

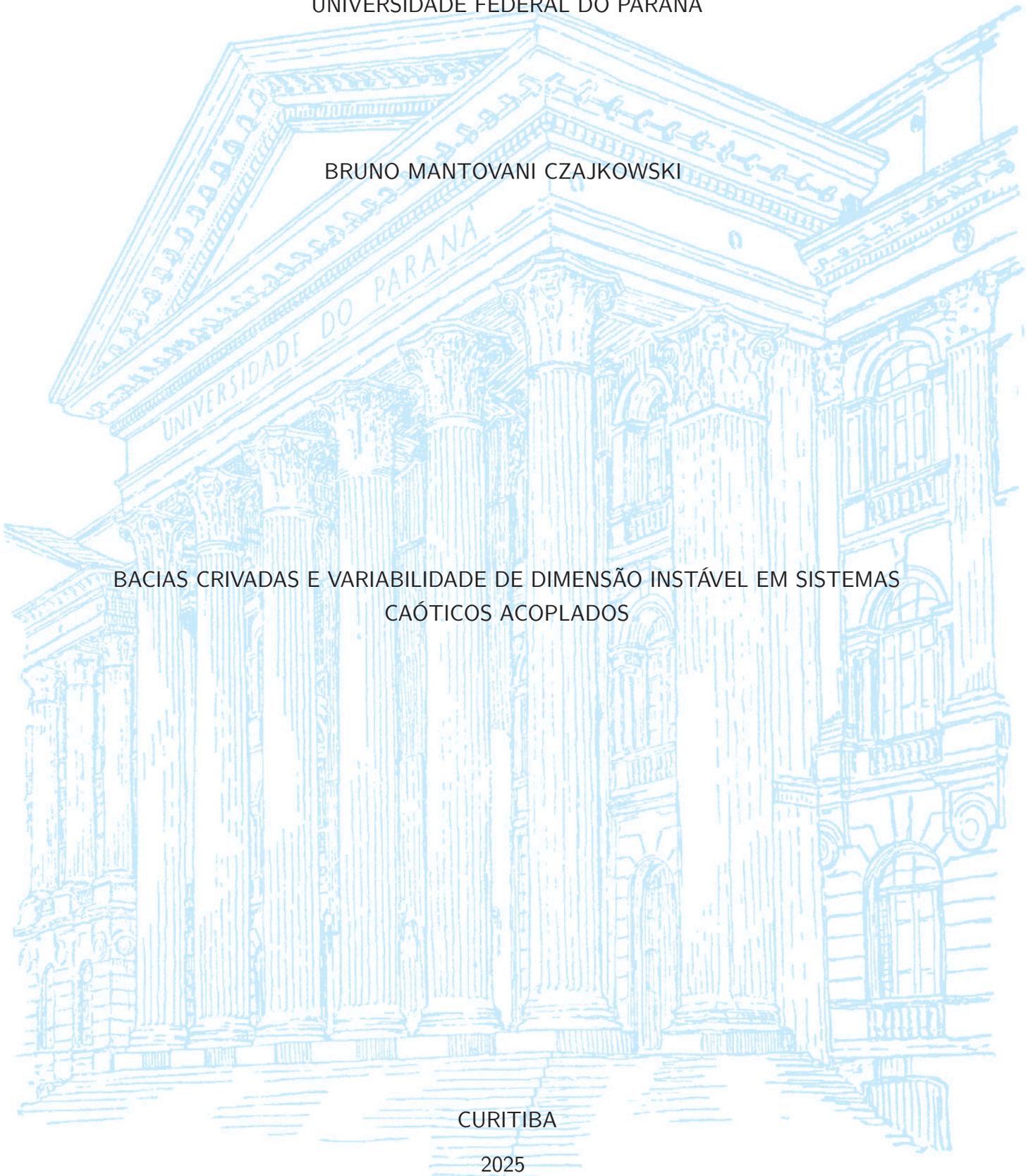
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRUNO MANTOVANI CZAJKOWSKI

BACIAS CRIVADAS E VARIABILIDADE DE DIMENSÃO INSTÁVEL EM SISTEMAS  
CAÓTICOS ACOPLADOS

CURITIBA

2025



BRUNO MANTOVANI CZAJKOWSKI

BACIAS CRIVADAS E VARIABILIDADE DE DIMENSÃO INSTÁVEL EM SISTEMAS  
CAÓTICOS ACOPLADOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à  
obtenção do grau de Mestre em Física ao Programa  
de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências  
Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Czajkowski, Bruno Mantovani

Bacias crivadas e variabilidade de dimensão instável em sistemas caóticos acoplados / Bruno Mantovani Czajkowski. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Ricardo Luiz Viana

1. Caos quântico. 2. Órbitas periódicas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Viana, Ricardo Luiz. IV . Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **BRUNO MANTOVANI CZAJKOWSKI** intitulada: "**Bacias crivadas e variabilidade de dimensão instável em sistemas caóticos acoplados**", sob orientação do Prof.

Dr. RICARDO LUIZ VIANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

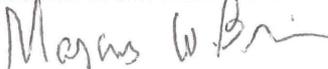
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 21 de Fevereiro de 2025.



RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora



MARCUS WERNER BEIMS

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



Avaliador Interno (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA)

## **AGRADECIMENTOS**

- Ao Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana, pela paciência, disponibilidade e orientação ao longo deste trabalho.
- Aos amigos da pós-graduação, pelo apoio e amizade durante o mestrado.
- Aos membros da banca, por disponibilizarem seu tempo para ler e avaliar a dissertação.
- Ao Programa de Pós-graduação em Física da UFPR, pela estrutura física e suporte computacional.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Bacias de atração crivadas são caracterizadas por não possuírem subconjuntos abertos em seu interior. Essas bacias surgem em sistemas caóticos multiestáveis a partir de bifurcações blowout e apresentam leis de escala características. Além disso, o atrator associado possui a propriedade de variabilidade de dimensão instável (VDI), o que indica que trajetórias numéricas podem não representar o comportamento real das órbitas do modelo por longos períodos de tempo. Neste trabalho, estudam-se dois sistemas — um discreto e um contínuo — que exibem bacias crivadas devido à presença de uma variedade de sincronização. As leis de escala esperadas são verificadas e mostra-se que elas podem ser corretamente estimadas por um modelo estocástico proposto por Ott e colaboradores, inclusive quando o sistema apresenta dimensões relativamente altas e está sujeito a perturbações. Utilizando o conjunto de órbitas periódicas imersas nos atratores crivados, evidencia-se a existência de VDI em ambos os sistemas e, para o caso discreto, sua intensidade é quantificada através da medida de contraste. Isso permitiu constatar que a intensidade de VDI é máxima próximo a pontos críticos. O estudo de VDI por meio das órbitas periódicas é complementado pela análise das distribuições de expoentes de Lyapunov em tempo finito, o que corrobora tanto a validade do modelo estocástico como a maximização da variabilidade da dimensão próximo a bifurcações blowout.

Palavras-chave: sincronização de caos; bacias de atração crivadas; variabilidade de dimensão instável; teoria de órbitas periódicas.

## ABSTRACT

Riddled basins of attraction are characterized by the lack of open subsets in their interior. These basins emerge in multistable systems through blowout bifurcations and exhibit characteristic scaling laws. Moreover, the riddled attractor possesses the property of unstable dimension variability (UDV), which indicates that numerical orbits may not accurately represent the behavior of real orbits of the system over long periods of time. In this work, two systems — one discrete and one continuous — are studied, both of which exhibit riddled basins due to the presence of a synchronization manifold. The expected scaling laws are verified, and it is demonstrated that they can be accurately estimated by a stochastic model proposed by Ott and collaborators, even when the system is relatively high-dimensional and subject to perturbations. Using the set of periodic orbits embedded in the riddled attractors, the existence of UDV is shown in both systems, and for the discrete one, its intensity is quantified using the contrast measure. This allowed us to verify that near critical points the UDV intensity is maximized. The study of UDV through periodic orbits is complemented by an analysis of the distribution of finite-time Lyapunov exponents, which corroborates the validity of the stochastic model and the maximization of UDV near blowout bifurcations.

Key words: chaos synchronization; riddled basins of attraction; unstable dimension variability; periodic orbit theory.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama ilustrando o papel dos expoentes de Lyapunov na deformação de uma esfera de condições iniciais em $\mathbb{R}^3$ devido à dinâmica do sistema. . . .	20
Figura 2 – Diagrama mostrando esquematicamente uma bacia crivada. O eixo horizontal indica o subespaço $V$ , com um atrator de Milnor $\mathcal{A}$ . Os pontos em cinza pertencem a bacia de um segundo atrator, enquanto os pontos em branco estão na bacia de $\mathcal{A}$ . Um ponto periódico $y_{p_1}$ , que é transversalmente instável, origina conjuntos na forma de “línguas” que são repelidos do atrator pela dinâmica. . . . .	25
Figura 3 – (a) Bacia crivada para um modelo ecológico estudado na Referência [30]. (b) Bacia crivada para um sistema mecânico estudado na Referência [23]. . . .	26
Figura 4 – Diagrama mostrando as variáveis para o cálculo de $P^*(\ell)$ . . . . .	27
Figura 5 – Diagrama mostrando as variáveis para o cálculo de $p(d)$ numa bacia crivada. . . . .	28
Figura 6 – $Y_m$ para o sistema 2.53 de dois mapas logísticos acoplados. (a) tem $\varepsilon = -0,75$ , enquanto (b) apresenta $\varepsilon = -0,71$ . . . . .	36
Figura 7 – (a) Bacias de atração para o sistema 3.3 com $\varepsilon = 0,9$ e $\delta = -0,4$ . Pontos em branco indicam condições iniciais que convergem para o atrator $\mathcal{A}$ , enquanto pontos em preto divergem para infinito. (b) Magnificação de uma pequena região de (a). . . . .	42
Figura 8 – Região no espaço de parâmetros $(\varepsilon, \delta)$ na qual o atrator de sincronização $\mathcal{A}$ é transversalmente estável, com $\lambda_{\perp} < 0$ . . . . .	44
Figura 9 – (a) $P^*$ como função da distância $\ell$ ao atrator para $\varepsilon = 0,9$ . (b) Fração incerta $p$ de condições iniciais como função do raio de incerteza $d$ para condições iniciais que distam $\ell_0 = 10^{-2}$ do atrator. . . . .	45
Figura 10 – Expoentes de Lyapunov transversais para o mapa acoplado 3.3 em função dos parâmetros de acoplamento para: (a) $\varepsilon = \varepsilon_0$ , (b) $\delta = \delta_0$ . . . . .	45
Figura 11 – Distribuição de probabilidade $\mathcal{F}$ para os expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito $T = 80$ , com $\varepsilon = 0,9$ . As curvas em preto são distribuições gaussianas com a mesma média e variância de $\mathcal{F}$ . . . . .	46
Figura 12 – (a) Fração $F$ de expoentes de Lyapunov positivos em tempo finito $T = 80$ para $\varepsilon = 0,9$ em função de $\delta$ . (b) Análogo à (a) para $\delta = 0,4$ em função de $\varepsilon$ . A reta horizontal representa $F = 0,5$ . . . . .	47
Figura 13 – Variância $\sigma^2$ para distribuições de Lyapunov em tempo finito $T$ com $\varepsilon = 0,9$ , bem como ajustes lineares (retas pretas tracejadas). . . . .	48

Figura 14 – Expoentes $\alpha$ e $\eta$ das duas leis de potência para a bacia do atrator $\mathcal{A}$ . Quadrados em laranja representam valores calculados pelo ajuste linear de $P^*$ e $p$ , como ilustrado na Figura 9, enquanto círculos em azul são valores calculados pelo modelo OAKSY, usando a Equação 2.44. (a) e (c) correspondem a $\varepsilon = 0,9$ e diferentes $\delta$ , enquanto (b) e (d) referem-se a $\delta = 0,4$ e diferentes $\varepsilon$ . As retas verticais indicam pontos críticos. . . . .	49
Figura 15 – Estimativas para os expoentes de Lyapunov transversais usando o conjunto de órbitas periódicas de período $p$ imersas em $\mathcal{A}$ , através do truncamento do limite em 3.18. Em preto, é mostrado os valores utilizando a medida natural. (a) Tem $\varepsilon = 0,9$ e (b), $\delta = 0,4$ . As retas verticais indicam os pontos críticos estimados para cada $p$ . . . . .	51
Figura 16 – Medida de contraste $C_p$ , para diferentes períodos $p$ , em função de: (a) $\delta$ , para $\varepsilon = 0,9$ ; (b) $\varepsilon$ , para $\delta = 0,4$ . . . . .	52
Figura 17 – Medida de contraste para órbitas periódicas de período $p = 13$ em $\mathcal{A}$ , $C_{13}$ , em função dos parâmetros de acoplamento $\delta$ e $\varepsilon$ . . . . .	53
Figura 18 – Expoente de hiperbolicidade $h$ (escala à direita) e medida de contraste $C_{15}$ (escala à esquerda) em função do parâmetro de acoplamento $\varepsilon$ para $\delta = 0,4$ . . . . .	53
Figura 19 – Atrator caótico de duas asas para o modelo descrito na Equação 4.3 com $a = 0,5$ e $c = 50$ . . . . .	55
Figura 20 – Distância $d_s$ ao subespaço de sincronização de duas trajetórias com condições iniciais de coordenadas escolhidas em $[-1, 1]$ , para $a = 0,5$ e dois valores de $\kappa$ . (a) Tem $\kappa = 0,10$ , e a órbita não converge para $\mathcal{A}$ — nem para $\mathcal{B}$ — devido a esse conjunto ser transversalmente instável. (b) Tem $\kappa = 0,15$ , e a órbita está na bacia de $\mathcal{A}$ . . . . .	57
Figura 21 – Três maiores expoentes de Lyapunov para uma órbita caótica no atrator $\mathcal{A}$ , círculos coloridos, e o expoente de Lyapunov transversal para esse atrator, curva em preto, calculado através das equações variacionais 4.9. . . . .	59
Figura 22 – Órbitas periódicas imersas no atrator caótico sincronizado com períodos aproximados $p =$ (a) 10,973, (b) 16,406, (c) 25,657, (d) 36,478, (e) 42,501, e (f) 56,899. As condições iniciais dessas órbitas estão indicadas na Tabela 2. . . . .	60
Figura 23 – Expoentes de Lyapunov transversais $\lambda_{\perp}$ para algumas das órbitas periódicas, indicadas pelo seu período $p$ , imersas no atrator sincronizado. (a) Próximo de $\kappa_c$ . (b) Num intervalo mais amplo de valores para $\kappa$ . . . . .	61
Figura 24 – Bacia de atração para o atrator em $\mathcal{M}_S$ (em branco) e para $\mathcal{M}_A$ (em preto) numa seção do espaço de fase dada por $x_1 = x_2 = 1,0$ e $y_1 = y_2 = 1,0$ , com $\kappa = 0,41$ . . . . .	62

Figura 25 – Bacias de atração do atrator em $\mathcal{M}_S$ (em branco) e do atrator em $\mathcal{M}_A$ (em preto) para: $\kappa = 0,3$ em (a) e (c); e $\kappa = 1,0$ em (b) e (d). As figuras consideram uma seção do espaço de fase definida por $y_1 = \pm y_2 = 0,0$ e $z_1 = z_2 = -2,0$ . A reta em azul ( $x_1 = x_2$ ) está contida em $\mathcal{M}_S$ e a reta em vermelho ( $x_1 = -x_2$ ) está em $\mathcal{M}_A$ . . . . .	63
Figura 26 – (a) Fração de 2000 condições iniciais $P^*(\ell)$ que divergem do atrator de sincronização $\mathcal{A}$ em função da distância a ele $\ell$ . (b) Fração incerta $p(d)$ de 2000 condições iniciais que distam $\ell_0 = 10^{-2}$ da variedade de sincronização em função do raio de incerteza $d$ . As retas são ajustes lineares em escala logarítmica. . . . .	63
Figura 27 – Distribuição $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp(T))$ para os expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito $T = 200$ considerando órbitas no atrator de sincronização. Para cada $\kappa$ , as curvas em preto são distribuições gaussianas de mesma média e variância que $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp(T))$ . . . . .	64
Figura 28 – Variância $\sigma^2$ para distribuições de expoentes de Lyapunov em tempo finito $T$ , considerando órbitas no atrator de sincronização, como função de $T$ . As retas são ajustes lineares em escala logarítmica para cada parâmetro de acoplamento $\kappa$ usado. . . . .	65
Figura 29 – Valores para os expoentes das leis de potência associadas à bacia crivada do atrator de sincronização. (a) $\eta$ , e (b) $\alpha$ . Em laranja estão os pontos calculados diretamente pelo ajuste linear de trajetórias numéricas, como ilustrado na Figura 26, enquanto os pontos em azul são os valores esperados pelo modelo OAKSY. . . . .	66
Figura 30 – Fração $F$ de expoentes de Lyapunov em tempo finito $T$ positivos em função da constante de acoplamento $\kappa$ para órbitas no atrator de sincronização. A reta vertical indica o ponto crítico $\kappa_c$ . . . . .	67
Figura 31 – (a) $N(A, t)$ , com $\kappa = 0,13$ , em função de $t$ para diferentes amplitudes de perturbação $A$ . As curvas cheias são os resultados de experimentos numéricos e os pontos em preto ajustes exponenciais. (b) Tempo característico de decaimento $\langle \tau \rangle$ em função da amplitude $A$ . As retas indicam ajustes lineares em escala logarítmica. . . . .	68
Figura 32 – (a) Expoente $\eta$ calculado por ajustes numéricos (em laranja), utilizando o modelo OAKSY, com as equações 2.44, (em azul) e o valor de $\eta'$ , associado ao sistema perturbado, em função de $\kappa$ . (b) Parâmetro $C$ em função da intensidade de acoplamento $\kappa$ . . . . .	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Estimativas para os parâmetros críticos $(\varepsilon_0, \delta_i)$ e $(\varepsilon_i, \delta_0)$ , $i \in \{1; 2\}$ , usando órbitas periódicas de diferentes períodos $p$ , por meio do truncamento da Equação 3.18. Os erros relativos para cada parâmetro, em relação ao valor obtido pela medida natural (Equação 3.11), são indicados com $\Delta$ . . . . .	51
Tabela 2	– Condições iniciais $(x, y, z)$ e períodos $p$ associados com cada órbita periódica em $\mathcal{A}$ utilizada nas Figuras 22 e 23. Os valores foram obtidos pelo método de Newton-Raphson-Mees [94]. . . . .	61

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS COM BACIAS CRIVADAS</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>16</b>
2.1.1	Caos e expoentes de Lyapunov	18
2.1.2	Expoente de Lyapunov transversal a um subespaço vetorial	22
<b>2.2</b>	<b>Bacias de atração crivadas</b>	<b>23</b>
2.2.1	Leis de escala	26
2.2.2	Bifurcação blowout	29
2.2.3	Modelo estocástico OAKSY	30
<b>2.3</b>	<b>Sincronização de caos</b>	<b>34</b>
2.3.1	Exemplo de sincronização de caos	35
<b>2.4</b>	<b>Teoria de órbitas periódicas</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Variabilidade de dimensão instável e sombreamento de trajetórias</b>	<b>38</b>
<b>3</b>	<b>SISTEMA DISCRETO ACOPLADO</b>	<b>41</b>
<b>3.1</b>	<b>Construção do sistema</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Caracterização das bacias crivadas</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Modelo estocástico OAKSY</b>	<b>47</b>
<b>3.4</b>	<b>Teoria de órbitas periódicas</b>	<b>49</b>
<b>3.5</b>	<b>Variabilidade de dimensão instável</b>	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>SISTEMA CONTÍNUO ACOPLADO</b>	<b>54</b>
<b>4.1</b>	<b>Construção do sistema</b>	<b>54</b>
<b>4.2</b>	<b>Caracterização das bacias crivadas</b>	<b>59</b>
<b>4.3</b>	<b>Modelo OAKSY e variabilidade de dimensão instável</b>	<b>64</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>72</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos são utilizados para modelar sistemas reais nas mais variadas áreas do conhecimento, como na Ecologia [1, 2, 3], Química [4, 5, 6, 7] e Física [8, 9, 10, 11]. Eles determinam, através de equações de diferença ou equações diferenciais, como um dado estado de um espaço de fase apropriado evolui no tempo.

Dentro do estudo de sistemas dinâmicos dissipativos, os conceitos de atrator e bacia de atração são extremamente relevantes [12, 13, 14]. Atratores, sendo subconjuntos do espaço de fase que atraem órbitas com determinadas condições iniciais, servem como possíveis soluções assintóticas do sistema, enquanto o conjunto de condições iniciais que convergem para um atrator é dito estar em sua bacia de atração.

Desde o trabalho pioneiro de Lorenz [11], ao estudar um modelo simples de convecção forçada, observou-se que atratores podem ser conjuntos bastante complicados do espaço de fase. O atrator encontrado por Lorenz é um exemplo de atrator caótico, apresentando sensibilidade às condições iniciais e estruturas fractais [15]. Desse modo, qualquer perturbação em relação a uma condição inicial no atrator é, em média, amplificada exponencialmente pela dinâmica, até que a distância entre a órbita inicial e a perturbada seja da ordem do diâmetro desse atrator.

Sistemas dinâmicos caóticos exibem uma vasta gama de comportamentos complexos, especialmente quando apresentam multiestabilidade, caracterizada pela coexistência de dois ou mais atratores. A presença de múltiplos atratores ocorre em vários modelos de interesse biológico e físico [16], e pode resultar em complicadas bacias de atração, que tipicamente manifestam propriedades fractais [17]. A fractalidade das bacias, por sua vez, tem importantes consequências para a previsibilidade do comportamento das órbitas do sistema.

Em sistemas multiestáveis com bacias de atração fractais, se torna relevante o conceito de incerteza quanto ao comportamento assintótico de condições iniciais [18]. Qualquer condição inicial em um sistema físico é determinada apenas dentro de um intervalo de incerteza. O mesmo ocorre em simulações numéricas, onde existem erros de arredondamento e de aproximação [19]. Portanto, pode-se imaginar que uma dada condição inicial, na realidade, é representada por uma esfera no espaço de fase, centrada no ponto escolhido e de raio igual à máxima incerteza — denotando as possíveis condições iniciais incertas para o sistema. Se essa esfera intersectar a fronteira da bacia de atração de um atrator, não será possível determinar com certeza o comportamento assintótico da condição inicial, ou seja, em qual bacia de atração esse ponto realmente se encontra. Nesses casos, considera-se que a condição inicial é incerta para essa amplitude de incerteza [20].

Sistemas com múltiplos comportamentos assintótico distintos podem apresentar as chamadas bacias crivadas [21, 22]. Essas bacias são caracterizadas por não possuírem subconjuntos abertos e por apresentarem regiões no espaço de fase arbitrariamente próximas do atrator crivado que convergem para um segundo atrator. Isso resulta em buracos de volume positivo no espaço de fase, localizados na vizinhança do primeiro atrator e pertencentes à bacia do segundo. Esses buracos ocorrem ainda em qualquer escala e exibem fractalidade [23, 24].

Uma das primeiras observações de bacias crivadas foi feita para mapas em 1992, por Alexander *et al.* [21]. No ano seguinte, Ott *et al.* [23] analisaram a formação de bacias crivadas e algumas de suas leis de escala para um sistema contínuo, consistindo de uma partícula forçada periodicamente na presença de atrito e sujeita a um potencial biestável. Diversos outros estudos foram realizados para entender as condições de formação e propriedades dessas bacias [25, 26, 27, 28].

De um ponto de vista de incerteza em relação ao comportamento assintótico, as bacias crivadas são caracterizadas pela presença de pontos com comportamento assintótico incerto em toda uma vizinhança de seu atrator [21, 23, 29]. Isso sugere que experimentos físicos ou numéricos envolvendo esse tipo de sistema podem enfrentar problemas de reprodutibilidade de resultados devido a perturbações. Um exemplo de modelo ecológico, no contexto de competição entre duas espécies, que apresenta essas bacias foi estudado na Referência [30]. Cazes *et al.* encontraram exemplos em modelos populacionais [31, 32], enquanto as Referências [33, 34] mostram resultados experimentais em circuitos elétricos.

Para a existência dessas bacias, é necessário que um atrator esteja contido num subespaço vetorial invariante pela dinâmica, que ele seja transversalmente (em relação ao subespaço) estável e que existam órbitas periódicas transversalmente instáveis imersas no atrator, isto é, arbitrariamente próximas dele [21, 22]. A estabilidade transversal é determinada pelo maior expoente de Lyapunov [35] associado às direções transversais ser negativo [36]. Existe, portanto, uma bifurcação que dá origem às bacias crivadas, chamada bifurcação blowout [25, 26, 33], quando o expoente de Lyapunov transversal se anula, fazendo com que o atrator passe a ser (ou deixe de ser) transversalmente estável [37].

As condições necessárias para a ocorrência de bacias crivadas, como a exigência de um subespaço invariante com um atrator caótico, podem ser restritivas e difíceis de verificar em sistemas de altas dimensões de interesse físico. Muitos sistemas apresentam dinâmica e propriedades similares, mas não possuem, ou não é possível verificar formalmente, a presença de uma bacia crivada [38, 39, 40]. Apesar disso, é esperado que algumas das conclusões envolvendo atratores crivados sejam análogas para esses sistemas. Vários exemplos são discutidos na seção VIII do artigo de revisão [22].

A necessidade de órbitas periódicas transversalmente instáveis num atrator crivado estável, por sua vez, implica a presença de variabilidade de dimensão instável (VDI)

[41]. Essa propriedade surge quando diferentes pontos de um atrator possuem variedades instáveis locais de dimensões distintas. A VDI indica uma quebra de hiperbolicidade para o conjunto, o que pode gerar problemas de sombreamento em pseudo-trajetórias [42]. Devido a erros de truncamento ou de integração inerentes a experimentos numéricos, as trajetórias numéricas sempre são perturbadas em relação às órbitas reais, constituindo, na realidade, pseudo-trajetórias [43, 19]. Em sistemas não-hiperbólicos, como no caso de sistemas com VDI, as pseudo-órbitas podem não representar corretamente o comportamento do sistema dinâmico [44, 45, 46]. Portanto, a presença de VDI não é apenas uma observação teórica — verificar e quantificar a intensidade de VDI pode ter importantes consequências práticas para estimar o tempo que trajetórias numéricas representam corretamente trajetórias reais.

O conjunto de órbitas periódicas é também relevante para estudar a dinâmica caótica [47], com atratores caóticos tipicamente possuindo um número infinito e denso dessas órbitas [48, 49]. Em sistemas hamiltonianos, por exemplo, as órbitas periódicas têm relação com os níveis de energia [50, 51], enquanto em teoria de controle de caos elas servem como os conjuntos invariantes passíveis de serem estabilizados [52]. A área da dinâmica que tem por objetivo estudar a estrutura, a dinâmica simbólica e propriedades estatísticas de um atrator caótico através do conjunto de órbitas periódicas imersas nele é chamada teoria de órbitas periódicas (uma referência compreensiva do assunto pode ser encontrada no livro [53]). Em particular, para atratores hiperbólicos, pode-se relacionar a medida natural do atrator com uma medida definida nessas órbitas invariantes [54].

Entretanto, hiperbolicidade é uma condição bastante restritiva e sistemas de interesse físico geralmente violam essa condição por diferentes motivos. Por exemplo, uma forma de quebra de hiperbolicidade ocorre em crises homoclínicas, onde tangências das variedades estáveis e instáveis de um ponto periódico descumprem a condição de transversalidade para as variedades [55, 56]. Outra possibilidade, presente em sistemas com bacias crivadas, é a existência de VDI, o que impossibilita a decomposição contínua do espaço tangente de um atrator em variedades estáveis e instáveis devido à variabilidade de dimensão da variedade instável ao longo de um atrator caótico. Apesar disso, alguns estudos indicam que a relação entre a medida natural e medidas definidas em órbitas periódicas ainda é válida nesses sistemas não-hiperbólicos como uma aproximação [27, 49, 54].

Pode-se, portanto, identificar a bifurcação blowout e a formação de bacias crivadas utilizando somente as órbitas periódicas imersas no atrator. As estabilidades transversais dessas órbitas estão relacionadas com a intensidade de VDI, através da chamada medida de contraste [57]. Há um interesse em calcular a intensidade de VDI na vizinhança de bifurcações blowout, pois existem evidências de que a VDI deve ser máxima próximo a pontos críticos [58], de modo que, próximo desses pontos, se espera que o tempo de sombreamento seja mínimo devido à quebra de hiperbolicidade [44, 59].

Perto de bifurcações blowout é onde também se pode estudar a bacia crivada e a

dinâmica transversal do sistema por meio de um modelo estocástico proposto por Ott e colaboradores [29]. Nesse modelo, se argumenta que o logaritmo da distância ao atrator caótico segue aproximadamente uma caminhada aleatória enviesada no limite de difusão. O modelo procura explicar e quantificar algumas das leis de escala características que surgem nessas bacias [23] utilizando somente a distribuição de expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito [41].

O objetivo deste trabalho é estudar algumas das propriedades dessas bacias crivadas, verificar se o modelo estocástico proposto por Ott e colaboradores é válido num sistema de maior dimensão e relacionar esses conceitos com a teoria de órbitas periódicas e com a presença de VDI. Para isso, foram construídos dois sistemas que apresentam bacias crivadas. O primeiro se refere a um mapa bidimensional, onde o conjunto de órbitas periódicas pode ser obtido analiticamente, de modo que é possível explorar a teoria de órbitas periódicas de forma mais detalhada. O segundo é um sistema contínuo em seis dimensões, onde ficam mais evidentes alguns dos obstáculos ao se estudar bacias crivadas em sistemas contínuos em maiores dimensões, e onde se tem maior interesse em verificar o modelo estocástico. Nesse segundo caso, são utilizadas algumas ferramentas para mostrar a existência das bacias e a presença de VDI sem ter acesso direto a todas as órbitas periódicas imersas no atrator caótico. Esses dois sistemas se complementam, o primeiro permite uma análise mais profunda principalmente quanto à intensidade de VDI, enquanto o segundo apresenta métodos para se verificar e caracterizar bacias crivadas em sistemas mais complicados e próximos da realidade de sistemas físicos de interesse.

O trabalho está dividido em cinco seções. A Seção 2 apresenta uma fundamentação teórica com alguns dos principais resultados da literatura relacionados às bacias crivadas, ao modelo estocástico de Ott, à teoria de órbitas periódicas e à VDI. A Seção 3 introduz um mapa acoplado bidimensional que exhibe bacia crivada. Demonstra-se que ele satisfaz todas as condições para a existência dessas bacias, que valem as leis de escala esperadas, bem como que elas podem ser estimadas por um modelo estocástico nas proximidades das bifurcações blowout. Ademais, é verificado para esse sistema a relação entre a medida natural do atrator caótico e medidas associadas às órbitas periódicas, com essas órbitas permitindo quantificar a intensidade de VDI através da medida de contraste. Com isso, observa-se que a intensidade de VDI é máxima próximo a pontos críticos. A Seção 4 introduz um fluxo gerado ao acoplar dois sistemas do tipo Lorenz, inspirados num sistema físico caótico proposto por Elwakil [60]. Novamente, observa-se que todas as condições para bacias crivadas são satisfeitas, assim como as leis de escala características. Para esse sistema, também se constata a validade dos resultados do modelo estocástico proposto na Referência [29] de maneira mais geral, considerando os efeitos de perturbações nas leis de escala. As conclusões e perspectivas futuras são apresentadas na Seção 5. Fruto deste trabalho, foram publicados dois artigos [61, 62].

## 2 SISTEMAS DINÂMICOS COM BACIAS CRIVADAS

### 2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

Sistemas dinâmicos são sistemas descritos por um espaço de fase (ou de estados) e uma regra que determina como um dado estado evolui no tempo [12]. Eles são classificados em duas categorias que dependem se o tempo é considerado uma variável discreta, onde a regra é dada por uma equação diferença, ou contínua, onde a regra é definida por um conjunto de equações diferenciais. Sistemas dinâmicos são importantes nas mais variadas áreas do conhecimento, sendo utilizados para modelar, por exemplo, sistemas físicos, químicos, biológicos e econômicos [12, 63].

Um sistema dinâmico discreto é determinado por um par  $(f, \Omega)$ , onde  $\Omega$  é um conjunto chamado espaço de fase e  $f$  uma função (ou mapa)  $f : \Omega \rightarrow \Omega$ . A função  $f$  indica como um ponto no espaço de fase evolui num tempo discreto  $m \in \mathbb{N}$ , isto é, a cada ponto  $x_m \in \Omega$  é associado o ponto  $x_{m+1} = f(x_m)$ .

Dado  $x_0 \in \Omega$ , o conjunto das imagens,  $\Gamma(x_0)$ , devido a sucessivas aplicações de  $f$  é chamado de órbita ou trajetória de  $x_0$ :

$$\Gamma(x_0) = \{ f^m(x_0) \in \Omega \mid m \in \mathbb{N} \}, \quad (2.1)$$

onde a notação  $f^m$  indica a composição da função  $f$  um número  $m$  de vezes. Se a função  $f$  for invertível, de modo que não exista ambiguidade em relação a qual ponto é o inverso de  $x$  em  $\Omega$ , pode-se considerar também as sucessivas pré-imagens de  $x_0$  como parte de sua órbita.

Embora o tempo em sistemas físicos comumente seja uma variável contínua, várias propriedades desses sistemas podem ser estudadas construindo-se um sistema dinâmico discreto. Geralmente isso é feito através da seleção de estados em tempos discretos associados a algum fenômeno de interesse. Uma possibilidade é considerar os estados em tempos periódicos, os chamados mapas estroboscópicos, como feito na construção do mapa do rotor duplo [64]. Outra alternativa é utilizar as seções de Poincaré, onde se constrói um mapa através da sucessão de estados obtidos pela interseção da solução contínua com uma superfície apropriada no espaço de fase [14]. Esse tipo de análise permite obter informações acerca do sistema de interesse, como a presença de caos, estabilidade, dinâmica simbólica e fractalidade, estudando um sistema discreto mais simples.

Se o tempo for uma variável contínua, define-se um sistema dinâmico contínuo por um par  $(G, \Omega)$ , onde, novamente,  $\Omega$  é um conjunto chamado espaço de fase e  $G : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ .

Um ponto  $x(0) \in \Omega$  é transportado devido à dinâmica para um ponto  $x(t)$  num tempo  $t$ , tal que

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t) \quad (2.2)$$

ou, de modo equivalente,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t G(x(t'), t') dt'. \quad (2.3)$$

Nesse caso, dado que o sistema de equações diferenciais satisfaz as condições para existência e unicidade de soluções, a órbita  $\Gamma(x(0))$  é definida para todo  $t$  real e é dada por:

$$\Gamma(x(0)) = \{ x(t) \in \Omega \mid t \in \mathbb{R} \}. \quad (2.4)$$

O conjunto de soluções para sistemas contínuos pode ser descrito por um fluxo  $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$  que, dado um ponto  $x_0$  no espaço de fase e um tempo  $t$ , associa-os à única curva  $x(t)$  que satisfaz a lei do sistema dinâmico e que em  $t = 0$  é igual a  $x_0$ , isto é:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(x_0, t)}{dt} = G(\Phi(x_0, t), t), \\ \Phi(x_0, 0) = x_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Em sistemas dinâmicos na Física, é comum que o espaço de fase seja uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Nesse caso, o sistema é dito ter dimensão  $n$ .

Se a função  $G$  não depender explicitamente do tempo  $t$ , o sistema é chamado autônomo. Qualquer sistema dinâmico não-autônomo de dimensão  $n$  pode ser transformado num sistema autônomo de dimensão  $n + 1$ , bastando redefinir a variável temporal. Por exemplo, dado  $G(x, t)$  não-autônomo de dimensão  $n$

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t), \quad (2.6)$$

pode-se definir  $\tilde{G}(y)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m, t)$ , autônomo de dimensão  $n + 1$  com variável temporal  $s$ , tal que

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{ds} = G(y), \\ \frac{dt}{ds} = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

onde  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Portanto, todos os sistemas contínuos a seguir serão considerados autônomos.

Um importante conceito em sistemas caóticos é a ideia de conjuntos invariantes. Dizemos que um conjunto  $I \subset \Omega$  é um conjunto invariante de um sistema dinâmico se

$$\begin{cases} f(I) \subset I & \text{sistema } (f, \Omega) \text{ discreto;} \\ \Phi(I, t) \subset I & \text{sistema } (G, \Omega) \text{ contínuo com fluxo } \Phi(x, t); \end{cases} \quad (2.8)$$

isto é, um conjunto é invariante se a dinâmica faz com que qualquer ponto desse conjunto permaneça nele para todo tempo  $t$ . Conjuntos invariantes são extremamente relevantes no estudo de sistemas caóticos, pois eles são os candidatos a soluções assintóticas para esses sistemas. O caso mais simples é um ponto fixo  $x_f$ , onde  $f(x_f) = x_f$  ou  $G(x_f) = 0$  (ponto de equilíbrio). Outros exemplos incluem órbitas periódicas, ciclos limites e atratores (ou repulsores) caóticos [14].

De modo a simplificar a notação, a partir de agora  $x(t)$  será considerado como um ponto de uma órbita no tempo  $t$ , que começa em  $x(0)$ , independentemente de  $t$  ser discreto ou contínuo. Além disso, o espaço de fase  $\Omega$  será considerado como um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

Um tipo especial de conjunto invariante é chamado atrator. Existem diferentes definições de atrator, tipicamente com a ideia central de ser um conjunto invariante  $\mathcal{A}$  que atrai determinadas órbitas do espaço de fase e serve como um estado assintótico do sistema [65]. Neste trabalho, num contexto de bacias crivadas, se considera como atrator a definição discutida inicialmente por Milnor [13, 21]: Seja  $\mathcal{A} \subset \Omega$  um conjunto fechado, definimos a bacia de atração  $\beta(\mathcal{A})$  como o conjunto de pontos do espaço de fase que eventualmente convergem para  $\mathcal{A}$ , isto é,

$$\beta(\mathcal{A}) := \{ x(0) \in \Omega \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \mathcal{A}) = 0 \}, \quad (2.9)$$

onde  $\text{dist}(x, \mathcal{A})$  é a função distância entre um ponto  $x$  e o conjunto  $\mathcal{A}$ , dada por

$$\text{dist}(y, \mathcal{A}) := \inf_{w \in \mathcal{A}} \|y - w\|. \quad (2.10)$$

O conjunto  $\mathcal{A}$  é dito atrator no sentido fraco de Milnor se:

- A medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  de  $\beta(\mathcal{A})$ ,  $\mu(\beta(\mathcal{A}))$ , é estritamente positiva, isto é, o volume em  $\mathbb{R}^n$  de  $\beta(\mathcal{A})$  é positivo;
- Não existe um subconjunto fechado  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  com  $\beta(\mathcal{A}') = \beta(\mathcal{A})$ .

O primeiro item da definição afirma que os pontos atraídos para o atrator formam um conjunto de volume positivo no espaço de fase, mas não exige, como é comum em outras definições de atrator, a existência de uma cobertura de  $\mathcal{A}$  contida na bacia de atração [43, 14]. A segunda parte da definição acima indica que não é possível reduzir o atrator para um “sub-atrator”, ou seja, o atrator é em certo sentido minimal [13]. Uma alternativa para garantir o segundo item é exigir a existência de uma órbita densa no conjunto  $\mathcal{A}$  [22].

### 2.1.1 Caos e expoentes de Lyapunov

Sistemas caóticos são sistemas dinâmicos caracterizados por exibirem sensibilidade às condições iniciais e serem topologicamente transitivos [48]. Neles, a distância entre órbitas inicialmente próximas cresce, em média, exponencialmente, até atingir um platô

determinado pelo diâmetro de um subconjunto caótico do espaço de fase. Assim, qualquer incerteza ou perturbação numa condição inicial resulta na inviabilidade de se prever o comportamento preciso da solução por longos períodos de tempo. A existência de caos num sistema pode ser identificada pela presença de atratores caóticos, de forma que um grande número de condições iniciais (na bacia do atrator) converge para um conjunto invariante com propriedades caóticas.

É possível identificar a sensibilidade quanto às condições iniciais e, consequentemente, a presença de caos, utilizando o conceito de expoente de Lyapunov [66]. Esse expoente está relacionado com a tendência média de órbitas próximas se aproximarem ou se afastarem devido à dinâmica. Para ilustrar isso, considere um mapa  $x_{m+1} = f(x_m)$  e condições iniciais próximas  $y_0$  e  $x_0$ , tais que  $y_0 = x_0 + d_0$ . Então

$$y_m = f(y_{m-1}) = x_m + Df(x_{m-1})(d_{m-1}) + \mathcal{O}(|d_{m-1}|^2), \quad (2.11)$$

de modo que o vetor distância entre os pontos num tempo  $m$  é

$$d_m = y_m - x_m = Df(x_{m-1})(d_{m-1}) + \mathcal{O}(|d_{m-1}|^2). \quad (2.12)$$

Recursivamente, substituindo  $d_{m-1}$ , na equação acima,

$$\begin{aligned} d_m &= Df(x_{m-1})[Df(x_{m-2})(d_{m-2}) + \mathcal{O}(|d_{m-2}|^2)] + \mathcal{O}(|d_{m-2}|^2), \\ d_m &= Df(x_{m-1})Df(x_{m-2})(d_{m-2}) + \mathcal{O}(|d_{m-2}|^2), \\ &\vdots \\ d_m &= Df(x_{m-1})Df(x_{m-2}) \dots Df(x_2)Df(x_1)Df(x_0)d_0 + \mathcal{O}(|d_0|^2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Logo, dado um vetor distância inicial  $d_0$ , após  $m$  iterações o vetor distância entre os pontos é determinado em primeira ordem por

$$d_m = Df^m(x_0)d_0 := Df(x_{m-1})Df(x_{m-2}) \dots Df(x_2)Df(x_1)Df(x_0)d_0. \quad (2.14)$$

O espectro de Lyapunov num tempo finito  $t$  para uma órbita  $\Gamma(x_0)$  é o conjunto de  $n$  números,  $\lambda_i(x_0, t)$ , chamados expoentes de Lyapunov em tempo finito  $t$ , dados pelo logaritmo dos valores singulares da transformação  $Df^t(x_0)$  dividido pelo tempo  $t$ . Sendo  $\sigma_i(x_0, t)$  o  $i$ -ésimo valor singular, associado ao vetor singular  $v_i$  de  $Df^t(x_0)$ , então [41]

$$\lambda_i(x_0, t) := \frac{1}{t} \log(\sigma_i(x_0, t)). \quad (2.15)$$

Esse número descreve como em média a distância entre duas soluções inicialmente próximas se comporta. Para  $y_0 = x_0 + v_i$ , isto é,  $d_0 = v_i$ , tem-se

$$|d_t| = |Df^t(x_0)d_0| = \sqrt{d_0^* [Df^t(x_0)]^* Df^t(x_0) d_0} = \sigma_i |d_0| \Rightarrow \frac{|d_t|}{|d_0|} = e^{t\lambda_i(x_0, t)}. \quad (2.16)$$

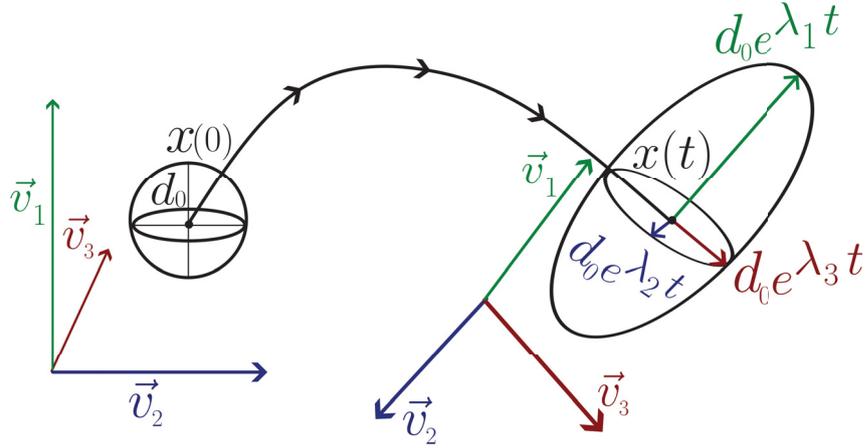


Figura 1 – Diagrama ilustrando o papel dos expoentes de Lyapunov na deformação de uma esfera de condições iniciais em  $\mathbb{R}^3$  devido à dinâmica do sistema.

Como os vetores singulares formam uma base de  $\mathbb{R}^n$ , pode-se generalizar a ideia acima para  $y_0 = x_0 + \sum_{i=1}^n a_i v_i$ , de modo que, para tempos grandes, o maior expoente de Lyapunov será dominante para o comportamento de  $|d_t|$ .

O espectro de Lyapunov em tempo infinito é o limite, dado que ele exista,  $t \rightarrow \infty$  de  $\lambda_i(x_0, t)$

$$\lambda_i(x_0) := \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(x_0, t). \quad (2.17)$$

Uma forma de visualizar o que os expoentes de Lyapunov representam é considerar uma esfera de condições iniciais de raio  $d_0$  no espaço de fase. Para tempos  $t$  pequenos, essa esfera se deformará num elipsoide devido à dinâmica do sistema. Os vetores singulares  $v_i$  determinam as direções dos eixos do elipsoide, enquanto os termos  $d_0 \exp(t\lambda_i(x_0, t))$  correspondem ao tamanho do eixo associado à direção  $v_i$ . O diagrama da Figura 1 ilustra esse comportamento em um espaço de fase tridimensional. A esfera é esticada nas direções com expoentes positivos e contraída nas direções com expoentes negativos.

Os expoentes de Lyapunov são especialmente relevantes quando a órbita  $\Gamma(x_0)$  é a órbita caótica num atrator com medida natural ergódica, tal que a média espacial sobre o atrator de qualquer função integrável é igual à média temporal da função aplicada à órbita caótica. Nesse caso, pelo teorema de Oseledets [67, 68], o limite 2.17 não só existe, como é independente de  $x_0$  para quase todas as condições iniciais, de acordo com a medida natural do atrator. Quando bem definidos (o artigo [69] mostra alguns exemplos de sistemas onde os expoentes não existem), os expoentes de Lyapunov passam a caracterizar o atrator como um todo, e indicam quando existe dependência em relação às condições iniciais e, conseqüentemente, quando o sistema pode apresentar caos.

Se um atrator possui  $\lambda_i > 0$ , então existe um campo vetorial  $v_i(x(t))$  ao longo da órbita caótica  $x(t)$  que indica direções nas quais órbitas próximas de  $x_0$ , em média, se afastam exponencialmente dessa órbita inicial, apresentando, portanto, sensibilidade às

condições iniciais.

Pode-se fazer o mesmo raciocínio para o caso contínuo. Considere um sistema dinâmico contínuo definido por  $G : \Omega \rightarrow \Omega$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\dot{x} = G(x). \quad (2.18)$$

Dado o fluxo desse sistema  $\Phi(x_0, t)$  e um vetor  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ , considere uma outra solução, próxima da primeira em  $t = 0$ , da forma  $\Phi(x_0 + u_0, t)$ . Então,

$$\Phi(x_0 + u_0, t) = \Phi(x_0, t) + D_x \Phi(x_0, t)(u_0) + \mathcal{O}(|u_0|^2), \quad (2.19)$$

onde  $D_x$  é a derivada em relação à variável espacial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Definindo ainda  $d(t) = \Phi(x_0 + u_0, t) - \Phi(x_0, t)$  e  $J(x_0, t) = D_x \Phi(x_0, t)$ , obtém-se:

$$\frac{dJ(x_0, t)}{dt} = D_x \frac{d\Phi(x_0, t)}{dt} = D_x [G(\Phi(x_0, t))]. \quad (2.20)$$

Usando a regra da cadeia,

$$\dot{J}(x_0, t) := \frac{dJ(x_0, t)}{dt} = (D_x G)(\Phi(x_0, t)) \circ J(x_0, t). \quad (2.21)$$

A relação acima indica a dinâmica para o operador  $J(x_0, t)$ . Pela Equação 2.19, o vetor distância entre as órbitas segue

$$d(t) = J(x_0, t)d(0) + \mathcal{O}(|d(0)|^2), \quad (2.22)$$

com  $J(x_0, 0) = I$  o operador identidade. Portanto, a distância entre órbitas próximas é determinada em primeira ordem pelo operador  $J(x_0, t)$  (de forma análoga ao que  $Df^m(x_0)$  é para mapas na Equação 2.14). O espectro de Lyapunov em tempo finito  $t$  é dado pelos valores singulares  $\sigma_i(x_0, t)$  de  $J(x_0, t)$  [59]

$$\lambda_i(x_0, t) := \frac{1}{t} \log \sigma_i(x_0, t), \quad (2.23)$$

e o espectro em tempo infinito é obtido pelo limite, dado que ele exista,

$$\lambda_i(x_0) := \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(x_0, t). \quad (2.24)$$

Da mesma forma que para mapas, o interesse aqui é principalmente quando a órbita é a órbita caótica num atrator com medida ergódica, de modo que o teorema de Oseledets assegura a existência do limite acima e garante que para quase toda condição inicial no atrator o espectro é o mesmo [68].

Ao contrário de mapas, no entanto, calcular numericamente  $J(x_0, t)$  não é tão simples. É necessário integrar o sistema simultaneamente no espaço  $\Omega$  usual, para encontrar  $\Phi(x, t)$ , e no espaço tangente, para encontrar o operador  $J(x_0, t)$ , dado pela Equação 2.21.

Para isso, fixa-se uma base em  $\mathbb{R}^n$ , de modo que  $J(x_0, t)$  pode ser escrito matricialmente, e resolve-se o seguinte sistema [66]

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(x_0, t) &= G(\Phi(x_0, t)), \\ \dot{J}(x_0, t) &= (D_x G)(\Phi(x_0, t)) \circ J(x_0, t),\end{aligned}\tag{2.25}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}\Phi(x_0, 0) &= x_0, \\ J(x_0, 0) &= I.\end{aligned}\tag{2.26}$$

A equação no espaço tangente é uma equação diferencial matricial, composta por matrizes quadradas e contendo  $n^2$  termos. Assim, na prática, é necessário resolver um sistema de  $n^2 + n$  equações diferenciais para determinar os  $n$  expoentes de Lyapunov. A resolução numérica desse sistema requer alguns cuidados, já que, em sistemas caóticos, mesmo para valores de  $u_0$  muito pequenos, o sistema no espaço tangente converge rapidamente para o autovetor de maior expoente de Lyapunov, gerando problemas numéricos devido ao crescimento exponencial de  $u_0$ . Uma maneira de contornar esse problema consiste em resolver o sistema em várias etapas de tempos pequenos, renormalizando o vetor  $u_0$  entre elas. Neste trabalho, utilizamos o algoritmo descrito por Benettin *et al.* [66] para obter o espectro de Lyapunov em sistemas contínuos através do sistema 2.25.

### 2.1.2 Expoente de Lyapunov transversal a um subespaço vetorial

Ao analisar a estabilidade do estado de sincronização para sistemas dinâmicos acoplados, é comum utilizar a ideia de expoentes de Lyapunov transversais a um subespaço de sincronização. Os expoentes indicam se o estado sincronizado é estável em relação a perturbações transversais [35] (conforme será discutido na Seção 2.3). Esse conceito é fundamental para a análise da estabilidade de atratores com bacias crivadas [22, 36].

Considere um sistema dinâmico definido em  $\mathbb{R}^n$  e um atrator  $\mathcal{A}$  contido num subespaço invariante de dimensão  $q$ ,  $M \subset \mathbb{R}^q$ . Pode-se dividir o espectro de Lyapunov para uma órbita do atrator em duas componentes. A primeira, consistindo de  $q$  expoentes de Lyapunov, associados aos vetores singulares de  $Df^t(x_0)$  ou  $J(x_0, t)$  que são paralelos ao subespaço e, portanto, contendo o espectro que caracteriza o atrator restrito ao subespaço. A segunda componente é dada pelos  $n - q$  expoentes associados às direções transversais de  $M$  [36].

O expoente de Lyapunov transversal  $\lambda_{\perp}$  é definido como o maior dos  $n - q$  expoentes presentes no espectro transversal. Se  $\lambda_{\perp}$  for menor que zero, então  $\mathcal{A}$ , em média, atrai órbitas transversalmente e o atrator é dito estável transversalmente. Esse expoente pode ser calculado de duas maneiras: utilizando o espectro de Lyapunov (selecionando o maior

dos expoentes transversais) ou por meio das chamadas equações variacionais [70]. Esse segundo método é menos custoso computacionalmente para sistemas contínuos e será descrito a seguir.

Seja um sistema dinâmico contínuo  $\dot{v} = G(v)$ , definido em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q} \mid y = 0\}$  representa um subespaço invariante para a dinâmica. Sendo  $v = (x, y)$ , com  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ , podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(x, y) \\ G_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Como  $M$  é invariante,  $G_2(x, 0) = 0$ . As equações variacionais são obtidas derivando  $G_2$  em relação às variáveis  $y$  em  $y = 0$ , e são dadas por

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x \\ \frac{d}{dt}\delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(x, 0) \\ (D_y G_2)(x, 0) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Essas equações representam a dinâmica em primeira ordem de perturbações transversais ao subespaço  $M$ , onde  $\delta y$  é um vetor perturbação.

Definindo  $d(t) = |\delta y(t)|$ , onde  $|\dots|$  é a norma euclidiana, e dada uma perturbação inicial  $d(0) = |\delta y(0)|$ , o expoente de Lyapunov transversal é obtido por [22]

$$\lambda_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left( \frac{d(t)}{d(0)} \right) \quad (2.29)$$

no limite  $d(0) \rightarrow 0$ . Na prática,  $d(t)$  pode crescer exponencialmente e não é possível tomar o limite para  $d(0)$ , de modo que para garantir a convergência da expressão acima em experimentos numéricos é necessário ainda usar o método descrito em [71], onde se calcula  $d(t)$  em pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$ .

## 2.2 BACIAS DE ATRAÇÃO CRIVADAS

Neste trabalho temos interesse em analisar as chamadas bacias de atração crivadas. Dado um atrator de Milnor  $\mathcal{A}$ , sua bacia de atração é dita crivada se, para todo  $x$  na bacia, existirem pontos arbitrariamente próximos de  $x$  que pertencem à bacia de outro atrator [21, 36]. A presença de crivamento muitas vezes é estudada somente na vizinhança do atrator de Milnor, de modo que uma bacia pode ser considerada crivada se seu conjunto complemento for denso numa vizinhança de seu atrator. Essa propriedade é incompatível com algumas das definições mais usuais de atrator, que exigem a existência de uma vizinhança dele totalmente contida em sua bacia de atração [14, 43] — daí a necessidade de se considerar um atrator no sentido fraco de Milnor [13].

Num contexto de bacias crivadas, o conceito de condição inicial incerta [18, 20] é extremamente importante. Uma condição inicial  $x_0$  num sistema dinâmico sempre possui

uma incerteza associada. Essa incerteza pode ter origem física, por exemplo, se  $x_0$  for uma medida experimental, ou pode ser consequência de erros de truncamento numéricos e erros de aproximação em integradores de sistemas contínuos [19]. Uma condição inicial  $x_0$  é dita  $\epsilon$  incerta se a esfera  $n$ -dimensional de centro  $x_0$  e raio  $\epsilon$  intersecta a bacia de dois ou mais atratores e as intersecções tem volume positivo. Se  $x_0$  for  $\epsilon$  incerta, então pode-se afirmar que há uma incerteza correspondente ao comportamento assintótico para a órbita com essa condição inicial. Nesse sentido, bacias crivadas representam casos extremos em que pontos arbitrariamente próximos do atrator são  $\epsilon$  incertos para qualquer  $\epsilon > 0$ , o que gera dificuldades em relação à predicabilidade do comportamento assintótico para órbitas do sistema.

Portanto, sistemas com atratores crivados podem ser particularmente complicados de se estudar experimentalmente, já que perturbações transversais ao atrator podem desestabilizá-lo e mudar o comportamento assintótico de trajetórias. Alguns exemplos experimentais podem ser vistos nas Referências [33, 34].

Para a existência de bacias crivadas, o sistema deve satisfazer as seguintes condições [22, 72]:

1. Existe um subespaço vetorial  $V \subset \Omega$  do espaço de fase que é invariante pela dinâmica;
2. Em  $V$ , há um atrator de Milnor caótico  $\mathcal{A}$  transversalmente estável (com o expoente de Lyapunov transversal  $\lambda_{\perp}$  negativo);
3. Há ao menos um outro atrator  $\tilde{\mathcal{A}}$  para o sistema além de  $\mathcal{A}$ ;
4. Existem órbitas periódicas transversalmente instáveis imersas no atrator  $\mathcal{A}$ , isto é, arbitrariamente próximas dele.

A primeira condição garante que para todo ponto do atrator tenha-se bem definidas direções transversais, que são dadas pelas direções transversais ao subespaço invariante. A segunda e terceira condição exigem que exista um atrator de Milnor caótico  $\mathcal{A}$  no espaço de fase, que poderá ser crivado pela bacia de um segundo atrator  $\tilde{\mathcal{A}}$ , o qual não precisa ser crivado. A quarta condição indica que, embora  $\mathcal{A}$  seja em média estável transversalmente, existem regiões arbitrariamente próximas dele que são transversalmente instáveis. Essa condição é equivalente à de que o atrator deve possuir variabilidade de dimensão instável [41].

A formação de bacias crivada se dá da seguinte forma [21, 36]: O conjunto  $\mathcal{A}$  sendo transversalmente estável garante que ele será um atrator de Milnor em  $\Omega$ , atraindo um conjunto de medida positiva do espaço de fase. No subespaço  $V$ , as órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico formam um conjunto invariante com bacia de medida nula, de modo que elas não são realizadas para qualquer condição inicial que já não esteja

nessas órbitas. No entanto, ao se considerar um deslocamento transversal em relação a  $V$ , as órbitas periódicas instáveis, por continuidade, geram conjuntos de medida positiva no espaço de fase que são localmente repelidos do atrator; essas regiões repulsoras são comumente chamadas de “línguas” [73]. Como existem outros atratores no sistema e essas línguas ocorrem em qualquer escala, as regiões repulsoras podem estar na bacia de um segundo atrator, formando uma bacia crivada na vizinhança de  $\mathcal{A}$ .

Freqüentemente só é viável verificar que a bacia é crivada na região próxima ao seu atrator. Uma maneira de argumentar que, em alguns casos, essa verificação é suficiente para considerar a bacia inteira como crivada, consiste em observar que a órbita de qualquer ponto  $x_0$  na bacia do atrator deve chegar próxima dele. Se o conjunto de órbitas periódicas instáveis for denso no atrator, então existem condições iniciais arbitrariamente próximas de  $x_0$  cujas órbitas caem nos conjuntos repulsores pertencentes à bacia de outro atrator. Isso sugere que se a bacia é crivada numa vizinhança do atrator, ela também deve ser crivada no restante do espaço de fase, uma vez que qualquer ponto na bacia de  $\mathcal{A}$  é pré-imagem de um ponto em sua vizinhança.

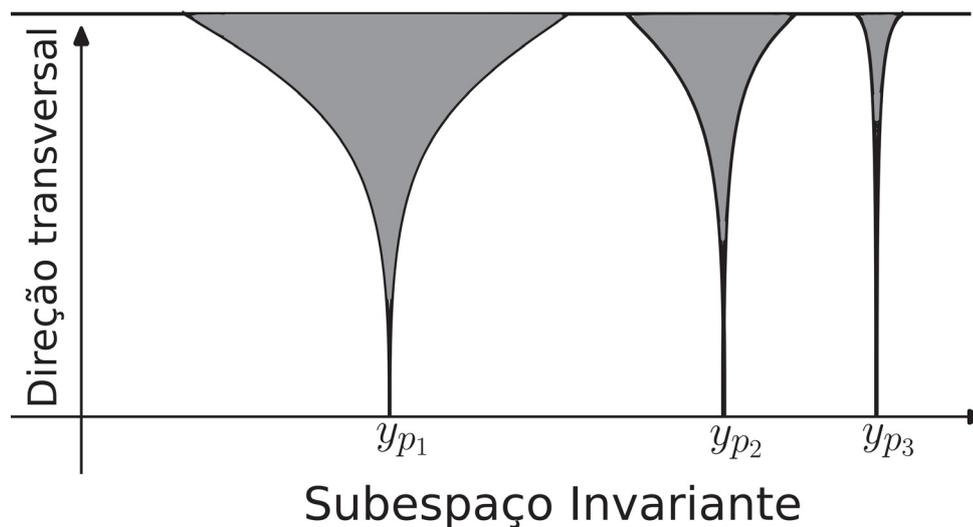


Figura 2 – Diagrama mostrando esquematicamente uma bacia crivada. O eixo horizontal indica o subespaço  $V$ , com um atrator de Milnor  $\mathcal{A}$ . Os pontos em cinza pertencem a bacia de um segundo atrator, enquanto os pontos em branco estão na bacia de  $\mathcal{A}$ . Um ponto periódico  $y_{p_1}$ , que é transversalmente instável, origina conjuntos na forma de “línguas” que são repelidos do atrator pela dinâmica.

A Figura 2 mostra um diagrama que ilustra as “línguas” repulsoras numa bacia crivada. No eixo horizontal está indicado o subespaço  $V$  invariante, onde há um atrator caótico de Milnor  $\mathcal{A}$ , enquanto o eixo vertical indica a direção transversal ao subespaço. As regiões em cinza correspondem a partes da bacia de atração de um segundo atrator (não mostrado). O ponto  $y_{p_1}$  representa um ponto periódico que é transversalmente instável no atrator  $\mathcal{A}$ . Portanto, para qualquer distância transversal maior que zero próximo desse ponto, há uma região de volume positivo que diverge de  $V$  e que está na bacia do segundo atrator. Essa região diminui de volume conforme se aproxima do subespaço e passa a ter

medida de Lebesgue nula em  $y_{p_1}$ . Qualquer pré-imagem de  $y_{p_1}$ , por continuidade, também gera essas “línguas” repulsoras (por exemplo,  $y_{p_2}$  e  $y_{p_3}$ ). Assim, se o conjunto de pontos eventualmente periódicos for denso no atrator, essas regiões repulsoras também serão densas na vizinhança do subespaço invariante, o que resulta numa bacia crivada.

Dois exemplos estudados na literatura dessas bacias são mostrados na Figura 3. Pontos em branco são condições iniciais que convergem para o atrator com bacia crivada, nesses exemplos restritos a  $y = 0$ , enquanto pontos em preto divergem para um segundo atrator.

A Figura 3a mostra a bacia crivada analisada na Referência [30], para um mapa bidimensional que modela um sistema ecológico de competição entre duas espécies. Há dois atratores caóticos crivados, em  $y = 0$  e  $y = 1$ , que representam estados com a extinção de uma das espécies e, conseqüentemente, a sobrevivência da outra. Já 3b mostra um exemplo estudado na Referência [23], para uma seção transversal de um mapa estroboscópico. Esse mapa é construído a partir de um sistema contínuo que modela uma partícula com um forçamento periódico e sujeita a um potencial biestável. O atrator crivado é um oscilador de Duffing, que nessa figura está restrito à reta  $y = 0$ , enquanto o segundo atrator está no infinito. Em ambos os exemplos as bacias são crivadas, pois arbitrariamente próximo de um ponto que converge para o atrator crivado, haverá pontos que divergem dele.

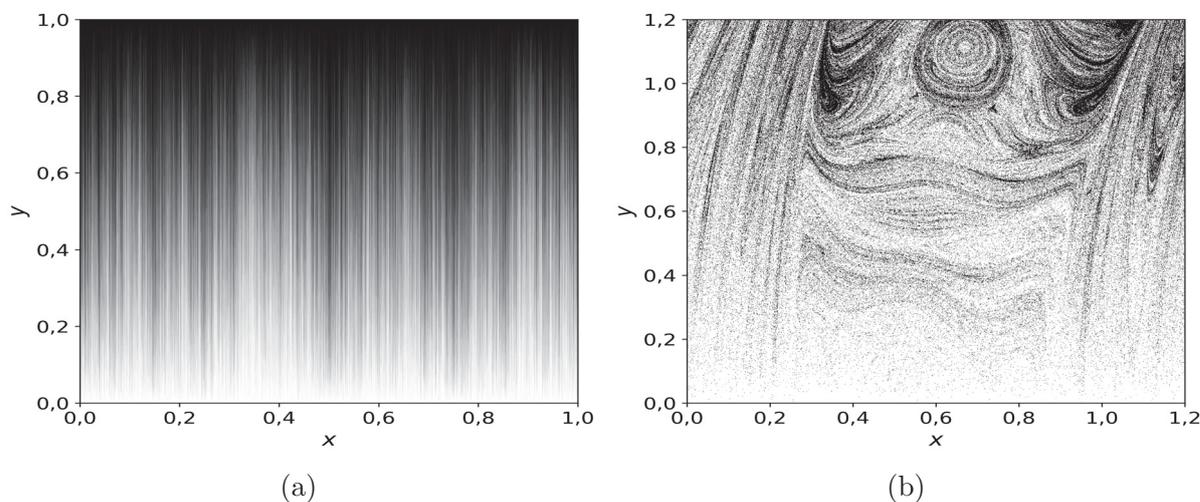
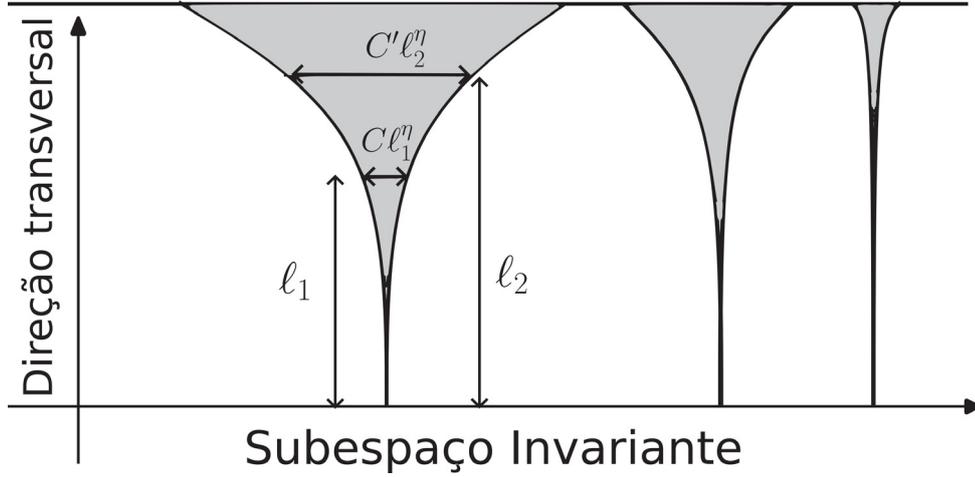


Figura 3 – (a) Bacia crivada para um modelo ecológico estudado na Referência [30]. (b) Bacia crivada para um sistema mecânico estudado na Referência [23].

### 2.2.1 Leis de escala

Bacias crivadas tipicamente apresentam duas leis de escala relacionadas aos conjuntos em seu complemento [21]. A primeira está associada a como o conjunto de pontos repelidos do atrator cresce em função da distância transversal, ou seja, como o volume do espaço de fase que diverge de  $\mathcal{A}$  aumenta conforme se afasta-se do atrator [23].


 Figura 4 – Diagrama mostrando as variáveis para o cálculo de  $P^*(\ell)$ .

Seja  $P^*(\ell)$  a fração de órbitas que distam  $\ell$  do atrator e que convergem para um outro atrator  $\mathcal{A}'$ . Experimentos numéricos mostram que para bacias crivadas, no limite  $\ell \rightarrow 0$ , tem-se [23, 29, 70]

$$P^*(\ell) \sim \ell^\eta. \quad (2.30)$$

Essa relação para  $P^*$  ilustra que uma condição inicial a uma distância  $\ell > 0$  qualquer em relação ao atrator tem probabilidade não nula de divergir de  $\mathcal{A}$ . A Figura 4 mostra esquematicamente como a fração de pontos que divergem do atrator cresce, em média, segundo uma lei de potência em função da distância ao atrator. Na prática, não é necessário que as “línguas” individualmente sigam a Equação 2.30, como na figura esquemática, mas apenas que a soma das regiões que divergem ao longo de todo o atrator siga a lei de escala acima.

A segunda lei de escala está associada à fractalidade das bacias crivadas próximo do atrator e à fração de condições iniciais  $\epsilon$  incertas [18]. Dado um ponto  $x$  que dista transversalmente  $\ell_0$  do atrator e um escalar  $d$ , mensura-se qual a probabilidade de um segundo ponto  $y$ , que também dista  $\ell_0$  do atrator e que dista  $\epsilon$  de  $x$  (onde  $\epsilon$  é escolhido uniformemente em  $[-d, d]$ ), ter um comportamento assintótico diferente de  $x$ , isto é, convergir para um outro atrator. A essa probabilidade se dá o nome fração incerta de condições iniciais  $p(d)$  [22]. A fração incerta pode ser entendida como uma medida da incerteza quanto ao comportamento assintótico de uma órbita próxima do atrator em função de uma incerteza  $d$  na condição inicial.

Mais formalmente, seja  $\ell_0$  uma distância fixa ao subespaço  $V$  que contém o atrator caótico  $\mathcal{A}$  de Milnor, e seja  $v_\perp$  um vetor unitário perpendicular a esse subespaço. Definimos uma variedade paralela ao atrator, distando  $\ell_0$  dele, da seguinte forma

$$\Pi(\ell_0, v_\perp) = \{y + \ell_0 v_\perp \mid y \in \mathcal{A}\}. \quad (2.31)$$

Tomando  $x \in \Pi(\ell_0, v_\perp)$ , seja  $P(x, \ell_0, v_\perp, d)$  a probabilidade de um ponto  $q \in \Pi$  que dista  $\epsilon$  de  $x$ , com  $\epsilon$  uniformemente distribuído em  $[-d, d]$ , convergir para um atrator diferente

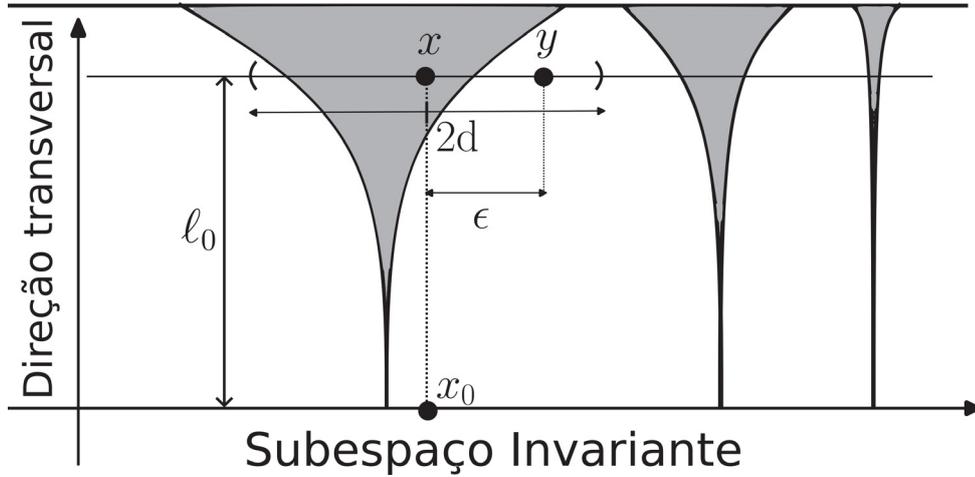


Figura 5 – Diagrama mostrando as variáveis para o cálculo de  $p(d)$  numa bacia crivada.

do de  $x$ . Definimos a fração incerta  $p(d)$  como sendo o valor médio de  $P(x, \ell_0, v_\perp, d)$  sobre a variável  $x$  (de acordo com a medida natural do atrator) e  $v_\perp$  (uniformemente distribuído numa esfera unitária). A lei de potência que se verifica em experimentos numéricos, para valores pequenos de  $\ell_0$  e  $d$ , é da forma [29, 23, 18]

$$p(d) \sim d^\alpha. \quad (2.32)$$

Na prática, se utiliza do seguinte procedimento para calcular aproximadamente  $p(d)$  em experimentos numéricos [23]:

- Calcula-se numericamente pontos do atrator de Milnor no subespaço invariante.
- Escolhe-se pontos  $x_0$  nesse atrator, de acordo com a medida natural, e vetores  $v_\perp$  unitários aleatoriamente.
- Para cada ponto  $x_0$  escolhido, toma-se  $x = x_0 + \ell_0 v_\perp$  e escolhe-se um segundo ponto  $y$  que dista  $\epsilon$  de  $x$  e  $\ell_0$  de  $V$ , onde  $\epsilon$  é escolhido uniformemente em  $[-d, d]$ .
- $p(d)$  é aproximadamente a fração de pontos  $y$  que convergem para um atrator diferente de  $x$ .

O diagrama na Figura 5 ilustra as variáveis envolvidas no cálculo da fração incerta através desse processo. Os pontos em cinza mostram a bacia do segundo atrator, enquanto pontos em branco convergem para o atrator no subespaço invariante. Nesse diagrama,  $x$  é um ponto  $d$  incerto para  $\ell_0$ , tendo em vista que ele pertence a uma bacia diferente de  $y$ . Repetindo esse cálculo para uma grande quantidade de pontos  $x$  e calculando a fração deles que são incertos, obtém-se  $p(d)$ .

## 2.2.2 Bifurcação blowout

Uma das condições para a existência de bacias crivadas é o atrator no subespaço invariante ser transversalmente estável. Desse modo, ao se variar os parâmetros de um sistema, ocorre uma bifurcação quando o expoente de Lyapunov transversal  $\lambda_{\perp}$  associado à órbita caótica se anula, a chamada bifurcação blowout [33, 25]. Quando o atrator passa de transversalmente estável para instável, as órbitas deixam de ser atraídas para  $\mathcal{A}$  e a bacia crivada é destruída.

Em geral, as bacias de atração se tornam mais complicadas quando o sistema está perto de uma bifurcação blowout, com o expoente  $\alpha$  tendendo a zero [23]. Isso indica que, na vizinhança do atrator, a fração de pontos  $\epsilon$  incertos é quase independente de  $\epsilon$ , de modo que uma melhor precisão na condição inicial reflete muito pouco numa melhor precisão quanto ao comportamento assintótico da órbita.

Próximo dessas bifurcações, os expoentes de Lyapunov em tempo finito oscilam ao redor de zero e existem regiões do atrator que são localmente atrativas e repulsivas transversalmente [25]. Isso pode ser entendido estudando a distribuição  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_{\perp}(T))$  de expoentes de Lyapunov em tempo finito  $T$ . No limite  $T \rightarrow \infty$ , o valor médio de  $\mathcal{F}$  se aproxima de  $\lambda_{\perp}$

$$\langle \tilde{\lambda}_{\perp} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_{\perp} \mathcal{F}(\tilde{\lambda}_{\perp}(T)) d\tilde{\lambda}_{\perp} \rightarrow \lambda_{\perp}, \quad (T \rightarrow \infty). \quad (2.33)$$

Logo, para  $\lambda_{\perp} = 0$ , existirão expoentes transversais em tempo finito positivos e negativos.

Define-se a fração de expoentes positivos em tempo finito,  $F(T)$ , como:

$$F(T) = \int_0^{\infty} \mathcal{F}(\tilde{\lambda}_{\perp}(T)) d\tilde{\lambda}_{\perp}(T). \quad (2.34)$$

Se  $F$  for diferente de 0 e 1, então coexistem regiões localmente atrativas e repulsivas no atrator. Próximo de bifurcações blowout e para  $T \rightarrow \infty$ , a distribuição  $\mathcal{F}$  se aproxima de uma gaussiana centrada em  $\lambda_{\perp}$  [22], de maneira que no ponto crítico, devido à simetria da função gaussiana, se espera  $F(T) = 0,5$ . Nesse caso, metade das órbitas finitas de tamanho  $T$  são transversalmente estáveis e metade transversalmente instáveis.

As flutuações dos expoentes de Lyapunov transversais ao redor de zero também estão relacionadas com a ideia de variabilidade de dimensão instável e, portanto, com uma quebra de hiperbolicidade [74]. Se o conjunto de órbitas periódicas for denso no atrator, a presença dessas regiões repulsivas e atrativas indica que coexistirão órbitas periódicas transversalmente instáveis e estáveis imersas no atrator caótico. Em particular, quando  $F = 0,5$ , se espera que haja uma máxima variabilidade. Esses conceitos serão explorados em mais detalhes na Seção 2.5.

O comportamento das órbitas logo após a bifurcação, quando  $\mathcal{A}$  se torna transversalmente instável, varia dependendo do sistema. Se houver outros atratores que permanecem

estáveis, todas as órbitas podem passar por um transiente e eventualmente convergem para eles [24, 25]. Se todos os atratores do sistema forem crivados e perderem estabilidade transversal ao mesmo tempo, o que pode ocorrer por efeito de simetria em sistemas acoplados [70], as órbitas podem oscilar indefinidamente entre o que antes eram os dois atratores.

Devido a essa maior complexidade da bacia de atração próximo ao ponto crítico, é possível aproximar a dinâmica transversal por um modelo estocástico, consistindo de uma caminhada aleatória enviesada com uma barreira refletora, o qual será discutido a seguir.

### 2.2.3 Modelo estocástico OAKSY

No trabalho [29], Ott, Alexander, Kai, Sommerer e Yorke sugerem uma maneira de relacionar a dinâmica transversal próximo de bifurcações blowout com propriedades da distribuição dos expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito. Eles propõem que a dinâmica para o logaritmo da distância ao subespaço invariante pode ser aproximada por um modelo estocástico, definido por uma caminhada aleatória enviesada no limite da aproximação de difusão. Chamaremos esse modelo de modelo OAKSY. Nesta seção serão apresentadas as ideias centrais do modelo e os principais resultados que temos interesse em verificar.

Para entender o processo estocástico proposto no artigo, parte-se de um mapa bidimensional  $(x_{m+1}, y_{m+1}) = \mathcal{G}(x_m, y_m)$ , não-invertível, dado por

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= \begin{cases} 1/\phi x_m & \text{se } x_m < \phi, \\ 1/\beta (x_m - \phi) & \text{se } x_m > \phi, \end{cases} \\ y_{m+1} &= \begin{cases} \gamma y_m & \text{se } x_m < \phi \text{ e } y_m \leq 1, \\ \omega y_m & \text{se } x_m > \phi \text{ e } y_m \leq 1, \\ \text{diverge} & \text{se } y_m > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde  $x_m \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\beta = 1 - \phi$ ,  $0 < \omega < 1$  e  $\gamma > 1$ .

Esse sistema apresenta uma bacia crivada para o atrator caótico no subespaço invariante  $I = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid y = 0\}$ , supondo que ele seja transversalmente estável, através do seguinte processo: a dinâmica para a componente  $x$  é caótica, independente de  $y$ , e com medida natural uniforme. A dinâmica em  $y$  é multiplicativa e depende somente se  $x$  é maior ou menor  $\phi$ , resultando numa dinâmica transversal a  $I$  que é, respectivamente, atrativa ou repulsiva. Além disso, se  $y > 1$ , a órbita diverge para outro atrator, que supomos ser o infinito.

O mapa 2.35 apresenta crivamento para o conjunto  $I$ , uma vez que órbitas são atraídas ou repelidas de  $y = 0$  independentemente da distância ao subespaço. Desse modo,

órbitas que comecem tão próximas de  $I$  quanto se queira podem ser repelidas por tempos arbitrariamente longos e eventualmente divergir quando  $y > 1$ ; isso ocorre ao escolher uma condição inicial em que a componente  $x$  fique tempo suficientemente longo na região  $x < \phi$ , o que sempre é possível. Ao mesmo tempo, o atrator é transversalmente estável, o que garante que também haverá conjuntos de volume positivo atraídos para  $I$ .

A dinâmica transversal pode ser tratada como uma caminhada aleatória enviesada ao considerar a variável  $\bar{y} = -\log(y)$ . Como o mapa para  $y$  é multiplicativo, a dinâmica para  $\bar{y}$  é aditiva. Além disso, o valor a ser adicionado depende somente se  $x$  (que tem medida uniforme) é maior ou menor que  $\phi$ . Desse modo, se  $x$  for escolhido aleatoriamente, a variável  $\bar{y}$  se comporta como uma caminhada aleatória enviesada, seguindo o processo:

$$\bar{y}_{m+1} = \begin{cases} \bar{y}_m - \bar{\gamma} & \text{com probabilidade } \phi, \\ \bar{y}_m + \bar{\omega} & \text{com probabilidade } \beta, \end{cases} \quad (2.36)$$

onde  $\bar{\omega} = -\log(\omega)$  e  $\bar{\gamma} = \log(\gamma)$ . A caminhada apresenta também uma barreira que absorve órbitas em  $y = 1$  ou  $\bar{y} = 0$ . Qualquer órbita que chegue na barreira é absorvida devido à divergência para  $y > 1$  no mapa 2.35.

Dado um segmento de órbita da variável  $x$ ,  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ , o expoente de Lyapunov transversal (Equação 2.21) em tempo finito é dado por

$$\tilde{\lambda}_\perp(x_0, m) = \frac{m_\phi}{m} \bar{\gamma} - \frac{m_\beta}{m} \bar{\omega}, \quad (2.37)$$

onde  $m_\phi$  é o número de pontos do segmento de órbita na região  $[0, \phi]$  e  $m_\beta$  o número em  $(\phi, 1]$ . Como a medida natural em  $x$  é uniforme, no limite  $m \rightarrow \infty$  a expressão acima é, para quase todo  $x_0$ ,

$$\lambda_\perp = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_\perp(x_0, m) = \phi \bar{\gamma} - \beta \bar{\omega}. \quad (2.38)$$

Essa expressão representa o expoente de Lyapunov transversal à  $I$ . Há, portanto, uma bifurcação blowout quando  $\bar{\gamma} = \bar{\omega} \beta / \phi$ .

O propósito dessa descrição estocástica é que, próximo da bifurcação blowout, quando  $|\lambda_\perp| \ll 1$  e para  $m \gg 1$ , a caminhada aleatória pode ser aproximada por um processo difusivo com deriva [75, 76]. Definindo a distribuição  $\mathcal{P}(\bar{y}, \bar{y}_0, m)$  para a variável aleatória  $\bar{y}$ , começando em  $\bar{y}_0$ , tem-se que  $\mathcal{P}$  segue a equação de difusão com deriva de Kolmogorov (ou de Fokker-Planck):

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} + \nu \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \bar{y}} = D \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \bar{y}^2}, \quad \mathcal{P}(\bar{y}, \bar{y}_0, 0) = \delta(\bar{y} - \bar{y}_0), \quad (2.39)$$

onde se trata  $m$  como um tempo contínuo. Nessa equação,  $\nu$  representa um fator de deriva e  $D$  um parâmetro de difusão. Para uma caminhada aleatória, pode-se mostrar que  $\nu = \langle \Delta \bar{y} \rangle = -\lambda_\perp$  e  $D = \frac{1}{2} \langle (\Delta \bar{y} - \langle \Delta \bar{y} \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{2} \phi \beta (\bar{\omega} + \bar{\gamma})$  [76], onde  $\Delta \bar{y}$  é o incremento médio em um passo para  $\bar{y}$ .

Se a variável  $x_0$  for aleatória, os expoentes de Lyapunov em tempo finito  $\tilde{\lambda}(x_0, m)$  também seguirão uma determinada distribuição de probabilidade  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp(m))$ . Definindo uma variável aleatória  $Z_i$  da forma:

$$Z_i = \begin{cases} \bar{\gamma} & \text{com probabilidade } \phi, \\ -\bar{\omega} & \text{com probabilidade } \beta, \end{cases} \quad (2.40)$$

tem-se que  $\tilde{\lambda}_\perp(x_0, m)$  é dado por (Equação 2.37)

$$\tilde{\lambda}_\perp(x_0, m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_i. \quad (2.41)$$

Pelo teorema do limite central, os expoentes seguem uma distribuição normal de média  $\tilde{\mu}$  e variância  $\tilde{\sigma}^2$  quando  $m \rightarrow \infty$ ,

$$\tilde{\lambda}_\perp(x_0, m) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2) = \mathcal{N}(-\nu, 2D/m), \quad (2.42)$$

onde  $-\nu$  e  $2D$  são a média e a variância de  $Z_i$ . Assim, pode-se identificar  $\tilde{\mu} = -\nu = \lambda_\perp$  e  $\tilde{\sigma}^2 = 2D/m$ .

Se o modelo OAKSY representar corretamente o comportamento próximo de bifurcações blowout, espera-se que a distribuição dos expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito se aproxime de uma curva normal (conforme comentado na Seção 2.2.2) para tempos grandes. Nesse caso, a dinâmica transversal se comporta como um processo estocástico, de modo que o caráter determinístico para  $\tilde{\lambda}_\perp(x_0, m)$  pode ser desprezado, validando o uso do teorema do limite central.

No regime de validade do modelo OAKSY, os parâmetros  $D$  e  $\nu$  associados a equação de Komogorov 2.39 estão relacionados com a distribuição de expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp(m))$  (conforme a relação 2.42)

$$\begin{aligned} \nu &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \tilde{\lambda}_\perp(m) \rangle, \\ D &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2} \langle (\tilde{\lambda}_\perp(m) - \langle \tilde{\lambda}_\perp(m) \rangle)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pode-se, então, resolver a equação de Komogorov com condições de contorno e aproximações apropriadas para obter analiticamente os expoentes das leis de escala ligadas às bacias crivadas. Isso inclui o expoente  $\eta$ , relacionado com a fração de órbitas que diverge do atrator em função da distância ao atrator (Equação 2.30), e o expoente  $\alpha$ , associado à fração incerta de condições iniciais (Equação 2.32). Os detalhes dos cálculos podem ser encontrados na sexta seção do artigo original [29], e os resultados obtidos pelos autores são:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{-\lambda_{\perp}}{D}, \\ \alpha &= \frac{\lambda_{\perp}^2}{4D\lambda_{\parallel}},\end{aligned}\tag{2.44}$$

onde  $\lambda_{\perp}$  e  $\lambda_{\parallel}$  são, respectivamente, os expoentes de Lyapunov transversal e paralelo ao subespaço invariante onde se encontra o atrator crivado. Esses resultados, munidos da Equação 2.43, podem ser testados em qualquer sistema com bacia crivada, e, apesar de terem sido obtidos através do mapa 2.35, eles continuam aproximadamente válidos em outros casos [30, 70]. Logo, através dessas relações, podemos verificar quão bem o modelo prevê a dinâmica transversal em sistemas com bacias crivadas próximo de pontos críticos.

Outra análise feita por Ott e seus colaboradores nesse trabalho está relacionada com como perturbações afetam órbitas num atrator com bacia crivada. Embora o atrator seja invariante pela dinâmica, o fato de que pontos arbitrariamente próximos dele possam divergir implica que perturbações de qualquer amplitude numa órbita inicialmente restrita ao atrator crivado resultam, eventualmente, na divergência dessa órbita para outro atrator.

Considere que em cada iteração do mapa 2.35 há uma perturbação  $\xi\hat{\mathbf{v}}$ , de direção escolhida uniformemente no círculo unitário e de amplitude  $\xi$  escolhida uniformemente no intervalo  $[0, A]$ . O sistema perturbado é estocástico e obtido por:

$$(x_{m+1}, y_{m+1}) = \mathcal{G}(x_m, y_m) + \xi\hat{\mathbf{v}}.\tag{2.45}$$

Dado um grande número de trajetórias iniciadas no atrator de bacia crivada, em pontos  $(x_0, 0)$ , Ott *et al.* [29] mostraram que, para o sistema perturbado 2.45, o número de órbitas  $N(A, m)$  que não divergem para o atrator no infinito (ou seja, que não alcançam  $y = 1$ ) em  $m$  iterações decresce exponencialmente com  $m$ ,

$$N(A, m) \sim e^{-m/\langle\tau\rangle},\tag{2.46}$$

com um tempo característico  $\langle\tau\rangle$ . Além disso, o tempo característico segue uma lei de potência quanto à sua dependência em  $A$ , da forma

$$\langle\tau\rangle \sim \frac{D}{\nu^2} A^{-\eta'},\tag{2.47}$$

onde  $\eta'$  é solução de uma equação transcendental. Em particular, quando o termo  $C = \eta A^{\eta} \log\left(\frac{1}{A}\right) \ll 1$ , então  $\eta' \approx \eta$ .

Um dos objetivos deste trabalho é estudar se essas relações obtidas pelo modelo estocástico OAKSY são propriedades gerais de bacias crivadas e, portanto, se são válidas em outros sistemas. Queremos, especialmente, verificar se os resultados podem ser estendidos a sistemas contínuos de maiores dimensões. Ressalta-se que as leis de escala obtidas por

meio do modelo não dependem da estrutura global de atratores do sistema, pois utilizam apenas propriedades do atrator com bacia crivada. Dessa maneira, o cálculo das leis de escala através das equações 2.44, se válido em sistemas de maiores dimensões, apresentaria grande vantagem em relação ao cálculo direto de  $P^*(\ell)$  e  $p(d)$ , pois permitiria entender propriedades da estrutura da bacia (como dimensão fractal) sem a necessidade de conhecer detalhadamente todos os outros atratores do sistema.

## 2.3 SINCRONIZAÇÃO DE CAOS

É possível construir sistemas com subespaços invariantes que podem ter bacias crivadas ao acoplar dois sistemas que isoladamente possuem um atrator caótico. Isso ocorre devido ao fenômeno de sincronização de caos [77], onde, ao acoplar dois sistemas caóticos, eles sincronizam e passam a exibir exatamente (ou parcialmente) o mesmo comportamento.

Para ilustrar isso, considere um mapa  $x_{m+1} = f(x_m)$ ,  $x_m \in \mathbb{R}^n$ , que possui um atrator caótico  $\mathcal{A}$ . A partir desse mapa, constrói-se o sistema definido em  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= f(x_m) + g(x_m, y_m), \\ y_{m+1} &= f(y_m) + g(y_m, x_m), \end{aligned} \quad (2.48)$$

dado pelo acoplamento simétrico de dois desses mapas através de uma função de acoplamento  $g(x, y)$ , tal que  $g(x, x) = 0$  e  $g(x, y) = -g(y, x)$ . Assim, há um subespaço invariante  $\mathcal{M}_S$ , chamado variedade de sincronização,

$$\mathcal{M}_S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x = y \}. \quad (2.49)$$

Em  $\mathcal{M}_S$  existe um atrator caótico dado pelo conjunto  $\mathcal{A}$  do mapa desacoplado. Fazendo a mudança de coordenadas  $X = 1/2(y + x)$  e  $Y = 1/2(y - x)$ , pode-se escrever o sistema numa forma mais conveniente:

$$\begin{aligned} X_{m+1} &= 1/2[f(X_m + Y_m) + f(X_m - Y_m)], \\ Y_{m+1} &= 1/2[f(X_m + Y_m) - f(X_m - Y_m)] + g(X_m + Y_m, X_m - Y_m), \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde  $M_S$  fica definido por  $Y = 0$  e o termo de acoplamento só aparece na dinâmica de  $Y$ . Desse modo, a dinâmica na variedade de sincronização é separada em um termo paralelo, dado por  $X_m$ , e outro transversal, dado por  $Y_m$ .

A dinâmica restrita à variedade de sincronização é dada por  $(X_{m+1}, Y_{m+1}) = (f(X_m), 0)$  e perturbações transversais são governadas pela função

$$J_y(X_m) := (D_{Y_m} Y_{m+1})(X_m, 0) = (Df)(X_m) + (D_{Y_m} g)(X_m, X_m). \quad (2.51)$$

Supondo que exista somente um atrator nesse subespaço, a estabilidade de  $M_S$  é determinada pela estabilidade transversal da órbita caótica do atrator. De acordo com

o discutido na seção 2.1.1, os expoentes de Lyapunov em tempo finito  $m$ ,  $\lambda_i(X_0, m)$ , associados às direções transversais são obtidos pelos valores singulares  $\sigma_i$  de

$$J_y^m(X_0) := J_y(X_{m-1})J_y(X_{m-2}) \dots J_y(X_2)J_y(X_1)J_y(X_0) \quad (2.52)$$

através da Equação 2.15. O expoente de Lyapunov transversal  $\lambda_\perp$  será o maior dentre os  $n$  expoentes no limite  $m \rightarrow \infty$ .

Desse modo, constrói-se um sistema que pode apresentar bacias crivadas, dado que os outros requisitos discutidos anteriormente sejam cumpridos, isto é, que o atrator  $\mathcal{A}$  seja transversalmente estável ( $\lambda_\perp < 0$ ), que existam órbitas periódicas transversalmente instáveis imersas no atrator e que exista outro atrator no espaço de fase  $\mathbb{R}^{2n}$ . O raciocínio para sistemas contínuos é análogo.

### 2.3.1 Exemplo de sincronização de caos

Considere o acoplamento de dois mapas logísticos com  $r = 4$  (mapa de Ulam) num espaço de fase toroidal

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= 4x(1-x) + \varepsilon(y_m^3 - x_m^3) \pmod{1}, \\ y_{m+1} &= 4y(1-y) + \varepsilon(x_m^3 - y_m^3) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde identifica-se  $f(x) = 4x(1-x)$  e  $g(x, y) = \varepsilon(y^3 - x^3)$ .

Fazendo a mudança de coordenadas  $X = 1/2(y+x)$  e  $Y = 1/2(y-x)$ , tem-se

$$\begin{aligned} X_{m+1} &= 1/2[f(X_m + Y_m) + f(X_m - Y_m)] \pmod{1}, \\ Y_{m+1} &= 1/2[f(X_m + Y_m) - f(X_m - Y_m)] + \varepsilon[(X - Y)^3 - (X + Y)^3] \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

A variedade de sincronização  $\mathcal{M}_S$  fica definida por  $Y = 0$  ( $x = y$ ) e a jacobiana para uma órbita em  $M_S$  é

$$J(X, 0) = \begin{bmatrix} f'(X) & 0 \\ 0 & f'(X) - 6\varepsilon X^2 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

onde se identifica  $J_y(X) = f'(X) + \varepsilon = 4(1-2X) - 6\varepsilon X^2$ . Devido a essa escolha de coordenadas, a matriz acima é bloco diagonal e está dividida em um termo associado à direção paralela  $f'(X)$ , com autovetor  $(1, 0)$ , e um termo  $J_y$ , associado à direção perpendicular, com autovetor  $(0, 1)$ .

Nesse caso,  $J_y$  é um escalar, de modo que não é necessário calcular os valores singulares. Esse escalar pode ser visto como o autovalor de uma matriz unidimensional, com o valor singular (que sempre é positivo) sendo  $|J_y|$ . A expressão 2.52 é obtida por

$$J^m(X_0) = \prod_{i=0}^{m-1} J_y(X_i) \quad (2.56)$$

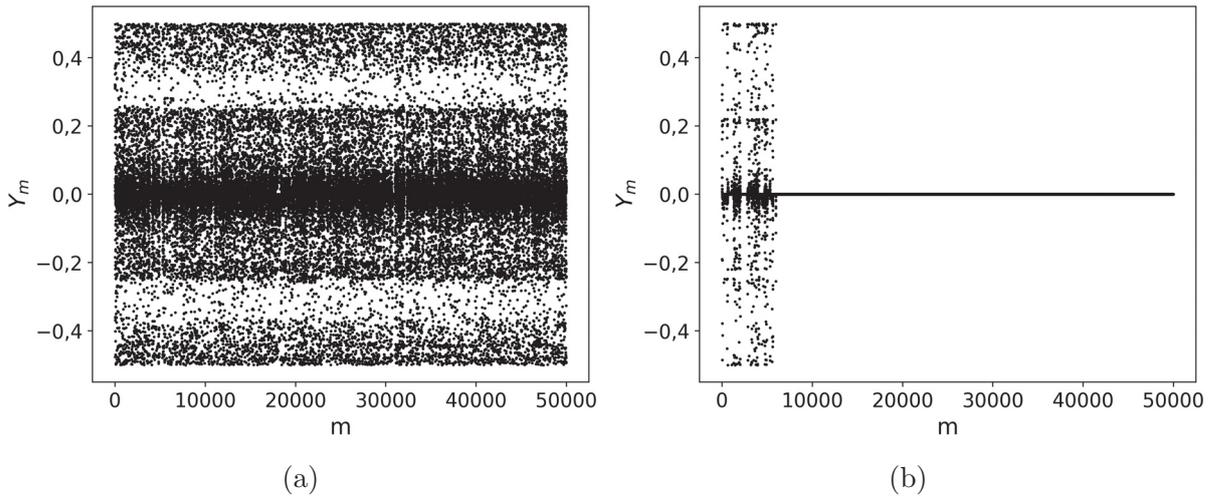


Figura 6 –  $Y_m$  para o sistema 2.53 de dois mapas logísticos acoplados. (a) tem  $\varepsilon = -0,75$ , enquanto (b) apresenta  $\varepsilon = -0,71$ .

e o valor singular  $\sigma_i$  é o módulo da expressão acima.

A dinâmica na variedade de sincronização é dada pelo mapa de Ulam,  $X_{m+1} = 4X_m(1 - X_m)$ , que tem medida natural analítica  $\rho(X) = [\pi\sqrt{X(1-X)}]^{-1}$  [78]. Assim, o expoente de Lyapunov transversal  $\lambda_\perp$  pode ser escrito, para quase toda condição inicial  $X_0$ , tomando o logaritmo do módulo de 2.56, como

$$\lambda_\perp = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \log |J_y(X_i)| = \int_0^1 \frac{\log (|4(1-2X) - 6\varepsilon X^2|)}{\pi\sqrt{X(1-X)}} dX, \quad (2.57)$$

onde foi utilizado o teorema ergódico de Birkhoff [79] para a segunda igualdade.

Calculando a integral acima numericamente, observa-se que  $\lambda_\perp < 0$  para  $\varepsilon$  num intervalo aproximado  $[-0,72; -0,54]$ . Nesses casos poderá ocorrer sincronização de caos, com  $Y_m \rightarrow 0$  para  $m \rightarrow \infty$ . A Figura 6 mostra dois exemplos do sistema 2.54, um quando  $\mathcal{M}_S$  é estável, e ocorre sincronização de caos ( $\varepsilon = -0,71$ ), e outro quando é instável transversalmente, e o sistema não sincroniza ( $\varepsilon = -0,75$ ).

A sincronização de caos e a presença de bacias crivadas para o acoplamento linear de dois mapas logísticos foi estudada detalhadamente na Referência [24].

## 2.4 TEORIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

Desde o trabalho pioneiro de Lorenz [11], percebeu-se que o conjunto de órbitas periódicas imersas num sistema caótico desempenha um papel importante na dinâmica. Por exemplo, em sistemas hamiltonianos e no contexto de teoria de caos quântico, o conjunto de órbitas periódicas instáveis está relacionado com a distribuição dos níveis de energia do sistema [49, 50, 51]. Em sistemas dissipativos, por sua vez, a relação entre a

órbita caótica e órbitas periódicas num atrator pode ser entendida tanto de um ponto de vista de teoria da medida, em relação à medida natural do atrator, quanto do ponto de vista topológico, através de dinâmica simbólica [47, 53, 80].

Um ponto  $x_0$  de um sistema dinâmico discreto  $f(x_m) = x_{m+1}$  é dito ponto periódico de período  $p$  se

$$x_p = f^p(x_0) = x_0, \quad (2.58)$$

e o conjunto  $\Gamma_p = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  é chamado órbita periódica de período  $p$ .  $\Gamma_p$ , por ser invariante, representa também a órbita que se repete indefinidamente ao se escolher  $x_i$  como condição inicial para o sistema.

De modo análogo, para um sistema dinâmico contínuo autônomo em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x} = G(x)$ , um ponto  $x(t)$  do fluxo  $\Phi(x_0, t)$  é dito periódico de período  $T \in \mathbb{R}$  se

$$x(t) = \Phi(x_0, t) = \Phi(x_0, t + T) = x(t + T). \quad (2.59)$$

O conjunto invariante pelo fluxo

$$\Gamma_T = \{ \Phi(x_0, t') \in \mathbb{R}^n \mid t' \in [t, t + T] \} \quad (2.60)$$

é chamado de órbita periódica de período  $T$ , que está associada ao ponto periódico  $x(t)$ .

A estabilidade de órbitas periódicas pode ser calculada através dos expoentes de Lyapunov. Nesse caso, considera-se nas Equações 2.17, 2.24 ou 2.29, um ponto inicial pertencente a essa órbita. Expoentes negativos indicam que a órbita é estável nas direções correspondentes, enquanto expoentes positivos indicam instabilidade.

Esses conjuntos invariantes permitem calcular várias propriedades relacionadas à dinâmica em atratores caóticos. O conjunto de órbitas periódicas, quando denso num atrator (ou repulsor) caótico, pode ser usado para estudar propriedades como, por exemplo, dimensão [81], entropia topológica [82] ou estabilidade transversal [27]. Essas quantidades são escritas como uma expansão sobre o conjunto de pontos periódicos imersos no atrator [49, 83]. Para sistemas hiperbólicos [43], essa abordagem é bem estabelecida — uma discussão detalhada sobre o assunto é apresentada na Referência [53].

Para um atrator caótico hiperbólico  $\mathcal{A}$  de um mapa  $x_{m+1} = f(x_m)$ , pode-se obter uma expressão que aproxima a medida natural  $\mu_0$  através de medidas definidas em órbitas periódicas  $\mu_p$ . Seja  $\Gamma_p(B)$  o conjunto de todos pontos periódicos de período  $p$  imersos num subconjunto  $B$  do atrator. Então [49, 84]

$$\mu_0(B) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{x_i \in \Gamma_p(B)} \mu_p(x_i), \quad (2.61)$$

com

$$\mu_p(x_i) = \frac{(L_1(x_i))^{-1}}{\sum_{i=1}^{N_p} (L_1(x_i))^{-1}}, \quad (2.62)$$

onde  $x_i$  é um ponto periódico de período  $p$  e  $L_1(x_i)$  a magnitude do maior autovalor instável de  $Df^p(x_i)$ .

Embora essa fórmula para a medida natural seja válida para atratores hiperbólicos, vários estudos mostram que ela também funciona, ao menos como uma aproximação, para atratores não-hiperbólicos [30, 49, 27, 54, 58].

Assim, é possível utilizar as órbitas periódicas para calcular qualquer observável definido no atrator através do valor desse observável nos pontos periódicos. Em particular, pode-se estimar o expoente de Lyapunov transversal, definido na seção 2.1.2. Esse expoente é obtido por [58]

$$\lambda_{\perp} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{x_i \in \Gamma_p(\mathcal{A})} \lambda_{\perp}(x_i) \mu_p(x_i), \quad (2.63)$$

onde  $\lambda_{\perp}(x_i)$  é o expoente de Lyapunov transversal para a órbita periódica associada ao ponto  $x_i$  e a soma se dá sobre os pontos periódicos de período  $p$  no atrator  $\mathcal{A}$ .

Através dessa expressão, caracteriza-se a ocorrência de uma bifurcação blowout somente utilizando os conjuntos  $\Gamma_p$ , observando quando a Equação 2.63 se anula. De um ponto de vista teórico, essa descrição é interessante por empregar apenas quantidades fundamentais [27], além de evitar o uso da órbita caótica e eventuais problemas de sombreamento na caracterização da bifurcação. O conjunto de órbitas periódicas tem ainda relação com a intensidade da variabilidade de dimensão instável, conforme será abordado na próxima seção.

## 2.5 VARIABILIDADE DE DIMENSÃO INSTÁVEL E SOMBREAMENTO DE TRAJETÓRIAS

Simulações numéricas de sistemas dinâmicos sempre introduzem erros nos resultados. Esses erros decorrem tanto da necessidade de truncamento dos números reais — chamados erros de truncamento ou arredondamento — quanto da discretização do tempo contínuo na integração de equações diferenciais [19]. Assim, ao simular uma trajetória numericamente, na realidade obtém-se uma órbita que é sucessivamente, ponto a ponto, perturbada em relação a uma órbita real. A esse conjunto de pontos perturbados dá-se o nome pseudo-órbita ou pseudo-trajetória [14].

Em sistemas caóticos, onde há sensibilidade em relação às condições iniciais, essas pseudo-trajetórias podem eventualmente não representar o comportamento de órbitas reais do sistema [45]. Para compreender quando é possível assumir que uma pseudo-trajetória de fato é representativa num sistema caótico, se utiliza o conceito de sombreamento de órbitas. Uma pseudo-órbita, dada por um conjunto de pontos  $\{\tilde{s}_i\}$ ,  $0 \leq i \leq t_s$ , é dita  $\alpha$  sombreada por uma órbita real  $\{s_i\}$ , por um tempo  $t_s$ , se  $|s_i - \tilde{s}_i| < \alpha$  para todo  $0 \leq i \leq t_s$  [42].

Para sistemas hiperbólicos [43], onde se pode separar o espaço tangente continuamente em uma variedade instável e estável sem pontos de tangência, pode-se mostrar que toda pseudo-órbita obtida com suficiente precisão é  $\alpha$  sombreada por uma órbita real, para qualquer  $\alpha > 0$  e por tempos arbitrariamente grandes, o chamado lema de sombreamento de Anosov [14, 85]. Isso significa que  $t_s$  é infinito para todo  $\alpha$  e qualquer órbita numérica suficientemente precisa é representativa de uma órbita real do sistema por tempos arbitrariamente grandes.

No entanto, sistemas hiperbólicos são bastante restritos e a maioria dos sistemas de interesse físico são não-hiperbólicos, podendo apresentar variedades de centro, crises ou bifurcações em geral que invalidam a hipótese de hiperbolicidade [43]. Quebras de hiperbolicidade em crises, por exemplo, podem ocorrer devido a tangências homoclínicas [55]. Nesse caso, o tempo de sombreamento é esperado ser finito, mas ainda pode ser relativamente grande [74, 45].

Outra possibilidade de quebra de hiperbolicidade é a chamada variabilidade de dimensão instável (VDI) [41]. Nesse caso, o sistema possui órbitas periódicas com diferentes dimensões para a variedade instável, de modo que não existe uma decomposição contínua do espaço tangente. Isso resulta em uma quebra mais severa de hiperbolicidade, e o tempo de sombreamento pode ser bastante pequeno, especialmente próximo de bifurcações blowout [59, 46, 44]. Essa propriedade pode ser explicada através de um modelo estocástico similar ao modelo OAKSY, onde o tempo médio de sombreamento segue uma lei de escala da forma  $\langle t_s \rangle \sim \tilde{\delta}^{-h}$ , em que  $\tilde{\delta}$  é a magnitude do erro de um passo associado à pseudo-órbita e  $h$  é o chamado expoente de hiperbolicidade [42, 86]. Próximo de bifurcações blowout, esse expoente é obtido pela equação

$$h = \frac{2|\tilde{\mu}|}{\tilde{\sigma}^2}, \quad (2.64)$$

onde  $\tilde{\mu}$  é o valor médio e  $\tilde{\sigma}^2$  a variância da distribuição dos expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito mais próximos de zero. Como  $\tilde{\mu} \approx 0$  nos pontos críticos,  $h$  tende a ser pequeno e a pseudo-órbita pode deixar de ser sombreada em poucas iterações. Vários exemplos de uso dessa fórmula podem ser encontrados na Referência [59].

Quando não se tem acesso direto às órbitas periódicas do sistema, é possível identificar VDI através do estudo da distribuição dos expoentes de Lyapunov em tempo finito [87]. Conforme a Equação 2.34, existem regiões localmente atrativas e repulsivas transversalmente se  $1 > F > 0$ . A presença de VDI em bacias crivadas está, portanto, relacionada com as flutuações do expoente de Lyapunov transversal em torno de zero [74]. Essa relação também pode ser entendida sob a perspectiva da teoria de órbitas periódicas. Pela Equação 2.63, é possível expandir o expoente de Lyapunov transversal num atrator em função dos expoentes associados às órbitas periódicas. Logo, se o expoente em tempo finito flutua em torno de zero, deve haver órbitas periódicas transversalmente estáveis e instáveis no sistema, indicando VDI.

Tendo em vista que o conjunto de órbitas periódicas determina a medida natural do atrator e que a estabilidade transversal dele pode ser vista como um observável do sistema, passível de ser calculada a partir da Equação 2.63, existem também maneiras de medir a intensidade de VDI utilizando o conjunto invariante de órbitas periódicas. Para um sistema em que o atrator está contido num subespaço vetorial, com direções transversais que podem ser estáveis ou instáveis, pode-se mensurar a VDI através de um parâmetro chamado medida de contraste [57]. Dado um período  $p$ , a medida de contraste  $C_p$  é definida como

$$C_p = \frac{|m_2(p) - m_1(p)|}{m_2(p) + m_1(p)}, \quad (2.65)$$

onde

$$m_1(p) = \sum_{i \in \Gamma_p} \exp(-p\lambda_{\parallel}(i)) \Theta(-\lambda_{\perp}(i)), \quad (2.66)$$

$$m_2(p) = \sum_{i \in \Gamma_p} \exp(-p\lambda_{\parallel}(i)) \Theta(\lambda_{\perp}(i)), \quad (2.67)$$

sendo  $\Theta$  a função degrau de Heaviside e  $\lambda_{\parallel}(j)$  o expoente de Lyapunov paralelo (ao subespaço invariante onde está contido o atrator) associado à órbita periódica  $x_p(j)$ .

A medida de contraste varia entre 0 e 1 e pode ser vista como a diferença entre as contribuições de órbitas periódicas transversalmente estáveis e instáveis para a medida natural do atrator caótico, dada pela Equação 2.61. Se  $C_p = 0$ , então a contribuição de órbitas instáveis e estáveis transversalmente são iguais, e a intensidade de VDI é máxima, enquanto se  $C_p = 1$ , todas as órbitas periódicas são estáveis ou instáveis transversalmente e não há variabilidade. Valores intermediários indicam VDI em diferentes intensidades.

Portanto, espera-se  $C_p \approx 0$  próximo de bifurcações blowout e para valores de  $p$  suficientemente grandes, indicando máxima variabilidade de dimensão. Ao mesmo tempo, conforme discutido na seção 2.2.2, deve-se ter  $F \approx 0,5$ . Essas relações indicariam uma concordância para os resultados obtidos através da órbita caótica, por meio de  $F$ , e das órbitas periódicas, usando  $C_p$ , na identificação de máxima VDI para o atrator crivado.

## 3 SISTEMA DISCRETO ACOPLADO

### 3.1 CONSTRUÇÃO DO SISTEMA

Consideramos inicialmente o seguinte acoplamento geral de dois mapas unidimensionais  $f$  que possuem um atrator caótico no intervalo  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) + \sum_{r=1}^M c_r g(v_n^r - u_n^r), \\ v_{n+1} &= f(v_n) + \sum_{r=1}^M c_r g(u_n^r - v_n^r), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde a função ímpar  $g$  atua como um termo de acoplamento. Esse sistema apresenta um subespaço de sincronização invariante, dado por  $v_n = u_n$ , onde se encontra o atrator caótico de  $f$ . Assim, a primeira condição para a existência de bacias crivadas — a presença de um atrator caótico restrito a um subespaço invariante — é satisfeita.

Para analisar em mais detalhes as condições restantes, vamos simplificar o sistema acima. Tomamos somente a contribuição linear de  $g$ ,  $g(x) = x$ , e apenas as primeiras contribuições ímpares nos termos  $r$ ,  $r = 1$  e  $r = 3$ , com  $M = 3$ . Para facilitar a análise de teoria de órbitas periódicas, fixa-se  $f$  como um mapa da tenda estendido, definido em toda a reta  $\mathbb{R}$ ,

$$f(u) = \begin{cases} 2u & \text{se } u \leq 1/2, \\ 2 - 2u & \text{se } u > 1/2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Desse modo, o sistema que será analisado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) + \varepsilon(v_n - u_n) + \delta(v_n^3 - u_n^3), \\ v_{n+1} &= f(v_n) + \varepsilon(u_n - v_n) + \delta(u_n^3 - v_n^3), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde se identificam os parâmetros de acoplamento  $c_1 = \varepsilon$ ,  $c_2 = 0$  e  $c_3 = \delta$  para a Equação 3.1. Esse mapa pode ser visto como uma generalização para o caso simétrico do mapa estudado na Referência [88]. Apesar dessas simplificações, é esperado que qualitativamente vários dos resultados que serão apresentados sejam análogos para outras funções  $f$  que tenham um atrator caótico no intervalo  $[0, 1]$ , já que nesses outros casos os sistemas também satisfarão as condições para a existência de bacias crivadas. Além disso, como as análises das bacias são feitas na vizinhança do atrator de sincronização, isto é, próximo de  $u_n = v_n$ , termos de maior ordem em  $g$  ou em  $r$  podem ser vistos como perturbações para as bacias do sistema 3.3.

A variedade de sincronização invariante de 3.3 é dada pelo subespaço

$$\mathcal{M} = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = v \}, \quad (3.4)$$

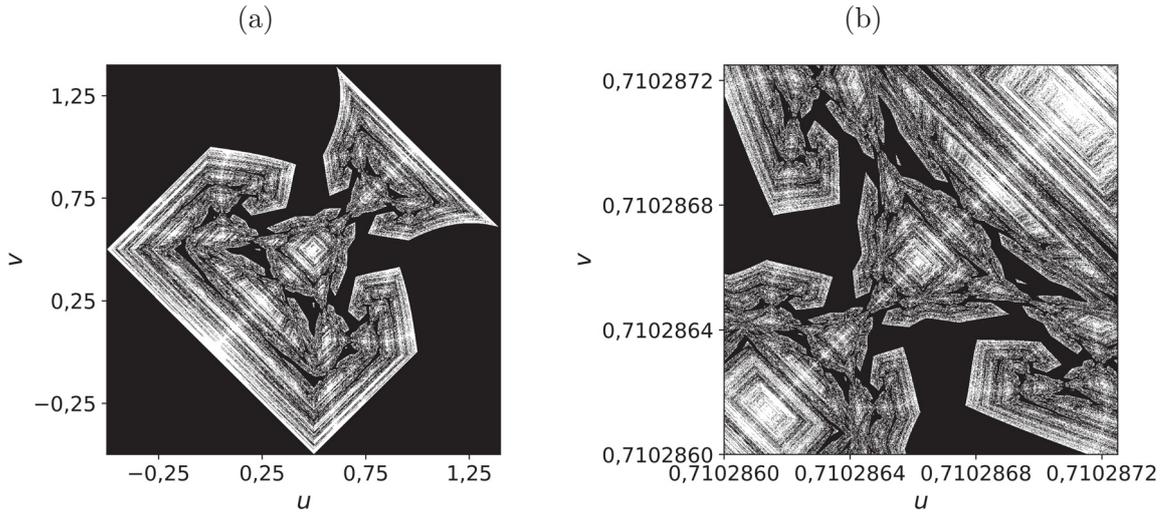


Figura 7 – (a) Bacias de atração para o sistema 3.3 com  $\varepsilon = 0,9$  e  $\delta = -0,4$ . Pontos em branco indicam condições iniciais que convergem para o atrator  $\mathcal{A}$ , enquanto pontos em preto divergem para infinito. (b) Magnificação de uma pequena região de (a).

e a dinâmica restrita a essa variedade depende se  $u$  (ou  $v$ ) está no intervalo  $[0, 1]$  ou fora dele. No primeiro caso, a dinâmica é obtida pelo mapa da tenda clássico (não estendido), que possui um atrator caótico [89]. No segundo caso, a órbita diverge para  $-\infty$ , pois, se  $u_n < 0$ ,  $u_{n+k} = 2^k u_n$  é assintoticamente decrescente e sem cota inferior; se  $u_n > 1$ , então  $u_{n+1} < 0$ , e volta-se ao caso anterior.

Assim, há ao menos dois atratores. O primeiro corresponde ao atrator caótico do mapa da tenda  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ , dado por

$$\mathcal{A} = \{ (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid u = v \}, \quad (3.5)$$

enquanto o segundo atrator é ilimitado, atraindo as condições iniciais que divergem para  $-\infty$ .

Inicialmente observou-se em experimentos numéricos que o sistema parece apresentar bacias crivadas para alguns dos parâmetros de acoplamento. A Figura 7 ilustra um exemplo das bacias de atração para os dois atratores, com  $(\varepsilon, \delta) = (0,9; -0,4)$ . Pontos em branco convergem para  $\mathcal{A}$ , enquanto pontos em preto divergem para  $-\infty$ . A Figura 7b mostra uma magnificação de uma pequena região de (a). Nessa segunda figura é possível observar que mesmo pontos bastante próximos da variedade de sincronização têm probabilidade não nula de pertencerem à bacia do atrator no infinito. Além disso, a bacia de sincronização exibe fronteiras complexas, mesmo com a magnificação, o que é indicativo de fractalidade [22].

Para estudar a estabilidade do atrator  $\mathcal{A}$ , é conveniente fazer a mudança de coordenadas  $x_n = 1/2(v_n + u_n)$  e  $y_n = 1/2(v_n - u_n)$ , de modo que os vetores da base canônica  $\xi_{\parallel} = (1, 0)$  e  $\xi_{\perp} = (0, 1)$  são, respectivamente, paralelos e perpendiculares à

variedade de sincronização  $\mathcal{M}$ . Nessas coordenadas, o atrator  $\mathcal{A}$  é definido por  $y = 0$  e  $1 \geq x \geq 0$ , com a dinâmica no atrator seguindo  $y_n = 0$  e  $x_n = f(x_{n-1}) = u_n$ . A jacobiana  $J(x, y)$  do mapa 3.3, escrita nas variáveis  $(x, y)$  e aplicada em  $y = 0$ , é dada por

$$J(x, 0) = \begin{bmatrix} c(x) & 0 \\ 0 & c(x) - 2(\varepsilon + 3\delta x^2) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde

$$c(x) = f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } u \leq 1/2, \\ -2 & \text{se } u > 1/2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Os vetores  $\xi_{\parallel}$  e  $\xi_{\perp}$  são os autovetores da jacobiana com autovalores  $\sigma_{\parallel} = c(x)$  e  $\sigma_{\perp} = c(x) - 2(\varepsilon + 3\delta x^2)$ , e os expoentes de Lyapunov em tempo finito para uma condição inicial  $x_0 \in [0, 1]$ , conforme a Equação 2.15, são obtidos por

$$\lambda_{\parallel}(x_0, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |\sigma_{\parallel}(x_i)|, \quad (3.8)$$

$$\lambda_{\perp}(x_0, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |\sigma_{\perp}(x_i)|, \quad (3.9)$$

com  $x_i = f^i(x_0)$ . O expoente de Lyapunov em tempo infinito é dado pelo limite  $n \rightarrow \infty$

$$\lambda_j(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j(x_0, n), \quad (3.10)$$

onde  $j$  pode corresponder ao termo paralelo ou perpendicular.

Como na variedade de sincronização a dinâmica é dada pelo mapa da tenda, onde o teorema de Oseledets é válido, para quase toda condição inicial  $x_0$  (de acordo com a medida natural do atrator) o resultado dos expoentes acima é o mesmo. Além disso, a medida natural para o mapa da tenda é uniforme [89, 79], de modo que a Equação 3.10 pode ser escrita em termos da medida natural como:

$$\lambda_j = \int_0^1 \log |\sigma_j(x)| dx. \quad (3.11)$$

Na direção paralela à variedade de sincronização, temos que  $\lambda_{\parallel} = \log(2)$ , pois  $|\sigma_{\parallel}(x_i)| = 2$ . Já na direção transversal ao atrator, a estabilidade é determinada por

$$\lambda_{\perp} = \int_0^1 \log |c(x) - 2(\varepsilon + 3\delta x^2)| dx. \quad (3.12)$$

Para o conjunto  $\mathcal{A}$  ser um atrator em  $\mathbb{R}^2$ , e poder ter uma bacia crivada, ele deve ser transversalmente estável, com  $\lambda_{\perp} < 0$ . A Figura 8 mostra, em preto, uma região no espaço de parâmetros  $(\varepsilon, \delta)$  que satisfaz essa condição. Escolhendo os termos de acoplamento nessa região, o sistema pode apresentar bacias crivadas, como ilustrado na Figura 7. Quando  $\lambda_{\perp} = 0$ , e o sistema perde estabilidade transversal, ocorre uma bifurcação blowout, que por continuidade corresponde à fronteira do conjunto mostrado na Figura 8.

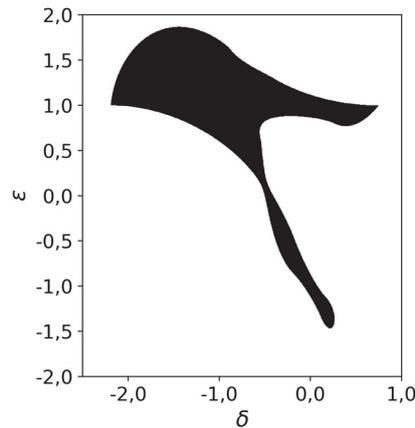


Figura 8 – Região no espaço de parâmetros  $(\varepsilon, \delta)$  na qual o atrator de sincronização  $\mathcal{A}$  é transversalmente estável, com  $\lambda_{\perp} < 0$ .

## 3.2 CARACTERIZAÇÃO DAS BACIAS CRIVADAS

Para verificar a existência de bacias crivadas nesse sistema, pode-se mostrar a validade das duas leis de escala dessas bacias, conforme discutido na Seção 2.2.1. A fração de pontos que divergem do atrator,  $P^*(\ell)$ , em função da distância ao atrator  $\ell$ , é ilustrada em escala logarítmica na Figura 9a para  $\varepsilon = 0,9$  e diferentes valores de  $\delta$ . De maneira análoga, a Figura 9b apresenta os resultados para a fração incerta de condições iniciais,  $p(d)$ , como função do raio de incerteza  $d$ , para  $\varepsilon = 0,9$  e considerando pontos que distam  $\ell_0 = 10^{-2}$  do atrator  $\mathcal{A}$ . Em todos os casos, verifica-se que a bacia de sincronização segue as leis de potência  $P^*(\ell) \sim \ell^{\eta}$  e  $p(d) \sim d^{\alpha}$ .

Observa-se ainda que para  $\delta = 0,66$  e  $\varepsilon = 0,9$ , o valor de  $\eta$  é bastante pequeno, aproximadamente 0,04, indicando uma invariância para a fração de pontos que divergem do atrator em relação à distância ao atrator. De maneira similar, para esses parâmetros de acoplamento,  $\alpha$  também é pequeno, aproximadamente 0,02, o que implica que uma melhora na precisão da condição inicial é praticamente irrelevante para uma melhora na precisão média do comportamento assintótico das órbitas. Isso ocorre pois o sistema está muito próximo de uma bifurcação blowout para esses parâmetros, como será mostrado adiante.

Para estudar em mais detalhes as bacias crivadas e as bifurcações para esse sistema, vamos fixar dois valores de referência para os parâmetros de acoplamento:  $\delta_0 = 0,4$  e  $\varepsilon_0 = 0,9$ . Nas análises a seguir, um dos parâmetros de acoplamento será o de referência, enquanto o outro ficará livre.

A Figura 10 mostra  $\lambda_{\perp}$  em função de um dos parâmetros de acoplamento. Identificamos quatro pontos críticos associados a bifurcações blowout, denominados por  $(\varepsilon_0, \delta_i)$  e  $(\varepsilon_i, \delta_0)$ , onde  $i \in \{1; 2\}$ . Numericamente, encontrando os parâmetros para os quais a Equação 3.11 zera, pode ser determinado que esses pontos são aproximadamente

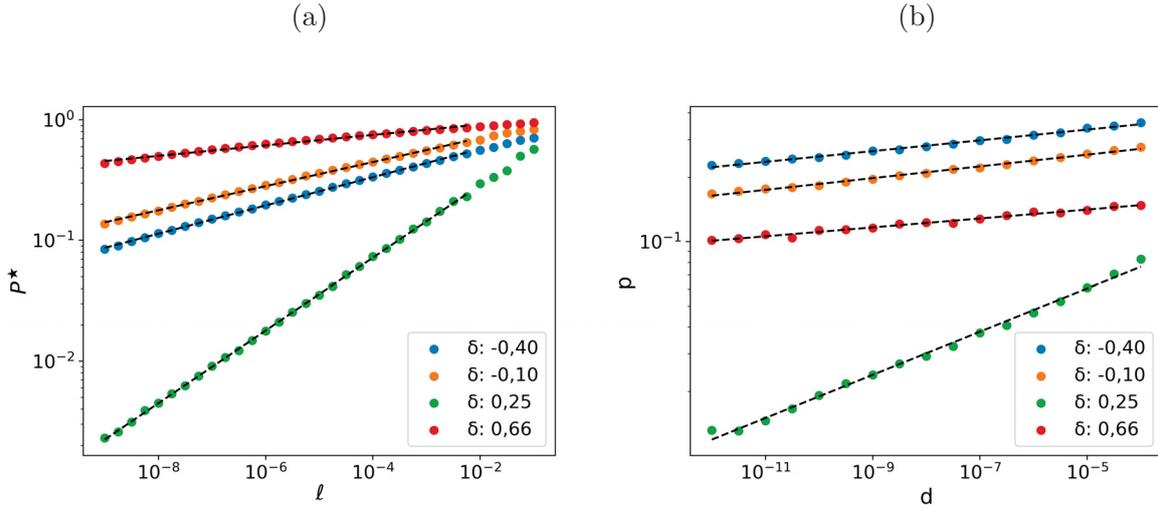


Figura 9 – (a)  $P^*$  como função da distância  $l$  ao atrator para  $\varepsilon = 0,9$ . (b) Fração incerta  $p$  de condições iniciais como função do raio de incerteza  $d$  para condições iniciais que distam  $l_0 = 10^{-2}$  do atrator.

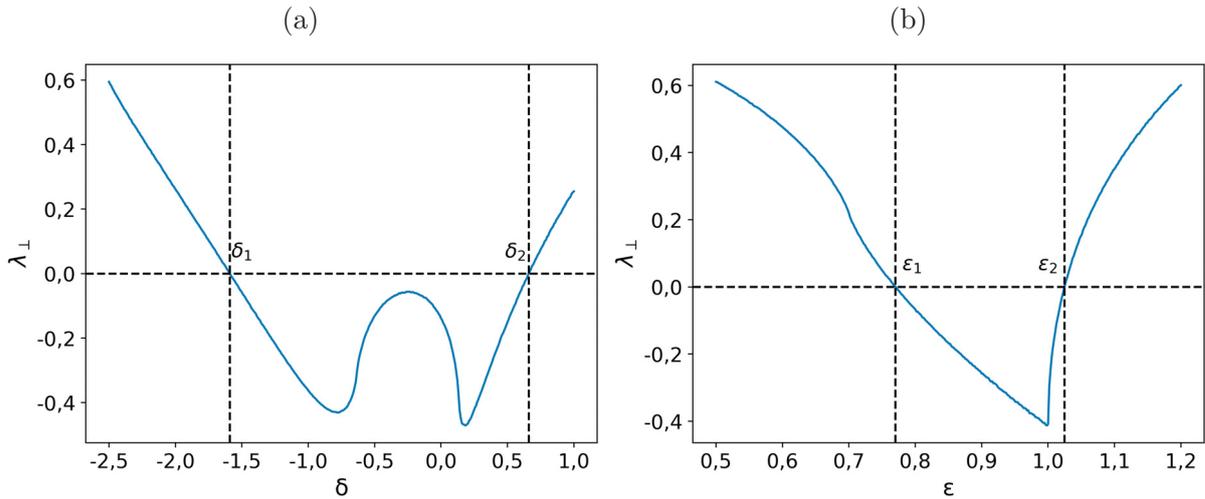


Figura 10 – Expoentes de Lyapunov transversais para o mapa acoplado 3.3 em função dos parâmetros de acoplamento para: (a)  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , (b)  $\delta = \delta_0$ .

$\delta_1 = -1,589\,256\,209$ ,  $\delta_2 = 0,660\,320\,45$ ,  $\varepsilon_1 = 0,770\,281\,70$  e  $\varepsilon_2 = 1,024\,678\,40$ . Essa figura indica que o atrator é transversalmente estável para  $\delta = \delta_0$  e  $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ , ou  $\varepsilon = \varepsilon_0$  com  $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ .

Conforme discutido na Seção 2.2.2, a distribuição de expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito, dados pela Equação 3.9, é um importante indicador de variabilidade de dimensão instável em bacias crivadas. Ela pode ainda ser utilizada junto com o modelo estocástico OAKSY para estimar as leis de escala para a fração de pontos que divergem do atrator,  $P^*(l)$ , e a fração incerta de condições iniciais,  $p(d)$ .

A distribuição de expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito  $T$ ,  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_{\perp}(T))$ ,

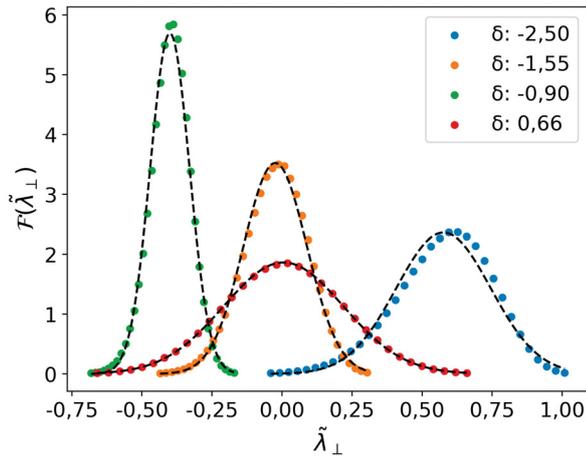


Figura 11 – Distribuição de probabilidade  $\mathcal{F}$  para os expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito  $T = 80$ , com  $\varepsilon = 0,9$ . As curvas em preto são distribuições gaussianas com a mesma média e variância de  $\mathcal{F}$ .

tomando condições iniciais no atrator de acordo com sua medida natural, é mostrada na Figura 11, para  $T = 80$  e  $\varepsilon = 0,9$ . A figura também apresenta, em preto, distribuições normais com a mesma variância e média de  $\mathcal{F}$  para cada  $\delta$ . Nota-se que as distribuições são bem representadas por curvas gaussianas, sendo essa representação melhor quando próximo de uma bifurcação blowout (nessa figura, para  $\delta = -1,55$  e  $\delta = 0,66$ ), como esperado pela Equação 2.42. Isso sugere que podemos em parte desconsiderar correlações (para valores de  $T$  suficientemente grandes) e tratar os expoentes de Lyapunov aproximadamente como variáveis aleatórias, o que corrobora a abordagem utilizada no modelo OAKSY [22, 29].

Outra consequência dessas distribuições serem aproximadamente gaussianas está relacionada com a fração de expoentes de Lyapunov positivos. A média de ensemble do expoente de Lyapunov em tempo finito  $T$ , que deve ser igual à  $\lambda_{\perp}$  para  $T \rightarrow \infty$ , é dada por

$$\langle \tilde{\lambda}_{\perp} \rangle = \int \tilde{\lambda}_{\perp} \mathcal{F}(\tilde{\lambda}_{\perp}(T)) d\tilde{\lambda}_{\perp} \rightarrow \lambda_{\perp}, \quad (T \rightarrow \infty). \quad (3.13)$$

Desse modo, podemos definir a fração de expoentes de Lyapunov positivos em tempo finito  $F(T)$  como

$$F(T) = \int_0^{\infty} \mathcal{F}(\tilde{\lambda}_{\perp}(T)) d\tilde{\lambda}_{\perp}(T). \quad (3.14)$$

Se a distribuição de expoentes de Lyapunov em tempo finito for aproximadamente gaussiana (conforme sugere a Figura 11) e o sistema estiver numa bifurcação blowout, onde  $\langle \tilde{\lambda}_{\perp} \rangle \approx 0$ , então, pela simetria da função normal, tem-se  $F = 0,5$  para  $T$  suficientemente grande. A Figura 12a mostra  $F$  para  $\varepsilon = 0,9$  e quatro diferentes valores de  $T$  em função de  $\delta$ . A Figura 12b apresenta esses resultados para  $\delta = 0,4$  em função de  $\varepsilon$ . Nessas figuras, os pontos críticos são indicados por retas verticais. Observa-se que  $F \approx 0,5$  nos pontos críticos e que isso é praticamente independente de  $T$  (dado que  $T \geq 15$ ).

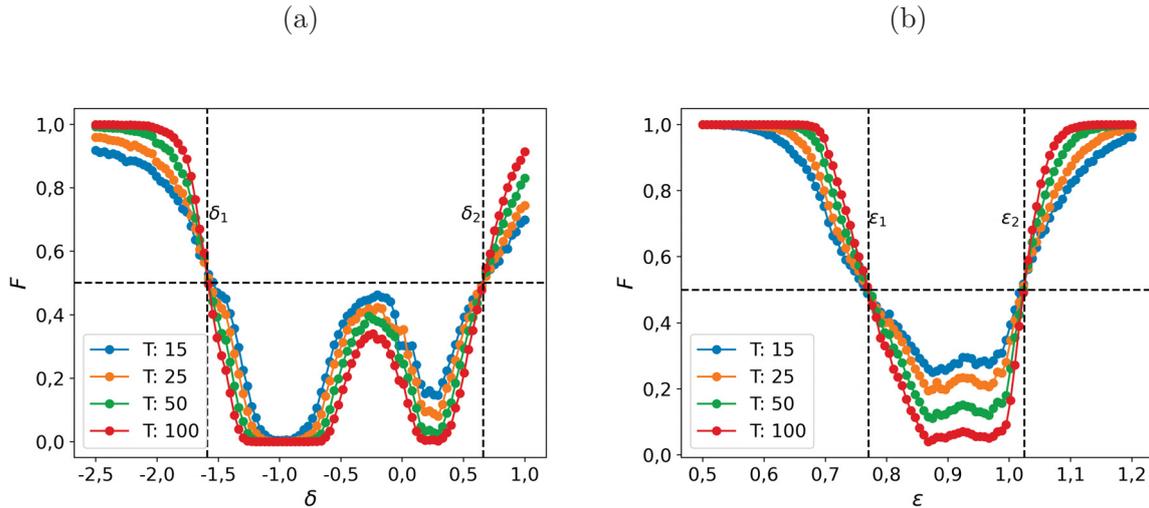


Figura 12 – (a) Fração  $F$  de expoentes de Lyapunov positivos em tempo finito  $T = 80$  para  $\varepsilon = 0,9$  em função de  $\delta$ . (b) Análogo à (a) para  $\delta = 0,4$  em função de  $\varepsilon$ . A reta horizontal representa  $F = 0,5$ .

O fato de que  $F \approx 0,5$  próximo da bifurcação blowout é também um indicativo para a presença de máxima variabilidade de dimensão instável (Sec. 2.5). Portanto, todas as condições para a existência de bacias crivadas são satisfeitas próximo aos pontos críticos. Na Seção 3.4 mostraremos diretamente a existência de VDI através do cálculo da estabilidade transversal de órbitas periódicas, o que corroborará essas ideias.

### 3.3 MODELO ESTOCÁSTICO OAKSY

Pode-se utilizar a distribuição dos expoentes de Lyapunov em tempo finito para verificar se as conclusões do modelo estocástico OAKSY são válidas para esse sistema. Se  $\sigma^2$  for a variância para os expoentes de Lyapunov em tempo finito  $T$ , o modelo prevê, de acordo com a Equação 2.43, uma relação da forma:

$$\sigma^2 = \frac{2D}{T}, \quad (3.15)$$

onde  $D$  é um coeficiente de difusão para o modelo estocástico.

A Figura 13 mostra essa variância em função do tempo finito  $T$ , para  $\varepsilon = 0,9$  e diferentes valores de  $\delta$  numa escala logarítmica. As retas em preto são ajustes lineares. Pode-se verificar que esses ajustes são representativos dos valores numéricos e que as retas são aproximadamente paralelas, com coeficientes angulares próximos de  $-1$ . Desse modo, a variância para o sistema acoplado segue a equação acima e o parâmetro  $D$  pode ser obtido através do coeficiente linear dessas retas.

Podemos, portanto, utilizar os resultados do modelo estocástico, munidos do parâmetro de difusão  $D$  e do expoente de Lyapunov transversal  $\lambda_{\perp}$ , para estimar os expoentes das leis de escala associadas às bacias crivadas através da Equação 2.44.

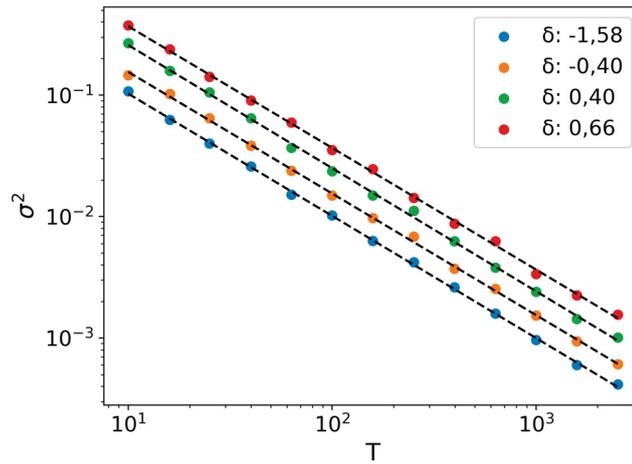


Figura 13 – Variância  $\sigma^2$  para distribuições de Lyapunov em tempo finito  $T$  com  $\varepsilon = 0,9$ , bem como ajustes lineares (retas pretas tracejadas).

A Figura 14 mostra, em laranja, os expoentes  $\eta$  e  $\alpha$  calculados diretamente através do ajuste linear para  $P^*(\ell)$  e  $p(d)$ , como ilustrado na Figura 9. Em azul, são mostrados os resultados por meio do modelo OAKSY. As figuras (a) e (c) têm  $\varepsilon = 0,9$ , enquanto (b) e (d) possuem  $\delta = 0,4$ . Próximo das bifurcações blowout (retas pontilhadas verticais), todos os coeficientes das leis de potência são bem estimados em termos absolutos pelo modelo, com erros absolutos sempre menores que 0,05. Além disso, tanto  $\eta$  como  $\alpha$  têm valores próximos de zero nesses pontos críticos, indicando que  $P^*$  e  $p$  são funções praticamente constantes. Diante disso, uma melhora na precisão da condição inicial praticamente não é refletida numa melhora na precisão do comportamento assintótico. Isso também explica a aparente discrepância na figura (d), ela só ocorre devido aos valores estarem muito próximos de zero, de modo que os erros em termos absolutos permanecem pequenos nessa região.

Mesmo para alguns valores de acoplamento longe das bifurcações, o sistema parece possuir suficiente decorrelação e o modelo continua produzindo estimativas razoáveis para os expoentes: por exemplo, para  $\delta \in [-0,5; 0,5]$  e  $\varepsilon = 0,9$ , onde os erros são também menores que 0,05. Quando  $P^*(\ell)$  ou  $p(d)$  são nulos, os expoentes não são bem definidos, e não é possível obter valores através de ajustes numéricos. Nesses casos, estamos fora do regime de validade do modelo e os resultados não devem ser considerados relevantes. Isso ocorre nos gráficos (a) e (c), para valores próximos do intervalo  $-1,40 < \delta < -0,57$ . Essa região pode também ser observada na Figura 12a, onde  $F \approx 0$ , indicando que não há VDI.

Outra observação para a Figura 14 é que se pode obter os valores numéricos para os expoentes logo após as bifurcações blowout, quando o atrator não é transversalmente estável. Isso ocorre porque, logo após a bifurcação, apesar do conjunto  $\mathcal{A}$  ser um repulsor caótico, as órbitas têm um comportamento muito parecido com órbitas antes da bifurcação, ficando arbitrariamente próximas do conjunto invariante  $\mathcal{A}$  e sendo por longos transientes

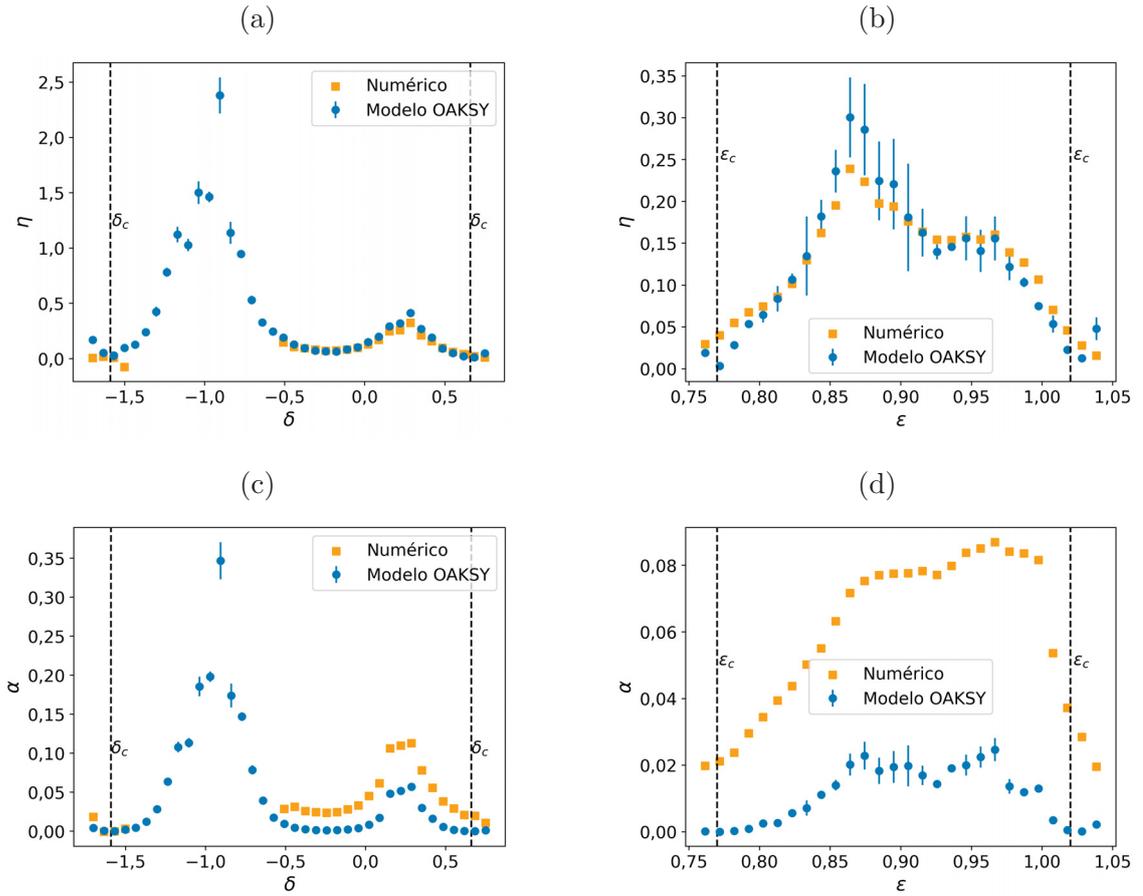


Figura 14 – Expoentes  $\alpha$  e  $\eta$  das duas leis de potência para a bacia do atrator  $\mathcal{A}$ . Quadrados em laranja representam valores calculados pelo ajuste linear de  $P^*$  e  $p$ , como ilustrado na Figura 9, enquanto círculos em azul são valores calculados pelo modelo OAKSY, usando a Equação 2.44. (a) e (c) correspondem a  $\varepsilon = 0,9$  e diferentes  $\delta$ , enquanto (b) e (d) referem-se a  $\delta = 0,4$  e diferentes  $\varepsilon$ . As retas verticais indicam pontos críticos.

indistinguíveis de órbitas que sincronizaram. Esse artefato numérico resulta da hipótese de que quando uma órbita chega suficientemente próxima da variedade, ela continua sincronizada para sempre; na realidade, o que ocorre nesses casos é um exemplo de intermitência on-off [25, 90].

### 3.4 TEORIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

A análise da distribuição dos expoentes de Lyapunov em tempo finito é uma maneira indireta de verificar que o sistema estudado possui VDI e, portanto, que existem órbitas periódicas transversalmente instáveis imersas no atrator  $\mathcal{A}$ . No entanto, devido à simplicidade do mapa da tenda, é possível verificar diretamente a existência dessas órbitas instáveis no sistema 3.3.

Para um período  $p$ , há  $2^p$  pontos periódicos no atrator  $\mathcal{A}$ , obtidos por [89]

$$x_j = \frac{2m}{2^p + k}, \quad (3.16)$$

onde  $m$  é um inteiro não negativo,  $k = \pm 1$  e  $2m \leq 2^p + k$ . Essa equação permite encontrar todos os pontos periódicos de período  $p$ ,  $(x, y) = (x_j, 0)$ , imersos no atrator caótico de sincronização  $\mathcal{A}$ .

Para o mapa da tenda, a jacobiana  $Df$  aplicada a qualquer ponto tem autovalor  $\pm 2$ , e  $|Df^p(x_j)| = 2^p$ . A medida  $\mu_p(x_j)$  para a órbita periódica associada ao ponto periódico  $x_j$  é dada por (Equação 2.62):

$$\mu_p(x_j) = \frac{(L_1(x_j))^{-1}}{\sum_{i=1}^{N_p} (L_1(x_i))^{-1}} = \frac{1}{N_p}, \quad (3.17)$$

onde  $N_p = 2^p$  é o número de pontos periódicos de período  $p$  imersos no atrator. O expoente de Lyapunov transversal, por sua vez, pode ser estimado usando o conjunto de órbitas periódicas através da Equação 2.63:

$$\lambda_{\perp} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{x_p(j) \in \mathcal{A}} \lambda_{\perp}(x_p(j)) \mu_p(x_p(j)) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{\perp}(x_p(j)), \quad (3.18)$$

onde  $\lambda_{\perp}(x_p(j))$  é o expoente de Lyapunov associado à  $j$ -ésima órbita periódica de período  $p$ ,  $x_p(j)$ . Assim, o expoente de Lyapunov transversal é simplesmente a média dos expoentes de Lyapunov associados às órbitas periódicas no limite de altos períodos  $p$ .

A Figura 15 mostra  $\lambda_{\perp}$  calculado através do truncamento do limite acima para diferentes períodos  $p$  próximo de duas bifurcações blowout. 15a ilustra o comportamento para  $\varepsilon = 0,9$ , próximo do ponto crítico associado à  $\delta_2$ , enquanto 15b refere-se a  $\delta = 0,4$ , próximo de  $\varepsilon_1$ . As retas verticais indicam as estimativas, para cada período  $p$ , de quando ocorre a bifurcação blowout, e a curva em preto é o resultado utilizando a medida natural. Em ambos os casos, observa-se que é possível estimar os pontos críticos utilizando somente as órbitas periódicas, com maior precisão ao considerar períodos  $p$  maiores, conforme indica a Equação 3.18.

A Tabela 1 apresenta as estimativas dos pontos críticos  $(\varepsilon_0, \delta_i)$  e  $(\varepsilon_i, \delta_0)$ , para  $i \in \{1; 2\}$ , utilizando órbitas periódicas de diferentes períodos  $p$ . Isso é feito fixando  $\varepsilon = \varepsilon_0$  ou  $\delta = \delta_0$  e utilizando um algoritmo para calcular as raízes da Equação 3.18 em função do parâmetro de acoplamento livre. Os erros em relação aos valores obtidos pela órbita caótica, através da Equação 3.11, são indicados por  $\Delta$ .

Observa-se que mesmo ao utilizar órbitas de pequenos períodos, é possível obter aproximações razoáveis para os pontos críticos. Por exemplo, para  $p = 3$ , os quatro pontos são obtidos com erros da ordem de  $10^{-1}$  ou menos, enquanto para  $p = 8$ , todos os erros são menores que  $4,0 \times 10^{-3}$ . Apesar disso, a precisão não cresce monotonicamente com  $p$ .

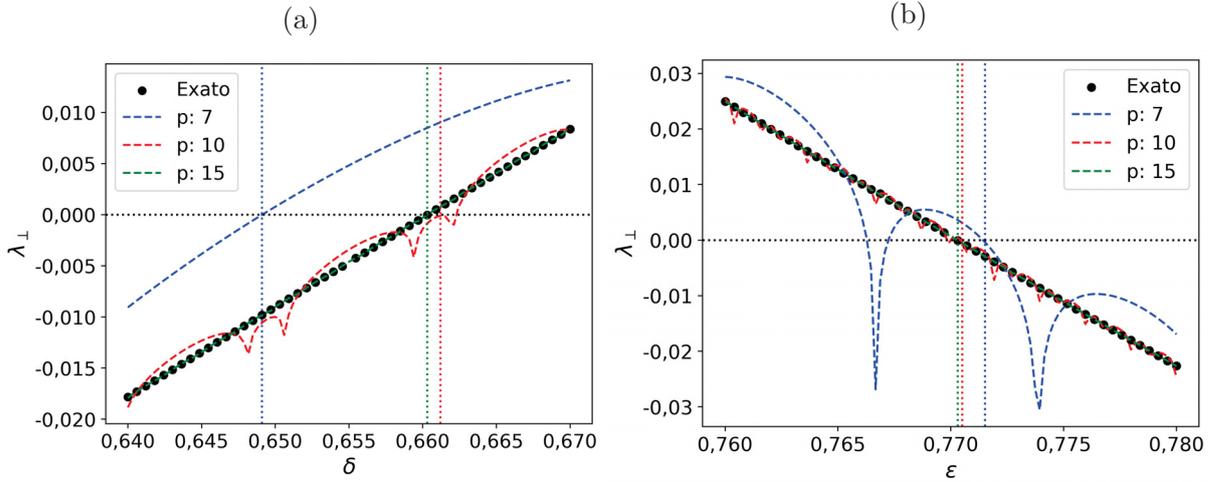


Figura 15 – Estimativas para os expoentes de Lyapunov transversais usando o conjunto de órbitas periódicas de período  $p$  imersas em  $\mathcal{A}$ , através do truncamento do limite em 3.18. Em preto, é mostrado os valores utilizando a medida natural. (a) Tem  $\varepsilon = 0,9$  e (b),  $\delta = 0,4$ . As retas verticais indicam os pontos críticos estimados para cada  $p$ .

$p$	$\delta_1$	$\Delta\delta_1$	$\delta_2$	$\Delta\delta_2$	$\varepsilon_1$	$\Delta\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\Delta\varepsilon_2$
2	-1,760 254 640	$1,1 \times 10^{-1}$	0,407 102 977	$3,8 \times 10^{-1}$	0,762 676 006	$9,9 \times 10^{-3}$	1,037 716 657	$1,3 \times 10^{-2}$
3	-1,591 397 964	$1,2 \times 10^{-3}$	0,760 452 349	$1,5 \times 10^{-1}$	0,747 899 310	$2,9 \times 10^{-2}$	1,026 155 905	$1,4 \times 10^{-3}$
4	-1,526 966 374	$3,9 \times 10^{-2}$	0,663 144 385	$4,3 \times 10^{-3}$	0,731 882 550	$5,0 \times 10^{-2}$	1,024 824 173	$1,4 \times 10^{-4}$
5	-1,726 074 688	$8,6 \times 10^{-2}$	0,890 068 532	$3,5 \times 10^{-1}$	0,717 846 452	$6,8 \times 10^{-2}$	1,024 711 134	$3,2 \times 10^{-5}$
6	-1,672 866 558	$5,2 \times 10^{-2}$	0,683 297 146	$3,5 \times 10^{-2}$	0,744 336 473	$3,4 \times 10^{-2}$	1,024 686 555	$8,0 \times 10^{-6}$
7	-1,599 141 945	$6,0 \times 10^{-3}$	0,649 114 700	$1,7 \times 10^{-2}$	0,766 285 605	$5,2 \times 10^{-3}$	1,024 680 438	$2,0 \times 10^{-6}$
8	-1,595 333 204	$3,6 \times 10^{-3}$	0,659 530 195	$1,2 \times 10^{-3}$	0,768 307 775	$2,6 \times 10^{-3}$	1,024 678 910	$5,0 \times 10^{-7}$
9	-1,595 265 371	$3,6 \times 10^{-3}$	0,657 899 870	$3,7 \times 10^{-3}$	0,769 310 922	$1,3 \times 10^{-3}$	1,024 678 528	$1,2 \times 10^{-7}$
10	-1,589 243 558	$2,0 \times 10^{-4}$	0,662 256 003	$2,9 \times 10^{-3}$	0,769 810 488	$6,1 \times 10^{-4}$	1,024 678 433	$3,1 \times 10^{-8}$
11	-1,592 915 201	$2,1 \times 10^{-3}$	0,661 462 128	$1,7 \times 10^{-3}$	0,770 363 710	$1,1 \times 10^{-4}$	1,024 678 409	$7,8 \times 10^{-9}$
12	-1,589 799 686	$1,5 \times 10^{-4}$	0,660 590 502	$4,1 \times 10^{-4}$	0,770 325 968	$5,7 \times 10^{-5}$	1,024 678 403	$1,9 \times 10^{-9}$
13	-1,589 542 637	$1,2 \times 10^{-5}$	0,660 594 789	$4,2 \times 10^{-4}$	0,770 245 651	$4,7 \times 10^{-5}$	1,024 678 402	$4,8 \times 10^{-10}$
14	-1,589 478 309	$5,3 \times 10^{-5}$	0,660 256 531	$9,7 \times 10^{-5}$	0,770 275 432	$8,1 \times 10^{-6}$	1,024 678 401	$1,2 \times 10^{-10}$
15	-1,589 525 387	$2,3 \times 10^{-5}$	0,660 355 068	$5,2 \times 10^{-5}$	0,770 287 364	$7,4 \times 10^{-6}$	1,024 678 401	$2,9 \times 10^{-11}$
16	-1,589 573 877	$7,4 \times 10^{-6}$	0,660 353 815	$5,1 \times 10^{-5}$	0,770 281 635	$8,0 \times 10^{-8}$	1,024 678 401	$6,4 \times 10^{-12}$

Tabela 1 – Estimativas para os parâmetros críticos  $(\varepsilon_0, \delta_i)$  e  $(\varepsilon_i, \delta_0)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , usando órbitas periódicas de diferentes períodos  $p$ , por meio do truncamento da Equação 3.18. Os erros relativos para cada parâmetro, em relação ao valor obtido pela medida natural (Equação 3.11), são indicados com  $\Delta$ .

### 3.5 VARIABILIDADE DE DIMENSÃO INSTÁVEL

Podemos usar as órbitas periódicas calculadas na seção anterior para medir a intensidade da variabilidade de dimensão através da medida de contraste, conforme discutido na Seção 2.4. Como  $\mu_p(x_p(j)) = 1/N_p$ , a medida de contraste, dada pela Equação 2.65, pode ser escrita como

$$C_p = |n_2(p) - n_1(p)|, \quad (3.19)$$

onde

$$n_i(p) = \frac{N_i(p)}{N_1(p) + N_2(p)} = \frac{N_i(p)}{N_p}, \quad (3.20)$$

com  $N_1$  o número de órbitas periódicas de período  $p$  transversalmente estáveis e  $N_2$  o número das transversalmente instáveis.

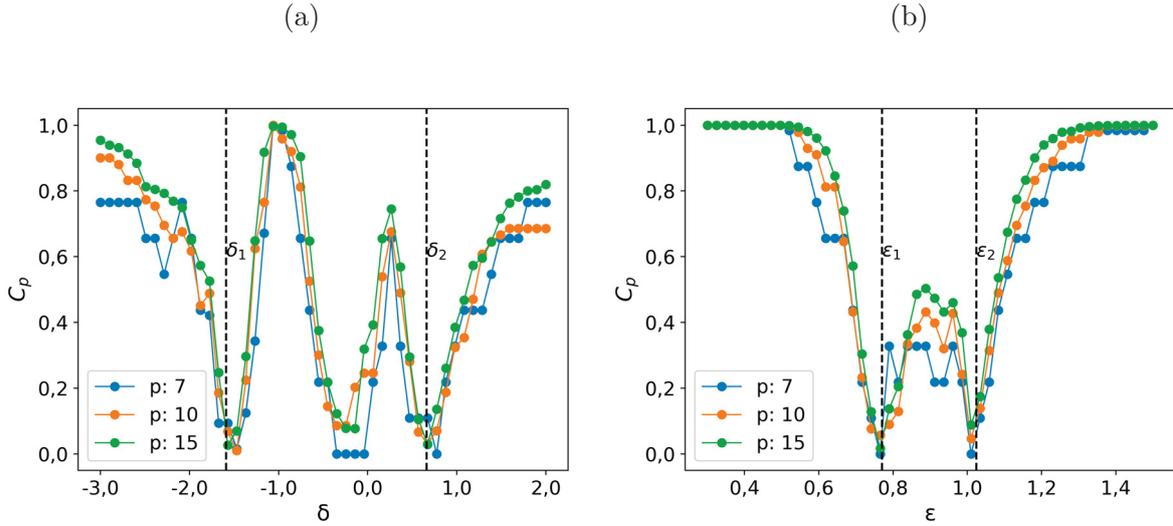


Figura 16 – Medida de contraste  $C_p$ , para diferentes períodos  $p$ , em função de: (a)  $\delta$ , para  $\varepsilon = 0,9$ ; (b)  $\varepsilon$ , para  $\delta = 0,4$ .

As Figuras 16a e 16b mostram  $C_p$  em função de um dos parâmetros de acoplamento. 16a tem  $\varepsilon = 0,9$ , e 16b possui  $\delta = 0,4$ . Observa-se que a intensidade da variabilidade de dimensão instável é máxima próximo das bifurcações, onde  $C_p \approx 0$ . Além disso, é possível perceber uma relação entre VDI e a fração de expoentes de Lyapunov positivos  $F$ , como mostrado na Figura 12. A medida de contraste é maior quando  $F$  está próximo de 0 ou 1, isto é, quando o atrator é em quase toda sua extensão instável ou estável transversalmente. Por outro lado,  $C_p$  apresenta menores valores exatamente quando há flutuações em torno de 0 dos expoentes transversais e  $F$  se aproxima de 0,5. Isso está de acordo com a ideia de que se pode inferir VDI analisando apenas a distribuição de expoentes de Lyapunov em tempo finito [87]. Essa associação é relevante, tendo em vista que na maioria dos sistemas de interesse físico é inviável calcular a medida de contraste, pois não é possível calcular uma grande quantidade de órbitas periódicas imersas no atrator caótico.

A Figura 17 mostra  $C_p$  para  $p = 13$  numa região do espaço de parâmetros  $(\varepsilon, \delta)$ . Nota-se que a maioria dos parâmetros resulta em  $C_p = 1$ , indicando ausência de VDI. No entanto, existe uma região conexa de pontos que apresentam  $C_p \approx 0$ , correspondendo aproximadamente à fronteira do conjunto que define  $\mathcal{A}$  como transversalmente estável, como ilustrado na Figura 8. Assim, próximo das bifurcações blowout, verifica-se máxima VDI em toda essa região do espaço de parâmetros.

Percebe-se ainda que existe VDI em regiões onde  $\mathcal{A}$  é repulsor caótico, com  $C_p \approx 0,5$ . Conforme se aumenta  $p$ , esses pontos com VDI no regime de repulsor continuam existindo, no entanto, o conjunto de máxima VDI se concentra cada vez mais na fronteira do conjunto que define o atrator em  $\mathbb{R}^2$ . A possibilidade de estudar o conjunto  $\mathcal{A}$  nesse regime é outra vantagem de utilizar órbitas periódicas, que, por serem conjuntos invariantes, permitem calcular propriedades como dimensão e entropia topológica mesmo em repulsores [82, 81].

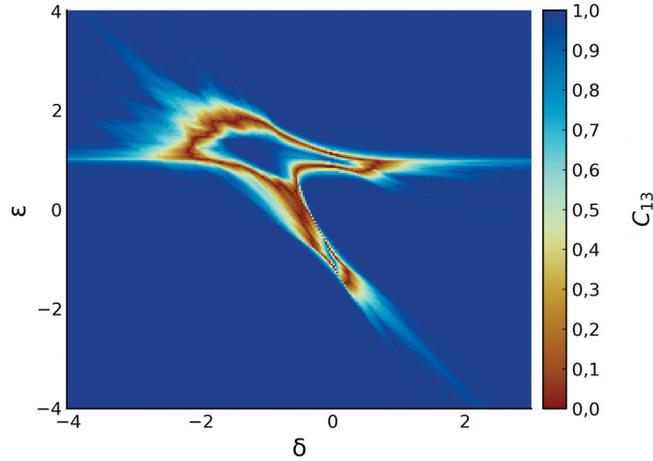


Figura 17 – Medida de contraste para órbitas periódicas de período  $p = 13$  em  $\mathcal{A}$ ,  $C_{13}$ , em função dos parâmetros de acoplamento  $\delta$  e  $\varepsilon$ .

Logo, podemos restringir as regiões do espaço de parâmetros que são passíveis de terem bacias crivadas comparando as Figuras 8 e 17. Essas regiões são compostas pelos pontos que são transversalmente estáveis e que têm  $C_p < 1$ . A intensidade de VDI também se relaciona com o tempo de sombreamento de órbitas numéricas (pseudo-trajetórias) e espera-se que, quanto menor  $C_p$ , menor seja o tempo de sombreamento das trajetórias numéricas, tendo em vista que o sistema se afasta cada vez mais de um sistema hiperbólico [44, 74, 42].

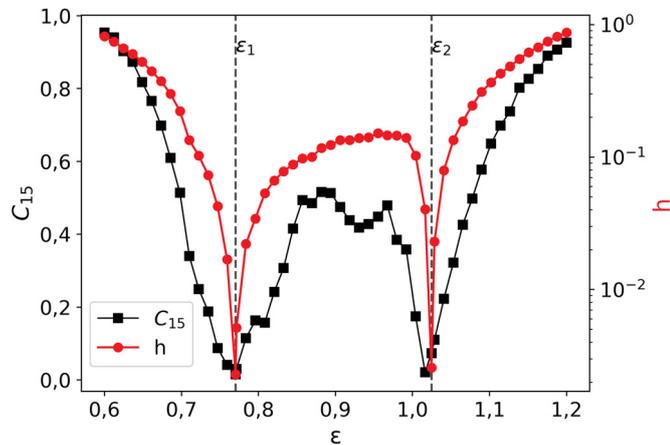


Figura 18 – Expoente de hiperbolicidade  $h$  (escala à direita) e medida de contraste  $C_{15}$  (escala à esquerda) em função do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$  para  $\delta = 0,4$ .

A Figura 18 ilustra essa relação mostrando o expoente de hiperbolicidade  $h$  (Equação 2.64) e  $C_{15}$  em função de  $\varepsilon$  para  $\delta = 0,4$ . Observa-se que, de modo geral, quanto maior a intensidade de VDI, menor  $h$ , sendo que seu valor mínimo ocorre nas bifurcações blowout. Como é esperado que o tempo de sombreamento médio próximo das bifurcações siga  $\langle t_s \rangle \sim \tilde{\delta}^{-h}$  [42], onde  $\tilde{\delta}$  é o erro de truncamento das simulações numéricas, tem-se um menor tempo de sombreamento quando o sistema apresenta VDI em maior intensidade.

## 4 SISTEMA CONTÍNUO ACOPLADO

### 4.1 CONSTRUÇÃO DO SISTEMA

O procedimento para caracterizar bacias crivadas em sistemas contínuos é análogo ao feito para o caso discreto. Para ilustrar isso e algumas das dificuldades que surgem em espaços de fase com mais dimensões, vamos considerar o acoplamento de dois sistemas contínuos em  $\mathbb{R}^3$  que possuem a mesma simetria do atrator clássico de Lorenz [11].

O sistema de Lorenz é um paradigma no estudo de caos e vários modelos inspirados nele geram atratores similares, chamados *scroll-like* — uma revisão da literatura acerca de como construir sistemas com esses atratores pode ser encontrada na Referência [91]. Vamos considerar um desses sistemas, analisado por Elwakil *et al.* [60]. Nesse trabalho, os autores estudaram um conjunto de equações diferenciais que modelam as tensões elétricas num circuito, sendo um exemplo físico de caos. As equações são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= a(\tilde{y} - \tilde{x}), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= s k(\tilde{x})\tilde{z} + m, \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= -s|\tilde{x}| + s,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $0 < a < 1$ ,  $m \in \{-1; 0; 1\}$  e  $s = \pm 1$  são os parâmetros do sistema, enquanto

$$k(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde{x} \geq 0 \\ -1 & \text{se } \tilde{x} < 0 \end{cases},\tag{4.2}$$

é um termo não linear que substitui o fator  $xy$  nas equações de Lorenz.

Para  $m = 0$ , esse sistema exibe a mesma simetria de rotação por  $\pi$  ao redor do eixo  $z$  presente no atrator de Lorenz, e seus termos são todos lineares por partes. O sistema possui um atrator caótico similar à borboleta de Lorenz com duas asas, porém sem a restrição de  $z > 0$ . No artigo original, Elwakil e seus colaboradores consideram o parâmetro  $s$  oscilando no tempo, observando dois desses atratores, o que forma um conjunto contendo quatro asas. O circuito elétrico que reproduz a dinâmica das equações 4.1 foi estudado na Referência [92].

Com o intuito de analisar o acoplamento de dois desses sistemas contínuos, faremos algumas modificações nas equações acima. Fixamos  $m = 0$  para preservar a simetria de rotação, o que será importante para a caracterização de um segundo atrator no sistema acoplado. Mantemos também  $s = 1$ , de modo a garantir um único atrator bem definido. Por fim, para eliminar a descontinuidade de  $k(\tilde{x})$ , substituímos  $k(\tilde{x})$  por  $\tilde{k}(\tilde{x}) = \tanh(c\tilde{x})$ . Para

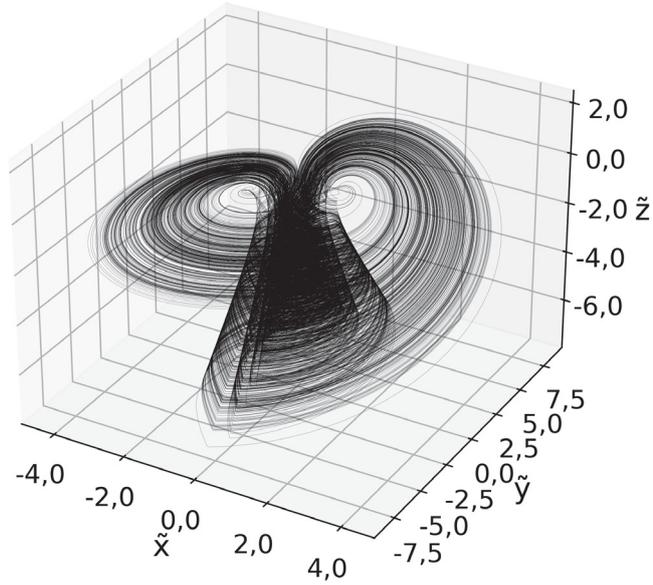


Figura 19 – Atrator caótico de duas asas para o modelo descrito na Equação 4.3 com  $a = 0,5$  e  $c = 50$ .

valores de  $c \gg 1$  (aqui usaremos  $c = 50$ ), a função  $\tilde{k}(\tilde{x})$  se aproxima de  $k(\tilde{x})$  ponto a ponto para todo  $\tilde{x} \neq 0$ , e o atrator permanece praticamente inalterado. Essa última modificação contribui para a convergência nos cálculos numéricos dos expoentes de Lyapunov, já que parte da dinâmica de 4.1 ocorre próximo de  $\tilde{x} = 0$ , onde há uma descontinuidade para a função  $k$ .

Portanto, o sistema desacoplado que será estudado é dado por

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= a(\tilde{y} - \tilde{x}), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \tanh(c\tilde{x})\tilde{z}, \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= -|\tilde{x}| + 1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde  $c = 50$  e  $a$  é um parâmetro a ser escolhido. A Figura 19 mostra o atrator de duas asas para esse sistema quando  $a = 0,5$ . Esse é o único atrator que encontramos ao utilizar  $10^4$  condições iniciais próximas da origem, com  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  e  $\tilde{z}$  num intervalo  $[-10, 10]$ .

É possível ainda identificar dois pontos fixos para o sistema 4.3, dados por  $(\pm 1, \pm 1, 0)$ . Para  $0 < a < 1$  e  $\tanh c \approx 1$ , esses pontos são linearmente estáveis na direção  $\tilde{z}$  (com um autovalor real e negativo para a jacobiana) e são focos instáveis no plano  $\tilde{x}\tilde{y}$  (com autovalores conjugados complexos com parte real positiva para a jacobiana).

Ao acoplar linearmente dois desses sistemas pela variável  $\tilde{z}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= a(y_i - x_i), \\ \frac{dy_i}{dt} &= z_i \tanh(cx_i), \\ \frac{dz_i}{dt} &= -|x_i| + 1 + \kappa(z_j - z_i),\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde  $i, j \in \{1; 2\}$ ,  $i \neq j$  e  $\kappa$  um termo de acoplamento. O estado do sistema fica determinado por 6 variáveis,  $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ . Para estudar como a intensidade de acoplamento, dada pelo parâmetro  $\kappa$ , altera a dinâmica, a partir de agora será fixado  $a = 0,5$  e  $c = 50$ .

Definindo  $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , é simples verificar que existe um subespaço invariante de sincronização  $\mathcal{M}_S$ , resultante da simetria  $v_1 \leftrightarrow v_2$ ,

$$\mathcal{M}_S = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2\}.\tag{4.5}$$

A dinâmica para  $v_1$  (ou  $v_2$ ) em  $\mathcal{M}_S$  é exatamente a seguida pelo sistema desacoplado 4.3, de modo que há um atrator caótico tridimensional  $\mathcal{A}$ , mostrado na Figura 19, contido em  $\mathcal{M}_S$ . Chamamos esse atrator de atrator sincronizado.

Para identificar um segundo atrator nesse sistema, é conveniente fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1), & y &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1), & z &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1), \\ X &= \frac{1}{2}(x_2 + x_1), & Y &= \frac{1}{2}(y_2 + y_1), & Z &= \frac{1}{2}(z_2 + z_1).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Reescrevendo o sistema 4.4 nessas coordenadas, têm-se as equações

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(-x + y), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2} \{(z - Z) \tanh(c(-x + X)) + (z + Z) \tanh(c(x + X))\}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2} \{|x - X| - |x + X| - 4\kappa z\}, \\ \frac{dX}{dt} &= a(-X + Y), \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{1}{2} \{(-z + Z) \tanh(c(-x + X)) + (z + Z) \tanh(c(x + X))\}, \\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{1}{2} \{2 - |x - X| - |x + X|\}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

$\mathcal{M}_S$  agora é definido pela restrição  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Um segundo subespaço invariante, chamado anti-sincronizado, ocorre devido à simetria  $(X, Y, z) \leftrightarrow (X, Y, -z)$ , e é definido pela restrição  $(X, Y, z) = (0, 0, 0)$ , ou

$$\mathcal{M}_A = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 = -x_2, y_1 = -y_2, z_1 = z_2\}.\tag{4.8}$$

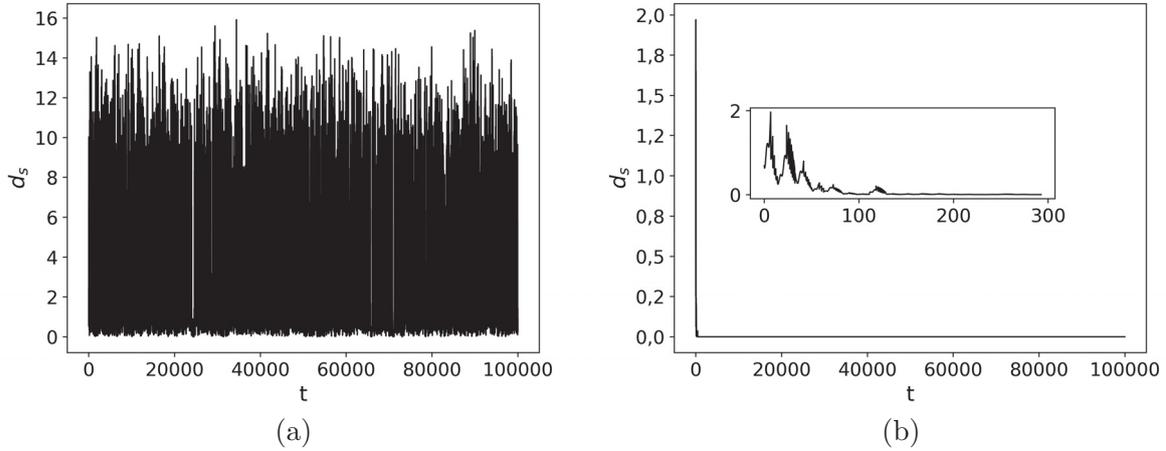


Figura 20 – Distância  $d_s$  ao subespaço de sincronização de duas trajetórias com condições iniciais de coordenadas escolhidas em  $[-1, 1]$ , para  $a = 0,5$  e dois valores de  $\kappa$ . (a) Tem  $\kappa = 0,10$ , e a órbita não converge para  $\mathcal{A}$  — nem para  $\mathcal{B}$  — devido a esse conjunto ser transversalmente instável. (b) Tem  $\kappa = 0,15$ , e a órbita está na bacia de  $\mathcal{A}$ .

De maneira análoga ao caso anterior, a dinâmica para  $v_1$  (ou  $v_2$ ) em  $\mathcal{M}_A$  é dada exatamente pelas equações 4.3, de modo que também há um atrator de duas asas,  $\mathcal{B}$ , no subespaço anti-sincronizado.

Dependendo da intensidade de acoplamento  $\kappa$ , o sistema pode apresentar sincronização de caos para o atrator na variedade de sincronização (ou de anti-sincronização). A Figura 20 mostra a distância  $d_s(t)$  ao subespaço  $\mathcal{M}_S$  como função do tempo  $t$  para uma órbita típica, dadas condições iniciais escolhidas num cubo  $[-1, 1]^6 \subset \mathbb{R}^6$ , para dois valores de acoplamento. A Figura 20a tem  $\kappa = 0,10$ , tal que a órbita não converge para o atrator  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_S$  (nem para o atrator  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_A$ ). Isso ocorre porque esses atratores são transversalmente instáveis para esse valor de acoplamento, conforme será mostrado mais adiante. A Figura 20b mostra a mesma condição inicial para  $\kappa = 0,15$ , onde ambos os atratores sincronizado e anti-sincronizado são transversalmente estáveis, e a órbita, que por acaso está na bacia do atrator de sincronização, rapidamente converge para  $\mathcal{A}$ , de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_s(t) = 0$ .

Para estudar a estabilidade transversal do atrator de sincronização, calculamos o expoente de Lyapunov transversal para a órbita caótica em  $\mathcal{A}$ . De acordo com o discutido na Seção 2.1.2, as equações variacionais para o sistema 4.7 são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \delta x &= a(-\delta x + \delta y), \\
\frac{d}{dt} \delta y &= c Z \operatorname{sech}^2(cX) \delta x + \tanh(cX) \delta z, \\
\frac{d}{dt} \delta z &= -\operatorname{sign}(X) \delta x - 2 \kappa \delta z, \\
\frac{dX}{dt} &= a(-X + Y), \\
\frac{dY}{dt} &= Z \tanh(cX), \\
\frac{dZ}{dt} &= 1 - |X|,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e o expoente de Lyapunov transversal é obtido pela Equação 2.29.

Por outro lado, podemos também calcular o espectro de Lyapunov para uma órbita em  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_S$  através do método de Benettin *et al.* [66] e da Equação 2.25. Isso resulta em seis expoentes: três associados a direções paralelas ao subespaço invariante, que caracterizam o atrator caótico de duas asas,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ , e outros três,  $\{\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$ , associados às direções transversais do subespaço  $\mathcal{M}_S$ .

Ordenando o conjunto dos expoentes tal que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  e  $\lambda_4 \geq \lambda_5 \geq \lambda_6$ , necessariamente temos que:  $\lambda_1 > 0$ , pois o atrator sincronizado é caótico,  $\lambda_2 = 0$ , devido ao sistema ser contínuo [93], e  $\lambda_3 < 0$ , pelo sistema ser dissipativo. A estabilidade transversal fica determinada por  $\lambda_4$  — se  $\lambda_4 > 0$ , o conjunto  $\mathcal{A}$  é transversalmente instável, enquanto que se  $\lambda_4 < 0$ , o conjunto é um atrator transversalmente estável em  $\mathbb{R}^6$ . Para estudar a estabilidade transversal, portanto, basta calcularmos os três maiores expoentes do espectro. Se dois deles forem positivos e um próximo de 0, então necessariamente  $\lambda_4 > 0$ ; enquanto que, caso contrário, se somente  $\lambda_1$  for maior que zero e  $\lambda_2 \approx 0$ , então  $\lambda_4 < 0$  e  $\mathcal{A}$  é estável transversalmente.

A Figura 21 mostra os três maiores expoentes de Lyapunov do espectro para o atrator sincronizado, enquanto a curva preta corresponde ao expoente transversal calculado pelas equações variacionais 4.9. Para  $\kappa < \kappa_c \approx 0,12$ , observa-se que há dois expoentes positivos: um, independente de  $\kappa$ , associado a  $\lambda_1$ , e outro dado por  $\lambda_4 = \lambda_\perp$ , indicando que  $\mathcal{A}$  é instável transversalmente. Em  $\kappa_c$ , ocorre uma bifurcação blowout e, para  $\kappa > \kappa_c$ , o conjunto  $\mathcal{A}$  permanece estável transversalmente no intervalo  $\kappa \in [\kappa_c, 50]$ , como mostrado no gráfico inserto da Figura 21.

Conforme se aumenta a intensidade do acoplamento, o expoente  $\lambda_\perp$  tende a zero, apontando que para fortes acoplamentos o sistema parece se aproximar de uma segunda bifurcação blowout. Esse comportamento para altos valores de  $\kappa$  pode indicar que o modelo estocástico OAKSY será válido para o sistema em todo esse regime de forte acoplamento, uma vez que  $\lambda_\perp \approx 0$  é uma das hipóteses do modelo.

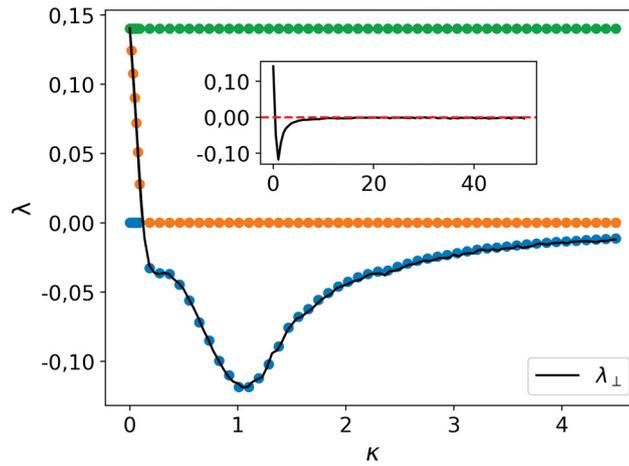


Figura 21 – Três maiores expoentes de Lyapunov para uma órbita caótica no atrator  $\mathcal{A}$ , círculos coloridos, e o expoente de Lyapunov transversal para esse atrator, curva em preto, calculado através das equações variacionais 4.9.

Embora esses resultados tenham sido obtidos para a órbita caótica no atrator de sincronização  $\mathcal{A}$ , pela simetria do acoplamento, os resultados são também válidos para o atrator  $\mathcal{B}$  na variedade de anti-sincronização, já que a dinâmica no atrator caótico  $\mathcal{B}$  é essencialmente a mesma que em  $\mathcal{A}$ , somente estando num subespaço vetorial diferente.

## 4.2 CARACTERIZAÇÃO DAS BACIAS CRIVADAS

Iremos nesta seção analisar as bacias de  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_S$  e  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_A$  para o sistema 4.4 e verificar as condições de existência das bacias crivadas para o sistema acoplado.

Conforme discutido na Seção 2.2, há quatro condições necessárias para haver bacias crivadas. Ao escolher  $\kappa > \kappa_c$ , três delas já são satisfeitas: há um atrator  $\mathcal{A}$  caótico e transversalmente estável imerso num subespaço vetorial  $\mathcal{M}_S$  e existe um segundo atrator  $\mathcal{B}$ . Vamos discutir a última condição, referente à existência de órbitas periódicas transversalmente instáveis em  $\mathcal{A}$ . Para isso, obtivemos algumas das órbitas periódicas do atrator sincronizado utilizando o método de Newton-Raphson-Mees, conforme descrito na Referência [94].

A Figura 22 mostra seis exemplos de órbitas periódicas em laranja, os dois pontos fixos do sistema,  $(\pm 1, \pm 1, 0)$ , em vermelho e parte do atrator caótico  $\mathcal{A}$  em cinza. Observe-se que, de forma similar ao que ocorre no atrator de Lorenz [11], as órbitas periódicas que obtivemos sempre rotacionam um número de vezes ao redor dos pontos fixos simétricos [15]. No entanto, elas podem também rotacionar em torno do eixo  $z$ . Assim, a dinâmica simbólica para esse sistema é mais complicada quando comparada à do atrator de Lorenz clássico [95], e as órbitas parecem não ser caracterizadas simbolicamente por apenas dois símbolos. A Tabela 2 apresenta as condições iniciais e os períodos das órbitas periódicas calculadas pelo método de Newton-Raphson-Mees.

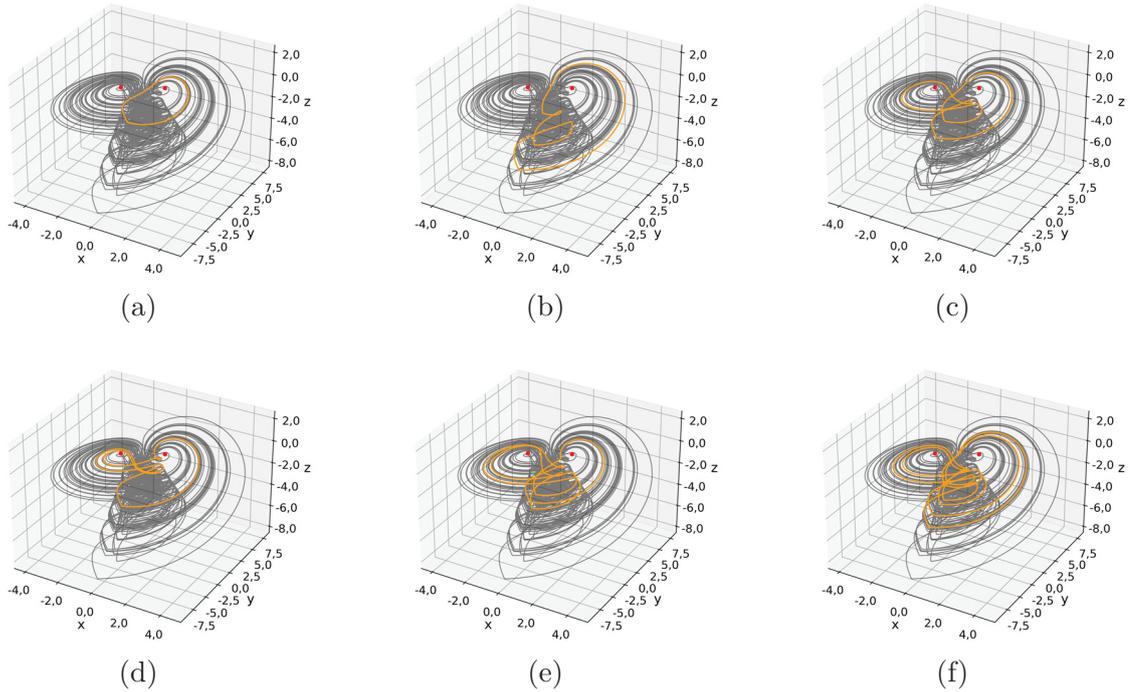


Figura 22 – Órbitas periódicas imersas no atrator caótico sincronizado com períodos aproximados  $p =$  (a) 10,973, (b) 16,406, (c) 25,657, (d) 36,478, (e) 42,501, e (f) 56,899. As condições iniciais dessas órbitas estão indicadas na Tabela 2.

É possível medir a estabilidade transversal das órbitas periódicas por meio do expoente de Lyapunov transversal. A Figura 23 mostra o expoente associado a essas órbitas periódicas imersas no atrator sincronizado, nomeadas pelo seu período aproximado  $p$ . A Figura 23a retrata uma região próxima do ponto crítico  $\kappa_c$ , onde se pode observar que algumas dessas órbitas ficam transversalmente estáveis pouco antes da bifurcação, de modo que existem tanto órbitas estáveis quanto instáveis transversalmente em  $\kappa_c$ .

Logo, a última das condições para a existência de bacias crivadas — a presença de VDI — é também satisfeita. A Figura 23b mostra uma região mais ampla de valores  $\kappa$ , indicando que em todo o intervalo  $[\kappa_c, 10]$  o sistema possui VDI e que, de maneira análoga ao que ocorre para o comportamento da órbita caótica (ilustrado na Figura 21), conforme se aumenta  $\kappa$ , as órbitas periódicas parecem convergir para assíntotas horizontais em diferentes níveis. De um ponto de vista de teoria de órbitas periódicas, pode-se pensar que  $\lambda_{\perp}$  tender a zero para  $\kappa \gg 1$  ocorre devido a um equilíbrio entre órbitas periódicas estáveis e instáveis que não necessariamente têm seus expoentes de Lyapunov indo a zero.

Todas as condições necessárias para a existência de bacias crivadas são satisfeitas para  $\kappa \in [\kappa_c, 10]$ , de modo que é possível agora estudar mais concretamente suas propriedades. A Figura 24 mostra um exemplo de seção transversal das bacias do atrator caótico em  $\mathcal{M}_S$ , pontos em branco, e do atrator em  $\mathcal{M}_A$ , pontos em preto, para  $\kappa = 0,41$ . A seção é obtida tomando  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $y_1 = y_2 = 1$  e  $z_1, z_2$  no intervalo  $[-6, 2]$ . Para esses pontos no

$x$	$y$	$z$	$p$
-0,3867408	0,7969813	-1,0006702	10,9732367
-0,1457792	-1,6509696	-1,1234204	13,2307355
-0,2149385	3,0742001	-3,8005621	15,5652699
-1,5596226	-1,4851396	-0,6587008	15,7456960
0,3042496	-2,2076315	-4,1358432	16,4056543
-3,1912302	-5,7602723	0,3747373	19,5791491
0,3767604	-3,3522406	-3,1071829	25,6573433
-0,1942891	5,8177373	-5,2072769	30,8800992
1,3123587	0,6845014	-0,9403214	31,7254238
-0,1467686	1,7950686	-3,1496114	32,0639457
-0,5596386	-1,0827867	0,3873844	36,4779031
0,4881745	0,5800048	0,2356960	42,5009287
-0,1414509	-1,6409161	-1,7343704	56,8993423
0,2690021	4,3872347	-3,7404589	62,5267803

Tabela 2 – Condições iniciais  $(x, y, z)$  e períodos  $p$  associados com cada órbita periódica em  $\mathcal{A}$  utilizada nas Figuras 22 e 23. Os valores foram obtidos pelo método de Newton-Raphson-Mees [94].

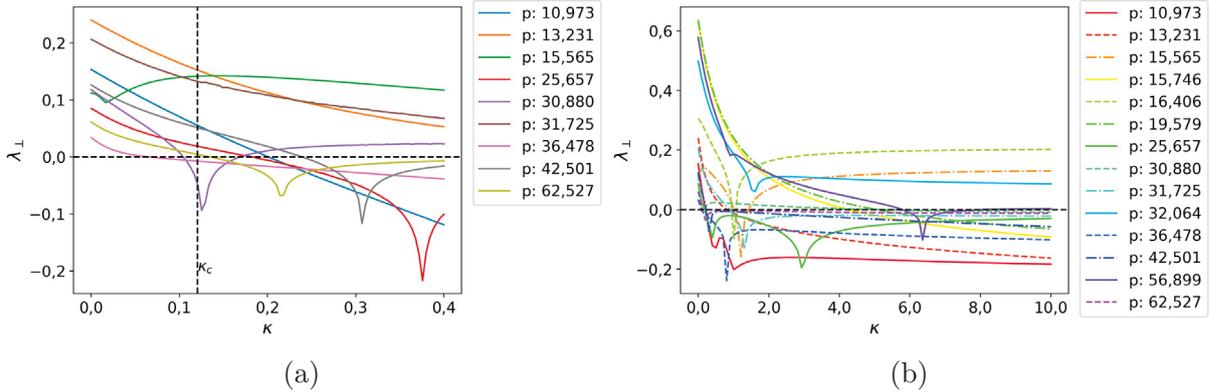


Figura 23 – Expoentes de Lyapunov transversais  $\lambda_{\perp}$  para algumas das órbitas periódicas, indicadas pelo seu período  $p$ , imersas no atrator sincronizado. (a) Próximo de  $\kappa_c$ . (b) Num intervalo mais amplo de valores para  $\kappa$ .

espaço de fase, o atrator está contido na reta  $z_1 = z_2$ , de maneira que regiões da diagonal principal nessa figura podem ser vistas como pedaços do atrator caótico de sincronização em  $\mathcal{M}_S$ . Pode-se observar as características “línguas” formadas por pontos em preto que emanam do subespaço invariante  $\mathcal{M}_S$  e que, mesmo muito próximos dele, divergem para o segundo atrator em  $\mathcal{M}_A$ , o que é um comportamento comum em bacias crivadas [73, 74].

Outra seção do espaço de fase interessante de se estudar é uma região ao redor da origem de  $\mathbb{R}^6$  nas coordenadas  $(x, y, z, X, Y, Z)$ , tendo em vista que a origem pertence aos dois subespaços,  $\mathcal{M}_S$  e  $\mathcal{M}_A$ . A Figura 25 mostra as bacias para o atrator caótico sincronizado (pontos em branco) e anti-sincronizado (em preto) para uma seção  $y_1 = \pm y_2 = 0,0$  e  $z_1 = z_2 = -2,0$ , com  $x_1$  e  $x_2$  variáveis. Nessas figuras, a diagonal  $x_1 = x_2$  (reta azul) está contida em  $\mathcal{M}_S$  e a diagonal  $x_1 = -x_2$  (reta vermelha) está contida em

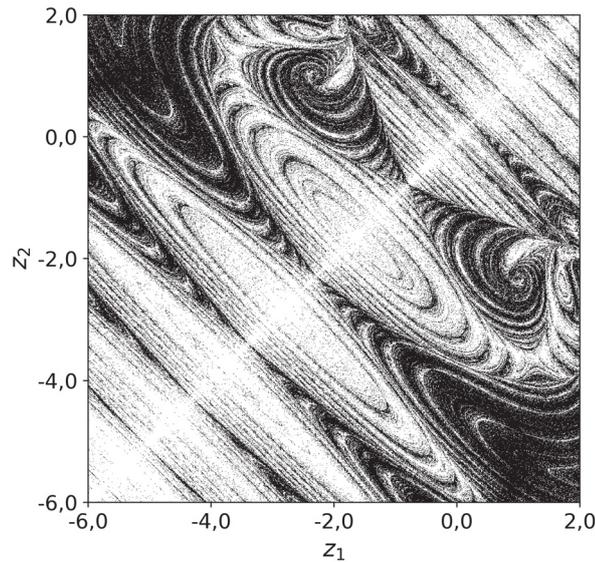


Figura 24 – Bacia de atração para o atrator em  $\mathcal{M}_S$  (em branco) e para  $\mathcal{M}_A$  (em preto) numa seção do espaço de fase dada por  $x_1 = x_2 = 1,0$  e  $y_1 = y_2 = 1,0$ , com  $\kappa = 0,41$ .

$\mathcal{M}_A$ , de maneira que podemos perceber como ambas as bacias parecem crivadas. Nesse caso, as bacias são ditas *intermingled* [22].

As seções da bacia do atrator sincronizado sugerem que ela é crivada. Para analisar isso de maneira mais objetiva, estudamos os parâmetros  $P^*(\ell)$ , para a fração de órbitas que divergem do atrator em função da distância a ele, e a fração de condições iniciais incertas  $p(d)$ , conforme discutido na Seção 2.2.

A Figura 26a mostra, em escala logarítmica,  $P^*(\ell)$  em função de  $\ell$  para o atrator sincronizado. As retas pontilhadas são ajustes lineares. Verifica-se o comportamento em lei de potência  $P^*(\ell) \sim \ell^\eta$  abrangendo cinco ordens de grandeza para  $\ell$ . Em particular, para  $\kappa = 0,12 \approx \kappa_c$ , o expoente  $\eta$  é relativamente pequeno, aproximadamente 0,14.

De maneira análoga, a Figura 26b mostra a fração incerta  $p(d)$  em função do raio de incerteza  $d$  para o atrator sincronizado considerando condições iniciais que distam  $\ell_0 = 10^{-2}$  dele. Novamente, observa-se que  $p(d) \sim d^\alpha$  para  $d$  abrangendo cinco ordens de grandeza. Além disso, para os valores de  $\kappa$  mostrados,  $\alpha \approx 0$ , de modo que uma melhora na precisão da condição inicial praticamente não é refletida numa melhora na precisão média do comportamento assintótico. Em particular, para  $\kappa = 0,12$ , o expoente é bastante pequeno, aproximadamente 0,006.

Os expoentes dessas leis de escala e os desvios padrão dos ajustes lineares podem ser vistos na Figura 29, indicados por “Numérico”.

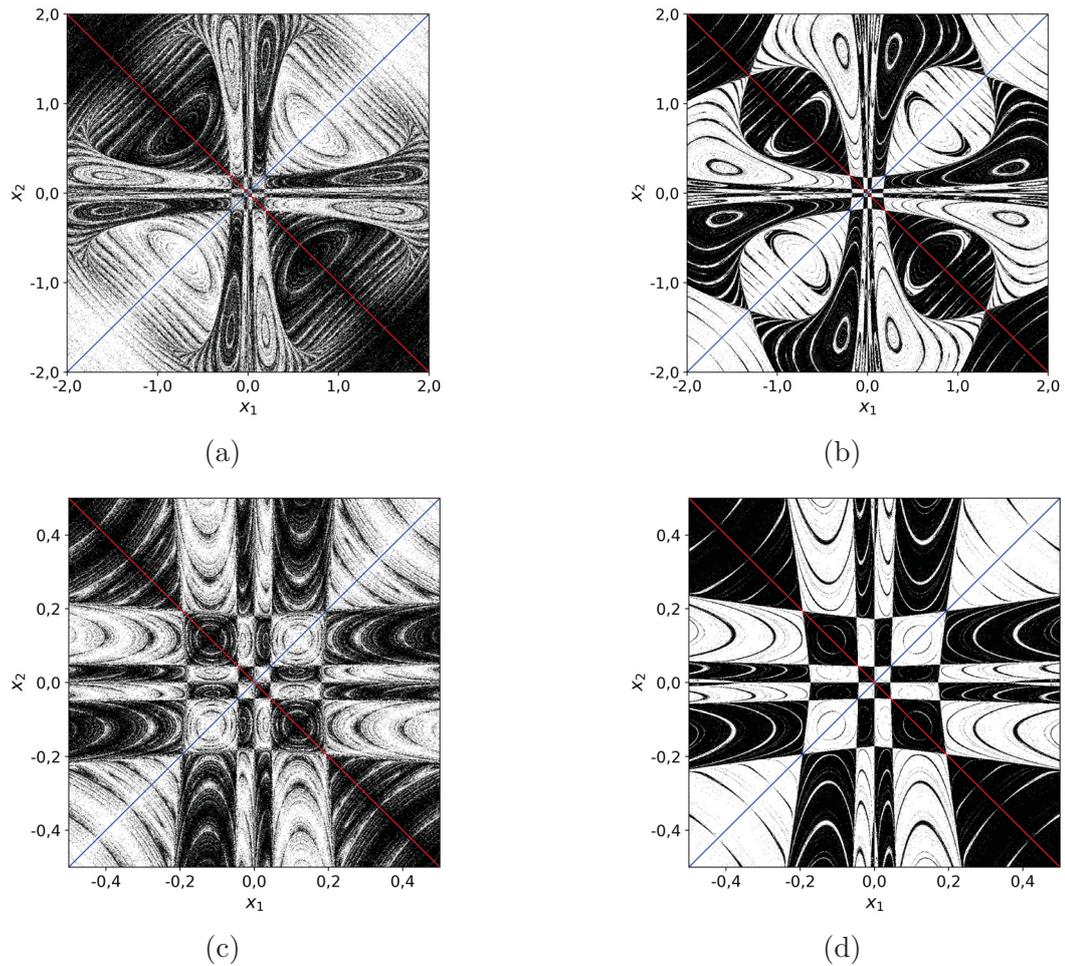


Figura 25 – Bacias de atração do atrator em  $\mathcal{M}_S$  (em branco) e do atrator em  $\mathcal{M}_A$  (em preto) para:  $\kappa = 0,3$  em (a) e (c); e  $\kappa = 1,0$  em (b) e (d). As figuras consideram uma seção do espaço de fase definida por  $y_1 = \pm y_2 = 0$  e  $z_1 = z_2 = -2,0$ . A reta em azul ( $x_1 = x_2$ ) está contida em  $\mathcal{M}_S$  e a reta em vermelho ( $x_1 = -x_2$ ) está em  $\mathcal{M}_A$ .

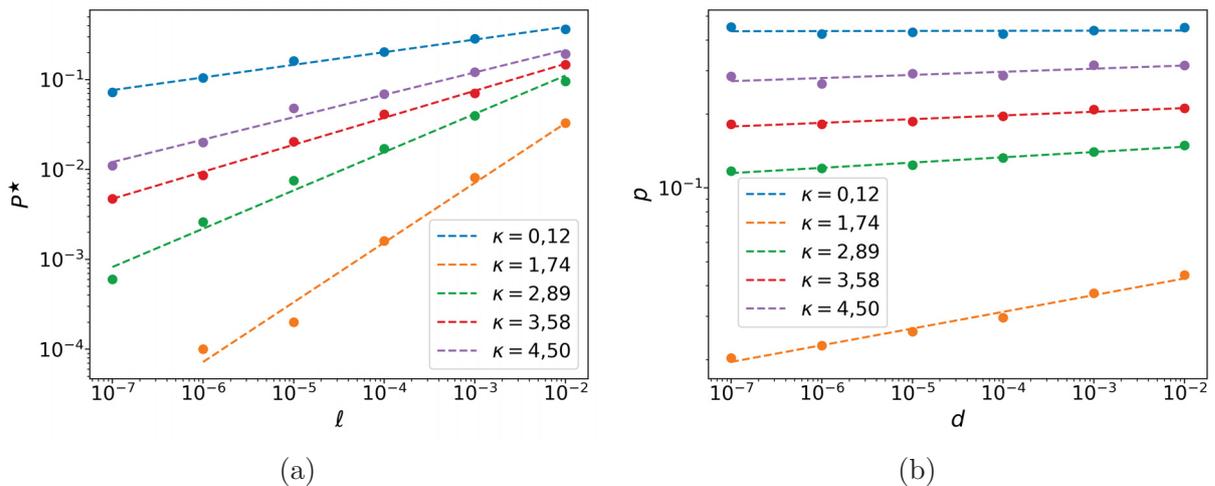


Figura 26 – (a) Fração de 2000 condições iniciais  $P^*(\ell)$  que divergem do atrator de sincronização  $\mathcal{A}$  em função da distância a ele  $\ell$ . (b) Fração incerta  $p(d)$  de 2000 condições iniciais que distam  $\ell_0 = 10^{-2}$  da variedade de sincronização em função do raio de incerteza  $d$ . As retas são ajustes lineares em escala logarítmica.

### 4.3 MODELO OAKSY E VARIABILIDADE DE DIMENSÃO INSTÁVEL

Verificamos numericamente que o sistema 4.4 possui bacias crivadas para  $\kappa > \kappa_c$ . Podemos então analisar se o modelo OAKSY é capaz de prever a dinâmica transversal e, em particular, as leis de potência, para esse sistema mais complexo e de maior dimensão quando comparado ao mapa acoplado estudado na Seção 3. Para isso, é necessário calcular a distribuição de expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito.

A Figura 27 mostra, para três valores de  $\kappa$ , a distribuição  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp)$  dos expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito  $T = 200$ ,  $\tilde{\lambda}(T)$ . A figura apresenta ainda, em preto, as curvas gaussianas com a mesma média e desvio padrão das distribuições calculadas. Conforme esperado, observa-se que as distribuições  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp)$  são bem representadas por gaussianas, em particular quando o sistema está próximo de bifurcações blowout ( $\kappa \approx 0,12$ ).

O comportamento das variâncias  $\sigma^2$  dessas gaussianas em função do tempo finito  $T$ , calculadas a partir da distribuição  $\mathcal{F}$ , é ilustrado numa escala logarítmica na Figura 28. As retas pontilhadas são ajustes lineares para cada  $\kappa$  utilizado. Verifica-se que a relação  $\sigma^2(T) = 2D/T$  (Equação 2.43) é aproximadamente válida, com um coeficiente de difusão  $D$  bem definido que pode ser obtido por meio do coeficiente linear das retas ajustadas.

Assim, é possível usar os valores calculados de  $D$  e as fórmulas resultantes do modelo OAKSY (Equação 2.44) para comparar os resultados numéricos desse sistema com as previsões do modelo para os expoentes  $\eta$  e  $\alpha$  associados às leis de escala.

A Figura 29a mostra, em laranja, o expoente  $\eta$  obtido pelo coeficiente angular dos ajustes lineares em experimentos numéricos, como ilustrado na Figura 26. Em azul, é apresentado o coeficiente obtido pelo modelo OAKSY. De maneira análoga, a Figura

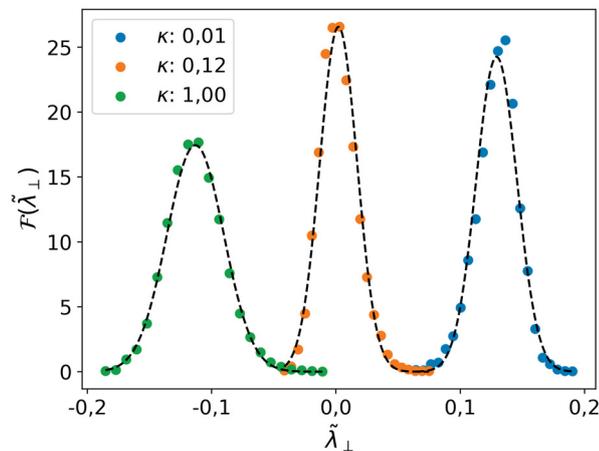


Figura 27 – Distribuição  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp(T))$  para os expoentes de Lyapunov transversais em tempo finito  $T = 200$  considerando órbitas no atrator de sincronização. Para cada  $\kappa$ , as curvas em preto são distribuições gaussianas de mesma média e variância que  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp(T))$ .

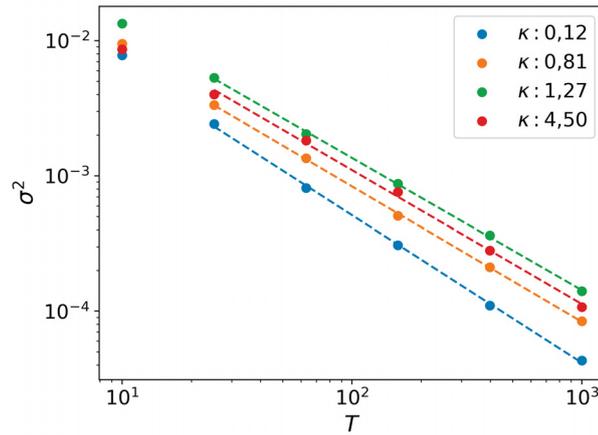


Figura 28 – Variância  $\sigma^2$  para distribuições de expoentes de Lyapunov em tempo finito  $T$ , considerando órbitas no atrator de sincronização, como função de  $T$ . As retas são ajustes lineares em escala logarítmica para cada parâmetro de acoplamento  $\kappa$  usado.

29b mostra os resultados para o expoente  $\alpha$ , relacionado à lei de potência para a fração incerta  $p(d)$ .

Observa-se que ambos os expoentes são bem estimados quando o sistema está dentro do regime de validade do modelo OAKSY. Isso ocorre para  $\lambda_{\perp} \approx 0$ , isto é, próximo de  $\kappa_c$  e para valores grandes de  $\kappa$ . Por exemplo, para  $\kappa \approx 0,12$  e  $\kappa \gtrsim 2,0$ , os erros absolutos para  $\alpha$  são sempre menores que 0,01, enquanto que para  $\eta$  são menores que 0,07.

Por outro lado, os resultados mostrados na Figura 29 também apresentam regiões no espaço de parâmetros nas quais o modelo não é capaz de capturar corretamente a dinâmica transversal. Isso fica evidente para valores de  $\kappa$  próximos da unidade (aproximadamente no intervalo  $[0,5; 2,0]$ ), onde os desvios entre os valores numéricos e os esperados pelo modelo OAKSY são máximos. Nesses casos, a aproximação estocástica feita para a dinâmica transversal não é válida, de modo que não podemos desprezar o caráter determinístico do sistema. Essa região onde o modelo não consegue capturar bem os expoentes é exatamente a região que viola a condição discutida na Seção 2.2.3, segundo a qual o expoente de Lyapunov transversal precisa estar próximo de  $0^-$ . Em particular, quando  $\lambda_{\perp} \lesssim -0,05$ , o modelo parece rapidamente deixar de ter validade nesse sistema.

Outro aspecto que podemos estudar utilizando a distribuição de expoentes de Lyapunov em tempo finito é a presença de VDI. Embora já tenhamos demonstrado a existência de VDI diretamente através do cálculo de órbitas periódicas imersas no atrator de sincronização, em geral isso não é possível para sistemas em maiores dimensões. Nesses casos, pode-se utilizar a distribuição  $\mathcal{F}(\tilde{\lambda}_{\perp})$  para inferir a existência de variabilidade de dimensão instável.

Quando existe VDI, a distribuição de expoentes de Lyapunov em tempo finito possui valores maiores e menores que zero, de modo que órbitas na vizinhança do atrator podem ser atraídas ou repelidas por tempo finito. É possível analisar isso observando

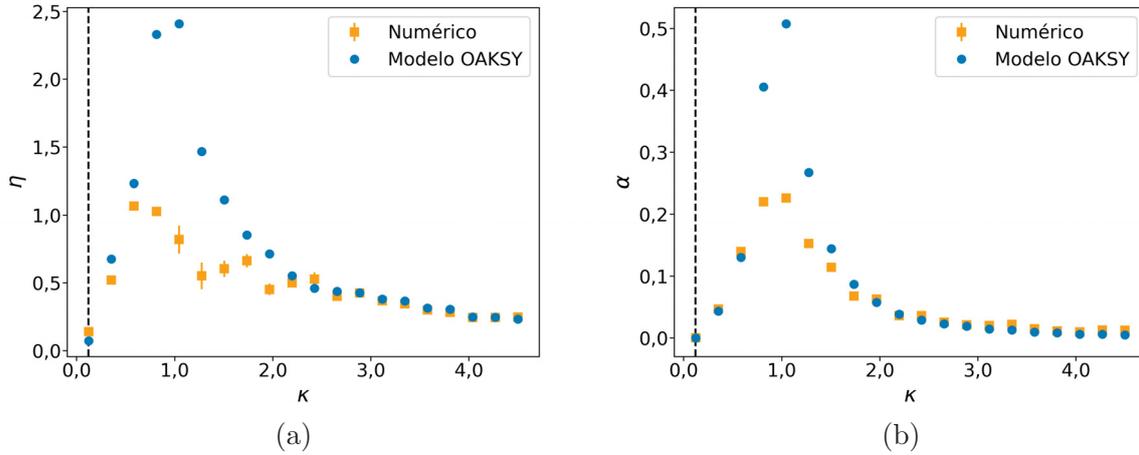


Figura 29 – Valores para os expoentes das leis de potência associadas à bacia crivada do atrator de sincronização. (a)  $\eta$ , e (b)  $\alpha$ . Em laranja estão os pontos calculados diretamente pelo ajuste linear de trajetórias numéricas, como ilustrado na Figura 26, enquanto os pontos em azul são os valores esperados pelo modelo OAKSY.

a função  $F(T)$ , associada à fração de expoentes positivos em tempo finito  $T$ . Dada a distribuição dos expoentes de Lyapunov em tempo finito  $\mathcal{F}$ , tem-se, conforme a Equação 2.34,

$$F(T) = \int_0^\infty \mathcal{F}(\tilde{\lambda}_\perp) d\tilde{\lambda}_\perp. \quad (4.10)$$

Se  $F(T)$  for 0 ou 1, não há VDI, já que todas as órbitas em tempo finito têm uma mesma estabilidade transversal. Quando  $F$  não estiver nesses casos extremos, podemos inferir que há VDI. A Figura 30 mostra  $F$  para diferentes valores de  $T$  próximo do ponto crítico  $\kappa_c$ . Observa-se que para valores de  $T$  pequenos ( $T = 20$ ), tem-se  $1 > F > 0$  em praticamente todo o intervalo  $\kappa \in [0,0; 0,3]$ . Conforme se aumenta  $T$  ( $T \geq 100$ ), essa condição para  $F$  passa a só ocorrer próximo ao ponto crítico  $\kappa_c$ .

Podemos identificar para qual parâmetro de acoplamento  $\kappa^*$  se espera máxima VDI ( $F = 0,5$ ), onde  $\kappa^*$  depende de  $T$ . Para valores pequenos de  $T$ , percebe-se que  $\kappa^* > \kappa_c$ . No entanto, conforme consideramos intervalos maiores de tempo no cálculo dos expoentes, o parâmetro  $\kappa^*$  passa a independe de  $T$  e converge para  $\kappa_c$ , indicando que próximo do ponto crítico é onde há maior variabilidade de dimensão instável. Isso pode ser entendido também pela ideia demonstrada na Figura 27, onde próximo das bifurcações blowout e para  $T \gg 1$ , tem-se uma distribuição normal para os expoentes transversais. Como a distribuição normal é simétrica e, na bifurcação, é centrada em  $\lambda_\perp = 0$ , a fração positiva de expoentes de Lyapunov em tempo finito  $F$  tende a 0,5.

Exploraremos agora outra consequência do modelo OAKSY, relacionada com o efeito de perturbações em órbitas que inicialmente estão no atrator de sincronização. Isso é feito com o objetivo de verificar a validade das conclusões do modelo estocástico para o

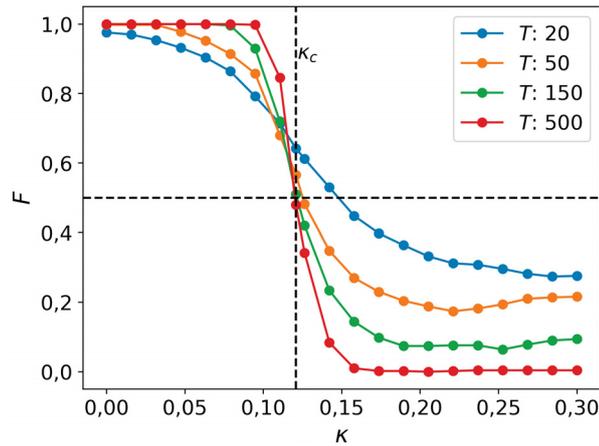


Figura 30 – Fração  $F$  de expoentes de Lyapunov em tempo finito  $T$  positivos em função da constante de acoplamento  $\kappa$  para órbitas no atrator de sincronização. A reta vertical indica o ponto crítico  $\kappa_c$ .

decaimento do número de órbitas que não divergem para o segundo atrator num tempo  $t$ ,  $N(A, t)$  (Equação 2.46), e para o tempo característico de decaimento  $\langle \tau \rangle$  (Equação 2.47).

O modelo OAKSY não trata de perturbações em sistemas contínuos, de modo que vamos adaptar o que é feito no artigo [29]. Para isso, consideramos que o nosso sistema é periodicamente perturbado, a cada intervalo de tempo  $\Delta t$  inteiro, por perturbações  $\xi$  que seguem uma distribuição uniforme em  $[0, A]$ . Inicialmente consideramos um grande número de órbitas com condições iniciais no atrator de sincronização e calculamos a fração  $N(A, t)$  delas que, num tempo  $t$ , não divergiram para o atrator de anti-sincronização devido a essas perturbações.

A Figura 31a ilustra, para  $\kappa = 0,13$ , a relação esperada pela Equação 2.46 para a fração  $N(A, t)$ , dada por  $N(A, T) \sim \exp(-t/\langle \tau \rangle)$ . As curvas em diferentes cores são resultados numéricos para  $N(A, t)$ , enquanto os pontos em preto indicam ajustes exponenciais para essas curvas.

Já a Figura 31b mostra a lei de escala para os tempos característicos  $\langle \tau \rangle$  em função da amplitude  $A$ . As curvas em preto são ajustes lineares em escala logarítmica e os pontos são resultados numéricos de  $\langle \tau \rangle$  para diferentes intensidades de acoplamento  $\kappa$ . Conforme indicado pela Equação 2.47, os tempos característicos seguem  $\langle \tau \rangle \sim A^{-\eta'}$ , de modo que as conclusões do modelo OAKSY para as leis de escala permanecem válidas para esse sistema acoplado mesmo consideradas as adaptações necessárias para o caso contínuo.

Por fim, comparamos os expoentes  $\eta'$  associados à lei de escala de  $\langle \tau \rangle$  com os expoentes  $\eta$  relacionados com a lei de potência de  $P^*$ . Segundo o modelo OAKSY, quando  $C = \eta \delta^\eta \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \ll 1$  e quando as demais condições do modelo são satisfeitas, tem-se  $\eta' \approx \eta$ . A Figura 32a apresenta os valores de  $\eta'$  (losangos roxos) em comparação com os valores de  $\eta$  calculados diretamente pelo ajuste de experimentos numéricos de  $P^*$

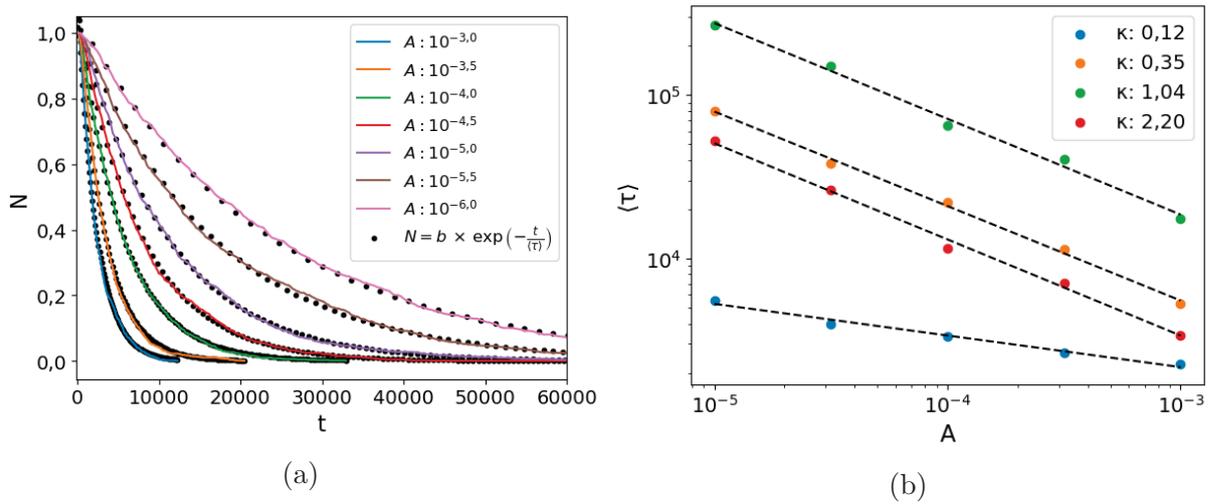


Figura 31 – (a)  $N(A, t)$ , com  $\kappa = 0,13$ , em função de  $t$  para diferentes amplitudes de perturbação  $A$ . As curvas cheias são os resultados de experimentos numéricos e os pontos em preto ajustes exponenciais. (b) Tempo característico de decaimento  $\langle \tau \rangle$  em função da amplitude  $A$ . As retas indicam ajustes lineares em escala logarítmica.

(quadrados laranjas) e os obtidos pela Equação 2.44 (círculos azuis). Já a Figura 32b ilustra o comportamento para o parâmetro  $C$  em função da intensidade de acoplamento para três valores de amplitude  $A$ .

Observa-se que para  $\kappa$  próximo de  $\kappa_c$  e para valores de  $\kappa$  grandes, onde as condições para a validade do modelo OAKSY são satisfeitas, tem-se que  $\eta'$  se aproxima do valor de  $\eta$  calculado diretamente pelo ajuste linear de  $P^*$ . Essa relação parece ser aproximadamente válida mesmo quando  $C$  é relativamente grande,  $C \approx 0,3$ . Por exemplo, para  $\kappa \approx 0,12$  e  $\kappa \gtrsim 2,0$ , os desvios entre os valores numéricos de  $\eta$  e  $\eta'$  são sempre menores que 0,04.

Alguns parâmetros de acoplamento ainda resultam em boa concordância entre o valor numérico de  $\eta$  e  $\eta'$  mesmo na região de  $\kappa$  próxima da unidade, onde as relações 2.44 geram os maiores desvios em relação ao valor numérico — o que é ilustrado na maior discrepância entre os pontos “Modelo OAKSY” e “Numérico” — sendo também essa a região onde  $C$  é mínimo.

Portanto, os resultados do modelo estocástico permanecem aproximadamente válidos mesmo para um sistema contínuo perturbado em seis dimensões. O modelo parece representar acuradamente a dinâmica transversal para o atrator sincronizado  $\mathcal{A}$  do sistema acoplado 4.4, não só indicando corretamente a forma das leis de escala para a bacia crivada como também fazendo boas estimativas para os valores numéricos dos expoentes associados a elas.

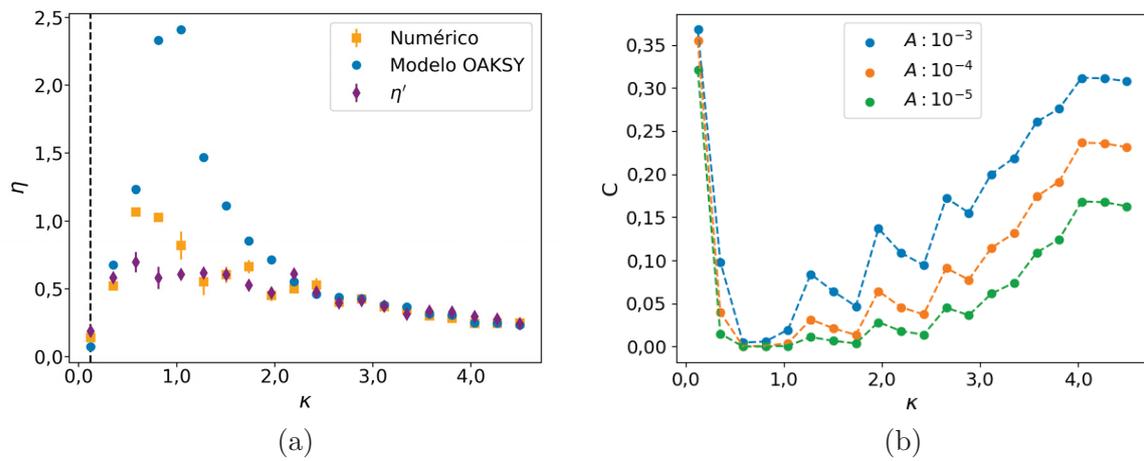


Figura 32 – (a) Expoente  $\eta$  calculado por ajustes numéricos (em laranja), utilizando o modelo OAKSY, com as equações 2.44, (em azul) e o valor de  $\eta'$ , associado ao sistema perturbado, em função de  $\kappa$ . (b) Parâmetro  $C$  em função da intensidade de acoplamento  $\kappa$ .

## 5 CONCLUSÕES

Bacias crivadas ocorrem em sistemas multiestáveis que apresentam um atrator de Milnor restrito a um subespaço invariante pela dinâmica. Dessa maneira, a perda de estabilidade transversal do atrator caracteriza uma bifurcação, chamada bifurcação blowout. Próximo ao ponto crítico, a dinâmica transversal na vizinhança do atrator de Milnor é extremamente complicada, com regiões que são localmente atraídas e repelidas do subespaço em escalas arbitrariamente finas. Esse comportamento permite a existência de bacias crivadas e é consequência da instabilidade transversal de órbitas periódicas imersas no atrator, o que resulta em variabilidade de dimensão instável (VDI) no sistema. A complexidade da dinâmica transversal próximo a pontos críticos sugere ainda que ela pode ser aproximada por um modelo estocástico.

Neste trabalho, estudamos as relações entre bacias crivadas, a presença de VDI e a validade do modelo estocástico OAKSY em dois sistemas caóticos acoplados: um com tempo discreto e outro com tempo contínuo. Quando possível, utilizamos ainda a teoria de órbitas periódicas para medir a intensidade de VDI e verificar a correspondência entre a medida natural do atrator caótico e o conjunto de órbitas periódicas imersas nele, de modo a caracterizar a bifurcação blowout utilizando somente esse conjunto.

O primeiro sistema estudado consistiu num mapa acoplado, onde há um atrator caótico num subespaço invariante devido à variedade de sincronização. Nesse caso, o atrator com bacia crivada é limitado, e a multiestabilidade surge da possibilidade de divergência para o infinito. Verificamos que o mapa satisfaz todas as condições necessárias para a existência do crivamento da bacia e que o sistema apresenta as leis de escala características de bacias crivadas. Mostramos ainda que o modelo OAKSY consegue estimar corretamente os expoentes das leis de escala próximo às bifurcações blowout, com erros absolutos menores que 0,05 — indicando que a dinâmica transversal pode ser aproximada pelo modelo estocástico.

Devido à simplicidade do mapa, obtivemos as órbitas periódicas para o atrator sincronizado e foi possível caracterizar os pontos críticos associados às bifurcações blowout utilizando apenas o conjunto de órbitas periódicas imersas no atrator caótico. Essas órbitas, por sua vez, permitiram calcular a intensidade da variabilidade de dimensão instável por meio da medida de contraste. Próximo das bifurcações blowout, mostramos que a intensidade de VDI é máxima, o que resulta em uma forte quebra de hiperbolicidade.

O segundo sistema estudado foi um sistema contínuo em  $\mathbb{R}^6$ , obtido a partir do acoplamento de dois sistemas idênticos do tipo Lorenz. O sistema desacoplado foi analisado por Elwakil *et al.* [60] e modela as tensões num circuito elétrico, sendo um exemplo físico

de sistema caótico. Ao acoplar esses sistemas, mostramos que surgem dois subespaços invariantes devido à simetria das equações, um sincronizado e um anti-sincronizado. Cada subespaço possui um atrator caótico de duas asas com bacia crivada.

Para verificar que as bacias do sistema de fato são crivadas, de modo análogo ao feito para o mapa, mostramos que todas as condições para crivamento são satisfeitas para uma intensidade de acoplamento  $\kappa$  maior que um valor crítico  $\kappa_c$ . Em particular, a presença de VDI pôde ser verificada através da análise da estabilidade transversal de órbitas periódicas obtidas pelo método de Newton-Raphson-Mees. Foi ainda observada a validade das leis de escala típicas em bacias crivadas para o atrator sincronizado, associadas a  $P^*(\ell)$  e  $p(d)$ . Essas leis puderam ser estimadas pelo modelo OAKSY, sugerindo que o modelo prevê corretamente o comportamento próximo dos pontos críticos mesmo em sistemas mais complicados.

Por fim, estudamos o comportamento desse sistema contínuo ao introduzir perturbações discretas nas trajetórias. Foi observado que a fração de órbitas que permanece sincronizada decai exponencialmente, com um tempo característico  $\langle\tau\rangle$ . Esse tempo, por sua vez, segue uma lei de potência em função da amplitude máxima de perturbação, com um expoente aproximadamente igual em módulo ao expoente da lei associada ao parâmetro  $P^*(\ell)$ . Esses resultados são esperados pelo modelo estocástico OAKSY para sistemas com tempo discreto e com um atrator ilimitado. Portanto, argumentamos neste trabalho que as conclusões obtidas por Ott e colaboradores parecem também ser válidas para sistemas contínuos perturbados discretamente e com atratores limitados.

Partindo dos resultados obtidos, surgem várias possibilidades de trabalhos futuros envolvendo as ideias investigadas. Por exemplo, o modelo OAKSY seria importante principalmente para obter informações em sistemas com uma grande quantidade de atratores, onde a dinâmica global é complexa e se torna inviável calcular  $P^*(\ell)$  e  $p(d)$  diretamente. Assim, uma possibilidade de trabalho futuro é verificar se o modelo continua válido em sistemas com mais de dois atratores crivados, como o apresentado na Referência [21].

Outra alternativa de continuação deste trabalho é estudar mais profundamente o tempo de sombreamento de órbitas para o sistema próximo de bifurcações blowout e sua relação com a intensidade de VDI. Isso pode ser feito estimando o tempo de sombreamento através do conceito de *brittleness* e de um algoritmo de refinamento [44] ou de modelos estocásticos semelhantes ao modelo OAKSY [42].

Por fim, poderíamos ainda tentar estender a análise da teoria de órbitas e a ideia de medida de contraste para o sistema contínuo do tipo Lorenz, de modo a mensurar a VDI em sistemas contínuos. Para isso, seria necessário determinar a dinâmica simbólica das órbitas periódicas imersas no atrator sincronizado, como feito para o atrator de Lorenz clássico [95], e considerar a periodicidade simbólica no cálculo da medida de contraste.

## REFERÊNCIAS

- 1 LUDWIG, D.; JONES, D. D.; HOLLING, C. S. Qualitative analysis of insect outbreak systems: The spruce budworm and forest. *The Journal of Animal Ecology*, JSTOR, v. 47, n. 1, p. 315, fev. 1978. ISSN 0021-8790. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2307/3939>>.
- 2 LUDWIG, D.; ARONSON, D. G.; WEINBERGER, H. F. Spatial patterning of the spruce budworm. *Journal of Mathematical Biology*, Springer Science and Business Media LLC, v. 8, n. 3, p. 217–258, out. 1979. ISSN 1432-1416. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF00276310>>.
- 3 SÄTERBERG, T.; MCCANN, K. Detecting alternative attractors in ecosystem dynamics. *Communications Biology*, Springer Science and Business Media LLC, v. 4, n. 1, ago. 2021. ISSN 2399-3642. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s42003-021-02471-w>>.
- 4 EPSTEIN, I. R. Complex dynamical behavior in “simple” chemical systems. *The Journal of Physical Chemistry*, American Chemical Society (ACS), v. 88, n. 2, p. 187–198, jan. 1984. ISSN 1541-5740. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1021/j150646a007>>.
- 5 EPSTEIN, I. R.; SHOWALTER, K. Nonlinear chemical dynamics: Oscillations, patterns, and chaos. *The Journal of Physical Chemistry*, American Chemical Society (ACS), v. 100, n. 31, p. 13132–13147, jan. 1996. ISSN 1541-5740. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1021/jp953547m>>.
- 6 COFFMAN, K. G.; MCCORMICK, W. D.; NOSZTICZIUS, Z.; SIMOYI, R. H.; SWINNEY, H. L. Universality, multiplicity, and the effect of iron impurities in the Belousov–Zhabotinskii reaction. *The Journal of Chemical Physics*, AIP Publishing, v. 86, n. 1, p. 119–129, jan. 1987. ISSN 1089-7690. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.452603>>.
- 7 GENTILI, P. L.; MICHEAU, J.-C. Light and chemical oscillations: Review and perspectives. *Journal of Photochemistry and Photobiology C: Photochemistry Reviews*, Elsevier BV, v. 43, p. 100321, jun. 2020. ISSN 1389-5567. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jphotochemrev.2019.100321>>.
- 8 HUBERMAN, B. A.; CRUTCHFIELD, J. P.; PACKARD, N. H. Noise phenomena in Josephson junctions. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing, v. 37, n. 8, p. 750–752, out. 1980. ISSN 1077-3118. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.92020>>.
- 9 WIESENFELD, K. New results on frequency-locking dynamics of disordered Josephson arrays. *Physica B: Condensed Matter*, Elsevier BV, v. 222, n. 4, p. 315–319, jun. 1996. ISSN 0921-4526. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0921-4526\(96\)85057-5](http://dx.doi.org/10.1016/0921-4526(96)85057-5)>.
- 10 GERHARDT, M.; SCHUSTER, H.; TYSON, J. J. A cellular automaton model of excitable media including curvature and dispersion. *Science*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 247, n. 4950, p. 1563–1566, mar. 1990. ISSN 1095-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.2321017>>.

- 11 LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, American Meteorological Society, v. 20, n. 2, p. 130–141, mar. 1963. ISSN 1520-0469. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)>.
- 12 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos*. 2. ed. London, England: CRC Press, 2019.
- 13 MILNOR, J. On the concept of attractor. *Communications in Mathematical Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 99, n. 2, p. 177–195, jun. 1985. ISSN 1432-0916. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01212280>>.
- 14 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York, NY: Springer, 2013. (Applied Mathematical Sciences).
- 15 SPARROW, C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer New York, 1982. ISSN 0066-5452. ISBN 9781461257677. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5767-7>>.
- 16 FEUDEL, U. Complex dynamics in multistable systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 18, n. 06, p. 1607–1626, jun. 2008. ISSN 1793-6551. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127408021233>>.
- 17 WANG, X.; KUZNETSOV, N. V.; CHEN, G. (Ed.). *Chaotic Systems with Multistability and Hidden Attractors*. Springer International Publishing, 2021. ISSN 2194-7295. ISBN 9783030758219. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-75821-9>>.
- 18 GREBOGI, C.; MCDONALD, S. W.; OTT, E.; YORKE, J. A. Exterior dimension of fat fractals. *Physics Letters A*, Elsevier BV, v. 110, n. 1, p. 1–4, jul. 1985. ISSN 0375-9601. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(85\)90220-8](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(85)90220-8)>.
- 19 SULI, E.; MAYERS, D. F. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2012.
- 20 GREBOGI, C.; MCDONALD, S. W.; OTT, E.; YORKE, J. A. Final state sensitivity: An obstruction to predictability. *Physics Letters A*, Elsevier BV, v. 99, n. 9, p. 415–418, dez. 1983. ISSN 0375-9601. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(83\)90945-3](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(83)90945-3)>.
- 21 ALEXANDER, J.; YORKE, J. A.; YOU, Z.; KAN, I. Riddled basins. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 02, n. 04, p. 795–813, dez. 1992. ISSN 1793-6551. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127492000446>>.
- 22 AGUIRRE, J.; VIANA, R. L.; SANJUÁN, M. A. F. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 1, p. 333–386, mar. 2009. ISSN 1539-0756. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.333>>.
- 23 OTT, E.; SOMMERER, J. C.; ALEXANDER, J. C.; KAN, I.; YORKE, J. A. Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 71, n. 25, p. 4134–4137, dez. 1993. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.4134>>.

- 24 MAISTRENKO, Y.; MAISTRENKO, V.; POPOVICH, A.; MOSEKILDE, E. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 57, n. 3, p. 2713–2724, mar. 1998. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.57.2713>>.
- 25 OTT, E.; SOMMERER, J. C. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Physics Letters A*, Elsevier BV, v. 188, n. 1, p. 39–47, maio 1994. ISSN 0375-9601. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)90114-7](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(94)90114-7)>.
- 26 VENKATARAMANI, S. C.; HUNT, B. R.; OTT, E. Bubbling transition. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 54, n. 2, p. 1346–1360, ago. 1996. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.54.1346>>.
- 27 NAGAI, Y.; LAI, Y.-C. Periodic-orbit theory of the blowout bifurcation. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 56, n. 4, p. 4031–4041, out. 1997. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.56.4031>>.
- 28 VIANA, R.; GREBOGI, C.; S.PINTO, S. de; LOPES, S.; BATISTA, A.; KURTHS, J. Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier BV, v. 206, n. 1–2, p. 94–108, jun. 2005. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2005.05.001>>.
- 29 OTT, E.; ALEXANDER, J.; KAN, I.; SOMMERER, J.; YORKE, J. The transition to chaotic attractors with riddled basins. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier BV, v. 76, n. 4, p. 384–410, set. 1994. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)90047-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90047-7)>.
- 30 PEREIRA, R. F.; CAMARGO, S.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Periodic-orbit analysis and scaling laws of intermingled basins of attraction in an ecological dynamical system. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 78, n. 5, nov. 2008. ISSN 1550-2376. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.78.056214>>.
- 31 CAZELLES, B.; BOTTANI, S.; STONE, L. Unexpected coherence and conservation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, The Royal Society, v. 268, n. 1485, p. 2595–2602, dez. 2001. ISSN 1471-2954. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1098/rspb.2001.1843>>.
- 32 CAZELLES, B. Blowout bifurcation with non-normal parameters in population dynamics. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 64, n. 3, ago. 2001. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.64.032901>>.
- 33 ASHWIN, P.; BUDESCU, J.; STEWART, I. Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators. *Physics Letters A*, Elsevier BV, v. 193, n. 2, p. 126–139, set. 1994. ISSN 0375-9601. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)90947-4](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(94)90947-4)>.
- 34 HEAGY, J. F.; CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 73, n. 26, p. 3528–3531, dez. 1994. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.3528>>.
- 35 DABROWSKI, A. The largest transversal Lyapunov exponent and master stability function from the perturbation vector and its derivative dot product (TLEVDP). *Nonlinear*

- Dynamics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 69, n. 3, p. 1225–1235, abr. 2012. ISSN 1573-269X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11071-012-0342-1>>.
- 36 SOMMERER, J. C.; OTT, E. A physical system with qualitatively uncertain dynamics. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 365, n. 6442, p. 138–140, set. 1993. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/365138a0>>.
- 37 SZEZECH, J.; LOPES, S.; CALDAS, I.; VIANA, R. Blowout bifurcation and spatial mode excitation in the bubbling transition to turbulence. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier BV, v. 390, n. 2, p. 365–373, jan. 2011. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2010.09.037>>.
- 38 LAI, Y.-C. Pseudo-riddling in chaotic systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier BV, v. 150, n. 1–2, p. 1–13, mar. 2001. ISSN 0167-2789. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00226-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00226-8)>.
- 39 SANTOS, V.; SZEZECH, J. D.; BATISTA, A. M.; IAROSZ, K. C.; BAPTISTA, M. S.; REN, H. P.; GREBOGI, C.; VIANA, R. L.; CALDAS, I. L.; MAISTRENKO, Y. L.; KURTHS, J. Riddling: Chimera’s dilemma. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 28, n. 8, ago. 2018. ISSN 1089-7682. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.5048595>>.
- 40 WOLTERING, M.; MARKUS, M. Riddled-like basins of transient chaos. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 4, p. 630–633, jan. 2000. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.630>>.
- 41 KOSTELICH, E. J.; KAN, I.; GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier BV, v. 109, n. 1–2, p. 81–90, nov. 1997. ISSN 0167-2789. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00161-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00161-9)>.
- 42 GREBOGI, C.; POON, L.; SAUER, T.; YORKE, J. A.; AUERBACH, D. Shadowability of chaotic dynamical systems. In: *Handbook of Dynamical Systems*. Elsevier, 2002. p. 313–344. ISBN 9780444501684. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S1874-575X\(02\)80028-5](http://dx.doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80028-5)>.
- 43 WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer New York, 1990. ISSN 0939-2475. ISBN 9781475740677. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7>>.
- 44 DO, Y.; LAI, Y.-C. Statistics of shadowing time in nonhyperbolic chaotic systems with unstable dimension variability. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 69, n. 1, jan. 2004. ISSN 1550-2376. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.69.016213>>.
- 45 SAUER, T.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. How long do numerical chaotic solutions remain valid? *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 1, p. 59–62, jul. 1997. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.59>>.
- 46 VALLEJO, J. C.; SANJUÁN, M. A. F. Predictability of orbits in coupled systems through finite-time Lyapunov exponents. *New Journal of Physics*, IOP

Publishing, v. 15, n. 11, p. 113064, nov. 2013. ISSN 1367-2630. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/15/11/113064>>.

47 CVITANOVIĆ, P. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier BV, v. 51, n. 1–3, p. 138–151, ago. 1991. ISSN 0167-2789. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(91\)90227-Z](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(91)90227-Z)>.

48 DEVANEY, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2. ed. Philadelphia, PA: Westview Press, 2003.

49 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 37, n. 5, p. 1711–1724, mar. 1988. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.37.1711>>.

50 HANNAY, J. H.; ALMEIDA, A. M. O. D. Periodic orbits and a correlation function for the semiclassical density of states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 17, n. 18, p. 3429–3440, dez. 1984. ISSN 1361-6447. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/17/18/013>>.

51 BERRY, M. V. Semiclassical theory of spectral rigidity. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 400, n. 1819, p. 229–251, ago. 1985. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0078>>.

52 OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 64, n. 11, p. 1196–1199, mar. 1990. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1196>>.

53 CVITANOVIĆ, P.; ARTUSO, R.; MAINIERI, R.; TANNER, G.; VATTAY, G. *Chaos: Classical and Quantum*. Copenhagen: Niels Bohr Inst., 2016. Disponível em: <<http://ChaosBook.org/>>.

54 LAI, Y.-C.; NAGAI, Y.; GREBOGI, C. Characterization of the natural measure by unstable periodic orbits in chaotic attractors. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 4, p. 649–652, jul. 1997. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.649>>.

55 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 57, n. 11, p. 1284–1287, set. 1986. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.1284>>.

56 LOPES, S. R.; SZEZECH, J. D.; PEREIRA, R. F.; BERTOLAZZO, A. A.; VIANA, R. L. Anomalous transport induced by nonhyperbolicity. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 1, jul. 2012. ISSN 1550-2376. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016216>>.

57 LAI, Y.-C. Unstable dimension variability and complexity in chaotic systems. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 59, n. 4, p. R3807–R3810, abr. 1999. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.59.R3807>>.

- 58 LAI, Y.-C.; GREBOGI, C. Obstruction to deterministic modeling of chaotic systems with an invariant subspace. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 10, n. 03, p. 683–693, mar. 2000. ISSN 1793-6551. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127400000487>>.
- 59 VALLEJO, J. C.; SANJUAN, M. A. F. *Predictability of chaotic dynamics*. 2. ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2019. (Springer series in synergetics).
- 60 ELWAKIL, A.; OZOGUZ, S.; KENNEDY, M. Creation of a complex butterfly attractor using a novel Lorenz-type system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 49, n. 4, p. 527–530, abr. 2002. ISSN 1057-7122. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/81.995671>>.
- 61 CZAJKOWSKI, B.; VIANA, R. Periodic orbit description of the blowout bifurcation and riddled basins of chaotic synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier BV, v. 184, p. 114994, jul. 2024. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114994>>.
- 62 CZAJKOWSKI, B. M.; VIANA, R. L. Riddled basins of chaotic synchronization and unstable dimension variability in coupled Lorenz-like systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 34, n. 9, set. 2024. ISSN 1089-7682. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/5.0219961>>.
- 63 JACKSON, T.; RADUNSKAYA, A. (Ed.). *Applications of Dynamical Systems in Biology and Medicine*. 1. ed. New York, NY: Springer New York, 2015. ISSN 2198-3224.
- 64 ROMEIRAS, F. J.; GREBOGI, C.; OTT, E.; DAYAWANSA, W. Controlling chaotic dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier BV, v. 58, n. 1–4, p. 165–192, set. 1992. ISSN 0167-2789. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90107-X](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(92)90107-X)>.
- 65 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. *Science*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 238, n. 4827, p. 632–638, out. 1987. ISSN 1095-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.238.4827.632>>.
- 66 BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 1, p. 9–20, mar. 1980. ISSN 1572-9648. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02128236>>.
- 67 OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems. *Trudy Moskov. Mat. Obšč*, v. 19, p. 179–210, 1968.
- 68 RUELLE, D. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, Springer Science and Business Media LLC, v. 50, n. 1, p. 27–58, dez. 1979. ISSN 1618-1913. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02684768>>.

- 69 OTT, W.; YORKE, J. A. When Lyapunov exponents fail to exist. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 78, n. 5, nov. 2008. ISSN 1550-2376. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.78.056203>>.
- 70 CAMARGO, S.; VIANA, R. L.; ANTENEODO, C. Intermingled basins in coupled Lorenz systems. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 85, n. 3, mar. 2012. ISSN 1550-2376. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.85.036207>>.
- 71 BENETTIN, G.; GALGANI, L.; STRELCYN, J.-M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 14, n. 6, p. 2338–2345, dez. 1976. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.14.2338>>.
- 72 VIANA, R. L. Riddled basins in complex physical and biological systems. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, PACIS - Panamerican Association for Computational Interdisciplinary Sciences, v. 1, n. 1, 2009. ISSN 2177-8833. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.6062/jcis.2009.01.02.0007>>.
- 73 LAI, Y.-C.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A.; VENKATARAMANI, S. C. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 1, p. 55–58, jul. 1996. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.55>>.
- 74 VIANA, R. L.; PINTO, S. E. de S.; BARBOSA, J. R. R.; GREBOGI, C. Pseudo-deterministic chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 13, n. 11, p. 3235–3253, nov. 2003. ISSN 1793-6551. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127403008636>>.
- 75 GARDINER, C. W. *Handbook of stochastic methods*. 3. ed. Berlin, Germany: Springer, 2004. (Springer series in synergetics).
- 76 KAMPEN, N. V. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Elsevier, 2007. ISBN 9780444529657. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-52965-7.X5000-4>>.
- 77 GONZÁLEZ-MIRANDA, J. M. *Synchronization and Control of Chaos: An Introduction for Scientists and Engineers*. Imperial College Press, 2004. ISBN 9781860945229. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/p352>>.
- 78 JAKOBSON, M. V. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 81, n. 1, p. 39–88, set. 1981. ISSN 1432-0916. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01941800>>.
- 79 WALTERS, P. *An Introduction to Ergodic Theory*. New York, NY: Springer, 2000. (Graduate texts in mathematics).
- 80 AUERBACH, D.; CVITANOVIĆ, P.; ECKMANN, J.-P.; GUNARATNE, G.; PROCACCIA, I. Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 58, n. 23, p. 2387–2389, jun. 1987. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.2387>>.

- 81 BIHAM, O.; WENZEL, W. Unstable periodic orbits and the symbolic dynamics of the complex Hénon map. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 42, n. 8, p. 4639–4646, out. 1990. ISSN 1094-1622. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.42.4639>>.
- 82 BIHAM, O.; WENZEL, W. Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 63, n. 8, p. 819–822, ago. 1989. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.63.819>>.
- 83 MAIOCCHI, C. C.; LUCARINI, V.; GRITSUN, A. Decomposing the dynamics of the Lorenz 1963 model using unstable periodic orbits: Averages, transitions, and quasi-invariant sets. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 32, n. 3, mar. 2022. ISSN 1089-7682. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/5.0067673>>.
- 84 LAI, Y.-C. Characterization of the natural measure by unstable periodic orbits in nonhyperbolic chaotic systems. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 56, n. 6, p. 6531–6539, dez. 1997. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.56.6531>>.
- 85 BOWEN, R.  $\omega$ -limit sets for axiom A diffeomorphisms. *Journal of Differential Equations*, Elsevier BV, v. 18, n. 2, p. 333–339, jul. 1975. ISSN 0022-0396. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396\(75\)90065-0](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396(75)90065-0)>.
- 86 VIANA, R. L.; BARBOSA, J. R. R.; GREBOGI, C.; BATISTA, A. M. Simulating a chaotic process. *Brazilian Journal of Physics*, FapUNIFESP (SciELO), v. 35, n. 1, p. 139–147, mar. 2005. ISSN 0103-9733. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332005000100010>>.
- 87 VIANA, R. L.; GREBOGI, C. Unstable dimension variability and synchronization of chaotic systems. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 62, n. 1, p. 462–468, jul. 2000. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.62.462>>.
- 88 HASLER, M.; MAISTRENKO, Y. An introduction to the synchronization of chaotic systems: coupled skew tent maps. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 44, n. 10, p. 856–866, 1997. ISSN 1057-7122. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/81.633874>>.
- 89 GULICK, D. *Encounters with chaos and fractals, second edition*. 2. ed. Philadelphia, PA: Chapman & Hall/CRC, 2012.
- 90 PLATT, N.; SPIEGEL, E. A.; TRESSER, C. On-off intermittency: A mechanism for bursting. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 70, n. 3, p. 279–282, jan. 1993. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.279>>.
- 91 LÜ, J.; CHEN, G. Generating multiscroll chaotic attractors: Theories, methods and applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific Pub Co Pte Ltd, v. 16, n. 04, p. 775–858, abr. 2006. ISSN 1793-6551. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127406015179>>.

- 92 ÖZOĞUZ, S.; ELWAKIL, A. S.; KENNEDY, M. P. Experimental verification of the butterfly attractor in a modified Lorenz system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 12, n. 07, p. 1627–1632, jul. 2002. ISSN 1793-6551. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127402005364>>.
- 93 HAKEN, H. At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point. *Physics Letters A*, Elsevier BV, v. 94, n. 2, p. 71–72, fev. 1983. ISSN 0375-9601. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(83\)90209-8](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(83)90209-8)>.
- 94 SAIKI, Y. Numerical detection of unstable periodic orbits in continuous-time dynamical systems with chaotic behaviors. *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 14, n. 5, p. 615–620, 2007. Disponível em: <<https://npg.copernicus.org/articles/14/615/2007/>>.
- 95 VISWANATH, D. Symbolic dynamics and periodic orbits of the Lorenz attractor. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 16, n. 3, p. 1035–1056, abr. 2003. ISSN 1361-6544. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/16/3/314>>.