115 e 116.

VANDEWALLE, S. *Parallel Multigrid Waveform Relaxation for Parabolic Problems*. Stuttgart: Teubner, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 31, 60 e 62.

VANDEWALLE, S.; HORTON, G. Fourier mode analysis of the multigrid waveform relaxation and time-parallel multigrid methods. *Computing*, v. 54, p. 317–330, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02238230>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 102.

VANDEWALLE, S.; PIESSENS, R. Efficient parallel algorithms for solving initial-boundary value and time-periodic parabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific & Statistical Computing*, v. 13, p. 1330–1346, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0913075>>. Citado na página 30.

VANKA, S. P. Block-implicit multigrid solution of navier-stokes equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics*, v. 65, p. 138–158, 1986. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90008-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90008-2)>. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 56.

VERSTEEG, H.; MALALASEKERA, W. *Introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method*. Harlow: Pearson Education Limite, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 19, 47, 49 e 90.

VILANOVA, L. C. *Mecânica dos fluidos*. Santa Maria, RS: Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, Curso em Automação Industrial, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

WANG, H. *Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology*. Chichester: Princeton university press, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 19, 67, 106 e 132.

WESSELING, P. *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1992. Citado 7 vezes nas páginas 22, 27, 39, 47, 110, 115 e 116.

WIENANDS, R.; GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; OOSTERLEE, C. W. Analysis of a pointwise smoother in multigrid for poroelasticity. *Journal Computational Fluid and Solid Mechanics*, v. 2, p. 2178–2181, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-008044046-0.50534-0>>. Citado na página 28.

WIENANDS, R.; GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; OOSTERLEE, C. W. An efficient multigrid solver based on distributive smoothing for poroelasticity equations. *Computing*, v. 73, p. 99–119, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00607-004-0078-y>>. Citado na página 113.

WU, B.; JIANG, L.; LIU, Y.; LV, P.; WANG, D.; SONG, Y. Pore-scale mass transfer experiments in porous media by X-ray CT scanning. *Energy Procedia*, v. 105, p. 5079–5084, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.03.10290>>. Citado na página 19.

ZEN, P. D.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R. A multigrid waveform relaxation method for solving the nonlinear silicon problem with relaxing boundary conditions. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, p. 1–16, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10407790.2024.2351543>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Oxford: Elsevier, 2014. Citado na página 21.

ZILL, D. G.; CULLEN, R. *Equações diferenciais*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Citado na página 77.

ANEXO A – MODELAGEM DO PROBLEMA DA POROELASTICIDADE

A seguir, são apresentadas as relações constitutivas e as equações de equilíbrio que fundamentam a formulação das equações para modelar o escoamento de um fluido em um meio poroso.

A.1 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Os conceitos fundamentais da teoria poroelástica de Biot para meios porosos isotrópicos preenchidos com fluido são descritos por duas equações constitutivas lineares no caso de um campo de tensão σ aplicado. Além de σ , as variáveis-chave incluem o incremento de volume do fluido γ , a pressão do fluido p e a deformação volumétrica ϵ .

As equações relacionam por meio de combinações lineares entre σ e p , tem-se:

$$\epsilon = a_{11}\sigma + a_{12}p, \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma = a_{21}\sigma + a_{22}p \quad (\text{A.2})$$

Os coeficientes a_{ij} representam razões entre variáveis dependentes e independentes, mantendo a outra variável constante, ou seja, para p constante, tem-se:

$$a_{11} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} = \frac{1}{K} \quad (\text{A.3})$$

$$a_{21} = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} = \frac{1}{H_1} \quad (\text{A.4})$$

e mantendo σ constante, tem-se:

$$a_{12} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{1}{H} \quad (\text{A.5})$$

$$a_{22} = \frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{1}{R} \quad (\text{A.6})$$

onde $\frac{1}{K}$ é a compressibilidade drenada, $\frac{1}{R}$ é o coeficiente de armazenamento específico irrestrito, $\frac{1}{H}$ e $\frac{1}{H_1}$ são coeficientes de expansão poroelástica.

Biot (1941) demonstrou que $a_{12} = a_{21}$, estabelecendo uma relação de reciprocidade: o volume expandido sob tensão constante devido a um aumento na pressão dos poros é igual ao volume de fluido expelido sob pressão constante devido a um aumento na tensão de compressão. Essa relação é expressa por:

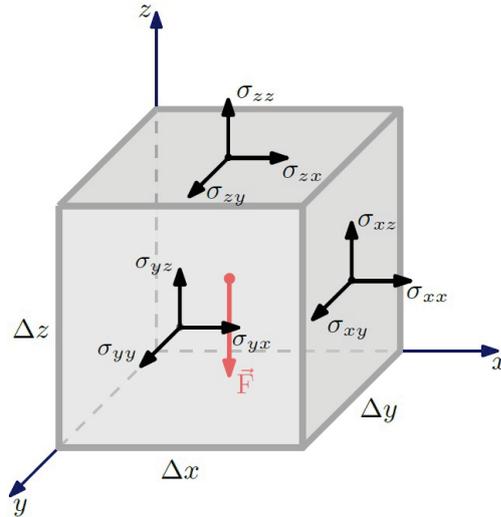
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1}. \quad (\text{A.7})$$

Assim, a resposta poroelástica para tensões isotrópicas é completamente caracterizada (WANG, 2000).

A.2 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para construir as equações de equilíbrio, considera-se um volume elementar de solo com dimensões intermediárias: suficientemente grandes para tratar o solo como homogêneo, mas pequenas o bastante para representar um volume infinitesimal no contexto matemático. Representado na FIGURA 47:

FIGURA 47 – VOLUME ELEMENTAR DE SOLO



FONTE: Rodrigues (2023)

Nesse volume, as tensões normais (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) e tangenciais, características da teoria da elasticidade, são agrupadas em um tensor de tensões totais (σ).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

em que as tensões cisalhantes perpendiculares à linha de interseção entre as faces ortogonais do cubo são iguais, ou seja, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ e $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$.

As equações de equilíbrio de força translacional para meios porosos isotrópicos, considerando uma força de corpo F , são formuladas com base no equilíbrio de forças no volume de controle. Por simplificação serão deduzidas apenas as equação na direção x baseado na FIGURA 47 tem-se:

$$\begin{aligned} & [\sigma_{xx}(x + \Delta x, y, z) - \sigma_{xx}(x, y, z)]\Delta y\Delta z + [\sigma_{yx}(x, y + \Delta y, z) - \sigma_{yx}(x, y, z)]\Delta x\Delta z + \\ & [\sigma_{zx}(x, y, z + \Delta z) - \sigma_{zx}(x, y, z)]\Delta x\Delta y + F_x\Delta x\Delta y\Delta z = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Aproximando por derivadas e simplificando, tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0. \quad (\text{A.10})$$

Adotando a hipótese de pequenas deformações, os deslocamentos u , v e w em x , y e z , respectivamente, definem as deformações:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (\text{A.11})$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (\text{A.12})$$

Sob as hipóteses de elasticidade linear e propriedades isotrópicas do solo, a relação tensão-deformação segue a lei de Hooke:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{3H}, \quad (\text{A.13})$$

onde E é o módulo de Young, ν o coeficiente de Poisson, p a poropressão e $1/H$ o coeficiente de expansão poroelástica.

Biot introduziu uma modificação para incluir o efeito da poropressão nas deformações longitudinais, mantendo as deformações cisalhantes inalteradas. Assim, a tensão total média é definida como:

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}. \quad (\text{A.14})$$

O incremento de volume de fluido γ depende da deformação volumétrica ϵ e da poropressão, descrito por:

$$\gamma = \alpha \epsilon + \frac{p}{Q}, \quad (\text{A.15})$$

onde α é o coeficiente de Biot e Q o módulo de Biot, dada por:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}. \quad (\text{A.16})$$

Ao substituir as equações constitutivas nas de equilíbrio, obtém-se as equações diferenciais que governam o sistema dado por:

$$G \nabla^2 u + G \frac{\nu}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F_x, \quad (\text{A.17})$$

com expressões similares para v e w , e ∇^2 sendo o operador laplaciano. Esse sistema é indeterminado, exigindo uma equação adicional para descrever o escoamento de fluido no meio poroso.

A.3 ESCOAMENTO DE UM FLUIDO EM UM MEIO POROSO

Em 1856, Henry P. G. Darcy realizou experimentos que resultaram em uma relação empírica para o fluxo unidimensional, descrita pela equação dada por:

$$q_z = -K \frac{dh}{dz}, \quad (\text{A.18})$$

onde q_z é a descarga específica, h é a carga hidráulica, e K é a condutividade hidráulica.

Hubbert (1957) demonstrou que a carga hidráulica de Darcy representa a energia potencial do fluido por unidade de peso. Para fluidos incompressíveis, a carga hidráulica h é expressa pela carga altimétrica e pela poropressão p . Assim, a lei de Darcy tridimensional é escrita como:

$$q_x = -K_x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad q_y = -K_y \frac{\partial p}{\partial y}, \quad q_z = -K_z \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (\text{A.19})$$

Assumindo a hipótese de Biot para fluido incompressível, a variação volumétrica no volume elementar de solo equivale à soma dos fluxos atravessando suas faces, o que leva à equação:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (\text{A.20})$$

onde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ é o vetor de descarga específica.

Substituindo as relações de Darcy e a definição de fluxo tem-se:

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - K \nabla^2 p = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (\text{A.21})$$

que é a equação de Biot para o escoamento em meios porosos deformáveis.

Dessa forma, a formulação matemática completa para o problema clássico de consolidação de Biot em um meio poroso saturado, homogêneo e isotrópico é gerado a partir das Eq. (A.17), para direção x e de forma similar para as direções y e z , e (A.21), gerando o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} G \nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F_x \\ G \nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - F_y \\ G \nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - F_z \\ \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - K \nabla^2 p = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.22})$$

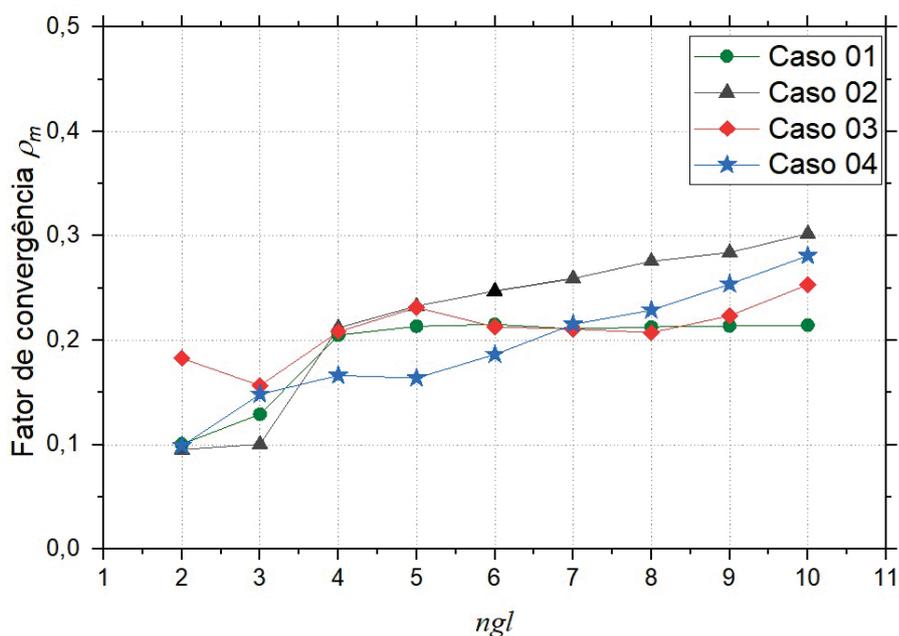
em que as incógnitas do problema são os deslocamentos u , v e w , nas direções x , y e z , respetivamente e, a poropressão p .

ANEXO B – TESTES REALIZADOS

Apresenta-se alguns resultados obtidos usando a varredura *Time-Stepping* para os casos 1, 2, 3 e 4.

Inicialmente, fazendo testes para o método Vanka, a FIGURA 48 mostra o fator de convergência para os casos abordados.

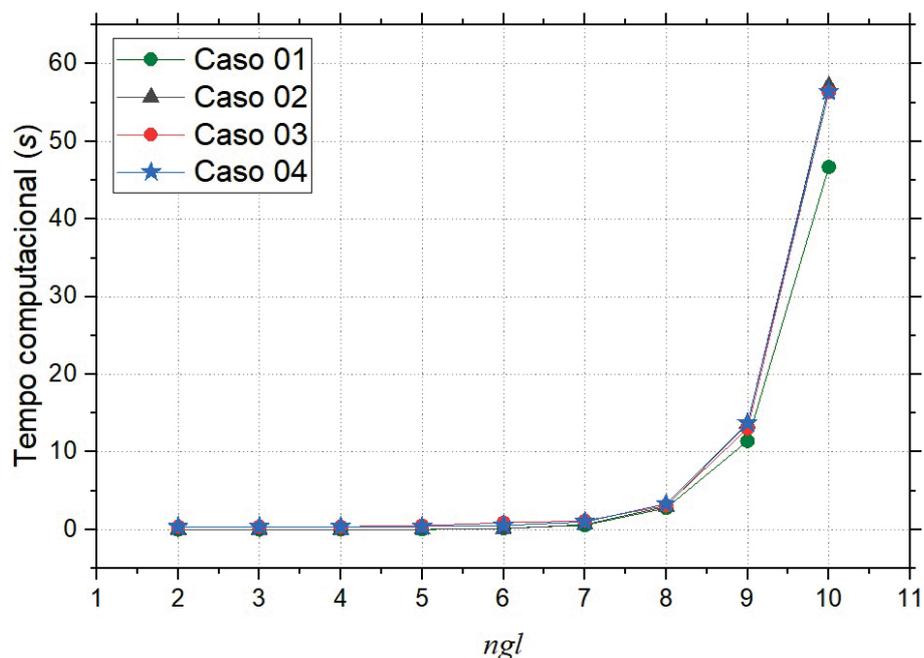
FIGURA 48 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA O MÉTODO VANKA



FONTE: A autora (2024)

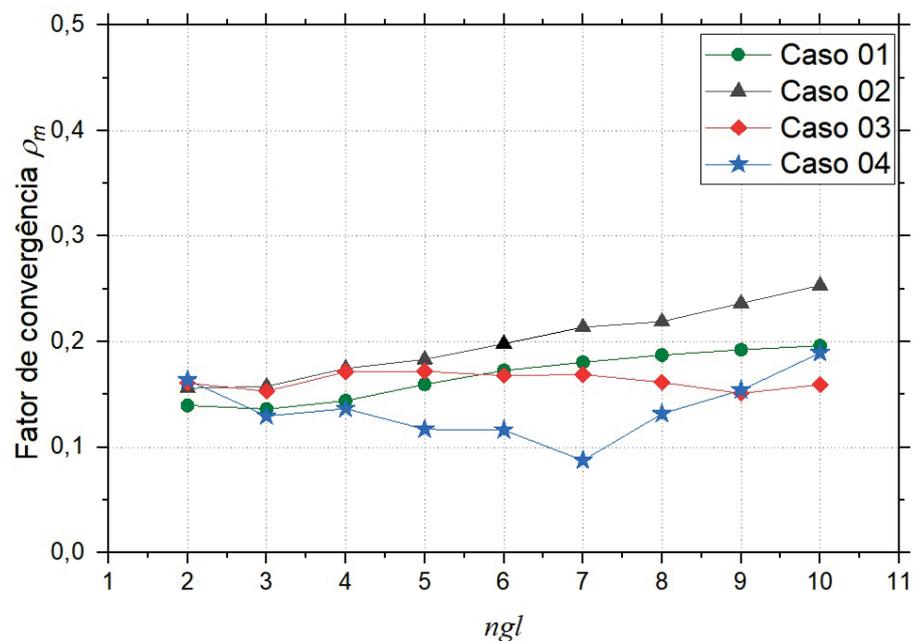
A FIGURA 49 mostra o tempo computacional necessário até chegar no tolerância definida, para os casos abordados.

FIGURA 49 – TEMPO COMPUTACIONAL PARA O MÉTODO VANKA



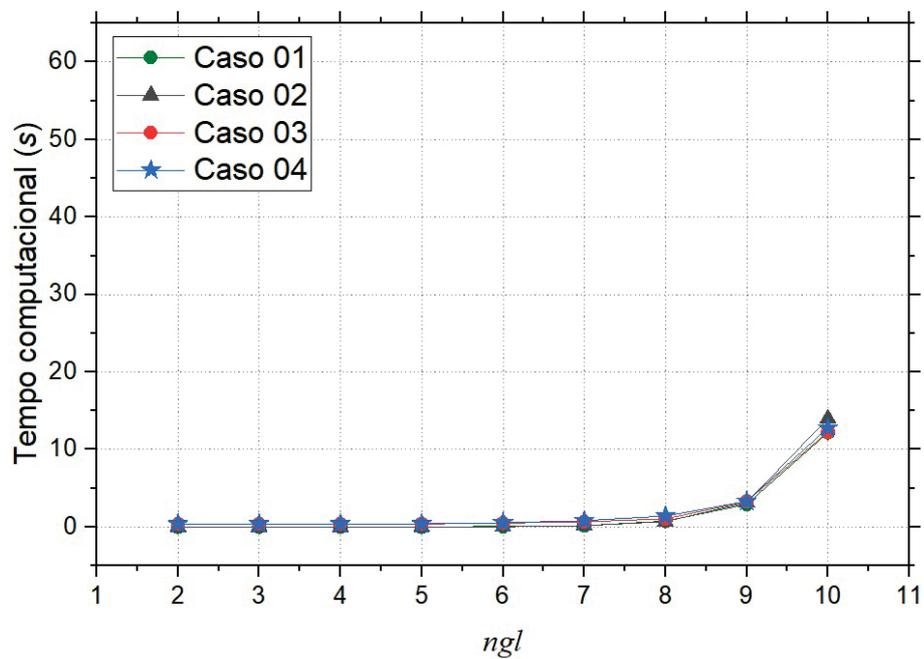
FONTE: A autora (2024)

Para o método *Fixed-Stress*, a FIGURA 50 mostra o fator de convergência para os casos abordados.

FIGURA 50 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA O MÉTODO *FIXED-STRESS*

FONTE: A autora (2024)

A FIGURA 51 mostra o tempo computacional necessário para obter no tolerância definida usando o método *Fixed-Stress*, para os casos abordados.

FIGURA 51 – TEMPO COMPUTACIONAL PARA O MÉTODO *FIXED-STRESS*

FONTE: A autora (2024)

Nota-se que os casos estudados tem resultados similares, a diferença está no tempo computacional, pois o método Vanka é quatro vezes mais lento comparado com o *Fixed-Stress*.