

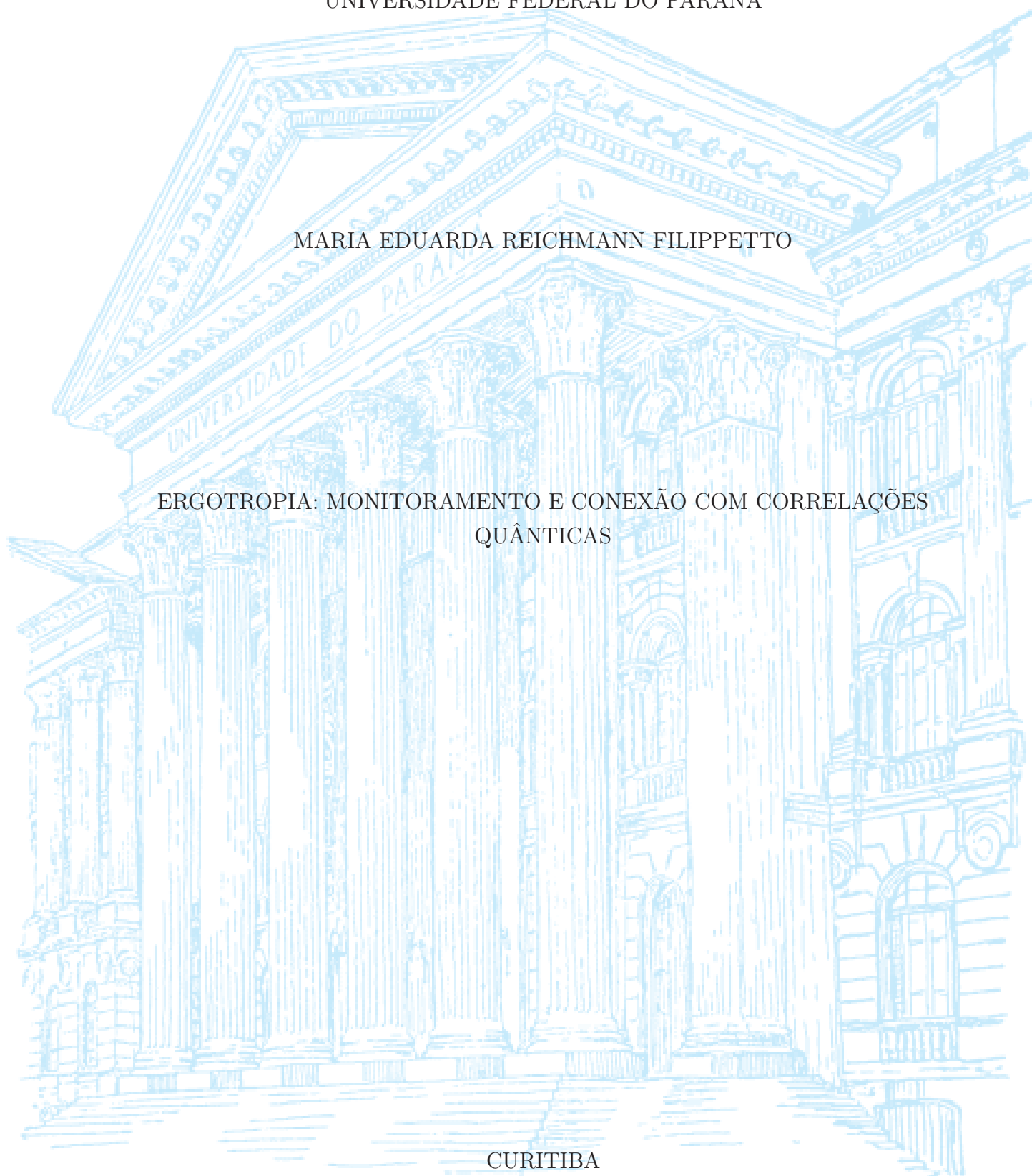
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MARIA EDUARDA REICHMANN FILIPPETTO

ERGOTROPIA: MONITORAMENTO E CONEXÃO COM CORRELAÇÕES
QUÂNTICAS

CURITIBA

2025



MARIA EDUARDA REICHMANN FILIPPETTO

ERGOTROPIA: MONITORAMENTO E CONEXÃO COM CORRELAÇÕES
QUÂNTICAS

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a Ana Cristina Sprotte Costa

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Filippetto, Maria Eduarda Reichmann
Ergotropia: monitoramento e conexão com correlações quânticas / Maria
Eduarda Reichmann Filippetto. – Curitiba, 2025.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Ana Cristina Sprotte Costa

1. Física quântica. 2. Sistemas quânticos. 3. Termodinâmica. I.
Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Física.
III. Costa, Ana Cristina Sprotte. IV . Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **MARIA EDUARDA REICHMANN FILIPPETTO**, intitulada: "**Ergotropia: monitoramento e conexão com correlações quânticas**", sob orientação da Profa. Dra. ANA CRISTINA SPOTTE COSTA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Fevereiro de 2025.

Assinatura Eletrônica

28/02/2025 11:05:53.0

ANA CRISTINA SPOTTE COSTA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

28/02/2025 13:44:49.0

ALESSANDRA DE SOUZA BARBOSA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

28/02/2025 19:08:35.0

KRISSIA DE ZAWADZKI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SAO PAULO -USP SAO CARLOS)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Maria Lucia, ao meu pai, Hélio, e ao meu padrasto, Raul, por todo apoio e amor incondicional desde sempre. À Professora Ana, por ter aceitado me orientar, por toda a paciência, pelos ensinamentos e, principalmente, por ser uma referência. Ao grupo de Fundamentos de Mecânica Quântica, pelas tardes de sexta-feira divertidas e enriquecedoras, em especial à Alana e à Mariana, por todas as dúvidas respondidas, pelos ensaios de apresentação assistidos e pela amizade que trouxe leveza e alegria aos últimos dois anos. Sem vocês, esse período não teria sido o mesmo. Aos meus amigos e amigas, sobretudo às do futebol, por serem um refúgio e uma segunda casa. Os dias sempre passavam mais rápido sabendo que jogaríamos juntas à noite. À Fundação Araucária, à CAPES e ao PPGF-UFPR, pelo suporte financeiro. À Isadora, minha melhor amiga e namorada, por ser minha casa, meu maior apoio e por caminhar pela vida (acadêmica) ao meu lado. Obrigada por absolutamente tudo. Você é meu maior amor e minha maior inspiração.

RESUMO

Desde a década de 1980, as tecnologias quânticas têm se desenvolvido de forma cada vez mais acelerada. Para otimizar o uso dessas tecnologias, é necessário evitar o desperdício de recursos como trabalho e informação para o ambiente. Nesse contexto, é importante compreender como as quantidades termodinâmicas de sistemas quânticos se comportam. Este trabalho tem como objetivo estudar a extração máxima de trabalho termodinâmico de sistemas quânticos por meio de transformações cíclicas unitárias, conhecida como ergotropia, e sua relação com as correlações quânticas. Dado um sistema quântico acoplado a uma ancila (sistema auxiliar), com a qual compartilha correlações quânticas, ao medi-la projetivamente, obtém-se informação sobre a parte não medida (sistema), tornando possível gerar uma maior extração de trabalho termodinâmico, denominada ergotropia demoníaca. Na literatura, correlações quânticas como discórdia quântica e emaranhamento foram relacionadas a esse ganho, mas, em ambos os casos, existem estados onde essas correlações são nulas e ainda assim há ganho. Portanto, buscamos identificar outro recurso quântico que possa explicar o surgimento desse ganho - em particular, para estados de Bell diagonais, verificamos que a não-localidade baseada em realismo é, de fato, um recurso para o ganho de ergotropia. Além disso, introduzimos um mapa de monitoramento para implementar medições fracas no protocolo da ergotropia demoníaca, e como resultado apresentamos a ergotropia monitorada, que varia linearmente com o parâmetro que controla a intensidade da medição. Mostramos que nossos resultados são intuitivos com a definição de medição fraca e diferem de outra abordagem que utiliza medições fracas seletivas.

Palavras-chaves: Ergotropia demoníaca; correlações quânticas; medições fracas; Ergotropia monitorada.

ABSTRACT

Since the 1980s, quantum technologies have been developing ever more rapidly. To optimize the use of these technologies, it is essential to avoid wasting resources such as work and information to the environment. In this context, understanding how thermodynamic quantities behave in quantum systems is crucial. This work aims to study the maximum extraction of thermodynamic work from quantum systems through unitary cyclic transformations, known as ergotropy, and its relationship with quantum correlations. Given a quantum system coupled to an ancilla (auxiliary system), with which it shares quantum correlations, performing a projective measurement on the ancilla provides information about the unmeasured part (the system), enhancing the thermodynamic work extraction, referred to as daemonic ergotropy. In the literature, quantum correlations such as quantum discord and entanglement have been related to this gain, but in both cases, there are states where these correlations are zero and there is still a gain. Therefore, we seek to identify another quantum resource that could explain the emergence of this gain. Specifically, for Bell-diagonal states, we verify that realism-based nonlocality is, indeed, a resource for ergotropic gain. Additionally, we introduce a monitoring map to implement weak measurements in the daemonic ergotropy protocol and, as a result, present the monitored ergotropy, which varies linearly with a parameter that controls the measurement's strength. We show that our results are more intuitive with the definition of weak measurement and differ from another approach that uses selective weak measurements.

Key-words: Daemonic ergotropy; quantum correlations; weak measurements; monitored ergotropy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Esquema ilustrativo do experimento mental do demônio de Maxwell.	10
FIGURA 2 – Representação geométrica do vetor de estado $ \psi\rangle$ de um qubit na esfera de Bloch.	18
FIGURA 3 – Medidas teóricas da relação entre X e Y utilizando o diagrama de Venn. Na meia lua a esquerda está a entropia condicional $H(X Y)$ e na meia lua da direita $H(Y X)$. Na interseção encontra-se a informação mútua $I(X : Y)$, caracterizando o quanto o conhecimento sobre uma das variáveis reduz a incerteza sobre a outra. Os círculos vermelho e amarelo referem-se as entropias individuais $H(X)$ e $H(Y)$ das variáveis X e Y , respectivamente.	21
FIGURA 4 – (a) O conjunto de cópias é submetido ao processo de tomografia resultando na matriz densidade ρ . (b) Antes de passarem pelo processo de tomografia cada uma das cópias sofre a medição de um observável A que se torna real. A tomografia resulta em $\Phi_A(\rho)$	28
FIGURA 5 – (a) Quando o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}$ é nulo, significa que \mathcal{S} e \mathcal{A} são estatisticamente independentes, isto é, não há correlações quânticas entre ambos. (b) Quando o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}$ é diferente de zero, significa que pode haver correlações quânticas entre \mathcal{S} e \mathcal{A} . Em sistemas bipartidos, $\delta\mathcal{W} = 0$ é uma condição suficiente e necessária para que \mathcal{S} e \mathcal{A} sejam estatisticamente independentes.	46
FIGURA 6 – (a) Distribuição de 3×10^3 estados de dois qubits gerados aleatoriamente no plano ganho demoníaco versus discórdia quântica. (b) Distribuição de 10^4 estados de dois qubits gerados aleatoriamente no plano ganho demoníaco versus concorrência. Retirada do artigo [28].	48
FIGURA 7 – Variação da razão $(3 + \tanh(x))/(3 - \tanh(x))$, com $x \in [0, 10]$. . .	56
FIGURA 8 – Ganho de ergotropia monitorada ($\delta\mathcal{W}^\varepsilon/(\Delta\varepsilon/2)$) em função do parâmetro de controle da medição ε e do parâmetro de mistura w do estado de Werner.	59
FIGURA 9 – Ilustração da relação de hierarquia entre as seguintes correlações quânticas: NB (não-localidade de Bell), E (emaranhamento), D (discórdia), NBR (não-localidade baseada em realismo).	65

FIGURA 10 – Cada ponto presente nos gráficos acima refere-se a um estado Bell-diagonal (5.7) gerado a partir da escolha aleatória dos coeficientes c_i s. Conforme esses coeficientes são determinados, o ganho ergotrópico é calculado para cada um dos 10^4 estados Bell-diagonais aleatórios em função da (a) concorrência $\mathcal{C}(\rho)$ (b) discórdia quântica $\mathcal{D}(\rho)$ e (c) não-localidade baseada em realismo $\mathcal{N}(\rho)$. Em vermelho encontram-se os estados de Werner (4.35) e em verde os estados classicamente correlacionados (5.26). 67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	Formalismo da Mecânica Quântica	13
2.2	Teoria da Informação	19
2.3	Correlações Quânticas	23
2.4	Protocolos de Medição	30
2.5	Termodinâmica	33
3	ERGOTROPIA	41
3.1	Máxima Extração de Trabalho	41
3.2	Ergotropia Demoníaca	44
4	ERGOTROPIA MONITORADA	50
4.1	Superergotropia	50
4.2	Ergotropia Monitorada	52
4.3	Ergotropia Monitorada vs Superergotropia	54
5	CORRELAÇÕES QUÂNTICAS	61
5.1	Ergotropia Para Estados Gerais de Dois Qubits	61
5.2	Ergotropia para Estados Bell-diagonais	62
5.3	Correlações Quânticas e Estados Gerais	64
5.4	Correlações Quânticas e Estados Bell-diagonais	65
6	CONCLUSÃO	68
	Bibliografia	70
	APÊNDICE 1	79
1.1	Notas sobre a Ergotropia Demoníaca	80
1.2	Notas sobre a superergotropia	82

1 INTRODUÇÃO

Dentre os principais objetivos da ciência como um todo está a tentativa de entender a realidade em que vivemos e descrevê-la a partir de um formalismo, no caso das ciências exatas, o formalismo matemático. Uma das áreas compreendidas pela Física Moderna é a Mecânica Quântica (MQ), e sua história é comumente contada a partir dos estudos sobre a luz e do problema da radiação do corpo negro, investigação que teve início no fim do século XIX, e se estendeu pelo século XX [1].

Em paralelo a isso há outra área da Física igualmente importante e revolucionária, cuja história comumente é contada a partir de outro ponto de vista, intimamente ligado às suas aplicações. A Termodinâmica teve o ápice do seu desenvolvimento durante a Revolução Industrial, que ocorreu no século XVIII. A necessidade de otimizar as máquinas térmicas e motores à vapor foi o que impulsionou a teoria nessa época. Um dos resultados mais importantes desse período foi a formulação de Clausius da 2ª Lei da Termodinâmica, que postulou que a variação de entropia de sistemas isolados é sempre maior ou igual a zero [2], impondo um limite fundamental de eficiência para as máquinas térmicas.

Este trabalho é fruto da união dessas duas grandes áreas. A Termodinâmica Quântica surge da necessidade prática e conceitual de entender como as propriedades termodinâmicas se comportam quando o sistema a ser estudado pertence à escala na qual efeitos quânticos são dominantes. A Mecânica Estatística buscou fazer essa primeira aproximação entre os formalismos macroscópico da Termodinâmica usual e microscópico da MQ. Contudo, seu foco principal são sistemas com grande número de partículas e estados no equilíbrio. Ao diminuir o número de partículas de interesse e considerar flutuações, bem como o papel da coerência quântica, fez-se necessária uma nova abordagem quântico-termodinâmica.

Uma área que se intersecciona com a MQ e com a Termodinâmica e precede o surgimento da Termodinâmica Quântica é a Teoria da Informação. Em 1948, Claude Shannon publicou um artigo intitulado *Teoria Matemática da Comunicação*¹ [3], onde introduziu a ideia de que informação pode ser tratada como uma quantidade física qualquer, tal como massa ou energia. Foi explorando formas de quantificar a informação e entender seu processo de armazenamento e transmissão que essa teoria se desenvolveu.

Pode-se dizer que as primeiras associações mais diretas entre Teoria da Informação e Termodinâmica são atribuídas aos trabalhos de Szilárd e Landauer [4, 5]. Em 1867, James Maxwell formulou o famoso experimento mental que parecia violar a 2ª Lei da Termodinâmica, conhecido como Demônio de Maxwell [6]. Nele, um “demônio”² controla

¹ Tradução livre de “*A Mathematical Theory of Communication*”.

² Uma entidade inteligente e onisciente.

uma parede que divide um recipiente contendo gás em duas partes, permitindo apenas que as partículas com mais velocidade (vermelhas) passem da direita para a esquerda e partículas com menor velocidade (azuis) passem da esquerda para a direita, como mostra a figura 1. Como o conceito de temperatura cinética está diretamente associado com a velocidade das partículas do gás, esse controle feito pelo ente faz com que um dos lados do recipiente esfrie e outro esquente, fazendo com que a entropia total do sistema diminua sem que nenhum trabalho seja feito sobre o sistema, violando assim a 2ª Lei.

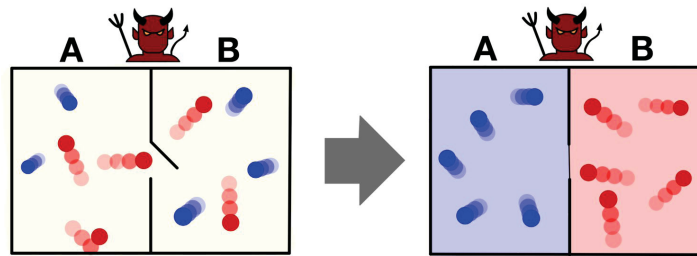


Figura 1 – Esquema ilustrativo do experimento mental do demônio de Maxwell.

Léo Szilárd propôs uma resolução para esse paradoxo em 1929 [4], reformulando-o e alegando que seria necessário medir a velocidade das partículas do gás e que esse ato de obter informação sobre o sistema envolveria um gasto energético, aumentando a entropia do demônio e, conseqüentemente, do sistema como um todo (gás + demônio), não violando a 2ª Lei. Já em 1961, Rolf Landauer formalizou a relação entre informação e termodinâmica por meio de um princípio que propõe que há um custo de energia mínimo para manipular (armazenar ou apagar) determinada quantidade de informação de um sistema [5].

Entre as décadas de 70 e 80 os princípios da Teoria de Informação começaram a ser desenvolvidos para sistemas quânticos, e formar a base da área que hoje conhecemos como Informação Quântica. A união da Informação Quântica com a Termodinâmica origina a Termodinâmica Quântica, e um dos primeiros exemplos dessa junção é a reformulação do demônio de Maxwell e da máquina de Szilárd para o regime quântico [7–9]. Como ambos os experimentos mentais envolvem o processo de medição, a análise difere significativamente do caso clássico. Um demônio quântico, por exemplo, pode extrair mais trabalho de um sistema do que um demônio clássico, e a eficiência do processo aumenta conforme a quantidade de correlações quânticas existentes [9, 10]. Esse tipo de vantagem, decorrente do caráter quântico dos sistemas, tem despertado o interesse da comunidade científica na área de Termodinâmica Quântica como um todo.

As aplicações tecnológicas dessa área são vastas [11]. Desde análogos quânticos dos variados tipos de máquinas térmicas [12, 13] até protocolos de carregamento e descarregamento de baterias quânticas [14–19] e limites termodinâmicos na computação quântica [20]. Além disso, existem muitos trabalhos que buscam reformular as leis termodinâmicas no regime quântico [21–26].

Um dos principais problemas abordados na área consiste em determinar a máxima extração de trabalho de sistemas quânticos. Para sistemas termicamente isolados e com entropia constante, essa extração pode ser realizada por meio de operações cíclicas unitárias, e quando maximizada é denominada ergotropia [27]. Acoplando-se o sistema de interesse (\mathcal{S}) a um sistema auxiliar (\mathcal{A}) e medindo-se \mathcal{A} projetivamente, é possível aumentar a quantidade de trabalho extraído, contanto que haja correlações quânticas entre os sistemas [28]. A essa quantidade, dá-se o nome de ergotropia demoníaca, sugerindo a ideia de que um ente externo obtém informações sobre \mathcal{S} sem interagir com ele - interagindo apenas com \mathcal{A} - tal como ocorre com o demônio de Maxwell.

Esta dissertação teve como objetivo estudar o protocolo da ergotropia demoníaca [28] através de duas questões principais. A primeira diz respeito ao tipo de medição que é realizada sobre o subsistema \mathcal{A} , para obter informações sobre \mathcal{S} e otimizar o trabalho extraído. Introduzimos uma noção de medição fraca através da aplicação de um mapa de monitoramento [29, 30] e buscamos entender como a ergotropia demoníaca se comporta quando esse mapa é aplicado no lugar da medição projetiva, definindo assim a ergotropia monitorada. Recentemente, em [31], um protocolo utilizando medições fracas seletivas foi apresentado, resultando em uma ergotropia maior que a demoníaca, denominada “superergotropia”³. Ao comparar ambas as propostas, percebe-se que por meio do mapa de monitoramento os resultados são mais consistentes com a intuição desse tipo de abordagem.

A segunda questão tratada nesta dissertação foi buscar compreender qual correlação quântica seria recurso para o ganho demoníaco. No artigo [28] os autores analisam a discórdia quântica e emaranhamento e mostram que para estados gerais de dois qubits nenhuma das duas correlações é recurso para o ganho. Aqui, analisamos um tipo de correlação intitulada não-localidade baseada em realismo [32, 33], e mostramos que ela é recurso para o ganho ergotrópico no caso de estados Bell-diagonais - uma família de estados gerais de dois qubits. Além disso, apresentamos uma forma analítica de calcular a ergotropia para estados gerais de dois qubits e, como caso particular, para estados Bell-diagonais.

O texto encontra-se dividido em 6 capítulos. No capítulo 2, serão apresentados os conceitos fundamentais de MQ, as correlações quânticas relevantes para o trabalho, além de fundamentos de Teoria da Informação e de Termodinâmica, tanto clássica quanto quântica. No capítulo 3 será apresentada a ergotropia [27] e o protocolo principal da ergotropia demoníaca [28]. O quarto capítulo contempla o problema da ergotropia demoníaca utilizando medição fraca seletiva e o resultado obtido pelos autores em [31], denominado superergotropia. Em contraproposta à definição de medição fraca utilizada em [31], propomos o uso de um mapa de monitoramento e mostramos que ele é, de fato, uma noção mais consistente de medição fraca pois varia linearmente com o ganho demoníaco. No capítulo 5

³ Tradução livre de *superergotropy*.

analisamos as correlações quânticas e sua relação com o ganho ergotrópico. Encontramos uma maneira semi-analítica de escrever o ganho demoníaco para estados gerais de dois qubits e particularizamos o resultado obtido para estados Bell-diagonais. Então, mostramos que para essa última classe de estados a não-localidade baseada em realismo é recurso para o ganho demoníaco. Por fim, no último e sexto capítulo sintetizamos o que foi feito no trabalho e concluimos com algumas perspectivas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este trabalho foi construído sob dois pilares principais. Um desses pilares, inclusive, é tão fundamental que é a base do outro. São eles, a MQ e a Termodinâmica Quântica, respectivamente. Neste capítulo será apresentada a estrutura matemática e física dessas duas teorias e os conceitos necessários para a construção desta pesquisa. Para a parte de MQ, as referências principais foram utilizadas foram [34], [35] e [36]. Já no que se refere à Termodinâmica Quântica, as referências mais utilizadas foram [23], [24], [28] e [37].

2.1 FORMALISMO DA MECÂNICA QUÂNTICA

Vetor de Estado

Na Mecânica Clássica (MC), o estado de um sistema físico pode ser descrito por meio de um conjunto de coordenadas no espaço de fase. Na MQ, por outro lado, um sistema físico é representado através de um vetor de estado $|\psi\rangle$, com norma unitária ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$), em um espaço vetorial complexo. Esse espaço, cuja dimensão d é definida de acordo com a natureza do sistema físico em questão, podendo ser finita ou infinita, é conhecido como espaço de Hilbert \mathcal{H} . Ele é equipado com produto interno e é linear, ou seja, é possível escrever qualquer estado $|\psi\rangle$ como uma combinação linear de outros vetores de estado, que compõem uma base ortonormal $\{|\psi_k\rangle\}$, da seguinte maneira

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle. \quad (2.1)$$

Os coeficientes c_k são, portanto, números complexos que determinam a amplitude de probabilidade de cada estado. Os **operadores**, na MQ, são entidades matemáticas utilizadas para representar processos físicos que resultam em uma mudança no vetor de estado do sistema. Sendo O um operador e $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, então

$$O|\psi\rangle = |\phi\rangle, \quad (2.2)$$

onde $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$. É possível também que o operador atue no estado e resulte nesse mesmo estado a menos de uma constante. Nesse caso o vetor é denominado autovetor ($|\psi\rangle$) e a constante autovalor (λ). A equação a seguir é conhecida como equação de autovalores e autovetores:

$$O|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle. \quad (2.3)$$

Um exemplo dessas mudanças decorrentes da ação de um operador é a evolução temporal. Em um sistema quântico fechado, isto é, que não interage com o ambiente, a

evolução temporal é unitária e gerada por um operador Hamiltoniano que pode ou não depender do tempo. A dinâmica do estado $|\psi(t)\rangle$ é descrita pela equação de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle, \quad (2.4)$$

onde H é o operador Hamiltoniano e \hbar a constante reduzida de Planck. Quando H é independente do tempo, integra-se a equação (2.4) e obtém-se

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.5)$$

onde $U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$ é o operador conhecido como operador de evolução temporal e é também uma solução da equação de Schrödinger (2.4). Essa evolução é dita unitária pois $U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)$ e em $t = t_0$, $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$.

Outra definição importante na física é o conceito de **observável**. Um observável é uma propriedade física que pode ser medida. Na MC, observáveis são funções reais no espaço de fase do sistema. Por exemplo, o movimento de um corpo rígido de massa m é definido por sua posição \vec{r} e seu momento \vec{p} . Já na MQ, observáveis são operadores Hermitianos ($O = O^\dagger$) atuando no espaço de Hilbert. Ao realizar uma medição específica de determinado observável obtém-se um autovalor desse observável com determinada probabilidade associada. Para cada possível autovalor há uma probabilidade correspondente. Ao efetuarmos uma medição do operador Hamiltoniano, obtemos um autovalor de energia.

A medição quântica de um sistema fechado é descrita por uma coleção de operadores de medição $\{M_m\}$. Esses operadores atuam no espaço de estados do sistema sendo medido. O subíndice m faz referência aos resultados obtidos nas medições do experimento. Então, se o estado do sistema quântico é $|\psi\rangle$ antes da medição, a probabilidade de se obter a resposta m é descrita por

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (2.6)$$

Após a medição, o sistema colapsa para um estado da forma

$$|\psi^m\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}, \quad (2.7)$$

onde os operadores de medição satisfazem a seguinte *relação de completudeza*

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}. \quad (2.8)$$

Substituindo a relação de completudeza na equação (2.6) temos

$$\sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = \sum_m p(m) = 1, \quad (2.9)$$

o que evidencia que as probabilidades somam para um.

O formalismo descrito acima, em termos dos operadores de medição M_m é comumente conhecido como medições generalizadas. Ao impormos algumas condições sobre os operadores de medição, encontramos um caso particular das medições generalizadas, conhecido como medição projetiva.

Há duas maneiras de postulá-la, ou como medição de base ou como medição de observável. Ambas são equivalentes [36]. A medição projetiva consiste em projetar o estado $|\psi\rangle$ em determinada base, nesse caso $\{|m\rangle\}$. Ao medirmos projetivamente o estado na base $|m\rangle$, encontramos o sistema em $|m\rangle$ com probabilidade $p = |\langle m|\psi\rangle|^2$. A quantidade $\langle m|\psi\rangle$ é a amplitude de probabilidade de se encontrar o sistema em $|m\rangle$. Como um observável é sempre escrito em termos de uma base qualquer, medir a base ou medir o observável tem efeito análogo. Do ponto de vista experimental, medir a base refere-se, por exemplo, no caso do qubit, à projeção do estado do sistema sobre a base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Já medir um observável, corresponde à determinação do valor de uma quantidade física associada a um operador Hermiteano - por exemplo, medir o operador Hamiltoniano e obter os autovalores de energia.

Para uma medição projetiva de um observável M , o operador associado a ele é descrito através da decomposição espectral $M = \sum_m m\Pi_m$, onde $\Pi_m = |m\rangle\langle m|$ é um projetor no autoespaço de M com autovalor m . Nesse contexto, o projetor Π_m deve ser:

1. Hermiteano: $\Pi_m = \Pi_m^\dagger$;
2. Ortogonal: $\Pi_m\Pi_{m'} = \delta_{m,m'}\Pi_m$;
3. Idempotente: $\Pi_m^2 = \Pi_m$;
4. Completo: $\sum_m \Pi_m = \mathbb{1}$.

Operador Densidade

O formalismo do vetor de estado, mostrado acima, é comumente utilizado quando se tem conhecimento total acerca do sistema estudado. Contudo, normalmente esse não é o caso. O formalismo do operador densidade, ou da matriz densidade, surge como uma generalização dos vetores de estado. Se um sistema quântico tem probabilidade p_i de estar no estado $|\psi_i\rangle$, o operador densidade do sistema é descrito por

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.10)$$

um operador Hermiteano positivo com traço igual a um. Logo, para que um operador Hermiteano ρ seja um operador densidade associado a um conjunto $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, ele deve satisfazer essas duas condições de unitariedade do traço e de positividade:

- **Traço Unitário**

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1; \quad (2.11)$$

- **Positividade**

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0. \quad (2.12)$$

A primeira propriedade assegura a normalização das probabilidades p_i e a segunda propriedade garante que ρ seja positivo e semidefinido e, portanto, tenha probabilidades p_i não-negativas.

Um sistema totalmente conhecido, com operador densidade escrito da forma $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, é dito *estado puro*. De forma contrária, se o sistema não é completamente conhecido e é descrito por uma mistura estatística de estados puros, é denominado *estado misto*. Para determinar, a partir do operador densidade, se um estado é puro ou misto basta analisar a propriedade de idempotência ($\rho^2 = \rho$), isto é, se ρ for um estado puro $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. Caso contrário, se ρ for um estado misto, $\text{Tr}(\rho^2) < 1$.

Postulados da Mecânica Quântica

Os Postulados da MQ, apresentados a seguir, buscam descrever o operador densidade por meio de uma formulação geral, caracterizando sua evolução, a maneira com que as medições os afetam e como suas propriedades podem ser representadas matematicamente.

- **1º Postulado:** para todo sistema físico fechado - isto é, que não interage com o meio externo - existe um espaço vetorial complexo de estado associado, conhecido como espaço de Hilbert \mathcal{H} , e um operador densidade ρ que descreve completamente o sistema e atua nesse mesmo espaço \mathcal{H} . Além disso, se o sistema encontra-se num estado quântico ρ_i com probabilidade p_i , é descrito por um operador densidade $\rho = \sum_i p_i \rho_i$.

- **2º Postulado:** a evolução temporal de um sistema quântico fechado é descrita através de uma transformação unitária. Ou seja, a relação entre o estado ρ do sistema no instante t_1 e o estado ρ' do sistema no instante t_2 é descrita por meio de um operador unitário $U(t)$, que depende desses tempos t_1 e t_2 , da forma

$$\rho' = U(t_1, t_2) \rho U^\dagger(t_1, t_2). \quad (2.13)$$

- **3º Postulado:** um conjunto de operadores de medida $\{M_m\}$ descreve uma medição quântica. Esses operadores atuam no espaço de estado do sistema que é medido e satisfazem a relação de completeza $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}$. O subíndice m faz referência a um resultado possível da medição do experimento. Portanto, se ρ for o estado do

sistema quântico antes da medição, a probabilidade de obter m ao realizar a medição é

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (2.14)$$

e o estado do sistema após a medição é

$$\rho \rightarrow \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.15)$$

- **4º Postulado:** o espaço de estado de um sistema quântico composto, isto é, formado por um ou mais sistemas físicos, é caracterizado pelo produto tensorial dos espaços de estado de cada um dos sistemas físicos componentes, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$.

Como mostra o 2º Postulado da MQ, a evolução temporal de um sistema quântico fechado ocorre por meio de uma transformação unitária. Consideramos um estado em um instante de tempo t descrito por $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$, onde $U(t)$ é o operador de evolução temporal do estado e $|\psi(0)\rangle$ é o estado inicial. Substituindo $|\psi(t)\rangle$ na equação de Schrödinger (2.4), temos

$$\frac{d}{dt}U(t)|\psi(0)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H(t)U(t)|\psi(0)\rangle, \quad (2.16)$$

onde $H(t)$ é o operador Hamiltoniano dependente do tempo. Obtemos, então

$$\frac{d}{dt}U(t) = \frac{1}{i\hbar}H(t)U(t), \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt}U^\dagger(t) = -\frac{1}{i\hbar}H(t)U^\dagger(t), \quad (2.18)$$

que descrevem como esses operadores $U(t)$ variam com o tempo. Contudo, a equação (2.13) mostra que $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$. Fazendo a diferencial em relação ao tempo de $\rho(t)$ e substituindo nas equações (2.18), encontramos

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \left(\frac{d}{dt}U(t)\right)\rho(0)U^\dagger(t) + U(t)\rho(0)\left(\frac{d}{dt}U^\dagger(t)\right) \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = H(t)U(t)\frac{1}{i\hbar}\rho(0)U^\dagger(t) - U(t)\rho(0)H(t)U^\dagger(t)\frac{1}{i\hbar} \quad (2.20)$$

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}(H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t)) \quad (2.21)$$

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[H(t), \rho(t)], \quad (2.22)$$

sendo esta conhecida como equação de Liouville-von Neumann.

O Qubit

O sistema quântico mais fundamental para a área de Informação Quântica é conhecido como **qubit**. O termo qubit refere-se ao bit quântico, análogo quântico do bit

clássico, que é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida. O bit quântico difere do bit clássico pois possui a capacidade de existir num estado de *superposição*. Isto é, ao invés de possuir um valor bem definido como 0 ou 1, como ocorre no caso clássico, o qubit encontra-se em superposição entre os dois estados até o momento em que ocorre a medição.

O espaço de Hilbert de um qubit tem dimensão $d = 2$ e base composta por dois vetores ortonormais $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, que é também conhecida como base computacional. A forma geral do estado de um qubit é descrita por

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (2.23)$$

sendo $a, b \in \mathbb{C}$. Como todo e qualquer vetor no espaço de Hilbert, a condição de normalização deve ser satisfeita, ou seja, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ e, conseqüentemente, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são correlatos aos valores 0 e 1 assumidos pelo bit clássico e é possível escrevê-los na forma matricial:

$$|0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Com base na condição de normalização, é possível representar o estado na forma $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$, onde $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$ são parâmetros arbitrários reais. A partir dessa representação, pode-se descrever $|\psi\rangle$ como um ponto na superfície de uma esfera unitária, conhecida como esfera de Bloch [38], ilustrada na figura 2. Nessa

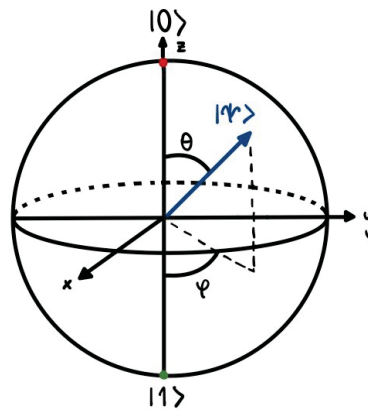


Figura 2 – Representação geométrica do vetor de estado $|\psi\rangle$ de um qubit na esfera de Bloch.

representação, no eixo z estão os estados da base $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que assim como os outros pontos da superfície da esfera consistem em estados puros. Os pontos dentro da esfera são os estados mistos.

O qubit pode representar diferentes sistemas físicos, sendo os mais comuns partículas de spin $1/2$ (como elétrons que podem possuir estados de spin “para cima” e spin “para baixo”), átomos de dois níveis de energia (estado fundamental ou estado excitado), fótons com duas direções de polarização (polarizados horizontalmente ou verticalmente)

e circuitos supercondutores (estado fundamental e primeiro estado excitado do circuito ressonante supercondutor). Este último é o mais utilizado em computadores quânticos.

Como visto no 4º Postulado da MQ, um sistema quântico pode ser composto por mais de um sistema físico. Por exemplo, sistemas de dois qubits tem espaço de Hilbert de dimensão 4 e são bastante utilizados na construção de tecnologias quânticas, pois apresentam propriedades inerentes à MQ, conhecidas como correlações quânticas.

Um exemplo de extrema importância de estados de dois qubits são os estados de Bell, escritos na base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), \quad (2.25)$$

$$|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle). \quad (2.26)$$

Em se tratando de sistemas de um ou dois qubits, os operadores mais importantes são as matrizes de Pauli, definidas como

$$\sigma_x \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Sua importância deve-se ao fato de formarem uma base para o espaço de operadores Hermiteanos de um sistema de um qubit, além de representarem observáveis físicos fundamentais, como as componentes do spin de uma partícula ou a polarização de um fóton.

Sistemas de dois qubits possuem diversas aplicações físicas distintas, como por exemplo em experimentos de desigualdade de Bell [39], protocolos de criptografia quântica [40], teleporte quântico [41] e ainda baterias quânticas [42], das quais falaremos mais adiante.

2.2 TEORIA DA INFORMAÇÃO

Nesta seção apresentaremos dois conceitos fundamentais para quantificar informação na Teoria da Informação Clássica: a entropia de Shannon e a informação mútua [35]. Em seguida, introduziremos a generalização desta entropia para sistemas quânticos, conhecida como entropia de von Neumann.

Entropia de Shannon

A Entropia de Shannon quantifica a quantidade de informação obtida, em média, quando o valor de uma variável aleatória X é acessado. Ou então, a entropia de X mede a incerteza sobre X antes de termos acesso ao seu valor. Ou seja, ela pode ser vista como uma medida da incerteza antes de conhecer o valor de X ou como uma medida de quanta informação foi obtida após conhecermos o valor de X [35].

Portanto, a entropia de uma variável aleatória X é definida como uma função das probabilidades (p_x) de possíveis valores (x) que essa variável pode assumir, isto é

$$H(X) \equiv H(p_1, \dots, p_n) \equiv - \sum_x p_x \log p_x. \quad (2.28)$$

A unidade de medida da entropia varia de acordo com a base da função logarítmica. Para \log_{10} a unidade associada é “Hartley”. Já para \log_2 a unidade é o “bit”, sendo essa a mais empregada no contexto da Teoria de Informação.

Tendo em vista que aparece uma singularidade para $p_x = 0$, define-se que $0 \log 0 \equiv 0$. Quando $H(X) = 0$, podemos entender que não há incerteza sobre a variável aleatória em questão, ela assume determinado valor com probabilidade igual a 1. O valor máximo dessa entropia é encontrado utilizando-se o método de multiplicadores de Lagrange, e o resultado obtido é $H(X) \leq \log d$, onde d são os possíveis resultados que X pode assumir tendo uma distribuição uniforme de probabilidades sobre essas saídas. Esse resultado significa que a entropia só será máxima quando as probabilidades forem iguais, ou seja, quando a incerteza sobre X for máxima, pois todos seus valores possíveis tem mesma probabilidade.

Informação Mútua

A correlação existente entre duas variáveis aleatórias X e Y é quantificada através da informação mútua

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (2.29)$$

onde $H(X)$ e $H(Y)$ são as entropias de Shannon das variáveis X e Y e $H(X, Y) = - \sum_{x,y} p_{x,y} \log p_{x,y}$ é a entropia conjunta de X e Y , que mede a incerteza total sobre esse par de variáveis. Essa é uma entropia aditiva, ou seja, se as distribuições de probabilidade forem independentes ($p_{x,y} = p_x p_y$), a entropia conjunta é a soma das entropias individuais, $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$. Nesse caso, $I(X : Y) = 0$ e o conhecimento de X não provê informação sobre Y e vice-versa. Em outras palavras a equação (2.29) mostra o quanto duas variáveis estão correlacionadas, ou o quanto são não-independentes.

A entropia condicional $H(X|Y)$, por sua vez, é a entropia de X uma vez que o valor da variável Y é conhecido e é dada por

$$H(X|Y) \equiv \sum_y p_y H(X|y), \quad (2.30)$$

onde $H(X|y) = - \sum_x p_{x|y} \log p_{x|y}$. A probabilidade condicional é descrita por $p_{x|y} = p_{x,y}/p_y$.

Escrevendo $H(X|Y)$ em função da entropia conjunta, temos

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p_y \frac{p_{x,y}}{p_y} \log \frac{p_{x,y}}{p_y}, \quad (2.31)$$

$$= - \sum_{x,y} p_{x,y} \log p_{x,y} + \sum_{x,y} p_{x,y} \log p_y \quad (2.32)$$

$$= H(X, Y) - H(Y). \quad (2.33)$$

Então, a informação obtida sobre X uma vez que Y é medido, é igual a informação total sobre essas duas variáveis menos a informação obtida sobre Y . Usando as equações (2.29) e (2.33), é possível rescrever a informação mútua em função da entropia condicional

$$J(X : Y) = H(X) - H(X|Y). \quad (2.34)$$

Ou seja, (2.34) representa o quanto o conhecimento sobre uma das variáveis (Y) reduz a incerteza sobre a outra (X). Pode-se mostrar que as informações mútuas (2.29) e (2.34) são equivalentes

$$I(X : Y) = J(X : Y). \quad (2.35)$$

O diagrama de Venn, exposto na figura 3, mostra a relação entre as informações sobre as variáveis X e Y . Cada conjunto refere-se a uma incerteza sobre X ($H(X)$) e sobre Y ($H(Y)$). A interseção entre os dois círculos representa a existência de correlação entre essas variáveis, isto é, a informação mútua. As meias-luas, por sua vez, mostram a informação sobre X uma vez que se tem o conhecimento sobre Y ($H(X|Y)$) e vice-versa ($H(Y|X)$).

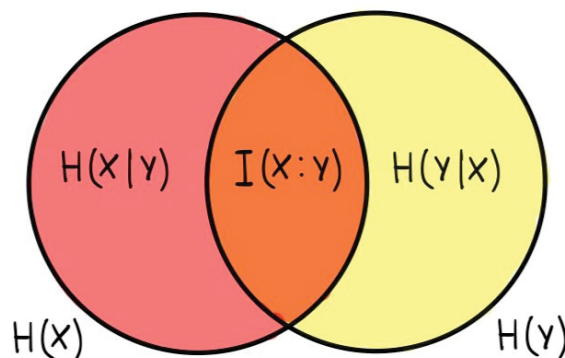


Figura 3 – Medidas teóricas da relação entre X e Y utilizando o diagrama de Venn. Na meia lua a esquerda está a entropia condicional $H(X|Y)$ e na meia lua da direita $H(Y|X)$. Na interseção encontra-se a informação mútua $I(X : Y)$, caracterizando o quanto o conhecimento sobre uma das variáveis reduz a incerteza sobre a outra. Os círculos vermelho e amarelo referem-se as entropias individuais $H(X)$ e $H(Y)$ das variáveis X e Y , respectivamente.

Entropia de von Neumann

A entropia de Shannon mede a incerteza associada a uma distribuição de probabilidade clássica [35]. Generalizando essa definição para estados quânticos, tem-se que a entropia de von Neumann de um estado ρ é descrita por

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr}[\rho \log \rho]. \quad (2.36)$$

Como $\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \psi_i|$ é Hermiteano e pode ser diagonalizado na sua autobase $\{|\psi_i\rangle\}$, essa equação pode ser reescrita em termos dos autovalores p_i de ρ de forma que

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log p_i. \quad (2.37)$$

Por definição, tal como visto para a entropia de Shannon, $0 \log 0 \equiv 0$. Para operadores densidade de dimensão d maximamente misturados ($\rho = \mathbb{1}/d$), a entropia de von Neumann atinge seu valor máximo $S(\rho) = \log d$. Por outro lado, para estados puros, a entropia é zero $S(\rho) = 0$, uma vez que a incerteza sobre o sistema é nula.

De maneira análoga ao que foi feito para a entropia de Shannon, definimos informação mútua para a entropia de von Neumann. A expressão quântica equivalente à equação (2.29) é

$$I(\rho_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}) = S(\rho_{\mathcal{X}}) + S(\rho_{\mathcal{Y}}) - S(\rho_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}), \quad (2.38)$$

onde $S(\rho_{\mathcal{X}})$ e $S(\rho_{\mathcal{Y}})$ são as entropias dos subsistemas \mathcal{X} e \mathcal{Y} , respectivamente, e $S(\rho_{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$ é a entropia conjunta do sistema total. A correspondente quântica da equação (2.34) tem a forma

$$J(\rho_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}) = S(\rho_{\mathcal{X}}) - S(\rho_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}), \quad (2.39)$$

onde $S(\rho_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}})$ é a entropia condicional quântica, que pode ser escrita como

$$S(\rho_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}) \equiv \sum_y p_y S(\rho_{\mathcal{X}|y}), \quad (2.40)$$

sendo $\rho_{\mathcal{X}|y}$ o estado pós-medição projetiva de \mathcal{Y} e p_y a probabilidade de se obter a medida y .

Algumas propriedades de $S(\rho)$, relevantes para este trabalho, são listadas a seguir [35]:

1. *Não-negatividade*: $S(\rho) \geq 0$, com igualdade apenas para o caso onde ρ é um estado puro;
2. *Limite superior*: $S(\rho) \leq \log d$, com igualdade para o caso onde ρ é maximamente misto ($\rho = \mathbb{1}/d$);
3. *Concavidade*: para $\sum_i p_i = 1$ e conjunto de operadores densidade $\{p_i, \rho_i\}$, então $S(\sum_i p_i \rho_i) \geq \sum_i p_i S(\rho_i)$;

4. *Subaditividade*: considerando um estado bipartido ρ_{XY} , então $S(\rho_{XY}) \leq S(\rho_X) + S(\rho_Y)$, onde $\rho_X = \text{Tr}_Y[\rho_{XY}]$ e $\rho_Y = \text{Tr}_X[\rho_{XY}]$, sendo que a igualdade ocorre para o caso em que $\rho_{XY} = \rho_X \otimes \rho_Y$.

2.3 CORRELAÇÕES QUÂNTICAS

Um dos grandes diferenciais da MQ é a possibilidade de existirem correlações entre as partes de sistemas compostos que não podem ser descritas usando modelos clássicos. Compreender a natureza dessas correlações é fundamental, pois elas são capazes de explicar aspectos particulares da natureza que podem servir como recurso para diversas aplicações, como protocolos de criptografia quântica e computação quântica.

Paradoxo EPR

No ano de 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen (EPR) publicaram um artigo intitulado *A descrição quântico-mecânica da realidade física pode ser considerada completa?*¹ [43], que ficou conhecido como artigo de EPR, onde concluíram que a MQ é uma teoria física incompleta. De acordo com os autores, há de ser feita uma distinção entre realidade objetiva, aquela que independe de teoria, e os conceitos com os quais a teoria opera. Segundo eles, para poder classificar uma teoria física como bem sucedida, é necessário responder afirmativamente às seguintes perguntas:

- 1) A teoria está correta?
- 2) A descrição dada pela teoria é completa?

A primeira pergunta faz referência ao êxito experimental da teoria, o que não é um problema para a MQ, uma vez que suas previsões concordam com as observações. A segunda pergunta poderia ser respondida, segundo os autores, definindo-se o que seria uma teoria completa e então avaliando-se se a MQ se encaixa nesse critério.

Completeza - Todo elemento de realidade física deve possuir um correspondente na teoria.

Portanto, para avaliar se a MQ é uma teoria completa é necessário definir o que é um elemento de realidade física.

Elemento de realidade - Se, sem perturbar o sistema de nenhuma maneira, for possível prever com absoluta certeza (probabilidade igual a um) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade correspondente a essa quantidade.

É importante notar que EPR assumem duas condições fundamentais. A primeira é a da *localidade*, referindo-se à ideia de que objetos separados espacialmente não podem afetar instantaneamente um ao outro (devem respeitar a causalidade), e a segunda é a

¹ Tradução livre de *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*

de *realismo*, ou seja, a premissa de que as propriedades físicas existem mesmo antes da medição. A essas duas suposições simultâneas dá-se o nome de *realismo local*.

No artigo, os autores exemplificam a ideia proposta usando um estado de espectro contínuo. Em 1951, David Bohm reformulou esse experimento mental do paradoxo de maneira mais simples, utilizando o espectro discreto [44]. Considerando o estado singlete (2.25), $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, que descreve duas partículas \mathcal{A} e \mathcal{B} de spin $1/2$ afastadas espacialmente, seus autovalores na direção \hat{z} são $+\hbar/2$ para o autovetor $|0\rangle$ e $-\hbar/2$ para o autovetor $|1\rangle$. Então, ao medir o spin da partícula \mathcal{A} na direção \hat{z} e obter o valor $+\hbar/2$, pode-se inferir, sem efetuar a medição da partícula \mathcal{B} , que seu spin será $-\hbar/2$, com base na premissa de conservação do spin total do sistema.

Reescrevendo $|\psi_-\rangle$ na base de S_x ($\{| \pm \rangle\}$), temos

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (2.41)$$

Da mesma forma, medindo agora o spin da partícula \mathcal{A} na direção \hat{x} , podemos inferir o resultado do spin da partícula \mathcal{B} nessa direção. Então, segundo o critério de EPR, como para cada componente de spin medido na partícula \mathcal{A} há um elemento de realidade correspondente para a partícula \mathcal{B} , então as componentes de spin x e z possuem elementos de realidade simultâneos. Contudo, é aí que reside o paradoxo: na MQ os observáveis de spin S_x e S_z não comutam, ou seja, não podem ter valores definidos simultaneamente. E por isso, segundo EPR, a MQ é uma teoria incompleta.

Em 1952, Bohm propôs um modelo de variáveis ocultas [45] como tentativa de resolver o paradoxo, já que estas supririam a aparente incompletude da MQ e restabeleceriam os princípios de localidade e determinismo. Em outras palavras, essa teoria seria descrita em termos das propriedades intrínsecas das partículas que EPR acreditavam estarem predeterminadas, porém desconhecidas. Com essas variáveis ocultas, seria possível reproduzir os mesmos resultados previstos pela MQ, mas exigindo interações não-locais, ou seja, de forma incompatível com o realismo local.

Em 1964, John Bell demonstrou que qualquer teoria de variáveis ocultas locais deveria satisfazer certas restrições matemáticas, derivadas sob a premissa do realismo local [46]. Mais tarde, essas restrições foram expressas como um conjunto de desigualdades - conhecidas como Desigualdades de Bell - cuja violação através de experimentos indica a impossibilidade de uma descrição local e realista da natureza (não-localidade de Bell). Bell mostrou, portanto, que nenhuma teoria de variáveis ocultas locais pode reproduzir todas as previsões da teoria quântica. A primeira verificação experimental dessas desigualdades foi realizada por S. J. Freedman e J. F. Clauser em 1972 [47] e confirmada por Alain Aspect e colaboradores em 1982 [48]. Posteriormente, em 2015, os experimentos foram aperfeiçoados e tornaram-se “incontestáveis”² [49, 50], contribuindo para a láurea do Prêmio Nobel de

² Tradução livre de *loophole-free*.

Física de 2022.

Emaranhamento

Em um artigo publicado no ano de 1944 [51], Schrödinger argumentou que na MQ, o melhor conhecimento do *todo* não necessariamente implica em ter o melhor conhecimento das *partes*. Nos estados de Bell, descritos nas equações (2.25) e (2.26), o estado reduzido é maximamente misto, apesar do estado global ser bem definido. A essa impossibilidade de decompor sistemas quânticos compostos em estados do tipo produto ele deu o nome de *emaranhamento*. Estados puros podem ser não-correlacionados, isto é, estatisticamente independentes, ou emaranhados. Porém, no caso de estados mistos o cenário é mais complexo, já que podem possuir correlações diferentes do emaranhamento, como veremos nas próximas seções.

Estados Puros

- *Definição*: seja um sistema composto por dois subsistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} associados aos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, respectivamente. Um estado puro $|\psi\rangle_{\mathcal{AB}} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ é dito *separável* se o estado do sistema puder ser escrito na forma

$$|\psi\rangle_{\mathcal{AB}} = |\psi\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{B}}, \quad (2.42)$$

onde os subsistemas são completamente independentes um do outro. Do contrário, $|\psi\rangle_{\mathcal{AB}}$ é dito *emaranhado*.

Como dito acima, um exemplo de estados puros maximamente emaranhados são os estados de Bell ((2.26) e (2.25)).

- *Entropia de Emaranhamento*: é uma medida do grau de emaranhamento existente entre duas partes de sistemas bipartidos puros proposta na referência [52]. Dado ρ atuando em \mathcal{H} , onde $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, se a entropia do estado reduzido for diferente de zero $S(\rho_{\mathcal{A}}) = S(\rho_{\mathcal{B}}) \neq 0$, então os sub-sistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} estão emaranhados.

Usando a matriz densidade $\rho_{\mathcal{AB}} = |\psi\rangle\langle\psi|$ para calcular a entropia de emaranhamento, é necessário determinar um dos estados reduzidos, ou seja

$$\rho_{\mathcal{AB}} = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|), \quad (2.43)$$

$$\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}}[\rho_{\mathcal{AB}}] = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \quad (2.44)$$

Então, calculando a entropia de von Neumann utilizando os autovalores de $\rho_{\mathcal{A}}$

$$S(\rho_{\mathcal{A}}) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2. \quad (2.45)$$

Logo, além de $S(\rho_{\mathcal{A}})$ ser não-nula, assume seu valor máximo, o que indica que $\rho_{\mathcal{AB}}$ é um estado maximamente emaranhado. Analisando agora a entropia de von Neumann do próprio $\rho_{\mathcal{AB}}$, temos

$$S(\rho_{\mathcal{AB}}) = -1 \ln 1 = 0, \quad (2.46)$$

indicando que a entropia atinge seu valor mínimo. Isso ilustra a essência do emaranhamento quântico: embora o estado global seja perfeitamente conhecido ($S(\rho_{\mathcal{AB}}) = 0$), os seus subsistemas são maximamente incertos ($S(\rho_{\mathcal{A}}) = S(\rho_{\mathcal{B}}) = \ln 2$) e toda a informação reside nas correlações não-locais entre eles.

Estados Mistos

- *Definição:* para o caso de estados mistos, se um sistema $\rho_{\mathcal{AB}}$ composto por dois subsistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} for escrito na forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^{\mathcal{A}} \otimes \rho_i^{\mathcal{B}}, \quad (2.47)$$

onde p_i são valores não-negativos e $\rho_i^{\mathcal{A}}$ e $\rho_i^{\mathcal{B}}$ são as matrizes densidade dos subsistemas, então ρ é um estado *separável*. Se $\rho_{\mathcal{AB}}$ não puder ser escrito dessa forma, então é um estado *emaranhado*.

Existem algumas medidas de emaranhamento propostas para estados mistos [52–55]. A que será utilizada neste trabalho é denominada concorrência, e foi introduzida por Wootters, em 1998 [56].

- *Concorrência:* é uma medida do grau de emaranhamento para estados mistos de dois qubits ($d = 4$). Seja ρ um estado bipartido misto, a concorrência é descrita por

$$\mathcal{C}(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (2.48)$$

onde λ_i s são os autovalores em ordem decrescente de $\rho\tilde{\rho}$, sendo $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$, ρ^* o complexo conjugado de ρ e σ_y a matriz de Pauli y (2.27).

Quando $\mathcal{C}(\rho) = 0$ significa que ρ é separável e quando $\mathcal{C}(\rho) = 1$, a concorrência é máxima, isto é, ρ é maximamente emaranhado.

Discórdia Quântica

Na série de artigos publicados entre 1935 e 1937 [57–59], Schrödinger argumentou que emaranhamento não era *uma* mas sim *a* característica da MQ. No entanto, a discórdia quântica mostra que o emaranhamento não é a única característica que distingue estados clássicos de estados quânticos. O conceito da discórdia quântica surge no contexto de generalizar a definição de informação mútua para sistemas quânticos. Como mencionado, é

possível escrever a informação mútua de duas formas distintas, como mostram as equações (2.38) e (2.39). Supondo um sistema bipartido descrito pela matriz densidade ρ_{AB} , sendo ρ_A e ρ_B as matrizes densidades reduzidas que descrevem os subsistemas, a informação mútua descreve o quão correlacionados estão esses dois subsistemas.

Do ponto de vista da MC, como mencionado, essas duas informações mútuas são equivalentes. Para a MQ, entretanto, a entropia condicional $S(\rho_{A|B})$ presente em (2.39) depende de um processo de medição realizado no subsistema \mathcal{A} , e portanto, requer uma especificação de qual medição é realizada. A impossibilidade de estabelecer essa equivalência no domínio quântico foi demonstrada, em 2001, por Ollivier e Zurek no artigo [60] e por Henderson e Vedral em [61].

A discórdia quântica pode ser definida, portanto, como a mínima diferença entre as expressões (2.38) e (2.39), ou seja

$$\mathcal{D}(\rho_{AB}) = \overleftarrow{\mathcal{D}}_{AB} = \min_B (I(\rho_{AB}) - J(\rho_{AB})), \quad (2.49)$$

$$= \min_B \left[\sum_b p_b S(\rho_{A|b}) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \right], \quad (2.50)$$

onde $B = \sum_b b \Pi_b$ é um observável cujo conjunto de projetores é $\{\Pi_b\}$, $S(\rho_{A|b})$ é a entropia condicional que depende do subsistema \mathcal{A} dado que uma medição projetiva foi feita sobre o subsistema \mathcal{B} , $\rho_{A|b} = \text{Tr}_{\mathcal{B}}[(\mathbb{1} \otimes \Pi_b)\rho_{AB}(\mathbb{1} \otimes \Pi_b)]/p_b$ é o estado pós-medição projetiva em \mathcal{B} e $p_b = \text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \Pi_b)\rho_{AB}(\mathbb{1} \otimes \Pi_b)]$ a probabilidade de se obter b . A minimização sobre B garante que a discórdia independa de uma base de medição e represente correlações intrinsecamente quânticas. Logo, fica evidente que discórdia quântica é por construção uma medida de correlações quânticas.

A notação $\overleftarrow{\mathcal{D}}_{AB}$ indica que a medição é feita no subsistema \mathcal{B} , e será útil no capítulo 3. Além disso, é importante ressaltar que a expressão (2.50) é assimétrica, pois

$$S(\rho_B) - \sum_b p_b S(\rho_{A|b}) \neq S(\rho_A) - \sum_a p_a S(\rho_{B|a}). \quad (2.51)$$

Ou seja, é possível medir a parte \mathcal{A} mas o resultado não necessariamente será igual ao obtido medindo-se a parte \mathcal{B} , isto é, em geral $\overrightarrow{\mathcal{D}}_{AB} \neq \overleftarrow{\mathcal{D}}_{BA}$.

Não-localidade Baseada em Realismo

Assim como EPR estabeleceram um critério de realismo local, Bilobran e Angelo (BA) no artigo [32], em 2015, também propuseram um critério que busca quantificar a noção de “irrealidade” de um estado quântico ρ que atua em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Nele, os autores assumem que, por hipótese, medir ρ projetivamente com um observável $A = \sum_a a |a\rangle \langle a|$ estabelece um elemento de realidade para A , dada essa preparação. Para verificar se ρ é um estado de realidade de A , realiza-se um protocolo de medição não revelada - isto é,

mede-se ρ com A de forma projetiva e não revela-se o resultado obtido. Caso a prerrogativa seja verdadeira, então a medição não estabelecerá um elemento de realidade, apenas o revelará.

O protocolo consiste em dois processos, como ilustra a figura 4. O primeiro deles se inicia com uma fonte preparando um conjunto de cópias de um estado bipartido genérico. Então, o conjunto dessas cópias submete-se ao processo de tomografia, fazendo com que a matriz densidade do sistema seja determinada e consequentemente obtendo a melhor descrição possível de ρ .

No segundo processo, a fonte prepara o mesmo conjunto de cópias de ρ , porém antes destas cópias passarem pela tomografia um agente intercepta cada uma delas e efetua uma medição projetiva do operador A e anota os resultados, mas não os revela. A descrição do que pode ser obtido para esses estados é dada através do seguinte mapa linear

$$\Phi_A(\rho) := \sum_a (\Pi_a \otimes \mathbb{1}_B) \rho (\Pi_a \otimes \mathbb{1}_B) = \sum_a p_a \Pi_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a}, \quad (2.52)$$

onde $p_a = \text{Tr}[(\Pi_a \otimes \mathbb{1}_B)\rho]$ é a probabilidade do agente obter a medida a e $\rho_{\mathcal{B}|a} = \text{Tr}_A[(\Pi_a \otimes \mathbb{1}_B)\rho(\Pi_a \otimes \mathbb{1}_B)]/p_a$ é o estado que descreve a parte do sistema na qual não houve medição.

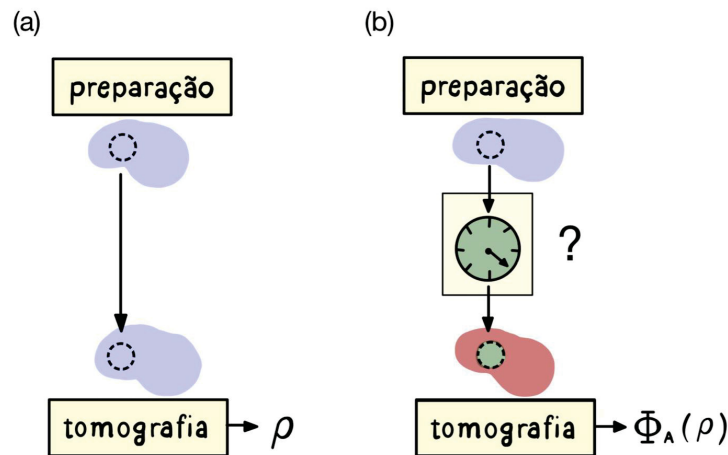


Figura 4 – (a) O conjunto de cópias é submetido ao processo de tomografia resultando na matriz densidade ρ . (b) Antes de passarem pelo processo de tomografia cada uma das cópias sofre a medição de um observável A que se torna real. A tomografia resulta em $\Phi_A(\rho)$.

Ou seja, a partir da proposição inicial feita pelos autores, o estado pós-medição $\Phi_A(\rho)$ tem um elemento de realidade correspondente a A . Devido a isso os autores denominaram o estado $\Phi_A(\rho)$ um estado de realidade de A . Portanto, a condição para que o critério de realidade proposto por BA seja satisfeito é: o observável A será real para o estado ρ se e somente se

$$\rho = \Phi_A(\rho), \quad (2.53)$$

pois nesse caso a ação do agente é inócua.

Nesse mesmo trabalho BA propõem uma maneira de quantificar a quantidade complementar do realismo, denominada *irrealismo*. Para isso, emprega-se a entropia de von Neumann e obtém-se uma medida do grau de violação do critério de realismo (2.53),

$$\mathcal{I}_A(\rho) := S(\Phi_A(\rho)) - S(\rho), \quad (2.54)$$

onde $\mathcal{I}_A(\rho)$ é a irrealidade do observável A dado um estado ρ . Além disso, o irrealismo é equivalente a distância entrópica entre ρ e um estado onde há realidade para $A(\Phi_A(\rho))$

$$\mathcal{I}_A(\rho) = S(\rho || \Phi_A(\rho)). \quad (2.55)$$

Uma propriedade importante que surge da equivalência entre (2.54) e (2.55) é a não-negatividade

$$\mathcal{I}_A(\rho) \geq 0. \quad (2.56)$$

No caso onde $\mathcal{I}_A(\rho) = 0$, significa que $\Phi_A(\rho) = \rho$ sendo esse o único estado de máxima realidade do observável A para determinado ρ . É importante notar que a irrealidade depende do estado e também do observável. Assim, para uma mesma preparação ρ , pode existir um observável B real, de forma que $\mathcal{I}_B(\rho) = 0$ mas também outro observável C irreal, tal que $\mathcal{I}_C(\rho) > 0$.

Para relacionar a irrealidade com a não-localidade, utilizamos novamente o estado singleto, como no exemplo proposto na seção do Paradoxo EPR, $|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ [62]. Esse estado descreve duas partículas \mathcal{A} e \mathcal{B} de spin 1/2, separadas espacialmente. O spin total na direção z é zero. Pode-se dizer que o observável S_z é real para essa preparação $|\psi_-\rangle$, uma vez que o spin total tem valor definido, ou seja, $\Phi_{S_z}(\rho) = \rho$. Ao realizar a medição do spin da partícula \mathcal{A} , o observável $S_z^{\mathcal{A}}$ se torna real, e pela restrição do spin total ter que ser nulo, o spin da partícula \mathcal{B} , $S_z^{\mathcal{B}}$, também se torna real. Como as partículas estão distantes espacialmente, esse fenômeno de emergência de realidade em \mathcal{B} devido a uma perturbação em \mathcal{A} não pode ser caracterizado como localmente causal.

Então, tendo em vista o que foi exposto acima, BA introduzem a seguinte hipótese de localidade, argumentando que se uma medição projetiva de um observável $B = \sum_b b\Pi_b$ atuando em \mathcal{B} não muda a irrealidade de um observável A em \mathcal{A} , nenhum fenômeno não-local emergiria:

$$\mathcal{I}_A(\rho) = \mathcal{I}_A(\Phi_B(\rho)), \quad (2.57)$$

onde $\Phi_B(\rho) = \sum_b (\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \Pi_b)\rho(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \Pi_b)$.

Como visto neste mesmo capítulo, a noção de não-localidade está diretamente associada à violação da desigualdade de Bell. Uma vez que um estado viola essa desigualdade ele é dito um estado não-local. Contudo, essa caracterização é binária, uma vez que não quantifica um grau de violação, apenas aponta se o estado é ou não não-local. No mesmo trabalho [32], BA apresentam uma medida do grau de violação da hipótese local proposta

por eles (2.57), baseada na hipótese de realismo (2.53),

$$\eta_{AB}(\rho) := \mathcal{I}_A(\rho) - \mathcal{I}_A(\Phi_B(\rho)). \quad (2.58)$$

Essa quantidade (2.58) é denominada *não-localidade baseada em realismo contextual* e quantifica o grau de mudança na irrealidade de um observável A quando um observável B é medido, dada uma preparação ρ . Ela é definida, portanto, sobre um contexto de observáveis $\{A, B\}$, é simétrica sobre a troca $A \rightleftharpoons B$ e é não-negativa

$$\eta_{AB}(\rho) \geq 0, \quad (2.59)$$

sendo que a igualdade ocorre para estados separáveis ($\rho = \rho_A \otimes \rho_B$) ou quando já há um elemento de realidade na preparação ($\rho = \Phi_A(\rho)$ ou $\rho = \Phi_B(\rho)$). A invariância sob a permutação dos índices A e B pode ser verificada ao escrever a equação (2.58) em termos da entropia de von Neumann

$$\eta_{AB}(\rho) = S(\Phi_A(\rho)) + S(\Phi_B(\rho)) - S(\Phi_{AB}(\rho)) - S(\rho), \quad (2.60)$$

onde $S(\Phi_{AB}(\rho)) = S(\Phi_A(\Phi_B(\rho)))$. Como A e B comutam, então $S(\Phi_{AB}(\rho)) = S(\Phi_{BA}(\rho))$.

Em 2018, Gomes e Angelo [33] introduziram um quantificador de não-localidade baseada em realismo independente de contexto, associado somente à preparação ρ . Define-se esse quantificador, então, como a máxima variação de realidade η_{AB} sobre todas as escolhas possíveis de observáveis A atuando em \mathcal{H}_A e B atuando em \mathcal{H}_B , isto é

$$\mathcal{N}(\rho) := \max_{\{A, B\}} \eta_{AB}(\rho). \quad (2.61)$$

Da condição (2.59), temos que

$$\mathcal{N}(\rho) \geq 0, \quad (2.62)$$

com igualdade para o caso em que $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$.

Existem duas motivações por trás da definição desse quantificador [33]. A primeira implementa a intuição de que é esperado que um estado que permite maiores alterações na realidade de um observável na parte \mathcal{A} através de perturbações na parte \mathcal{B} , seja mais não-local. A outra é que se $\mathcal{N}(\rho) > 0$ há pelo menos um contexto de observáveis $\{A, B\}$ onde a irrealidade se altera, ou seja, há um cenário onde medições projetivas na parte \mathcal{A} alteram a realidade na parte \mathcal{B} (ou vice-versa).

2.4 PROTOCOLOS DE MEDIÇÃO

Nesta seção, serão introduzidas as Medidas Valoradas por Operadores Positivos³ e duas abordagens distintas de medições fracas, que representam abordagens mais gerais em relação às medições projetivas discutidas anteriormente.

³ Tradução livre de *Positive Operator-Valued Measure (POVM)*.

Medidas Valoradas por Operadores Positivos (MVOP)

O 3º Postulado da MQ nos diz como especificar uma medição quântica em termos de um conjunto de operadores $\{M_m\}$. Esses operadores são conhecidos como **Operadores de Kraus**. Quando os operadores de medição são projetores ortogonais, a medição é dita *projetiva*. Nesse caso, $M_m = \Pi_m$, onde Π_m é um projetor e satisfaz $\Pi_m = \Pi_m^\dagger$ e $\Pi_n \Pi_m = \delta_{n,m} \Pi_n$, então

$$p(m) = \text{Tr}[\Pi_m \rho] \quad (2.63)$$

é a probabilidade de se obter m ao realizar uma medição projetiva em ρ e

$$\rho \rightarrow \frac{\Pi_m \rho \Pi_m}{p(m)} \quad (2.64)$$

é o estado colapsado. Após uma medição projetiva de um observável sobre um sistema, o sistema colapsa para um dos autoestados desse observável e o resultado obtido é o autovalor associado.

Contudo, medições projetivas não consistem no único tipo de medição que pode ser realizada sobre um sistema quântico. Há uma forma mais geral de representar uma medição na MQ, também através dos operadores de Kraus. Para isso, define-se o operador de efeito $E_m = M_m^\dagger M_m$, onde

1. $\sum_m E_m = 1$;
2. $E_m \geq 0$ (positivo e semi-definido).

Operadores E_m desse tipo são conhecidos como elementos de MVOP associados a uma medição. Ou seja, nesse caso, ortogonalidade e idempotência não são propriedades requeridas aos operadores de efeito E_m e os operadores de Kraus M_m são positivos, semi-definidos, e não necessariamente projetores, e por isso diz-se que medições projetivas são um caso específico de MVOPs.

Diferentes conjuntos de operadores $\{M_m\}$ podem gerar o mesmo MVOP $\{E_m\}$. Se somente as probabilidades das medições são desejadas, não importa qual conjunto $\{M_m\}$ é usado, a única coisa que importa é o MVOP $\{E_m\}$. Contudo, estados que tem o mesmo MVOP podem gerar estados pós-medição completamente distintos.

Medições Fracas

A ideia de medição fraca foi proposta pela primeira vez em 1988 por Aharonov, Albert e Vaidman [63]. Nele, os autores modelam uma interação infinitesimal (fraca) entre o aparato de medição e o sistema a ser medido, de modo que o estado seja levemente perturbado, e não colapsado, como ocorre no caso de medições projetivas (fortes).

Já Oreshkov e Brun em 2005 [64] utilizaram o formalismo dos operadores de Kraus para modelar medições fracas. Os autores propuseram a ideia de tentar decompor uma medição generalizada em uma sequência de medições fracas, partindo do fato de que é possível implementar qualquer transformação unitária como uma sequência de transformações unitárias fracas (infinitesimais). Eles mostraram que é possível descrever uma medição projetiva como um conjunto de medições fracas, ao construir um operador que atua produzindo pequenas perturbações no sistema medido, de forma a evitar o colapso do estado mas, ainda assim, obtendo informação probabilística sobre o sistema. Conforme as medições são realizadas em cada uma das cópias idênticas do conjunto de preparações, a informação sobre a medição obtida é melhorada.

Isso mostra que qualquer medição pode ser decomposta em uma sequência de medições fracas e portanto, medições fracas são universais [64]. Os operadores dicotômicos de medição fraca, introduzido pelos autores, são

$$P_{\pm}(x) = \sqrt{\frac{1 \mp \tanh(x)}{2}} \Pi_0 + \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}} \Pi_1, \quad (2.65)$$

onde $x \in \mathbb{R}$ é o parâmetro que caracteriza a intensidade da medição e Π_0 e Π_1 são projetores ortogonais. Note que $\Pi_0 + \Pi_1 = P_+^2 + P_-^2 = \mathbb{1}$. Como $P_+(x)^\dagger P_+(x) + P_-(x)^\dagger P_-(x) = \mathbb{1}$, é possível tratar $P_{\pm}(x)$ como operadores de Kraus.

- No limite onde $|x| \rightarrow \infty$ (**medição forte**), $\tanh(x)$ se aproxima de ± 1 fazendo com que os operadores $P_{\pm}(x)$ atuem como projetores, ou seja:
 - para valores positivos de x suficientemente grandes, $\tanh(x) \approx 1$ e $P_+(x) \approx \Pi_1$ e $P_-(x) \approx \Pi_0$;
 - para valores negativos de x suficientemente grandes, $\tanh(x) \approx -1$ e $P_+(x) \approx \Pi_0$ e $P_-(x) \approx \Pi_1$.
- No limite onde $|x| \rightarrow 0$ (**medição infinitamente fraca**), $\tanh(x) \approx 0$ e os operadores $P_{\pm}(x)$ se tornam aproximadamente:
 - $P_{\pm}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\Pi_0 + \Pi_1)$, correspondendo a uma medição infinitesimalmente fraca, proporcional à identidade e evitando o colapso.
- No regime onde $0 < |x| < \infty$ (**medição fraca**), $\tanh(x) \in [0, 1]$, correspondendo a uma medição fraca com contribuições dos dois projetores, mas evitando o colapso.

Portanto, esse formalismo introduzido em [64] permite controlar a intensidade da medição e obter informação sobre a saída de determinado observável com pouca perturbação.

Mapa de Monitoramento

O comportamento de determinado estado quântico após passar pelo processo de medição é descrito pelo postulado do colapso, como visto na seção 2.1. Essa descrição teórica feita pelo postulado não leva em conta detalhes da interação física entre o estado e o aparato de medição. Uma maneira de formalizar essa perspectiva de entender o colapso como um fenômeno físico real, emergente da dinâmica entre sistema e aparato, é através de um mapa linear [29].

Considerando uma preparação ρ atuando em $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ e um operador $A = \sum_a a \Pi_a$, com projetores $\Pi_a = |a\rangle \langle a|$, realiza-se uma sequência de experimentos onde a é o resultado obtido. O estado que resulta desse processo tem a seguinte forma

$$C_{S|a}(\rho) = \frac{(\mathbb{1} \otimes \Pi_a)\rho(\mathbb{1} \otimes \Pi_a)}{\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \Pi_a)\rho(\mathbb{1} \otimes \Pi_a)]} = \rho_{S|a} \otimes \Pi_a. \quad (2.66)$$

$C_{S|a}(\rho)$ é um mapa linear que permite essa descrição formal do colapso do vetor de estado. Uma medição projetiva como essa permite que o observador tenha conhecimento total sobre o estado reduzido ($\rho_A = \Pi_a$) do sistema. A condição de repetibilidade das medições projetivas também é satisfeita, uma vez que $C_{S|a}^n(\rho) = C_{S|a}(\rho)$ para $n \geq 1 \in \mathbb{Z}$.

Os autores definem em [29], um mapa que permite a interpolação entre medições fracas e projetivas, através de um parâmetro de controle ε . Em outras palavras, o estado ρ é alterado pela medição de acordo com

$$C_{S|a}^\varepsilon(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon C_{S|a}, \quad (2.67)$$

onde $\varepsilon \in (0, 1)$. Quando $\varepsilon \rightarrow 1$, $C_{S|a}^\varepsilon(\rho) = C_{S|a}(\rho)$, representando a ação de uma medição projetiva, e quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $C_{S|a}^\varepsilon(\rho) = \rho$, representando nenhuma medição sobre o sistema. Para ε pequenos o mapa implica em pequenas mudanças na preparação de ρ , simulando a noção de uma medição fraca. Uma propriedade importante do mapa apresentado é que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [C_{S|a}^\varepsilon]^n = C_{S|a}, \quad (2.68)$$

demonstrando que infinitas medições realizadas são equivalentes a uma medição projetiva.

2.5 TERMODINÂMICA

A última parte dessa fundamentação teórica consiste na intersecção entre a Termodinâmica e a MQ. Para isso, faz-se necessário introduzir conceitos de Termodinâmica Clássica e em seguida compreender como é possível generalizá-los para sistemas quânticos.

A Revolução Industrial ocorreu entre o final do século XVIII e o começo do século XIX. Um dos desenvolvimentos mais significativos dessa época foram os motores a vapor. A necessidade de otimizá-los foi primordial para que a Termodinâmica se desenvolvesse.

Foi nesse contexto, em 1824 que o francês Sadi Carnot publicou seu trabalho intitulado *Reflexões sobre a Potência Motriz do Fogo e Máquinas Próprias para Aumentar essa Potência*⁴ [65], onde mostrou que essas máquinas deveriam ser entendidas a partir de seu balanço energético, e propôs uma relação entre calor e trabalho. Até então, não havia sido percebido que parte do calor utilizado para o funcionamento dos motores a vapor era convertido em trabalho.

Termodinâmica Clássica

A Termodinâmica é uma teoria fenomenológica que descreve o comportamento típico de sistemas macroscópicos. Tendo surgido no contexto mencionado acima, é uma teoria que estava intimamente ligada às máquinas a vapor, isto é, tinha como objetivo otimizar a eficiência dos motores e era motivada por questões práticas. Isso explica o fato de sua estrutura ser mais universal para poder descrever o comportamento de qualquer sistema físico, e não buscando dar predições detalhadas do comportamento microscópico de apenas alguns [37]. As quantidades físicas primordiais da Termodinâmica são, portanto, calor e trabalho, e as variáveis macroscópicas primordiais, volume, pressão e temperatura.

Os quatro axiomas que compõe a estrutura da Termodinâmica, também conhecidos como Leis da Termodinâmica [66], são:

- **Lei Zero:** se dois sistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} estão em equilíbrio térmico com um terceiro sistema \mathcal{C} , então \mathcal{A} e \mathcal{B} estão em equilíbrio térmico entre si;
- **1ª Lei:** a energia interna U de um sistema fechado é conservada e suas mudanças ocorrem na forma de calor Q e trabalho W

$$dU = \delta Q - \delta W, \quad (2.69)$$

onde δQ e δW referem-se a diferenciais inexatas de calor e trabalho, respectivamente. Como calor e trabalho são quantidades que dependem do caminho percorrido pelo sistema, isto é, não são funções de estado, não podem ser descritas apenas pelos estados final e inicial do processo.

- **2ª Lei:** nenhum trabalho pode ser extraído de um sistema fechado em equilíbrio térmico por meio de uma variação cíclica de um parâmetro controlado por uma fonte externa, sem que haja uma troca de calor com o ambiente;
- **3ª Lei:** no limite termodinâmico, isto é, quando a temperatura T tende a 0 K, a entropia do sistema se aproxima de zero.

⁴ Tradução livre de *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu et sur les Machines Propres a Développer Cette Puissance*.

É importante ressaltar que a 2ª Lei de Termodinâmica possui diversas formulações distintas, em função de variadas propriedades físicas [67]. A formulação apresentada acima é conhecida como formulação de Thomson [68]. Ela é conveniente pois utiliza o conceito de trabalho, no lugar da entropia - que possui variadas definições - o que é pertinente no contexto deste trabalho, como será ressaltado no próximo capítulo.

Enquanto a formulação de Thomson se dá em termos do trabalho, outras abordagens da 2ª Lei utilizam a entropia, introduzida por Clausius em 1865 [2]. Foi nesse artigo [2] que o autor definiu a palavra em inglês para entropia⁵. O prefixo “en” faz referência a energia e “tropy” deriva da palavra grega “τροπή”, que significa mudança⁶. Ou seja, a entropia em sua forma mais original é descrita como uma mudança de energia em termos do calor Q e da temperatura T [67]

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (2.70)$$

com a igualdade prevalecendo para o caso onde o processo é reversível.

Em 1917, Planck reformulou a 2ª Lei [69], ficando conhecida então como formulação de Kelvin-Planck, propondo que seria impossível construir um motor que trabalhasse em ciclos completos e produzisse somente o efeito de extrair uma quantidade de calor de um reservatório de calor e a realização de uma quantidade igual de trabalho. Contudo, a formulação mais conhecida é a que afirma que a entropia de um sistema fechado não pode diminuir, isto é

$$\Delta S \geq 0, \quad (2.71)$$

onde S é definido pela equação (2.70).

Outra definição de entropia termodinâmica, conhecida como entropia estatística, foi proposta por Boltzmann em 1873 [70] no contexto da Mecânica Estatística. Ela relaciona os microestados de um sistema em equilíbrio, descritos pelas posições e momentos das partículas, com os macroestados definidos por variáveis como temperatura T , energia E , volume V e pressão P . Essa relação é expressa por

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (2.72)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e Ω é o número de microestados acessíveis a um macroestado. Quanto maior Ω , maior a entropia S , estabelecendo a conexão entre as propriedades microscópicas e macroscópicas do sistema. Essa definição também fundamenta a 2ª Lei da Termodinâmica: sistemas isolados evoluem para estados de maior Ω , aumentando a entropia até atingir o equilíbrio, onde ela é máxima e todos os microestados são equiprováveis.

⁵ Tradução livre de *entropy*.

⁶ Tradução livre de *change*.

Shannon definiu a entropia informacional em [3] descrita pela equação (2.28) e notou que esta possui uma forma similar à entropia de Boltzmann (2.72) para probabilidades equiprováveis, já sugerindo um elo entre Teoria da Informação e Termodinâmica. Landauer, como citado, aprofundou esse elo ao quantificar o custo termodinâmico para apagar ou memorizar um bit de informação [5]. Em outras palavras, ele constatou que manipular informação é um processo inerentemente físico com consequências energéticas [71, 72]. Landauer aplicou suas ideias no experimento mental do demônio de Maxwell. Ele apontou que para que o demônio decidisse se deixaria a molécula passar pela porta entre as cavidades do recipiente contendo gás, ele deveria adquirir informação sobre o estado da molécula e guardar ou descartar essa informação, o que geraria uma diminuição ou aumento de entropia, respectivamente.

Na década de 80, Charles Bennett contestou que o demônio eventualmente ficaria sem armazenamento disponível e precisaria apagar informações adquiridas anteriormente [73]. Como apagar informação é um processo irreversível (do ponto de vista termodinâmico) e que, portanto, aumenta a entropia do sistema, a 2ª Lei não seria violada. Bennett teve seu interesse despertado pela relação entre essas duas áreas do conhecimento, Teoria da Informação e Termodinâmica [74, 75], e interessou-se pelo paradoxo do demônio de Maxwell para sistemas quânticos, bem como por computação quântica [76] e criptografia quântica [77–79]. Nessas circunstâncias, começava a nascer a Termodinâmica Quântica.

Termodinâmica Quântica

O sucesso da Termodinâmica é inegável. Até mesmo Einstein em um ensaio escrito em 1949 comentou sobre a universalidade e o caráter fundamental dessa teoria. “É a única teoria física de conteúdo universal, sobre a qual estou convencido de que, dentro do âmbito da aplicabilidade de seus conceitos básicos, nunca será derrubada”⁷ [80]. Apesar disso, ela possui alguns lapsos do ponto de vista da MQ:

- É uma teoria do equilíbrio, capaz de descrever totalmente estados que estão no equilíbrio e transformações quase-estáticas de um estado de equilíbrio para outro e, portanto, não consegue caracterizar estados fora do equilíbrio;
- Seu quadro universal, voltado para a descrição mais geral dos sistemas físicos falha em descrever microscopicamente esses sistemas e em relacioná-los com os sistemas macroscópicos;
- Seu formalismo matemático é de uma teoria clássica, não sendo favorável para descrever sistemas quânticos.

⁷ Tradução livre de “*It is the only physical theory of universal content, which I am convinced, that within the framework of applicability of its basic concepts will never be overthrown.*”.

No equilíbrio termodinâmico, as variáveis termodinâmicas como pressão, temperatura e volume são suficientes para descrever sistemas macroscópicos. Após o advento da teoria atômica, notou-se que em sistemas microscópicos há flutuações dessas quantidades devido ao caos inerente do universo em microescala. Nesse contexto, surge a Mecânica Estatística propondo conectar as flutuações microscópicas com as variáveis macroscópicas. Como o número de partículas desses sistemas é grande, as flutuações tornam-se desprezíveis e o valor esperado dessas quantidades flutuantes coincide com as medições das variáveis termodinâmicas.

O sucesso da Mecânica Estatística, contudo, se reduz ao escopo dos processos que ocorrem no equilíbrio. A Termodinâmica Quântica tem como intuito ir além e abarcar também o comportamento de sistemas microscópicos no regime fora do equilíbrio, onde as flutuações assumem um papel crucial e efeitos de caráter quântico também influenciam a dinâmica [11, 81]. Quantidades termodinâmicas como calor e trabalho, por exemplo, sofrem efeitos dessas flutuações e exigem uma reformulação cautelosa no regime quântico [81]. Assim como no regime clássico existem máquinas térmicas operando em ciclos e convertendo calor em trabalho útil, no regime quântico também é possível construir tais sistemas.

Trabalho Quântico

Há uma grande dificuldade em estender o conceito de trabalho para o domínio quântico devido a alguns fatores. Como visto, a MQ constrói seu formalismo em termos de operadores associados a observáveis físicos. Para determinar o spin de uma partícula, por exemplo, mede-se projetivamente o observável de spin no sistema em questão e o sistema colapsa em um dos autoestados de spin com determinada probabilidade. Portanto, o processo de medição é local no tempo, bem como a informação associada ao operador.

Portanto, trabalho, em um primeiro momento, não entraria na classificação de observável como posição, momento e energia, uma vez que caracteriza um processo e não um estado do sistema [82]. Mesmo para o caso de um sistema fechado e termicamente isolado, considerando o trabalho como a diferença de energia em dois instantes de tempo distintos, para determiná-lo seria necessário interagir o sistema com o aparato de medição duas vezes, interferindo no valor final do trabalho.

Uma maneira de determinar a estatística do trabalho quântico, tendo como premissa fundamental os teoremas de flutuação [83], é através do protocolo conhecido como “Esquema de Medição de Energia em Dois Tempos”⁸ [84]. A ideia proposta pelos autores consiste em associar o trabalho à diferença entre os autovalores de energia antes ($t = 0$) e depois ($t = \tau$) de uma transformação associada a um parâmetro de controle externo λ , que afeta o sistema. Realiza-se uma primeira medição projetiva do operador Hamiltoniano

⁸ Tradução livre de *Two-time energy measurement approach*.

$H(\lambda_0)$ no sistema inicial para determinar sua energia, encontrando o autovalor $E_n^{\lambda_0}$ e então o sistema evolui por meio do operador de evolução temporal $U_\tau = \tau_{>} \exp(-i/\hbar \int_0^\tau dt H(\lambda_t))$, onde $\tau_{>}$ representa o ordenamento temporal. Ao fim dessa evolução mede-se $H(\lambda_\tau)$ no sistema em seu estado final obtendo-se o autovalor de energia $E_m^{\lambda_\tau}$. Em uma única rodada de medições o trabalho fica, portanto

$$W_{0 \rightarrow \tau} = E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}. \quad (2.73)$$

Efetuada a média sobre um conjunto de realizações do mesmo processo de medição, encontramos uma distribuição de probabilidade de trabalho quântico descrita por

$$p(W; \lambda) = \sum_{m,n} \delta(W - [E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}]) p_{m|n}(\lambda) p_n^0, \quad (2.74)$$

sendo $p_{m|n}(\lambda)$ a probabilidade de obter $E_m^{\lambda_\tau}$ ao medir $H(\lambda_\tau)$ em $t = \tau$ e p_n^0 a probabilidade de obter $E_n^{\lambda_0}$ ao medir $H(\lambda_0)$ em $t = 0$. No entanto, essa abordagem necessita de duas medições projetivas no sistema, o que colapsa o estado medido duas vezes gerando decoerência.

Outra maneira de calcular trabalho quântico, proposta na literatura como alternativa ao processo das duas medições, é considerar em uma única realização quanto o valor esperado de um autoestado de energia muda sob determinada evolução unitária [85]. Ou seja,

$$W_n \equiv \langle n | U_\tau^\dagger H(\lambda_\tau) U_\tau | n \rangle - E_n^{\lambda_0}, \quad (2.75)$$

onde λ_τ é o parâmetro de controle externo no instante $t = \tau$, $H(\lambda_\tau)$ é o operador Hamiltoniano do sistema que varia durante o tempo τ conforme λ muda e $|n\rangle$ é um autoestado de energia associado ao autovalor $E_n^{\lambda_0}$. Calculando a média do trabalho, com p_n^0 sendo a probabilidade de encontrar o n -ésimo autoestado no tempo $t = 0$, temos

$$\langle W \rangle = \sum_n \langle n | U_\tau^\dagger H(\lambda_\tau) U_\tau | n \rangle p_n^0 - \text{Tr}[\rho_{\text{Gibbs}} H(\lambda_0)], \quad (2.76)$$

$$= \text{Tr}[\rho(\tau) H(\lambda_\tau)] - \text{Tr}[\rho_{\text{Gibbs}} H(\lambda_0)], \quad (2.77)$$

onde $\rho_{\text{Gibbs}} = e^{-\beta H(\lambda_0)} / \text{Tr}[e^{-\beta H(\lambda_0)}]$ é o estado inicial, preparado na forma de Gibbs, que será discutido na próxima subseção.

Há ainda outra abordagem que propõe tratar trabalho como um observável e evita as medições duplas. No formalismo apresentado em [86], os autores utilizam operadores quânticos na representação de Heisenberg para definir trabalho, associando-os à diferença entre os operadores Hamiltonianos em dois instantes de tempo distintos e, dessa forma, incorporando a dinâmica do sistema de forma contínua, preservando a coerência do estado quântico.

A definição que usaremos nesse trabalho foi uma das primeiras propostas para o contexto quântico [87] e baseia-se na variação média da energia do sistema conforme ele

evolui através de operações unitárias U . O trabalho realizado sobre o sistema é

$$W_{in} = \text{Tr}[\rho(t)H(t)] - \text{Tr}[\rho(0)H(t)], \quad (2.78)$$

onde $\rho(t) = U\rho(0)U^\dagger$ é o estado final, $\rho(0)$ é o estado inicial, $H(t) = H + V(t)$ é o Hamiltoniano dependente do tempo e $V(t)$ um potencial que atua como parâmetro de controle externo, de forma cíclica ($V(0) = V(\tau) = 0$). Essa definição preserva coerência, evitando as medições, e concorda com a ideia das quantidades termodinâmicas comportando-se como médias, proposta pela Mecânica Estatística.

Estados Passivos

Para a definição de Trabalho Quântico de acordo com a última proposta apresentada acima, é preciso apresentar a ideia de estados passivos. Dado um sistema quântico fechado descrito por ρ_S governado por um Hamiltoniano dependente de um parâmetro de controle externo (λ), existe uma família de estados parametrizados pela temperatura (estados térmicos, também chamados de estados de Gibbs) dos quais não é possível extrair trabalho por meio de variações cíclicas desse parâmetro. A essa família de estados dá-se o nome de estados *passivos*. Essa definição foi apresentada por Pusz e Woronowicz em 1978 ao definirem estados de equilíbrio para sistemas quânticos gerais [88]. A *passividade* de determinados estados pode ser entendida como um resultado da 2ª Lei da Termodinâmica no domínio quântico, pois impede a extração de trabalho de um sistema em equilíbrio sem a ação de um forçante externo. Isso formaliza, no regime quântico-mecânico, a ideia de que um sistema isolado não pode espontaneamente converter sua energia interna em trabalho útil.

Um estado de determinado sistema S é dito *passivo* se a matriz densidade ρ_S e se o Hamiltoniano do sistema H_S possuírem as seguintes decomposições espectrais

$$\rho_S = \sum_k r_k |r_k\rangle \langle r_k|, \quad H_S = \sum_k \epsilon_k |\epsilon_k\rangle \langle \epsilon_k|, \quad (2.79)$$

sendo que $r_{k+1} \geq r_k$ e $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k$ para $k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. Ou seja, se a população de ρ_S (autovalores) for ordenada de forma monotonicamente decrescente em relação aos níveis de energia de H_S , significa que ρ_S é passivo e nenhum trabalho pode ser extraído dele por meio de operações cíclicas unitárias. O estado de Gibbs satisfaz essa condição e, logo, é um estado passivo

$$\rho_{Gibbs} = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \quad (2.80)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, T é a temperatura do sistema e $Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$ a função partição. Resumindo, ρ_S será passivo se e somente se

- ρ_S e H_S forem diagonais na mesma base, isto é, $[\rho_S, H_S] = 0$;

- ρ_S tiver inversão de população em relação a H_S .

Isso significa que o estado fundamental tem maior probabilidade de ocupação e essa probabilidade decai conforme a energia aumenta. Qualquer operação que trocar as populações somente aumentará a energia do sistema, já que necessariamente aumentará a população de um autoestado de energia maior sob o custo de correspondentemente diminuir a ocupação de um autoestado de energia menor. Não é possível extrair trabalho de um estado desse tipo justamente porque sua energia já é a menor possível.

Exemplo: Baterias Quânticas

Baterias quânticas são sistemas quânticos de dimensão d cujo Hamiltoniano tem forma

$$H_B = \sum_{i=0}^{d-1} \epsilon_i |\epsilon_i\rangle \langle \epsilon_i|, \quad \text{com } \epsilon_i < \epsilon_{i+1}, \quad (2.81)$$

onde assume-se que o espectro é não-degenerado [89]. Sendo ρ_B um estado genérico da bateria, sua energia interna é $\text{Tr}[\rho_B H_B]$. Para poder extrair trabalho da bateria, ela precisa estar em um estado ativo da forma

$$\rho_B = \sum_{i=0}^{d-1} r_i |r_i\rangle \langle r_i|, \quad (2.82)$$

com $r_i < r_{i+1}$ para pelo menos um valor de i . Segundo a definição (2.78), o trabalho extraído do sistema é dado por $W_{ext} = -W_{in}$, temos

$$W_{ext} = \text{Tr}[\rho_B H_B] - \text{Tr}[U \rho_B U^\dagger H_B]. \quad (2.83)$$

Quando $U \rho_B U^\dagger \rightarrow \rho_P$, sendo ρ_P o estado passivo, atingido por meio de um processo cíclico unitário que reordena a ocupação dos níveis de energia em ordem crescente, não será mais possível extrair trabalho da bateria. A ação do potencial $V(t)$ será uma coleção de operações de inversão entre os níveis de energia para que o estado final tenha a menor energia.

3 ERGOTROPIA

3.1 MÁXIMA EXTRAÇÃO DE TRABALHO

O problema da máxima extração de trabalho termodinâmico de um sistema isotérmico, por meio de uma fonte externa atuando em ciclos, foi abordado pela primeira vez, do ponto de vista clássico, no século XIX pelo químico francês Marcellin Berthelot. O teorema do trabalho máximo postula que para todos os processos que levam um estado inicial específico a um estado final específico, a entrega de trabalho é máxima para aqueles processos que são reversíveis [66]. O repositório para onde o trabalho vai quando é extraído é chamado de “fonte reversível de trabalho”, que pode ser entendido como um sistema adiabático com paredes impermeáveis onde os processos são *quasi-estáticos*, isto é, a entropia do processo mantém-se constante. Na teoria, sistemas conservativos são fontes reversíveis de trabalho.

Um exemplo de reservatório (ou fonte reversível) de trabalho são as baterias. Do ponto de vista clássico, uma bateria é um dispositivo que armazena energia fornecida por fontes externas e proporciona potência para outras máquinas [23]. A produção de dispositivos eletrônicos cada vez menores exige a fabricação de baterias cujo tamanho seja igualmente cada vez menor. Nesse contexto surgem as baterias quânticas, apresentadas pela primeira vez em 2013 por R. Alicki e M. Fannes [89], e introduzidas na seção anterior. Essencialmente, baterias quânticas são sistemas quânticos com níveis de energia não-degenerados, dos quais trabalho pode ser extraído de forma reversível por meio de operações cíclicas unitárias. Ou seja, é uma aplicação direta do princípio da máxima extração de trabalho termodinâmico do ponto de vista quântico.

Essa abordagem começou a ser estudada em 2004 no artigo intitulado *Máxima extração de trabalho de sistemas quânticos finitos*¹ [27]. Inicialmente, há um sistema S descrito por $\rho(t=0)$, fora do equilíbrio e termicamente isolado, cuja evolução no tempo é unitária e descrita por um Hamiltoniano dependente do tempo $H(t) = H + V(t)$, onde $V(t)$ é um potencial associado à transferência de trabalho, ou seja, um parâmetro de controle externo. Nos instantes inicial ($t=0$) e final ($t=\tau$), esse potencial é nulo, isto é, $V(0) = V(\tau) = 0$, caracterizando o processo como cíclico. Como o Hamiltoniano é descrito em termos de uma parte temporal e uma parte independente do tempo, a dinâmica do sistema se modifica de forma unitária, retratando o comportamento de um sistema *fechado*.

O objetivo é encontrar a quantidade máxima de trabalho \mathcal{W} que pode ser extraída de S por meio de potenciais $V(t)$ arbitrários. A dinâmica do sistema segue a equação de Liouville-von Neumann (2.22), demonstrada na seção 2.1. Como o sistema é fechado

¹ Tradução livre de *Maximal work extraction from finite quantum systems*.

durante o ciclo, o trabalho $dW = \text{Tr}[\rho(t)\dot{V}(t)]dt$ realizado sobre \mathcal{S} (W_{in}) pode ser descrito como a variação entre as energias do estado final e inicial [90]. Ou seja,

$$W_{in} = \int_0^\tau \text{Tr} \left[\rho(t) \frac{dV(t)}{dt} \right] dt. \quad (3.1)$$

Integrando por partes, temos

$$W_{in} = \text{Tr} \left[\rho(t)V(t) \Big|_0^\tau \right] - \int_0^\tau \text{Tr} [V(t)\dot{\rho}(t)] dt, \quad (3.2)$$

$$= \text{Tr} \left[\rho(t)V(t) \Big|_0^\tau \right] - \frac{1}{i\hbar} \int_0^\tau \text{Tr} [V(t)(H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t))] dt, \quad (3.3)$$

$$= \text{Tr} \left[\rho(t)V(t) \Big|_0^\tau \right] - \frac{1}{i\hbar} \int_0^\tau \text{Tr} [(H^2(t)\rho(t) - \rho(t)H^2(t))] dt, \quad (3.4)$$

sendo que da equação (3.3) para a equação (3.4) a igualdade $V(t) = H(t)$ é válida, uma vez que $V(t) = H(t) - H$ e H é independente do tempo. Devido à linearidade do traço e ao fato de, por hipótese, $\rho(t)$ e $H(t)$ comutarem, encontramos

$$W_{in} = \text{Tr}[\rho(t)H(t)] \Big|_0^\tau, \quad (3.5)$$

$$= \text{Tr}[\rho(\tau)H] - \text{Tr}[\rho(0)H], \quad (3.6)$$

onde $\rho(\tau) = U\rho(0)U^\dagger$ é o estado final, $\rho(0)$ o estado inicial. Podemos definir, então, a energia final como $E_f = \text{Tr}[\rho(\tau)H]$ e $E_i = \text{Tr}[\rho(0)H]$ como a energia inicial.

A relação entre o trabalho realizado (W_{in}) sobre \mathcal{S} e o trabalho extraído (W_{ext}) de \mathcal{S} é $W_{in} = -W_{ext}$. Então, $W_{ext} = E_i - E_f$. Para obter a quantidade máxima de trabalho extraído de \mathcal{S} é necessário realizar a seguinte maximização: $\mathcal{W} = \max(W_{ext})$. Dentre todos os possíveis estados finais $\rho(\tau)$, originados a partir da ação de $V(t)$ sobre $\rho(0)$, o estado que maximiza o trabalho extraído é aquele que minimiza a energia final E_f .

Esse estado em questão é o estado de equilíbrio de Gibbs (2.80). O coeficiente $\beta = 1/k_B T$, associado à temperatura T , sendo k_B a constante de Boltzmann, pode ser determinado igualando-se as entropias de von Neumann inicial e final

$$S(\rho(0)) = S(\rho(\tau)), \quad (3.7)$$

$$= -\text{Tr} [\rho(\tau) \ln(\rho(\tau))], \quad (3.8)$$

$$= -\text{Tr} \left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} \ln \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} \right) \right], \quad (3.9)$$

$$= \text{Tr} \left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} \beta H \right] + \text{Tr} \left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} \ln(Z) \right], \quad (3.10)$$

$$= \beta \text{Tr} \left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} H \right] + \ln(Z), \quad (3.11)$$

e utilizando o Teorema da Equipartição de Energia ($\langle E \rangle = 3/2\beta$). Como a energia média é dada por $\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = \text{Tr} \left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} H \right]$, temos

$$S(\rho(0)) = \beta \langle E \rangle + \ln(Z). \quad (3.12)$$

Então, para encontrar o limite superior de \mathcal{W} , que é a ergotropia quando o estado final é do tipo térmico (\mathcal{W}_{ter}), isolamos $\langle E \rangle$ na equação (3.12) e encontramos

$$-\langle E \rangle = \frac{1}{\beta}(\ln(Z) - S(\rho_0)), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = T k_B \ln(Z) - T k_B S(\rho_0). \quad (3.14)$$

Portanto, $E_f = \langle E \rangle$,

$$\mathcal{W}_{ter} = E_i - E_f, \quad (3.15)$$

$$= E_i - \langle E \rangle, \quad (3.16)$$

$$= E_i + T k_B \ln(Z) - T k_B S(\rho_0). \quad (3.17)$$

Em sistemas quânticos, ou sistemas finitos, somente a ação do potencial $V(t)$, em geral, não é suficiente para que um estado atinja a forma Gibbsiana após um tempo τ . Por isso, é esperado que a quantidade máxima de trabalho \mathcal{W} extraída de \mathcal{S} seja menor que \mathcal{W}_{ter} . A entropia $S(\rho)$ é conservada durante esses processos, tal como os autovalores de ρ , e ao contrário de sistemas termodinâmicos, sistemas finitos não possuem nenhum tipo de mecanismo de relaxação.

A evolução de ρ é, portanto, do tipo unitária, tal que $\rho(\tau) = U\rho(0)U^\dagger$. Dessa forma, é necessário encontrar qual é a operação unitária U que minimiza a energia final $E_f = \text{Tr}[U\rho(0)U^\dagger H]$, para obter a máxima extração de trabalho \mathcal{W} . Consideramos um sistema \mathcal{S} com matriz densidade $\rho_{\mathcal{S}}$ e Hamiltoniano $H_{\mathcal{S}}$ com decomposição espectral e ordenamento tal como mostrado na equação (2.79). O mínimo de E_f é alcançado por meio do seguinte operador:

$$U = \sum_j |\epsilon_j\rangle \langle r_j|, \quad (3.18)$$

que evolui o estado inicial até um estado onde a maior população r_k ocupa o nível mais baixo de energia, ou seja, um estado da forma

$$\rho(\tau) = \sum_k r_k |\epsilon_k\rangle \langle \epsilon_k|, \quad (3.19)$$

que é estacionário, uma vez que comuta com o Hamiltoniano $H_{\mathcal{S}}$. Portanto, a menor energia final é $E_f = \sum_k r_k \epsilon_k$. Em [28] encontra-se a prova de que (3.18) é de fato a operação unitária ótima. Como visto no capítulo anterior, um estado que comuta com o Hamiltoniano do sistema e seus autovalores são ordenados decrescendo com a energia, é chamado de estado *passivo*. De um estado pertencente à essa categoria, trabalho não pode ser extraído por meio de operações cíclicas unitárias.

À quantidade máxima de trabalho extraído de \mathcal{S} por meio de operações cíclicas unitárias dá-se o nome de **ergotropia** \mathcal{W} e é descrita pela equação

$$\mathcal{W} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}(0)H_{\mathcal{S}}] - \min_U \text{Tr}[U\rho_{\mathcal{S}}(0)U^\dagger H_{\mathcal{S}}], \quad (3.20)$$

$$= \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}(0)H_{\mathcal{S}}] - \sum_k r_k \epsilon_k, \quad (3.21)$$

$$= \sum_{j,k} r_k \epsilon_j (|\langle \epsilon_j | r_k \rangle|^2 - \delta_{j,k}). \quad (3.22)$$

Por construção, tem-se que $\mathcal{W}_{ter} \geq \mathcal{W} \geq 0$. A ergotropia é zero quando o estado inicial é passivo em relação ao Hamiltoniano do sistema e é limitada superiormente por \mathcal{W}_{ter} somente se existirem dois números β e Z , tais que os autovalores da matriz densidade $\rho_{\mathcal{S}}$ e de $H_{\mathcal{S}}$ satisfaçam a relação

$$\ln(r_j) = -\beta \epsilon_j - \ln(Z), \quad (3.23)$$

para que $\rho(\tau) = U\rho(0)U^\dagger$ atinja a forma Gibbsiana na ausência de um mecanismo de termalização. Alguns exemplos importantes de estados iniciais $\rho_{\mathcal{S}}$ que podem atingir a forma Gibbsiana após a extração de trabalho máxima são:

1. Estados puros;
2. Sistemas de dois níveis ($d = 2$);
3. Osciladores harmônicos onde $\rho_{\mathcal{S}}$ é um estado Gaussiano.

3.2 ERGOTROPIA DEMONÍACA

A ideia do protocolo da máxima extração de trabalho utilizando um sistema auxiliar foi proposto em 2017 por Gianluca Francica, John Goold, Francesco Plastina e Mauro Paternostro em um trabalho intitulado *Ergotropia demoníaca: extração de trabalho otimizada por meio de correlações quânticas*² [28]. Nele, os autores propõem que o sistema inicial esteja acoplado com uma ancila³ não interagente e seja preparado num estado conjunto $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$. O ponto principal do protocolo é que se $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ contiver correlações quânticas entre o sistema \mathcal{S} e o sistema auxiliar \mathcal{A} , uma medição feita na ancila forneceria informação sobre o estado de \mathcal{S} , a qual poderia ser usada para aumentar a quantidade de trabalho que pode ser extraído do sistema.

A ergotropia agora, portanto, depende de qual medição será feita no sistema auxiliar \mathcal{A} definida por $A = \sum_a a \Pi_a$, onde $\Pi_a = |a\rangle \langle a|$. Ao passar pela medição A com resultado a , o estado do sistema colapsa para um estado condicional na forma

$$\rho_{\mathcal{S}|a} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[(\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes \Pi_a)\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}(\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes \Pi_a)]}{\text{Tr}[(\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes \Pi_a)\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}]}, \quad (3.24)$$

² Tradução livre de *Daemonic ergotropy: enhanced work extraction from quantum correlations*.

³ Sistema auxiliar.

onde $p_a = \text{Tr}[(\mathbb{1}_S \otimes \Pi_a)\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}]$ é a probabilidade de se obter o resultado a . A evolução temporal do estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ ocorre por meio de um processo cíclico unitário U_a condicionado ao resultado a . Em [28], os autores propõem que o trabalho extraído de ρ_S pode ser obtido a partir da média sobre todos os resultados possíveis da medição, ou seja,

$$W_{\{\Pi_a\}} = \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \text{Tr}[U_a \rho_{\mathcal{S}|a} U_a^\dagger H_S], \quad (3.25)$$

onde $W_{\{\Pi_a\}} = W_{ext} = E_i - E_f$ e $\rho_S = \text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}]$ é o estado reduzido do sistema. Essa quantidade depende explicitamente da estratégia de controle determinada pelos resultados das medições $\{\Pi_a\}$. Para maximizar o trabalho extraído do sistema, é necessário repetir o processo apresentado na seção anterior, de minimização da energia final E_f , contudo agora em relação à unitária condicionada U_a . Ou seja,

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \max_{U_a}(W_{\{\Pi_a\}}), \quad (3.26)$$

$$= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \min_{U_a} \left\{ \sum_a p_a \text{Tr}[U_a \rho_{\mathcal{S}|a} U_a^\dagger H_S] \right\}. \quad (3.27)$$

Substituindo $\rho_{\mathcal{S}|a}$ e H_S na equação (3.27) temos

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \text{Tr}[\rho_S H_S] \quad (3.28)$$

$$- \sum_a p_a \min_{U_a} \left\{ \text{Tr} \left[U_a \left(\sum_k r_k^a |r_k^a\rangle \langle r_k^a| \right) U_a^\dagger \left(\sum_i \epsilon_i |\epsilon_i\rangle \langle \epsilon_i| \right) \right] \right\}, \quad (3.29)$$

$$= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \sum_{i,k} r_k^a \epsilon_i \min_{U_a} [\langle \epsilon_i | U_a | r_k^a \rangle \langle r_k^a | U_a^\dagger | \epsilon_i \rangle], \quad (3.30)$$

$$= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \sum_{i,k} r_k^a \epsilon_i \min_{U_a} [|\langle \epsilon_i | U_a | r_k^a \rangle|^2], \quad (3.31)$$

onde $U_a = |\epsilon_k\rangle \langle r_k^a|$ é a unitária que minimiza o termo entre colchetes na equação (3.31). Então, chegamos no resultado

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \sum_k r_k^a \epsilon_k, \quad (3.32)$$

onde r_k^a são os autovalores de $\rho_{\mathcal{S}|a}$. Essa quantidade é conhecida como **Ergotropia Demoníaca**, fazendo referência ao demônio de Maxwell, uma vez que informação sobre o sistema principal é obtida por meio de medições no sistema auxiliar.

Se o sistema \mathcal{S} e a ancila \mathcal{A} forem estatisticamente independentes, isto é, $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \rho_S \otimes \rho_{\mathcal{A}}$, as medições feitas sobre \mathcal{A} não proporcionariam nenhuma informação sobre o estado de \mathcal{S} , e $\rho_{\mathcal{S}|a} = \rho_S$ para qualquer conjunto $\{\Pi_a\}$ e resultado a . Logo, não haveria nenhum ganho na extração de trabalho devido ao protocolo apresentado e $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \mathcal{W}$.

Para poder entender as ocorrências de ganho nulo na extração de trabalho, mesmo havendo estados correlacionados $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, os autores introduzem a quantidade

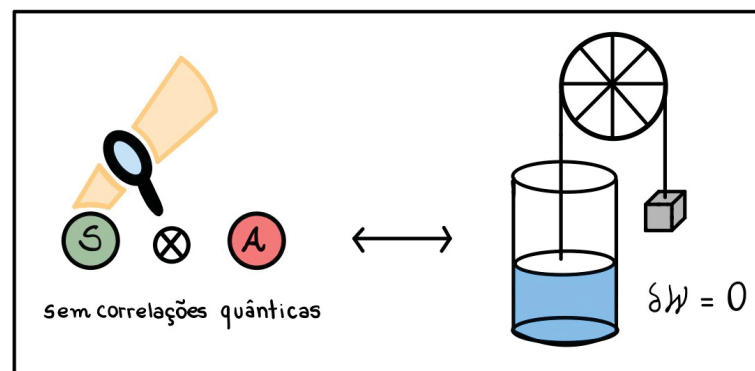
$$\delta\mathcal{W} = \max_A(\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W}), \quad (3.33)$$

denominada **Ganho Demoníaco**, também referindo-se a ideia de obter informação sobre o sistema através do acoplamento e medição na ancila. A maximização é feita sob o conjunto de observáveis A e em [28] encontra-se a prova de que $\delta\mathcal{W} \geq 0$. Substituindo as equações (3.21) e (3.32) na relação (3.33), temos

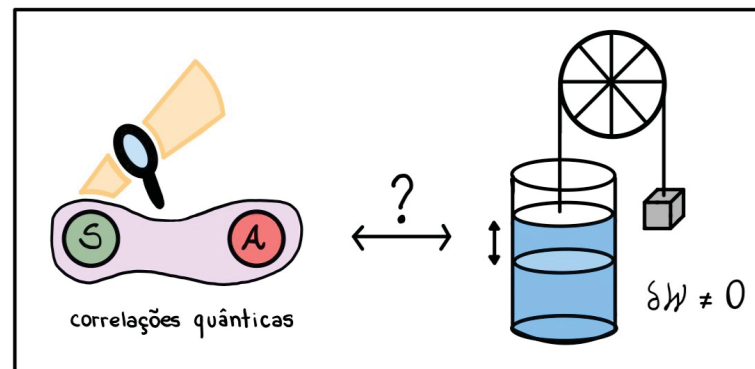
$$\delta\mathcal{W} = \max_A \left\{ \left(\text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \sum_k r_k^a \epsilon_k \right) - \left(\text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_k r_k \epsilon_k \right) \right\}, \quad (3.34)$$

$$= \max_A \left(\sum_k r_k \epsilon_k - \sum_{k,a} p_a r_k^a \epsilon_k \right), \quad (3.35)$$

obtendo uma expressão para o ganho demoníaco em termos dos autovalores ordenados de ρ_S e de $\rho_{S|a}$. As figuras 5(a) e 5(b) ilustram o protocolo apresentado em [28].



(a)



(b)

Figura 5 – (a) Quando o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}$ é nulo, significa que \mathcal{S} e \mathcal{A} são estatisticamente independentes, isto é, não há correlações quânticas entre ambos. (b) Quando o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}$ é diferente de zero, significa que pode haver correlações quânticas entre \mathcal{S} e \mathcal{A} . Em sistemas bipartidos, $\delta\mathcal{W} = 0$ é uma condição suficiente e necessária para que \mathcal{S} e \mathcal{A} sejam estatisticamente independentes.

Para poder analisar a relação do ganho com correlações quânticas é importante notar que $\delta\mathcal{W}$ é invariante sob transformações unitárias locais, ou seja, uma transformação em \mathcal{S} pode ser incorporada na evolução utilizada para extrair trabalho, enquanto qualquer unitária atuando em \mathcal{A} é equivalente a uma mudança de base.

O primeiro quantificador de correlações quânticas entre o sistema e a ancila considerado em [28] é a discórdia quântica, definida na seção 2.3 pela equação (2.50). No contexto do problema abordado temos

$$\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = I_{\mathcal{S}\mathcal{A}} - \max_A J_{\mathcal{S}\mathcal{A}}, \quad (3.36)$$

onde $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ indica que a medição foi feita no sistema \mathcal{S} .

Dois resultados importantes foram estabelecidos por meio de teoremas⁴. O primeiro deles é apresentado a seguir:

Teorema 1. Para quaisquer sistemas \mathcal{S} e ancila \mathcal{A} preparados em um estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, temos

$$\delta\mathcal{W} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0. \quad (3.37)$$

Como a discórdia quântica é assimétrica, isto é, medir o sistema não necessariamente originará o mesmo resultado que medir a ancila, não é possível vincular o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}$ com a discórdia associada a medições feitas no sistema auxiliar. Ou seja,

$$\delta\mathcal{W} = 0 \not\Rightarrow \overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0. \quad (3.38)$$

Antes de provar a equação (3.37), que consiste no Teorema 1, os autores mostram que para qualquer conjunto de projetores ortogonais de medição $\{\Pi_a\}$ atuando sobre a ancila \mathcal{A} de um estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} \geq \mathcal{W}$, e denominam essa afirmação de Lema 1. Tendo como premissa o Lema 1, prova-se o Teorema 1.

Já equação (3.38) é intitulada corolário 1. Sob as mesmas premissas, define-se o corolário 2, que mostra que $\overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0$ ou $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0 \not\Rightarrow \delta\mathcal{W} = 0$. Portanto, temos

$$\text{Corolário 1. } \delta\mathcal{W} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0,$$

$$\text{Corolário 2. } \overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0 \text{ ou } \vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0 \not\Rightarrow \delta\mathcal{W} = 0.$$

Esse resultado enfatiza um ponto importante entre o ganho demoníaco e as possíveis correlações entre os subsistemas \mathcal{S} e \mathcal{A} . Quando a discórdia é nula, o ganho demoníaco não necessariamente também será. Como veremos mais adiante, é possível ter ganho demoníaco máximo, ou mesmo apenas não nulo, e mesmo assim não ter discórdia quântica nem emaranhamento entre os subsistemas. Isso pode levar a um questionamento referente a qual recurso quântico estaria sendo responsável pelo ganho demoníaco. Abordaremos essa questão de forma mais detalhada no próximo capítulo.

O segundo resultado foi apresentado pelos autores em [28] por meio do seguinte teorema:

⁴ As demonstrações desses teoremas, bem como dos lemas e corolários associados, estão detalhadas no Apêndice 1.

Teorema 2. Para quaisquer sistemas \mathcal{S} e ancila \mathcal{A} preparados em um estado puro $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = |\psi\rangle\langle\psi|_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ temos

$$\delta\mathcal{W} = 0 \iff |\psi\rangle_{\mathcal{S}\mathcal{A}} \text{ é separável,} \quad (3.39)$$

e $\delta\mathcal{W} = \sum_k r_k \epsilon_k - \epsilon_1$, onde r_k são os coeficientes de Schmidt⁵ de $|\psi\rangle_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ e ϵ_k são os autovalores de $H_{\mathcal{S}}$, ordenados da forma que $r_k \geq r_{k+1}$ e $\epsilon_k \leq \epsilon_{k+1}$.

Para exemplificar as implicações dos resultados obtidos, os autores fazem duas análises gráficas, apresentadas na figura 6, com estados gerais de dois qubits $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ gerados aleatoriamente e calculam o ganho demoníaco em função da discórdia quântica $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ e da concorrência \mathcal{C} .

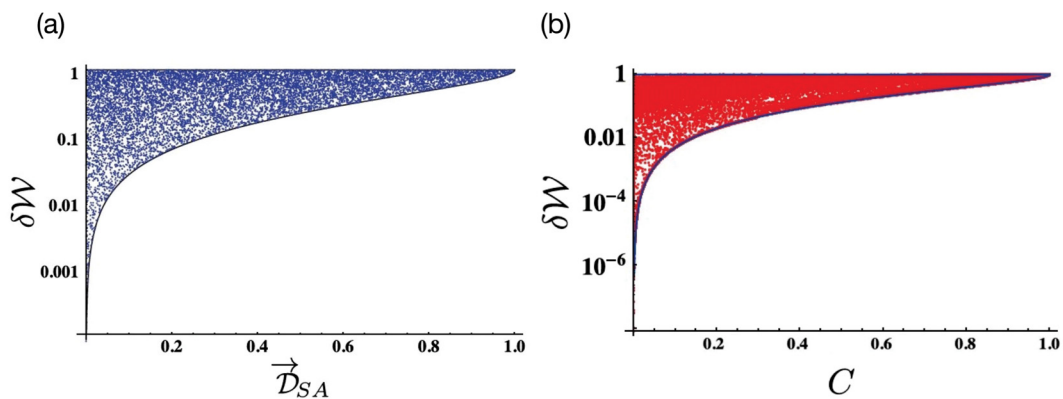


Figura 6 – (a) Distribuição de 3×10^3 estados de dois qubits gerados aleatoriamente no plano ganho demoníaco versus discórdia quântica. (b) Distribuição de 10^4 estados de dois qubits gerados aleatoriamente no plano ganho demoníaco versus concorrência. Retirada do artigo [28].

Primeiramente, comparando o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}$ com a discórdia $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, como mostra o gráfico (a) da figura 6, e considerando o Hamiltoniano do sistema como sendo $H_{\mathcal{S}} = -\sigma_z$ ($\hbar = 1$), temos que para qualquer estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ com discórdia simétrica $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \mathcal{D}$

$$\delta\mathcal{W} \geq \delta\mathcal{W}_{\min}(\mathcal{D}) = h\left(1 - \frac{\mathcal{D}}{2}\right), \quad (3.40)$$

onde $h(x) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x)$. O fato de $h(x)$ ser uma função monotônica implica que conforme crescem os valores das correlações quânticas, o ganho demoníaco também aumenta monotonicamente. Portanto, para estados que encontram-se nesse limite, as correlações quânticas são recurso para otimizar a extração de trabalho.

No $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$, isto é, quando há um sistema de dois qubits com $\mathcal{D} = 0$, em teoria ele pode atingir qualquer valor para o ganho demoníaco. Por outro lado, o ganho

⁵ O coeficiente de Schmidt é um quantificador do grau de emaranhamento entre dois sistemas em um estado puro. Ele surge ao expressar um estado bipartido na forma de decomposição de Schmidt: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} |u_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |v_i\rangle_{\mathcal{A}}$, onde $\lambda_i \geq 0$ são os autovalores da matriz densidade reduzida de qualquer um dos subsistemas e são também os próprios coeficientes de Schmidt e r é o número de Schmidt. Quando $r = 1$ o estado é separável e $\sqrt{\lambda_1} = 1$. Se $r > 1$, há mais de um coeficiente de Schmidt não nulo e o estado é dito emaranhado.

demoníaco é maximizado quando tem-se estados de dois qubits puros com maior grau de emaranhamento. Quando $\mathcal{D} \rightarrow 1$, a diferença entre os limites superior e inferior diminui, uma vez que somente estados puros podem ter discórdia quântica máxima.

De forma análoga, para o gráfico (b) da figura 6, analisa-se o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}$ em função da concorrência \mathcal{C} . O limite inferior do gráfico é delimitado por

$$\delta\mathcal{W} \geq \delta\mathcal{W}_{\min}(\mathcal{C}) = 1 - \sqrt{1 - \mathcal{C}^2}, \quad (3.41)$$

onde \mathcal{C} é a concorrência do estado ρ_{SA} , definida no capítulo 2. Esse limite é atingido para estados pertencentes à classe de estados Bell-diagonais. Já o limite superior é atingido por estados maximamente ergotrópicos da forma

$$\rho_{SA} = \frac{[|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + \mathcal{C}(|00\rangle\langle 11| + \text{h.c.})]}{2}, \quad (3.42)$$

onde h.c. são conjugados Hermiteanos dos termos apresentados anteriormente. Ambos os limites descritos pelas equações (3.41) e (3.40) foram obtidos pelos autores em [28].

Neste capítulo, revisamos a ergotropia [27] e o protocolo da ergotropia demoníaca [28], no qual o sistema de interesse é acoplado a um sistema auxiliar, e medições projetivas realizadas no sistema auxiliar otimizam a extração de trabalho. No próximo capítulo, exploraremos um protocolo que utiliza medições fracas seletivas em vez de projetivas [31]. Além disso, implementaremos nesse protocolo uma outra abordagem de medição fraca, conhecida como monitoramento [29], e analisaremos o comportamento da ergotropia nesse contexto.

4 ERGOTROPIA MONITORADA

O protocolo da ergotropia demoníaca, tratado no capítulo anterior, utiliza a medição projetiva no sistema auxiliar para obter informação sobre o sistema principal e otimizar a extração de trabalho [28]. Contudo, vimos que existem outras formas de realizar uma medição quântica, além da medição projetiva. Nesse capítulo, apresentaremos uma forma de calcular a ergotropia utilizando medições fracas [31]. Em [31], os autores utilizam os operadores de medição fraca propostos por Oreshkov e Brun [64] e mostram que ao utilizá-los para efetuar medição fraca seletiva na ancila é possível encontrar um aumento de ergotropia que supera o ganho demoníaco, denominado **superergotropia**.

Em seguida, contrapondo os resultados apresentados em [31], introduziremos o mapa de monitoramento, apresentado no capítulo 2, como uma alternativa para o processo de medição fraca não-seletiva, mostrando que é possível encontrar uma ergotropia que varie de acordo com a intensidade da medição.

4.1 SUPERERGOTROPIA

Vimos que medições projetivas no sistema auxiliar de um sistema conjunto $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ podem aumentar a extração de trabalho do sistema \mathcal{S} . Em [31], Balkanlu, Faizi e Ahansaz propõem utilizar os operadores dicotômicos de medição fraca, propostos por Oreshkov e Brun em [64] e dispostos na equação (2.65) para tentar otimizar ainda mais a ergotropia demoníaca. Os coeficientes $b_0(\pm x) = (1 \mp \tanh(x))/2$ e $b_1(\pm x) = (1 \pm \tanh(x))/2$, onde $x \in [0, \infty]$ é o parâmetro que caracteriza o quão forte é a medição, são definidos e sendo assim, os operadores $P(\pm x)$ ficam

$$P(\pm x) = \sqrt{b_0(\pm x)}\Pi_0 + \sqrt{b_1(\pm x)}\Pi_1. \quad (4.1)$$

Os elementos MVOP $E(\pm x)$ para essa medição são descritos por

$$E(\pm x) = P^\dagger(\pm x)P(\pm x) = b_0(\pm x)\Pi_0 + b_1(\pm x)\Pi_1. \quad (4.2)$$

Além disso, os operadores $P(\pm x)$ também satisfazem $P(x)P(y) \propto P(x+y)$ e $[P(x), P(y)] = \mathbb{1}$.

Os dois resultados relevantes para este trabalho foram evidenciados pelos autores por meio de dois teoremas¹:

Teorema 1. Para qualquer sistema \mathcal{S} e sistema auxiliar \mathcal{A} preparados em um estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, ao realizar uma medição fraca no sistema auxiliar, sempre teremos $\mathcal{W}_{\{P_{\pm x}\}} = \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$.

¹ As provas de ambos os teoremas encontram-se no apêndice 1.

Teorema 2. Dado um sistema $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, ao realizar uma medição fraca seletiva na parte \mathcal{A} , sempre teremos $\mathcal{W}_{P_{\pm x}} \geq \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$.

Para provar o teorema 1, medições fracas *não-seletivas* foram realizadas sobre a ancila. Ou seja, fazendo a média sobre todas as possíveis saídas y da medição fraca, o trabalho extraído do sistema \mathcal{S} é

$$W_{\{P_y\}} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \sum_{y=+x,-x} p_y \text{Tr}[U_y \rho_{\mathcal{S}|y} U_y^\dagger H_{\mathcal{S}}], \quad (4.3)$$

onde $p_y = \text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes E(y))\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}]$ é a probabilidade de encontrar \mathcal{S} no estado condicional $\rho_{\mathcal{S}|y}$ e U_y são as unitárias associadas aos resultados das medições fracas y . Escrevendo $W_{\{P_y\}}$ em termos dos resultados das medições fortes (projetivas) a , temos

$$W_{\{P_{\pm x}\}} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \sum_a \sum_{y=+x,-x} b_a(y) p_a \text{Tr}[U_a \rho_{\mathcal{S}|a} U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}]. \quad (4.4)$$

Através da condição $\sum_{y=+x,-x} b_a(y) = 1$, encontra-se $\mathcal{W}_{\{P_{\pm x}\}} = \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$, isto é, que a ergotropia utilizando medição fraca não-seletiva é igual à ergotropia demoníaca.

O trabalho extraído de \mathcal{S} por meio da medição fraca *seletiva* é

$$W_{P_y} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \text{Tr}[U_y \rho_{\mathcal{S}|y} U_y^\dagger H_{\mathcal{S}}], \quad (4.5)$$

onde $y = \pm x$. Reescrevendo a equação acima em termos das saídas a , obtemos

$$W_{P_{\pm x}} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \frac{1}{p(\pm x)} \sum_a b_a(\pm x) p_a \text{Tr}[U_a \rho_{\mathcal{S}|a} U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}]. \quad (4.6)$$

Então, $W_{P_{\pm x}}$ é o trabalho extraído de \mathcal{S} realizando medições fracas seletivas na ancila e $W_{\{P_{\pm x}\}}$ é o trabalho extraído de \mathcal{S} através de medições fracas não-seletivas na ancila. O teorema 2 prova que $W_{P_{\pm x}} \geq W_{\{\Pi_a\}}$, isto é, que o trabalho extraído de \mathcal{S} por meio de medições fracas seletivas é sempre maior ou igual ao trabalho extraído por meio de medições projetivas. A diferença entre essas duas quantidades ($W_{P_{\pm x}} - W_{\{\Pi_a\}}$) é definida como

$$\delta W_{\pm x} = \sum_a p_a \left(\frac{p(\pm x) - b_a(\pm x)}{p(\pm x)} \right) \text{Tr}[U_a \rho_{\mathcal{S}|a} U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}]. \quad (4.7)$$

Substituindo $b_a(\pm x)$ e $p(\pm x)$ na equação (4.7), encontramos

$$\delta W_{\pm x} = \pm C_{\pm x} (\text{Tr}[U_0 \rho_{\mathcal{S}|0} U_0^\dagger H_{\mathcal{S}}] - \text{Tr}[U_1 \rho_{\mathcal{S}|1} U_1^\dagger H_{\mathcal{S}}]), \quad (4.8)$$

onde os coeficientes $C_{\pm x} = (2p_0 p_1 \tanh(x)) / (1 \pm (p_1 - p_0) \tanh(x))$ dependem das probabilidades das medições de Π_0 e Π_1 . A escolha entre os operadores $P(+x)$ e $P(-x)$ é feita através do processo de pós-seleção, para satisfazer a positividade de $\delta W_{\pm x}$. Então, quando $\text{Tr}[U_0 \rho_{\mathcal{S}|0} U_0^\dagger H_{\mathcal{S}}] > \text{Tr}[U_1 \rho_{\mathcal{S}|1} U_1^\dagger H_{\mathcal{S}}]$ o operador $P(+x)$ é aplicado e quando $\text{Tr}[U_1 \rho_{\mathcal{S}|1} U_1^\dagger H_{\mathcal{S}}] > \text{Tr}[U_0 \rho_{\mathcal{S}|0} U_0^\dagger H_{\mathcal{S}}]$ o operador $P(-x)$ é aplicado. Se $\text{Tr}[U_0 \rho_{\mathcal{S}|0} U_0^\dagger H_{\mathcal{S}}] =$

$\text{Tr}[U_1 \rho_{S|1} U_1^\dagger H_S]$, o resultado obtido pelos dois operadores é igual. À essa quantidade $\delta W_{\pm x}$, maior que a ergotropia demoníaca, os autores dão o nome de **superergotropia**.

De forma resumida, os autores mostram que o máximo trabalho extraído através da medição fraca não-seletiva na ancila é sempre igual à ergotropia demoníaca, independentemente da intensidade da medição. Além disso, usando medições fracas seletivas, eles propõem uma extração ainda maior do que a ergotropia demoníaca, denominada superergotropia. Contudo, essa definição exige um processo de pós-seleção dos resultados obtidos nas medições, podendo ser custoso do ponto de vista operacional. Isto é, no laboratório, por se tratarem de medições fracas, realiza-se um número maior de rodadas de medições buscando melhorar a informação obtida [63] e, então, faz-se necessário analisar todas as saídas e selecionar aquelas que são interessantes para o protocolo, ao invés da projetiva (medição fraca não-seletiva) que apenas calcula a média sobre todas elas.

4.2 ERGOTROPIA MONITORADA

A ideia de usar o mapa linear que descreve o colapso do vetor de estado (2.66) para derivar um mapa de monitoramento, interpolando entre uma medição projetiva e uma medição fraca, foi introduzida em 2018 no artigo [29]. No mesmo ano, Dieguez e Angelo utilizaram esse mapa na referência [30] como uma noção de medição fraca para investigar qual seria o comportamento da discórdia quântica (2.50). Com isso, os autores mostraram que ao realizar medições fracas por meio do monitoramento, ao invés de medições projetivas, o estado medido é menos perturbado e conseqüentemente a discórdia quântica diminui. Esse resultado contrapõe o trabalho de Singh e Pati [91] que, usando os operadores de Brun e Oreshkov [64], apresentados no capítulo 2, encontram uma “super discórdia quântica”².

É importante notar que após aplicar $C_{S|a}(\rho) = \Pi_a \otimes \rho_{S|a}$, o observador possui conhecimento total sobre a parte \mathcal{A} do sistema, uma vez que $\rho_{\mathcal{A}} = \Pi_a$ e $S(\rho_{\mathcal{A}}) = 0$ e na parte \mathcal{S} encontra-se o estado condicional $\rho_{S|a}$. Então, o mapa que permite a interpolação entre uma medição fraca e uma medição projetiva ($C_{S|a}^\varepsilon(\rho)$) é a soma convexa descrita em (2.67)

$$C_{S|a}^\varepsilon(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon C_{S|a}(\rho). \quad (4.9)$$

Olhando somente para o sistema \mathcal{S} depois da aplicação do mapa temos

$$\rho_{S|a}^\varepsilon = \text{Tr}_{\mathcal{A}} [C_{S|a}^\varepsilon(\rho)] = (1 - \varepsilon)\rho_S + \varepsilon\rho_{S|a}, \quad (4.10)$$

onde $\rho_S = \text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho_{S\mathcal{A}}]$ é o estado reduzido do sistema e $\rho_{S|a}$ o estado pós-medição na parte \mathcal{A} . Esse mapa pode ser denominado de mapa de monitoramento, uma vez que o estado representado por ele é monitorado por medições no sistema auxiliar acoplado, e o valor de ε determina a intensidade da medição realizada.

² Tradução livre de *super quantum discord*.

É possível, então, utilizar esse mapa de monitoramento no protocolo da ergotropia demoníaca. No lugar do estado condicional pós-medição projetiva na ancila ($\rho_{S|a}$), na equação (3.32), substituímos $\rho_{S|a}^\varepsilon$ e encontramos uma equação para calcular a extração de trabalho monitorada

$$W_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon = \text{Tr}(\rho_S H_S) - \sum_a p_a \text{Tr}(U_a \rho_{S|a}^\varepsilon U_a^\dagger H_S). \quad (4.11)$$

Substituindo o mapa na equação (4.11), temos

$$W_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon = \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \text{Tr}[U_a \rho_{S|a}^\varepsilon U_a^\dagger H_S] \quad (4.12)$$

$$= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \text{Tr}[U_a \{(1 - \varepsilon)\rho_S + \varepsilon\rho_{S|a}^\varepsilon\} U_a^\dagger H_S] \quad (4.13)$$

$$= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \{\text{Tr}[U_a \rho_S U_a^\dagger H_S] - \varepsilon \text{Tr}[U_a \rho_S U_a^\dagger H_S] \quad (4.14)$$

$$+ \varepsilon \text{Tr}[U_a \rho_{S|a} U_a^\dagger H_S]\}$$

$$= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \sum_a p_a \{\text{Tr}[U_a \rho_S U_a^\dagger H_S] - \varepsilon \text{Tr}[U_a \rho_S U_a^\dagger H_S] \quad (4.15)$$

$$+ \varepsilon \text{Tr}[U_a \rho_{S|a} U_a^\dagger H_S]\} + \underbrace{\varepsilon \text{Tr}[\rho_S H_S] - \varepsilon \text{Tr}[\rho_S H_S]}_{\text{acrescentado na equação}}$$

$$= \underbrace{\text{Tr}[\rho_S H_S] - \text{Tr}[U \rho_S U^\dagger H_S]}_W + \underbrace{\varepsilon \text{Tr}[U \rho_S U^\dagger H_S] - \varepsilon \text{Tr}[\rho_S H_S]}_{-\varepsilon W} \quad (4.16)$$

$$+ \underbrace{\varepsilon \text{Tr}[\rho_S H_S] - \varepsilon \text{Tr}[U \rho_{S|a} U^\dagger H_S]}_{\varepsilon W_{\{\Pi_a\}}}$$

$$= (1 - \varepsilon)W + \varepsilon W_{\{\Pi_a\}}, \quad (4.17)$$

onde W é o trabalho extraído de \mathcal{S} , $W_{\{\Pi_a\}}$ é o trabalho extraído de \mathcal{S} após efetuar medições projetivas no sistema auxiliar \mathcal{A} , e $\varepsilon \in [0, 1]$ é o parâmetro de controle da intensidade da medição realizada na ancila. É importante notar que da equação (4.15) para a (4.16) há a equivalência $U = U_a$ nos termos em que ρ_S independe de a . Além disso, nessa mesma passagem temos que $\sum_a p_a = 1$.

Fazendo a maximização sobre as mesmas unitárias U e U_a , encontramos a ergotropia demoníaca monitorada

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon = \max_{U, U_a} (W_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon) = (1 - \varepsilon)\mathcal{W} + \varepsilon \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}, \quad (4.18)$$

onde \mathcal{W} é a ergotropia e $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$ é a ergotropia demoníaca. A equação (4.18) nos mostra que no caso em que $\varepsilon = 1$ (medição projetiva) recuperamos a definição de ergotropia demoníaca, como esperado. No caso em que $\varepsilon = 0$ (nenhuma medição realizada), temos a própria definição de ergotropia. Esse resultado está em acordo com a intuição por trás de um mapa de monitoramento bem como da própria definição de medição fraca [63], uma vez que quanto mais fraca é a medição, menos perturbado é o estado e menor é a quantidade de informação que obtemos sobre ele.

Assim sendo, podemos calcular o ganho de ergotropia monitorada, fazendo a diferença entre $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon$ e \mathcal{W} e maximizando-a sobre todos os observáveis A

$$\delta\mathcal{W}^\varepsilon = \max_A[\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon - \mathcal{W}] \quad (4.19)$$

$$= \max_A[(1 - \varepsilon)\mathcal{W} + \varepsilon\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W}], \quad (4.20)$$

$$= \varepsilon \max_A(\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W}). \quad (4.21)$$

Logo, como ε varia de 0 a 1 é possível ver que o ganho demoníaco monitorado cresce linearmente com a intensidade da medição, controlada pelo parâmetro ε , ou seja,

$$\delta\mathcal{W}^\varepsilon = \varepsilon \delta\mathcal{W}, \quad (4.22)$$

sendo $\delta\mathcal{W}$ o ganho demoníaco introduzido em [28]. Portanto, quando $\varepsilon = 1$ (medição projetiva), o ganho demoníaco monitorado se iguala ao ganho demoníaco $\delta\mathcal{W}^\varepsilon = \delta\mathcal{W}$. Já quando nenhuma medição é feita no subsistema \mathcal{A} ($\varepsilon = 0$), a ergotropia demoníaca monitorada fica igual a ergotropia $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon = \mathcal{W}$. No intervalo $0 < \varepsilon < 1$, temos um ganho ergotrópico menos intenso.

Teorema. Para qualquer operador densidade ρ atuando em $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, definido no intervalo $[0, 1]$, o ganho demoníaco monitorado nunca é maior que o ganho demoníaco, isto é, $\delta\mathcal{W}^\varepsilon \leq \delta\mathcal{W}$, com a igualdade valendo no caso em que $\varepsilon = 1$.

Esse resultado decorre de uma perturbação menos intensa no sistema, controlada por ε . O fato de haver esse controle de intensidade é vantajoso em relação à ergotropia obtida por meio da medição fraca não-seletiva, apresentada em [31], que independe da intensidade da medição. A ergotropia demoníaca, nesse caso, é o limite superior para a quantidade de trabalho que pode ser extraído do sistema por meio de medições na ancila.

4.3 ERGOTROPIA MONITORADA VS SUPERERGOTROPIA

Exemplo 1

Na referência [31], os autores utilizam um exemplo para mostrar os teoremas 1 e 2. Aqui, utilizaremos o mesmo exemplo e mostraremos como resultado obtido por eles, usando medição fraca seletiva, difere do resultado utilizando ergotropia monitorada.

Considere o estado bipartido misto ρ_{SA} da forma

$$\rho_{SA} = \frac{1}{3}(|11\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|). \quad (4.23)$$

Primeiramente, calculamos a ergotropia demoníaca usando medições projetivas na ancila, isto é, medições fortes. Como os autores mostram que a ergotropia demoníaca é equivalente à ergotropia obtida por meio de medições fracas não-seletivas, então podemos optar por uma das duas sem distinções. Utilizamos a definição (3.32), onde $\rho_S = 1/3(|0\rangle\langle 0| + 2|1\rangle\langle 1|)$ e

$H_S = \epsilon_0 |0\rangle \langle 0| + \epsilon_1 |1\rangle \langle 1|$, sendo que $\epsilon_1 > \epsilon_0$. A forma generalizada do projetor ortogonal Π_a , onde $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ é o vetor direção na esfera de Bloch e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é o vetor de Pauli cujas componentes são as matrizes de Pauli (2.27) nas direções x , y e z , respectivamente, é tal que

$$\Pi_a = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + (-1)^a \vec{\mu} \cdot \vec{\sigma}), \quad \text{onde } a \in \{0, 1\}. \quad (4.24)$$

Para poder calcular $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$, é necessário encontrar os estados colapsados $\rho_{S|0}$ e $\rho_{S|1}$ e seus respectivos autovalores $r_{k=0}^0$, $r_{k=1}^0$, $r_{k=0}^1$ e $r_{k=1}^1$ e então, ordená-los de forma que o maior autovalor esteja associado à menor energia, e assim sucessivamente. As probabilidades de encontrar as saídas 0 e 1 são $p_0 = (3 - \mu_3)/6$ e $p_1 = (3 + \mu_3)/6$, respectivamente, e os estados colapsados, escritos na forma matricial, são

$$\rho_{S|0} \doteq \begin{pmatrix} \frac{1-\mu_3}{3-\mu_3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3-\mu_3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \rho_{S|1} \doteq \begin{pmatrix} \frac{1+\mu_3}{3+\mu_3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3+\mu_3} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

sendo μ_3 a terceira componente de $\vec{\mu}$.

Então,

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \frac{1}{3}(\epsilon_0 + 2\epsilon_1) - (p_0 r_0^0 \epsilon_0 + p_0 r_1^0 \epsilon_1 + p_1 r_0^1 \epsilon_0 + p_1 r_1^1 \epsilon_1), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}(\epsilon_0 + 2\epsilon_1) - \left(\frac{3-\mu_3}{6}\right) \left(\frac{2}{3-\mu_3}\right) \epsilon_0 - \left(\frac{3-\mu_3}{6}\right) \left(\frac{1-\mu_3}{3-\mu_3}\right) \epsilon_1 \\ &\quad - \left(\frac{3+\mu_3}{6}\right) \left(\frac{2}{3+\mu_3}\right) \epsilon_0 - \left(\frac{3+\mu_3}{6}\right) \left(\frac{1+\mu_3}{3+\mu_3}\right) \epsilon_1, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$= \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{3}. \quad (4.28)$$

Agora é necessário calcular a ergotropia a partir da definição proposta pelos autores de medição fraca seletiva (4.6). Os projetores de medição fraca, como visto, são escritos em termos dos operadores dicotômicos de acordo com a equação (2.65). Utilizando a equação (4.6) e sabendo que a unitária U_a que minimiza a energia final tem a mesma forma mostrada anteriormente ($U_a = |\epsilon_k\rangle \langle r_k^a|$), temos que o trabalho extraído do sistema S é

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{P_{\pm x}} &= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \frac{1}{p_{\pm x}} \left(b_0(\pm x) p_0 \text{Tr}[U_0 \rho_{S|0} U_0^\dagger H_S] \right. \\ &\quad \left. + b_1(\pm x) p_1 \text{Tr}[U_1 \rho_{S|1} U_1^\dagger H_S] \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr}[\rho_S H_S] - \frac{1}{p_{\pm x}} \left(b_0(\pm x) p_0 r_0^0 \epsilon_0 + b_0(\pm x) p_0 r_1^0 \epsilon_1 \right. \\ &\quad \left. + b_1(\pm x) p_1 r_0^1 \epsilon_0 + b_1(\pm x) p_1 r_1^1 \epsilon_1 \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Os autores escolhem a saída $+x$. Portanto, substituindo os autovalores de $\rho_{S|0}$ e $\rho_{S|1}$, $\mathcal{W}_{P_{+x}}$

fica

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{P_{+x}} &= \frac{1}{3}(\epsilon_0 + 2\epsilon_1) - \frac{6}{\mu_3 \tanh(x) + 3} \left[\frac{1 - \tanh(x)}{6} \epsilon_0 \right. \\ &+ \frac{(1 - \tanh(x))(1 - \mu_3)}{12} \epsilon_1 + \frac{(1 + \tanh(x))}{6} \epsilon_0 \\ &+ \left. \frac{(1 + \tanh(x))(1 + \mu_3)}{12} \epsilon_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Quando $\mu_3 = -1$ a energia final é minimizada e encontramos o resultado obtido pelos autores

$$\mathcal{W}_{P_{+x}} = \left(\frac{3 + \tanh(x)}{3 - \tanh(x)} \right) \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{3} \right), \quad (4.32)$$

onde $(\epsilon_1 - \epsilon_0)/3$ foi o resultado encontrado para a ergotropia com medição fraca não-seletiva (ou equivalentemente, medição projetiva).

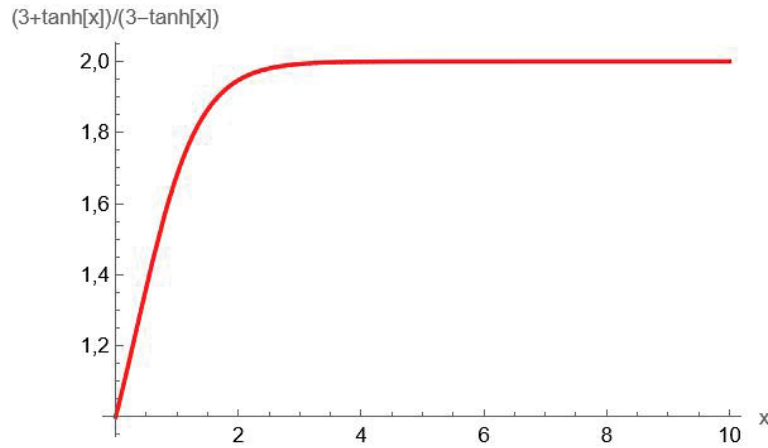


Figura 7 – Variação da razão $(3 + \tanh(x))/(3 - \tanh(x))$, com $x \in [0, 10]$.

Na figura 7 podemos notar que o valor máximo que a razão $\mathcal{W}_{P_{+x}}/\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = (3 + \tanh(x))/(3 - \tanh(x))$ pode assumir é 2. Ou seja, quando a medição é projetiva ($x \rightarrow \infty$) e passa pelo processo de pós-seleção, a ergotropia $\mathcal{W}_{P_{+x}}$ assume o valor máximo de $2(\epsilon_1 - \epsilon_0)/3$. Em outras palavras, a ergotropia utilizando medição projetiva seletiva é o dobro da demoníaca: $\mathcal{W}_{P_{+x}} = 2\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$. Já quando nenhuma medição é feita ($x = 0$), a razão é igual à 1 e $\mathcal{W}_{P_{+x}} = \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \mathcal{W}$. Contudo, quando x encontra-se no regime de medições fracas ($x \in (0, \infty)$), a ergotropia obtida é sempre maior que a demoníaca, uma vez que a razão $\mathcal{W}_{P_{+x}}/\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$ é sempre maior ou igual a 1.

Calculando agora a ergotropia monitorada (4.18), temos

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon = (1 - \varepsilon) \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{3} \right) + \varepsilon \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{3} \right), \quad (4.33)$$

$$= \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{3} \right). \quad (4.34)$$

Os três resultados obtidos foram, portanto, definindo a variação de energia como $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} &= \frac{\Delta\epsilon}{3}, \\ \mathcal{W}_{P_{+x}} &= \left(\frac{3 + \tanh(x)}{3 - \tanh(x)}\right) \frac{\Delta\epsilon}{3}, \\ \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\epsilon &= \frac{\Delta\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Quando $x \rightarrow \infty$ (medição projetiva, mas que passa por uma pós-seleção), $\mathcal{W}_{P_{+x}} \rightarrow 2\Delta\epsilon/3$ e quando $x \rightarrow 0$ (nenhuma medição) $\mathcal{W}_{P_{+x}} \rightarrow \Delta\epsilon/3$, ou seja, a ergotropia varia de acordo com a intensidade da medição. Por outro lado, temos que a ergotropia monitorada é igual à demoníaca: $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\epsilon = \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$ e isso ocorre pois $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \mathcal{W}$. Em outras palavras, o ganho demoníaco nesse caso é nulo e não há vantagem em utilizar o protocolo da ergotropia demoníaca, exceto quando há pós-seleção dos resultados. A concorrência de $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ é nula, bem como a discórdia quântica, isto é, esse estado não possui correlações puramente quânticas. Devido a isso, medições não-locais não fornecem mais informação sobre o sistema \mathcal{S} , implicando em $\delta\mathcal{W} = 0$. Já quando há pós-seleção, as probabilidades de obter as saídas 0 e 1 não são iguais (para $y = +x$, $p_0 = 2/3$ e $p_1 = 1/3$) e, conseqüentemente, escolher uma delas enviesa determinado estado, enquanto a projetiva realiza a média sobre todas as possíveis saídas, resultando em um valor menor.

Logo, é possível interpretar os resultados da seguinte maneira: a ergotropia utilizando medição fraca seletiva de fato encontra valores maiores do que a ergotropia demoníaca, e isso ocorre devido à pós-seleção. Já a ergotropia monitorada independe da intensidade da medição e é igual à ergotropia, à ergotropia demoníaca e à ergotropia que utiliza medição fraca não-seletiva ($\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\epsilon = \mathcal{W} = \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} = \mathcal{W}_{\{P_{\pm x}\}}$). A ergotropia demoníaca independe da informação obtida sobre \mathcal{S} quando o subsistema \mathcal{A} é medido pois $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ é um estado classicamente correlacionado, desprovido de correlações quânticas. Desse modo, independentemente do quão perturbativa for a medição não-local, ela não fornecerá informação adicional sobre o sistema para que haja um ganho demoníaco.

Exemplo 2: Estados de Werner

A mesma análise do exemplo anterior foi feita também para os estados de Werner [92]. Esses estados compõem uma classe de estados quânticos que consistem em uma mistura de estados maximamente emaranhados (estados de Bell (2.25)) e estados separáveis, e podem ser escritos da seguinte forma

$$\rho_w = w |\psi_-\rangle \langle \psi_-| + (1-w) \frac{\mathbb{1}}{4}, \quad (4.35)$$

onde $w \in [-1/3, 1]$ é o parâmetro que controla o grau de mistura. Quando $w > 1/3$ o estado é emaranhado e quando $w \leq 1/3$, o estado ρ é separável.

É possível escrever a matriz densidade ρ_w atuando em $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ na forma

$$\rho_w \doteq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+w & -2w & 0 \\ 0 & -2w & 1+w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-w \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Mantendo o mesmo Hamiltoniano do sistema do exemplo anterior e, então, calculando a ergotropia \mathcal{W} , encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_0}{2} - \left(\frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_1}{2} \right), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

O estado reduzido é um estado passivo, uma vez que $\rho_S = \text{Tr}_A[\rho_w] = \mathbb{1}/2$ e, assim, $[\rho_S, H_S] = 0$. Logo, não é possível extrair trabalho do sistema por meio de operações cíclicas unitárias. Além disso, como é um estado maximamente misto, corresponde ao estado de Gibbs no regime de temperatura infinita.

Para calcular a ergotropia demoníaca é necessário definir quais projetores de medição serão usados. Igualmente ao caso anterior, $\Pi_a = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + (-1)^a \vec{\mu} \cdot \vec{\sigma})$, com $a = \{0, 1\}$ e $\vec{\mu}$ sendo o vetor de direção da esfera de Bloch, para que não haja uma base preferencial de medição. As probabilidades de obter 0 e 1 são idênticas e iguais a 1/2. Os autovalores dos estados colapsados possuem a seguinte forma geral

$$r_k^a = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{k+a} w). \quad (4.38)$$

Substituindo na equação da ergotropia demoníaca (3.32), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} &= \left(\frac{\epsilon_0 + \epsilon_1}{2} \right) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1+w}{2} \right) \epsilon_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-w}{2} \right) \epsilon_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1+w}{2} \right) \epsilon_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-w}{2} \right) \epsilon_1 \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$= w \left(\frac{\Delta\epsilon}{2} \right), \quad (4.40)$$

onde $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0$, como anteriormente. Ou seja, a ergotropia demoníaca varia linearmente com o parâmetro de controle de separabilidade w , e assume valores maiores quando o estado está emaranhado.

Por fim, calculando a ergotropia monitorada, através de \mathcal{W} e $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$ por meio da relação (4.17), obtemos

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\varepsilon = \varepsilon w \frac{\Delta\epsilon}{2}, \quad (4.41)$$

resultado que é igual ao ganho demoníaco monitorado, já que $\delta\mathcal{W}^\varepsilon = \varepsilon\delta\mathcal{W}$ e $\delta\mathcal{W} = w\Delta\epsilon/2$.

A função $\delta\mathcal{W}^\varepsilon$ é representada graficamente na figura 8 em função dos parâmetros w e ε . Podemos ver que conforme $\varepsilon \rightarrow 1$, mas $w = 0$, o estado tem forma $\rho_w = \mathbb{1}/2 \otimes \mathbb{1}/2$ e

o ganho demoníaco monitorada é nulo, uma vez que não é possível extrair trabalho de um estado descorrelacionado. Por outro lado, se $w = 1$, ou seja, o estado é maximamente puro e emaranhado $\rho_w = |\psi_-\rangle \langle \psi_-|$, o ganho demoníaco monitorado cresce linearmente conforme o parâmetro ε aumenta. Em outras palavras, o maior ganho demoníaco monitorado ocorre quando o estado é maximamente emaranhado e é submetido a medição projetiva no sistema auxiliar. Conforme a intensidade da medição diminui, o ganho também decresce.

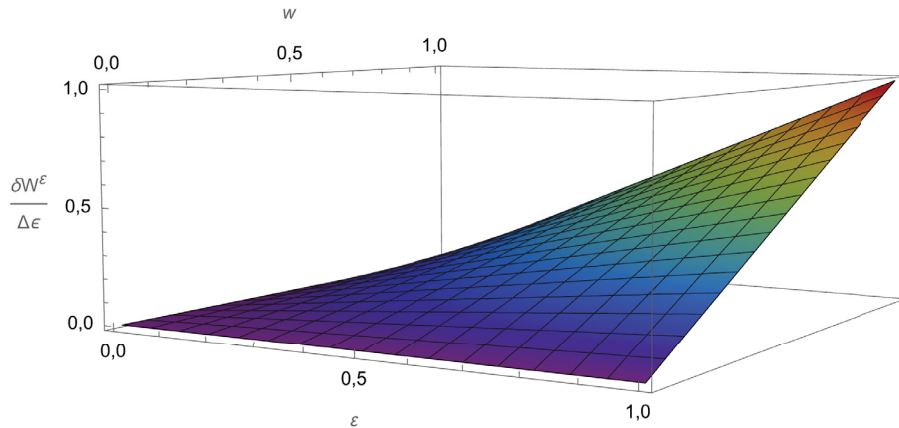


Figura 8 – Ganho de ergotropia monitorada ($\delta\mathcal{W}^\varepsilon/(\Delta\varepsilon/2)$) em função do parâmetro de controle da medição ε e do parâmetro de mistura w do estado de Werner.

Utilizando agora a equação (4.30) para calcular a ergotropia demoníaca através da medição fraca seletiva, de forma similar ao que foi feito para o Exemplo 1, escolhemos $y = +x$ novamente e temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{P_{+x}} &= \frac{\epsilon_0 + \epsilon_1}{2} - 2 \left[\frac{1 - \tanh(x)}{4} \left(\frac{1+w}{2} \right) \epsilon_0 + \frac{1 - \tanh(x)}{4} \left(\frac{1-w}{2} \right) \epsilon_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \tanh(x)}{4} \left(\frac{1+w}{2} \right) \epsilon_0 + \frac{1 + \tanh(x)}{4} \left(\frac{1-w}{2} \right) \epsilon_1 \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$= w \frac{\Delta\epsilon}{2}. \quad (4.43)$$

Ou seja, o resultado independe do parâmetro de controle da medição x . Isso se deve ao fato de que as probabilidades de obter-se as saídas 0 e 1 são iguais, fazendo com que o processo de pós-seleção não favoreça nenhum estado específico e portanto, torne-se análogo ao protocolo demoníaco: $\mathcal{W}_{P_{+x}} = \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$.

Os três resultados obtidos para a ergotropia utilizando medições projetivas, medições fracas seletivas e medições fracas monitoradas foram, respectivamente

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} &= w \frac{\Delta\epsilon}{2}, \\ \mathcal{W}_{P_{+x}} &= w \frac{\Delta\epsilon}{2}, \\ \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\epsilon &= \epsilon w \frac{\Delta\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Comparando-os com os resultados obtidos no Exemplo 1, pode-se notar que agora a ergotropia obtida através da medição fraca seletiva é o resultado que independe do parâmetro de controle da intensidade da medição e a ergotropia monitorada varia de forma linear com ϵ .

Neste capítulo, portanto, apresentamos o protocolo de medição fraca seletiva [31], que utiliza os operadores de medição fraca introduzidos por Oreshkov e Brun em [64], e mostramos o resultado proposto pelos autores, denominado superergotropia, uma ergotropia maior que a demoníaca. Utilizando outra noção de medição fraca, conhecida como monitoramento [29], propomos uma ergotropia monitorada ($\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\epsilon$) e mostramos que o ganho monitorado ($\delta\mathcal{W}^\epsilon = \epsilon \max_A(\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}^\epsilon - \mathcal{W})$) cresce linearmente com a intensidade da medição e independe de um processo de pós-seleção, o que pode ser vantajoso de um ponto de vista operacional. Além disso, essa variação linear é compatível com a definição de medição fraca [63], que sugere que quanto menor for a perturbação no sistema, menor será a informação obtida sobre ele.

5 CORRELAÇÕES QUÂNTICAS

Além de abrir espaço para investigar outros tipos de medição que podem ser utilizadas no protocolo da ergotropia demoníaca para otimizar a extração de trabalho, como feito no capítulo 4 através do mapa de monitoramento, há ainda um outro questionamento deixado em aberto pelos autores do artigo [28]. Para compreendê-lo é necessário relembrar do Corolário 2 e dos gráficos mostrados na figura 6. Esse corolário mostra que a discórdia quântica ser nula, tanto para o caso onde a ancila é medida quanto para o caso em que o sistema é medido, não implica em ganho demoníaco nulo. Assim, surge a seguinte questão: qual é a correlação quântica entre \mathcal{S} e \mathcal{A} que pode ser explorada como recurso para esse ganho ergotrópico?

Para tentar responder a essa pergunta, primeiro apresentamos a forma analítica da ergotropia demoníaca para estados gerais de dois qubits e então, como caso particular, para estados Bell-diagonais. Por fim, mostraremos que para a classe específica de estados Bell-diagonais, a não-localidade baseada em realismo (2.58) é recurso para o ganho ergotrópico.

5.1 ERGOTROPIA PARA ESTADOS GERAIS DE DOIS QUBITS

Um sistema geral de dois qubits pode ser parametrizado através da representação de Bloch [93], como mostra a equação a seguir

$$\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i \otimes \sigma_i), \quad (5.1)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade de dimensão 4, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ são versores que compõem uma base no espaço tridimensional, e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as matrizes de Pauli nas direções x , y e z , respectivamente. O projetor utilizado no processo de medição do observável $M = \sum_m m \Pi_m$, também na representação de Bloch, tem a forma

$$\Pi_m = \frac{1}{2} + (\mathbb{1} + (-1)^m (\hat{\mu} \cdot \vec{\sigma})), \quad \text{para } m = \{0, 1\}, \quad (5.2)$$

onde $\hat{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. O estado reduzido $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{S}}[\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}]$ pode ser descrito da seguinte maneira

$$\rho_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.3)$$

e seus autovalores são

$$r_k = \frac{1}{2} (1 + (-1)^k |\vec{a}|), \quad (5.4)$$

onde $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. O objetivo é encontrar o ganho demoníaco $\delta\mathcal{W} = \max_M(\mathcal{W}_{\{\Pi_m\}} - \mathcal{W})$ para um estado geral $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ de dois qubits. Portanto, é necessário obter os autovalores

do estado pós-medição $\rho_{S|m}$ e efetuar seu ordenamento correto. Os autovalores, portanto, são

$$r_k^m = \frac{1}{4p_m} \left(1 + (-1)^m \vec{b} \cdot \hat{\mu} + (-1)^k \sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_i + (-1)^m c_i \mu_i)^2} \right), \quad (5.5)$$

onde $p_m = \frac{1}{2}(1 + (-1)^m \vec{b} \cdot \hat{\mu})$ denota a probabilidade de obtê-lo e a dependência de k é associada à energia. Por simplicidade, denotamos $\gamma_+ = \sum_{i=1}^3 (a_i + c_i \mu_i)^2$ e $\gamma_- = \sum_{i=1}^3 (a_i - c_i \mu_i)^2$. Calculando a diferença $\mathcal{W}_{\{\Pi_m\}} - \mathcal{W}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\{\Pi_m\}} - \mathcal{W} &= \sum_{k=0}^1 \epsilon_k r_k - \sum_{k=0}^1 \sum_{m=0}^1 p_m r_k^m \epsilon_k, \\ &= \epsilon_0 r_0 + \epsilon_1 r_1 - p_0 r_0^0 \epsilon_0 - p_1 r_0^1 \epsilon_0 - p_0 r_1^0 \epsilon_1 - p_1 r_1^1 \epsilon_1, \\ &= \frac{1}{2}(1 + |\vec{a}|) \epsilon_0 + \frac{1}{2}(1 - |\vec{a}|) \epsilon_1 - p_0 \frac{1}{4p_0} (1 + \vec{b} \cdot \hat{\mu} + \sqrt{\gamma_+}) \epsilon_0 \\ &\quad - p_1 \frac{1}{4p_1} (1 - \vec{b} \cdot \hat{\mu} + \sqrt{\gamma_-}) \epsilon_0 - p_0 \frac{1}{4p_0} (1 + \vec{b} \cdot \hat{\mu} - \sqrt{\gamma_+}) \epsilon_1 \\ &\quad - p_1 \frac{1}{4p_1} (1 - \vec{b} \cdot \hat{\mu} - \sqrt{\gamma_-}) \epsilon_1, \\ &= -|\vec{a}| \frac{\Delta \epsilon}{2} + \frac{\Delta \epsilon}{4} (\sqrt{\gamma_+} + \sqrt{\gamma_-}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para encontrar o ganho demoníaco $\delta \mathcal{W}$ de fato, é necessário maximizar a equação (5.6) numericamente, já que ela depende dos coeficientes de medição μ_i s.

5.2 ERGOTROPIA PARA ESTADOS BELL-DIAGONAIS

Estados Bell-diagonais, como o próprio nome sugere, são estados que são diagonais nas bases de Bell. Esses estados podem ser obtidos a partir da expressão (5.1), fazendo com que os vetores \vec{a} e \vec{b} sejam iguais a zero. Desta forma, a equação (5.1) é simplificada para

$$\rho_{\text{BD}} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right). \quad (5.7)$$

Os estados reduzidos dessa classe são maximamente misturados $\rho_S = \rho_A = \mathbb{1}/2$. A representação matricial de (5.7) é dada por

$$\rho_{\text{BD}} \doteq \begin{pmatrix} \frac{1-c_3}{4} & 0 & 0 & \frac{c_1-c_2}{4} \\ 0 & \frac{1-c_3}{4} & \frac{c_1+c_2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{c_1+c_2}{4} & \frac{1-c_3}{4} & 0 \\ \frac{c_1-c_2}{4} & 0 & 0 & \frac{1+c_3}{4} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

com autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(1 - c_1 - c_2 - c_3), \quad (5.9)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(1 - c_1 + c_2 + c_3), \quad (5.10)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(1 + c_1 - c_2 + c_3), \quad (5.11)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}(1 + c_1 + c_2 - c_3). \quad (5.12)$$

Um exemplo de uma família de estados pertencentes à classe Bell-diagonal, são os estados de Werner, vistos no capítulo 4. A parametrização necessária para que (5.7) assumira a forma de um estado de Werner é $c_1 = c_2 = c_3 = -w$, onde w é o parâmetro de controle do grau de mistura do estado de Werner.

Para calcular o ganho demoníaco para um estado Bell-diagonal, utiliza-se o resultado obtido para os estados gerais de dois qubits (5.1). Nesse caso, como \vec{a} e \vec{b} são nulos, temos que $\mathcal{W}_{\{\Pi_m\}} - \mathcal{W} = |\alpha|\Delta\epsilon/2$, onde $|\alpha| = \sqrt{\sum_i \mu_i^2 c_i^2}$.

Então, o ganho demoníaco é dado por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} &= \max_M [\mathcal{W}_{\{\Pi_m\}} - \mathcal{W}], \\ &= \frac{\Delta\epsilon}{2} \max_M |\alpha|. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para encontrar o valor máximo de $|\alpha|$, primeiro definimos $C = \sum_r c_r^2 |e_r\rangle \langle e_r|$, onde $\{|e_r\rangle\}$ é uma base ortonormal e introduzimos então o vetor $|\mu\rangle = \sum_r \mu_r |e_r\rangle$, onde μ_r são componentes dessa base. Com isso, é possível reescrever α^2 em termos da nova base, ou seja, $\alpha^2 = \langle \mu | C | \mu \rangle = \sum_r \mu_r c_r^2 \mu_r$. Definindo um vetor $|\beta\rangle$ em termos de $|\mu\rangle$, temos $|\beta\rangle = C |\mu\rangle$. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz ($|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, para quaisquer vetores \vec{v} e \vec{w}) para estabelecer um limite superior para $\langle \mu | C | \mu \rangle$, temos

$$\langle \mu | C | \mu \rangle \leq \|C |\mu\rangle\| \cdot \| |\mu\rangle \|. \quad (5.14)$$

Como $|\mu\rangle$, por hipótese, é normalizado, a equação (5.14) fica

$$\langle \mu | C | \mu \rangle \leq \|C |\mu\rangle\|, \quad (5.15)$$

$$\langle \mu | C | \mu \rangle \leq \| |\beta\rangle \|, \quad (5.16)$$

$$\alpha^2 = \langle \mu | C | \mu \rangle \leq \sqrt{\langle \beta | \beta \rangle}. \quad (5.17)$$

Logo, o máximo de α^2 é atingido quando o vetor selecionado de $|\mu\rangle$ coincide com o maior autovetor de C correspondente ao seu máximo autovalor. Isso ocorre pois $\alpha^2 = \langle \mu | C | \mu \rangle$ é máximo quando $|\mu\rangle$ é um autovetor de C e porque o máximo autovalor de C corresponde ao maior c_r^2 . Então,

$$\alpha \leq c_{\max}, \quad (5.18)$$

onde $c_{\max} = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$.

Alternativamente, é possível derivar esse resultado de forma mais direta, lembrando que $\hat{\mu}$ é um versor, isto é, possui norma unitária $\sum_i \mu_i^2 = 1$. A partir disso, observa-se que $|\alpha|$ é uma soma ponderada e atingirá seu máximo quando c_i^2 for o maior possível

$$\max_M |\alpha| = \sqrt{\sum_i \mu_i^2 c_i^2}, \quad (5.19)$$

$$= c_{\max} \sqrt{\sum_i \mu_i^2}, \quad (5.20)$$

$$= c_{\max}. \quad (5.21)$$

Assim, o ganho demoníaco para estados Bell-diagonais é dado por

$$\delta\mathcal{W} = \frac{\Delta\epsilon}{2} c_{\max}. \quad (5.22)$$

Calculando o ganho demoníaco monitorado, usando a equação (4.18) e o resultado obtido na expressão (5.22), obtemos

$$\delta\mathcal{W}^\epsilon = \epsilon \left(\frac{\Delta\epsilon}{2} c_{\max} \right). \quad (5.23)$$

O ganho demoníaco monitorado varia, portanto, linearmente com o parâmetro de controle da medição ϵ . Conforme discutido no capítulo anterior, quando $\epsilon = 1$ a medição projetiva é retomada e $\delta\mathcal{W}^\epsilon = \delta\mathcal{W}$. Já quando $\epsilon = 0$, $\mathcal{W}_{\{\Pi_m\}}^\epsilon = \mathcal{W}$ e logo não há mais vantagem em utilizar o protocolo da ergotropia demoníaca, já que significa que nenhuma medição está sendo realizada. No intervalo $0 < \epsilon < 1$, temos a noção do que seria um ganho demoníaco “fraco”.

5.3 CORRELAÇÕES QUÂNTICAS E ESTADOS GERAIS

Foi possível notar nos gráficos da figura 6, extraídos de [28], como mencionado no início deste capítulo, que há uma grande quantidade de estados gerais de dois qubits com ganho demoníaco próximo ao máximo ($\delta\mathcal{W} \approx 1$) e com discórdia quântica ou concorrência nulas. Ou seja, mostrando que ambas as correlações quânticas não são recursos para o ganho demoníaco. Porém, a figura 9 representa uma ilustração da hierarquia entre as correlações quânticas citadas ao longo deste trabalho, e a não-localidade baseada em realismo é, portanto, a correlação quântica que pode existir para determinados estados mistos bipartidos mesmo quando não-localidade de Bell, emaranhamento e discórdia quântica forem nulas [94]. Dessa forma, é interessante investigar se esse tipo de correlação é, de fato, o recurso quântico para o ganho demoníaco.

Para essa análise, é necessário verificar se $\delta\mathcal{W} = 0 \Rightarrow \mathcal{N}(\rho) = 0$. Para isso, é possível utilizar o exemplo e o resultado obtido no Corolário 1 do artigo [28].

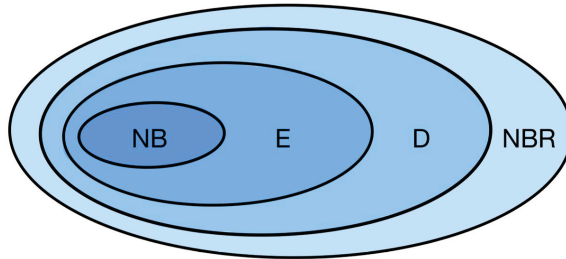


Figura 9 – Ilustração da relação de hierarquia entre as seguintes correlações quânticas: NB (não-localidade de Bell), E (emaranhamento), D (discórdia), NBR (não-localidade baseada em realismo).

Considerando o estado $\rho_{SA} = \sum_{k,a} q_{ka} |r_k\rangle \langle r_k| \otimes |\phi_a\rangle \langle \phi_a|$, onde $\{|\phi_a\rangle\}$ é um conjunto não-ortogonal, o ganho demoníaco é nulo. Podemos verificar que $\delta\mathcal{W}$ de fato será zero uma vez que o estado colapsado tem a forma $\rho_{S|a'} = \sum_{k,a} \frac{q_{ka} |\langle a'|\phi_a\rangle|^2}{p_{a'}} |r_k\rangle \langle r_k|$, sendo diagonal na base $\{|r_k\rangle\}$. Para checar a não-localidade baseada em realismo, primeiro calcula-se a irrealidade de um observável A' :

$$\Phi_{A'}(\rho_{SA}) = \sum_{a'} (|a'\rangle \langle a'| \otimes \mathbb{1}) \left(\sum_{k,a} q_{ka} |r_k\rangle \langle r_k| \otimes |\phi_a\rangle \langle \phi_a| \right) (|a'\rangle \langle a'| \otimes \mathbb{1}), \quad (5.24)$$

$$= \sum_{a,k,a'} q_{ka} |\langle a'|r_k\rangle|^2 |a'\rangle \langle a'| \otimes |\phi_a\rangle \langle \phi_a|. \quad (5.25)$$

Se $|a'\rangle = |r_k\rangle$, então $\langle a'|r_k\rangle = 1$ e ρ_{SA} será um estado de realidade para o observável A ($\Phi_{A'}(\rho_{SA}) = \rho_{SA}$). Logo, $\mathcal{N}_{A'B}(\rho_{SA}) = 0$. No entanto, se $\{|a'\rangle\}$ e $\{|r_k\rangle\}$ forem bases mutualmente não-ortogonais, $|\langle a'|r_k\rangle|^2 = \mathbb{1}/d_S$ e $\mathcal{N}_{A'B}(\rho_{SA}) \neq 0$. Como $\mathcal{N}(\rho)$ é definida como o máximo que $\mathcal{N}_{A'B}(\rho_{SA})$ pode atingir, então $\mathcal{N}(\rho_{SA}) \neq 0$, mostrando que $\delta\mathcal{W} = 0 \not\Rightarrow \mathcal{N}(\rho) = 0$.

5.4 CORRELAÇÕES QUÂNTICAS E ESTADOS BELL-DIAGONAIS

Embora não haja correspondência entre o ganho demoníaco e a não-localidade baseada em realismo para estados gerais de dois qubits, é possível verificar se tal correspondência existe para estados Bell-diagonais, descritos por (5.7). Então, dada essa classe de estados, para analisar como emaranhamento, discórdia quântica e não-localidade baseada em realismo se comportam conforme o ganho demoníaco varia, repete-se o procedimento feito pelos autores em [28]. Para calcular a ergotropia demoníaca para estados Bell-diagonais, utiliza-se a forma analítica obtida anteriormente (5.22). O resultado é apresentado na figura 10, onde estados Bell-diagonais aleatórios são gerados e a correlação quântica para cada um deles é calculada.

Após gerar estados Bell-diagonais de forma aleatória, primeiro analisamos a concorrência em relação ao ganho demoníaco. A concorrência, para estados de dois qubits,

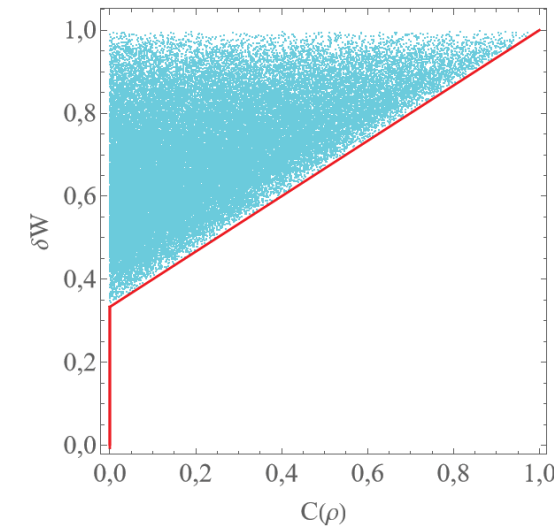
é calculada utilizando-se a equação (2.48). Nota-se através da figura 10(a) que ela tem comportamento análogo ao caso dos estados gerais, com a família de estados de Werner ($c_1 = c_2 = c_3 = -w$, com $w \in [1/3, 1]$) compondo o limite inferior, representados em vermelho. Quando $\mathcal{C}(\rho_{\text{BD}}) = 0$, no entanto, há estados onde $\delta\mathcal{W}(\rho_{\text{BD}}) \neq 0$. A partir desse resultado, faz-se necessária a análise da discórdia quântica. Nesse caso, utilizaremos a notação $\mathcal{D}(\rho)$ para a discórdia, pois para estados Bell-diagonais ela é simétrica, ou seja, $\overrightarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{SA}}(\rho_{\text{BD}}) = \overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{SA}}(\rho_{\text{BD}})$.

A discórdia quântica (figura 10(b)) também possui o mesmo comportamento observado para o caso dos estados gerais de dois qubits, e é calculada por meio de uma expressão analítica obtida na referência [95]. A família de estados que compõe o limite inferior (representadas em vermelho na figura 10(b)) também consiste nos estados de Werner. Já a família de estados para os quais $\mathcal{D}(\rho_{\text{BD}}) = 0$, representados em verde, são estados classicamente correlacionados, descritos na forma

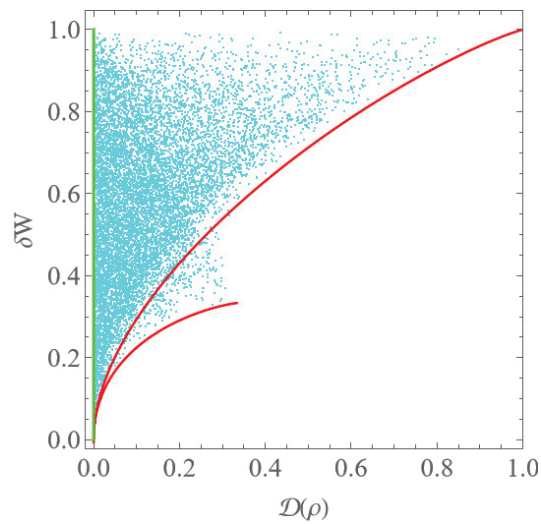
$$\rho_{\text{cc}} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + c_i \sigma_i \otimes \sigma_i), \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ ou } 3. \quad (5.26)$$

Contudo, na figura 10(c) nota-se uma correspondência entre a não-localidade baseada em realismo e o ganho demoníaco. Quando $\mathcal{N}(\rho_{\text{BD}}) = 0$, $\delta\mathcal{W}(\rho_{\text{BD}}) = 0$ e quando $\mathcal{N}(\rho_{\text{BD}}) = 1$, $\delta\mathcal{W}(\rho_{\text{BD}}) = 1$. Ou seja, é possível ver que há um limite superior e ele é composto pelos estados classicamente correlacionados ρ_{cc} - que possuem discórdia quântica nula $\mathcal{D}(\rho) = 0$ - representados em verde. Os estados de Werner continuam compondo parte do limite inferior, quando $w \in [-1/3, 0]$. A curva vermelha que aparece abaixo dos estados em verde, são também os estados de Werner, porém para $w \in [0, 1]$. Logo, pode-se dizer que a não-localidade baseada em realismo é recurso para o ganho ergotrópico para o caso de estados Bell-diagonais.

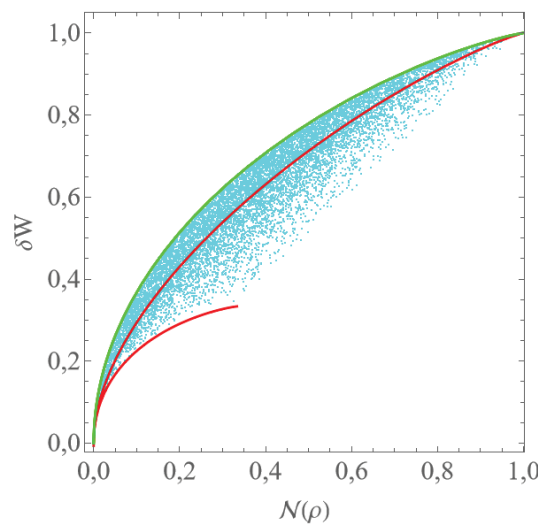
Neste capítulo, encontramos uma forma semi-analítica de calcular a ergotropia para estados gerais de dois qubits e uma forma analítica para estados Bell-diagonais. Analisamos, então, a relação do emaranhamento, discórdia quântica e não-localidade baseada em realismo com o ganho demoníaco buscando entender quais dessas correlações quânticas poderiam ser entendidas como recurso. Concluímos que, embora para estados gerais não haja correspondência, para estados Bell-diagonais a não-localidade baseada em realismo é recurso para o ganho ergotrópico.



(a)



(b)



(c)

Figura 10 – Cada ponto presente nos gráficos acima refere-se a um estado Bell-diagonal (5.7) gerado a partir da escolha aleatória dos coeficientes c_i s. Conforme esses coeficientes são determinados, o ganho ergotrópico é calculado para cada um dos 10^4 estados Bell-diagonais aleatórios em função da (a) concorrência $\mathcal{C}(\rho)$ (b) discórdia quântica $\mathcal{D}(\rho)$ e (c) não-localidade baseada em realismo $\mathcal{N}(\rho)$. Em vermelho encontram-se os estados de Werner (4.35) e em verde os estados classicamente correlacionados (5.26).

6 CONCLUSÃO

A ideia de obter informação sobre o sistema para aumentar a quantidade de trabalho extraído dele, como vimos, é antiga e remete ao experimento mental do demônio de Maxwell. Já o conceito de valer-se de correlações quânticas para aumentar a quantidade de trabalho que se pode extrair de um sistema quântico é fundamentado da mesma maneira porém possui desenvolvimento mais recente [9].

Neste projeto buscou-se estudar o protocolo da ergotropia demoníaca [28], que consiste em acoplar um sistema quântico termicamente isolado a um sistema auxiliar e aumentar a quantidade de trabalho extraído de um dos sistemas realizando medições projetivas na outra parte. Houve dois objetivos principais estabelecidos. O primeiro consistiu em implementar uma noção de medição fraca usando mapa de monitoramento [29, 30] e entender quais seriam as diferenças em relação a outras propostas na literatura para a implementação de medições fracas. O segundo explorou as correlações quânticas entre o sistema principal \mathcal{S} e o subsistema \mathcal{A} e buscou encontrar qual delas poderia ser recurso para o ganho demoníaco.

A motivação para implementar uma outra noção de medição fraca e compará-la com a medição projetiva, teve como base o artigo [31], onde os autores utilizam os projetores de medição fraca de Oreshkov e Brun [64] e apresentam um protocolo de medição fraca seletiva que origina um resultado maior que a ergotropia demoníaca, denominada superergotropia. Contudo, esse resultado é obtido por meio do processo de pós-seleção, que leva em consideração as saídas específicas das medições que são relevantes para o protocolo, descartando as que não são. Ao utilizar medições fracas não-seletivas o resultado obtido é igual à ergotropia demoníaca e, portanto, contraintuitivo com a própria definição de medição fraca, uma vez que quando há menos perturbação no sistema, menos informação sobre ele é obtida e conseqüentemente menos trabalho será extraído.

Como alternativa, recorreremos ao mapa de monitoramento [29, 30], que ao descrever o estado pós-medição permite caracterizar o estado não-medido \mathcal{S} por meio de uma soma convexa que interpola entre uma medição fraca e uma medição projetiva no sistema auxiliar \mathcal{A} . A partir dele foi possível definir a ergotropia monitorada e o ganho monitorado, que consiste na diferença entre a ergotropia monitorada e a ergotropia sem nenhuma medição.

Os resultados obtidos mostraram que a ergotropia monitorada cresce linearmente com o parâmetro $\varepsilon \in [0, 1]$ que controla a intensidade da medição. Quando $\varepsilon \rightarrow 1$, a medição assume o caráter projetivo e a ergotropia monitorada se iguala à ergotropia demoníaca. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, significa que nenhuma medição foi efetuada sobre \mathcal{A} e a ergotropia monitorada se iguala à ergotropia [90]. Quando ε assume um valor entre

0 e 1, uma pequena alteração é feita na preparação do estado do qual trabalho será extraído, simulando a noção de uma medição fraca. Comparamos nosso resultado com a superergotropia encontrada através da medição fraca seletiva e com a ergotropia demoníaca por meio de dois exemplos.

A segunda parte do trabalho consistiu em analisar as correlações quânticas existentes entre o sistema \mathcal{S} e a ancila \mathcal{A} e entender quais delas poderiam ser recurso para o ganho demoníaco. Inicialmente, então, encontramos uma forma semi-analítica (que ainda precisa ser maximizada numericamente) para a ergotropia demoníaca para estados gerais de dois qubits e, particularizando esse caso, a forma analítica para estados Bell-diagonais. Então, ao notarmos que a não-localidade baseada em realismo não era recurso para estados gerais, efetuamos análises gráficas por meio da geração de estados Bell-diagonais aleatórios. Foi possível notar que para a concorrência e discórdia quântica não há uma correspondência em relação ao ganho demoníaco. No entanto, vimos que para a não-localidade baseada em realismo há. Em particular, estados classicamente correlacionados ($\mathcal{D}(\rho) = 0$) compõem a família de estados do limite superior no plano ganho de ergotropia versus não-localidade baseada em realismo. Logo, a não-localidade, segundo o critério proposto por [32], é recurso suficiente e necessário para que mais trabalho seja extraído do sistema, de maneira cíclica e unitária, ao realizar medições projetivas no sistema auxiliar, no caso da classe de estados Bell-diagonais.

Diante dos resultados obtidos, seria interessante explorar mais profundamente a questão de porque a não-localidade atua como um recurso para o ganho ergotrópico em estados Bell-diagonais, bem como a interpretação física desse fenômeno. Além disso, encontrar a otimização analítica para a expressão do ganho demoníaco para estados gerais de dois qubits também é uma próxima etapa relevante.

Outro ponto interessante, seria avaliar o custo energético das medições e da aplicação do mapa de monitoramento no protocolo da ergotropia monitorada, e com isso verificar se a quantidade máxima de trabalho extraído ainda é superior ao que é gasto para realizar o protocolo.

BIBLIOGRAFIA

- 1 EISBERG, R.; RESNICK, R. **Quantum Physics: Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles**. 2nd. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1985. ISBN 978-0471873730.
- 2 CLAUSIUS, R. Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. **Annalen der Physik**, v. 201, p. 353–400, 1865. DOI: [10.1002/andp.18652010702](https://doi.org/10.1002/andp.18652010702).
- 3 SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, p. 379–423, 1948.
- 4 SZILARD, L. Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen. **Zeitschrift für Physik**, v. 53, p. 840–856, 1929. DOI: [10.1007/BF01341281](https://doi.org/10.1007/BF01341281).
- 5 LANDAUER, R. Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process. **IBM Journal of Research and Development**, v. 5, p. 183–191, 1961. DOI: [10.1147/rd.53.0183](https://doi.org/10.1147/rd.53.0183).
- 6 REX, A. Maxwell’s Demon—A Historical Review. **Entropy**, v. 19, 2017. DOI: [10.3390/e19060240](https://doi.org/10.3390/e19060240).
- 7 ZUREK, W. H. Maxwell’s Demon, Szilard’s Engine and Quantum Measurements. In: **Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics**. Edição: Gerald T. Moore e Marlan O. Scully. [S.l.]: Springer US, 1986. P. 151–161. DOI: [10.1007/978-1-4613-2181-1_11](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2181-1_11).
- 8 LLOYD, S. Quantum-mechanical Maxwell’s demon. **Physical Review A**, v. 56, p. 3374–3382, 1997. DOI: [10.1103/PhysRevA.56.3374](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.3374).
- 9 ZUREK, W. H. Quantum discord and Maxwell’s demons. **Physical Review A**, v. 67, p. 012320, 2003. DOI: [10.1103/PhysRevA.67.012320](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.012320).
- 10 MARUYAMA, K.; NORI, F.; VEDRAL, V. Colloquium: The physics of Maxwell’s demon and information. **Reviews of Modern Physics**, v. 81, p. 1–23, 2009. DOI: [10.1103/RevModPhys.81.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1).

- 11 MILLEN, J.; XUEREBA, A. Perspective on quantum thermodynamics. **New Journal of Physics**, v. 18, p. 011002, 2016. DOI: [10.1088/1367-2630/18/1/011002](https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/1/011002).
- 12 QUAN, H. T.; LIU, Y.-x.; SUN, C. P.; NORI, F. Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines. **Physical Review E**, v. 76, p. 031105, 2007. DOI: [10.1103/PhysRevE.76.031105](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.031105).
- 13 MALABARBA, A. S. L.; SHORT, A. J.; KAMMERLANDER, P. Clock-driven quantum thermal engines. **New Journal of Physics**, v. 17, p. 045027, 2015. DOI: [10.1088/1367-2630/17/4/045027](https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/4/045027).
- 14 CAMPAIOLI, F.; GHERARDINI, S.; QUACH, J. Q.; POLINI, M.; ANDOLINA, G. M. Colloquium: Quantum batteries. **Reviews of Modern Physics**, v. 96, p. 031001, 2024. DOI: [10.1103/RevModPhys.96.031001](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.96.031001).
- 15 BINDER, F. C.; VINJANAMPATHY, S.; MODI, K.; GOOLD, J. Quantacell: powerful charging of quantum batteries. **New Journal of Physics**, v. 17, p. 075015, 2015. DOI: [10.1088/1367-2630/17/7/075015](https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/7/075015).
- 16 CAMPAIOLI, F.; POLLOCK, F. A.; BINDER, F. C.; CÉLERI, L.; GOOLD, J.; VINJANAMPATHY, S.; MODI, K. Enhancing the Charging Power of Quantum Batteries. **Physical Review Letters**, v. 118, p. 150601, 2017. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.150601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.150601).
- 17 SHI, H.-L.; DING, S.; WAN, Q.-K.; WANG, X.-H.; YANG, W.-L. Entanglement, Coherence, and Extractable Work in Quantum Batteries. **Physical Review Letters**, v. 129, p. 130602, 2022. DOI: [10.1103/PhysRevLett.129.130602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.130602).
- 18 KAMIN, F. H.; TABESH, F. T.; SALIMI, S.; SANTOS, A. C. Entanglement, coherence, and charging process of quantum batteries. **Physical Review E**, v. 102, p. 052109, 2020. DOI: [10.1103/PhysRevE.102.052109](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.052109).
- 19 SANTOS, A. C. Quantum advantage of two-level batteries in the self-discharging process. **Physical Review E**, v. 103, p. 042118, 2021. DOI: [10.1103/PhysRevE.103.042118](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.042118).
- 20 BUFFONI, L.; GHERARDINI, S.; ZAMBRINI CRUZEIRO, E.; OMAR, Y. Third Law of Thermodynamics and the Scaling of Quantum Computers. **Physical Review Letters**, v. 129, p. 150602, 2022. DOI: [10.1103/PhysRevLett.129.150602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.150602).

- 21 DANN, R.; KOSLOFF, R. Unification of the first law of quantum thermodynamics. **New Journal of Physics**, v. 25, p. 043019, 2023. DOI: [10.1088/1367-2630/acc967](https://doi.org/10.1088/1367-2630/acc967).
- 22 BRANDÃO, F.; HORODECKI, M.; NG, N.; OPPENHEIM, J.; WEHNER, S. The second laws of quantum thermodynamics. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 112, p. 3275–3279, 2015. DOI: [10.1073/pnas.1411728112](https://doi.org/10.1073/pnas.1411728112).
- 23 BINDER, F.; CORREA, L.; GOGOLIN, C.; ANDERS, J.; ADESSO, G. **Thermodynamics in the Quantum Regime: Fundamental Aspects and New Directions**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2019. (Fundamental Theories of Physics).
- 24 GEMMER, J.; MICHEL, M.; MAHLER, G. **Quantum Thermodynamics: Emergence of Thermodynamic Behavior Within Composite Quantum Systems**. 2nd. [S.l.]: Springer, 2009. v. 784. DOI: [10.1007/978-3-642-03174-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03174-0).
- 25 HSIANG, J.-T.; CHOU, C. H.; SUBAŞI, Y.; HU, B. L. Quantum thermodynamics from the nonequilibrium dynamics of open systems: Energy, heat capacity, and the third law. **Physical Review E**, v. 97, p. 012135, 2018. DOI: [10.1103/PhysRevE.97.012135](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.012135).
- 26 ANZA, F.; CRUTCHFIELD, J. P. Geometric quantum thermodynamics. **Physical Review E**, v. 106, p. 054102, 2022. DOI: [10.1103/PhysRevE.106.054102](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.054102).
- 27 ALLAHVERDYAN, A. E.; BALIAN, R.; NIEUWENHUIZEN, T. M. Maximal work extraction from finite quantum systems. **Europhysics Letters**, v. 67, p. 565, 2004. DOI: [10.1209/epl/i2004-10101-2](https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10101-2).
- 28 FRANCIKA, G.; GOOLD, J.; PLASTINA, F.; PATERNOSTRO, M. Daemonic ergotropy: enhanced work extraction from quantum correlations. **npj Quantum Information**, v. 3, p. 12, 2017. DOI: [10.1038/s41534-017-0012-8](https://doi.org/10.1038/s41534-017-0012-8).
- 29 DIEGUEZ, P. R.; ANGELO, R. M. Information-reality complementarity: The role of measurements and quantum reference frames. **Physical Review A**, v. 97, p. 022107, 2017. DOI: [10.1103/PhysRevA.97.022107](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.022107).
- 30 _____. Weak quantum discord. **Quantum Information Processing**, v. 17, p. 1–13, 2018. DOI: [10.1007/s11128-018-1963-1](https://doi.org/10.1007/s11128-018-1963-1).

- 31 BALKANLU, M.; FAIZI, E.; AHANSAZ, B. Selective weak measurement reveals super-ergotropy. **Results in Physics**, v. 57, p. 107308, 2024. DOI: [10.1016/j.rinp.2023.107308](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.107308).
- 32 BILOBRAN, A. L. O.; ANGELO, R. M. A measure of physical reality. **Europhysics Letters**, v. 112, p. 40005, 2015. DOI: [10.1209/0295-5075/112/40005](https://doi.org/10.1209/0295-5075/112/40005).
- 33 GOMES, V. S.; ANGELO, R. M. Nonanomalous measure of realism-based nonlocality. **Physical Review A**, v. 97, p. 012123, 2018. DOI: [10.1103/PhysRevA.97.012123](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.012123).
- 34 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica Quântica Moderna**. 2. ed. [S.l.]: Editora Pearson, 2011.
- 35 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781107002173.
- 36 LANDI, G. **Notas de Aula da Disciplina Quantum Information and Quantum Noise**. [S.l.: s.n.], 2018. Notas de Aula.
- 37 DEFFNER, S.; CAMPBELL, S. **Quantum Thermodynamics: An Introduction to the Thermodynamics of Quantum Information**. [S.l.]: Morgan Claypool Publishers, 2019. (2053-2571). ISBN 978-1-64327-658-8. DOI: [10.1088/2053-2571/ab21c6](https://doi.org/10.1088/2053-2571/ab21c6).
- 38 BLOCH, F. Nuclear Induction. **Physical Review**, v. 70, p. 460–474, 1946. DOI: [10.1103/PhysRev.70.460](https://doi.org/10.1103/PhysRev.70.460).
- 39 SOUZA, A. M.; MAGALHÃES, A.; TELES, J.; AZEVEDO, E. R. de; BONAGAMBA, T. J.; OLIVEIRA, I. S.; SARTHOUR, R. S. NMR analog of Bell's inequalities violation test. **New Journal of Physics**, v. 10, p. 033020, 2008. DOI: [10.1088/1367-2630/10/3/033020](https://doi.org/10.1088/1367-2630/10/3/033020).
- 40 MOLOTKOV, S. N. On the secrecy of a simple and effective implementation of BB84 quantum cryptography protocol. **Laser Physics Letters**, v. 16, p. 075203, 2019. DOI: [10.1088/1612-202X/ab189b](https://doi.org/10.1088/1612-202X/ab189b).

- 41 ZHANG, Q.; GOEBEL, A.; WAGENKNECHT, C.; CHEN, Y.-A.; ZHAO, B.; YANG, T.; MAIR, A.; SCHMIEDMAYER, J.; PAN, J.-W. Experimental quantum teleportation of a two-qubit composite system. **Nature Physics**, v. 2, p. 678–682, 2006. DOI: [10.1038/nphys417](https://doi.org/10.1038/nphys417).
- 42 CAMPAIOLI, F.; POLLOCK, F. A.; VINJANAMPATHY, S. Quantum Batteries. In: **THERMODYNAMICS in the Quantum Regime: Fundamental Aspects and New Directions**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2018. P. 207–225. DOI: [10.1007/978-3-319-99046-0_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99046-0_8).
- 43 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? **Physical Review**, v. 47, p. 777–780, 1935. DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
- 44 BOHM, D. **Quantum Theory**. [S.l.]: Dover Publications, 1951. (Dover Books on Physics Series).
- 45 BOHM, D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables I. **Physical Review**, v. 85, p. 166–179, 1952.
- 46 BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, v. 1, p. 195–200, 1964. DOI: [10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195](https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195).
- 47 FREEDMAN, S. J.; CLAUSER, J. F. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. **Physical Review Letters**, v. 28, p. 938–941, 1972. DOI: [10.1103/PhysRevLett.28.938](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938).
- 48 ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers. **Physical Review Letters**, v. 49, p. 1804–1807, 1982. DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.1804](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.1804).
- 49 GIUSTINA, M.; VERSTEEGH, M. A. M.; WENGEROWSKY, S.; HANDSTEINER, J.; HOCHRAINER, A.; PHELAN, K.; STEINLECHNER, F.; KOFLER, J.; LARSSON, J.-Å.; ABELLÁN, C.; AMAYA, W.; PRUNERI, V.; MITCHELL, M. W.; BEYER, J.; GERRITS, T.; LITA, A. E.; SHALM, L. K.; NAM, S. W.; SCHEIDL, T.; URSIN, R.; WITTMANN, B.; ZEILINGER, A. Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons. **Phys. Rev. Lett.**, v. 115, p. 250401, 2015. DOI: [10.1103/PhysRevLett.115.250401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250401).

- 50 HENSEN, B.; BERNIEN, H.; DRÉAU, A. E.; REISERER, A.; KALB, N.; BLOK, M. S.; RUITENBERG, J.; VERMEULEN, R. F. L.; SCHOUTEN, R. N.; ABELLÁN, C.; AMAYA, W.; PRUNERI, V.; MITCHELL, M. W.; MARKHAM, M.; TWITCHEN, D. J.; ELKOUSS, D.; WEHNER, S.; TAMINIAU, T. H.; HANSON, R. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. **Nature**, v. 526, p. 250401, 2015. DOI: [10.1038/nature15759](https://doi.org/10.1038/nature15759).
- 51 SCHRÖDINGER, E. **What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1944.
- 52 BENNETT, C. H.; BERNSTEIN, H. J.; POPESCU, S.; SCHUMACHER, B. Concentrating partial entanglement by local operations. **Physical Review A**, v. 53, p. 2046–2052, 1996. DOI: [10.1103/PhysRevA.53.2046](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.53.2046).
- 53 VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. **Physical Review A**, v. 65, p. 032314, 2002. DOI: [10.1103/PhysRevA.65.032314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.032314).
- 54 VEDRAL, V.; PLENIO, M. B.; RIPPIN, M. A.; KNIGHT, P. L. Quantifying Entanglement. **Physical Review Letters**, v. 78, p. 2275–2279, 1997. DOI: [10.1103/PhysRevLett.78.2275](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.2275).
- 55 BENNETT, C. H.; BERNSTEIN, H. J.; POPESCU, S.; SCHUMACHER, B. Concentrating partial entanglement by local operations. **Physical Review A**, v. 53, p. 2046–2052, 1996. DOI: [10.1103/PhysRevA.53.2046](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.53.2046).
- 56 WOOTTERS, W. K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. **Physical Review Letters**, v. 80, p. 2245–2248, 1998. DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.2245](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245).
- 57 SCHRÖDINGER, E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 31, p. 555–563, 1935. DOI: [10.1017](https://doi.org/10.1017).
- 58 _____. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. **Naturwissenschaften**, v. 23, p. 807–812, 1935. DOI: [10.1007/BF01491891](https://doi.org/10.1007/BF01491891).
- 59 _____. Indeterminism and Free Will. **Nature**, v. 138, p. 13–14, 1936. DOI: [10.1038/138013a0](https://doi.org/10.1038/138013a0).

- 60 OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. **Physical Review Letters**, v. 88, p. 017901, 2001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.88.017901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.017901).
- 61 HENDERSON, L.; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 34, p. 6899, 2001. DOI: [10.1088/0305-4470/34/35/315](https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/35/315).
- 62 FUCCI, D. M. **Tripartite Realism-Based Quantum Nonlocality**. 2020. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas.
- 63 AHARONOV, Y.; ALBERT, D. Z.; VAIDMAN, L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. **Physical Review Letters**, v. 60, p. 1351–1354, 1988. DOI: [10.1103/PhysRevLett.60.1351](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.1351).
- 64 ORESHKOV, O.; BRUN, T. A. Weak Measurements Are Universal. **Physical Review Letters**, v. 95, p. 110409, 2005. DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.110409](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.110409).
- 65 CARNOT, N. L. S. **Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance**. [S.l.]: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1872. v. 1, p. 393–457.
- 66 CALLEN, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. 2nd. [S.l.]: Wiley, 1985.
- 67 ČÁPEK, V.; SHEEHAN, D. **Challenges to The Second Law of Thermodynamics**. [S.l.: s.n.], 2005. P. 368. ISBN 978-1-4020-3015-4. DOI: [10.1007/1-4020-3016-9](https://doi.org/10.1007/1-4020-3016-9).
- 68 MAHLER, G.; GEMMER, J.; MICHEL, M. Emergence of thermodynamic behavior within composite quantum systems. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, v. 29, n. 1, p. 53–65, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physe.2005.05.001>.
- 69 PLANCK, M. On the Definition of Entropy and the Second Law of Thermodynamics. **Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften**, p. 453–463, 1917.

- 70 BOLTZMANN, L. Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. **Wiener Berichte**, v. 67, p. 17–73, 1873.
- 71 LANDAUER, R. Information is Physical. **Physics Today**, v. 44, p. 23–29, 1991. DOI: [10.1063/1.881299](https://doi.org/10.1063/1.881299).
- 72 _____. The physical nature of information. **Physics Letters A**, v. 217, p. 188–193, 1996. DOI: [10.1016/0375-9601\(96\)00453-7](https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00453-7).
- 73 BENNETT, C. H. The thermodynamics of computation—a review. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, p. 905–940, 1982. DOI: [10.1007/BF02084158](https://doi.org/10.1007/BF02084158).
- 74 _____. Demons, Engines and the Second Law. **Scientific American**, v. 257, p. 108–116, 1987. DOI: [10.1038/scientificamerican1187-108](https://doi.org/10.1038/scientificamerican1187-108).
- 75 _____. The Fundamental Physical Limits of Computation. **Scientific American**, v. 257, p. 44–50, 1988. DOI: [10.1038/scientificamerican0788-44](https://doi.org/10.1038/scientificamerican0788-44).
- 76 BENNETT, C. H.; DIVINCENZO, D. P. Quantum cryptography using any two nonorthogonal states. **Nature**, v. 404, p. 247–255, 2000. DOI: [10.1038/350050011](https://doi.org/10.1038/350050011).
- 77 BENNETT, C. H.; BRASSARD, G. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. **Theoretical Computer Science**, v. 560, p. 7–11, 2014. DOI: [10.1016/j.tcs.2014.05.025](https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.025).
- 78 BARENCO, A.; BENNETT, C. H.; CLEVE, R.; DIVINCENZO, D. P.; MARGOLUS, N.; SHOR, P.; SLEATOR, T.; SMOLIN, J. A.; WEINFURTER, H. Elementary gates for quantum computation. **Physical Review A**, v. 52, p. 3457–3467, 1995. DOI: [10.1103/PhysRevA.52.3457](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.3457).
- 79 BENNETT, C. H. Quantum cryptography using any two nonorthogonal states. **Physical Review Letters**, v. 68, p. 3121–3124, 1992. DOI: [10.1103/PhysRevLett.68.3121](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.3121).
- 80 EINSTEIN, A. Autobiographical Notes. In: SCHILPP, P. A. (Ed.). **Albert Einstein: Philosopher-Scientist**. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 1949. v. 7. (The Library of Living Philosophers). P. 1–95.

- 81 SEIFERT, U. Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines. **Reports on Progress in Physics**, v. 75, p. 126001, 2012. DOI: [10.1088/0034-4885/75/12/126001](https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/12/126001).
- 82 TALKNER, P.; LUTZ, E.; HÄNGGI, P. Fluctuation theorems: Work is not an observable. **Physical Review E**, v. 75, p. 050102, 2007. DOI: [10.1103/physreve.75.050102](https://doi.org/10.1103/physreve.75.050102).
- 83 HÄNGGI, P.; TALKNER, P. The other QFT. **Nature Physics**, v. 11, p. 108–110, 2015. DOI: [10.1038/nphys3167](https://doi.org/10.1038/nphys3167).
- 84 CAMPISI, M.; HÄNGGI, P.; TALKNER, P. Colloquium: Quantum fluctuation relations: Foundations and applications. **Reviews of Modern Physics**, v. 83, p. 771–791, 2011. DOI: [10.1103/RevModPhys.83.771](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.771).
- 85 DEFFNER, S.; PAZ, J. P.; ZUREK, W. H. Quantum work and the thermodynamic cost of quantum measurements. **Physical Review E**, v. 94, p. 010103, 2016. DOI: [10.1103/PhysRevE.94.010103](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.010103).
- 86 SILVA, T. A. B. P.; ANGELO, R. M. Quantum mechanical work. **Physical Review A**, v. 104, p. 042215, 2021. DOI: [10.1103/PhysRevA.104.042215](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.042215).
- 87 ALLAHVERDYAN, A.; NIEUWENHUIZEN, T. A mathematical theorem as the basis for the second law: Thomson’s formulation applied to equilibrium. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 305, p. 542–552, 2001. DOI: [10.1016/S0378-4371\(01\)00605-7](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00605-7).
- 88 PUSZ, W.; WORONOWICZ, S. L. Passive states and KMS states for general quantum systems. **Communications in Mathematical Physics**, v. 58, p. 273–290, 1978. DOI: [10.1007/BF01614224](https://doi.org/10.1007/BF01614224).
- 89 ALICKI, R.; FANNES, M. Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries. **Physical Review E**, v. 87, p. 042123, 2013. DOI: [10.1103/PhysRevE.87.042123](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.042123).
- 90 ALLAHVERDYAN, A.; NIEUWENHUIZEN, T. A mathematical theorem as the basis for the second law: Thomson’s formulation applied to equilibrium. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 305, p. 542–552, 2002. DOI: [10.1016/s0378-4371\(01\)00605-7](https://doi.org/10.1016/s0378-4371(01)00605-7).

- 91 SINGH, U.; PATI, A. K. Quantum discord with weak measurements. **Annals of Physics**, v. 343, p. 141–152, 2014. DOI: [10.1016/j.aop.2014.02.004](https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.02.004).
- 92 WERNER, R. F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. **Physical Review A**, v. 40, p. 4277–4281, 1989. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.4277](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.4277).
- 93 LUO, S. Quantum discord for two-qubit systems. **Physical Review A**, v. 77, p. 042303, 2008. DOI: [10.1103/PhysRevA.77.042303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.042303).
- 94 GOMES, V. S.; ANGELO, R. M. Resilience of realism-based nonlocality to local disturbance. **Physical Review A**, v. 99, p. 012109, 2019. DOI: [10.1103/PhysRevA.99.012109](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.012109).
- 95 COSTA, A. C. S. **Correlações Quânticas em Sistemas de Dois Qubits: Medidas Alternativas e Dinâmica sob Acoplamento com Banho Térmico**. 2012. Dissertação de Mestrado – Curso de Pós-graduação em Física, Universidade Federal do Paraná.

APÊNDICE 1

1.1 NOTAS SOBRE A ERGOTROPIA DEMONÍACA

Nesta seção, iremos mostrar as provas dos Teoremas 1 e 2 e dos Corolários 1 e 2, apresentados na seção 3.2 e realizadas em [28].

Teorema 1. *Para qualquer sistema \mathcal{S} e ancilla \mathcal{A} preparados em um estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, temos*

$$\delta\mathcal{W} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0, \quad (1.1)$$

com $\delta\mathcal{W}$ e $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ definidos de acordo com as equações (3.33) e (2.50), respectivamente.

Prova. Sabe-se que $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W} = 0 \iff \delta\mathcal{W} = 0$ para qualquer conjunto $\{\Pi_a\}$. Portanto, é suficiente mostrar que independentemente da escolha do conjunto de projetores $\{\Pi_a\}$, $\delta\mathcal{W} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0$. Assumimos que $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} \neq 0$. Há, então, pelo menos um conjunto de operadores $\{\Pi_a\}$, tal que $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W} \neq 0$. Dois casos são possíveis:

1. Existe uma medida a' tal que $\rho_{\mathcal{S}|a'} \neq \sum_k r_k^{a'} |r_k\rangle \langle r_k|$ com $r_k^{a'} \geq r_{k+1}^{a'}$. Então

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W} \geq p_{a'} \sum_{k,j} r_j^{a'} \epsilon_k (|\langle r_k | r_j^{a'} \rangle|^2 - \delta_{kj}) > 0, \quad (1.2)$$

dado $\sum_{k,j} r_j^{a'} \epsilon_k (|\langle r_k | r_j^{a'} \rangle|^2 - \delta_{kj})$ é a ergotropia de $\rho_{\mathcal{S}|a'}$ relativa ao Hamiltoniano $\sum_k \epsilon_k |r_k\rangle \langle r_k|$, e é zero se e somente se $\rho_{\mathcal{S}|a'} = \sum_k r_k^{a'} |r_k\rangle \langle r_k|$.

2. Para cada estado pós-medição $\rho_{\mathcal{S}|a} = \sum_k r_k^a |r_k\rangle \langle r_k|$ com $r_k^a \geq r_{k+1}^a$. Nesse caso $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W} = 0$. Contudo, se $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ for tal que $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} \neq 0$, será sempre possível identificar um outro conjunto $\{\Pi'_a\}$ de modo que $\mathcal{W}_{\{\Pi'_a\}} - \mathcal{W} > 0$. Para mostrar como isso é possível, notamos que $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ pode ser escrito como

$$\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \sum_{a,a'} \sum_{k,k'} C_{kk'}^{aa'} |r_k\rangle \langle r_{k'}|_{\mathcal{S}} \otimes |a\rangle \langle a'|_{\mathcal{A}}, \quad (1.3)$$

com a condição de que $p_a C_{kk'}^{aa'} = r_k^a \delta_{kk'}$.

Como $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} \neq 0$, existem duas medidas a' e a'' tal que $C_{kk'}^{a'a'} \neq C_{kk'}^{a'a''} \delta_{kk'}$. Caso isso fosse verdade, teríamos $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0$, levando a uma contradição. Logo, como $\vec{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} \neq 0$, a matriz $\langle a' | \rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} | a'' \rangle$ não pode ser diagonal na base $\{|r_k\rangle_{\mathcal{S}}\}$ ($|a'\rangle_{\mathcal{A}}$ é o autoestado de $\{\Pi_a\}$ com autovalores a'). Se $a' = a''$, o caso 2. pode ocorrer.

No entanto, se $a' \neq a''$, podemos definir um novo conjunto de projetores $\{\Pi'_{a'}\}$ com elementos $\Pi'_{a'} = (|a'\rangle + |a''\rangle)(\langle a'| + \langle a''|)/2$, $\Pi'_{a''} = (|a'\rangle - |a''\rangle)(\langle a'| - \langle a''|)/2$ e $\Pi'_{a'} = \Pi'_{a''}$

para $a \neq a', a''$. Então, a matriz densidade $\rho_{\mathcal{S}|a'} = \text{Tr}_{\mathcal{A}}[\Pi'_{a'}]/p'_{a'}$ terá a seguinte forma

$$\rho_{\mathcal{S}|a'} = \frac{1}{2p'_{a'}} \left[\sum_k (p_{a'} r_k^{a'} + p_{a''} r_k^{a''}) |r_k\rangle \langle r_k|_{\mathcal{S}} + (\langle a' | \rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} | a'' \rangle + \langle a'' | \rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} | a' \rangle)_{\mathcal{A}} \right]. \quad (1.4)$$

Ou seja, $\rho_{\mathcal{S}|a'}$ não é diagonal na base $\{|r_k\rangle_{\mathcal{S}}\}$. Portanto, $\rho'_{\mathcal{S}|a'} \neq \sum_k r_k^{a'} |r_k\rangle \langle r_k|_{\mathcal{S}}$ com $r_k^{a'} \geq r_{k+1}^{a''}$. De forma análoga para o caso 1., podemos concluir que

$$\mathcal{W}_{\{\Pi'_{a'}\}} - \mathcal{W} > 0. \quad (1.5)$$

Se $(\langle a' | \rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} | a'' \rangle + \langle a'' | \rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} | a' \rangle)_{\mathcal{A}} = 0$, é suficiente para considerar $\rho'_{\mathcal{S}|a''}$ ao invés de $\rho'_{\mathcal{S}|a'}$.

A partir desta prova é possível justificar os corolários 1 e 2.

Corolário 1. *Sob as premissas do Teorema 1, $\delta\mathcal{W} = 0 \Rightarrow \overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0$.*

Prova. É suficiente considerar o estado

$$\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \sum_{k,a} q_{ak} |r_k\rangle \langle r_k|_{\mathcal{S}} \otimes |\phi_a\rangle \langle \phi_a|_{\mathcal{A}}, \quad (1.6)$$

onde $\{|\phi_a\rangle_{\mathcal{A}}\}$ é um conjunto de estados não-ortogonais. Sob essas condições, temos $\overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} \neq 0$. Se escolhermos q_{ak} tal que $q_{ak} \geq q_{ak+1}$, temos que $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W} = 0$ para qualquer conjunto $\{\Pi_a\}$, como $\rho_{\mathcal{S}|a} = \sum_k r_k^a |r_k\rangle \langle r_k|$ onde $r_k^a = \sum_{a'} q_{a'k} |\langle \phi_{a'} | a \rangle|^2 / p_a \geq r_{k+1}^a$.

Corolário 2. *Sob as premissas do Teorema 1, temos que $\overleftarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0$ ou $\overrightarrow{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = 0 \not\Rightarrow \delta\mathcal{W} = 0$.*

Prova. Consideramos o estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \sum_k r_k A_k \otimes S_k$, onde A_k e S_k são projetores ortogonais de rank um. Embora tal estado possua discórdia quântica nula (estados classicamente correlacionados), a quantidade $\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W}$ é positiva, uma vez que

$$\mathcal{W}_{\{\Pi_a\}} - \mathcal{W} = \sum_k r_k \epsilon_k - \epsilon_1 > 0. \quad (1.7)$$

Portanto, $\delta\mathcal{W} > 0$.

Apresentamos agora a prova do Teorema 2.

Teorema 2. *Para qualquer sistema \mathcal{S} e ancilla \mathcal{A} preparados em um estado puro $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = |\psi\rangle \langle \psi|_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, temos*

$$\delta\mathcal{W} = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle_{\mathcal{S}\mathcal{A}} \text{ é separável}, \quad (1.8)$$

e $\delta\mathcal{W} = \sum_k r_k \epsilon_k - \epsilon_1$, onde r_k são os coeficientes de Schmidt de $|\psi\rangle_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ e ϵ_k são autovalores de $H_{\mathcal{S}}$, ordenados de tal forma que $r_k \geq r_{k+1}$ e $\epsilon_k \leq \epsilon_{k+1}$.

Prova. Utilizando os resultados instrumentais construídos pelo Corolário 2, consideramos o estado puro $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = |\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\rangle \langle \psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}|$ com a seguinte decomposição de Schmidt $|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\rangle = \sum_k \sqrt{r_k} |r_k\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\phi_k\rangle_{\mathcal{A}}$ com $r_k \geq r_{k+1}$. O Corolário 2 mostrou que $\delta\mathcal{W} = \sum_k r_k \epsilon_k - \epsilon_1$. Logo, $\delta\mathcal{W} = 0$ deve ser $\epsilon_1 = \sum_k r_k \epsilon_k$, que implica $r_k = \delta_{1k}$. Isso implica que o estado tem um único coeficiente de Schmidt, e portanto, é separável.

1.2 NOTAS SOBRE A SUPERERGOTROPIA

Nesta seção, mostraremos as provas dos Teoremas 1 e 2 apresentados na seção 4.1 e realizadas em [31].

Teorema 1. *Para qualquer sistema \mathcal{S} e sistema auxiliar \mathcal{A} preparados em um estado $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, ao realizar uma medição fraca no sistema auxiliar, sempre teremos $\mathcal{W}_{\{P_{\pm x}\}} = \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$.*

Prova. A medição fraca não-seletiva é aquela que efetua a média sobre todos os possíveis resultados da medição. Ou seja, usando esse tipo de medição, o trabalho extraído do sistema \mathcal{S} , dado o estado conjunto $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ é

$$W_{P_{\pm x}} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \sum_{y=+x,-x} p_y \text{Tr}[U_y \rho_{\mathcal{S}|y} U_y^\dagger H_{\mathcal{S}}], \quad (1.9)$$

onde $p_y = \text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes E(y))\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}]$ é a probabilidade de encontrar o sistema \mathcal{S} no estado condicional $\rho_{\mathcal{S}|y}$ e U_y é o processo cíclico unitário que transforma $\rho_{\mathcal{S}|y}$ para reduzir sua energia interna. Reescrevendo $\rho_{\mathcal{S}|y}$ em função de $\rho_{\mathcal{S}|a}$ temos

$$\rho_{\mathcal{S}|y} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[(\mathbb{1} \otimes E(y))\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}]}{p(y)} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}\{[\mathbb{1} \otimes (\sum_a b_a(y)\Pi_a)]\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\}}{p(y)} \quad (1.10)$$

$$= \frac{\sum_a b_a(y)p_a \rho_{\mathcal{S}|a}}{p(y)}, \quad (1.11)$$

onde $b_a(\pm x) = (1 \pm \tanh(x))/2$. A equação (1.9) se reduz a

$$W_{\{P_{\pm x}\}} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \sum_a \sum_{y=+x,-x} b_a(y)p_a \text{Tr}[U_a \rho_{\mathcal{S}|a} U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}], \quad (1.12)$$

em que U_a é condicionada ao resultado da medição projetiva, ao invés de U_y em (1.9) que depende da medida da medição fraca. Então, realizando uma otimização da transformação ergotrópica para cada $\rho_{\mathcal{S}|a}$ e usando a condição de que $\sum_{y=+x,-x} b_a(y) = 1$, temos

$$\mathcal{W}_{\{P_{\pm x}\}} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \sum_a p_a \sum_k r_k^a \epsilon_k, \quad (1.13)$$

que é exatamente a forma da ergotropia demoníaca introduzida em [28].

Teorema 2. *Dado um sistema $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, ao realizar uma medição fraca seletiva na parte \mathcal{A} , sempre teremos $\mathcal{W}_{P_{\pm x}} \geq \mathcal{W}_{\{\Pi_a\}}$.*

Prova. Usando agora medição fraca seletiva, temos que o estado pós-medição é condicionado a um resultado específico. Isto é, o trabalho extraído do sistema \mathcal{S} usando medições fracas seletivas no subsistema \mathcal{A} é descrito por

$$W_{P_y} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \text{Tr}[U_y \rho_{\mathcal{S}|y} U_y^\dagger H_{\mathcal{S}}], \quad y = x \text{ ou } y = -x, \quad (1.14)$$

onde $\rho_{\mathcal{S}|y}$ é a matriz densidade condicional do sistema \mathcal{S} dado que o operador de medição fraca $P(y)$ atuou sobre \mathcal{A} . U_y é o processo cíclico unitário que transforma o estado $\rho_{\mathcal{S}|y}$

buscando reduzir sua energia interna. A probabilidade de encontrar \mathcal{S} no estado condicional pós-medição é dada por p_y tal que

$$p_y = \text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes E(y))\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}] \quad (1.15)$$

$$= \text{Tr}\{[\mathbb{1} \otimes (\sum_a b_a(y)\Pi_a)]\rho_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\} = \sum_a b_a(y)p_a, \quad (1.16)$$

onde $b_a(\pm x) = (1 \pm \tanh(x))/2$ e $p_{(\pm x)} = 1 \pm (p_1 - p_0) \tanh(x)/2$.

$$\mathcal{W}_{P_{\pm x}} = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{S}}H_{\mathcal{S}}] - \frac{1}{p_{(\pm x)}} \sum_{a=0}^1 b_a(\pm x)p_a \text{Tr}[U_a\rho_{\mathcal{S}|a}U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}]. \quad (1.17)$$

Definindo $\delta W_{\pm x} = \mathcal{W}_{P_{\pm x}} - W_{\{\Pi_a\}}$, como sendo a diferença entre o trabalho extraído induzido pela medição seletiva fraca e a ergotropia demoníaca, temos então

$$\delta W_{\pm x} = \sum_{a=0}^1 p_a \text{Tr}[U_a\rho_{\mathcal{S}|a}U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}] - \frac{1}{p_{(\pm x)}} \sum_{a=0}^1 b_a(\pm x)p_a \text{Tr}[U_a\rho_{\mathcal{S}|a}U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}] \quad (1.18)$$

$$= \sum_{a=0}^1 p_a \left(\frac{p_{(\pm x)} - b_a(\pm x)}{p_{(\pm x)}} \right) \text{Tr}[U_a\rho_{\mathcal{S}|a}U_a^\dagger H_{\mathcal{S}}] \quad (1.19)$$

Substituindo $p_{(\pm x)}$ e $b_a(\pm x)$ na equação (1.19), temos

$$\delta W_{\pm x} = \pm C_{\pm} (\text{Tr}[U_0\rho_{\mathcal{S}|0}U_0^\dagger H_{\mathcal{S}}] - \text{Tr}[U_1\rho_{\mathcal{S}|1}U_1^\dagger H_{\mathcal{S}}]), \quad (1.20)$$

onde os coeficientes $C_{\pm} = (2p_0p_1 \tanh(x))/(1 \pm (p_1 - p_0) \tanh(x))$ dependem da probabilidade dos resultados das medições e sua intensidade.