UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ SETOR DE TECNOLOGIA CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

EDUARDO HENRIQUE MORO DA SILVA FELIPE JOSUÉ PEREIRA DE PAULA

ESTUDO E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS PARA REDUÇÃO DE ERROS DE LOCALIZAÇÃO UTILIZANDO TRANSDUTORES DE ULTRASSOM



EDUARDO HENRIQUE MORO DA SILVA FELIPE JOSUÉ PEREIRA DE PAULA

ESTUDO E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS PARA REDUÇÃO DE ERROS DE LOCALIZAÇÃO UTILIZANDO TRANSDUTORES DE ULTRASSOM

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à disciplina TE348 - TRABALHO DE CONCLU-SÃO DE CURSO II, do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, Setor de Tecnologia, da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Parente Ribeiro

CURITIBA 2024

TERMO DE APROVAÇÃO

EDUARDO HENRIQUE MORO DA SILVA FELIPE JOSUÉ PEREIRA DE PAULA

ESTUDO E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS PARA REDUÇÃO DE ERROS DE LOCALIZAÇÃO UTILIZANDO TRANSDUTORES DE ULTRASSOM

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à disciplina TE348 - TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO II, do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, Setor de Tecnologia, da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica , pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Parente Ribeiro Orientador

Prof. Dr. Rodrigo Jardim Riella UFPR

Prof. Dr. Odilon Luís Tortelli UFPR

Curitiba, 11 de Dezembro de 2024.

Eduardo Moro: Dedico este trabalho a Deus, por toda a força e inspiração que me foram concedidas; aos meus pais, Marciana e Fábio, que moveram o mundo para que eu precisasse apenas mover uma caneta, e cujo amor transcende qualquer expressão em palavras; ao meu irmão e melhor amigo, Guilherme Moro, que pulou na lama comigo quando a realização desse sonho teve início, e que me apoiou incansavelmente ao longo de toda a caminhada; e à Alanna Hilary Cândido, que acreditou mais em mim do que eu mesmo, e cujo apoio e incentivo tornaram os dias difíceis mais leves e suportáveis.

Felipe de Paula: Dedico este trabalho à minha família, que sempre foi minha maior fonte de apoio, inspiração e amor incondicional. Agradeço pela paciência nos momentos de ausência, pela motivação nos dias mais difíceis e pela confiança em meu potencial. Com todo o meu carinho e gratidão, dedico este marco àqueles que tornaram tudo isso possível.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos, em primeiro lugar, aos professores do setor de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Paraná, cuja dedicação e comprometimento ao ensino foram fundamentais para o nosso aprendizado e crescimento acadêmico. Em especial, expressamos nossa profunda gratidão ao nosso orientador, Prof. Dr. Eduardo Parente Ribeiro, por sua paciência, orientação e contribuições inestimáveis ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho. Sua experiência e apoio foram essenciais para alcançarmos nossos objetivos.

Agradecemos, também, aos nossos amigos e familiares, que estiveram ao nosso lado em todos os momentos, oferecendo suporte emocional, incentivo e compreensão. Sua presença e colaboração foram indispensáveis para que pudéssemos superar os desafios e concretizar este projeto.

RESUMO

Este trabalho explora técnicas de trilateração e estratégias de compensação de erros, com foco em medições de distância obtidas por sensores de baixo custo, particularmente sensores ultrassônicos. Um Sistema de Trilateração utilizando sensores ultrassônicos HC-SR04 e microcontroladores ESP32 foi desenvolvido para determinar a posição de um alvo em um ambiente controlado. O sistema combina diversas técnicas para reduzir erros nas medições de distância e nos cálculos intermediários, com os resultados comparados àqueles obtidos sem essas melhorias. Um ambiente de software foi projetado para realizar trilateração, simular algoritmos e processar dados visando melhorar a precisão da localização. Testes iniciais avaliaram o desempenho e as limitações do sensor HC-SR04, revelando desafios como interferência entre sensores, mitigados por meio de um algoritmo otimizado de agendamento de medições. O sistema também aplicou técnicas de filtragem para aprimorar a precisão, incluindo uma média móvel simples (SMA) para dados brutos de distância e uma média móvel exponencial (EMA) para posições calculadas, alcançando uma redução de 91% no erro relativo para certos cenários. Comparações entre métodos de mínimos quadrados lineares e não lineares para resolver o sistema de equações em cenários de trilateração mostraram resultados semelhantes, com os mínimos quadrados lineares sendo eficazes quando combinados com técnicas adequadas de processamento de sinais. O sistema demonstrou bom desempenho para posicionamento bidimensional, mas apresentou imprecisões no terceiro eixo quando o alinhamento dos sensores não era preciso. O estudo destaca a importância do posicionamento dos sensores na trilateração, pois sensores mal dispostos (por exemplo, colineares) podem gerar sistemas singulares ou mal condicionados, comprometendo a precisão. O posicionamento otimizado dos sensores minimiza a sensibilidade ao ruído e garante soluções confiáveis, tornando-se um fator crítico no desenvolvimento de sistemas de trilateração robustos e econômicos. Este trabalho busca contribuir para tecnologias de localização acessíveis, abordando as limitações de sensores de baixo custo e oferecendo soluções práticas para aplicações em robótica, automação e IoT, onde a eficiência de custo é essencial.

Palavras-chaves: Trilateração; sensores de baixo custo; sensores ultrassônicos; HC-SR04; ESP32; mínimos quadrados; redução de erros; processamento de sinais.

ABSTRACT

This work explores trilateration techniques and error compensation strategies, focusing on distance measurements obtained from low-cost sensors, particularly ultrasonic sensors. A Trilateration System using HC-SR04 ultrasonic sensors and ESP32 microcontrollers was developed to determine the position of a target in a controlled environment. The system combines multiple techniques to reduce errors in distance measurements and intermediate calculations, with results compared to those obtained without such enhancements. A software environment was designed to perform trilateration, simulate algorithms, and process data to improve positional accuracy. Initial tests evaluated the performance and limitations of the HC-SR04 sensor, revealing challenges such as interference between sensors, which were mitigated through an optimized measurement scheduling algorithm. The system also applied filtering techniques to enhance accuracy, including a simple moving average (SMA) for raw distance data and an exponential moving average (EMA) for calculated positions, achieving a 91% reduction in relative error for certain scenarios. Comparisons of linear and nonlinear least squares methods for solving the system of equations in trilateration scenarios showed similar results, with linear least squares proving effective when paired with appropriate signal processing techniques. The system demonstrated good performance for two-dimensional positioning but showed inaccuracies in the third dimension when sensor alignment was imprecise. The study highlights the importance of sensor positioning in trilateration, as poorly arranged sensors (e.g., collinear configurations) can lead to singular or poorly conditioned systems, compromising accuracy. Optimal sensor placement minimizes sensitivity to noise and ensures reliable solutions, making it a critical factor in developing robust and cost-effective trilateration systems. This work aims to contribute to affordable location technologies by addressing the limitations of low-cost sensors, offering practical solutions for applications in robotics, automation, and IoT, where cost-efficiency is essential.

Key-words: Trilateration; low-cost sensors; ultrasonic sensors; HC-SR04; ESP32; least squares; error reduction; signal processing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA	1 –	PROBLEMA: 2D X 3D	31
FIGURA	2 –	ILUSTRAÇÃO DO MODELO PROPOSTO	32
FIGURA	3 —	DIAGRAMA DE BLOCOS DOS ENSAIOS COM O SENSOR HC-	
		SR04	36
FIGURA	4 –	FLUXOGRAMA DOS ENSAIOS DE PRECISÃO E EXATIDÃO	
		COM O SENSOR HC-SR04	37
FIGURA	5 –	FLUXOGRAMA DOS ENSAIOS DE COMPENSAÇÃO POR TEM-	
		PERATURA	38
FIGURA	6 –	ENSAIO DO ÂNGULO DE ABERTURA DOS SENSORES	39
FIGURA	7 –	ENSAIO DE INTERFERÊNCIA: SENSORES LADO A LADO	39
FIGURA	8 -	ENSAIO DE INTERFERÊNCIA: SENSORES LATERALMENTE	
		ESPAÇADOS	40
FIGURA	9 -	ENSAIO DE MEDIÇÃO DE DISTÂNCIA ATÉ A SUPERFÍCIE DA	
		ÁGUA	41
FIGURA	10 —	DIAGRAMA SIMPLIFICADO DO SISTEMA PROPOSTO	41
FIGURA	11 –	FLUXOGRAMA DO HARDWARE	42
FIGURA	12 –	DIAGRAMA DE BLOCOS DO HARDWARE	43
FIGURA	13 –	SISTEMA FÍSICO COM 4 SENSORES	43
FIGURA	14 –	FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO SOFTWARE DE LOCALIZA-	
		ÇÃO	44
FIGURA	15 –	EXEMPLO DE VALORES PREDETERMINADOS	47
FIGURA	16 –	SAÍDA DO PROGRAMA DURANTE SIMULAÇÃO	48
FIGURA	17 –	EXIBIÇÃO GRÁFICA DA POSIÇÃO CALCULADA EM 2D	49
FIGURA	18 –	EXIBIÇÃO GRÁFICA DA POSIÇÃO CALCULADA EM 3D	50
FIGURA	19 –	CIRCUITO MASTER	53
FIGURA	20 –	CIRCUITO SLAVES	54
FIGURA	21 –	INTERFACE ENTRE MICROCONTROLADOR E O SENSOR HC-	
		SR04	58
FIGURA	22 –	MÉDIAS DA DISTÂNCIA	61
FIGURA	23 –	ERROS RELATIVOS	61
FIGURA	24 –	AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OB-	
		JETO A 50 CENTÍMETROS	62
FIGURA	25 –	MÉDIAS DAS LEITURAS	62
FIGURA	26 –	DESVIO PADRÃO PARA DIFERENTES DISTÂNCIAS	63
FIGURA	27 –	ENSAIO DE ÂNGULO DE ABERTURA DO SENSOR 1	64

FIGURA	28 –	ENSAIO DE ÂNGULO DE ABERTURA DO SENSOR 2	65
FIGURA	29 –	ENSAIO DE ÂNGULO DE ABERTURA DO SENSOR 3	65
FIGURA	30 –	SISTEMA ESPERADO	66
FIGURA	31 –	SISTEMA TEÓRICO	66
FIGURA	32 –	MEDIÇÕES COM OS SENSORES LADO A LADO SEM INTER-	
		VALO ENTRE AS LEITURAS	67
FIGURA	33 –	MEDIÇÕES COM OS SENSORES ESPAÇADOS LATERALMENTE	
		SEM INTERVALO ENTRE AS LEITURAS	67
FIGURA	34 –	MEDIÇÕES COM OS SENSORES LADO A LADO COM INTER-	
		VALO ENTRE AS LEITURAS	68
FIGURA	35 –	ESPAÇAMENTO LATERAL MÍNIMO PARA QUE NÃO HAJA IN-	
		TERFERÊNCIA ENTRE OS SENSORES	68
FIGURA	36 –	POSIÇÃO CALCULADA DE UM PONTO REPRESENTANDO A	
		SUPERFÍCIE DA ÁGUA	69
FIGURA	37 –	SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: MÉDIA	71
FIGURA	38 –	SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: ERRO PADRÃO	71
FIGURA	39 –	SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: ERRO RELATIVO	72
FIGURA	40 –	SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: REDUÇÃO DE ERROS	72
FIGURA	41 –	SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: REDUÇÃO DE ERROS A	74
FIGURA	42 –	SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: REDUÇÃO DE ERROS B	74
FIGURA	43 –	SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO A, VALORES MÉDIOS OB-	
		TIDOS	77
FIGURA	44 –	SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO A, VALORES MÉDIOS OB-	
		TIDOS	78
FIGURA	45 –	SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO A, ERROS RELATIVOS	
		MÉDIOS	79
FIGURA	46 –	SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO A, ERROS RELATIVOS	
		MÉDIOS	80
FIGURA	47 –	SIMULAÇÃO: COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS, REDUÇÃO ERRO	
		RELATIVO, GRUPO A	82
FIGURA	48 –	SIMULAÇÃO: COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS, REDUÇÃO ERRO	
		RELATIVO, GRUPO B	83
FIGURA	49 –	SIMULAÇÃO: FILTRO FIR, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO A	84
FIGURA	50 –	SIMULAÇÃO: FILTRO FIR, REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO A	85
FIGURA	51 –	SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO RELA-	
		TIVO, GRUPO A	86
FIGURA	52 –	SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO PADRÃO,	
		GRUPO A	87

FIGURA 53 – REGIÃO DETECTÁVEL PELO SISTEMA UTILIZANDO UI	M OB-	89
FIGURA 54 – REGIÃO DETECTÁVEL PELO SISTEMA UTILIZANDO UI	 М ОВ-	00
		90
FIGURA 55 – REGIAO DETECTAVEL PELO SISTEMA COM 3 SENSO	ORES	01
FIGURA 56 – REGIÃO DETECTÁVEL PELO SISTEMA COM 4 SENSO	ORES	91
APÓS MITIGAÇÃO DA INTERFERÊNCIA		91
FIGURA 57 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES COM O OB	JETO	
		92
FIGURA 58 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES COM O OB	JETO	00
FIGURA 59 – COORDENADAS CAI CULADAS NOS TESTES UTILIZAND	0 FII -	93
		94
FIGURA 60 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES UTILIZAND	O FIL-	
TRO FIR		95
FIGURA 61 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES UTILIZAN	DO O	06
FIGURA 62 – COORDENADAS CAI CUI ADAS NOS TESTES UTILIZAND	 О М́É-	90
		97
FIGURA 63 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES COM 1 SEI	NSOR	
		98
FIGURA 64 – DESVIO PADRAO CALCULADO NOS TESTES COM 1 SEI	NSOR	00
FIGURA 65 – ERBO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM 1 SEM		99
MAIS ALTO QUE OS OUTROS		100
FIGURA 66 – SIMULACÕES SETS 0 AO 3: DESVIO PADRÃO		109
FIGURA 67 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: MÉDIA		110
FIGURA 68 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: DESVIO PADRÃO		111
FIGURA 69 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: ERRO PADRÃO		111
FIGURA 70 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: ERRO RELATIVO		112
FIGURA 71 – SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO A, DESVIOS PADRÔ	ĎES .	114
FIGURA 72 – SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO A, DESVIOS PADRÔ	DES .	115
FIGURA 73 – SIMULAÇAO: 3 SENSORES, GRUPO B, VALORES MÉDIO	S OB-	
		116
TIDOS	-3 UD-	117

FIGURA	75 – SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO B, ERROS RELATIVOS MÉDIOS	118
FIGURA	76 – SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO B, ERROS RELATIVOS	
		119
FIGURA	77 – SIMULAÇAO: 3 SENSORES, GRUPO B, DESVIOS PADROES	120
FIGURA	78 – SIMULAÇAO: 4 SENSORES, GRUPO B, DESVIOS PADROES .	121
FIGURA	79 – SIMULAÇÃO: FILTRO FIR, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO E	3122
FIGURA	80 – SIMULAÇÃO: FILTRO FIR, REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO E	8123
FIGURA	81 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO	
	Α	124
FIGURA	82 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO REDUÇÃO ERRO PA-	
	DRÃO, GRUPO A	125
FIGURA	83 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO	
	Β	126
FIGURA	84 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO REDUÇÃO ERRO PA-	
		127
FIGURA	85 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO RELA-	
	TIVO, GRUPO B	128
FIGURA	86 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO PADRÃO,	
	GRUPO B	129
FIGURA	87 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, ERRO RELATIVO MÉDIO,	
	GRUPO A	130
FIGURA	88 – SIMULAÇAO: FILTROS SMA E EMA, ERRO RELATIVO MÉDIO,	
	GRUPO B	131
FIGURA	89 – SIMULAÇAO: FILTROS SMA E EMA, VALORES MEDIOS, GRUPO	
	Α	132
FIGURA	90 – SIMULAÇÃO: FILI ROS SMA E EMA, VALORES MEDIOS, GRUPO	
	В	133
FIGURA	91 – AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OB-	
	JETO A 100 CENTÍMETROS	134
FIGURA	92 – AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OB-	
	JETO A 200 CENTÍMETROS	135
FIGURA	93 – AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OB-	
	JETO A 300 CENTÍMETROS	135
FIGURA	94 – VALORES MÍNIMOS MEDIDOS	136
FIGURA	95 – VALORES MÁXIMOS MEDIDOS	136
FIGURA	96 – RMSE PARA DIFERENTES DISTÂNCIAS	137
FIGURA	97 – ERRO RELATIVO PARA DIFERENTES DISTÂNCIAS	137

FIGURA	98 – DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM O OBJETO	
		140
FIGURA	99 – ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM O OBJETO	
		141
FIGURA	100-DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM O OBJETO	
	RETANGULAR	142
FIGURA	101–ERRO PADRAO CALCULADO NOS TESTES COM O OBJETO	
		143
FIGURA	102-DESVIO PADRAO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FIL-	
		144
FIGURA	103-ERRO PADRAO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FIL-	4 4 5
		145
FIGURA	TRO SMA	146
		140
IGUNA	TBO FIR	1/17
		1-77
	TBO FIB	148
FIGURA	107–EBBO BELATIVO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO EIL-	110
		149
FIGURA	108–DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO O	
	ΜÉTODO LINEAR	150
FIGURA	109-ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO O	
	ΜÉTODO LINEAR	151
FIGURA	110-ERRO RELATIVO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO O	
	MÉTODO LINEAR	152
FIGURA	111-DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO MÉ-	
	TODO NÃO LINEAR	153
FIGURA	112-ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO MÉ-	
	TODO NÃO LINEAR	154
FIGURA	113-ERRO RELATIVO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO MÉ-	
	TODO NÃO LINEAR	155

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – TABELA DE DADOS OBTIDOS DO ENSAIO DE COMPENSAÇÃO	
DE TEMPERATURA	60
TABELA 2 – DADOS OBTIDOS DO ENSAIO DE MEDIÇÃO DE DISTÂNCIA	
ATÉ A SUPERFÍCIE DA ÁGUA	69
TABELA 3 – VALORES PREDETERMINADOS DO SISTEMA	69
TABELA 4 – REFERÊNCIA 1 DOS ÍNDICES DOS PONTOS	75
TABELA 5 – REFERÊNCIA 2 DOS ÍNDICES DOS PONTOS	76
TABELA 6 – COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRA-	
DOS LINEAR E NÃO LINEAR	89
TABELA 7 – REDUÇÃO DOS PARÂMETROS QUANDO UTILIZADO O MÉ-	
TODO LINEAR	89
TABELA 8 – SIMULAÇÕES SET 0: POSIÇÕES CALCULADAS	107
TABELA 9 – SIMULAÇÕES SET 1: POSIÇÕES CALCULADAS	107
TABELA 10 – SIMULAÇÕES SET 2: POSIÇÕES CALCULADAS	108
TABELA 11 – SIMULAÇÕES SET 3: POSIÇÕES CALCULADAS	108
TABELA 12 – SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: INTEVALOS DE CONFIANÇA	108
TABELA 13 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: INTEVALOS DE CONFIANÇA	109
TABELA 14 – TABELA DE DADOS DOS TESTES COM O OBJETO CILÍNDRICO	138
TABELA 15 – TABELA DE DADOS DOS TESTES COM O OBJETO RETANGULAR	3139

SUMÁRIO

1 1 1		16 17
1 1 1		17
112		17
1.1.2	ALITÔNOMA	18
113		18
1.2	OBJETIVOS	19
1.2.1	Objetivo Geral	19
1.2.2	Objetivos Específicos	19
1.3	JUSTIFICATIVA	20
2	REVISÃO DE LITERATURA	21
2.1	SENSOR DE ULTRASSOM	21
2.1.1	Princípio de Funcionamento	21
2.1.2	Vantagens e Aplicações	22
2.1.3	Desafios	22
2.2	TRILATERAÇÃO	23
2.2.1	Abordagem direta	24
2.3		27
2.4		27
2.5		27
2.5.1	Média Móvel Simples	27
2.5.2		28
2.5.3	Média Móvel Exponencial	28
3		30
3.1	REVISAO DE TRABALHOS SIMILARES E DECISOES INICIAIS	30
3.1.1	Análise Referente ao número de dimensões (2D e 3D)	30
3.1.2	Número de Sensores	30
3.1.3	Modelo Proposto para o Sistema de Trilateração	31
3.1.3.1	Trilateração em R2	31
3.1.3.2	Trilateração em R3	32
3.2	ENSAIOS COM O SENSOR HC-SR04	34
3.2.1	Testes de precisão e exatidão	34
3.2.2	Compensação por Temperatura	36
3.2.3	Testes de Ângulo de Medição	37
3.2.4	Ensaio de verificação de interferência	38
3.2.5	Avaliação do desempenho do Sensor HC-SR04 na Medição de Nìveis	
	de lìquidos	39
3.3	DEFINIÇÃO DO SISTEMA DE TRILATERAÇÃO	40
3.4	DEFINIÇÃO DO SISTEMA FÍSICO	41

3.5	PROGRAMA PRINCIPAL DE TRILATERAÇÃO	43
3.5.1	Métodos de Solução do Sistema de Equações	44
3.5.2	Filtros Digitais Aplicados	45
3.5.2.1	Filtro 1	45
3.5.2.2	Filtro 2	46
3.5.3	Simulador	46
3.6		48
3.7		48
3.8		49 40
201		49
2011		49
0.9.1.1		51
3.9.1.2	ESP32	53
3.9.1.2.1		54
3.9.1.2.2		55
3.9.1.2.3		56
3.9.1.3		56
3.9.1.3.1	Especificações Técnicas	57
3.9.1.3.2		57
3.9.1.4	Sensor DHT22	58
3.9.2		58
4 4.1	ENSAIOS COM O SENSOR HC-SR04	60 60
4.1.1	Resultados do ensaio de compensação de temperatura	60
4.1.2	Resultados dos ensaios de precisão e exatidão	60
4.1.3	Resultados dos ensaios de ângulo de medição	64
4.1.4	Resultados dos ensaios de interferência	65
4.1.5	Resultados da avaliação do Sensor HC-SR04 na Medição de Níveis	
		68
4.2	SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM DUAS DIMENSÕES	69
4.2.1	Sets 0 ao 3 e Efetividade dos Filtros Digitais	70
4.2.2	Sets 4 ao 7 e os Algoritmos de Solução de Sistemas de Equações .	73
4.3	SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM TRÊS DIMENSÕES	73
4.3.1	Comparação entre 3 sensores e 4 sensores	75
4.3.2	Comparação entre o Método dos Mínimos Quadrados Linear e o Não	
	Linear	81
4.3.3	Emprego de Filtro FIR	82
4.3.4	Emprego de Filtro SMA	84
4.3.5	Emprego de Filtro EMA juntamente ao SMA	85
4.4	TESTES DO PROTÓTIPO E DO SISTEMA DE TRILATERAÇÃO	87
4.4.1	Região de detecção	87

4.4.2	Comparação entre método linear e não linear no sistema com 3 sensores 88
4.4.3	Cálculo das coordenadas pelo sistema com 3 sensores 90
4.4.4	Comparação entre filtro SMA e FIR no sistema com 4 sensores 92
4.4.5	Comparação entre Método dos Mìnimos Quadrados Linear e Não
	Linear no sistema com 4 sensores
4.4.6	Testes do sistema em 3 dimensões
5	CONCLUSÃO
	REFERÊNCIAS
	APÊNDICE A – SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM DUAS DIMENSÕES 107
A.1	15 PRIMEIROS VALORES CALCULADOS
A.2	SETS 0 AO 3: DESVIO PADRÃO E INTERVALOS DE CONFIANÇA . 107
A.3	SETS 0 AO 4: DADOS DOS RESULTADOS 109
	APÊNDICE B – SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM TRÊS DIMEN-
	SÕES: 3 SENSORES E 4 SENSORES 113
B.1	DESVIOS PADRÕES: 3 SENSORES E 4 SENSORES $\dots \dots \dots$
B.2	COMPARAÇÃO GRUPO B: 3 SENSORES E 4 SENSORES 113
	APÊNDICE C – SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM TRÊS DIMEN-
	SÕES: FILTROS
C.1	SIMULAÇÕES DO EMPREGO DO FILTRO FIR
C.2	SIMULAÇÕES DO EMPREGO DO FILTRO SMA
C.3	SIMULAÇÕES DO EMPREGO DO FILTRO SMA COM EMA 122
	APÊNDICE D – ENSAIOS COM O SENSOR HC-SR04 134
D.1	RESULTADOS DOS ENSAIOS DE PRECISAO E EXATIDAO 134
	APÊNDICE E – TESTES DO PROTÓTIPO E DO SISTEMA DE TRI-
	LATERAÇÃO
E.1	CÁLCULO DAS COORDENADAS PELO SISTEMA COM 3 SENSORES138
E.2	COMPARAÇÃO ENTRE FILTRO SMA E FIR NO SISTEMA COM 4
	SENSORES
E.3	COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO DOS MÌNIMOS QUADRADOS
	LINEAR E NÃO LINEAR NO SISTEMA COM 4 SENSORES 138

1 INTRODUÇÃO

Diversas áreas científicas, industriais e comerciais apresentam uma demanda pelo rastreamento e localização de maquinário, veículos, objetos e até mesmo pessoas. O *Global Positioning System* (GPS) é utilizado globalmente para este fim, mais especificamente, para **geoposicionamento** ou **geolocalização**. Para casos em que é necessária a localização local, em perímetros específicos, a utilização do GPS não é a mais viável. Por exemplo, em localidades pequenas ou no interior de estabelecimentos, onde é necessário rastrear a posição de dado objeto ou máquina autônoma em relação a um referencial, ou em complexos de mineração onde é necessário monitorar a localização do maquinário ou do pessoal. Portanto, para esses casos são empregados *Indoor Positioning Systems* (IPSs). Há casos, também, em que a trilateração é empregada para a realização de mapeamento dos arredores de um ambiente, para auxiliar com o sensoriamento de robôs, ou também para realização de análises topográficas (*surveying*) de certos locais.

O GPS, por exemplo, permite conhecer a posição de certo ponto a partir da técnica de trilateração, onde o receptor GPS recebe informações de uma rede de satélites, como a posição e horários dos mesmos e, com isso, o receptor pode calcular sua distância até os satélites, permitindo então um algoritmo de trilateração determinar sua posição, como latitude, longitude e altitude (GPS.gov, 2024). Similarmente, é possível realizar a trilateração nos casos locais descritos anteriormente, porém, utilizando sensores *in loco* que permitam a determinação de distâncias até o alvo desejado. Esses sensores podem ser sensores ultrassônicos, sensores infravermelho, sensores laser, câmeras de profundidade, dentre outros.

Muitos sensores de distância, entretanto, utilizam tecnologias complexas que requerem componentes precisos e, além disso, realizam um processamento de dados específico para obter as medidas. Sensores de ultrassom, por outro lado, geralmente empregam tecnologias simples e são baratos, e utilizam basicamente o tempo de viagem das ondas sonoras para determinar as distâncias. O seu emprego para realização de trilateração é algo promissor, dadas as suas características. Este trabalho busca, então, estudar e desenvolver um sistema de localização de baixo custo, empregando sensores simples de ultrassom, com ênfase em sensores *low-end*, visando um baixo custo, especificamente para os sensores. Sensores *low-end*, entretanto, implicam em baixa **exatidão** e **precisão** em suas medidas, portanto, é proposta também a análise e emprego de diferentes técnicas para realizar a trilateração dadas essas condições, sendo dessa forma possível implementar métodos e algoritmos capazes de calcular satisfatoriamente a posição de dado alvo, dadas as limitações dos sensores.

1.1 POTENCIAL MERCADOLÓGICO DO PROJETO

Se o sistema proposto atingir um nível de precisão e exatidão altos, assim como resultados consistentes e confiáveis, há certas áreas em que seu emprego seria muito beneficial.

Visto que o sistema proposto sugere o uso de sensores de ultrassom *low-end*, implica-se que ele terá um preço reduzido comparado a sistemas de localização que empregam outros sensores mais complexos. Portanto, utilizar um sistema preciso e barato pode ser interessante para o desenvolvimento de vários outros sistemas. Por exemplo:

- Sistemas de Indoor Positioning System (IPS) de baixo custo, para localização de maquinário e veículos em campo ou em fábricas;
- Sistemas de sensoriamento para áreas da robótica, auxiliando no mapeamento dos arredores de dado "robô", auxilidando na sua locomoção e execução de tarefas.
- Ferramentas simples de escaneamento de superfícies, ou seja, da mesma forma que o sistema poderia ser implementado no mapeamento para robótica, seria possível realizar um sistema de escaneamento tridimensional de grandes superfícies, sendo o mesmo de custo reduzido.

Outra aplicação relevante considerada seria a adaptação do sistema proposto para a integração a um sistema de sensoriamento de uma máquina com movimentação autônoma, como aspiradores robôs, por exemplo.

1.1.1 APLICAÇÃO EM INDOOR POSITIONING SYSTEMS (IPS)

O sistema proposto neste trabalho pode ser desenvolvido e adaptado para ser aplicado em sistemas IPS, entretanto, não limitando a locais fechados (*indoor*), mas também considerar regiões externas predeterminadas. Estes sistemas devem ter como objetivo localizar maquinário, por exemplo, equipamentos de escavação, mineração ou garimpo, como escavadeiras, perfuratrizes, caminhões, pás carregadeiras, dentre outros. O sistema proposto seria capaz de localizar pontos específicos no espaço, ou calcular aproximadamente o centro (em dado plano) de certo objeto. Dessa forma, o sistema nessa forma de operação, seria capaz de localizar certo equipamento em campo, desde que suas dimensões sejam significativas e que não haja obstrução por outros corpos nas áreas entre o equipamento alvo e os sensores.

1.1.2 APLICAÇÃO A UM SISTEMA DE SENSORIAMENTO DE MÁQUINA AUTÔ-NOMA

O sistema proposto, através de múltiplos grupos de sensores, consegue obter a localização de um ponto no espaço, buscando exatidão significativa e um custo reduzido, devido ao emprego de componentes low-end. Se um histórico complexo de armazenamento de pontos for implementado, seria possível desenvolver um aparato de mapeamento, ou seja, capturar diversos pontos, em certos períodos de tempo, através de snapshots (considerando o campo de visão expandido do sistema, com múltiplos sensores por módulo de medida) das regiões ao redor de uma máquina autônoma, realizando, efetivamente, um "mapeamento" do ambiente, facilitando a navegação de dada máquina, ou até mesmo para fins de telemetria. Para que isto seja possível, seria necessário que os módulos de medição (compostos por seu microcontrolador e seu grupo de sensores) sejam instalados na própria máquina autônoma, de forma que possam "ver" regiões coerentes e possam realizar a trilateração. Seria necessário o emprego de múltiplos sistemas operando simultaneamente para que o mapeamento fosse possível. Além disso, como já mencionado, seria necessário a implementação de um histórico complexo de pontos calculados, tendo como referencial a própria máquina detentora dos sensores.

1.1.3 APLICAÇÃO EM SISTEMA DE ESTOQUE INTELIGENTE

O sistema proposto também pode ser utilizado como ferramenta para um sistema de gerenciamento de estoque. Para isto, sensores ultrassônicos podem ser posicionados em locais estratégicos, como tanques de armazenamento de líquidos, silos pequenos ou recipientes menores para grãos, para a medir a distância até a superfície do líquido ou do material sólido. Utilizando técnicas de trilateração, o sistema buscaria calcular com precisão o nível do que está sendo medido, permitindo o monitoramento em tempo real. Essa abordagem é fundamental para aplicações onde a precisão na medição do nível é crítica, como na indústria alimentícia ou farmacêutica.

A solução proposta pode ser integrada a sistemas de gestão de estoque, como ERP (*Enterprise Resource Planning*) ou WMS (*Warehouse Management System*), automatizando processos e fornecendo dados em tempo real para auxiliar na tomada de decisões. A comunicação entre os sensores e um módulo central é realizada por meio de ESP-NOW, garantindo uma troca rápida de dados com baixa latência, sem depender de roteadores ou infraestrutura Wi-Fi complexa. Assim, diversos ESP32, configurados como escravos, coletam informações dos sensores ultrassônicos e enviam esses dados para um ESP-Master. Este, por sua vez, processa as informações e utiliza a rede Wi-Fi para transmitir relatórios e alertas para um sistema central, como um computador ou servidor na nuvem.

O sistema pode calcular a distância em múltiplas direções, resultando em medições mais exatas e confiáveis. Por meio de leituras constantes, o sistema pode gerar alertas sobre níveis críticos, ajudando na reposição proativa de produtos e evitando transbordamentos ou falta de estoque.

A combinação entre ESP-NOW e Wi-Fi diminui o tráfego na rede principal, melhorando a eficiência da comunicação e garantindo que dados importantes sejam transmitidos de forma confiável.

Outra vantagem desse sistema é seu baixo consumo energético. Como a comunicação por ESP-NOW é mais eficiente do que uma conexão Wi-Fi contínua, a solução pode ser alimentada por baterias de longa duração, o que simplifica a instalação e a manutenção. O sistema é também altamente escalável, permitindo a adição de novos sensores e módulos ESP32 conforme a necessidade, sem comprometer a funcionalidade.

Entretanto, alguns desafios devem ser considerados na implementação dessa solução. Em ambientes industriais, pode haver interferências que afetem o desempenho da comunicação via ESP-NOW, exigindo uma análise cuidadosa para definir canais adequados. Também destaca-se que o alcance do ESP-NOW é limitado, o que pode exigir a instalação de repetidores ou pontos intermediários para garantir a cobertura em grandes espaços.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo estudar técnicas de trilateração, assim como técnicas para compensação e redução de erros, tanto em medidas de distância obtidas por sensores *low end*, dando ênfase em sensores ultrassônicos, quanto nos cálculos intermediários para realizar a trilateração.

A partir das técnicas estudadas, desenvolver então um **Sistema de Trilatera**ção utilizando sensores de ultrassom, para determinar a posição de certo ponto em um ambiente isolado. Busca-se realizar testes utilizando as combinações de técnicas pertinentes para redução de erros e então comparar os resultados com os obtidos sem a utilização de tais técnicas.

1.2.2 Objetivos Específicos

Tem-se como principais resultados a serem atingidos:

 Desenvolver um ambiente em software para efetivamente realizar a trilateração, simulações e testes de algoritmos que contribuam para o cálculo da posição de dado ponto, e também para a redução de erros;

- Avaliar o desempenho do sensor HC-SR04 por meio de ensaios, identificando suas características principais, como alcance, precisão, e comportamento em diferentes condições de uso;
- Realizar a implementação do Sistema de Trilateração, utilizando quatro sensores ultrassônicos HC-SR04 e quatro microcontroladores ESP32, em uma configuração Master-Slaves.
- Utilizar o protocolo ESP-NOW para realizar a comunicação eficiente entre o ESP Master e os ESPs Slaves, assegurando a troca de dados de distância entre os módulos. Após consolidar as medições, o ESP Master enviará os dados para um computador por meio de uma porta serial.
- Com o programa principal, realizar leitura da porta serial, obtendo assim as distâncias medidas e, por fim, executar os algoritmos para realizar a trilateração.

1.3 JUSTIFICATIVA

Este trabalho foca na pesquisa e desenvolvimento de um sistema de trilateração utilizando sensores ultrassônicos de baixo custo e desempenho modesto, abordando uma necessidade crítica de tecnologias de localização acessíveis e precisas. Muitos setores, como robótica, automação e IoT, dependem de sistemas de posicionamento precisos, mas sensores de alta qualidade podem ser proibitivamente caros para uso em larga escala. Ao enfrentar as limitações inerentes aos sensores de baixo custo — como ruído, interferência e variabilidade — este trabalho busca oferecer uma solução prática que equilibre custo e desempenho. A relevância desta pesquisa está em seu potencial de democratizar a tecnologia de localização avançada, permitindo uma adoção mais ampla em aplicações onde a acessibilidade econômica é fundamental.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 SENSOR DE ULTRASSOM

Os sensores ultrassônicos são dispositivos amplamente utilizados em diversas áreas, incluindo robótica, automação industrial e sistemas de medição de distâncias. Esses sensores operam com base na emissão e recepção de ondas sonoras de alta frequência (geralmente em torno de 40 kHz), permitindo a medição precisa de distâncias ao calcular o tempo de voo das ondas sonoras refletidas de volta ao sensor. Segundo Terzic et al. (2013), o ultrassom é preferido sobre o som audível (20 Hz a 20 kHz) em sensores devido à sua capacidade de oferecer maior precisão e resolução. Sons audíveis têm comprimentos de onda mais longos, o que resulta em menor resolução espacial e maior dificuldade em detectar pequenos detalhes ou medir pequenas distâncias com precisão. Além disso, o ultrassom é menos susceptível a interferências de ruídos ambientais, proporcionando medições mais confiáveis em ambientes ruidosos.

2.1.1 Princípio de Funcionamento

O princípio básico dos sensores ultrassônicos envolve a geração de um pulso de ultrassom através de um transdutor, que converte energia elétrica em energia mecânica (ondas de som) e vice-versa. De acordo com Terzic et al. (2013), é comum a utilização de transdutores piezoelétricos devido à sua capacidade de operar em altas frequências e sua eficiência na conversão de energia. O pulso gerado viaja pelo ar até encontrar um objeto, sendo então refletido de volta ao sensor. O tempo decorrido entre a emissão e a recepção do pulso é medido e utilizado para calcular a distância até o objeto através da seguinte equação:

$$D = \frac{100 \times V_{som} \times \Delta T}{2} \tag{2.1}$$

Onde:

- D = Distância [cm],
- $V_{som} = Velocidade \ do \ som \ [m/s],$
- $\Delta T = Tempo \ entre \ envio \ e \ retorno \ do \ pulso \ [s]$

Os transdutores ultrassônicos, elementos fundamentais deste processo, utilizam cristais piezoelétricos para gerar e detectar as ondas sonoras. Segundo Possani et al. (2017), esses dispositivos podem ser classificados em três categorias principais, dependendo da aplicação e da configuração do sistema:

- Transdutores Exclusivos de Emissão (Pitch): São responsáveis exclusivamente por transferir energia sônica para o material inspecionado.
- Transdutores Exclusivos de Recepção (Catch): Recebem as ondas sonoras refletidas ou transmitidas através do material examinado.
- Transdutores de Cristal Piezoelétrico Duplo: Possuem dois cristais piezoelétricos em uma única carcaça, combinando funções de emissão e recepção no mesmo dispositivo.

Essa flexibilidade na escolha dos transdutores permite a adaptação do sensor às necessidades específicas de medição, aumentando a precisão em diferentes contextos industriais e científicos (Possani et al., 2017).

2.1.2 Vantagens e Aplicações

Conforme discutido por Zhmud et al. (2018), os sensores ultrassônicos oferecem várias vantagens em relação a outros tipos de sensores de distância, como os sensores ópticos. Eles não são afetados pela luz ambiente ou pela cor dos objetos, o que pode ser um problema para sensores infravermelhos. Além disso, eles podem detectar objetos transparentes e refletir ondas ultrassônicas em praticamente qualquer tipo de superfície, embora superfícies macias ou pequenas possam apresentar desafios, e também utilizar o efeito Doppler para medir a velocidade de um objeto em movimento, visto que este efeito observa a mudança na frequência das ondas refletidas de volta ao sensor devido ao movimento relativo entre o sensor e o objeto.

Essas características tornam os sensores ultrassônicos ideais para aplicações em ambientes variáveis e desafiadores, onde outros sensores podem falhar. Eles são amplamente utilizados em robótica para navegação e prevenção de colisões, em sistemas de automação para controle de nível de líquidos, e em muitas outras aplicações industriais e comerciais.

2.1.3 Desafios

Apesar de suas vantagens, os sensores ultrassônicos também apresentam alguns desafios. A precisão das medições pode ser afetada por fatores como temperatura do ambiente, pois a velocidade do som varia com a temperatura (Zhmud et al. (2018)). Portanto, é comum que sistemas de medição ultrassônica incluam sensores de temperatura para compensar essa variação. Por exemplo, o sensor HC-SR04, um dos

modelos mais utilizados, pode ter sua precisão aumentada ao considerar a temperatura ambiente nas medições.

Além disso, a geometria do ambiente e a orientação do sensor em relação ao objeto alvo podem influenciar as leituras. Ângulos de incidência elevados podem resultar em medições incorretas devido à dispersão das ondas ultrassônicas. Portanto, é importante posicionar os sensores corretamente e, se necessário, utilizar múltiplos sensores para cobrir diferentes ângulos de medição.

Outro ponto crítico é a interferência acústica. Em ambientes onde múltiplos sensores ultrassônicos operam simultaneamente, suas ondas podem interagir, gerando efeitos como eco, ruído de fundo ou distorção do sinal refletido. Essa interferência reduz a relação sinal-ruído (SNR) e pode comprometer a precisão das medições. Estratégias de mitigação, como a sincronização de pulsos e a filtragem de sinais, são fundamentais para minimizar tais problemas (Wirnitzer et al. (1998)).

2.2 TRILATERAÇÃO

A trilateração é uma técnica utilizada para obter as coordenadas de certo ponto a partir de outros pontos conhecidos e das distâncias entre eles. Diversas tecnologias empregam o uso da trilateração, por exemplo o GPS (*Global Positioning System*). A trilateração pode ser empregada para realizar a localização a partir de sensores de ditância locais, cujas posições são conhecidas. Esses sensores medem a própria distância até o objeto alvo e, a partir dessas informações, é possível calcular a posição desse alvo (Navidi et al., 1998).

Técnicas de trilateração possuem diversas aplicações e metodologias, por exemplo, Wijk et al. (1998) demonstram em seu trabalho "Triangulation based fusion of ultrasonic sensor data" o emprego da trilateração para mapeamento do ambiente para *Mobile Robotics* e identificação de *natural landmarks*, por exemplo, portas abertas ou fechadas. Trabalhos como "Statistical methods in surveying by trilateration" de Navidi et al. (1998), por outro lado, buscam realizar *Surveying* e localização de maquinário em campo. De forma semelhante, porém, com abordagens diferentes, Thomas e Ros (2005) buscam, em "Revisiting trilateration for robot localization" realizar a localização de robôs.

Como destacado anteriormente, há muitas áreas que necessitam realizar o processo de localização, e elas empregam técnicas de triangulação e trilateração. Essa necessidade se estende até mesmo para a área de saúde, por exemplo, técnicas usando *sonomicrometry* e trilateração para rastrear deformações dinâmicas no cérebro (Alshareef et al., 2020).

Em diversos trabalhos, verifica-se que há diferentes abordagens para efeti-

vamente realizar a trilateração, ou seja, obter uma posição a partir de medidas de distância. Alqaderi et al. (2022), por exemplo, demonstram uma abordagem simples, utilizando transdutores de ultrassom *on-chip* que obtém as medidas de distância, fazendo uma interface com um *script Python*, e assim obtém resultados satisfatórios para cálculo de posições por meio de uma abordagem algébrica direta. Outros estudos, como o de Thomas e Ros (2005), evitam essa abordagem algébrica, e ao invés disso, empregam argumentos geométricos construtivos por meio de uma fórmula sem coordenadas, contendo determinantes *Cayley–Menger*.

2.2.1 Abordagem direta

Este trabalho irá inicialmente empregar técnicas "algébricas diretas" para a realização da trilateração.

Uma análise matemática básica do problema revela que a abordagem algébrica mais direta para realizar a trilateração é a resolução de um sistema de equações, onde tem-se (Navidi et al., 1998):

- Considerando um sistema de duas a três dimensões (ℝ² ou ℝ³);
- Pontos conhecidos: (x_i, y_i, z_i) ;
- Distâncias entre os pontos conhecidos e o ponto alvo: *r_i*;
- Ponto alvo (desconhecido): (x, y, z).

Tem-se um sistema linear de equações que considera a distância entre os pontos conhecidos e o ponto alvo:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 &= r_2^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 &= r_3^2 \\ (\dots)^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2 &= (\dots)^2 \\ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 &= r_i^2 \end{cases}$$
(2.2)

Agora, por exemplo, para um sistema com apenas três sensores, i = 3, pode-se simplificar o sistema, como é demonstrado a seguir.

Tem-se para o primeiro sensor:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$\begin{cases} (x^2 - 2 * x * x_1 + x_1^2) + (y^2 - 2 * y * y_1 + y_1^2) + (z^2 - 2 * z * z_1 + z_1^2) &= r_1^2 \end{cases}$$
(2.3)

Considerando o segundo sensor:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_2^2$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$\begin{cases} (x^2 - 2 * x * x_2 + x_2^2) + (y^2 - 2 * y * y_2 + y_2^2) + (z^2 - 2 * z * z_2 + z_2^2) = r_2^2 \end{cases}$$
(2.4)

Considerando o terceiro sensor:

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_3^2$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$\begin{cases} (x^2 - 2 * x * x_3 + x_3^2) + (y^2 - 2 * y * y_3 + y_3^2) + (z^2 - 2 * z * z_3 + z_3^2) = r_3^2 \end{cases}$$
(2.5)

Subtraindo a EQUAÇÃO 2.4 da EQUAÇÃO 2.3, obtém-se:

$$\begin{cases} (-2 * x_1 + 2 * x_2) * x + (-2 * y_1 + 2 * y_2) * y + (-2 * z_1 + 2 * z_2) * z = \\ r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 - z_1^2 + z_2^2 \end{cases}$$
(2.6)

Da mesma forma, subtraindo a EQUAÇÃO 2.5 da EQUAÇÃO 2.4:

$$\begin{cases} (-2 * x_2 + 2 * x_3) * x + (-2 * y_2 + 2 * y_3) * y + (-2 * z_2 + 2 * z_3) * z = \\ r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2 - z_2^2 + z_3^2 \end{cases}$$
(2.7)

Pode-se fazer as seguintes considerações:

•
$$A = -2 * x_1 + 2 * x_2$$

•
$$D = -2 * x_2 + 2 * x_3$$

- $B = -2 * y_1 + 2 * y_2$
- $E = -2 * y_2 + 2 * y_3$
- $G = -2 * z_1 + 2 * z_2$
- $H = -2 * z_2 + 2 * z_3$
- $C = r_1^2 r_2^2 x_1^2 + x_2^2 y_1^2 + y_2^2 z_1^2 + z_2^2$
- $F = r_2^2 r_3^2 x_2^2 + x_3^2 y_2^2 + y_3^2 z_2^2 + z_3^2$

Dessa forma, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases}
Ax + By + Gz = C \\
Dx + Ey + Hz = F
\end{cases}$$
(2.8)

Um sistema de equações é denominado **consistente** se existe pelo menos uma solução. É considerado **inconsistente** se não há nenhuma solução (Kuttler, 2018). Em situações ideais, considera-se que o sistema de sensores trilaterando a posição do alvo é **consistente**. Sabe-se, entretanto, que se um sistema consistente possui mais variáveis do que equações, esse sistema terá **infinitas soluções** (Hartman, 2021). Portanto, observando a EQUAÇÃO 2.8, verifica-se que há três variáveis, mas apenas duas equações. Idealmente, para o caso de três variáveis, ou seja, em \mathbb{R}^3 , deve-se ter pelo menos 4 sensores, para que após a simplificação realizada pelas operações descritas anteriormente, haja três equações e três variáveis.

Desconsiderando a coordenada z e fazendo a mesma análise para o caso de duas variáveis (em \mathbb{R}^2), e empregando dois sensores, obtém-se (John, s.d.):

$$\begin{cases} (-2x_1+2x_2)x + (-2y_1+2y_2)y &= r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 \\ (-2x_2+2x_3)x + (-2y_2+2y_3)y &= r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2 \end{cases}$$
(2.9)

Verifica-se, portanto, que para este caso, tem-se como resultado um sistema de equações no seguinte formato:

$$\begin{cases}
Ax + By = C \\
Dx + Ey = F
\end{cases}$$
(2.10)

Onde:

- $A = -2x_1 + 2x_2, B = -2y_1 + 2y_2,$
- $C = r_1^2 r_2^2 x_1^2 + x_2^2 y_1^2 + y_2^2$,
- $D = -2x_2 + 2x_3$, $E = -2y_2 + 2y_3$,
- $F = r_2^2 r_3^2 x_2^2 + x_3^2 y_2^2 + y_3^2$.

Portanto, utilizando três sensores para duas variáveis, resulta num sistema simplificado final com duas variáveis e duas equações, tendo portanto uma solução definida, que é a posição do alvo.

2.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Considerando a equação matricial Ax = b. Supondo que a equação não tem uma solução, pode-se obter um resultado aproximado através do Método dos Mínimos Quadrados (*Least Squares Method*) (Margalit; Rabinoff, 2019).

Essa aproximação do sistema inconsistente Ax = b é também denominada "melhor solução aproximada". Considera-se, então, A como uma matriz mxn, e b um vetor em \mathbb{R}^m . Uma solução dos mínimos quadrados da equação de matrizes Ax = bé um vetor \hat{x} em \mathbb{R}^n , tal que $dist(b, A\hat{x}) \leq dist(b, Ax)$ para todos os vetores x em \mathbb{R}^n (Margalit; Rabinoff, 2019).

Tem-se que dist(v, w) = |v - w| corresponde à distância entre os vetores v e w. Tem-se também que $dist(b, Ax) = |b - A\hat{x}|$ corresponde à raiz quadrada da soma dos quadrados dos componentes do vetor $b - A\hat{x}$. A chamada "solução dos mínimos quadrados" **minimiza** a soma dos quadrados das diferenças entre os componentes de $A\hat{x}$ e b, ou seja, minimiza a soma dos quadrados de b - Ax (Margalit; Rabinoff, 2019).

2.4 PRECISÃO E EXATIDÃO

Exatidão e precisão são conceitos fundamentais na metrologia que frequentemente são mal compreendidos e usados de forma intercambiável. No entanto, eles representam aspectos distintos de medições.

Exatidão refere-se à proximidade entre o valor medido e o valor verdadeiro do mensurando. Um sistema de medição é considerado exato quando a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro é mínima. Medições exatas são essenciais para garantir que os resultados obtidos sejam confiáveis e corretos (INMETRO, 2021).

Precisão, por outro lado, está relacionada à repetibilidade das medições. Referese à proximidade entre valores medidos obtidos sob as mesmas condições. A precisão é geralmente expressa em termos de desvio padrão, que quantifica a dispersão dos valores medidos em torno da média. Um sistema de medição preciso produzirá resultados consistentes e repetíveis, mesmo que esses resultados não estejam necessariamente próximos do valor verdadeiro. Portanto, um instrumento de medição pode ser preciso sem ser exato, se os valores medidos são consistentemente incorretos (INMETRO, 2021).

2.5 FILTROS DIGITAIS

2.5.1 Média Móvel Simples

Técnicas de suavização reduzem variações aleatórias e mostram tendências e componentes cíclicos. Tem-se que variações aleatórias são inerentes a dados coletados

ao longo do tempo (Guthrie, 2020).

Definindo "error" como a quantidade "real" menos a quantidade estimada, podese utilizar a média aritmética dos erros ao quadrado (*Mean of Squared Erros*, MSE) como uma forma de avaliar um sistema. Sabe-se que matematicamente, a média aritmética é um estimador capaz de minimizar a MSE (Guthrie, 2020).

Neste trabalho, a técnica que calcula a média aritmética das medidas (ou observações) ao longo do tempo é denominada Média Móvel Simples, ou *Simple Moving Average* (SMA), descrita por

 $S_t = \frac{1}{n} * \sum_{i=0}^{n-1} y_{t+i}$ (Smith, 1999).

Tem-se que *S* é a SMA, y é a observação original, t é instante discreto de tempo, n é o número de amostras a ser considerado.

2.5.2 Filtro FIR

Um filtro de Resposta ao Impulso Finito (FIR) é um tipo de filtro digital amplamente utilizado no processamento de sinais para remover componentes indesejados de um sinal ou para melhorar aqueles desejados. Diferentemente dos filtros de Resposta ao Impulso Infinito (IIR), os filtros FIR dependem apenas dos valores atuais e passados da entrada para calcular a saída, sem utilizar realimentação. Isso torna os filtros FIR intrinsecamente estáveis e fáceis de projetar com características de fase linear, preservando o formato da onda dos sinais dentro da banda de passagem (Oppenheim et al., 1999).

A saída de um filtro FIR é dada pela soma ponderada de um número finito de amostras passadas da entrada, conforme determinado pelos coeficientes do filtro. A equação geral de um filtro FIR é:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

onde y[n] é a saída, x[n-k] são as amostras de entrada, h[k] são os coeficientes do filtro e N é a ordem do filtro.

Os filtros FIR são amplamente usados em aplicações como processamento de áudio, comunicações e sistemas de controle devido à sua versatilidade e estabilidade.

2.5.3 Média Móvel Exponencial

A Média Móvel Exponencial, ou *Exponential Moving Average*, ou nesse caso *Exponentially Weighted Moving Average*, abreviada para **EMA** neste trabalho, é descrita pela relação

 $S_t = \alpha * y_t + (1 - \alpha) * S_{t-1}$, para $0 < \alpha < 1$ e t > 3 (Guthrie, 2020).

Tem-se que *S* é a EMA, *y* é a observação original, *t* é instante discreto de tempo, e α é chamada da **constante de suavização**.

Essa técnica permite, através da escolha de α , regular o peso de "leituras" recentes ou anteriores. Com a escolha do α adequado, é possível reduzir a influência de valores muito discrepantes em relação à faixa de valores sendo medida, e assim é possível suavizar o resultado final.

3 MATERIAL E MÉTODOS

O desenvolvimento desse trabalho consistiu na pesquisa e análise de outros trabalhos e técnicas aplicadas à trilateração. Seguiu-se com definições para o sistema a ser desenvolvido e estudado, assim como a realização de ensaios com os senso-res propostos. Desenvolveu-se um *software* para realizar os cálculos de trilateração, assim como um simulador para o mesmo. Realizou-se diversos testes, simulados e com o sistema físico, testando e avaliando a capacidade do sistema de trilateração desenvolvido.

3.1 REVISÃO DE TRABALHOS SIMILARES E DECISÕES INICIAIS

Inicialmente, realizou-se uma revisão de artigos e projetos relacionados à trilateração ou triangulação, dando ênfase a projetos que utilizaram transdutores de ultrassom para mensurar as distâncias até o objeto alvo.

3.1.1 Análise Referente ao número de dimensões (2D e 3D)

O sistema proposto consiste no cálculo indireto de posições a partir de medidas de distância, ou seja, valores em módulo. Verifica-se que para um caso real (três dimensões), há cenários em que os sensores estarão em diferentes alturas, ou o alvo a ser localizado encontra-se em um nível diferente dos sensores. Tem-se, portanto, diferentes valores de "z" (para um sistema cartesiano \mathbb{R}^3). Dessa forma, para um sistema que apresenta a posição bidimensional, por exemplo, em um mapa do local, deve-se considerar que diferenças entre as coordenadas "z" dos sensores podem afetar os resultados do cálculo de trilateração e, portanto, deve-se dar atenção o método escolhido para calcular a posição do alvo.

Então, se forem consideradas apenas duas dimensões, resultados incorretos podem ser obtidos (FIGURA 1). Entretanto, para uma implementação inicial, verificou-se, como demonstrado por Kreczmer (2009) e Wijk et al. (1998), é possível obter resultados satisfatórios para trilateração em que os cálculos são realizados considerando apenas duas dimensões, isto se as condições de operação forem específicas e controladas.

3.1.2 Número de Sensores

Como demonstrado anteriormente (subseção 2.2.1), a trilateração pode ser feita através da solução de um sistema de equações. Para não haver ambiguidade, idealmente para um sistema em três dimensões, deve-se utilizar um mínimo de 4 sensores e, para um sistema em duas dimensões, deve-se utilizar no mínimo 3 sensores.



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Exemplo ilustrando a possibilidade de equívocos nas medidas em duas dimensões para casos com discrepância de altura.

Para o caso mais simples (duas dimensões), pode-se utilizar até mesmo dois sensores, entretanto, deve-se utilizar um critério (como a direção geral em que os sensores estão observando) para eliminar uma das duas possíveis soluções, ou seja, deve haver um critério para eliminação de ambiguidade.

3.1.3 Modelo Proposto para o Sistema de Trilateração

3.1.3.1 Trilateração em R2

Inicialmente, decidiu-se estudar e desenvolver um sistema de trilateração que opera somente em duas dimensões, desde os cálculos até os resultados fornecidos. Além disso, decidiu-se utilizar três sensores, para não haver ambiguidade. As aplicações desta solução inicial foram em ambientes isolados e controlados, de forma a obter as medidas de distância sem obstáculos ou diferenças de elevação, permitindo resultados coerentes para o sistema limitado em \mathbb{R}^2 . Dessa forma é possível projetar e compreender a arquitetura geral da solução a ser desenvolvida (FIGURA 2).

Dadas essas definições, tem-se que o sistema de equações que descreve a relação entre as posições e distâncias entre os sensores e alvo, com base na subseção 2.2.1, é dada pela equação

$$\begin{cases} (x - x_1) + (y - y_1) &= r_1^2 \\ (x - x_2) + (y - y_2) &= r_2^2 \\ (x - x_3) + (y - y_3) &= r_3^2 \end{cases}$$
(3.1)

. Para dada equação, tem-se:

- Considerando um sistema em duas dimensões (ℝ²);
- Pontos conhecidos: (x_i, y_i) ;



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Exemplo ilustrativo do modelo proposto. Neste exemplo três sensores estão sendo utilizados.

- Distâncias entre os pontos conhecidos e o ponto alvo: r_i;
- Ponto alvo (desconhecido): (x, y).
- . Esta equação será simplificada para o sistema descrito por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ F \end{pmatrix}$$
(3.2)

, onde:

- $A = -2x_1 + 2x_2, B = -2y_1 + 2y_2,$
- $C = r_1^2 r_2^2 x_1^2 + x_2^2 y_1^2 + y_2^2$,
- $D = -2x_2 + 2x_3$, $E = -2y_2 + 2y_3$,
- $F = r_2^2 r_3^2 x_2^2 + x_3^2 y_2^2 + y_3^2$.

3.1.3.2 Trilateração em R3

Após o sistema de trilateração ser concluído em \mathbb{R}^2 , fez-se sua transição para \mathbb{R}^3 . Decidiu-se analisar o comportamento do caso em que apenas três sensores são considerados para três dimensões (sistema com ambiguidade) e comparar os resultados com o caso ideal, onde pelo menos quatro sensores são empregados.

Para o sistema em três dimensões considera-se:

- Um sistema em três dimensões (ℝ³);
- Pontos conhecidos: (x_i, y_i, z_i) ;
- Distâncias entre os pontos conhecidos e o ponto alvo: r_i;
- Ponto alvo (desconhecido): (x, y, z).

Com base nas demonstrações feitas na subseção 2.2.1, tem-se que o sistema de equações que descreve a trilateração em \mathbb{R}^3 utilizando apenas **3** sensores é descrito por:

$$\begin{cases}
A1x + B1y + C1z = D1 \\
A2x + B2y + C2z = D2
\end{cases}$$
(3.3)

. onde:

- $A1 = -2 * x_1 + 2 * x_2$
- $A2 = -2 * x_2 + 2 * x_3$
- $B1 = -2 * y_1 + 2 * y_2$
- $B2 = -2 * y_2 + 2 * y_3$
- $C1 = -2 * z_1 + 2 * z_2$
- $C2 = -2 * z_2 + 2 * z_3$
- $D1 = r_1^2 r_2^2 x_1^2 + x_2^2 y_1^2 + y_2^2 z_1^2 + z_2^2$
- $D2 = r_2^2 r_3^2 x_2^2 + x_3^2 y_2^2 + y_3^2 z_2^2 + z_3^2$

Aumentando o número de sensores do modelo (FIGURA 2) para 4, tem-se um sistema capaz de operar em \mathbb{R}^3 sem ambiguidade. Novamente, partindo do método apresentado na subseção 2.2.1, tem-se que o sistema de equações que descreve a trilateração em \mathbb{R}^3 utilizando **4** sensores é descrito por:

$$\begin{cases}
A1x + B1y + C1z = D1 \\
A2x + B2y + C2z = D2 \\
A3x + B3y + C3z = D3
\end{cases}$$
(3.4)

. onde:

- $A1 = -2 * x_1 + 2 * x_2$
- $A2 = -2 * x_2 + 2 * x_3$
- $A3 = -2 * x_3 + 2 * x_4$
- $B1 = -2 * y_1 + 2 * y_2$
- $B2 = -2 * y_2 + 2 * y_3$
- $B3 = -2 * y_3 + 2 * y_4$
- $C1 = -2 * z_1 + 2 * z_2$
- $C2 = -2 * z_2 + 2 * z_3$
- $C3 = -2 * z_3 + 2 * z_4$
- $D1 = r_1^2 r_2^2 x_1^2 + x_2^2 y_1^2 + y_2^2 z_1^2 + z_2^2$
- $D2 = r_2^2 r_3^2 x_2^2 + x_3^2 y_2^2 + y_3^2 z_2^2 + z_3^2$
- $D3 = r_3^2 r_4^2 x_3^2 + x4^2 y_3^2 + y_4^2 z_3^2 + z_4^2$

3.2 ENSAIOS COM O SENSOR HC-SR04

Após a estrutura geral da solução a ser estudada e desenvolvida ser definida, partiu-se a uma análise do principal candidato ao transdutor a ser utilizado para os primeiros estudos, sendo este o sensor ultrassônico HC-SR04 (subseção 3.9.1.3). Realizou-se ensaios para avaliar o comportamento e a performance desse modelo de transdutor. Para isso foram realizados quatro tipos de ensaios: testes de precisão e exatidão, de compensação por temperatura, verificação do ângulo de medição do sensor e verificação de interferência. Esses ensaios são fundamentais para validar as especificações técnicas fornecidas pelo fabricante e garantir a confiabilidade do sensor em aplicações práticas. As leituras dos sensores serão realizadas através de um código feito na linguagem C_{++} , enquanto um código feito na linguagem Python será responsável pelo tratamento e exportação dos dados adquiridos.

3.2.1 Testes de precisão e exatidão

Os testes de precisão foram conduzidos para verificar o erro de medição do sensor em relação a distâncias de referência. Para isso, 3 (três) sensores HC-SR04 foram utilizados e posicionados a distâncias conhecidas de 50 cm, 100 cm, 200 cm e 300 cm em relação a uma parede. Em cada uma dessas posições, foram registradas

1000 leituras de cada sensor. Para avaliar a precisão e exatidão dos sensores, foram calculados os seguintes parâmetros:

Erro Absoluto: O erro absoluto é a diferença entre o valor medido pelo sensor x_i e o valor de referência x_{ref} , calculado como:

$$Erro \ Absoluto = x_i - x_{ref} \tag{3.5}$$

Média das Leituras: A média aritmética representa o valor médio das medições realizadas em uma posição específica. Sua fórmula é dada por:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3.6}$$

RMSE (Raiz do Erro Quadrático Médio): O RMSE é uma métrica que quantifica o erro médio das medições em relação ao valor de referência, penalizando erros maiores de forma mais significativa. Ele é calculado da seguinte forma:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{ref})^2}$$
(3.7)

Desvio Padrão: O desvio padrão mede a dispersão das leituras em torno da média, indicando o grau de variabilidade das medições. Sua fórmula é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}$$
(3.8)

O Erro Padrão (SE): é uma medida da dispersão de uma estatística amostral em relação ao parâmetro populacional correspondente. Para a média amostral (\bar{x}) , o erro padrão é dado por:

$$SE_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Onde:

- $SE_{\bar{x}}$ é o erro padrão da média;
- σ é o desvio padrão populacional;
- $n \neq o$ tamanho da amostra.

Erro Relativo: O erro relativo quantifica o erro das medições em relação ao valor de referência de maneira proporcional. Ele é particularmente útil para comparar a
exatidão de medições em diferentes escalas. O erro relativo é calculado da seguinte forma:

$$Erro\ relativo = \frac{|x_i - x_{ref}|}{|x_{ref}|} \times 100\ [\%]$$
(3.9)

Coeficiente de Determinação R^2 : é uma métrica estatística que mede a qualidade do ajuste de um modelo de regressão aos dados observados. Ele representa a proporção da variabilidade dos dados explicada pelo modelo, variando de 0 a 1, onde valores próximos de 1 indicam um bom ajuste.

Este ensaio tem como objetivo principal determinar a precisão e a exatidão dos sensores e identificar possíveis desvios em diferentes faixas de medição. Este teste foi realizado fixando os sensores em posições estáveis com relação a uma parede, e as distâncias de referência foram medidas utilizando uma trena com escala de 1mm. As leituras foram registradas em um intervalo de tempo controlado e exportadas para uma planilha. O diagrama de blocos (FIGURA 3) e o fluxograma (FIGURA 4) abaixo representam o sistema de medição e a sequência das ações.



LEGENDA: Diagrama de blocos representando o sistema de medição dos ensaios

3.2.2 Compensação por Temperatura

Este ensaio foi realizado com o objetivo de garantir a exatidão das distâncias calculadas, tendo em vista que a distância do sensor HC-SR04 ao objeto depende da velocidade do som no ar, a qual por sua vez varia em função da temperatura através da seguinte equação:

$$V_{som} = 331, 45 \times \sqrt{\frac{T}{273, 15}}$$
(3.10)

Onde:

- V_{som} = Velocidade do som [m/s];
- *T* = Temperatura ambiente [K].



FIGURA 4 – FLUXOGRAMA DOS ENSAIOS DE PRECISÃO E EXATIDÃO COM O SENSOR HC-SR04

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Fluxograma representando a sequência de ações do sistema de medição dos ensaios de precisão e exatidão.

O ensaio de validação da compensação por temperatura foi realizado posicionando um sensor HC-SR04 a 100 cm de uma parede e realizadas 1000 medições ao longo de 8 horas durante a noite, e 1000 medições ao longo de 8 horas durante o dia, totalizando 2000 amostras, as quais foram exportadas para uma planilha e então analisadas. O fluxograma (FIGURA 5) apresenta a sequência de ações realizadas pelo *hardware* do sistema.

3.2.3 Testes de Ângulo de Medição

Este ensaio tem por objetivo verificar o ângulo de abertura do sensor HC-SR04, ou seja, o ângulo que forma a região em que um objeto pode ser detectado, de modo a comparar os resultados ensaiados com o ângulo informado pelo fabricante, e projetar a área de atuação do sistema de medição através da sobreposição das medições dos sensores. Para este experimento, foram utilizados três sensores HC-SR04, um objeto cilíndrico de 5 (cinco) cm de diâmetro e 20 (vinte) cm de altura e um plano cartesiano de 80 (oitenta) cm x 80 (oitenta) cm, formado por quadrados com 5 (cinco) cm de lado, impresso em uma folha A0.



FIGURA 5 – FLUXOGRAMA DOS ENSAIOS DE COMPENSAÇÃO POR TEMPERATURA

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Fluxograma representando a sequência de ações do *hardware* do sistema de medição do ensaio de compensação por temperatura.

Nesse ensaio, os sensores foram fixados em suportes feitos em impressão 3D e posicionados nos seguintes pontos do plano cartesiano: Sensor 1 (0,0) com ângulo de 45°, Sensor 2 (80,0) com ângulo de 135°, e Sensor 3 (0,80) com ângulo de -45°, de modo que todos ficaram direcionados para o centro do plano cartesiano, conforme ilustra a FIGURA 6. O objeto foi posicionado em todos os quadrados que formam o plano cartesiano, e então foram verificadas se as medidas de distância dos sensores com relação ao objeto estavam próximas às distâncias reais. Quadrados nos quais as distâncias medidas por cada sensor variam em até 2 cm com relação a distância real foram considerados "visíveis" por aquele sensor, enquanto os demais pontos foram considerados "não visíveis".

3.2.4 Ensaio de verificação de interferência

Testes preliminares indicaram que a proximidade entre sensores ultrassônicos pode causar interferência, comprometendo a precisão e a exatidão das medições. Para investigar essa questão, três sensores HC-SR04 foram dispostos paralelamente, com variações na distância entre o conjunto e uma superfície refletora (10 (dez) cm a 100 (cem) cm) e na separação lateral entre os sensores, conforme apresentado na FIGURA 7 e FIGURA 8.



FIGURA 6 – ENSAIO DO ÂNGULO DE ABERTURA DOS SENSORES

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Foto do sistema de ensaio do ângulo de abertura dos sensores

Os ensaios analisaram dois cenários: medições simultâneas entre os sensores e medições realizadas com intervalos de 10 ms entre os disparos. A introdução de intervalos foi feita para verificar a eficácia dessa abordagem na redução de interferências entre os sensores. Posteriormente, os dados coletados foram analisados para identificar os impactos da configuração de espaçamento e temporização na precisão das medições.



FIGURA 7 – ENSAIO DE INTERFERÊNCIA: SENSORES LADO A LADO

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Sensores posicionados lado a lado a 20 cm de uma parede

3.2.5 Avaliação do desempenho do Sensor HC-SR04 na Medição de Niveis de liquidos

Este ensaio foi realizado com o objetivo de avaliar o desempenho do sensor HC-SR04 na medição de níveis de líquidos, especificamente em uma superfície de



FIGURA 8 – ENSAIO DE INTERFERÊNCIA: SENSORES LATERALMENTE ESPAÇADOS

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Sensores posicionados lateralmente espaçados a 20 cm de uma parede

água. Três sensores foram posicionados lado a lado, com coordenadas definidas como (0, 0, 0), (5.3, 0, 0) e (10.5, 0, 0), de acordo com o espaçamento físico entre eles. Os sensores foram instalados a uma altura de 71 cm em relação à superfície da água contida em uma bacia, conforme ilustrado na FIGURA 9.

Para analisar a consistência das medições, cada sensor realizou 500 leituras. Em seguida, o ensaio foi realizado aplicando o algoritmo de trilateração para calcular a posição da superfície da água, com o intuito de verificar a viabilidade do uso do sensor HC-SR04 em medições de nível em líquidos.

3.3 DEFINIÇÃO DO SISTEMA DE TRILATERAÇÃO

Paralelamente aos ensaios, foi necessário decidir quanto à arquitetura geral de operação do **Sistema de Trilateração**. Avaliou-se que o sistema a ser implementado consistirá em duas entidades que devem operar separadamente, mas devem realizar uma interface entre si. Essas entidades serão:

- 1. Aquisição de Informações: microcontroladores e set de sensores;
- 2. Programa principal: programa responsável pelos algoritmos de trilateração e manipulação geral dos dados.

Os dados de distância serão obtidos pelo sistema de aquisição de informações, que irá escrever as informações obtidas na serial do computador em que o Programa Principal está sendo executado. Após a leitura dos dados, o Programa Principal os processará e determinará a posição do corpo alvo da trilateração (FIGURA 10).



FIGURA 9 – ENSAIO DE MEDIÇÃO DE DISTÂNCIA ATÉ A SUPERFÍCIE DA ÁGUA

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Configuração do sistema para realização do ensaio de medição de distância até um líquido.



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Diagrama de blocos geral do sistema de trilateração proposto.

3.4 DEFINIÇÃO DO SISTEMA FÍSICO

O sistema completo foi inicialmente configurado com os sensores posicionados no plano cartesiano, conforme apresentado em subseção 3.2.3. Para análise comparativa, foram utilizados dois tipos de objetos: o objeto cilíndrico informado em subseção 3.2.3 e um objeto retangular com dimensões de 5 cm x 4 cm x 19 cm. Essa configuração visa investigar as diferenças de detecção entre as duas formas.

Posteriormente, o sistema será ampliado com a adição de um quarto sensor, inicialmente posicionado na coordenada (80, 80, 0) no plano cartesiano. Em seguida, o

sensor será reposicionado em uma altura **z** superior aos demais sensores, permitindo a avaliação do desempenho do sistema em configurações tridimensionais, conforme FIGURA 13.

A comunicação entre os dispositivos foi implementada utilizando o protocolo ESP-NOW, que permite a troca direta de dados entre dispositivos ESP32 sem a necessidade de um ponto de acesso Wi-Fi. Para garantir o controle preciso das transmissões, foi adotada uma configuração de comunicação ponto a ponto. Nesse modelo, o dispositivo Master envia dados diretamente para os dispositivos Slaves, utilizando seus endereços MAC específicos. Essa abordagem foi escolhida por oferecer maior confiabilidade na comunicação, evitando colisões de dados e permitindo o gerenciamento individual das mensagens enviadas a cada sensor.

O fluxograma do *hardware* de aquisição do sistema completo está representado na FIGURA 11, enquanto a FIGURA 12 apresenta o diagrama de blocos correspondente. Já o fluxograma do *software* que controla o sistema é detalhado na FIGURA 14.



FIGURA 11 – FLUXOGRAMA DO HARDWARE

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Fluxograma representando a sequência de ações do Hardware do sistema completo.



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Diagrama representando o Hardware do sistema completo.

FIGURA 13 – SISTEMA FÍSICO COM 4 SENSORES

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Configuração do sistema físico com 4 sensores.

3.5 PROGRAMA PRINCIPAL DE TRILATERAÇÃO

O **Programa Principal** é o *software* responsável por efetivamente realizar os cálculos de trilateração. A estrutura (de forma simplificada) deve realizar a leitura da porta serial da máquina host, recebendo então os dados de distância medidos, e em seguida aplicar um filtro digital (denominado **Filtro 1**). O resultado será fornecido a algum algoritmo que montará o sistema de equações que representam o problema. Este algoritmo deve então aplicar algum método para obter a solução do sistema, ou uma aproximação satisfatória. Isto resultará na posição estimada do alvo. Nestes dados de posição do alvo, aplica-se um outro filtro digital computacionalmente mais simples do que o primeiro (denominado **Filtro 2**). Dessa forma, obtém-se a posição aproximada do alvo, que será apresentada de forma gráfica (FIGURA 14). O programa também traz

divesas informações periódicas ao longo de um número escolhido de amostras. Essas informações incluem a média das coordenadas, desvio e erro padrão e intervalos de confiança.

Escolheu-se escrever o programa principal na linguagem *Python*, devido à ampla gama de bibliotecas e agilidade de implementação fornecida por essa *scripting language*.



FIGURA 14 – FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO SOFTWARE DE LOCALIZAÇÃO

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Fluxograma ilustrando as principais operações do programa principal.

3.5.1 Métodos de Solução do Sistema de Equações

Para obter a solução do sistema de equações que relaciona as posições dos sensores e do alvo (EQUAÇÃO 3.2), utilizou-se, principalmente, três métodos:

1. Lower-upper (LU) decomposition;

- 2. Método dos Mínimos Quadrados Linear, empregando *Singular Value Decomposition* (SVD);
- 3. Método dos Mínimos Quadrados Não Linear, empregando algoritmo *Trust Region Reflective*.

É possível empregar o método do Elemento 1 pela função *numpy.linalg.solve()* da biblioteca *Numpy* para a linguagem *Python*, enquanto que o método do Elemento 2 pode ser empregado pela função *numpy.linalg.lstsq* da mesma biblioteca. Já o método do Elemento 3 pode ser empregado pela função *scipy.optimize.least_squares()* da biblioteca *SciPy* da linguagem *Python*.

Implementou-se a possibilidade do emprego de diferentes abordagens para a solução do sistema de equações devido à inconsistência e baixa **exatidão** e **precisão** das medidas fornecidas pelos sensores reais a serem empregados neste trabalho. Para certos casos de trilateração, principalmente casos em \mathbb{R}^3 , os métodos dos mínimos quadrados linear e não linear (MMQ) podem retornar resultados com maior **exatidão** do que outros métodos de solução direta dos sistemas lineares de equações (Navidi et al., 1998).

3.5.2 Filtros Digitais Aplicados

3.5.2.1 Filtro 1

O **Filtro 1** tem como objetivo realizar uma "suavização" dos valores de distância fornecidos pelo sistema de aquisição de informações. Esse filtro digital é empregado diretamente nos valores medidos, antes do algoritmo de resolução do sistema de equações que representa o sistema.

Diversos tipos de filtros podem ser empregados, mas devido a sua simplicidade e efetividade, uma da possibilidades consideradas foi a **média móvel simples** (subseção 2.5.1). Implementou-se a possibilidade de escolha entre a aplicação de uma *hopping window* ou de um *sliding window*. Esse filtro foi empregado apenas antes do envio de dados ao algoritmo de resolução do sistema de equações devido à necessidade de operações com *buffers* e da realização de diversas operações para obter apenas um valor definitivo de medida. Portanto, se esta técnica fosse aplicada após cada resolução de sistemas de equações, um *overhead* adicional se manifestaria no sistema, pois o algoritmo que emprega o cálculo da solução do sistema de equações é uma operação computacionalmente custosa.

Outro filtro considerado foi o filtro FIR (Resposta ao Impulso Finito), pois ele é uma excelente opção para suavizar medições de distância porque oferece uma resposta estável e previsível, sem realimentação, o que o torna inerentemente estável e livre de oscilações. Os filtros FIR são altamente personalizáveis, permitindo um controle preciso sobre a resposta em frequência do filtro, ajudando a reduzir ruídos de alta frequência enquanto preservam as características essenciais do sinal. Além disso, os filtros FIR não introduzem distorção de fase se projetados com características de fase linear, garantindo que o sinal filtrado permaneça sincronizado com os dados originais.

3.5.2.2 Filtro 2

O **Filtro 2** tem como objetivo suavizar as coordenadas calculadas pelos algoritmos de solução dos sistemas de equação, ou seja, será aplicado diretamente na posição resultante aproximada do alvo, **x** e **y** para o \mathbb{R}^2 e **x**, **y** e **z** para \mathbb{R}^3 .

Para o Filtro 2, um grande candidato foi uma **média exponencial móvel** (subseção 2.5.3). Devido à operação desse filtro não ser dependente de um arranjo de valores, foi possível aplicá-lo após cada resolução do sistema de equações, sem que seja necessário aguardar diversas operações sobre as coordenadas para obter um resultado.

3.5.3 Simulador

Para realizar uma análise do funcionamento do sistema de forma rápida, implementou-se um simulador, ou seja, um módulo, capaz de ser integrado ao Programa Principal de Trilateração e simular a posição tanto de um alvo a ser localizando quanto dos sensores empregados.

Para simulações individuais, o simulador é capaz de aplicar *sets* de valores conhecidos, tanto para as posições de cada sensor, quanto para a posição do alvo no Programa Principal. Dessa forma é possível alimentar o programa com dados predeterminados e assim avaliar a performance dos métodos utilizados para a trilateração (FIGURA 15) em casos específicos.

Este módulo também foi implementado com a linguagem *Python*, de forma a ser integrado ao Programa Principal. O simulador integra também um arquivo contendo diversos valores predeterminados e calcula dinamicamente as distâncias a partir das posições escolhidas.

Outro método de simulação desenvolvido foi a **simulação em massa**, utilizado principalmente para o sistema em \mathbb{R}^3 . Nesse tipo de simulação é possível determinar um valor de posição inicial e final para o alvo, e também determinar um passo. Dessa forma, o programa irá iterar ao longo de muitas posições possíveis para o alvo da trilateração, dando um passo por vez em cada eixo, isso considerando coordenadas específicas para os sensores. Assim é possível verificar o comportamento dos algoritmos implementados ao longo diferentes regiões.

known sets[10] = { # close to sensor 3 "sensor_1": [0,0], "sensor_2": [80,0], "sensor_3": [0,80], "target": [10,70], } known_sets[11] = { # close to sensor 3 "sensor_1": [0,0], "sensor_2": [80,0], "sensor_3": [0,80], "target": [80,80] [80,80], known_sets[13] = { "sensor_1": [0, 0, 0], "sensor_2": [49, 10, 15], "sensor_3": [10, 86, 15], "sensor_4": [5, 86, 15], "target": [90, 53, 25], known_sets[14] = { "sensor_1": [0, 0, 0], "sensor_2": [59, 20, 20], "sensor_3": [20, 96, 20], "sensor_4": [15, 96, 20], "target": [100, 63, 30] known_sets[15] = { "sensor_1": [0, 0, 0], "sensor_2": [65, 30, 25], "sensor_3": [0, 85, 25], "sensor_4": [90, 90, 25], "target": [45, 45, 3],

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Exemplo do arquivo contendo um trecho dos valores predeterminado a serem utilizados em simulações.

Além disso, foi implementado no simulador uma forma de adicionar uma variação nos valores das distâncias. Essa variação será um valor de ponto flutuante determinado a partir de uma distribuição normal, tendo com média o valor conhecido do alvo (valor escolhido), e tendo como desvio padrão qualquer valor desejado. Para os testes do sistema, foram utilizados valores próximos aos obtidos nos ensaios dos sensores reais.

Com a inserção dessa variação, é possível simular cenários semelhantes aos reais, em que os sensores fornecem medidas inconsistentes, dadas suas limitações.

Exclusivamente para casos **simulados** do Programa Principal, uma informação estatística referente à **exatidão** do sistema foi exibida durante o cálculo de cada trilateração. Essa informação é a taxa de erro relativo do valor calculado da posição do alvo (em x e y para \mathbb{R}^2 e x,y e z para \mathbb{R}^3) em relação ao valor conhecido da posição

do alvo (FIGURA 16). É também exibido o erro relativo médio quando uma quantidade escolhida de posições é calculada.

INFOINATIIRelativ	e chor.	(0.00%,0.00%,0.75%)
INFO:main:		
INFO:main:Target	position:	(38.017,33.97177,9.99147)
INFO:main:Actual	known target position:	(38.00000,34.00000,10.00000)
INFO:main:Relativ	e Error:	(0.04%,0.08%,0.09%)
INFO:main:		
INFO:main:Target	position:	(38.00698,33.94703,10.0483)
INFO:main:Actual	known target position:	(38.00000,34.00000,10.00000)
INFO:main:Relativ	e Error:	(0.02%,0.16%,0.48%)
INFO:main:		
INFO:main:########	*****	***********************
INFO:main:Actual	known target position:	(38.00000,34.00000,10.00000)
INFO:main:Average	Relative Error:	(0.10%,0.12%,5.34%)
INFO:main:#########	****	******

FIGURA 16 – SAÍDA DO PROGRAMA DURANTE SIMULAÇÃO

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Saída da solução impressa no terminal, exibindo os valores calculados da posição de um alvo fictício a partir de posições predeterminadas, a fim de realizar a simulação de um possível caso, exibindo o erro relativo para cada cálculo.

3.6 FLEXIBILIDADE DO PROGRAMA PRINCIPAL

Devido ao estágio de testes e estudo que se encontra o **Sistema de Trilateração** proposto, foi necessário implementar o Programa Principal de forma modular, ou seja, de forma a ser possível ativar e desativar, assim como substituir certos componentes do programa de forma fácil e rápida.

Portanto, a estrutura geral do Programa Principal foi feita implementando o paradigma de Programação Orientada a Objetos em diversos trechos do mesmo, e atualmente as características de todo o sistema podem ser escolhidas em um módulo central, onde é possível selecionar os algoritmos que serão utilizados para resolver os sitemas de equação, ativar e desativar filtros, escolher quais filtros serão utilizados, selecionar as janelas e parâmetros dos filtros, iniciar e especificar simulações e também determinar se os dados de trilateração obtidos de simulações ou de casos reais, sejam armazenados em arquivos para análises futuras, assim como selecionar quais dados serão salvos.

3.7 EXIBIÇÃO GRÁFICA

Outra característica implementada no Programa Principal foi a possibilidade de exibir a posição calculada do alvo de forma gráfica em um Plano Cartesiano (FIGURA 17 e FIGURA 18). É também possível configurar a taxa de atualização da exibição gráfica, utilizando um parâmetro próprio para isso (seção 3.6). Dessa forma, o gráfico ilustrativo é atualizado de uma forma dinâmica, aproximando-se de algo em "tempo real".



FIGURA 17 – EXIBIÇÃO GRÁFICA DA POSIÇÃO CALCULADA EM 2D

3.8 TESTES E AVALIAÇÕS DO SISTEMA

Após os ensaios com o sensor **HC-SR04**, desenvolvimento do sistema de aquisição de dados e desenvolvimento do **Programa Principal**, deu-se andamento a avaliações do sistema.

Para avaliações iniciais, realizou-se diversas simulações, para verificar possíveis comportamentos do **Sistema de Trilateração**, e quais condições retornariam certos tipos de resultados.

Na sequência, realizou-se testes com o **Sistema de Trilateração** completo, ou seja, integrando tanto o **Programa Principal** quanto o **Sistema de Aquisição de Informações** composto pelos ESP32 juntamente aos conjunto de sensores.

3.9 RECURSOS NECESSÁRIOS

3.9.1 PROTÓTIPO

O protótipo foi pensado de modo a possuir baixo custo e ser de fácil integração. Os componentes utilizados, como o ESP32, o DHT22 e os sensores ultrassônicos HC-SR04, são acessíveis e amplamente disponíveis no mercado, um dos motivos pelos quais foram escolhidos. Além disso, a simplicidade na integração desses componentes com o ESP32 facilita o processo de montagem e programação, permitindo uma rápida prototipagem e implementação. Este protótipo utiliza um ESP32 DEVKIT V1 como



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Exemplo da ilustração gráfica sendo atualizada para um ponto calculado.

Master e três ESP32 DEVKIT V1 como Slaves, um sensor DHT22 e quatro sensores ultrassônicos HC-SR04. O ESP32 é um microcontrolador potente e versátil, ideal para projetos de Internet das Coisas (IoT) e automação. O sensor DHT22 mede a temperatura e a umidade do ambiente, contudo serão utilizadas apenas as leituras de temperatura, de modo a calcular a velocidade do som no ar, proporcionando medições de distância mais exatas, enquanto os sensores ultrassônicos HC-SR04 medem a distância a objetos próximos. O circuito dos Slaves será alimentado por um módulo de baterias 18650 5 V enquanto o circuito do Master será alimentado diretamente pelo computador. Assim, o protótipo consiste dos seguintes componentes:

- 4 (quatro) ESP32 DEVKIT V1;
- 4 (quatro) Sensores ultrassônicos HC-SR04;
- 1 (um) Sensor DHT22;
- 2 (duas) Protoboards;
- 1 (um) Cabo USB;

- 4 (quatro) cabos manga 4x24 AWG;
- 4 (quatro) suportes para os sensores HC-SR04;
- 1 (um) módulo bateria 18650 Battery Shield V8; Jumpers;
- Jumpers;
- Computador para realizar a interface com os dispositivos.

3.9.1.1 Montagem do protótipo

As ligações foram feitas seguindo as recomendações do *datasheet* do ESP32 (Systems (2020)), do HC-SR04 (ElecFreaks (2013)) e do DHT22 (Liu (2013)), de modo que os componentes estão conectados da seguinte forma:

Circuito do Master:

DHT22:

- VCC: Conectado ao 5V do ESP32 Master;
- GND: Conectado ao GND do ESP32 Master;
- DATA: Conectado ao pino GPIO 4 do ESP32 Master.

HC-SR04 (Sensor 1):

- VCC: Conectado ao 5V do ESP32 Master;
- GND: Conectado ao GND do ESP32 Master;
- TRIG: Conectado ao pino GPIO 16 do ESP32 Master;
- ECHO: Conectado ao pino GPIO 17 do ESP32 Master.

Circuito dos Slaves:

ESP32 Slave 1:

- VIN: Conectado ao 5V da bateria;
- GND: Conectado ao GND da bateria;

HC-SR04 (Sensor 2):

- VCC: Conectado ao pino 5V da bateria;
- GND: Conectado ao GND da bateria;

- TRIG: Conectado ao pino GPIO 25 do ESP32 Slave 1;
- ECHO: Conectado ao pino GPIO 26 do ESP32 Slave 1.

ESP32 Slave 2:

- VIN: Conectado ao 5V da bateria;
- GND: Conectado ao GND da bateria;

HC-SR04 (Sensor 3):

- VCC: Conectado ao pino 5V da bateria;
- GND: Conectado ao GND da bateria;
- TRIG: Conectado ao pino GPIO 25 do ESP32 Slave 2;
- ECHO: Conectado ao pino GPIO 26 do ESP32 Slave 2.

ESP32 Slave 3:

- VIN: Conectado ao 5V da bateria;
- GND: Conectado ao GND da bateria;

HC-SR04 (Sensor 4):

- VCC: Conectado ao pino 5V da bateria;
- GND: Conectado ao GND da bateria;
- TRIG: Conectado ao pino GPIO 25 do ESP32 Slave 3;
- ECHO: Conectado ao pino GPIO 26 do ESP32 Slave 3.

O circuito do Master pode ser obervado na FIGURA 19, enquanto o circuito do Slaves pode ser observado na FIGURA 20. Vale ressaltar que o sensor de temperatura (TMP) foi utilizado apenas para representar o sensor DHT22 no circuito, visto que a ferramenta utilizada, *Tinkercad* não possui o sensor DHT22.



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Componentes e conexões do circuito Master.

3.9.1.2 ESP32

O ESP32, desenvolvido pela Espressif Systems, é um microcontrolador altamente integrado que combina conectividade Wi-Fi e Bluetooth, permitindo a criação de dispositivos versáteis para aplicações de Internet das Coisas (IoT). Conforme apresentado em seu datasheet (Systems (2020)), o ESP32 conta com um processador dual-core Xtensa LX6 que pode operar com um ou dois núcleos, atingindo até 240 MHz. A arquitetura do ESP32 oferece memória RAM de baixa latência, um conjunto de pinos GPIO configuráveis e suporte a interfaces como SPI, I2C e UART, o que o torna altamente flexível para diferentes projetos embarcados. Com conectividade Wi-Fi (2.4 GHz) e suporte ao Bluetooth clássico e BLE (Bluetooth Low Energy), o ESP32 é capaz de integrar sistemas complexos que requerem comunicação sem fio. Sua eficiência energética é outro destaque, com modos de baixo consumo que permitem o uso em



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Componentes e conexões do circuito dos Slaves.

dispositivos alimentados por bateria, como sensores remotos e dispositivos vestíveis. As placas de desenvolvimento, como a ESP32 DEVKIT V1, facilitam a integração em projetos. A DEVKIT V1 é amplamente utilizada devido à sua compatibilidade com o Arduino IDE e outras ferramentas de desenvolvimento, como PlatformIO. Essa placa inclui interface micro-USB para programação e alimentação, reguladores de tensão integrados e múltiplos pinos GPIO, simplificando o design de protótipos e sistemas finais.

3.9.1.2.1 Aplicações

O ESP32 é amplamente adotado em soluções IoT devido à sua versatilidade e custo-benefício. Ele é frequentemente empregado em automação residencial, permitindo o controle de iluminação, climatização e dispositivos de segurança. Além disso, é utilizado em dispositivos agrícolas para monitoramento remoto de condições ambientais, como temperatura e umidade, com envio de dados em tempo real para plataformas em nuvem, conforme apresentado no artigo "Design and implementation of ESP32-based IoT devices" de Hercog et al. (2023). Outra aplicação destacada está no desenvolvimento de sistemas vestíveis, como dispositivos de saúde e fitness que utilizam Bluetooth para comunicação com smartphones. No setor industrial, o ESP32 é integrado a sensores e atuadores, possibilitando soluções de monitoramento preditivo e automação de processos. Soluções de rede baseadas no ESP32 também são populares, como repetidores Wi-Fi e sistemas de comunicação ponto-a-ponto utilizando o protocolo ESP-NOW (Systems (2020)), que elimina a necessidade de roteadores Wi-Fi para conexões diretas entre dispositivos. Com sua capacidade de integração com plataformas como Amazon AWS IoT, Google Cloud e Microsoft Azure, o ESP32 permite criar sistemas conectados que analisam dados em tempo real e até mesmo implementam aprendizado de máquina para otimização de processos (Hercog et al. (2023)).

3.9.1.2.2 Protocolo ESP-NOW

O ESP-NOW é um protocolo de comunicação sem fio desenvolvido pela Espressif, projetado para viabilizar a troca direta de dados entre dispositivos ESP32 e ESP8266 sem a necessidade de um ponto de acesso Wi-Fi ou conexão prévia. Ele utiliza quadros de ação específicos para encapsular os dados da aplicação e transmitir diretamente entre dispositivos. Uma das principais características do ESP-NOW é a utilização do endereço MAC (Media Access Control) para identificar os dispositivos na rede. Cada dispositivo ESP possui um endereço MAC único, que é usado para estabelecer conexões seguras e direcionar mensagens de forma específica. Isso permite que os dispositivos se comuniquem de maneira confiável, mesmo em redes locais complexas ou ambientes sem infraestrutura de rede tradicional. Além disso, o uso do endereço MAC possibilita a configuração de comunicação ponto a ponto ou em rede multicasting, ampliando a flexibilidade do protocolo para diferentes aplicações.

Conforme informado pela fabricante do ESP32, Espressif, em Systems (2023), as principais características desse protocolo são:

- Comunicação Direta: Suporta tanto comunicação ponto-a-ponto (unicast) quanto transmissão para múltiplos dispositivos simultaneamente (multicast), eliminando a dependência de redes Wi-Fi tradicionais;
- Segurança: Utiliza o protocolo CTR com CBC-MAC (CCMP) para proteger os quadros de ação, garantindo integridade e confidencialidade dos dados transmitidos;
- Taxa de Transmissão: Opera com uma taxa de 1 Mbps como padrão, permitindo transmissões rápidas em aplicações que demandam baixa latência;
- Baixo Consumo de Energia: Ideal para dispositivos que operam com baterias;
- Leveza do Pacote: Cada mensagem pode conter até 250 bytes de dados úteis, suficiente para transmitir informações de sensores ou comandos básicos;
- Faixa de Operação: Funciona na faixa de frequência de 2.4 GHz, compartilhada com o Wi-Fi tradicional.
- Longo alcance: suporta comunicação de longa distância, tornando-o adequado tanto para aplicações internas quanto externas. Em experimentos da Espressif,

foi demonstrado que o protocolo pode alcançar até 500 metros em linha reta e manter conexões estáveis em ambientes internos, mesmo entre dispositivos separados por paredes grossas ou localizados em diferentes andares.

Conforme o artigo "Indoor Performance Evaluation of ESP-NOW" de Urazayev et al. (2023), o ESP-NOW apresenta uma redução de mais de 30% no consumo de energia em comparação ao Wi-Fi. Isso reforça sua adequação para aplicações IoT que dependem de operação com baixo consumo em ambientes Internos. Ainda segundo Urazayev et al. (2023) o ESP-NOW alcança distâncias ligeiramente maiores do que a abordagem TCP típica do Wi-Fi, mesmo na presença de muitos obstáculos, o que o torna mais robusto em cenários internos. O artigo também avaliou o modo regular do ESP-NOW e o modo proprietário LR (Long Range). Os resultados mostraram que o modo LR não apresentou desempenho significativamente superior ao modo regular, sugerindo que o modo padrão já é eficaz para a maioria das aplicações.

3.9.1.2.3 Limitações

Embora o ESP-NOW ofereça diversas vantagens é importante considerar algumas limitações que podem impactar sua aplicação em cenários específicos. Essas restrições estão relacionadas à capacidade de alcance, número máximo de dispositivos suportados e características do protocolo de transmissão. Assim, os principais pontos a serem observados encontram-se a seguir.

- Sem Garantia de Entrega: O protocolo não inclui confirmações automáticas de recebimento ou retransmissões em caso de falhas, sendo mais apropriado para aplicações que toleram perda de pacotes;
- Limitações de Dispositivos: Suporta até 20 dispositivos emparelhados na configuração padrão sem criptografia. Com criptografia, pode suportar até 17 dispositivos.

3.9.1.3 Sensor HC-SR04

O sensor ultrassônico HC-SR04 é um dispositivo amplamente utilizado para medições de distância, com aplicações em robótica, sistemas de segurança e projetos de automação, destacando-se por sua simplicidade e custo acessível. Este sensor tem a capacidade de medir distâncias que variam de 2 (dois) cm a 400 (quatrocentos) cm, com uma resolução de 3 (três) mm, tornando-o ideal para aplicações em que a identificação de obstáculos ou objetos é essencial.

3.9.1.3.1 Especificações Técnicas

As especificações técnicas do Sensor HC-SR04 foram retiradas dos *datasheets* (ElecFreaks (2013)) e Bhd. (2013), dos fabricantes *ElecFreaks* e *Cytron Technologies*, respectivamente, estão apresentadas abaixo:

- Tensão de Operação: 3,3 VDC 5 VDC
- Corrente de Operação: 15 mA
- Frequência de Operação: 40 kHz
- Dimensões: 45 x 20 x 15 mm

Quanto ao ângulo de medição do sensor, há uma discrepância entre os dados informados pelos fabricantes. A *ElecFreaks*, em seu *datasheet*, indica um ângulo de medição de 15° (quinze graus), enquanto a *Cytron Technologies*, em seu manual, informa um ângulo de 30° (trinta graus). Dessa forma, recomenda-se a realização de ensaios experimentais para verificar o ângulo de medição efetivo do sensor.

3.9.1.3.2 Funcionamento

O funcionamento do sensor HC-SR04 baseia-se na emissão e recepção de pulsos ultrassônicos. O processo de medição inicia-se com a aplicação de um pulso de gatilho, com duração mínima de 10 microsegundos, ao pino de trigger do sensor. Em resposta, o dispositivo emite uma onda sonora de 40 kHz. Quando esta onda encontra um objeto no ambiente, ela é refletida de volta e detectada pelo receptor ultrassônico, seguindo as etapas descritas a seguir:

- Emissão do Pulso: O sensor envia um pulso ultrassônico de 40 kHz.
- Reflexão do Pulso: O pulso é refletido de volta ao sensor quando encontra um obstáculo.
- Recepção do Pulso: Ao receber o pulso o sensor mede o tempo que este levou para retornar.
- Cálculo da Distância: A distância até o objeto é calculada com base no tempo de retorno do pulso.

O funcionamento do sensor HC-SR04 pode ser observado pela FIGURA 21



FIGURA 21 – INTERFACE ENTRE MICROCONTROLADOR E O SENSOR HC-SR04

FONTE: Retirado de HC-SR04 Ultrasonic Sensor Module User Guide, 2017. LEGENDA: Representação do funcionamento do sensor HC-SR04.

3.9.1.4 Sensor DHT22

A precisão nas medições de distância realizadas com sensores ultrassônicos é altamente influenciada pela temperatura ambiente, devido à variação da velocidade do som com a temperatura. Para obter medições mais exatas, é necessário ajustar a velocidade do som de acordo com a temperatura local. Para esta finalidade, foi escolhido o sensor DHT22 devido às seguintes características, retiradas de Liu (2013):

- Ampla Faixa de Medição: O DHT22 mede temperaturas de -40 ℃ a 80 ℃ com um erro de ± 0.5 ℃.
- Alta Estabilidade e Confiabilidade: Possui elementos sensores calibrados em fábrica e compensação de temperatura, o que assegura estabilidade e precisão a longo prazo.
- Baixo Consumo de Energia: O sensor opera com uma alimentação de 3.3 VDC a 6 VDC, consumindo apenas 1.5 mA durante a medição e menos de 50 μA em stand-by, tornando-o eficiente em termos de energia.
- Fácil Integração: Com uma interface de comunicação digital de um único fio, o DHT22 é fácil de conectar e integrar com microcontroladores, simplificando o processo de desenvolvimento.
- Baixo Preço e Alta Disponibilidade: O DHT22 é amplamente disponível no mercado e possui um custo acessível, o que o torna uma escolha econômica.

3.9.2 Programa Principal

Para a implementação do programa principal empregou-se a linguagem de *scripting* Python.

Foi necessário o emprego de um *laptop* para implementar e executar o programa. Este utilizará também a porta serial do computador, para poder fazer interface com o sistema de aquisição de informações (ESP32 e sensores).

4 RESULTADOS

4.1 ENSAIOS COM O SENSOR HC-SR04

4.1.1 Resultados do ensaio de compensação de temperatura

A realização deste ensaio gerou dados importantes para o sistema, os quais foram tratados e apresentados na TABELA 1, e nos gráficos FIGURA 22 e FIGURA 23. Esses resultados demonstram que o cálculo da velocidade do som em função da temperatura do ar colaborou para manter a estabilidade do sistema, mantendo os valores das medições de distância exatos, com a média variando menos que 0,5 cm, e precisos, com menos de 0,3 cm de variação no desvio padrão. Por mais que a variação da temperatura tenha sido de apenas 7 °C, foi possível ter uma noção de como o cálculo da distância responde em função da temperatura através da linha de tendência polinomial de grau 3 apresentada, com $R^2 = 0,9975$. O erro relativo também pode ser relacionado com a temperatura, apresentando $R^2 = 91,33$ para uma linha de tendência polinomial de grau 3.

TABELA 1 – TABELA DE DADOS OBTIDOS DO ENSAIO DE COMPENSAÇÃO DE TEMPE-RATURA

Temperatura (℃)	Média (cm)	Erro relativo (%)	Desvio padrão (cm)	RMSE (cm)
16,1 - 17,0	100,081	0,081	0,616	0,518
17,1 - 18,0	100,096	0,096	0,618	0,358
20,1 - 21,0	99,798	0,202	0,824	1,457
21,0 - 22,0	99,569	0,431	0,767	1,624
22,1 - 23,0	99,970	0,030	0,947	1,399

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Dados obtidos do ensaio de compensação de temperatura.

4.1.2 Resultados dos ensaios de precisão e exatidão

A fim de avaliar o comportamento do sensor HC-SR04 em diferentes distâncias com relação ao objeto, realizou-se o ensaio de precisão e exatidão, obtendo para isso 1000 amostras de cada um dos 3 (três) sensores para cada uma das distâncias; 50 cm, 100 cm, 200 cm e 300 cm. Os gráficos apresentados na FIGURA 24, e os presentes no Apéndice D, seção D.1, na FIGURA 91, FIGURA 92, FIGURA 93, FIGURA 94 e FIGURA 95 demonstram que as leituras dos sensores estão sendo consistentes, não possuindo perda de leitura ou leituras muito distantes da média.

Uma análise das médias das medições dos três sensores para cada distância (FIGURA 25) foi conduzida para avaliar a consistência das leituras entre os sensores.



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico das médias em função das faixas de temperatura.



LEGENDA: Gráfico dos erros relativos em função das faixas de temperatura.

Esse procedimento teve como objetivo identificar possíveis defeitos nos componentes,

FIGURA 24 – AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OBJETO A 50 CENTÍMETROS



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico das leituras dos sensores quando o objeto se encontra a 50 centímetros.

como sensores e cabos, além de detectar eventuais sobrecargas no código responsável pela aquisição das leituras. Distâncias medidas que divergem significativamente entre os sensores podem indicar erros nos componentes ou no sistema de aquisição de dados. Com base nos resultados obtidos, confirma-se que o sistema está operando dentro dos parâmetros esperados, demonstrando consistência nas leituras dos sensores em todas as distâncias avaliadas.



FIGURA 25 – MÉDIAS DAS LEITURAS

LEGENDA: Gráfico das médias das leituras dos 3 sensores para diferentes distâncias.

FONTE: Os Autores (2024)

Outras análises importantes para verifcar a exatidão e precisão dos sensores conforme a distância aumenta são do desvio padrão, apresentado na FIGURA 26, e da RMSE e do erro relativo, presentes no Apéndice D, seção D.1 e representadas, respectivamente, na FIGURA 96 e na FIGURA 97.



FIGURA 26 – DESVIO PADRÃO PARA DIFERENTES DISTÂNCIAS

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico do desvio padrão das leituras para diferentes distâncias.

No intuito de entender a relação de cada uma das variáveis (desvio padrão, RMSE e erro relativo) com relação a distância, foi realizada uma regressão polinomial para criar uma linha de tendência integrada dos três sensores, afim de analisar o sistema como um todo. Os dados de todos os sensores foram combinados e transformados em características polinomiais até grau 3, e então utilizado o grau com melhor coeficiente de determinação R^2 . A partir da análise deste coeficiente, que varia entre 0 e 1 e indica o quanto o modelo de regressão se ajusta aos dados, temos que:

- RMSE (R² = 0,8314): Significa que 83,14% da variação nos valores de RMSE pode ser explicada pela relação polinomial com a distância. Isso indica um ajuste forte, sugerindo que a distância tem uma influência significativa sobre o RMSE.
- Desvio Padrão (R² = 0,7834): Significa que 78,34% da variação nos valores de desvio padrão pode ser explicada pela relação polinomial com a distância. Embora não tão forte quanto o RMSE, ainda indica um ajuste bom, mostrando que a distância afeta consideravelmente o desvio padrão.
- Erro Relativo (R² = 0,3937): Significa que apenas 39,37% da variação nos valores de erro relativo pode ser explicada pela relação polinomial com a distância. Isso

indica um ajuste fraco, sugerindo que a a regressão polinomial utilizada não conseguiu se ajustar aos dados dos 3 sensores, tendo em vista a dispersão dos valores de cada sensor.

4.1.3 Resultados dos ensaios de ângulo de medição

Afim de verificar o ângulo de abertura do sensor HC-SR04, assim como compará-lo ao que é informado no seu *datasheet*, realizou-se o ensaio para cada um dos três sensores utilizados, conforme explicado anteriormente (subseção 3.2.3). Através dos gráficos gerados (FIGURA 27, FIGURA 28 e FIGURA 29), percebe-se que o ângulo de abertura dos sensores permanece conforme o *datasheet* somente em distâncias curtas, até aproximadamente 50 cm. Após essa distância existem 'pontos cegos', e então o ângulo de abertura se expande, de modo até desordenado, tal que não é possível determinar o ângulo de abertura de medição real do sensor HC-SR4.

Com a realização desses ensaios, foi possível determinar o sistema esperado (FIGURA 30), e então realizar uma comparação com o sistema teórico, considerando o ângulo de abertura teórico dos sensores, apresentado na FIGURA 31. Nota-se que o sistema esperado difere consideravelmente do sistema teórico, devido a grande diferença entre o ângulo de abertura real e o ângulo de abertura teórico dos sensores.



FIGURA 27 – ENSAIO DE ÂNGULO DE ABERTURA DO SENSOR 1

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico dos pontos detectáveis e não detectáveis pelo Sensor 1.





FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico dos pontos detectáveis e não detectáveis pelo Sensor 2.



0 🗙

X 0 0

0

XO

xx

0 X X X

0 0

ο

0 0

х

x

0 X X

0 0

0

0

0 0 0

o x x

0 0

Х

0 0 0

0 0

×

0 0

0 0 0

0 0 0

5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80

FIGURA 29 – ENSAIO DE ÂNGULO DE ABERTURA DO SENSOR 3

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico dos pontos detectáveis e não detectáveis pelo Sensor 3.

4.1.4 Resultados dos ensaios de interferência

X 0 0 0

X X O O

X

0 0 0

X X X X X 0 0 0

х

X X X O O O O

40 х х х X х 0 Ò Х 0 0 0 0 0 0 ο 0

35

30

25

20 х х х х х ο ο 0 0 Ò х 0 х х 0 0

15

5

x x x

x x x

XX

x x

^o ×

Ó

Os testes de interferência realizados destacaram aspectos importantes do desempenho do sensor HC-SR04 em configurações com múltiplos dispositivos operando simultaneamente. Três sensores foram posicionados paralelamente a distâncias



FIGURA 30 – SISTEMA ESPERADO

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Plano cartesiano representando o sistema teórico.

75

o ø

х

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70

x

х

х

X

XX

х

x x

х

x x x x x x

x x x x x x x x

x x x x x x x

35 X X X X

30

25

20

15

10

5

0

x x

x x x

x x

x x

variáveis de 10 cm a 100 cm de uma superfície refletora, enquanto a separação lateral entre eles foi ajustada para avaliar os efeitos da proximidade.

Inicialmente, os sensores foram dispostos sem espaçamento lateral e operaram sem intervalos entre os disparos. Essa configuração resultou em uma alta taxa de medições inconsistentes, conforme ilustrado na FIGURA 32. As inconsistências observadas foram atribuídas à superposição das ondas ultrassônicas emitidas pelos sensores. Em seguida, medições foram realizadas com espaçamento lateral progressivo entre os sensores (FIGURA 33), a fim de determinar a separação mínima necessária para eliminar a interferência.

Com a introdução de um intervalo de 10 ms entre os disparos, verificou-se uma redução significativa na inconsistência das medições, como mostrado na FIGURA 34. Além disso, A FIGURA 35 apresenta uma análise visual detalhada da distância lateral mínima necessária entre os sensores para evitar interferências, comparando os resultados obtidos com e sem a aplicação de intervalos temporais entre as medições. Vale ressaltar que os testes foram realizados com os sensores fixados em suportes com 7 cm de lado, de modo que o espaçamento minímo fisicamente possível entre os sensores é de 7 cm.

Os resultados indicam que intervalos entre leituras dos sensores é eficaz para mitigar a interferência. Essa medida melhorou significativamente a precisão e a estabilidade das medições, tornando os sensores HC-SR04 mais confiáveis para uso em sistemas multissensores.

FIGURA 32 – MEDIÇÕES COM OS SENSORES LADO A LADO SEM INTERVALO ENTRE AS LEITURAS



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Medições realizadas com os sensores posicionados lado a lado a 20 cm de uma parede

FIGURA 33 – MEDIÇÕES COM OS SENSORES ESPAÇADOS LATERALMENTE SEM INTER-VALO ENTRE AS LEITURAS

Executing task: C:\Users\Eduardo\.platformio\penv\Scripts\platformio.exe device monitor
Terminal on COM3 115200 8-N-1
Available filters and text transformations: colorize, debug, default, direct, esp32_exception_decoder, hexlify, l
og2file, nocontrol, printable, send_on_enter, time
More details at https://bit.ly/pio-monitor-filters
Quit: Ctrl+C Menu: Ctrl+T Help: Ctrl+T followed by Ctrl+H
19.92854,20.53087,18.98202
19.94575,20.53087,18.98202
19.92854,20.53087,19.39505
19.91133,20.53087,18.98202
19.94575,20.18668,19.73924
19.91133,20.53087,18.98202
19.91133,19.77366,19.73924
19.94575,20.53087,18.98202
19.92854,20.53087,19.39505
19.92854,20.53087,18.98202
19.92854,20.53087,18.98202
19.94575,20.53087,19.39505
19.91133.20.18668.19.73924

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Medições realizadas com os sensores espaçados lateralmente a 20 cm de uma parede

FIGURA 34 – MEDIÇÕES COM OS SENSORES LADO A LADO COM INTERVALO ENTRE AS LEITURAS

🐣 Executing task: C:\Users\Eduardo\.platformio\penv\Scripts\platformio.exe device monitor
Terminal on COM3 115200 8-N-1 Available filters and text transformations: colorize, debug, default, direct, esp32_exception_decoder, hexlify, l og2file, nocontrol, printable, send on enter, time
More details at https://bit.lv/pio-monitor-filters
Quit: Ctrl+C Menu: Ctrl+T Help: Ctrl+T followed by Ctrl+H
20.05259.20.17297.20.10418
20.05259,20.15577,19.69143
20.05259,20.49973,19.69143
20.48253,20.15577,19.67424
20.05259,20.49973,19.67424
20.05259,20.49973,19.69143
20.05259,20.17297,20.10418
20.46533,20.51693,20.10418
20.46533,20.15577,19.69143
20.05259,20.49973,19.67424
20.05259,20.58572,20.10418
20.05259,20.15577,19.69143
20.05259,20.49973,19.67424

FONTE: Os Autores (2024)

LEGENDA: Medições realizadas com os sensores posicionados lado a lado a 20 cm de uma parede após inserção de intervalo de 10 ms entre as leituras

FIGURA 35 – ESPAÇAMENTO LATERAL MÍNIMO PARA QUE NÃO HAJA INTERFERÊNCIA ENTRE OS SENSORES



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Comparação do espaçamento lateral mínimo entre os sensores com e sem a aplicação de intervalo entre as leituras

4.1.5 Resultados da avaliação do Sensor HC-SR04 na Medição de Níveis de líquidos

A análise das 500 leituras de cada sensor indicou uma dispersão significativa em relação à distância real de 71 cm, destacando limitações na precisão e exatidão do sensor ao medir a superfície da água, conforme dados apresentados na TABELA 2.

Para melhorar a precisão e a exatidão do sistema, foi aplicado o algoritmo de trilateração no cálculo da posição. No entanto, os resultados demonstraram que o sistema não conseguiu determinar corretamente a posição da superfície da água, conforme ilustrado na FIGURA 36.

TABELA 2 – DADOS OBTIDOS DO ENSAIO DE MEDIÇÃO DE DISTÂNCIA ATÉ A SUPERFÍ-CIE DA ÁGUA

Sensor	Média [cm]	Mínimo [cm]	Máximo [cm]	Desvio padrão [cm]
1	70,12	68,26	72,38	1,292
2	69,76	62,55	72,82	1,341
3	69,97	66,48	72,20	0,941

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Dados obtidos das 500 leituras de distância até a superfície da água realizadas por cada sensor.

FIGURA 36 – POSIÇÃO CALCULADA DE UM PONTO REPRESENTANDO A SUPERFÍCIE DA ÁGUA

>>				and the second approximate
INFO: main :Sugestão de posição dos sensores: Sensor 1: (0,0,0), Sensor 2: (5.3,0,0), Sensor 3: (10.5,0,0) [cm], Sensor 4: (15, 0,0) [cm]				
INFO:main:Deseja alterar as posições	dos sensores? (s/n)			
n				
INFO:main:Target position:	(5.84227,0.0,0.0)			
INFO:main:				
INFO:main:Target position:	(5.91596,0.0,0.0)			
INFO:main:				
INFO:main:Target position:	(5.94492,0.0,0.0)			
INFO:main:				
INFO:main:Target position:	(6.00549,0.0,0.0)			
INFO:main:				
INFO:main:Target position:	(6.06942,0.0,0.0)			
INFO: main :				
INFO:main:Target position:	(0.0895,0.0,0.0)			
INFU: main :				

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Posição calculada de um ponto na superfície da água

4.2 SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM DUAS DIMENSÕES

A fim de avaliar como o sistema em \mathbb{R}^2 se comporta, assim como a combinação de algoritmos para realizar a trilateração, realizou-se diversas simulações com pontos predeterminados (TABELA 3).

Set	Sensor 1 [cm]	Sensor 2 [cm]	Sensor 3 [cm]	Alvo [cm]
0	(0,0)	(300,0)	(50,15)	(18,8)
1	(0,0)	(165,0)	(40,1)	(20,60)
2	(0,0)	(123,0)	(-15,45)	(61,24)
3	(0,0)	(50,0)	(0,40)	(61,24)
4	(0,0)	(80,0)	(0,80)	(40,40)
5	(0,0)	(80,0)	(0,80)	(75,75)
6	(0,0)	(80,0)	(0,80)	(20,65)
7	(0,0)	(80,0)	(0,80)	(65,20)

TABELA 3 – VALORES PREDETERMINADOS DO SISTEMA

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Valores predeterminados escolhidos arbitrariamente para avaliar o a precisão e exatidão do Programa Principal.

Os pontos apresentados na TABELA 3 são pontos a serem simulados e, portanto, não possuem uma unidade específica. Nessa tabela, representou-se especificamente a unidade "centímetros" para fazer um paralelo com casos de emprego do sensor ultrassônico **HC-SR04**, e isso foi também considerado nas simulações realizadas.

Os sets 0 ao 3 foram determinados de forma a obter pontos diferentes, tanto

para os sensores, quanto para os alvos. Já os pontos 4 ao 7 foram escolhidos mantendo fixas as posições dos sensores, mudando apenas a posição do alvo.

4.2.1 Sets 0 ao 3 e Efetividade dos Filtros Digitais

Nos quatro primeiros *sets* (0 ao 3), utilizou-se apenas o Método dos Mínimos Quadrados Linear com SVD, não comparando ainda com o *Lower-upper decomposition* e com o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear. Estes testes demonstraram a efetividade dos filtros digitais utilizados, como a SMA e a EMA (seção 2.5). Para todos os casos simulados em que a SMA foi empregada, utilizou-se uma *hopping window* com um tamanho de 50 amostras, ou seja, janelas com valores não sobrepostos. Isto foi feito nas simulações para evitar resultados enviesados.

Realizou-se, para cada *set*, duas etapas de simulação, onde a primeira apenas utilizou um dos algoritmos de resolução do sistema de equações, e a outra, utilizando também ambos os filtros digitais simultaneamente. Cada simulação consistiu no cálculo de 500 (quinhentas) iterações, cada uma acrescentando um valor pseudo aleatório de erro (desvio) diferente. Para todos os casos presentes na TABELA 3, utilizou-se um teto de erro correspondente ao **Desvio Padrão** de "0.8", em relação ao valor predeterminado de cada alvo. Este valor foi escolhido com base numa aproximação dos valores obtidos nos ensaios realizados com o sensor HC-SR04 (seção 4.1). O valor de α escolhido para o filtro EMA foi de "0.4".

Pode-se observar os quinze primeiros valores dos quinhentos calculados para cada *set*, com e sem a utilização dos filtros digitais no Apéndice A, seção A.1, na TABELA 8, TABELA 9, TABELA 10 e TABELA 11.

Observa-se na FIGURA 37 o valor médio das 500 amostras das coordenadas calculadas pelo sistema de trilateração para cada *set*. Os valores apresentado não possuem uma unidade de medida específica, mas como mencionado anteriormente, utilizou-se "cm" a fim de emular o emprego de um sensor real.

Os valores do Erro Padrão exibidos na FIGURA 38, revelam que a aplicação dos filtros digitais (SMA e EMA) resultou num aumento significativo da **Precisão** do sistema.

De forma semelhante, a FIGURA 39 revela que houve também um aumento na **exatidão** do sistema.

Utilizando a equação $Reducao = 1 - \frac{Valor(comfiltros)}{Valor(semfiltro)} * 100$ (sendo "Valor" o valor do Desvio Padrão, Erro Padrão ou Erro relativo), verifica-se que ao aplicar ambos os filtros (SMA e EMA) há uma redução significativa, tanto do Desvio e Erro Padrão quanto do Erro Relativo, em torno de 92 a 93% de redução em ambos (FIGURA 40). Como estas simulações foram feitas adicionando um desvio artificial em torno do valor real



FIGURA 37 - SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: MÉDIA



LEGENDA: Valores da médias das coordenadas calculadas, para os 500 valores simulados, comparando os resultados com e sem a aplicação dos filtros digitais (EMA e SMA).







(predeterminado), os valores predeterminados ficaram muito próximos dos respectivos intervalos de confiança (de 95%) para todos os casos simulados, por exemplo, para o *Set 0*, sem a aplicação dos filtros, o intervalo de confiança de x é [18.03, 18.16] e o de y é [7.41, 7.95], e o intervalo de confiança após a aplicação dos filtros foi [17.99, 18.00] para x e [8.00, 8.03] para y, sendo o valor predeterminado da posição do alvo (18, 8) e a


FIGURA 39 - SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: ERRO RELATIVO



média dos valores calculados na simulação aplicando os Filtros Digitais foi (18.0, 8.0). Os intervalos de confiança podem ser observados no Apéndice A, seção A.2.



FIGURA 40 - SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: REDUÇÃO DE ERROS



LEGENDA: Análise dos erros relativos dos 500 valores simulados, apresentados em escala logarítmica, comparando os resultados com e sem a aplicação dos filtros digitais simultaneamente, como EMA e SMA.

Destaca-se o *Set 1*, onde houve um Desvio Padrão de 70.29904 em **y** para o caso sem a aplicação dos filtros. Isso possivelmente ocorreu devido à disposição dos sensores e do alvo. Verificou-se, entretanto, uma redução significativa (cerca de 92 a 93%) tanto para o Erro Relativo quanto para o Desvio Padrão após a aplicação dos filtros (FIGURA 40).

4.2.2 Sets 4 ao 7 e os Algoritmos de Solução de Sistemas de Equações

Nos *sets* restantes (4 ao 7), realizou-se uma comparação entre os algoritmos previstos para a solução do sistema de equações que descreve a trilateração. Comparou-se o método *Lower-upper decomposition*, o Método dos Mínimos Quadrados Linear com SVD e o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear, utilizando algoritmo *Trust Region Reflective*. Para esses testes, não aplicou-se os filtros digitais.

Os testes foram realizados com 500 iterações, inserindo novamente um erro artificial com teto corresponde ao Desvio Padrão de "0.8" nos valores das distâncias em cada iteração. As médias, erros padrões, desvios padrões e erros relativos resultantes podem ser observados no Apéndice A, seção A.3.

Observa-se na FIGURA 41 e na FIGURA 42 os valores de redução, obtidos com a $Reducao = 1 - \frac{Valor(comfiltros)}{Valor(semfiltro)} * 100$ (mesma equação utilizada para calcular a redução o Set 0 ao 3). Verifica-se que a redução tanto do Erro Relativo quanto o Erro e Desvio Padrão, foi relativamente pequena (de 2 a 5%), ou até mesmo negativa, ou seja, ao invés de redução, houve aumento. Portanto, para o caso atualmente estudado, utilizando três sensores, considerando apenas duas dimensões, o método *Lower Upper Decomposition* é suficientemente satisfatório para realizar a trilateração, visto que não houve redução significativa entre os métodos. A "Redução A" corresponde a uma comparação entre os métodos *Lower Upper Decomposition* e Método dos Mínimos Quadrados Linear, enquanto que "Redução B" é uma comparação entre *Lower Upper Decomposition* e Método dos Mínimos Quadrados Não Linear.

As simulações para os *Sets 4 ao 7* foram realizadas de forma semelhante ao realizado na subseção 4.2.1.

4.3 SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM TRÊS DIMENSÕES

Após feita a transição do sistema para \mathbb{R}^3 , realizou-se diversas simulações para verificar seu comportamento.

Para realizar essas simulações, implementou-se no programa um método iterativo onde diversos pontos são analizados. A região de pontos que o *target* (ponto alvo) assumirá, foi arbitrariamente escolhida, tendo como primeiro ponto a origem



FIGURA 41 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: REDUÇÃO DE ERROS A

FONTE: Os Autores (2024)

LEGENDA: Valores das Reduções de Erros A das coordenadas calculadas, para os 500 valores simulados, comparando os resultados dos diferentes métodos de resolução do sistema de equações.







LEGENDA: Valores das Reduções de Erros B das coordenadas calculadas, para os 500 valores simulados, comparando os resultados dos diferentes métodos de resolução do sistema de equações.

(0,0,0), e como fim (80,80,80), onde em cada iteração, um passo de 20 unidades em cada eixo foi realizado, resultando em 125 pontos.

Verifica-se na TABELA 4 e na TABELA 5 a relação entre os índices atribuídos a cada ponto. Esses índices são rótulos empregados para representar os pontos nos gráficos de resultados.

Index	(x,y,z)	Index	(x,y,z)	Index	(x,y,z)
0	(0.00;0.00;0.00)	22	(40.00;80.00;0.00)	44	(80.00;60.00;20.00)
1	(20.00;0.00;0.00)	23	(60.00;80.00;0.00)	45	(0.00;80.00;20.00)
2	(40.00;0.00;0.00)	24	(80.00;80.00;0.00)	46	(20.00;80.00;20.00)
3	(60.00;0.00;0.00)	25	(0.00;0.00;20.00)	47	(40.00;80.00;20.00)
4	(80.00;0.00;0.00)	26	(20.00;0.00;20.00)	48	(60.00;80.00;20.00)
5	(0.00;20.00;0.00)	27	(40.00;0.00;20.00)	49	(80.00;80.00;20.00)
6	(20.00;20.00;0.00)	28	(60.00;0.00;20.00)	50	(0.00;0.00;40.00)
7	(40.00;20.00;0.00)	29	(80.00;0.00;20.00)	51	(20.00;0.00;40.00)
8	(60.00;20.00;0.00)	30	(0.00;20.00;20.00)	52	(40.00;0.00;40.00)
9	(80.00;20.00;0.00)	31	(20.00;20.00;20.00)	53	(60.00;0.00;40.00)
10	(0.00;40.00;0.00)	32	(40.00;20.00;20.00)	54	(80.00;0.00;40.00)
11	(20.00;40.00;0.00)	33	(60.00;20.00;20.00)	55	(0.00;20.00;40.00)
12	(40.00;40.00;0.00)	34	(80.00;20.00;20.00)	56	(20.00;20.00;40.00)
13	(60.00;40.00;0.00)	35	(0.00;40.00;20.00)	57	(40.00;20.00;40.00)
14	(80.00;40.00;0.00)	36	(20.00;40.00;20.00)	58	(60.00;20.00;40.00)
15	(0.00;60.00;0.00)	37	(40.00;40.00;20.00)	59	(80.00;20.00;40.00)
16	(20.00;60.00;0.00)	38	(60.00;40.00;20.00)	60	(0.00;40.00;40.00)
17	(40.00;60.00;0.00)	39	(80.00;40.00;20.00)	61	(20.00;40.00;40.00)
18	(60.00;60.00;0.00)	40	(0.00;60.00;20.00)	62	(40.00;40.00;40.00)
19	(80.00;60.00;0.00)	41	(20.00;60.00;20.00)	63	(60.00;40.00;40.00)
20	(0.00;80.00;0.00)	42	(40.00;60.00;20.00)	64	(80.00;40.00;40.00)
21	(20.00;80.00;0.00)	43	(60.00;60.00;20.00)	65	(0.00;60.00;40.00)

TABELA 4 – REFERÊNCIA 1 DOS ÍNDICES DOS PONTOS

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Referência dos índices atribuídos a cada ponto simulado. Os índices são considerados rótulos dos respectivos pontos para facilitar sua representação nos gráficos de resultados.

Em cada simulação individual, um erro artificial aleatório, seguindo distribuição Gaussiana, é então aplicado nos valores de distância entre as posições dos sensores e a posição do ponto alvo a ser calculado (TABELA 4 e TABELA 5). O valor do desvio padrão escolhido para o erro foi de *0,9*, considerando o pior caso observado nos ensaios do sensor **HC-SR04**. Simulando-se **100** iterações para cada um dos pontos alvo, foi possível fazer diversas análises do comportamento do sistema.

4.3.1 Comparação entre 3 sensores e 4 sensores

Realizou-se simulações verificando o comportamento do sistema quando 3 sensores são empregados em contraste ao caso em que 4 sensores são empregados. Para isso, dois grupos de posições foram utilizados: **Grupo A** e **Grupo B**.

Quando empregando 3 sensores, considera-se:

- Grupo A: Sensor1 : (0;0;0), Sensor2 : (80;0;10), Sensor3 : (0;80;10);
- Grupo B: Sensor1 : (0;0;0), Sensor2 : (2;0;0), Sensor3 : (0;2;0).

Index	(x,y,z)	Index	(x,y,z)	Index	(x,y,z)
66	(20.00,60.00,40.00)	88	(60.00,40.00,60.00)	110	(0.00,40.00,80.00)
67	(40.00,60.00,40.00)	89	(80.00,40.00,60.00)	111	(20.00,40.00,80.00)
68	(60.00,60.00,40.00)	90	(0.00,60.00,60.00)	112	(40.00,40.00,80.00)
69	(80.00,60.00,40.00)	91	(20.00,60.00,60.00)	113	(60.00,40.00,80.00)
70	(0.00,80.00,40.00)	92	(40.00,60.00,60.00)	114	(80.00,40.00,80.00)
71	(20.00,80.00,40.00)	93	(60.00,60.00,60.00)	115	(0.00,60.00,80.00)
72	(40.00,80.00,40.00)	94	(80.00,60.00,60.00)	116	(20.00,60.00,80.00)
73	(60.00,80.00,40.00)	95	(0.00,80.00,60.00)	117	(40.00,60.00,80.00)
74	(80.00,80.00,40.00)	96	(20.00,80.00,60.00)	118	(60.00,60.00,80.00)
75	(0.00,0.00,60.00)	97	(40.00,80.00,60.00)	119	(80.00,60.00,80.00)
76	(20.00,0.00,60.00)	98	(60.00,80.00,60.00)	120	(0.00, 80.00, 80.00)
77	(40.00,0.00,60.00)	99	(80.00,80.00,60.00)	121	(20.00,80.00,80.00)
78	(60.00,0.00,60.00)	100	(0.00, 0.00, 80.00)	122	(40.00,80.00,80.00)
79	(80.00,0.00,60.00)	101	(20.00,0.00,80.00)	123	(60.00,80.00,80.00)
80	(0.00,20.00,60.00)	102	(40.00,0.00,80.00)	124	(80.00,80.00,80.00)
81	(20.00,20.00,60.00)	103	(60.00,0.00,80.00)	-	-
82	(40.00,20.00,60.00)	104	(80.00,0.00,80.00)	-	-
83	(60.00,20.00,60.00)	105	(0.00,20.00,80.00)	-	-
84	(80.00,20.00,60.00)	106	(20.00,20.00,80.00)	-	-
85	(0.00,40.00,60.00)	107	(40.00,20.00,80.00)	-	-
86	(20.00,40.00,60.00)	108	(60.00,20.00,80.00)	-	-
87	(40.00,40.00,60.00)	109	(80.00,20.00,80.00)	-	-

TABELA 5 – REFERÊNCIA 2 DOS ÍNDICES DOS PONTOS

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Referência dos índices atribuídos a cada ponto simulado. Os índices são considerados rótulos dos respectivos pontos para facilitar sua representação nos gráficos de resultados.

Quando empregando 4 sensores, considera-se:

- Grupo A: Sensor1 : (0;0;0), Sensor2 : (80;0;10), Sensor3 : (0;80;10), Sensor4 : (80;80;10);
- Grupo B: Sensor1 : (0;0;0), Sensor2 : (2;0;0), Sensor3 : (0;2;0), Sensor4 : (0;0;2).

Esses conjuntos de pontos (**Grupo A** e **Grupo B**) foram utilizados no **Sistema Principal de Trilateração**, onde simulou-se a trilateração de cada ponto presente na TABELA 4 e na TABELA 5. O Grupo A e Grupo B foram utilizados em todas as simulações das subseções seguintes deste trabalho.

Estes dois conjutos foram determinados para que seja possível observar duas condições, sendo o Grupo A uma condição favorável, onde a região de possível inserção dos raios de todas as esferas dos sensores seja maior, enquanto que o Grupo B apresenta uma região menor (em relação à região dos pontos simulados). Destaca-se, também, que a posição dos sensores (em relação ao ponto alvo), afetam diretamente a capacidade do sistema de equações ser resolvido com exatidão significativa pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Para estas simulações empregou-se o Método dos Mínimos Quadrados Linear, empregando *Singular Value Decomposition (SVD)* para resolver o sistema de equações. Comparando a FIGURA 43 e a FIGURA 44 (que contém os valores médios





FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 44 - SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO A, VALORES MÉDIOS OBTIDOS

FONTE: Os Autores (2024)

das posições do alvo para o Grupo A), verifica-se que a presença de ambiguidade no sistema no caso dos 3 sensores afeta os resultados de forma significativamente negativa, e o caso com 4 sensores apresenta resultados mais coerentes.



FIGURA 45 – SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO A, ERROS RELATIVOS MÉDIOS

FONTE: Os Autores (2024)

Todos os resultados referentes ao Grupo B encontram-se presentes no Apéndice B, seção B.2. Comparando os valores médios para o Grupo B, observa-se que ambos os casos apresentaram resultados pouco satisfatórios. Isto é resultado da



FIGURA 46 - SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO A, ERROS RELATIVOS MÉDIOS

FONTE: Os Autores (2024)

disposição muito próxima dos sensores. Conclui-se, portanto, que a disposição dos sensores (e sua relação com a posição alvo) influencia significativamente os resultados aproximados pelo Método dos Mínimos Quadrados, isto para as situações em que há

erros nas medidas de distância (neste caso os erros artificais aplicados). Entretanto, ainda sim observa-se resultados mais coerentes para o caso de 4 sensores.

Esses resultados consolidam-se comparando FIGURA 45 com FIGURA 46, pois verifica-se que os erros relativos do sistema com 4 sensores são em geral menores do que o sistema com 3 sensores, isso tanto para o Grupo A quanto para o Grupo B. Em contrapartida, analisando os desvios padrões (Apéndice B, seção B.1 e seção B.2), nota-se que o sistema com 3 sensores apresenta um desvio padrão menor para o eixo **z** para o Grupo A, porém, comparando os casos do Grupo B, verifica-se que o sistema com 3 sensores de calcular até mesmo valores próximos da posição esperada de **z**.

Conclui-se, portanto, que para o caso em \mathbb{R}^3 é fundamental o uso de pelo menos 4 sensores, pois a presença de ambiguidade no sistema (devido ao número de equações do sistema ser inferior ao de variáveis) reduz drasticamente os casos em que os Métodos dos Mínimos Quadrados serão capazes de aproximar um resultado com alta exatidão. Com base nisso, para as simulações apresentadas nas subseções seguintes será apenas utilizado o sistema com 4 sensores.

4.3.2 Comparação entre o Método dos Mínimos Quadrados Linear e o Não Linear

Comparou-se também os resultados do sistema quando usando o Método dos Mínimos Quadrados Linear, que emprega *Singular Value Decomposition (SVD)* com os resultados quando utilizando o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear, que emprega algoritmo *Trust Region Reflective*. Para o método não linear, tomou-se como ponto de partida, ou "chute inicial" o resultado calculado pelo método linear.

Para realizar a comparação dos métodos, deu-se preferência para os resultados de **exatidão**, ou seja, deu-se atenção ao erros relativos. Para comparar os resultados, observou-se a possível "redução" causada pelo método não linear, utilizando novamente a equação $Reducao = 1 - \frac{Valor(metodonaolinear)}{Valor(metodolinear)} * 100$. Analisando a FIGURA 47 e FIGURA 48, nota-se que ao utilizar o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear, os resultados não melhoram significativamente ou de forma consistente para justificar seu emprego, e, para certos casos, há até mesmo um aumento de erro relativo em relação ao método linear. A preferência pelo método **linear** é ainda reforçada quando leva-se em conta o maior *overhead* do método não linear.

Portanto, para este sistema será dada preferência ao método Método dos Mínimos Quadrados **linear**.



FIGURA 47 – SIMULAÇÃO: COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO A

FONTE: Os Autores (2024)

4.3.3 Emprego de Filtro FIR

O **Programa Principal de Trilateração** proposto pode ter até dois filtros: "Filtro 1" (entrada do sistema) e "Filtro 2" (saída do sistema). O Filtro 1 é empregado diretamente nos valores das distâncias que alimentam o sistema.

Implementou-se como Filtro 1 do sistema, a fim de realizar avaliações, um filtro FIR passa-baixa. Para os testes desse filtro, utilizou-se o Método dos Mínimos Quadrados Linear, empregando *Singular Value Decomposition (SVD)*. Para obter os parâmetros do sistema avaliou-se diversos fatores, tentando obter resultados satisfatórios, mas com baixo *overhead*, tendo em mente aplicações futuras no sistema real. A partir de algumas investigações, o filtro FIR foi projetado utilizando 50 coeficientes (taps), com uma frequência de corte de 1 Hz, definida em relação à taxa de amostragem nominal do sistema. Os coeficientes do filtro foram gerados usando a função *scipy.signal.firwin*,



FIGURA 48 – SIMULAÇÃO: COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)

assumindo um tamanho de bloco de 50 amostras. Devido ao possível *overhead* do sistema, a taxa de amostragem efetiva pode variar, tornando a frequência de corte proporcional à taxa de processamento dos blocos, em vez de representar uma frequência absoluta no tempo. Para este filtro, considerou-se uma janela do tipo "hamming".

Para a análise do comportamento do filtro, comparou-se os resultados do sistema utilizando o filtro, com os resultados do sistema sem o emprego do filtro. Para isto, novamente utilizou-se a equação da redução: $Reducao = 1 - \frac{Valor(comfiltros)}{Valor(semfiltro)} * 100.$

Verifica-se na FIGURA 49 que houve uma redução significativa (acima de **75**%) nos erros relativos para os resultados do Grupo A, e o mesmo foi observado para o Grupo B. Esse resultado também é observado para os erros padrões do sistema, com uma redução acima de 75% (FIGURA 50). Os resultados referentes ao Grupo B encontram-se no Apéndice C, seção C.1.

FIGURA 49 – SIMULAÇÃO: FILTRO FIR, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO A



FONTE: Os Autores (2024)

4.3.4 Emprego de Filtro SMA

Para o sistema em \mathbb{R}^3 , empregou-se novamente o filtro da *Simple Moving Average* (SMA), de forma similar ao que foi realizado para o sistema em \mathbb{R}^2 . Para estas simulações, utilizou-se uma janela móvel de 50 amostras, com valores não sobrepostos.

Na nálise do comportamento do filtro, comparou-se os resultados do sistema utilizando o filtro, com os resultados do sistema sem o emprego do filtro. Para isto, novamente utilizou-se a equação da redução: $Reducao = 1 - \frac{Valor(comfiltros)}{Valor(semfiltro)} * 100.$

Os resultados das simulações encontram-se no Apéndice C, seção C.1. Observouse uma redução relativamente consistente em torno de **83,3**% para o erro relativo, nos resultados do Grupo A e Grupo B. Um comportamento semelhante é observado para a redução dos erros padrões.

Ao comparar esses resultados com os obtidos na subseção 4.3.3, conclui-se

FIGURA 50 – SIMULAÇÃO: FILTRO FIR, REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO A



FONTE: Os Autores (2024)

que para as presentes condições, o filtro SMA retorna resultados relativamente mais precisos e exatos do que o filtro FIR, considerando os parâmetros utilizados para cada filtro.

4.3.5 Emprego de Filtro EMA juntamente ao SMA

Verificou-se em subseção 4.3.4 que o filtro SMA apresenta resultados satisfatórios e levemente melhores do que o filtro FIR. Portanto, adotou-se como Filtro 1 a SMA. Para obter resultados mais **exatos** e **precisos**, o **Programa Principal de Trilateração** ainda apresenta a possibilidade do emprego de um Filtro 2. Para este caso, escolheu-se a *Exponential Moving Average* (EMA), de forma semelhante ao que foi feito no sistema em \mathbb{R}^2 . O Filtro 2, em contrapartida com o Filtro 1, é empregado nos valores de posição resultantes do cálculos dos algoritmos que resolvem o sistema de equações. O filtro SMA foi utilizado considerando novamente 50 amostras com uma janela de valores não sobrepostos. Já para o filtro EMA foi empregado um *alpha* de 0.125. Para a análise do comportamento do filtro, comparou-se os resultados do sistema utilizando o filtro, com os resultados do sistema sem o emprego do filtro. Para isto, novamente utilizou-se a equação da redução: $Reducao = 1 - \frac{Valor(comfiltros)}{Valor(semfiltro)} * 100$. Os



FIGURA 51 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO A

FONTE: Os Autores (2024)

resultados referentes aos erros relativos e erros padrões do Grupo B, assim como os resultados restates do Grupo A, estão presentes no Apéndice C, seção C.3. A partir dos resultados, verifica-se uma redução de erro relativo consideravelmente consistente acima de **91**% para a maioria dos pontos, tanto para o Grupo A (FIGURA 51) quanto para o Grupo B. O mesmo é observado para a redução do erro padrão (FIGURA 52).

Conclui-se, então, que a combinação do SMA com o EMA fornece resultados consistentemente satisfatórios, tanto de **precisão** quanto de **exatidão**. A exatidão aparenta ser satisfatória para a maioria dos pontos, como pode ser observado nos



FIGURA 52 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO A

FONTE: Os Autores (2024)

valores de erro relativo de ambos os grupos, onde os erros relativos ficam em uma faixa de 0 a 14% em geral, sendo que os erros relativos para x e y do Grupo A não ultrapassam 1%, e apenas o erro relativo para z desse grupo ultrapassa 4% (em uma região específica) (Apéndice C, seção C.3). Destaca-se que para ambos os grupos, os valores médios de posição calculados foram consideravelmente próximos dos valores esperados.

4.4 TESTES DO PROTÓTIPO E DO SISTEMA DE TRILATERAÇÃO

4.4.1 Região de detecção

Inicialmente, foi verificada a região detectável pelo sistema real, ou seja, os pontos detectáveis pelos três sensores simultaneamente. A FIGURA 53 apresenta os resultados utilizando um objeto cilíndrico metálico, enquanto a FIGURA 54 mostra os resultados com um objeto retangular feito de papelão. Um ponto foi considerado

detectável quando o sistema calculava corretamente as coordenadas do objeto, com tolerância de \pm 2 cm e desvio padrão inferior a 1 cm. Diferentemente da análise teórica apresentada na subseção 3.2.3, que superpõe os pontos visíveis por cada sensor individualmente, esse teste revelou o comportamento prático do sistema.

Com o objeto cilíndrico, apenas 11 pontos, ou 4,29% da região total composta por 256 pontos no plano cartesiano, foram considerados detectáveis. Para o objeto retangular, o número de pontos detectáveis foi ainda menor, totalizando 9 pontos (3,52%). Esses resultados indicam que a forma e o material do objeto influencia significativamente a capacidade de detecção do sensor HC-SR04, possivelmente devido à diferença na forma como as ondas ultrassônicas são refletidas.

Após a implementação do intervalo de tempo entre as leituras dos sensores para mitigar a interferência, a região detectável do sistema real utilizando três sensores foi reavaliada com o objeto cilíndrico. Conforme ilustrado na FIGURA 55, houve uma melhoria significativa na área detectável, que aumentou de 11 para 50 pontos "visíveis". Esse incremento representa um aumento de aproximadamente 354,54%, passando a abranger 19,53% da região total definida no plano cartesiano. Vale destacar que, no sistema físico, foi necessário aumentar o intervalo de tempo entre as leituras dos sensores para 30 ms, devido à geometria final de posicionamento dos sensores. Com isso, cada ciclo completo de medições do sistema — considerando os três sensores — ocorre a cada 150 ms. Esse ajuste foi essencial para garantir a consistência das medições e minimizar interferências, contribuindo para o desempenho geral do sistema.

Em seguida, o sistema foi avaliado com quatro sensores, mantendo o mesmo intervalo de tempo entre as leituras utilizado no caso com três sensores. A FIGURA 56 mostra que a região detectável passou a incluir 30 pontos, o que equivale a 11,71% do plano cartesiano. Apesar do aumento no número de sensores, observou-se uma redução na área detectável em comparação ao sistema com três sensores. Esse comportamento é atribuído à diminuição da região de interseção dos ângulos de medição dos sensores. Adicionalmente, identificou-se uma pequena área, a aproximadamente 50 cm de qualquer um dos sensores, onde o sistema não foi capaz de calcular a posição do objeto. Essa limitação não foi explicada com base nos ensaios realizados, destacando a necessidade de estudos adicionais para esclarecer esse fenômeno.

4.4.2 Comparação entre método linear e não linear no sistema com 3 sensores

Após definir os pontos detectáveis pelo sistema, foram realizados testes para comparar os Métodos dos Mínimos Quadrados Linear e Não Linear nos pontos detectáveis, para 100 amostras, utilizando EMA (α =0.4) e SMA com janela de 50 amostras. Os dados obtidos estão apresentados pela TABELA 6, compostos pelo desvio padrão

FIGURA 53 – REGIÃO DETECTÁVEL PELO SISTEMA UTILIZANDO UM OBJETO CILÍN-DRICO



FONTE: Os Autores (2024)

médio e o erro padrão médio das coordenadas em **x** e em **y**. A partir destes dados, foi possível verificar que houve uma redução dos valores desses parâmetros quando utilizado o método não linear comparado com o linear, apresentados na TABELA 7. Dessa forma, nota-se que o método não linear é mais eficiente.

TABELA 6 – COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS LINEAR E NÃO LINEAR

Método	Desvio padrão X (cm)	Desvio padrão Y (cm)	Erro padrão X (cm)	Erro padrão Y (cm)
Linear	0,259	0,818	0,026	0,082
Não linear	0,247	0,791	0,025	0,079

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Tabela apresentando a comparação entre o Método dos Mínimos Quadrados Linear e Não Linear.

~	~		
	•	7 11 1 / 6 11 1/ 1 1 1 1	
- 8 2 1 11 1. 41 1 1 1. 13			
3			

Desvio padrão em X (%)	Desvio padrão Y (%)	Erro padrão em X (%)	Erro padrão em Y (%)
4,51	3,27	4,51	3,27

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Tabela apresentando a porcentagem de redução dos parâmetros quando utilizado o método linear.

FIGURA 54 – REGIÃO DETECTÁVEL PELO SISTEMA UTILIZANDO UM OBJETO RETANGU-LAR



FONTE: Os Autores (2024)

4.4.3 Cálculo das coordenadas pelo sistema com 3 sensores

Os cálculos das coordenadas **x** e **y** foram realizados nos pontos considerados detectáveis pelo sistema esperado apresentado na subseção 4.1.3, tanto para o objeto cilíndrico quanto para o objeto retangular, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear. A TABELA 14 e a TABELA 15 presentes no Apéndice E, seção E.1 apresentam os dados referentes aos testes com o objeto cilíndrico e o objeto retangular, respectivamente, a partir dos quais foi possível desenvolver gráficos que tornam a visualização dos dados mais clara. Nessas tabelas, "Desvio Padrão" foi abreviado para "Dp".

A FIGURA 57 e a FIGURA 58 apresentam as coordenadas calculadas utilizando o objeto cilíndrico e o objeto retangular, respectivamente. Os demais resultados obtidos podem ser observados no Apéndice E, seção E.1, na FIGURA 98, FIGURA 99, FIGURA 100 e FIGURA 101. Observando os gráficos, verifica-se que as coordenadas foram calculadas com exatidão e precisão em todos os pontos em que o objeto foi detectado pelos 3 sensores HC-SR04, indicando que o sistema funciona adequadamente desde que o ponto seja detectável. Além disso, nota-se que a forma do objeto influencia o funcionamento do sistema, seja pela diferença dos pontos detectados ou

FIGURA 55 – REGIÃO DETECTÁVEL PELO SISTEMA COM 3 SENSORES APÓS MITIGA-ÇÃO DA INTERFERÊNCIA



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Plano cartesiano representando a região detectável pelo sistema após implementação do intervalo de tempo entre as leituras, utilizando um objeto cilíndrico.

FIGURA 56 – REGIÃO DETECTÁVEL PELO SISTEMA COM 4 SENSORES APÓS MITIGA-ÇÃO DA INTERFERÊNCIA





pela diferença das coordenadas calculadas em um mesmo ponto.



FIGURA 57 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES COM O OBJETO CILÍNDRICO

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando as coordenadas x e y calculadas nos testes com o objeto cilíndrico.

4.4.4 Comparação entre filtro SMA e FIR no sistema com 4 sensores

Após identificar os pontos detectáveis pelo sistema, foram realizados testes comparativos entre os filtros SMA e FIR aplicados a uma amostra desses pontos. Para garantir representatividade, os pontos selecionados estavam localizados na região de interseção dos ângulos de abertura dos quatro sensores. Os testes utilizaram um objeto cilíndrico como referência, e as medições foram realizadas com janelas de 20 amostras em ambos os casos. No que se refere ao filtro SMA, os resultados obtidos estão representados nas figuras relacionadas ao desempenho do sistema. A FIGURA 59 apresenta as coordenadas calculadas (\mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z}), enquanto os gráficos referentes ao desvio padrão, erro padrão e erro relativo são apresentados no Apéndice E, seção E.2, na FIGURA 102, FIGURA 103 e FIGURA 104. A coordenada \mathbf{z} apresentou valor zero em todos os cálculos, devido à configuração planar do sistema, com todos os sensores posicionados no plano $\mathbf{z} = 0$.

FIGURA 58 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES COM O OBJETO RETANGU-LAR



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando as coordenadas x e y calculadas nos testes com o objeto retangular.

Para o filtro FIR, os resultados seguem a mesma estrutura de apresentação. As coordenadas calculadas (\mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z}) são apresentadas na FIGURA 60, enquanto os demais dados podem ser observados no Apéndice E, seção E.2, na FIGURA 105, FIGURA 106 e FIGURA 107.

4.4.5 Comparação entre Método dos Minimos Quadrados Linear e Não Linear no sistema com 4 sensores

Após a comparação entre os filtros SMA e FIR, foram realizados ensaios para avaliar os Métodos dos Mínimos Quadrados Linear e Não Linear no sistema real. Para garantir consistência na análise, os testes utilizaram os mesmos pontos detectáveis, o mesmo objeto e a mesma janela de 20 amostras adotados nos ensaios anteriores. Com base nos resultados da comparação dos filtros, optou-se por aplicar o filtro SMA neste experimento, devido ao seu desempenho superior em relação à estabilidade das medições. Com relação ao Método dos Mínimos Quadrados Linear, as coordenadas **x**,



FIGURA 59 - COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO SMA



y e **z** calculadas são apresentadas na FIGURA 61. O desvio padrão, o erro padrão e o erro relativo dessas coordenadas são apresentados no Apéndice E, na seção E.3, na FIGURA 108, FIGURA 109 e FIGURA 110.

Seguindo o mesmo padrão para o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear, as coordenadas calculadas estão representadas na FIGURA 62, enquanto os demais dados obtidos são apresentados no Apéndice E, na seção E.3, na FIGURA 111, FI-GURA 112 e FIGURA 113. Novamente a coordenada **z** apresentou valor zero em todos os cálculos, devido à planificação do sistema, com todos os sensores posicionados no plano em **z** = 0.

4.4.6 Testes do sistema em 3 dimensões

A fim de testar o sistema em 3D, foram realizados testes posicioando um dos sensores acima dos demais. Dessa forma, o conjunto de coordenadas dos sensores do Master, Slave 1, Slave 2 e Slave 3 ficou, respectivamente, (0,0,0), (0,80,0), (80,0,0),



FIGURA 60 - COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO FIR



(80,80,2.5). A coordenada z = 0 dos três primeiros sensores se deve à necessidade do sensor 1 ser posicionado no ponto (0,0,0), de modo que os demais sensores posicionados na mesma altura que ele também contéma a coordenada z = 0. O sensor 4 possui z = 2.5 pois está fixado num suporte 2,5 cm mais alto que os demais, com um ângulo de aproximadamente 15° para baixo. Os cálculos foram realizados utilizando o filtro SMA e o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear. As coordenadas **x**, **y** e **z** calculadas são apresentadas na FIGURA 63. O desvio padrão dessas coordenadas é mostrado na FIGURA 64, enquanto a FIGURA 65 apresenta o erro padrão calculado. A partir da análise dos dados expostos, verifica-se que o sistema não conseguiu calcular corretamente a coordenada z com o sistema nessa configuração.

Para avaliar o desempenho do sistema em 3D, foram realizados testes posicionando um dos sensores em uma altura superior aos demais. Dessa forma, as coordenadas dos sensores Master, Slave 1, Slave 2 e Slave 3 foram definidas, respectivamente, como (0, 0, 0), (0, 80, 0), (80, 0, 0) e (80, 80, 2.5). A coordenada z = 0dos três primeiros sensores foi mantida devido à necessidade de o sensor Master ser posicionado na origem (0, 0, 0), o que implicou que os demais sensores, localizados

FIGURA 61 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES UTILIZANDO O MÉTODO LI-NEAR





na mesma altura que ele, também apresentassem z = 0. O sensor Slave 3, por sua vez, foi fixado em um suporte com 2,5 cm de altura adicional, inclinado em um ângulo aproximado de 15° para baixo.

Os cálculos foram realizados utilizando o filtro SMA combinado com o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear. As coordenadas calculadas (**x**, **y** e **z**) são apresentadas na FIGURA 63. O desvio padrão dessas coordenadas é exibido na FIGURA 64, enquanto a FIGURA 65 apresenta o erro padrão das medições.

Com base na análise dos dados apresentados, constatou-se que o sistema, nessa configuração, não foi capaz de calcular corretamente a coordenada z, indicando a necessidade de ajustes no posicionamento dos sensores ou no modelo de cálculo utilizado.



FIGURA 62 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES UTILIZANDO MÉTODO NÃO LINEAR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando as coordenadas x, y e z calculadas nos testes utilizando o método não linear.

FIGURA 63 – COORDENADAS CALCULADAS NOS TESTES COM 1 SENSOR MAIS ALTO QUE OS OUTROS



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando as coordenadas x, y e z calculadas nos testes utilizando o método linear.

FIGURA 64 – DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM 1 SENSOR MAIS ALTO QUE OS OUTROS





FIGURA 65 – ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM 1 SENSOR MAIS ALTO QUE OS OUTROS





5 CONCLUSÃO

A partir dos resultados, observou-se que o emprego do Método dos Mínimos Quadrados para aproximação do resultado do sistema de equações que representa o cenário de trilateração, em combinação com um processamento adequado de sinais, fornece resultados relativamente satisfatórios para diversas situações.

Entretanto, deve-se atentar ao posicionamento dos sensores empregados na trilateração, visto que o arranjo dos sensores afeta diretamente a solução e a precisão do sistema. Se os sensores estiverem mal posicionados (por exemplo, colineares), o sistema resultante pode se tornar singular, com um determinante igual a zero, levando a soluções infinitas ou tornando as equações indeterminadas. Nesses casos, não é possível identificar uma posição única para o alvo.

Além disso, se as medições dos sensores forem inconsistentes devido a ruídos ou erros, o sistema de equações se torna inconsistente, sem solução exata. Nesse caso, o Método dos Mínimos Quadrados pode ser aplicado para encontrar uma solução aproximada que minimize o erro entre as distâncias medidas e calculadas. No entanto, a qualidade dessa aproximação depende do arranjo geométrico dos sensores: posições bem espaçadas e não colineares reduzem a sensibilidade ao erro e garantem matrizes melhor condicionadas, melhorando a confiabilidade e precisão da solução. Portanto, otimizar o posicionamento dos sensores é fundamental para um sistema de trilateração robusto.

Nos ensaios realizados com o sistema físico, foi possível avaliar a aplicabilidade prática das técnicas propostas no trabalho. Ensaios com o sensor HC-SR04 indicaram variações em torno de 2 cm para distâncias de até 100 cm e variações em torno de 4 cm para distâncias maiores que 100 cm. Apesar dessas variações, os testes de trilateração revelaram um erro de posição inferior a 1 cm em condições controladas, com os sensores posicionados à uma mesma altura **z**. Isso demonstra que o sistema foi capaz de mitigar os impactos da imprecisão inerente aos sensores, alcançando uma precisão superior à das medições individuais dos sensores. Essa eficácia ressalta a robustez do método empregado, que combina o processamento adequado de sinais e o Método dos Mínimos Quadrados para minimizar erros e melhorar a confiabilidade dos resultados.

Além disso, o sistema apresentou um tempo de resposta em torno de 3 segundos para calcular a posição do alvo utilizando 20 amostras. Esse tempo é determinado principalmente pelo ciclo de medições dos sensores, que ocorre a cada 150 ms, totalizando aproximadamente 3 segundos para a coleta completa das amostras, o que indica que o tempo gasto para realizar o processamento dos dados pelo sistema é mínimo, destacando assim a eficiência do algoritmo implementado. Durante os testes de trilateração em um ambiente controlado, foi constatada a influência significativa de fatores como interferência entre sensores, posicionamento físico dos sensores e características do objeto. Adicionalmente, os testes com líquidos evidenciaram dificuldades do sensor HC-SR04 em determinar a distância até a superfície da água com precisão e exatidão, sugerindo a necessidade de calibração ou de sensores mais apropriados para essas aplicações.

A introdução de intervalos de tempo entre as medições mostrou-se essencial para mitigar a interferência entre os sensores e aumentar a consistência dos dados coletados. Esse ajuste ampliou a região detectável do sistema de 11 para 50 pontos em determinadas configurações bidimensionais. Nos ensaios tridimensionais, a elevação de um dos sensores revelou limitações na determinação da coordenada **z**, destacando a necessidade de ajustes no alinhamento dos sensores e no algoritmo de trilateração para lidar com uma região espacial mais complexa. Por outro lado, o filtro SMA demonstrou eficácia na suavização das medições, mesmo em cenários mais desafiadores.

Esses resultados reforçam a importância dos ensaios práticos no aprimoramento do sistema e apontam direções para futuras melhorias, como o aprimoramento do algoritmo de trilateração para lidar com configurações tridimensionais e a implementação de técnicas adicionais para mitigar interferências e aumentar a precisão das medições em cenários específicos.

Para trabalhos futuros, pode-se expandir a região efetiva do sistema de maneira passiva (sem a necessidade de movimento dos sensores), se multiplos sensores forem combinados em diferentes "módulos", cada um monitorando uma região diferente. Para isto, deve-se avaliar as codições e requisitos para que as medidas dos sensores possam ser discernidas e processadas adequadamente, enviando-as ao programa principal de trilateração.

Além disso, para uma melhor interação e configuração do sistema, pode-se desenvolver uma *graphical user interface* (GUI) simples, ou seja, uma interface gráfica. Essa GUI pode permitir a escolha e mudança dos parâmetros iniciais do sistema, além de melhorar a apresentação dos dados.

REFERÊNCIAS

ALQADERI, N.; M. ASLAM, D.; BASTIDAS, A. High Resolution Object Triangulation Using Ultrasound Sensors. **IJARCCE**, v. 11, n. 2, fev. 2022. DOI: 10.17148/IJARCCE.2022.11204. Disponível em: https://ijarcce.com/wp-content/uploads/2022/03/IJARCCE.2022.11204.pdf. Citado 1 vez na página 24.

ALSHAREEF, A.; GIUDICE, J. S.; FORMAN, J.; SHEDD, D. F.; WU, T.; REYNIER, K. A.; PANZER, M. B. Application of trilateration and Kalman filtering algorithms to track dynamic brain deformation using sonomicrometry. en. **Biomedical Signal Processing and Control**, v. 56, p. 101691, 2020. DOI: 10.1016/j.bspc.2019.101691.

Disponível em: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1746809419302721. Citado 1 vez na página 23.

BHD., C. T. S. **HC-SR04 User Manual**. [S.I.], 2013. Accessed: 2024-10-24. Disponível em: https://web.eece.maine.edu/~zhu/book/lab/HC-SR04%20User%20Manual.pdf. Citado 1 vez na página 57.

ELECFREAKS. Ultrasonic Ranging Module HC - SR04. [S.I.], 2013.

Ultrasonic Ranging Module HC-SR04. Disponível em: https://cdn.sparkfun.com/datasheets/Sensors/Proximity/HCSR04.pdf. Citado 2 vezes nas páginas 51, 57.

GPS.GOV. **How to find a position using GPS**. [S.I.: s.n.]. Disponível em: https://www.gps.gov/multimedia/tutorials/trilateration/. Acesso em: 6 jun. 2024. Citado 1 vez na página 16.

GUTHRIE, W. F. NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (NIST Handbook 151). en. [object Object], 2020. DOI: 10.18434/M32189. Disponível em: https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29.

HARTMAN, G. 1.4: Existence and Uniqueness of Solutions. en.

[S.I.: s.n.], mai. 2021. Disponível em: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Linear_Algebra/Fundamentals_of_Matrix_Algebra_(Hartma Citado 1 vez na página 26. HERCOG, D.; LERHER, T.; TRUNTIČ, M.; TEŽAK, O. Design and implementation of ESP32-based IoT devices. **Sensors**, v. 23, n. 15, p. 6739, 2023. Disponível em: https://www.mdpi.com/1424-8220/23/15/6739. Acesso em: 22 nov. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 54, 55.

INMETRO. Vocabulário internacional de metrologia: conceitos fundamentais e termos associados: VIM 2012. [S.I.]: Inmetro, mai. 2021. ISBN 978-85-86920-09-7. Citado 2 vez na página 27.

JOHN. **Find X location using 3 known (X,Y) location using trilateration**. [S.I.: s.n.]. Mathematics Stack Exchange.

URL:https://math.stackexchange.com/q/884851 (version: 2017-06-05). eprint: https://math.stackexchange.com/q/884851.

Disponível em: https://math.stackexchange.com/q/884851. Citado 1 vez na página 26.

KRECZMER, B. Fast Triangulation Method for An Ultrasonic Sonar System. en. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 42, n. 13, p. 575–580, 2009.

DOI: 10.3182/20090819-3-PL-3002.00100.

Disponível em: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474667015305036. Citado 1 vez na página 30.

KUTTLER, K. **A First Course in Linear Algebra (Kuttler)**. en. [S.I.: s.n.], dez. 2018. Disponível em:

https://math.libretexts.org/Bookshelves/Linear_Algebra/A_First_Course_in_Linear_Algebra_(Kuttle Citado 1 vez na página 26.

LIU, T. Digital-output relative humidity & temperature sensor/module DHT22 (DHT22 also named as AM2302). **Aosong Electronics Co., Ltd**, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 51, 58.

MARGALIT, D.; RABINOFF, J. **The Method of Least Squares**. [S.I.: s.n.], jun. 2019. Disponível em: https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html. Citado 3 vez na página 27.

NAVIDI, W.; MURPHY, W. S.; HEREMAN, W. Statistical methods in surveying by trilateration. en.

Computational Statistics & Data Analysis, v. 27, n. 2, p. 209–227, 1998. DOI: 10.1016/S0167-9473(97)00053-4.

Disponível em: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167947397000534. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 45.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. **Discrete-Time Signal Processing**. 2nd. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999. Citado 1 vez na página 28.

POSSANI, D.; RODRIGUES, D. L.; CORREIA, F. C.; MORAIS, D. Ondas ultrassônicas: teoria e aplicações industriais em ensaios não-destrutivos.

Revista brasileira de física tecnológica aplicada, v. 4, n. 1, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 21, 22.

SMITH, S. W. **The scientist and engineer's guide to digital signal processing**. 2nd edition. San Diego (Calif.): California Technical Pub., 1999. ISBN 9780966017649. Citado 1 vez na página 28.

SYSTEMS, E. **ESP-IDF Programming Guide**: Espressif Systems. [S.I.], 2023. Version 5.2.3 for ESP32. Disponível em: https://docs.espressif.com/projects/espidf/en/stable/esp32/esp-idf-en-v5.2.3-esp32.pdf. Acesso em: 22 out. 2024. Citado 1 vez na página 55.

_____. ESP32 Series Datasheet. [S.I.], jul. 2020. Document Version 3.3. Disponível em:

https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32_datasheet_en.pdf. Citado 3 vezes nas páginas 51, 53, 54.

TERZIC, J.; TERZIC, E.; NAGARAJAH, R.; ALAMGIR, M. Ultrasonic Sensing
Technology. In ______. Ultrasonic Fluid Quantity Measurement in Dynamic
Vehicular Applications: A Support Vector Machine Approach.
Edição: Jenny Terzic, Edin Terzic, Romesh Nagarajah e Muhammad Alamgir.
Heidelberg: Springer International Publishing, 2013. P. 11–35.
ISBN 978-3-319-00633-8. DOI: 10.1007/978-3-319-00633-8_2.
Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00633-8_2. Acesso em: 28 jun. 2024.
Citado 2 vez na página 21.

THOMAS, F.; ROS, L. Revisiting trilateration for robot localization. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 21, n. 1, p. 93–101, fev. 2005. Conference Name: IEEE Transactions on Robotics. DOI: 10.1109/TR0.2004.833793. Disponível em: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1391018. Citado 2 vezes nas páginas 23, 24. URAZAYEV, D.; EDUARD, A.; AHSAN, M.; ZORBAS, D. Indoor performance evaluation of ESP-NOW. In: 2023 IEEE International Conference on Smart Information Systems and Technologies (SIST). [S.I.]: IEEE, 2023. P. 1–6. Disponível em: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/10223585/?casa_token=2-NjDd0nFb8AAAAA:h7-R5DI0OY91-E8Uk2eiyCUkFbUX4OM-ItINohm1QQF7RR_nLVUJw3Q8jxfAgtTsyyjDj5MzIV0. Acesso em: 22 nov. 2024. Citado 2 vez na página 56.

WIJK, O.; JENSFELT, P.; CHRISTENSEN, H. Triangulation based fusion of ultrasonic sensor data. In: PROCEEDINGS. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.98CH36146). [S.I.: s.n.], mai. 1998. v. 4, 3419–3424 vol.4. DOI: 10.1109/R0B0T.1998.680966.

Disponível em: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/680966. Citado 2 vezes nas páginas 23, 30.

WIRNITZER, B.; GRIMM, W. M.; SCHMIDT, H.; KLINNERT, R. Interference cancelation in ultrasonic sensor arrays by stochastic coding and adaptive filtering. In: IEEE International Conference on Intelligent Vehicles. [S.I.: s.n.], 1998. Citado 1 vez na página 23.

ZHMUD, V. A.; KONDRATIEV, N. O.; KUZNETSOV, K. A.; TRUBIN, V. G.;
DIMITROV, L. V. Application of ultrasonic sensor for measuring distances in robotics.
en. Journal of Physics: Conference Series, v. 1015, p. 032189, mai. 2018.
ISSN 1742-6588, 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/1015/3/032189.
Disponível em: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1015/3/032189.
Acesso em: 16 jun. 2024. Citado 2 vez na página 22.

A.1 15 PRIMEIROS VALORES CALCULADOS

	5	5	
x (sem filtro)	y (sem filtro)	x (SMA e EMA)	y (SMA e EMA)
16.76264612	11.39178147	17.98279815	8.061020049
18.59185005	6.97569135	17.95745348	8.064807391
17.54923311	7.011596022	18.03543966	7.965128876
18.96246169	6.29026654	17.97925872	8.111639333
18.65310304	6.47765194	17.93327201	8.074539388
18.48997295	6.333737939	17.93269483	8.359904046
18.99531849	8.793985022	17.97244002	8.137997511
17.06135833	7.377057395	18.05390603	7.743286616
17.47743187	9.561092196	18.05218077	7.800714659
18.8032495	5.796031424	18.05530452	7.782921585
15.93744729	13.76961351	18.0714303	7.783032079
16.73821135	9.602855868	18.05596454	7.943161303
16.85448855	14.30615615	18.04002559	7.956145017

TABELA 8 – SIMULAÇÕES SET 0: POSIÇÕES CALCULADAS

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: 15 primeiros valores das simulações realizadas, comparando casos com e sem a aplicação de filtros digitais.

	3	3	
x (sem filtro)	y (sem filtro)	x (SMA e EMA)	y (SMA e EMA)
20.68605514	21.88818315	19.89516534	59.07741421
18.58277617	102.9077955	19.97095619	51.68599751
20.21202761	-12.16430481	20.00436587	49.81248681
20.22161517	99.10543927	20.02564993	52.13172319
19.83564688	130.6325955	20.05282712	49.14869895
19.6814501	93.87459993	20.0477689	52.37530848
19.8803897	12.41377145	20.01826577	56.89120443
18.97328754	181.7728721	20.09171617	54.41969285
19.52178188	90.01968876	20.04114024	52.8426485
18.69671822	8.814684205	20.05490354	55.37719515
18.17905067	40.13717987	20.07781127	56.25674779
18.42394894	187.3864216	20.07783322	56.60292823
19.62153733	37.54019248	20.09775099	51.69914492

TABELA 9 - SIMULAÇÕES SET 1: POSIÇÕES CALCULADAS

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: 15 primeiros valores das simulações realizadas, comparando casos com e sem a aplicação de filtros digitais.

A.2 SETS 0 AO 3: DESVIO PADRÃO E INTERVALOS DE CONFIANÇA
x (sem filtro)	y (sem filtro)	x (SMA e EMA)	y (SMA e EMA)
61.11606835	25.41919825	61.00802262	24.28882115
61.60675825	24.03475186	61.01658199	24.03210007
61.36300953	24.72213597	61.00380372	24.18362002
61.04076798	24.99488111	61.01875325	24.23248352
59.75079446	22.91112749	61.04076765	24.18663236
61.57281247	26.07913191	60.98163066	24.07364076
61.04559473	23.58797098	60.98163789	23.95804713
60.72445634	22.73186688	60.9711394	23.94565057
60.67793426	23.21801246	60.97529265	23.88313721
60.45918363	22.59028742	60.96811369	24.04180685
60.68775449	23.60929561	61.03113606	24.27800212
60.58033507	20.4534211	60.97686991	24.16030896
59.27991796	20.81118551	60.92973685	24.05002517

TABELA 10 - SIMULAÇÕES SET 2: POSIÇÕES CALCULADAS

LEGENDA: 15 primeiros valores das simulações realizadas, comparando casos com e sem a aplicação de filtros digitais.

x (sem filtro)	y (sem filtro)	x (SMA e EMA)	y (SMA e EMA)
62.17672281	26.21950078	61.1570334	24.34922324
62.01344719	26.46734163	61.04562897	24.2676683
60.5094211	24.6760316	61.00689045	24.09269552
59.89064879	22.19852142	61.00931513	23.85463329
61.32135725	25.24816702	61.01535115	23.76045534
60.32883645	22.76631007	60.94406277	23.76563844
62.7297406	25.96660383	60.97556563	23.89681478
61.93019441	24.59692831	60.96632311	23.95755792
61.90615368	27.04363341	60.88757696	23.97530395
60.9380288	24.5059901	60.98722718	24.13882013
60.33412437	22.74692124	61.02805573	24.24398282
59.74371061	23.90586552	60.99027122	24.13989809
61.49553713	23.74985338	61.04329008	23.96202053

TABELA 11 – SIMULAÇÕES SET 3: POSIÇÕES CALCULADAS

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: 15 primeiros valores das simulações realizadas, comparando casos com e sem a aplicação de filtros digitais.

TABELA 12 - SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: INTEVALOS DE CONFIANÇA

Sets	Intervalo de Confiança (95%) de x	Intervalo de Confiança (95%) de y	
Set 0 sem filtros	[18.03,18.16]	[7.41,7.95]	
Set 0 com SMA e EMA	[17.99,18.00]	[8.00,8.03]	
Set 1 sem filtros	[19.94,20.08]	[49.63,61.98]	
Set 1 com SMA e EMA	[19.99,20.00]	[59.34,60.24]	
Set 2 sem filtros	[60.92,61.03]	[23.72,24.05]	
Set 2 com SMA e EMA	[60.99,61.00]	[23.98,24.01]	
Set 3 sem filtros	[60.90,61.10]	[23.92,24.24]	
Set 3 com SMA e EMA	[60.98,61.00]	[23.99,24.01]	

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Intervalos de confiança dos 500 valores simulados.



FIGURA 66 - SIMULAÇÕES SETS 0 AO 3: DESVIO PADRÃO



A.3 SETS 0 AO 4: DADOS DOS RESULTADOS

	-	-	
Sets	Intervalo de Confiança (95%) de x	Intervalo de Confiança (95%) de y	
Set 4-Lower-upper decomposition	[39.95,40.08]	[39.95,40.10]	
Set 4-Linear Least Squares	[39.90,40.05]	[39.97,40.11]	
Set 4-Non-Linear LSTSQ	[39.90,40.05]	[39.93,40.07]	
Set 5-Lower-upper decomposition	[74.89,75.12]	[74.83,75.06]	
Set 5-Linear Least Squares	[74.80,75.02]	[74.72,74.96]	
Set 5-Non-Linear LSTSQ	[74.92,75.15]	[74.92,75.14]	
Set 6-Lower-upper decomposition	[19.89,20.08]	[64.94,65.07]	
Set 6-Linear Least Squares	[19.83,20.02]	[64.88,65.00]	
Set 6-Non-Linear LSTSQ	[19.85,20.04]	[64.90,65.02]	
Set 7-Lower-upper decomposition	[64.97,65.09]	[19.94,20.13]	
Set 7-Linear Least Squares	[64.98,65.10]	[19.90,20.09]	
Set 7-Non-Linear LSTSQ	[64.98,65.11]	[20.00,20.20]	

TABELA 13 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: INTEVALOS DE CONFIANÇA

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Intervalos de confiança dos 500 valores simulados.



FIGURA 67 - SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: MÉDIA

FONTE: Os Autores (2024)

LEGENDA: Valore das médias das coordenadas calculadas, para os 500 valores simulados, comparando os resultados dos diferentes métodos de resolução do sistema de equações.



FIGURA 68 - SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: DESVIO PADRÃO

FONTE: Os Autores (2024)

LEGENDA: Valores do Desvios Padrões das coordenadas calculadas, para os 500 valores simulados, apresentados em escala logarítmica, comparando os resultados dos diferentes métodos de resolução do sistema de equações.

FIGURA 69 – SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: ERRO PADRÃO



FONTE: Os Autores (2024)

LEGENDA: Valores dos Erros Padrões das coordenadas calculadas, para os 500 valores simulados, apresentados em escala logarítmica, comparando os resultados dos diferentes métodos de resolução do sistema de equações.

FIGURA 70 - SIMULAÇÕES SETS 4 AO 7: ERRO RELATIVO



FONTE: Os Autores (2024)

LEGENDA: Valores dos Erros Relativos das coordenadas calculadas, para os 500 valores simulados, apresentados em escala logarítmica, comparando os resultados dos diferentes métodos de resolução do sistema de equações.

APÊNDICE B – SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM TRÊS DIMENSÕES: 3 SENSORES E 4 SENSORES

- B.1 DESVIOS PADRÕES: 3 SENSORES E 4 SENSORES
- B.2 COMPARAÇÃO GRUPO B: 3 SENSORES E 4 SENSORES



FIGURA 71 - SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO A, DESVIOS PADRÕES

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 72 - SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO A, DESVIOS PADRÕES



FIGURA 73 – SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO B, VALORES MÉDIOS OBTIDOS



FIGURA 74 - SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO B, VALORES MÉDIOS OBTIDOS

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 75 – SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO B, ERROS RELATIVOS MÉDIOS

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 76 - SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO B, ERROS RELATIVOS MÉDIOS

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 77 - SIMULAÇÃO: 3 SENSORES, GRUPO B, DESVIOS PADRÕES



FIGURA 78 - SIMULAÇÃO: 4 SENSORES, GRUPO B, DESVIOS PADRÕES

APÊNDICE C – SIMULAÇÕES DO SISTEMA EM TRÊS DIMENSÕES: FILTROS

C.1 SIMULAÇÕES DO EMPREGO DO FILTRO FIR





FONTE: Os Autores (2024)

C.2 SIMULAÇÕES DO EMPREGO DO FILTRO SMA

C.3 SIMULAÇÕES DO EMPREGO DO FILTRO SMA COM EMA



FIGURA 80 - SIMULAÇÃO: FILTRO FIR, REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 81 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO A

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 82 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO A

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 83 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 84 – SIMULAÇÃO: FILTRO SMA, REDUÇÃO REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 85 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO RELATIVO, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 86 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, REDUÇÃO ERRO PADRÃO, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 87 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, ERRO RELATIVO MÉDIO, GRUPO A

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 88 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, ERRO RELATIVO MÉDIO, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)



FIGURA 89 – SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, VALORES MÉDIOS, GRUPO A



FIGURA 90 - SIMULAÇÃO: FILTROS SMA E EMA, VALORES MÉDIOS, GRUPO B

FONTE: Os Autores (2024)

APÊNDICE D – ENSAIOS COM O SENSOR HC-SR04

D.1 RESULTADOS DOS ENSAIOS DE PRECISÃO E EXATIDÃO

FIGURA 91 – AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OBJETO A 100 CENTÍMETROS



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico das leituras dos sensores quando o objeto se encontra a 100 centímetros.



FIGURA 92 – AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OBJETO A 200 CENTÍMETROS

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico das leituras dos sensores quando o objeto se encontra a 200 centímetros.

FIGURA 93 – AMOSTRAS DAS LEITURAS DOS 3 SENSORES PARA UM OBJETO A 300 CENTÍMETROS







FIGURA 94 – VALORES MÍNIMOS MEDIDOS

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico dos menores valores lidos pelos sensores para cada distância.



FIGURA 95 – VALORES MÁXIMOS MEDIDOS

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico dos maiores valores lidos pelos sensores para cada distância.



FIGURA 96 - RMSE PARA DIFERENTES DISTÂNCIAS

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico da Raiz do Erro Quadrático Médio das leituras para diferentes distâncias.

FIGURA 97 – ERRO RELATIVO PARA DIFERENTES DISTÂNCIAS



FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico do erro relativo das leituras para diferentes distâncias.

APÊNDICE E – TESTES DO PROTÓTIPO E DO SISTEMA DE TRILATERAÇÃO

E.1 CÁLCULO DAS COORDENADAS PELO SISTEMA COM 3 SENSORES

TABELA 14 – TABELA DE DADOS DOS TESTES COM O OBJETO CILINDRICO							
X real	Y real	X calculado	Y calculado	Dp em X	Dp em Y	Erro padrão X	Erro padrão Y
22,5	52,5	55,54	84,54	0,73773	8,14489	0,07377	0,00738
22,5	57,5	155,96	190,05	4,62396	4,61101	0,46240	0,04624
27,5	42,5	55,76	-1,65	24,11455	24,68937	2,41146	0,24115
27,5	52,5	28,32	51,1	0,27659	0,24098	0,02766	0,00277
27,5	57,5	28,95	58,32	0,31845	0,32876	0,03185	0,00318
27,5	62,5	29,18	63,47	0,21573	0,15786	0,02157	0,00216
32,5	32,5	195,8	194,79	3,54765	3,89769	0,35477	0,03548
32,5	37,5	134,27	187,36	5,76435	1,57653	0,57644	0,05764
32,5	57,5	35,09	57,35	0,13355	0,17165	0,01336	0,00134
32,5	62,5	35,47	-13,68	1,36554	12,34664	0,13655	0,01366
37,5	37,5	38,47	38,23	0,28057	0,30615	0,02806	0,00281
37,5	42,5	37,25	40,44	0,29738	0,30693	0,02974	0,00297
42,5	32,5	31,53	33,81	0,97354	0,29459	0,09735	0,00974
42,5	37,5	42,62	38,12	0,17346	0,12454	0,01735	0,00173
42,5	42,5	41,51	42,04	0,32334	0,19606	0,03233	0,00323
42,5	47,5	42,32	46,74	0,15452	0,15452	0,01168	0,00117
42,5	52,5	-23,45	-16,51	0,38711	7,45667	0,03871	0,00387
47,5	37,5	46,79	38,18	0,12634	0,14710	0,01263	0,00126
57,5	32,5	54,84	32,14	0,45456	0,21737	0,04546	0,00455
62,5	22,5	143,44	109,1	4,34676	6,45657	0,43468	0,04347

FONTE: Os autores (2024)

LEGENDA: Tabela apresentando os dados obtidos a partir dos testes realizados com o objeto cilíndrico.

E.2 COMPARAÇÃO ENTRE FILTRO SMA E FIR NO SISTEMA COM 4 SENSORES

E.3 COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO DOS MÌNIMOS QUADRADOS LINEAR E NÃO LINEAR NO SISTEMA COM 4 SENSORES

TABELA 15 – TABELA DE DADOS DOS TESTES COM O OBJETO RETANGULAR

X real	Y real	X calculado	Y calculado	Dp em X	Dp em Y	Erro padrão X	Erro padrão Y
22,5	52,5	269,62	213,28	7,4583	6,34641	0,745583	0,634641
22,5	57,5	187,87	221,89	17,4345	9,34645	1,74345	0,934645
27,5	42,5	274,50	218,36	4,35453	1,34764	0,435453	0,134764
27,5	52,5	60,52	84,37	3,45349	4,79744	0,345349	0,479744
27,5	57,5	190,95	218,48	1,45345	3,54568	0,145345	0,354568
27,5	62,5	235,95	270,94	12,54237	9,47565	1,254237	0,947565
32,5	32,5	30,80	30,67	0,48667	0,37656	0,048667	0,037656
32,5	37,5	33,05	36,49	0,34557	0,24567	0,034557	0,024567
32,5	57,5	229,68	280,35	5,76653	12,34563	0,576653	1,234563
32,5	62,5	238,88	193,00	2,54659	0,97867	0,254659	0,097867
37,5	37,5	38,52	37,11	0,14339	0,22351	0,014339	0,022351
37,5	42,5	37,34	41,56	0,21386	0,19674	0,021386	0,019674
42,5	32,5	42,65	32,90	0,11439	0,15756	0,011439	0,015756
42,5	37,5	42,09	37,61	0,30116	0,22656	0,030116	0,022656
42,5	42,5	41,60	42,19	0,19767	0,12743	0,019767	0,012743
42,5	47,5	42,42	47,41	0,33543	0,23654	0,033543	0,023654
47,5	52,5	38,14	18,33	2,94786	18,59786	0,294786	1,859786
47,5	37,5	37,01	37,15	3,35436	0,35643	0,035436	0,036543
57,5	32,5	122,10	97,69	3,34356	0,88973	0,334356	0,088973
62,5	22,5	129,09	91,16	2,74665	4,56625	0,274665	0,456625

FONTE: Os autores (2024) LEGENDA: Tabela apresentando os dados obtidos a partir dos testes realizados com o objeto retangular.



FIGURA 98 – DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM O OBJETO CILÍNDRICO

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o desvio padrão calculado nos testes com o objeto cilíndrico.



FIGURA 99 - ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM O OBJETO CILÍNDRICO

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro padrão calculado nos testes com o objeto cilíndrico.





FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o desvio padrão calculado nos testes com o objeto retangular.



FIGURA 101 - ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES COM O OBJETO RETANGULAR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro padrão calculado nos testes com o objeto retangular.


FIGURA 102 – DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO SMA

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o desvio padrão calculado nos testes utilizando o filtro SMA.



FIGURA 103 – ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO SMA

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro padrão calculado nos testes utilizando o filtro SMA.



FIGURA 104 – ERRO RELATIVO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO SMA

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro relativo calculado nos testes utilizando o filtro SMA.



FIGURA 105 – DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO FIR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o desvio padrão calculado nos testes utilizando o filtro FIR.



FIGURA 106 – ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO FIR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro padrão calculado nos testes utilizando o filtro SMA.



FIGURA 107 – ERRO RELATIVO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO FILTRO FIR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro relativo calculado nos testes utilizando o filtro FIR.



FIGURA 108 – DESVIO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO O MÉTODO LINEAR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o desvio padrão calculado nos testes utilizando o método linear.



FIGURA 109 – ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO O MÉTODO LI-NEAR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro padrão calculado nos testes utilizando o método linear.



FIGURA 110 – ERRO RELATIVO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO O MÉTODO LINEAR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro relativo calculado nos testes utilizando o método linear.





FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o desvio padrão calculado nos testes utilizando o método não linear.



FIGURA 112 – ERRO PADRÃO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO MÉTODO NÃO LINEAR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro padrão calculado nos testes utilizando o método não linear.



FIGURA 113 – ERRO RELATIVO CALCULADO NOS TESTES UTILIZANDO MÉTODO NÃO LINEAR

FONTE: Os Autores (2024) LEGENDA: Gráfico apresentando o erro relativo calculado nos testes utilizando o método não linear.