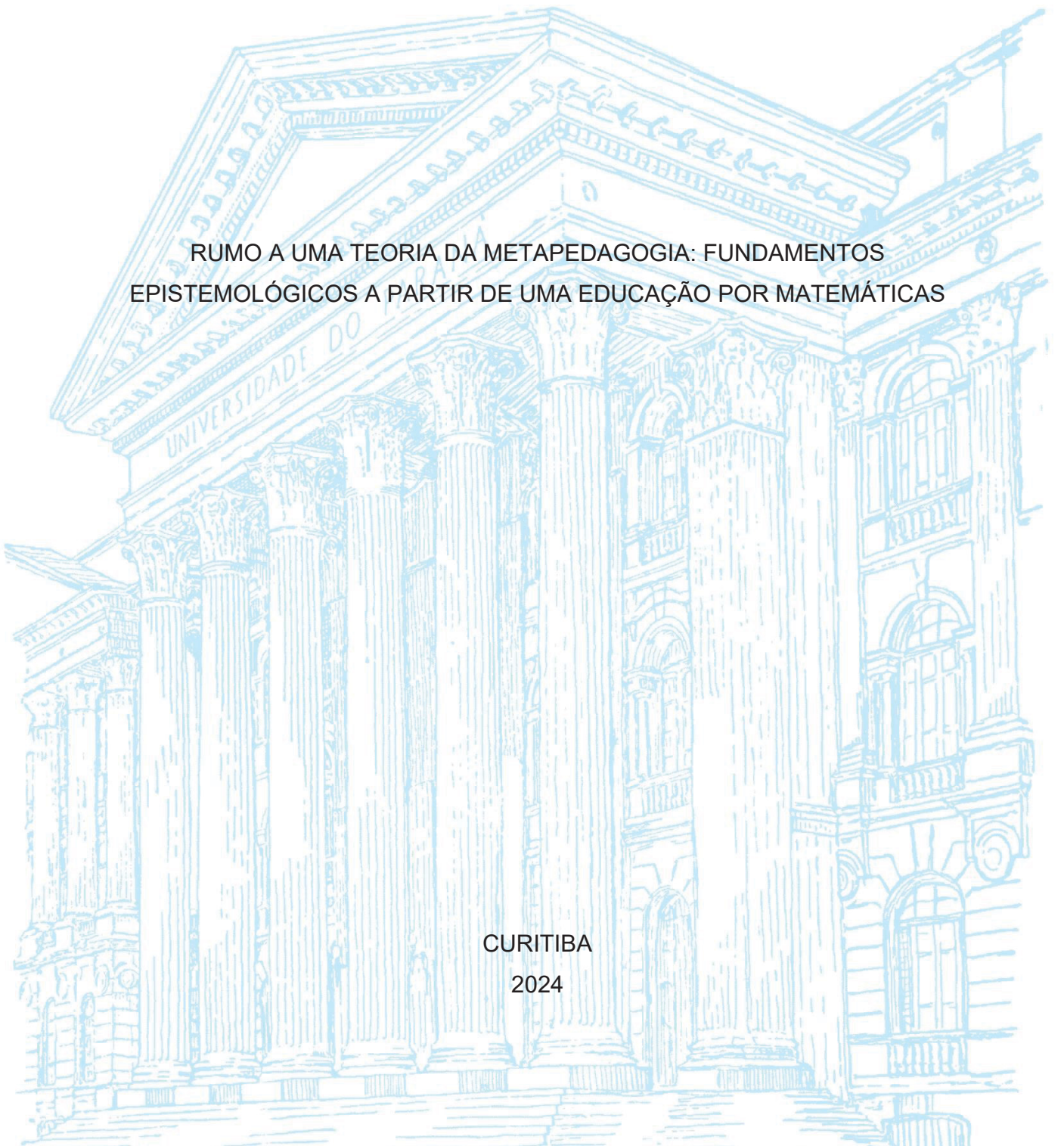


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

WILLIAN VALVERDE

RUMO A UMA TEORIA DA METAPEDAGOGIA: FUNDAMENTOS  
EPISTEMOLÓGICOS A PARTIR DE UMA EDUCAÇÃO POR MATEMÁTICAS

CURITIBA  
2024



WILLIAN VALVERDE

RUMO A UMA TEORIA DA METAPEDAGOGIA: FUNDAMENTOS  
EPISTEMOLÓGICOS A PARTIR DE UMA EDUCAÇÃO POR MATEMÁTICAS

Texto apresentado ao curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Valverde, Willian

Rumo a uma teoria da metapedagogia: fundamentos epistemológicos a partir de uma educação por matemáticas / Willian Valverde. – Curitiba, 2024.  
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.

Orientador: José Carlos Cifuentes Vasquez

1. Gödel, Teorema de. 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática. III. Cifuentes Vasquez, José Carlos. IV . Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029



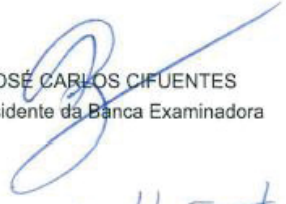
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM  
CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA - 40001016068P7

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **WILLIAN VALVERDE** intitulada: **RUMO A UMA TEORIA DA METAPEDAGOGIA: FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS A PARTIR DE UMA EDUCAÇÃO POR MATEMÁTICAS**, sob orientação do Prof. Dr. JOSÉ CARLOS CIFUENTES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

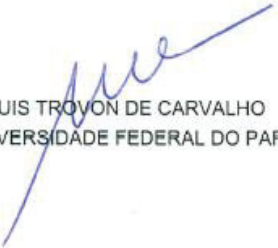
CURITIBA, 26 de Agosto de 2024.

  
JOSÉ CARLOS CIFUENTES  
Presidente da Banca Examinadora

  
EMERSON ROLKOUSKI  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

  
ALESSANDRA HENDI DOS SANTOS  
Avaliador Externo (SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO-  
CURITIBA)

  
MARCELO MUNIZ SILVA ALVES  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

  
ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

  
LEÔNIA GABARDO NEGRELLI  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO  
PARANÁ)



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a minha esposa Izabelle, companheira, parceira, mãe da nossa filha Liza. Terminar este trabalho envolveu sacrifício seu também.

Aos meus pais Osni e Marilete, pelo amor, dedicação na minha formação e ensinamentos.

Ao educador e amigo Marcelo, pela importante contribuição na minha formação, presença de sempre, amizade e carinho.

Ao meu orientador Cifuentes por mais uma vez confiar em mim e dedicar seu tempo a este trabalho de forma tão valorosa e significativa.

Ao amigo e companheiro de leitura e discussões, Bruno Teilor.

Aos meus sogros Lidovino e Inez e meu cunhado Bruno que ajudaram muito durante esse processo.

Aos demais amigos, familiares e educadores que de alguma forma contribuíram com apoio, alegria e momentos importantes.

*Escuto meu coração*

*Pois a minha razão muitas vezes atrapalha o meu pensar.*

(Banda Maneva – Pisando Descaço,  
Composição: Tales de Polli)

## RESUMO

Neste trabalho, nosso objetivo principal é iniciar a teorização da metapedagogia: uma teoria em ação de educação por matemáticas, através de experiências matemáticas, que visa construir novas racionalidades capaz de dar novas respostas aos problemas emergentes de nossa sociedade. Essa "teoria" deve ser entendida como uma "contemplação", destinada a promover uma educação que incentive a formação de novas formas de pensar, repensando a existência humana a partir de outras perspectivas. Como motivação, utilizamos argumentos econômicos e ambientais para justificar a necessidade dessas novas racionalidades. Discutimos o que é matemática, partindo das correntes que buscaram fundamentá-la e nos teoremas de Gödel, que revelam limites na matemática hegemônica, culminando em uma visão de matemáticas construídas pelo homem, falíveis, questionáveis e plurais. Exploramos uma noção wittgensteiniana de conceito, diferenciando-a da definição, e delimitamos uma visão do ensino de matemática, limitado pelos seus conteúdos. Com base nisso e numa discussão sobre pensamentos matemáticos, adotamos uma concepção de educação por matemáticas que transcende o ensino técnico, informativo e rígido. Assim, as matemáticas são vistas como meios para um processo de educação que contempla aspectos de conceitualização e pensamentos matemáticos. Defendemos que essa educação deve ocorrer através de experiências matemáticas, envolvendo tanto conceitos quanto formas de pensamento matemático. Elucidamos os tópicos discutidos com exemplos e possibilidades pedagógicas.

Palavras-chave: Limites do ensino de matemática. Experiência matemática. Teoremas de Gödel. Pensamento matemático. Formação de professores de Matemática.

## ABSTRACT

In this work, our main objective is to initiate the theorization of metapedagogy: a theory in action of education through mathematics, using mathematical experiences to build new rationalities capable of providing new answers to the emerging problems of our society. This "theory" should be understood as a "contemplation," aimed at promoting education that encourages the formation of new ways of thinking, rethinking human existence from other perspectives. As motivation, we use economic and environmental arguments to / the need for these new rationalities. We discuss what mathematics is, starting the currents that sought to establish its foundations and Gödel's theorems, which reveal limits in hegemonic mathematics, culminating in a view of mathematics as human constructs, fallible, questionable, and plural. We explore a wittgensteinian notion of concept, differentiating it from definition, and we outline a view of mathematics teaching, limited by its contents. Based on this and a discussion on mathematical thinking, we adopt a conception of education through mathematics that transcends purely technical, informative, and rigid teaching. Thus, mathematics is seen as a means for an educational process that includes aspects of conceptualization and mathematical thinking. We argue that this education should occur through mathematical experiences, involving both concepts and forms of mathematical thinking. We elucidate the discussed topics with examples and pedagogical possibilities.

Keywords: Limits of math teaching. Mathematical experience. Gödel's theorems. Mathematical thinking. Mathematics teacher training.

## SUMÁRIO

|                                                                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO: CONSTRUINDO UMA TEORIA COMO FLEXIBILIDADE CONTEMPLATIVA FRENTE À RIGIDEZ ACADÊMICA.....</b> | <b>11</b> |
| 1.1 O APOCALÍPSE COMO METÁFORA E REALIDADE: REFLEXÕES INICIAIS E MOTIVAÇÕES.....                             | 19        |
| <b>2 DA MATEMÁTICA ÀS MATEMÁTICAS: DESCONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO .....</b>                                      | <b>25</b> |
| 2.1 O QUE É MATEMÁTICA?.....                                                                                 | 27        |
| 2.2 OS (META)TEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL.....                                                          | 37        |
| 2.3 A EPISTEMOLOGIA MATEMÁTICA DE LAKATOS.....                                                               | 39        |
| 2.4 A CRÍTICA DE WITTGENSTEIN A GÖDEL.....                                                                   | 43        |
| <b>3 ALÉM DA LÓGICA: A EVOLUÇÃO DOS CONCEITOS E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....</b>                               | <b>54</b> |
| 3.1 WITTGENSTEIN E A NOÇÃO DE CONCEITO DECORRENTE DE SEU PENSAMENTO.....                                     | 56        |
| 3.2 A NATUREZA DOS CONCEITOS: DEFINIÇÃO, EXPANSÃO E LIMITAÇÕES.....                                          | 67        |
| <b>4 PENSAMENTOS MATEMÁTICOS: UMA JORNADA DINÂMICA.....</b>                                                  | <b>73</b> |
| 4.1 O PENSAR MATEMATICAMENTE.....                                                                            | 74        |
| <b>5 ENTRE ENSINO E EDUCAÇÃO.....</b>                                                                        | <b>86</b> |
| 5.1 PLATÃO E O ENSINO DA VIRTUDE.....                                                                        | 87        |
| 5.2 O ENSINO DA MATEMÁTICA “LIMITADO” PELOS SEUS CONTEÚDOS.....                                              | 90        |
| <b>6 EXPERIÊNCIA E EDUCAÇÃO.....</b>                                                                         | <b>96</b> |

|                                                                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.1 DA EXPERIÊNCIA À EDUCAÇÃO POR MATEMÁTICAS.....                                                                         | 99         |
| 6.2 EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA COMO FONTE DE EDUCAÇÃO POR<br>MATEMÁTICAS.....                                                  | 107        |
| <b>7 LABIRINTO DA RACIONALIDADE: ALÉM DO LÓGICO E DO<br/>IDEOLÓGICO.....</b>                                               | <b>117</b> |
| 7.1 RACIONALIDADE: ETIMOLOGIA, SIGNIFICAÇÃO E A VISÃO DE<br>JÜRGEN HABERMAS.....                                           | 121        |
| 7.2 CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE CHARLES TAYLOR PARA A<br>NOÇÃO DE RACIONALIDADE E INFERÊNCIAS NA EDUCAÇÃO<br>MATEMÁTICA..... | 129        |
| 7.3 METAPEDAGOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA<br>CONSTRUÇÃO NECESSÁRIA.....                                                | 138        |
| 7.4 INTEGRAÇÃO CULTURAL E TRANSFORMAÇÃO SOCIAL.....                                                                        | 146        |
| 7.5 NAVEGANDO ENTRE CULTURA, COMPLEXIDADE E<br>CONHECIMENTO.....                                                           | 154        |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                                                                                           | <b>166</b> |
| <b>REFERÊNCIAS.....</b>                                                                                                    | <b>177</b> |

## 1 INTRODUÇÃO: CONSTRUINDO UMA TEORIA COMO FLEXIBILIDADE CONTEMPLATIVA FRENTE À RIGIDEZ ACADÊMICA

De acordo com o dicionário Michaelis (2015), a palavra “teoria” pode possuir uma série de noções, que trazemos aqui:

- 1 Conjunto de princípios, regras ou leis, aplicados a uma área específica, ou mais geralmente a uma arte ou ciência.
- 2 Sistema ou doutrina que resultam desses princípios, regras ou leis.
- 3 Conhecimento especulativo, de caráter hipotético e sintético [...].
- 4 (FILOS) Conhecimento abstrato que se limita à exposição de caráter meramente especulativo, voltado para a contemplação da realidade, em oposição à prática e ao saber técnico.
- 5 (FILOS) Conjunto de conhecimentos sistematizados que se fundamentam em observações empíricas e em estudos racionais e que, ao formular leis e categorias gerais, possibilitam classificar, ordenar e interpretar os fatos e as realidades da natureza.
- 6 Conjunto de opiniões e ideias sistematizadas sobre um assunto dado: [...].
- 7 Qualquer noção geral e abrangente; generalidade [...]
- 8 (COLOQ) Ideia fantasiosa e imaginária; filosofia, sonho, utopia [...]

Dentre todas estas noções sobre a palavra “teoria”, observamos que 1, 2 e 5 trazem uma conotação de teoria como algo mais rígido, imutável. Nestas três explicações aparecem palavras como “regras” e “leis” para significar o termo. Em contrapartida, as demais noções (3, 4, 6, 7 e 8), já remetem a um sentido de teoria como algo menos rígido, mais especulativo, provisório. Dentre estas explicações, destacamos a 4, que traz a palavra “contemplação”, embora, na atualidade, “contemplar” uma certa realidade consiste, muitas vezes, em ser capaz de “medi-la” ou “mensurá-la” em algum sentido, não necessariamente de caráter prático.

O *Dicionário de Filosofia* de Abbagnano (2007), dentre vários significados para o termo, traz, logo em primeiro, o seguinte:

<sup>1B</sup> Especulação ou vida contemplativa. Esse é o significado que o termo teve na Grécia. Nesse sentido, Aristóteles identificava T[eoría] com bem-aventurança (Et. nic, X, 8, 1178 b 25); T[eoría] opõe-se então a prática e, em geral, a qualquer atividade não desinteressada, ou seja, que não tenha a contemplação por objetivo. (p. 952)

Este significado está intimamente ligado à etimologia da palavra “teoria” que, do grego θεωρία (theoría), tem relação com “ver”, em um sentido de “pensamento especulativo”, conforme Anders, *et al.* (2001-2019).

Porém, com o passar do tempo, em especial no campo acadêmico, o termo foi ganhando novos significados. Dentre eles destacamos:

2ª Uma condição hipotética ideal, na qual tenham pleno cumprimento normas e regras, que na realidade são observadas imperfeita ou parcialmente. Este significado está presente quando se diz: "Teoricamente, deveria ser assim, mas na prática é outra coisa". Kant examinou o problema da relação entre T[eoría] e prática nesse sentido num escrito de 1793 (*Über den Gemeinspruch: Das mag in der Theorie richtig sein, taugt aber nicht für die Praxis*), em que se encontram as seguintes definições de T[eoría] e prática: "Chama-se T[eoría] um conjunto de regras também práticas, quando são pensadas como princípios gerais, fazendo-se abstração de certa quantidade de condições que exerçam influência necessária sobre a sua aplicação. Inversamente, o que se chama *ação prática* não é um ato qualquer, mas apenas o ato que concretiza um objetivo e é pensado em relação a princípios de conduta representados universalmente" (*Op. cit.*, princ).

3ª A chamada "ciência pura", que não considera as aplicações da ciência à técnica de produção, ou então as ciências, ou partes de ciências, que consistem na elaboração conceitual ou matemática dos resultados; p. ex., "física teórica".

4ª Uma hipótese ou um conceito científico. Este último significado deve ser considerado especialmente neste verbete, visto que o problema da T[eoría] científica constitui um dos capítulos mais importantes da metodologia das ciências [...] (ABBAGNANO, 2007, p. 952, grifos do autor)

Podemos dizer que, do ponto vista acadêmico, mesmo que teoria seja vista como algo que tenha um caráter provisório, ela traz uma certa rigidez, no sentido de que é vista como algo acabado em si. Já é preciso adiantar aqui que, apesar de utilizarmos o termo “teoria” para o que propomos neste trabalho, buscamos nos distanciar dos significados mais rígidos, atrelados à concepção acadêmica, nesta tese.

A respeito do que vem a ser uma “tese teórica”, o ilustre Umberto Eco, no clássico *Como se faz uma tese* nos diz que:

Uma tese teórica é aquela que se propõe atacar um problema abstrato, que pode já ter sido ou não objeto de outras reflexões: natureza da vontade humana, o conceito de liberdade, a noção de papel social, a existência de Deus, o código genético. Enumerados assim, estes temas fazem imediatamente sorrir, pois se pensa naqueles tipos de abordagem a que Gramsci chamava "breves acenos ao universo". Insignes pensadores, contudo, se debruçaram sobre esses temas. Mas, afora raras exceções, fizeram-no como conclusão de um trabalho de meditação de várias décadas.

Nas mãos de um estudante com experiência científica necessariamente limitada, tais temas podem dar origem a duas soluções. A primeira (que é ainda a menos trágica) é fazer a tese definida (no parágrafo anterior) como "panorâmica". É tratado o conceito de papel social, mas em diversos autores. E, a este respeito, valem as observações já feitas. A segunda solução preocupa mais, porque o candidato presume poder resolver, no âmbito de umas poucas páginas, o problema de Deus e da definição de liberdade. Minha experiência me diz que os estudantes que escolhem temas do gênero acabam por fazer teses brevíssimas, destituídas de apreciável organização interna, mais próximas de um poema lírico que de um estudo científico. E, geralmente, quando se objeta ao candidato que o discurso está demasiado personalizado, genérico, informal, privado de verificações historiográficas e citações, ele responde que não foi compreendido, que sua tese é muito mais inteligente que outros exercícios de banal compilação. Isto pode ser verdade; contudo, ainda uma vez, a experiência ensina que quase sempre essa resposta provém de um candidato com ideias confusas, sem humildade científica nem capacidade de comunicação. (ECO, 2008, p. 11)

Bom... aqui, já adiantamos, estamos propondo uma tese teórica em Educação Matemática... E já trazemos inicialmente esta citação de Umberto Eco para termos a chance de tentar fazer certas explicações, ou tentar nos defender.

Primeiramente, não pretendemos abordar o assunto "educação matemática" de forma panorâmica, trazendo apenas diversas perspectivas de outros autores sobre o tema. Tampouco pretendemos *resolver* qualquer problema da educação matemática ou pior ainda resolver "o" problema da educação matemática. O que buscamos aqui é abrir diálogos, ou causar tensões no âmbito da educação, a partir da teoria da metapedagogia, visando propor respostas ou possíveis soluções para problemas atuais, dificuldades sociais e ambientais que vivemos.

Para resolver um problema há duas partes:

- 1) Colocar o problema em suas devidas bases. (Formulação)

## 2) A solução em si. (Resolução)

Entendemos que, do ponto de vista acadêmico, uma teoria pode remeter à formalização de algo que está posto. Porém, muitas vezes, academicamente, uma teoria é vista como uma ideia de solução ou resposta, mesmo que provisórias, de uma problemática ou pergunta dada. Talvez, até por este motivo, que autores como David Bloor e Ubiratan D'Ambrósio rejeitam o termo “teoria” para seus trabalhos, preferindo usar “programa”.

Entendendo que “epistemologia” seria uma teoria do conhecimento, pensando em teoria com um sentido mais estático e fechado, D'Ambrósio, ao explicar porque prefere “Programa Etnomatemática” à “Teoria (da) Etnomatemática” nos diz que:

A principal razão resulta de uma preocupação que tenho com as tentativas de se propor uma epistemologia, e, como tal, uma explicação final da Etnomatemática. Ao insistir na denominação Programa Etnomatemática, procuro evidenciar que não se trata de propor uma outra epistemologia, mas sim de entender a aventura da espécie humana na busca de conhecimento e na adoção de comportamento.

[...] Ao reconhecer que não é possível chegar a uma teoria final das maneiras de saber/fazer matemático de uma cultura, quero enfatizar o caráter dinâmico deste programa de pesquisa. (2020, p. 18)

Desta forma, o autor situa seus trabalhos como uma forma de entender a matemática, ou melhor, as matemáticas (ou etnomatemáticas para usar seus termos) e, assim, contribuir com a educação matemática, entendendo que suas contribuições não são explicações finais, mas, sim, fazem parte de um processo dinâmico de pensamento.

Através deste processo dinâmico no entendimento da educação matemática e do seu papel na sociedade, nos dispusemos aqui a trazer contribuições teóricas mediante uma possível perspectiva. Apesar de não rejeitarmos o termo “teoria”, enfatizamos que este deve ser entendido aqui em um sentido de “contemplação”, conforme o sentido grego originário. Isto é, propomos aqui uma contemplação, um olhar com atenção, de forma não rígida, da educação matemática, ou melhor, *educação por matemáticas*, como proporemos, e de seu papel social.

A expressão “educação por matemáticas” será de suma importância para nós. Elucidaremos melhor nossa compreensão tanto do termo “educação”, quanto do significado do “por” quanto do uso do plural em “matemáticas”. Mas, de forma resumida, já podemos adiantar que pensamos em matemáticas como meios que possam contribuir para um processo de educação, esta entendida em um sentido mais amplo que ensino, conforme discutiremos. Também argumentaremos que precisamos construir novas racionalidades e compreender que a matemática, ou melhor, as matemáticas, são um conjunto plural de conhecimentos e racionalidades diversos, que podem se constituir de formas distintas e assim o foram ao longo da história. Desta forma, concebê-la de uma forma singular pouco tem a contribuir para a construção de novas racionalidades.

Assim, podemos dizer que estamos propondo uma possível perspectiva, um possível olhar para estes temas, sem a pretensão de dar resposta finais, mas sim com o objetivo de adentrar em possíveis diálogos na área.

Reforçamos mais uma vez, de forma insistente, admitimos, que não buscaremos trazer uma teoria acabada, que se encerra e é fechada em si mesma, impedindo-se de se complementar, reformular-se e dialogar com outras teorias. Pretendemos dar um primeiro passo na direção da construção do que pode se constituir como uma “teoria em ação” ou um programa de pesquisa, trazendo aqui alguns questionamentos e ideias iniciais de possibilidades de abordagens.

Esta pesquisa teórica inicia-se trazendo argumentos de áreas como a sociologia e a economia que clamam pela reconstrução do mundo a partir de novas racionalidades, novas formas de pensar ou novos paradigmas. A partir destas discussões, buscamos questionar o papel da educação por matemáticas neste contexto. Assim, uma das pretensões deste trabalho é trazer as matemáticas como formas de pensar paradigmática para a educação em geral e não somente no âmbito da matemática, isto é, entender a matemática como componente de um paradigma ou estilo de pensamento (em termos fleckianos) ou até mesmo como componente ideológico.

Buscamos fundamentar esta discussão a partir de concepções do que vem a ser a própria matemática, chegando a uma noção de matemática como algo plural,

que se modifica em determinados contextos, períodos históricos e culturas diferentes. Isto nos fará ver o conjunto das matemáticas (agora já no plural) como um conceito tal como entendemos ser um conceito a partir de uma perspectiva wittgensteiniana, mais precisamente do segundo Wittgenstein por meio de sua obra *Investigações Filosóficas*. Este é um aspecto central para nós, pois além de trazermos um conceito fundamental para nossa teoria, nos dará uma possibilidade metodológica do que vem a ser um conceito: através de *jogos de linguagem* em contraponto a uma fundamentação última, ou uma definição formal. Esta mesma abordagem nos permitirá entender “as matemáticas”, e até mesmo “as ciências”, bem como também “pensamento matemático”, “educação”, “experiência” e “racionalidade” como conceitos, no sentido wittgensteiniano, e utilizar de jogos de linguagem para discutir estes assuntos.

Além da discussão sobre “conceito”, trazemos uma discussão sobre o que vem a ser os “pensamentos matemáticos” ou o “pensar matematicamente” para concluirmos que não faz sentido ensinar conceitos nem ensinar a pensar matematicamente em uma acepção mais rígida ou pragmática de “ensino”, que nos levará a um alinhamento com um conceito de “educação por matemáticas” como algo que vai além do ensino, sugerindo uma ruptura teórica entre estes dois termos.

A partir daí, defenderemos uma educação por matemáticas por meio de experiências matemáticas que busquem oportunizar não somente uma conceitualização (conceito *em ação*) de objetos matemáticos e aprimoramento dos pensamentos matemáticos como também a construção de possíveis novas “racionalidades matemáticas”, onde o termo “racionalidade” será discutido na parte final neste trabalho.

Por fim, delinearemos, sem ter pretensões de definição, de cristalização formal e final, o que vem a ser uma *metapedagogia*: uma teoria em ação de educação por matemáticas via experiências matemáticas que objetiva oportunizar a construção de novas racionalidades que possam contribuir para a construção de respostas a problemas emergentes.

Esta última frase pode ser entendida como um grande resumo de nossas pretensões quando cada termo é devidamente entendido: (1) apresentar uma *teoria*,

no sentido grego, de contemplação, como algo que já tende a estar em movimento, *em ação*, podendo se constituir como um programa de pesquisa; (2) onde as *matemáticas*, em uma concepção plural, são vistas como meios *pelos* quais se pretende oportunizar um processo de *educação* (matemática), esta vista como algo que transcende o ensino, contemplando aspectos da conceitualização e dos pensamentos matemáticos. (3) Pretendemos também argumentar que esta educação deve, então, se dar a partir de *experiências*, em um sentido de vivência, e ações que envolvam no âmbito das matemáticas, de alguma maneira, tanto conceitos matemáticos quanto formas de pensamentos matemáticos e, portanto, devem ser *experiências matemáticas*. (4) Esta teoria tem por objetivo possibilitar uma educação que permita e incentive a formação de novas *racionalidades*, isto é, formas de pensar que possam repensar a existência humana a partir de outras perspectivas, visando a construção de novas racionalidades que possam elucidar discussões e contribuir para a construção de possíveis respostas à problemas atuais, nos âmbitos sociais e ambientais.

Trataremos, neste trabalho, de buscar elucidar, discutir, argumentar, detalhar, (na medida do possível e adequado), *jogar com* cada aspecto da metapedagogia, trazendo exemplos e possibilidades pedagógicas. É importante destacar que partes deste trabalho já foram apresentadas previamente como dissertação de mestrado (VALVERDE, 2019). O que buscamos fazer aqui é aprofundar as ideias lá apresentadas e trazer alguns avanços teóricos. Para tal, começaremos nossas discussões destacando a necessidade da construção de novas racionalidades para tratar os múltiplos problemas atuais. Faremos isso enfatizando o quão graves são tais problemas sociais e ambientais e sem querer ser exagerados, como se quiséssemos dar maior atenção do que a merecida, mas sim como um “grito desesperado por socorro”, iniciaremos buscando refletir sobre o significado do termo “apocalipse”: A palavra, derivada do grego “apokálypsis” e remete à ideia de “revelação” ou “tirar o véu”, de onde deriva, também, a palavra “verdade”. É interessante como o último livro da Bíblia, chamado de Apocalipse, narra o fim da vida na Terra, de acordo com a compreensão da época. Essa visão

do "apocalipse" muitas vezes é entendida como o "fim dos tempos". No entanto, essa interpretação é multifacetada.

Na arte, encontramos diversas representações de "cenários apocalípticos", seja em filmes de ficção científica ou terror, que exploram diferentes visões sobre o possível fim da vida na Terra. Essas visões são variadas e muitas vezes refletem preocupações atuais, como a ameaça da bomba atômica ou as mudanças climáticas, que ecoam as previsões apocalípticas de várias culturas ao longo da história, incluindo Maias, Vikings e Hindus, além de projeções mais modernas.

Contudo, o que intriga é a busca por um sentido que ligue o destino da humanidade à história do Universo. O medo de não encontrar um propósito no fim da História é uma preocupação persistente. E, na era moderna, mesmo quando tentamos conceber o mundo de uma perspectiva secular, o medo persiste, seja relacionado à ameaça da bomba atômica, ao aquecimento global, à escassez de recursos naturais ou a outros desafios globais.

A visão de autores como Alberto Acosta destaca a necessidade de mudanças profundas na sociedade. Precisamos superar visões simplistas que colocam o economismo como o cerne da nossa existência. Acosta (2016) acredita que devemos buscar novas formas de organização social e práticas políticas que despertem a criatividade e reafirmem o compromisso com a vida. Essas mudanças, segundo o autor, são essenciais para abordar questões críticas, especialmente aquelas relacionadas ao uso dos recursos naturais e à destruição do meio ambiente.

Acosta destaca a importância de promover a reciprocidade, redistribuição e solidariedade na sociedade e argumenta que esses princípios devem começar a ser construídos em todos os aspectos da vida em comunidade, desde os lares até as escolas e diversas outras esferas da vida humana. Assim, a educação desempenha um papel fundamental nesse processo, pois poderia promover, a partir da educação por matemáticas, novas formas de pensar e agir, afastando-se da lógica de acumulação que predomina na economia.

Diante dessas reflexões, objetivamos explorar o papel da educação matemática nesse contexto de mudança. Como a educação por meio das matemáticas pode contribuir para a construção de novas racionalidades, em vez de

reproduzir a lógica atual de acumulação? Para isso, precisamos discutir a educação e a matemática em profundidade, considerando a importância de repensar o que entendemos por "educação" e "matemática(s)".

Apresentaremos a Metapedagogia como uma possível abordagem para promover essas mudanças.

## 1.1 O APOCALÍPSE COMO METÁFORA E REALIDADE: REFLEXÕES INICIAIS E MOTIVAÇÕES

<sup>6</sup> E os sete anjos que tinham as sete trombetas prepararam-se para tocá-las. <sup>7</sup> O primeiro anjo tocou a trombeta, e houve saraiva e fogo misturados com sangue, e foram lançados sobre a terra. E queimou-se a terça parte da terra, e das árvores, e também toda a erva verde. <sup>8</sup> O segundo anjo tocou a trombeta, e foi lançada no mar uma coisa como um grande monte ardendo em fogo, e tornou-se em sangue a terça parte do mar. <sup>9</sup> E morreu a terça parte das criaturas viventes que havia no mar, e foi destruída a terça parte das embarcações. <sup>10</sup> O terceiro anjo tocou a trombeta, e caiu do céu uma grande estrela ardendo como uma tocha, e caiu sobre a terça parte dos rios, e sobre as fontes das águas. <sup>11</sup> O nome da estrela era Absinto; e a terça parte das águas tornou-se em absinto, e muitos dos homens morreram por causa dessas águas, porque se tornaram amargas. <sup>12</sup> O quarto anjo tocou a trombeta, e foi ferida a terça parte do sol, e a terça parte da lua, e a terça parte das estrelas, para que a terça parte deles se escurecesse, e a terça parte do dia não brilhasse, e semelhantemente a noite. <sup>13</sup> E olhei, e ouvi um anjo voar pelo meio do céu, dizendo com grande voz: Ai! Ai! Ai! dos que habitam sobre a terra! Por causa das restantes vozes das trombetas dos três anjos que não de ainda tocar." (Apocalipse 8:6-13)

Segundo Anders, *et al.* (2001-2019), o termo “apocalipse” vem do grego *αποκάλυψις*, (*apokálypsis*) e significa “revelação” ou “tirar o véu”, conforme já mencionamos. O último livro da Bíblia, que tem este nome, relata o fim da vida na terra, pelo menos da forma como é, ou era, entendida até então. Claro que há outras interpretações possíveis, mas já é de senso comum que o termo “apocalipse”, de certa forma, pode ser entendido como “fim dos tempos”. Não à toa, na arte, encontramos filmes de ficção científica e/ou terror, imaginando vários cenários possíveis para o fim da vida na terra, referindo-se a estes cenários por formas de apocalipse.

O apocalipse bíblico não foi a única forma de prever o nosso fim. Em matéria escrita para o jornal *Aventuras na História*, Botelho (2019) traz um breve relato sobre previsões para o fim da humanidade, em culturas diferentes, como Maias, Vikings e Hindus, e também previsões modernas, sem vínculos religiosos, ligadas a bombas atômicas, por exemplo.

Com a modernidade, mesmo que ilusória<sup>1</sup>, o ser humano passou a tentar conceber o mundo a partir de uma perspectiva desconectada da religião, porém, mesmo assim, ainda imaginamos o fim dos tempos:

Ao temor da bomba atômica, junta-se o do aquecimento global, da exaustão e do colapso dos recursos naturais básicos, das epidemias de superbactérias e o do choque de meteoros gigantes contra o planeta, como o que aniquilou os dinossauros — só para citar alguns, além da inescapável extinção do sistema solar (já demonstrada pelos cientistas) por volta de 1 bilhão d.C. (BOTELHO, 2019)

Para o autor,

o cérebro humano continua buscando um sentido que encadeie o destino humano à história do Universo. Porque sem um significado transcendente que nos justifique, somos assombrados pelo medo de não encontrar moral alguma no fim da História. (BOTELHO, 2019)

Independentemente de se ocorrerá um apocalipse ou se ele não passa de uma fantasia humana necessária para dar significado a nossa existência, encontramos em diversas áreas do conhecimento, dentre elas a sociologia e a economia, previsões apocalípticas que, ao menos, indicam problemas sérios que enfrentamos, em especial do campo da utilização dos recursos naturais e destruição do meio ambiente.

Para Acosta (2016):

O mundo precisa de mudanças profundas, radicais. Urge superar as visões simplistas que transformaram o economismo em eixo da sociedade. Necessitamos outras formas de organização social e

<sup>1</sup> Ver LATOUR, Bruno. *Jamais fomos modernos: ensaio de antropologia simétrica*. Tradução de Carlos Irineu da Costa; Revisão técnica de Stelio Marras. São Paulo: Editora 34, 2019. 4 ed. 192 p.

novas práticas políticas. Para obtê-las, é imprescindível despertar a criatividade e consolidar o compromisso com a vida, para não nos convertermos em meros aplicadores de procedimentos e receitas caducas. (p. 20)

Esta citação, encontrada na seção “Umas poucas palavras preliminares” do livro *O Bem Viver* do autor, já nos diz muitas coisas que precisamos discutir com calma e profundidade adequada.

Primeiramente, o autor defende a necessidade de termos mudanças na sociedade a partir de uma perspectiva, ou olhar, da economia. Estas mudanças se justificariam a partir de uma preocupação com recursos naturais e o meio ambiente. O próprio autor traz vários outros pensadores, que partilham opiniões semelhantes. Dentre eles, o sociólogo espanhol José María Tortosa, que logo citaremos também.

Não temos a intenção de nos alongarmos sobre a necessidade ou não de transformar o mundo, ou ao menos a economia, este não é nosso objetivo. Até por isto, não traremos aqui, inicialmente, muitos outros autores que partilham desta ideia (exceto o José María Tortosa, como mencionamos, que traremos para dar continuidade em nosso raciocínio e não o reforçar). Tomaremos esta necessidade como algo dado, tendo plena consciência de que se ela não existir, nossa proposta (a metapedagogia) não tende a trazer prejuízos. Pelo contrário, também tende a trazer benefícios.

Em um segundo momento, o autor defende que precisamos mudar a forma, ou as formas principais, de organização social e defende o “despertar da criatividade”, donde seria possível repensar a economia de forma mais sustentável e voltada para o bem-estar humano, onde a criatividade e a inovação desempenham papéis importantes na busca de alternativas ao modelo econômico atual. Isto, por si só, já seria uma justificativa, no nosso caso, para defender uma educação que privilegia a criatividade. No entanto, pretendemos ir além, entendemos que este é um discurso raso, que já vem sendo dito e que não tem contribuído para uma verdadeira mudança tal quanto necessitamos. Entendemos que se faz necessário discutir com mais profundidade o que entendemos por “educação” e discutir também qual o nível de criatividade pretendida neste “despertar”. É evidente que refazer ou

fazer de forma diferente o que já vem sendo feito, em especial no âmbito da educação, não pode ser “a” solução. Até fazer algo realmente diferente também pode não ser.

Voltando ao sociólogo José María Tortosa, Acosta cita sua seguinte fala:

O funcionamento do sistema mundial contemporâneo é “mau desenvolvedor” [...] É fácil entender por que: é um sistema baseado na eficiência, que tenta maximizar os resultados, reduzir custos e acumular capital incessantemente. [...] Se “vale tudo”, o problema não é dos jogadores, mas das próprias regras do jogo. Em outras palavras, o sistema mundial está mal desenvolvido graças a sua própria lógica. E é a essa lógica que devemos dirigir as atenções. (TORTOSA *apud* ACOSTA, 2019, p. 51, grifos do autor)

A primeira, coisa a destacar é que o autor defende que temos uma sociedade que é mal desenvolvida por conta de ter um sistema que é, por si só, mau desenvolvedor. Então não se trata de encontrar soluções dentro de mesmo sistema, se não de muda-lo. A segunda coisa é que o autor já remete à *lógica* do sistema.

Entendemos que esta “lógica do sistema” está intimamente ligada não apenas à forma como nossa sociedade se organiza senão também pelas formas, ou maneiras, que as pessoas pensam, a racionalidade da época. Isto justificaria este caráter de mau desenvolvedor ligado à lógica interna do sistema, implicitamente autoalimentável. Sobre estas formas de pensar, que já chamaremos aqui informalmente de racionalidade, Acosta (2019) nos diz que:

O mundo precisa também de uma racionalidade ambiental capaz de reconstruir a racionalidade econômica, que construa processos de reapropriação da Natureza e reterritorialização das culturas. (p. 233)

Acosta (2019) defende, então, uma proposta em construção (constante) chamada Bem-Viver. Mesmo entendendo que o Bem-Viver proposto pelo autor é uma proposta em construção, portanto já nascida para ser discutida, rediscutida e repensada a todo momento, e não uma proposta cristalizada, não temos por pretensão defender tal proposta especificamente, mas compartilhamos de sua fundamentação, seus apontamentos no que tange a necessidade de mudança na racionalidade humana em geral e também o destaque da educação neste papel.

Defendendo a inserção de princípios básicos de reciprocidade, redistribuição e solidariedade na racionalidade humana, Acosta (2019, p. 192) defende que estes princípios “exigem ser construídos em todos os espaços possíveis da vida em comunidade, começando pelos lares e escolas, além de diversas outras instâncias da vida dos seres humanos.” O autor também defende que

Todas as pessoas têm direito a uma vida digna, que assegure saúde, alimentação e nutrição, água potável, moradia, saneamento básico, educação, trabalho, descanso e ócio, cultura física, vestimenta, seguridade social e outros serviços sociais. Todos estes direitos, para que sejam cumpridos, exigirão ajustes na distribuição da riqueza e da renda, já que não podem ser garantidos apenas como subsídios aos grupos marginalizados.

[...]

Há que priorizar os investimentos em educação e saúde, redefinidos de maneira que possam levar à construção do Bem Viver – e não a uma reedição do mundo da competição e da acumulação infinita. (ACOSTA, 2019, p. 195 – 196)

Além do já mencionado, precisamos destacar aqui que entendemos que, no que tange à educação, não basta apenas investir nela, e, além do complemento óbvio: pensar em que forma investir na educação, é importante discutir o que se entende por educação ou o que se poderia entender por educação neste contexto todo, tarefa que, de certa forma, proporemos neste trabalho. Em especial, não faz sentido investimento em melhorar a educação vigente se esta educação reforça a racionalidade vigente e, para mantermos o diálogo com Acosta, considerando a perspectiva econômica, a lógica vigente de acumulação.

O âmbito econômico, visto a partir da lógica da acumulação do capital, domina o cenário. A ciência e a tecnologia importadas normatizam a organização das sociedades. Neste caminho – de mercantilização implacável – aceitamos que tudo se compra, tudo se vende. Para que o pobre saia da sua pobreza, o rico estabeleceu que, para ser como ele, o pobre deve agora pagar para imitá-lo: comprar até seu conhecimento, marginalizando suas próprias sabedorias e práticas ancestrais. (ACOSTA, 2019, p. 52)

Aqui, já precisamos destacar que se o sistema se autoalimenta dentro de sua própria lógica, uma “escola”, entendendo escola como uma instituição para

promoção da educação, que funciona dentro desta lógica, irá reproduzir a lógica do sistema, sobre isto, Acosta aponta que:

De nenhuma maneira se pode acreditar que todo o sistema econômico deve estar imerso na lógica dominante de mercado. [...] Reflexão similar se poderia fazer sobre educação, saúde, transporte e outras funções que geram bens públicos e comuns que não se produzem e regulam por meio da oferta e da demanda. (ACOSTA, 2019, p. 185 – 186)

Neste sentido, propomos discutir aqui, inicialmente o papel da educação por matemáticas neste contexto. Como que a educação por matemáticas pode contribuir, no campo da educação e não apenas no campo da educação matemática, para a construção de novas racionalidades ao invés de ser um mecanismo para reprodução da racionalidade vigente? Para tal discussão, precisamos discutir com mais profundidade tanto o que entendemos por educação quanto por matemática(s). Como “conclusão” apresentaremos a Metapedagogia.

Vale destacar que aqui trouxemos aqui apenas uma ideia preliminar, um esboço, motivado principalmente nas contribuições de Acosta (2019), mas outros autores como Edgar Morin, Henrique Leff e Ole Skovsmose trazem contribuições para ampliar esta discussão.

## 2 DA MATEMÁTICA ÀS MATEMÁTICAS: DESCONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO

Algo muito importante, e que perpassa todas as discussões que faremos neste trabalho, é o nosso entendimento por matemática.

Podemos, perfeitamente, entender “matemática” por um conjunto de conhecimentos específicos, mesmo que não sejamos capazes de dar uma definição tão clara que “amarre” estes conhecimentos específicos e sistematizados. Tanto podemos fazer isso que é o que vem sendo feito por muitos ao longo do tempo. Não à toa, referem-se à Matemática, com “m” maiúsculo, já que é o nome dado a este conjunto de conhecimentos, ou área do conhecimento.

Porém, aqui, o que faremos é algo diferente, que é bem verdade já vem sendo feito por outros pesquisadores, dentre eles Ubiratan D’Ambrósio. O que faremos aqui é olhar para a matemática como um conjunto plural de ações e formas de pensamento e reforçar esta pluralidade por meio da linguagem, referindo-se a ela como “matemáticas” (neste caso, referindo-se a elas).

Primeiramente, olharemos para este conjunto de saberes, quando formalizados, que ao longo do tempo foi “ensacado” em *uma* área chamada Matemática, a que nos referiremos por matemática hegemônica. Mostraremos que ao longo da história, em especial entre os séculos XVIII e XIX, tentou-se a compreender melhor justamente para caracterizá-la, diferenciá-la de outras áreas. Discutiremos o quão frustrante foram as tentativas. Argumentaremos sobre a importância dos Teoremas de Gödel, teoremas metamatemáticos, mas que, com menos preciosismo, podem ser vistos como teoremas matemáticos, para justificar a impossibilidade da construção de suas “amarras conceituais”. Esta discussão já apontará para uma compreensão plural de matemática(s).

Depois, traremos uma breve discussão a respeito da contribuição de Lakatos para o entendimento das matemáticas, aproximando-as, em certos sentidos, de outras áreas do conhecimento, principalmente no que tange a seus critérios de verdade, rompendo com a ideia euclidiana da matemática de transmissão da verdade *a priori* que é transmitida por inferências lógicas que também, por esse motivo, são tomadas como indubitáveis. O rompimento com este entendimento

possibilitou a construção de matemáticas alternativas, mas que, academicamente foram incluídas no mesmo “pacote” das matemáticas hegemônicas, mesmo que ainda não recebam tanta atenção academicamente, como a matemática *fuzzy* ou difusa, a análise não *standard*, a lógica paraconsistente, etc.

Vale destacar que a matemática *fuzzy* e a análise não *standard* são estudadas dentro da “matemática hegemônica”; a lógica subjacente a um resultado em matemática *fuzzy* é a clássica. Nesse sentido, os resultados obtidos nessa teoria são parte da matemática hegemônica. Mesmo assim, a análise não *standard*, em especial, é um exemplo de uma matemática alternativa à hegemônica, no sentido que ficamos com o corpo dos reais como proposto por Dedekind, e a análise não *standard* estabelece corpos de reais em um sentido como proposto por Leibniz como uma alternativa, mais precisamente, como uma infinidade de alternativas.

Existem pesquisas em andamento que usam métodos de análise não *standard* para estudar objetos da matemática usual, como, por exemplo, o artigo “Differential geometry via infinitesimal displacements” de Tahl Nowik e Mikhail G. Katz, publicado no Journal of Logic and Analysis 7:5 (2015), 1-44<sup>2</sup>. A proposta desses artigos é, de certa forma, usar uma “racionalidade” diferente para analisar os problemas usuais de matemática. A ideia é usar os argumentos da matemática dos séculos 17-19 (ou dos físicos), agora justificados pela análise não *standard*, em problemas que surgiram depois dessa época.

Toda essa discussão é de vital importância para nós pois, dentro da educação, podemos fazer a seguinte pergunta: qual, ou quais as consequências de uma concepção singular de matemática na formação humana daqueles que a estudam? Esta pergunta pode parecer pouco relevante, mas se entendermos a importância da linguagem na construção da racionalidade humana, destacarmos o quanto contato as pessoas, desde a infância, têm com “a matemática”, vista como singular e indubitável, e a influência desta matemática na sociedade por meio do processo de *racionalização* da modernidade, como tem sido discutido por muitos

<sup>2</sup> <https://arxiv.org/abs/1405.0984>

sociólogos e educadores, dentre eles Ole Skovsmose, perceberemos sua relevância na formação do pensamento humano, ou como chamaremos aqui, na racionalidade humana.

Assim, mesmo que possa parecer apenas uma forma diferente de se referir à mesma coisa, que na sua essência já é plural, o reforço, ou destaque linguístico, é de suma importância se pensarmos na “educação por matemáticas” como meio para construção de novas racionalidades, uma vez que a concepção singular pode, implicitamente, reforçar uma ideia errônea (!) de que a matemática, de alguma forma, garante e transmite “a verdade singular”, permitindo que esta, assim, se estabeleça como ferramenta de manutenção social. Em contrapartida, acreditamos que uma educação que incentive a construção de formas diferentes de se pensar matematicamente pode contribuir para a formação de novas formas de pensar no geral, novas racionalidades, uma vez que tal incentivo já motivaria uma pré-disposição à busca por alternativas de pensamentos.

Outra discussão que perpassa por este capítulo são as observações feitas por Wittgenstein a respeito dos Teoremas de Gödel. Para este capítulo, em especial, e até mesmo para este trabalho, em um contexto mais amplo, tais observações não são de importância tão significativa. No entanto, Wittgenstein é um importante referencial teórico para nós, tanto de um ponto de vista metodológico, através da noção de jogos de linguagem, como veremos, quanto do ponto de vista da noção de “conceito” que utilizaremos aqui a partir do autor. Então optamos por não esconder estas observações e reservamos um pequeno espaço neste capítulo para discuti-las.

## 2.1 O QUE É MATEMÁTICA?

Não temos a pretensão de dizer aqui o que é matemática, mesmo que a singularizemos. Nem acreditamos que seja possível fazer isso de forma razoavelmente clara e objetiva. O que buscaremos aqui, referindo-se à “matemática”, no singular, como um conjunto de conhecimentos hegemônicos, mais do que dizer o que ela é, é, talvez, dizer o que ela *não* é, se contrapondo a

uma ideia rígida da mesma, que a restringe a significados puramente lógicos, já pressupondo uma lógica universal, e desprovida de (múltiplos) sentido. Para tal, buscaremos elencar elementos essenciais dos pensamentos matemáticos. Certamente, ao fazer isso, entramos no campo da metamatemática. Na metamatemática, os objetos de estudo não são mais os objetos matemáticos em si, como números, pontos, operações, etc. e sim a própria matemática e seus métodos. O curioso é que a metamatemática faz uso da própria matemática, enquanto linguagem do discurso, para estudo da matemática e é neste aspecto que entra, e faz sentido, o teorema de Gödel. É importante destacar que o que faz isto possível, usar a matemática para analisar ela própria, é a distinção de diferentes níveis de linguagem. No entanto, veremos adiante que Wittgenstein teceu fortes críticas a isto: o uso da própria matemática para defender teses na metamatemática.

No século XIX, com o desenvolvimento da análise matemática em decorrência dos avanços do cálculo diferencial e integral e da geometria, ganha força a busca por uma fundamentação última da matemática. Motivada principalmente por resultados da teoria de conjuntos, boa parte dos matemáticos direcionou seus esforços na busca de axiomas que fundamentassem as diversas teorias matemáticas (em especial a aritmética) e que “resolvessem” os problemas dos paradoxos existentes, como o paradoxo de Russell.

Neste contexto, ganham força três correntes matemáticas, dentre outras, com este mesmo fim: fundamentar a matemática. Estas correntes foram o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. As doutrinas que se empenharam em fundamentar a matemática “tinham em comum a metáfora que o conhecimento é um edifício e por isso deve ter seus fundamentos seguros, fidedignos e especificáveis.” (ENCICLOPÉDIA, 2006, p. 376).

O logicismo, primeira corrente que surgiu, iniciada por volta de 1884, por matemáticos como Gottlob Frege (1848 – 1925), Bertrand Russell (1872 – 1970), Giuseppe Peano (1858 – 1932) e Alfred North Whitehead (1861 – 1947) entre outros, tinha como principal premissa “reduzir” a matemática à lógica. Assim, seus axiomas pertenceriam à lógica e a matemática seria parte da mesma, ou decorrente desta. Assim,

[...] perguntas do tipo *Por que a matemática clássica não contém contradições?* ter-se-iam transformado em *Por que a lógica não contém contradições?* Esta última pergunta, é uma das que os filósofos sabem manejar com perfeição, e pode-se admitir que uma conclusão satisfatória dos programas dos logicistas teria dado fundamentos firmes à matemática clássica, em termos da lógica. (SNAPPER, 1984, p. 85, grifos do autor)

O “grande momento” do logicismo se dá na obra *Principia Mathematica*, escrito por Russell e Whitehead entre 1910 e 1913. Nessa obra (1910), os autores buscam reconstruir a aritmética por meio de axiomas hierarquizados em tipos lógicos, usando regras de dedução bem definidas através de uma linguagem lógica apropriada. Esta explicitação das regras de dedução, as regras lógicas, é o que difere a noção de construção axiomática a partir do século XIX em relação às teorias axiomáticas anteriores (euclidianas), onde tais regras já eram dadas como óbvias.

Para entender melhor as pretensões dessa corrente, é preciso compreender o que os logicistas passaram a entender por “lógica”, a partir das versões mais modernas do século XX, isto é, para eles “lógica” era entendida por lógica de primeira ordem, que possui uma linguagem de primeira ordem, sendo esta a que faz referência apenas a elementos das estruturas em estudo.

O vocabulário de uma linguagem de primeira ordem se dá por meio de cinco itens, onde os quatro primeiros são quase sempre os mesmos e apenas o quinto item muda de teoria para teoria (SNAPPER, 1984, p. 91). Os itens são:

1. Uma quantidade enumerável de variáveis;
2. Símbolos para conectivos da linguagem comum:  $\neg$  para “não”,  $\wedge$  para “e”,  $\vee$  para “ou”,  $\Rightarrow$  para “então” ou “implica”,  $\Leftrightarrow$  para “se, e somente se”, etc;
3. Sinal de igualdade:  $=$ ;
4. Quantificadores lógicos:  $\forall$  (para todo) e  $\exists$  (existe);
5. Parâmetros da linguagem: Toda teoria axiomática possui “termos não definidos”. Na geometria euclidiana temos os termos “ponto”, “reta” e “incidência” a quem devemos atribuir símbolos apropriados, na aritmética temos os termos “zero”, “adição” e “multiplicação”, que naturalmente

atribuímos os símbolos  $0$ ,  $+$  e  $\times$ . Já na teoria de conjuntos escrita por Zermelo e Fraenkel há apenas um termo não definido, a relação de pertinência, que normalmente atribuímos o símbolo  $\in$ .

Dizemos que uma linguagem é de *primeira ordem* quando usamos os quantificadores (item 4) e símbolos (itens 2 e 3) para interpretarmos as variáveis da teoria (item 1) e os parâmetros da linguagem (item 5) como elementos das estruturas a que se referem. Na linguagem de *segunda ordem*, utilizamos os quantificadores e símbolos para nos referirmos também a subconjuntos das estruturas.

Um exemplo de proposição lógica é a proposição “ $p \vee \neg p$ ” (lê-se  $p$  ou não  $p$ ) – lei do terceiro excluído. Esta proposição não depende em nada do conteúdo da proposição  $p$ , não importa se  $p$  é uma proposição matemática, física, etc., ela se verifica pela sua generalidade. Neste caso, os lógicos afirmam que esta é uma proposição válida pela sua “forma” ou, mais especificamente, pela sua “forma sintática” (SNAPPER, 1984, p. 86).

Apesar de Russell e Whitehead (1910) terem pontuado os axiomas e regras de dedução de sua teoria, qualquer teoria formal poderia tentar o mesmo feito, reduzir a matemática à lógica. O logicismo de Russell e Whitehead incluía a Teoria de Conjuntos ou de Classes em sua concepção de lógica. Dentre tais teorias, destaca-se a, já citada, teoria de conjuntos na versão desenvolvida por Ernst Zermelo (1871 – 1953) e Abraham Fraenkel (1891 – 1965), incluindo o Axioma da Escolha, que abreviamos por ZFC. Esta teoria, que possui apenas nove axiomas (dentre eles o axioma da infinidade além do da escolha) é a mais famosa e aceita dentre as teorias de conjuntos que buscam fundamentar a matemática clássica nela.

O sucesso do logicismo dependeria apenas de mostrar que os nove axiomas da teoria ZFC são axiomas lógicos. No entanto,

[...] o axioma da infinidade e o axioma da escolha não podem ser considerados proposições lógicas. Por exemplo, o axioma da infinidade diz que existem conjuntos infinitos. Por que aceitamos este axioma como verdadeiro? A razão é que todos estamos muito familiarizados com inúmeros conjuntos infinitos, por exemplo o

conjunto dos números naturais, ou o conjunto dos pontos no espaço euclidiano tridimensional. Portanto, aceitamos este axioma baseado em nossas experiências do dia a dia com conjuntos, e isso claramente mostra que o aceitamos em virtude de seu conteúdo, e não em virtude de sua forma sintática. Em geral, quando um axioma afirma a existência de objetos com os quais nos achamos familiarizados devido à nossa experiência do dia a dia, é quase certo que não se trata de uma proposição lógica no sentido do logicismo. (SNAPPER, 1984, p. 86 – 87)

Com isso,

A redução da Matemática à Lógica, desejada pelo logicismo, era possível, mas não nos termos de Frege (1959)<sup>3</sup>. Para obter esse resultado, era necessário, ou fazer uso de toda a complexidade da teoria dos tipos lógicos, ou considerar a Teoria de Conjuntos como parte da Lógica, ou aceitar lógicas de ordem superior ao primeiro. Em todos os casos, o objetivo de uma redução da Matemática a algo mais simples e evidente perdia-se. Assim, por exemplo, a Lógica dotada da teoria dos tipos resulta ser uma teoria tão ou mais complexa que a teoria matemática que se tentava derivar a partir dela. (MOLINA, 2001, p. 136)

Tal impossibilidade em fundamentar a matemática, restringindo-a à lógica, como proposto pelos logicistas, será um tanto natural para nós a partir de discussões seguintes. Evidenciaremos que “número”, por sua natureza e suas expansões, é indefinível.

É claro que a matemática está intimamente ligada à lógica e possui seus conteúdos que são perfeitamente definíveis, mas a proposta logicista, de reduzir a matemática à lógica, passa diretamente pela ideia de buscar uma fundamentação última a conceitos matemáticos primitivos, em especial ao conceito de “número”. Dizer que axiomas, como o da escolha e o da infinidade dependem de seu conteúdo intuitivo e não apenas de sua forma é o mesmo que dizer que sua aceitação se dá pela experiência obtida pela utilização dos números ou, nos termos de Wittgenstein, que veremos posteriormente, devido a um jogo de linguagem que produzimos sobre “números”.

<sup>3</sup> FREGE, G. The Foundations of Arithmetic. Oxford: Blackwell, 1959.

Já o intuicionismo, segunda corrente que buscava fundamentar a matemática, que surgiu por volta de 1908, graças principalmente ao matemático Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966), tinha como ponto de partida os números naturais. Partindo da construção intuicionista dos números naturais, buscava-se, de maneira indutiva, reconstruir toda a matemática, bem como suas provas.

O intuicionismo partia da ideia inicial de que o ser humano possui uma “intuição construtiva”, por influência kantiana, de número natural, partindo do número 1 e concebendo os números seguintes por meio de um processo de construção mental possível graças a nossa percepção de tempo. Esta intuição é a que dá nome à corrente.

É importante observar que a construção intuicionista dos números naturais nos permite construir somente segmentos iniciais finitos arbitrariamente longos  $1, 2, \dots, n$ . Não nos permite construir aquele conjunto completo de todos os números naturais que nos é tão familiar na matemática clássica [a partir da aceitação do infinito em ato]. É igualmente importante observar que esta construção é ao mesmo tempo “indutiva” e “efetiva”. (SNAPPER, 1984, p. 88)

Diferentemente dos logicistas, que tinham uma concepção platônica, ou realista, de matemática, que via seus objetos como entidades abstratas cuja existência não depende da mente humana, cabendo a nós apenas “descobrir” tais objetos e suas relações, os intuicionistas concebiam a matemática como uma atividade mental, onde seus objetos, bem como as relações entre eles, se davam pelas construções mentais efetivas e indutivas uma após a outra, ou seja, efetuando constructos, um após outro. Da mesma maneira, o mesmo que vale para os números vale para as definições, teoremas e suas demonstrações.

Outra diferença entre a corrente logicista e intuicionista era que, como os intuicionistas não tinham uma visão platônica da matemática, ao contrário, tinham uma visão conceptualista, onde as entidades abstratas são construídas pela mente humana, estes viam problemas na matemática, evidenciados pelos paradoxos existentes. Com efeito,

[...] Os logicistas consideraram esses paradoxos como erros banais, devidos a matemáticos falíveis e não a uma natureza falível. Os

intuicionistas, por outro lado, consideravam esses paradoxos como indicações claras de que a matemática deveria ser reconstruída desde os alicerces [os números naturais]. (SNAPPER, 1984, p. 88)

Os intuicionistas, em especial, não aceitavam leis lógicas clássicas que não fossem interpretadas como constructos, pois, do ponto de vista clássico, essas leis eram combinações de palavras sem sentido construtivo. Por exemplo, afirmar " $p \vee q$ " significaria garantir a existência de uma construção de  $p$  ou uma construção de  $q$ . Já afirmar " $p \rightarrow q$ ", significaria garantir a existência de uma construção de  $q$  a partir de uma construção de  $p$ . Nestes termos, o princípio do terceiro excluído " $p \vee \neg p$ " não poderia ser afirmado a menos que se tenha uma construção de  $p$  ou de  $\neg p$ . Ou seja, eles não aceitavam o princípio do terceiro excluído como um axioma lógico, o que não só é uma postura contrária à postura da matemática "clássica", mas também à lógica "clássica" (desde o tempo de Aristóteles). Na prática, os intuicionistas, por conta disto, não aceitavam, por exemplo, uma demonstração por redução ao absurdo, pois esta baseava-se em um princípio lógico de que  $\neg(\neg p) \rightarrow p$ , mas, para os intuicionistas, a construção de  $\neg(\neg p)$  não implicava necessariamente em uma construção de  $p$ .

A demonstração por absurdo baseia-se na seguinte lei lógica

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(\neg p).$$

O que está por trás dela é: supõe-se a negação de  $p$  e mostra-se que ela implica tanto em  $q$  quanto em na negação de  $q$ , este é o absurdo. Portanto não poderíamos ter a negação de  $p$ . Daí conclui-se que  $\neg(\neg p)$ . Como, para os intuicionistas dizer que  $\neg(\neg p)$  não era equivalente a dizer que  $p$ , esta lei lógica não implicava na garantia de que  $p$  era verdadeiro, que era a conclusão na lógica clássica. Desta forma, muitas das demonstrações matemáticas, consideradas em outras correntes, se tornavam impossíveis ou muito longas.

De certa forma, os intuicionistas tinham uma maneira particular de conviver com as dificuldades. Em especial, o que não conseguiam demonstrar de forma indutiva, ou construtiva, simplesmente não era considerado como parte da

matemática. Talvez esta tenha sido a principal razão do “fracasso” de tal vertente, baseada em uma concepção particular reducionista da própria matemática, convencer os matemáticos a aceitá-la.

Uma das razões é que os matemáticos clássicos simplesmente se recusavam a eliminar muitos dos belos teoremas que são, para os intuicionistas, combinações de palavras sem sentido. Um exemplo é o teorema do ponto fixo de *Brouwer*, em topologia, que é rejeitado pelos intuicionistas, pois o ponto fixo não pode ser construído, podendo-se somente demonstrar que tem que existir, por meio de uma demonstração de existência. A propósito, o mesmo Brouwer que criou o intuicionismo é também famoso por seu trabalho em topologia (não-intuicionista). (SNAPPER, 1984, p. 86 – 87, grifos do autor)

Para nós, não é tão surpreendente o fracasso desta corrente. Veremos que não apenas os objetos matemáticos se constituem como conceitos, em um sentido que discutiremos, baseados em Wittgenstein, como a própria matemática também. O conjunto dos números naturais é aceito como tal pela experiência, convivência e familiaridade que temos com eles, bem como as “regras” da própria matemática. Assim, aceitamos a ideia de infinito, o conjunto dos números naturais, como uma concretização matemática do infinito atual, e demais números como conjuntos infinitos, e lei do terceiro excluído, etc.

É conveniente observar que o critério racional de aceitação dos objetos matemáticos como existindo do ponto de vista clássico ou intuicionista é um critério extra matemático, ou melhor dizendo, metamatemático.

Snapper (1984, p. 89) aponta outras duas razões para o fracasso intuicionista: a segunda seria que demonstrações breves e elegantes da matemática clássica se tornavam longas demais, como por exemplo a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que levaria em torno de dez páginas para ser demonstrado por meio dos constructos intuicionistas enquanto na matemática clássica podia-se demonstrá-lo em meia página. Esta razão, por si só, do ponto de vista prático, não implicaria em uma mudança na concepção da própria matemática. Porém, a terceira razão seria que teoremas de existência verdadeiros na matemática clássica poderiam ser considerados falsos na matemática

intuicionista. Contraexemplos que um matemático clássico pudesse citar não satisfaria os critérios construtivos e, portanto, não seriam contraexemplos da matemática intuicionista, etc. É delicado pressupor que um matemático intuicionista tem razão e que o clássico não a tem ou o contrário, quando afirmam algo sobre um teorema, pois, é possível, quando falam de objetos matemáticos, como por exemplo funções contínuas, estarem falando de coisas diferentes, até porque os símbolos lógicos utilizados por ambos têm significados distintos.

Essas três razões para a rejeição do intuicionismo pelos matemáticos clássicos não são nem racionais nem científicas. Também não são razões pragmáticas, baseadas na convicção de que a matemática clássica é melhor para aplicações à física ou a outras ciências do que o intuicionismo. São todas razões de natureza emotiva [por ter racionalidades diferentes], baseada em um sentimento profundo do que seja realmente a matemática. (SNAPPER, 1984, p.91 – 92)

Além das três razões citadas por Snapper, acreditamos que outro fator determinante para a não consolidação do intuicionismo é que tal corrente limitava demais o que já se entendia por matemática, uma visão reducionista desta ciência. Apesar de resolver problemas lógicos fundamentais, ele nos restringe em muito mais pontos do que os matemáticos da época gostariam. Da mesma forma, acreditamos que os matemáticos não estavam mais dispostos a conceber a matemática apenas pela forma intuicionista.

A terceira corrente, criada por volta de 1910, o formalismo, que tinha como principal expoente David Hilbert (1862 – 1943), usava métodos finitários, utilizados também pelos intuicionistas. Assim, como os logicistas, os formalistas buscavam elaborar uma teoria axiomática por meio de uma linguagem formal (daí surge o nome da corrente). A grande diferença era que os logicistas tinham por objetivo mostrar que a matemática era reduzível à lógica. Mais precisamente, como já era possível reduzir a matemática conhecida à aritmética, isto é, à teoria dos números naturais, através do processo de aritmetização da análise, ocorrido no século XIX, o que faltava era reduzir a aritmética à lógica – este era o programa logicista. Porém, para reduzir uma teoria à lógica, não bastava apenas formalizá-la, era preciso

mostrar que os axiomas de tal teoria podiam também ser reduzidos à lógica, isto é, mostrar que seus axiomas são lógicos, ou seja dependiam apenas de sua forma (sintática) e não de seus conteúdos (semânticos), o que vimos que não era possível na aritmética por meio da teoria de conjuntos ZFC, graças aos axiomas da escolha e da infinidade.

No logicismo, garantir que os axiomas eram lógicos, era de vital importância, pois, como os logicistas tinham uma concepção universal de lógica, acreditavam que assim, a verdade de uma teoria seria garantida *a priori*, uma vez em sendo lógicos, os axiomas seriam verdadeiros e a verdade da teoria seria transmitida logicamente (através de inferências lógicas) às novas proposições obtidas.

Já para os formalistas, os axiomas não precisariam ter valor de verdade *a priori*, estes seriam apenas hipóteses. Sua aceitação se daria *a posteriori*, não por uma comprovação empírica, mas sim pelas consequências que estes teriam na formalização das teorias. Os formalistas precisavam utilizar a formalização para demonstrar matematicamente que determinados ramos da matemática estavam isentos de contradições, uma vez que a *verdade* destas teorias não poderia ser fundamentada no conteúdo das proposições. Com isso, passa-se a diferenciar a noção de “demonstrável” da noção de “verdadeiro”, onde esta última ainda possui valor semântico e não apenas sintático. Este objetivo dos formalistas, dentre outros, fez parte do que ficou conhecido como *programa de Hilbert*.

Assim como os logicistas tinham uma visão realista da matemática e os intuicionistas tinham uma visão conceptualista, os formalistas também partiam de uma concepção filosófica da matemática, porém diferente. Para Hilbert, dada uma teoria axiomática  $T$  e uma linguagem formal  $L$ , haveria, naturalmente, momentos em que precisaríamos falar da linguagem  $L$  e, neste caso, utilizaríamos a nossa linguagem usual como metalinguagem. Para evitar contradições inerentes à linguagem natural, usada como metalinguagem, que poderiam, por ventura, aparecer, deveríamos utilizar raciocínios absolutamente seguros, acima de qualquer suspeita, que Hilbert chamou de “raciocínios finitários” (SNAPPER, 1984, p. 92). Estes raciocínios finitários eram muito semelhantes às ideias de constructos utilizados pelos intuicionistas. Nesta corrente filosófica do formalismo, que se

aproxima do “nominalismo”, as entidades abstratas não têm existência, nem fora da mente humana, como afirma o realismo, e nem na mente humana como afirma o conceptualismo. Essas entidades pertencem apenas à linguagem e têm um caráter convencional.

Assim, como o logicismo e o intuicionismo, o formalismo também fracassou em seus objetivos, muito pelos resultados apresentados em 1931 por Kurt Gödel.

## 2.2 OS (META)TEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

O austríaco Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978) foi um matemático e filósofo da matemática, principalmente pelas contribuições apresentadas em 1931, um ano após defender sua tese de doutorado. Tais contribuições resumem-se a dois resultados: os teoremas da incompletude de Gödel (que na realidade são metateoremas, pois são teoremas na metamatemática das teorias matemáticas) aparecem em duas versões sutilmente diferentes.

Nosso objetivo, aqui, não é demonstrar estes teoremas e sim tentar entender o significado deles e suas implicações no contexto da matemática, da metamatemática e na educação matemática.

O *primeiro teorema* diz que qualquer teoria axiomática, com um certo grau de recursividade na sua formulação, que contemple *verdades básicas da aritmética*, como apresentada no sistema axiomático de Peano, porém com uma versão do quinto axioma escrito em linguagem de primeira ordem, *não pode ser completa e consistente ao mesmo tempo*. Uma teoria axiomática, do ponto de vista metamatemático, é dita *completa* se, dada qualquer proposição expressável na teoria, isto é, que faça sentido no âmbito de sua linguagem, temos que, *ou ela é demonstrável ou sua negação é demonstrável*. Já uma teoria é dita *consistente* quando *não existe nenhuma proposição de modo que ela e sua negação sejam ambas demonstráveis*. Aqui, neste contexto, a palavra “demonstrável” refere-se a ser dedutível em uma lógica subjacente, cujas regras são explicitamente determinadas, no nosso caso, a lógica clássica.

Já o *segundo teorema* nos diz que uma teoria axiomática, sob as mesmas condições, *não pode demonstrar sua própria consistência dentro da teoria*, mesmo sendo essa “consistência” expressável na própria teoria. Por exemplo, na teoria axiomática clássica de Peano, que não é uma teoria de primeira ordem, Gödel traduz a demonstrabilidade desta teoria numa proposição aritmética e prova que esta proposição não é demonstrável nesta teoria.

Gödel, já no seu primeiro teorema apresentou uma maneira de como construir fórmulas aritméticas que, em sendo verdadeiras não são demonstráveis, o que torna a teoria incompleta. Toda a argumentação do Gödel é teórica, a existência dessas fórmulas de Gödel não é exemplificada na forma em que ele as construiu, porém existem certos resultados avançados de combinatória que podem ser tomados como exemplos<sup>4</sup>. Desta forma, como uma das consequências, Gödel evidenciou a diferença entre proposições verdadeiras e proposições demonstráveis na matemática e demonstrou que não são equivalentes.

É importante notar quanto significativa é a noção de *verdade* de Gödel para a construção do teorema e sua interpretação. Quando Gödel diz que se pode construir uma fórmula aritmética  $G$ , que sendo verdadeira não é demonstrável em um sistema axiomático  $S$ , entendemos que Gödel presume que existem verdades, que se constituem como tal (verdadeiras) em uma concepção platonista de matemática.

O formalismo de Hilbert tinha por objetivo mostrar que a matemática como um todo estava isenta de contradições. Por trás deste objetivo, havia o anseio epistemológico de que toda a matemática pudesse ser axiomatizada de tal forma que fosse consistente e completa. Uma consequência epistemológica por trás disto é que toda verdade matemática fosse demonstrável. Assim, os resultados de Gödel impuseram a impossibilidade de efetivação do projeto de Hilbert, evidenciando que existem verdades aritméticas que não poderiam ser provadas.

<sup>4</sup> O artigo *A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic* de Jeff Paris e Leo Harrington, publicado pela North-Holland Publishing Company em 1977, traz um exemplo de uma teoria aritmética incompleta construída a partir dos resultados de Gödel.

No pensamento matemático de Hilbert, existia a pretensão de que a matemática toda fosse epistemologicamente completa, no sentido de que todo problema matemático devia ter uma solução. Justamente os teoremas de Gödel mostram que existem problemas, ou teorias, chamadas agora de indecidíveis, que são problemas que não apenas não tem solução, como são problemas que *não podem* ter solução, o que abre o caminho para matemáticas alternativas podendo ter a mesma base lógica (clássica) ou não.

Além disso, o teorema da incompletude de Gödel, refutou também a ideia dos logicistas que buscavam reduzir a matemática à lógica. O processo de aritmetização da análise permitiu reduzir a matemática à aritmética, então, para cumprir o programa logicista, faltaria reduzir a aritmética à lógica elementar, mas como Gödel provou que a aritmética é incompleta, se esta pudesse se reduzir à lógica, também a lógica seria incompleta. Porém, o próprio Gödel provou em 1930 que a lógica elementar é completa, o que impossibilita tal redução.

## 2.3 A EPISTEMOLOGIA MATEMÁTICA DE LAKATOS

Umas das teorias mais conhecidas, apresentada após os trabalhos de Gödel, que buscava explicar, de alguma forma, como que é construído o conhecimento matemático é a de epistemologia da matemática de Imre Lakatos (1972 – 1974). Lakatos foi um filósofo e matemático húngaro que desenvolveu essa abordagem durante o século XX. Seu programa é uma proposta filosófica que busca compreender o desenvolvimento do conhecimento matemático oferecendo uma visão alternativa ao empirismo e ao racionalismo clássicos.

Uma das principais ideias da teoria de Lakatos é que o conhecimento matemático é construído por meio de uma série de “programas de pesquisa”. Cada programa é composto por um núcleo de ideias, ou teorias básicas, que são consideradas fundamentais e não são questionadas. Essas ideias nucleares são cercadas por um cinturão protetor de suposições adicionais que ajudam a desenvolver e aplicar o programa. Os programas de pesquisa podem passar por diferentes fases: a fase heurística, em que novas ideias são propostas e testadas;

a fase de crescimento, em que o programa se desenvolve e novas aplicações são descobertas; e a fase de degeneração, em que surgem anomalias e contradições que levam à revisão do programa (LAKATOS, 1978).

Uma das contribuições mais importantes de Lakatos (1978) foi a noção de "heurísticas negativas" e "heurísticas positivas". As heurísticas negativas são critérios que podem ser usados para descartar teorias ou programas de pesquisa quando eles falham em prever resultados corretamente ou quando se tornam incoerentes. Por outro lado, as heurísticas positivas são critérios que ajudam a identificar quais programas de pesquisa são promissores e dignos de serem desenvolvidos.

Lakatos (1978) também enfatizou a importância das refutações no processo de desenvolvimento matemático, noção que adotou por influência de Popper. Para ele, os avanços ocorrem quando um programa de pesquisa é capaz de se adaptar e responder a refutações, reformulando e reajustando suas suposições. Isso permite que o conhecimento matemático se desenvolva e evolua ao longo do tempo.

Imre Lakatos desenvolveu suas teorias no campo da filosofia da matemática nas décadas de 1960 e 1970. Os teoremas de Gödel, por outro lado, foram publicados por Kurt Gödel na década de 1930. Portanto, as teorias de Lakatos foram desenvolvidas após os teoremas de Gödel, sendo estes inseridos no contexto do debate filosófico e sobre a natureza do conhecimento matemático.

Embora o trabalho de Gödel tenha influenciado muitos filósofos e matemáticos em relação à natureza dos sistemas formais e à possibilidade de provar todas as verdades matemáticas, Lakatos abordou a questão do desenvolvimento matemático em um nível mais geral, considerando os programas de pesquisa e a evolução do conhecimento matemático ao longo do tempo.

Ambos os trabalhos, os teoremas de Gödel e as teorias de Lakatos, são considerados contribuições significativas para a filosofia da matemática e têm sido amplamente discutidos e debatidos na comunidade acadêmica.

Já em sua obra *Matemática, ciencia y epistemología*, Lakatos buscou ilustrar sua compreensão da matemática, trazendo para ela um caráter de falibilidade, semelhante à proposta racionalista de Popper para ciências no geral. Para Lakatos

(1987, p. 42), a matemática possui um caráter *a posteriori*, substantivo e falível, diferente do que o positivismo lógico a considerava: *a priori*, tautológica e infalível.

Lakatos (1987, p. 44 – 47) traz uma extensa lista de considerações de matemáticos importantes, inclusive anteriores a Gödel, e do próprio Gödel, que já apontavam para uma visão da matemática como uma ciência que ele chama de *quase-empírica*.

Para o autor (1987), uma teoria é chamada de “euclidiana” quando se suas verdades evidentes podem ser colocadas no cume da própria na forma de axiomas. Assim, por meio de inferências lógicas, sua verdade inundaria para baixo os resultados consequentes (daí a ideia de cume), isto é, uma teoria euclidiana parte de verdades e, por meio de inferências lógicas, transmite essa verdade para os resultados que, inevitavelmente, seriam verdadeiros. Já em uma teoria empírica, o cume é composto de hipóteses, que buscam explicar a teoria e, se tais hipóteses são verdadeiras, essa verdade seria transmitida da mesma forma e chegariam a resultados verdadeiros. No entanto não é possível garantir tal veracidade das hipóteses. Assim, se chegarmos a resultados falsos (comprovadamente falsos empiricamente), é porque as hipóteses iniciais eram falsas, e neste caso, dizemos que a teoria é falseada e não pode ser aceita. Porém, se uma teoria não pode ser falseada, então ela pode ser aceita temporariamente, enquanto essa condição se mantém.

[...] Lakatos afirma que o logicismo de Frege e Russell, o intuicionismo de Brouwer e o formalismo de Hilbert compartilham igualmente essa concepção euclidiana. Eles diferem na identificação da base evidente de onde podem ser deduzidos os demais enunciados verdadeiros da Matemática. Para os logicistas, essa base consistiria de verdades lógicas. No entanto, essa base lógica revelou-se insuficiente. Russell (1908) admitiu ao lado dos axiomas lógicos, dois axiomas não lógicos: o axioma do infinito e o axioma da redutibilidade. Esses axiomas não são evidentes. No entanto, Russell acabou declarando que aceitamos os axiomas de infinitude e redutibilidade pelo fato de que as suas consequências são óbvias. Para Lakatos, o fato de Russell ter admitido dois axiomas não evidentes mostraria que o programa logicista de fundamentação da Matemática ficaria aquém da realização do ideal euclidiano.

[...] Na visão de Lakatos, os dois teoremas de Gödel colocam uma barreira infranqueável às tentativas de atingir os objetivos do programa de Hilbert. O segundo teorema de Gödel mostraria que os métodos necessários para obter as provas de consistência das teorias matemáticas estão longe da segurança dada pela evidência. (MOLINA, 2001, p. 138 – 139)

Assim, à luz do discutido, o caráter quase-empírico da matemática se daria, para Lakatos, pelos seguintes motivos:

1) A matemática não é euclidiana: Na teoria de conjuntos, do ponto de vista dos logicistas, os axiomas da infinidade e da escolha não são evidentes, uma vez que não são axiomas lógicos por depender de seu conteúdo, que são aceitos pela experiência matemática, pela nossa familiaridade com os números naturais. Já do ponto de vista dos formalistas, os axiomas não precisam ser verdades evidentes, mas hipóteses ou premissas para os raciocínios, sendo estes de caráter finitário e, precisando provar a consistência deles em uma teoria axiomática, o qual pode ser nada evidente.

2) A matemática não é (obviamente) empírica: por lidar com objetos abstratos, não temos como comprovar diretamente a verdade de resultados matemáticos na realidade.

No entanto a “comprovação” dos resultados matemáticos se dá, de alguma forma, em uma “realidade” intelectual, uma realidade também abstrata. Ou seja, acreditamos que determinados resultados matemáticos são verdadeiros pelas suas consequências em explicar determinados conhecimentos que construímos ou na sua utilidade enquanto aplicação em outras áreas do conhecimento.

Por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral, foi desenvolvido para dar respostas a problemas físicos como da gravitação, porém não havia uma fundamentação teórica que justificasse seus resultados, pois baseava-se na noção “confusa” de infinitésimo, apesar de ser útil. Por um lado, o próprio Cálculo foi aceito como matemática pelo seu caráter instrumental e, por outro lado, a Análise Matemática, que se formulou eliminando os infinitésimos e consolidando os números reais, foi aceita pois, entre outras coisas, *justificava* os resultados do Cálculo Diferencial e Integral.

Da mesma forma temos a matemática *fuzzy*, ou difusa, baseada em uma lógica que leva mesmos nomes. A lógica *fuzzy*, ou difusa, consiste, grosso modo, em uma lógica que não possui somente o verdadeiro (1) e o falso (0), mas sim, atribui valores reais de 0 a 1 entre o falso e verdadeiro. Assim, algo pode ser verdadeiro, falso ou possuir valores intermediários. Os resultados desta matemática têm se mostrado extremamente úteis nas áreas de engenharia e inteligência artificial. Aliás, ela surgiu justamente para isso, para explicar e apresentar resultados nestas áreas.

Desta maneira, o carácter quase-empírico da matemática estaria justamente por ser *a posteriori*, substantiva e falível. *A posteriori* pois sua aceitação se daria pelas suas consequências epistemológicas e/ou em outras áreas do conhecimento, como a física, computação, etc. Substantiva, pois, ao contrário de ser uma ciência tautológica, ela não se justificaria por si própria, dependeria de fatores externos inerentes a experiência matemática e sua utilidade em outras áreas e, por fim, falível, uma vez que estaria sujeita a contradições, correções e dependeria de fatores externos indiscutivelmente falíveis.

## 2.4 A CRÍTICA DE WITTGENSTEIN A GÖDEL

Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951) foi um filósofo nascido em Viena, discípulo de Bertrand Russell (1872 – 1970), filósofo e matemático da primeira metade do século XX. O pensamento de Wittgenstein é usualmente dividido em duas etapas, sendo a segunda um giro radical nas suas concepções a respeito da primeira.

Por conta disto, é de costume referir-se à primeira etapa, representada pela obra *Tractatus Logico-Philosophicus* publicada originalmente em alemão em 1921, como o “primeiro Wittgenstein”. Esta obra teve uma forte influência para a formação do neopositivismo ou positivismo lógico do conhecido Círculo de Viena, cujas ideias principais baseiam-se em uma concepção neutra e impessoal de “ciência”, dando

ênfase ao método científico com base no experimento, na lógica, na exatidão e na exclusão de toda metafísica do pensamento científico.

Nessa obra, Wittgenstein (1994) defende que todo problema filosófico é fruto de problemas na linguagem e, desta forma, resolvendo-se esses, não haveria problemas filosóficos.

Na linguagem corrente, acontece com muita frequência que uma mesma palavra designe de maneiras diferentes – pertença, pois, a símbolos diferentes – ou que duas palavras que designam de maneiras diferentes sejam empregadas, na proposição, superficialmente do mesmo modo.

Assim a palavra “é” aparece como cópula, como sinal de igualdade e como expressão da existência; “existir” como verbo intransitivo, tanto quanto “ir”; “idêntico” como adjetivo; falamos de algo, mas também de acontecer algo.

(Na proposição “Rosa é rosa” – onde a primeira palavra é um nome de pessoa, a última é um adjetivo – essas palavras não têm simplesmente significados diferentes, mas são símbolos diferentes). (WITTGENSTEIN, 1994, 3.323, grifos do autor)

Assim, temos que uma mesma palavra pode representar vários objetos distintos, bem como um único objeto pode ser representado por várias palavras distintas. Esta consideração de Wittgenstein resulta na concepção filosófica onde “a linguagem é o limite da realidade”. Nesta concepção, o que pode ser dito (e, portanto, o que pode ser verdadeiro ou falso) está restrito ao que pode ser representado pela linguagem lógica. Qualquer tentativa de falar sobre o que está além desses limites resulta em *nonsense*, isto é, enunciados ou proposições que não têm sentido lógico. Wittgenstein (1994) escreve: “Para reconhecer se uma figura é verdadeira ou falsa devemos compará-la com a realidade” (2.223). Isso significa que a verdade de uma proposição depende de sua correspondência com a realidade observável.

Nesta visão, o verdadeiro ou falso não reside no fato em si, mas sim no que é dito sobre o fato, ou seja, o verdadeiro ou falso encontra-se exclusivamente na linguagem. Esta também é uma característica da visão aristotélica de verdade, sintetizada na famosa frase: “Dizer daquilo que é que não é, ou daquilo que não é que é, é falso, enquanto dizer daquilo que é que é, ou daquilo que não é que não é, é verdadeiro” (ARISTÓTELES, 1969, p. 107).

Esta concepção é apresentada por Wittgenstein no prefácio do *Tractatus Logico-Philosophicus* da seguinte maneira:

[...] o que se pode em geral dizer, pode-se dizer claramente; e sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar.  
O livro pretende, pois, traçar um limite para o pensar, ou melhor – não para o pensar, mas para a expressão dos pensamentos: a fim de traçar um limite para o pensar, deveríamos poder pensar os dois lados desse limite (deveríamos, portanto, poder pensar o que não pode ser pensado). O limite só poderá, pois, ser traçado na linguagem, e o que estiver além do limite será simplesmente um contrassenso. (WITTGENSTEIN, 1994, Prefácio)

Devemos reparar que Wittgenstein já aponta para a existência de limites no pensamento em geral, estes ligados à sua expressividade. Essa noção preliminar de limite terá uma importância destacada na nossa discussão posterior.

Wittgenstein teve acesso ao trabalho de Gödel e teceu uma série de críticas ao mesmo. Estas críticas se encontram na obra *Remarks on Foundations of Mathematics*, publicada originalmente em 1956. No entanto as anotações foram escritas entre 1937 e 1944 (o trabalho de Gödel foi publicado em 1931).

Vale a pena ressaltar também que o *Tractatus Logico-Philosophicus*, obra que simboliza a primeira filosofia de Wittgenstein foi publicada em 1921 enquanto *Investigações Filosóficas*, obra que marca sua segunda filosofia, foi publicada postumamente pela primeira vez em 1953, pois seu falecimento ocorreu em 1951.

Dentre os aspectos da obra de Wittgenstein, não há dúvidas de que a filosofia da matemática tenha sido o mais controverso e polêmico. Prova disso é que wittgensteinianos importantes como Merrill B. Hintikka e Jaakko Hintikka preferem não abordar as reflexões do filósofo austríaco na análise que fazem sobre seu legado na obra *Uma investigação sobre Wittgenstein*: “Não estamos convencidos [...] de que a filosofia da matemática de Wittgenstein tenha a mesma profundidade que a sua filosofia da linguagem ou a filosofia da psicologia” (HINTIKKA, HINTIKKA, 1994, p. 51, *apud* SILVA, 2018, p. 98). Da mesma forma, os editores do *Oxford Handbook of Wittgenstein*, Oskari Kuusela e Marie McGinn, na introdução do livro, disseram que “A maioria da filosofia analítica dominante ainda parece muito escandalizada pela filosofia da matemática de Wittgenstein para considerá-la muito

seriamente”<sup>5</sup> (2014, p. 07, *apud* SILVA, 2018, p. 98). No entanto, nessa obra, uma das sete partes é destinada à lógica e filosofia da matemática e, dentre as oito seções desta parte, apenas a intitulada *Wittgenstein on mathematics*, escrita por Michael Potter, tenta explicar o porquê das ideias sobre matemática de Wittgenstein serem tão rejeitadas.

Potter perpassa brevemente alguns tópicos da filosofia da matemática wittgensteiniana, com destaque à sua análise da sugestão feita por Wittgenstein de que o significado de uma generalização aritmética é a sua prova. Na opinião de Potter (*ibid.*, p. 139), essa doutrina do significado como prova dominou o pensamento matemático de Wittgenstein sobre a matemática de tal forma que, quando ele começou a duvidar de sua validade, em fins dos anos 1930, percebeu que os danos à sua concepção de matemática não poderiam ser facilmente remediados. Como consequência, observa Potter, toda a longa seção sobre a filosofia da matemática que integraria as Investigações Filosóficas acabou excluída da obra. Além disso, sem ter conseguido reformular suas ideias sobre a matemática dando-lhes uma perspectiva coerente, Wittgenstein deixou apenas anotações incompletas nessa área, enfatiza Potter. (SILVA, 2018, p. 98)

Assim, Potter nos diz que, para Wittgenstein, os significados que são atribuídos a uma sentença matemática se restringem à sua prova lógica (formal). Esta era sua concepção geral no *Tractatus Logico-Philosophicus*. Quando Wittgenstein reformulou as suas ideias nas outras áreas, naquilo que ficou conhecido como segundo Wittgenstein, conforme veremos, o autor passa a defender que a significação se dá também de outras formas, não apenas lógicas. Mas, pelo visto, para ele, na matemática, era difícil conceber que os significados pudessem ser dados de outra forma que não pelas provas lógicas.

Outro autor que teceu fortes críticas às interpretações filosóficas de Wittgenstein acerca da matemática foi Ray Monk, na obra *Wittgenstein: o dever do gênio*, publicada em 1995. Monk, (1995, p. 270, *apud* SILVA, 2018, p. 98 – 99) destaca que os comentários de Wittgenstein, feitos no apêndice III, § 19, da obra *Remarks on Foundations of Mathematics*, sobre os teoremas da incompletude de

<sup>5</sup> Tradução feita por SILVA (2018)

Gödel, bem como a tentativa de caracterizá-los como meros “truques lógicos”, são exemplos dos absurdos defendidos por Wittgenstein no campo da filosofia da matemática. Monk (1995, p. 376, *apud* SILVA, 2018, p. 99) também destaca que as posições do filósofo levaram o famoso matemático Alan Turing a abandonar suas aulas no curso de 1939 sobre o tema e que até seus alunos como o lógico Georg Kreisel, na resenha das *Observações sobre os fundamentos da matemática*, criticavam a filosofia da matemática de Wittgenstein: “Os pontos de vista de Wittgenstein sobre lógica matemática não têm muito valor, pois ele conhecia muito pouco do assunto e esse pouco restringia-se às mercadorias da linguagem Frege-Russell” (1995, p. 441, *apud* SILVA, 2018, p. 99).

Os comentários do filósofo feitos sobre os teoremas da incompletude de Gödel fizeram o próprio matemático afirmar que tais críticas são “uma interpretação errônea, totalmente trivial e desinteressante” (GOLDSTEIN, 2008, p.100, *apud* SILVA, 2018, p. 99). No entanto, aqui, buscaremos mostrar, mais do que ressaltar tanto as críticas feitas por Wittgenstein ao trabalho de Gödel, quanto as críticas feitas às críticas de Wittgenstein, que há uma relação entre a filosofia de Wittgenstein, no que diz respeito à sua noção de conceito, como algo sem limites e que é construído de forma dinâmica e socialmente, conforme abordaremos, com a própria matemática e seus conceitos, e que tal semelhança é reforçada pelos teoremas da incompletude de Gödel, mostrando que a matemática possui uma dinâmica própria e que possui não apenas um caráter social, extrínseco, mas também um caráter epistemológico, intrínseco.

Para tal, já destacamos que a noção utilizada neste trabalho de “conceito” de Wittgenstein, que veremos posteriormente, é uma noção do chamado segundo Wittgenstein e que as críticas feitas à filosofia da matemática pertencem muito mais ao primeiro Wittgenstein e que não foram reformuladas pelo próprio filósofo como sua filosofia em outras áreas, em especial da linguagem e psicologia.

Com relação às críticas feitas por Wittgenstein ao trabalho de Gödel, presentes principalmente no apêndice III do *Remarks on Foundations of Mathematics* (1967), é importante destacar que o filósofo não está contestando os

teoremas em si, mas sim uma leitura metafísica deles. Sobre isso, Jourdan (2013) destaca que:

[...] aqueles que tentam defender a leitura de Wittgenstein atentam principalmente para o fato de que suas críticas aplicam-se não propriamente ao teorema, mas à interpretação filosófica deste [...]. Wittgenstein não estaria criticando o teorema, mas estaria criticando uma leitura metafísica do teorema, que o utiliza como prova do platonismo matemático, a partir da conclusão atribuída à prova, segundo a qual a verdade não poderia ser equacionada com a demonstrabilidade. Gödel teria provado que existem verdades matemáticas indemonstráveis ou, mais forte ainda, que a verdade ultrapassa a demonstrabilidade, e são formulações como estas que Wittgenstein não aceita, pois considera expressões de uma confusão filosófica. O que Wittgenstein está criticando é, primariamente, a própria pretensão de se provar matematicamente uma verdade metafísica [ou metamatemática], como se o teorema tivesse demonstrado uma tese filosófica. Como se sabe, uma posição bastante cara a Wittgenstein é aquela segundo a qual as teses filosóficas não podem ser demonstradas [...]. (p. 62)

Conforme destacamos anteriormente, Gödel mostra em seu primeiro teorema que existem fórmulas aritméticas verdadeiras que não são demonstráveis e que isto é possível a partir de uma concepção de verdade por correspondência a uma certa realidade (matemática). Podemos chamar de *realista* esta concepção de verdade.

Já Wittgenstein parte de uma concepção de verdade por coerência. O autor entende o âmbito da matemática como *normativo*. Assim,

A determinação da verdade não seria independente da determinação da semântica e, por isso, se vamos continuar falando em 'verdade' no contexto da aritmética será somente em um sentido no qual não apenas 'ser demonstrável' é o sentido de 'verdade' primário, como também esta própria demonstrabilidade determina o significado das proposições ou fórmulas, não fazendo sequer sentido falar em uma proposição matemática independente de sua demonstração. (JOURDAN, 2013, p. 64, grifos da autora)

Para construir sua argumentação, Wittgenstein interpreta, em algumas passagens, a sentença de Gödel como uma espécie de paradoxo análogo ao paradoxo do mentiroso. A partir daí, e é neste ponto que recaem as principais acusações de que o filósofo não entendera o teorema.

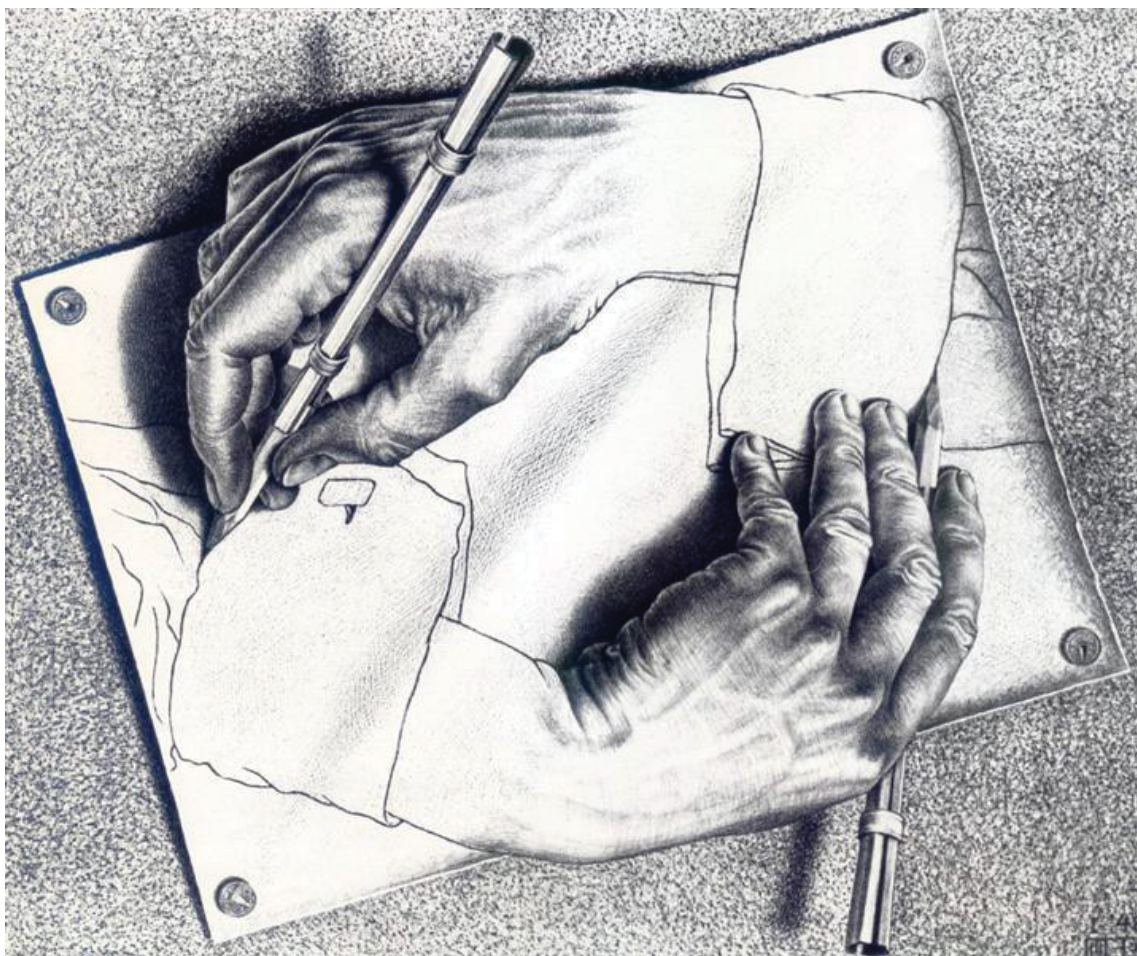
Wittgenstein (1967, I, Ap. III, §8) diz que, se a sentença que afirma de si mesma ser indemonstrável fosse falsa (por alguma razão externa ao sistema), então não seria indemonstrável, logo, em seu entendimento, seria demonstrável e, portanto, verdadeira (no sistema). Este é o paradoxo a que ele se refere.

Assim, para Wittgenstein, a verdade em um sistema só se daria pela sua demonstrabilidade. É importante destacar que esta noção de verdade por demonstrabilidade não é um princípio originário do pensamento do filósofo austríaco pois já era um pressuposto logicista do próprio *Principia Mathematica* de Russel e Whitehead, cuja lógica matemática já havia superado há algum tempo.

Além disso, o que está em jogo, certamente, passa pela concepção de “verdade”, divergente entre Gödel e Wittgenstein. Podemos afirmar que, com base em suas concepções de verdade, ambos têm certa razão, no entanto, nossa intenção aqui não é levar esta discussão para uma restrição dualista, onde nos caberia decidir qual concepção de verdade, em especial verdade matemática, aceitaríamos como adequada em determinado sentido.

De antemão, já adiantamos que não concordamos plenamente com a concepção de verdade realista de Gödel, por correspondência a uma realidade platônica da matemática nem com a verdade apresentada pelo primeiro Wittgenstein, de uma verdade puramente interna, pertencente somente à linguagem, à sintaxe, estabelecida por coerência com o sistema. Acreditamos em uma concepção de verdade matemática que se dá também por aspectos mais ligados a questões internas, que exigem certa coerência com o sistema adjacente e, portanto, de caráter sintático, mas também que ela também se dá por influência de questões mais ligadas a fatores externos, ligados à imaginação, estabelecidos por construção (social), e à intuição matemática, estabelecida por descoberta, a partir das experiências matemáticas. A estes aspectos, de cunho mais interno ou externo que influenciam a concepção de verdade na matemática, que exploraremos melhor posteriormente, chamamos de caracteres intrínseco e extrínseco, respectivamente. De antemão, já adiantamos que entendemos que eles se misturam e influenciam um ao outro, de tal forma que nem sempre seja claro distingui-los ou dizer qual influencia qual, assim como as mãos que se pintam de Escher.

**Figura 1** – Mãos Desenhando de Maurits Cornelis Escher (1948)



Fonte: < <https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/maos-desenhando-1948> >

Existem vários autores contemporâneos que continuam discutindo a noção de verdade matemática. Dentre eles, temos Stewart Shapiro, com contribuições significativas para a discussão sobre sua natureza em suas obras *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* e *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*; Penelope Maddy, que explora a concepção da verdade matemática em sua obra *Realism in Mathematics*, discutindo questões como a objetividade da matemática e a relação entre a matemática pura e a matemática aplicada; Michael Dummett em suas obras, incluindo *Truth and Other Enigmas* e *Frege: Philosophy of Language*; e Charles Parsons: um filósofo da matemática que

se concentra na filosofia da lógica e do pensamento matemático. Parsons aborda questões sobre a verdade matemática em suas obras, como *Mathematics in Philosophy* e *From Kant to Husserl: Selected Essays*.

Esses são apenas alguns exemplos de autores contemporâneos que contribuíram para a discussão sobre a verdade matemática. Cada autor oferece perspectivas únicas e abordagens distintas para esse tópico complexo e embora existam diferenças nas abordagens individuais desses autores, há alguns pontos em comum nas discussões sobre o conceito de verdade matemática que eles apresentam, dentre estes pontos, podemos citar: *a pluralidade de teorias da verdade*. Esses autores reconhecem que há várias teorias da verdade em circulação na filosofia da matemática. Eles podem discutir diferentes abordagens, como a teoria da correspondência (realista), a teoria coerentista (por coerência), a teoria pragmatista da verdade, entre outras. Os autores, em particular os pragmatistas, também destacam a interação entre prática matemática e verdade, considerando a prática matemática como fundamental para a compreensão da verdade matemática. Isso pode incluir a análise de provas matemáticas, o papel da intuição matemática e a validação da matemática em relação ao mundo empírico ou a outras áreas da ciência.

Além disso, destacam o papel do contexto e da linguagem, enfatizando que a noção de verdade matemática pode depender do contexto e da linguagem utilizada. Isso pode envolver considerações sobre a linguagem formal, a interpretação de conceitos matemáticos e o papel da linguagem natural na comunicação matemática. E, por fim, podemos dizer que todos estes autores salientam a relação entre a matemática pura e a matemática aplicada. Eles discutem a relação entre a verdade matemática na matemática pura, que pode ser considerada mais abstrata e independente da experiência empírica, e a matemática aplicada, que tem uma conexão mais direta com o mundo real e a validação empírica.

Até aqui, utilizamos o singular (matemática) para nos referir àquilo que a humanidade, ou pelo menos a Academia, entendeu por matemática enquanto conjunto de conhecimentos em sua hegemonia, mas já foi possível discutir que ela

mesma, ao longo da história, se mostrou diferente em vários aspectos, inclusive em suas próprias racionalidades e concepção interna de verdade. Outros autores como David Bloor, Ubiratan D'Ambrósio e Plínio Cavalcanti Moreira, por meio de suas contribuições teóricas a partir da sociologia e da educação, ampliam esta discussão. Desta forma, defendemos que faz mais sentido nos referir às matemáticas, no plural, justamente para reforçar esta pluralidade e não enfatizar linguisticamente uma noção singular que não se justifica. Daqui em diante, passaremos a usar o plural para nos referir a este conjunto de conhecimentos quando pertinente.

No capítulo anterior, destacamos que os diversos problemas sociais, econômicos e ambientais que a sociedade enfrenta nos pedem, mais do que nunca, que sejamos capazes de construir novas formas de pensar, de interpretar o que está ao nosso redor, formular novas racionalidades, com valores e lógicas diferentes. Autores como Ole Skovsmose, por meio de suas obras de Educação Matemática Crítica, entre outros, nos mostram que as matemáticas têm papel importante na formulação do pensamento, ética e lógica humanos, principalmente após o período que ficou conhecido como “modernismo”, com a ascensão do pensamento cartesiano e racionalismo. Entendemos que esta ascensão nos dá a impressão que esta forma de pensamento, por estar (supostamente) embasada em uma lógica universal é insuperável, porém a história das matemáticas, como vimos aqui, nos mostra que estas não estão baseadas em uma lógica universal. David Bloor, na sua obra *Conhecimento e Imaginário Social*, que abordaremos com mais profundidade no capítulo 7, discute que as matemáticas, ao longo do tempo, foram baseadas em lógicas e conceitos distintos, reformulados socialmente, de acordo com o contexto histórico. Outros autores, como Ludwic Fleck e Thomas Kuhn, defendem ideias que vão na mesma direção, porém enquanto Fleck tem como pano de fundo a medicina e as ciências biológicas, Kuhn aborda as ciências em uma forma geral.

Assim quando nos referimos às matemáticas no plural, mesmo que possa parecer apenas uma forma diferente de se referir à mesma coisa, que na sua essência já é plural, o reforço, ou destaque linguístico, é de suma importância se pensarmos na “educação por matemáticas” como meio para construção de novas racionalidades, uma vez que a concepção singular pode, implicitamente, reforçar

uma ideia errônea (!) de que a matemática, de alguma forma, garante e transmite “a verdade singular”, permitindo que esta, assim, se estabeleça como ferramenta de manutenção social e seja uma barreira que dificulta a formulação de novas racionalidades, impossibilitando as respostas emergentes aos problemas já mencionados. Em contrapartida, acreditamos que uma educação que incentive a construção de formas diferentes de se pensar matematicamente pode contribuir para a formação de novas formas de pensar no geral, novas racionalidades, uma vez que tal incentivo já motivaria uma pré-disposição à busca por alternativas de pensamentos.

### **3 ALÉM DA LÓGICA: A EVOLUÇÃO DOS CONCEITOS E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

O capítulo anterior nos diz, de certa forma, que as matemáticas lidam, cada uma a seu modo, com conceitos. Também nos diz implicitamente que esses conceitos são construções intelectuais humanas feitas com o intuito de fazer melhor inteligível aquilo que cerca o ser humano.

Os metateoremas de Gödel mostram a impossibilidade de uma conceitualização lógica fechada (no sentido clássico) ou puramente formal para a "matemática". Eles nos dizem também que a noção de aritmética, base para toda a matemática hegemônica no sentido logicista, depende de uma concepção conceitual de número natural, cujas características intuitivas desta concepção foram construídas ao longo do tempo, por meio do seu uso na prática social, ou seja, a partir da experiência humana.

Neste capítulo, discutiremos não apenas como o conceito de número se dá dessa forma, mas também que tudo aquilo que entendemos por "conceito" pode ter isso como premissa: ser uma construção social que surge da experiência humana em sua práxis e, portanto, está suscetível a modificações, reinterpretações e até mesmo a formulações alternativas. Claro que, do ponto de vista formal científico, alguns conceitos estão intimamente ligados a definições precisas. No entanto, o que discutiremos aqui é que, epistemologicamente, "conceito" é uma coisa enquanto que "definição" é outra.

Essa diferenciação é um dos principais pressupostos que defendemos neste trabalho, pois ao entendermos que os conceitos, sejam eles filosóficos ou científicos, têm como premissa uma noção dinâmica e até mesmo difusa, ao invés de uma concepção estática. Percebemos que tal dinamicidade advém da experiência humana e do uso social, tornando-os suscetíveis a mudanças e formulações alternativas. Em outras palavras, se compreendemos que a construção de um conceito ao longo do tempo se deu por uma série de fatores e que outros fatores poderiam acarretar em uma construção diferente, passamos a entender que um

determinado conceito, por mais estabelecido que seja, poderia, ao menos hipoteticamente, ser diferente.

Essa premissa, se estendida, pode ter um significado amplo para nós, indo além da noção de conceito. Com efeito, perguntamos: se uma pessoa possui uma noção estática de conceito, ela estaria limitada a compreender o mundo de forma fixa, tendo uma visão estática de lógica, razão, moral, ética, etc.? Por outro lado, também questionamos: aquele que compreende que um conceito, uma forma de pensar, uma lógica, uma racionalidade, etc. são construídos socialmente e estão suscetíveis a modificações ou alternativas, naturalmente não irá questionar se não há alternativas para tal, ou, ao menos, será mais flexível para essa possibilidade?

No primeiro capítulo, mostramos que vários autores, de diversas áreas, têm apontado para a necessidade de repensarmos a forma como o ser humano lida com o meio ambiente e os recursos naturais, considerando o risco da própria extinção ou destruição do planeta. Alguns autores, como Acosta (2016), por exemplo, apontam inclusive para a necessidade da construção de uma nova racionalidade que permita repensar a forma que o ser humano lida com estas questões. Neste trabalho, defendemos que, para estarmos abertos a possibilidades de construção de novas racionalidades, precisamos primeiro ter uma noção clara da possibilidade de alternativas aos pensamentos dominantes, e que a educação e a escola formal (em todos os níveis de ensino) deveriam desempenhar um papel central nesse processo.

Autores da Educação Matemática, em especial os da Etnomatemática, já vêm discutindo que a concepção de uma única matemática hegemônica, estática, que modela o pensamento ocidental, pouco contribui para uma visão plural do conhecimento e para construções alternativas aos conhecimentos hegemônicos.

Aqui, buscaremos dar reforços teóricos a essa discussão, bem como defender a possibilidade de uma educação matemática que vise, por meio da experiência matemática devidamente compreendida, a construção de matemáticas alternativas. Entendemos que essa ideia, se estendida a outras áreas de conhecimento, pode ser um passo importante para as mudanças necessárias em nossa sociedade. Usaremos as matemáticas como pano de fundo de nossas

discussões, mas sempre tendo em mente que as discussões aqui feitas podem ser estendidas a outras áreas.

Começaremos, como mencionamos, defendendo que a noção de conceito pode ser dinâmica e, para tal, utilizaremos concepções filosóficas de Wittgenstein, provenientes de seu pensamento já reformulado.

### 3.1 WITTGENSTEIN E A NOÇÃO DE CONCEITO DECORRENTE DE SEU PENSAMENTO

Com o passar do tempo, Wittgenstein foi reformulando seu pensamento, construindo uma nova etapa, à qual nos referimos hoje por “segundo Wittgenstein”, representado principalmente pela obra *Investigações Filosóficas*, publicada postumamente pela primeira vez em 1953. Nesta obra, o filósofo revelou uma concepção holística de conhecimento, baseada em uma perspectiva social que se contrapunha ao neopositivismo defendido pelo Círculo de Viena (CONDÉ, 2012).

Em *Investigações Filosóficas*, o autor enfoca seu discurso sobre o conhecimento no campo da linguagem, porém em uma concepção de linguagem mais ampla, em que esta não se restringe apenas aos significados lógicos, absolutos, das definições, como no primeiro Wittgenstein, e sim em um contexto que engloba uma “lógica” mais abrangente, denominada “gramática”, rica em sentidos, construídos socialmente, por meio do uso das palavras nos “jogos de linguagem”.

Na sua segunda filosofia, Wittgenstein estabelece a crítica à lógica do mais “puro cristal” [...]. Algo é lógico não porque expressa uma essência metafísica, oculta e transcendental, mas sim porque emerge do “solo áspero”, ou como formula Wittgenstein, dos nossos *jogos de linguagem* (I.F. § 23) em nossa *forma de vida*. Para ele, a “gramática diz que tipo de objeto algo é” (I.F. §373). (CONDÉ, 2012, p. 87, grifos do autor)

Ou seja, o conhecimento é construído levando em consideração não somente os fatos, mas também seu uso através das regras linguísticas e as práticas sociais, que dão significados e sentidos a elas, a partir da vivência, uma forma de

experiência, sendo esta talvez uma das maiores diferenças entre o primeiro e o segundo Wittgenstein.

Desta forma, o autor defende uma aproximação entre lógica e experiência, porém de maneira diferente de como era proposto pelo Círculo de Viena, que buscava a fundamentação última, ou seja, a garantia da “verdade absoluta” (CONDÉ, 2012, p. 87).

Sua segunda filosofia baseia-se principalmente na formação de três noções: “jogos de linguagem”, “semelhança de família” e “gramática”. No entanto, Wittgenstein não as “define” (!), pois essa é justamente sua crítica aos filósofos da época, que buscavam a fundamentação última, cristalizada em uma definição. Ao contrário, o filósofo de Viena busca levar o leitor a uma reflexão filosófica sobre *jogo de linguagem*, *gramática* e *semelhança de família*, promovendo, justamente, jogos de linguagem para este fim, dinamizando, assim, essas noções.

Interpretando sua filosofia, podemos dizer que esta forma de abordagem, por meio de jogos de linguagem, para tratar do que algo é, é uma maneira dinâmica de conceitualizar, ou seja, de construir uma noção aberta de um “conceito”.

Posteriormente, veremos que Platão levanta indiretamente questionamentos sobre a possibilidade de “o que” pode ser definido ou não quando reflete sobre o que pode ou não ser ensinado, pergunta que é levada ao campo do ensino de matemática em Cifuentes (2016). Embora os questionamentos levantados por Platão sejam tomados apenas como motivação para nosso propósito de colocá-lo, aqui, no âmbito do ensino da matemática, Wittgenstein sugere uma noção de conceito que foge da rigidez lógica até então utilizada, abrindo as portas, na atualidade, para uma discussão análoga da problemática de Platão no campo do ensino da matemática.

Vale destacar que a visão de aprendizagem de Wittgenstein é conflitante com a própria concepção platônica apresentada no diálogo *Mênon*<sup>6</sup>, referência que

<sup>6</sup> Um artigo que cita diretamente essa tensão entre o platônico e o pensamento matemático associado a Wittgenstein é: GOTTSCHALK, C. Maiêutica socrática ou terapia wittgensteiniana. 2007, Anais. [Rio de Janeiro]: ANPEd, 2007. Disponível em: < <http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT17-3043--Int.pdf> > Acesso em: 15 nov. 2022.

utilizaremos. Mesmo que Wittgenstein rompa com a noção platônica de aprendizagem, e ele rompe (!), o questionamento, do que pode ou não ser ensinado e, portanto, aprendido, ainda poderá ser feito. O que defenderemos aqui é que “conceito”, em uma acepção aberta, construída a partir de discussões geradas por interpretações nossas de Wittgenstein, não pode ser ensinado, em uma concepção de ensino que também discutiremos posteriormente.

Aqui, utilizaremos, como pano de fundo, aspectos da discussão de Wittgenstein sobre a noção de “jogo” a fim de ilustrar, principalmente, a visão que ele tem sobre o que viria a ser um “conceito”: algo dinâmico, que, na sua dinamicidade, torna-se difuso, sem limites pré-definidos e que ganha sua significação por meio de seu uso, ou seja, socialmente. Isto é ilustrado, por exemplo, pela sua discussão sobre “número”:

[...] Por que chamamos algo de “número”? Ora, talvez porque tem um direto-parentesco com alguma coisa que até agora se chamou de número; e pode-se dizer que através disso adquire um parentesco com uma outra coisa que também chamamos assim. E alargamos nosso conceito de número do mesmo modo que, ao traçarmos um fio, traçamos fibra por fibra. E a robustez do fio não consiste em que uma fibra qualquer perpassasse toda sua extensão, mas em que muitas fibras se sobreponham umas às outras. (WITTGENSTEIN, 2014, p. 52, grifos do autor)

Esse exemplo matemático de Wittgenstein é relevante para uma concepção moderna das matemáticas, onde o próprio conceito de “número” não tem fronteiras fixas, ele é construído progressivamente acrescentando a ele, sem nenhum fechamento teórico, novas classes de “números”, isto é, ele é um conceito difuso.

O autor, também utiliza a discussão sobre “número” para ilustrar a impossibilidade de definir o que vem a ser um jogo:

“Muito bem; assim está explicado para você o conceito de número como a soma lógica daqueles conceitos individuais aparentados: número cardinal, número racional, número real, etc. e, igualmente, o conceito de jogo como a soma lógica dos conceitos parciais correspondentes.” – Não necessariamente. Pois assim, eu posso conferir limites rígidos ao conceito “número”, isto é, usar a palavra “número” como designação de conceitos limitados rigidamente, mas posso usá-la também de tal modo que a extensão do conceito não seja fechada por um limite. E é assim que empregamos a palavra “jogo”. De que modo está fechado o conceito jogo?

O que é ainda um jogo e o que não é mais? Você pode indicar os limites? Não. Você pode *traçar* alguns: pois ainda não se traçou nenhum. (mas isto jamais o incomodou ao empregar a palavra “jogo”). (WITTGENSTEIN, 2014, p.53, grifos do autor)

Wittgenstein continua sua reflexão dizendo que limites até podem ser traçados com finalidades específicas, porém o conceito é utilizável mesmo que tais limites não sejam traçados e, faz assim, uma crítica ao pensamento do lógico alemão Gottlob Frege (1848 – 1925):

Frege compara o conceito a uma região e diz: uma região delimitada sem clareza não pode, absolutamente, ser chamada de região. Isto significa que não podemos fazer nada com ela. – Mas não tem sentido dizer: “detenha-se mais ou menos aqui? Imagine que eu estivesse com uma outra pessoa em um lugar e dissesse isto. Nisso, nem ao menos traçarei algum limite, mas farei um movimento indicativo com a mão, - como se lhe mostrasse um determinado *ponto*. E é precisamente assim que se explica o que é um jogo. Dá-se exemplos e pretende-se que eles sejam entendidos num certo sentido. – Mas com esta expressão não tenho em mente: nestes exemplos ele deve ver o comum, aquilo que – por uma razão qualquer – não consegui trazer à fala. Mas: ele deve *empregar* estes exemplos apenas num determinado modo. A exemplificação não é aqui um meio *indireto* de explicação, - na falta de um melhor. Pois, toda explicação geral também pode ser mal-entendida. E *assim* que jogamos um jogo. (É o jogo de linguagem que tenho em mente com a palavra “jogo”). (WITTGENSTEIN, 2014, p. 54-55, grifos do autor)

Isso faz sentido quando nos deparamos com certos exemplos matemáticos, como os relacionados ao conceito de número, já interpelado por Wittgenstein: o que é um número? Ou, para sermos um pouco “mais concretos”, porém igualmente difusos: O que seria um número natural *grande*, ou um número real *próximo* de zero? A tarefa de tentar definir o que vem a ser um número é mais do que ingrata (Frege que o diga...) <sup>7</sup>. Para uma análise mais aprofundada, devemos comparar a noção que temos (ou pretendemos) sobre “número” com, por exemplo, a noção de “número natural”. Esta segunda aparentemente está bem delimitada pela coleção

<sup>7</sup> O grande objetivo de Gottlob Frege, ao escrever em 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik* (Os Fundamentos da Aritmética), e posteriormente, em 1903, seu segundo volume: *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis Básicas da Aritmética), era, por meio de seu simbolismo, dar uma definição precisa de números. Esta tentativa se mostrou falha, culminando no Paradoxo de Russell.

$\{0, 1, 2, \dots\}$ , que lhes dá uma certa concretude, ou pelos axiomas de Peano de segunda ordem, o que lhes dá um caráter mais abstrato e formal, envolvendo também suas operações aritméticas. Vale comentar que no próprio campo dos números naturais, o conceito se torna difuso quando pensamos em uma axiomática de Peano escrita em uma linguagem de primeira ordem, pois, nesse campo, existem concretizações não isomorfas desta axiomática.

Mas, no caso da noção geral de número, ao comparar aquilo que já se conhece como número, como os números naturais, inteiros, reais, etc., poderíamos estar propensos a pensar formalmente em número como “algo com que podemos fazer determinadas operações” como adição, multiplicação, etc., mas isto não basta, pois podemos fazer o mesmo com matrizes por exemplo, mas usualmente não consideramos matrizes como exemplo de números. Onde está o limite, que determina que um número complexo é um número e uma matriz não é?

Uma possível resposta para esta pergunta é a seguinte: os números reais, desde os naturais aos racionais e irracionais, possuem algumas características algébricas, em especial, congregam-se em conjuntos cuja adição e multiplicação são operações comutativas, isto é, para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ , temos que  $a + b = b + a$  e  $a \cdot b = b \cdot a$ . Essa comutatividade, do ponto de vista da adição, mantém a ideia aditiva de juntar objetos, essência da gênese de tal operação no âmbito da contagem, que se expande para a multiplicação como forma de simplificação da adição (detalharemos mais adiante). Poderíamos dizer que estas propriedades geram uma espécie de paradigma aritmético que, de alguma forma, “amarram” o conceito de número? E outros “objetos” que satisfazem a propriedade comutativa, são números?

O conjunto das matrizes, por sua vez, apesar de possuir as mesmas operações e maioria das propriedades algébricas, possui uma operação que também chamamos de multiplicação, por semelhança ao que já entendemos por multiplicação em outros conjuntos (por exemplo através da propriedade distributiva), que não é comutativa, isto é, para quaisquer matrizes  $A$  e  $B$  não necessariamente é válida a propriedade  $A \cdot B = B \cdot A$ . Esta diferenciação, ou esta ruptura, poderia ser um possível norte para uma tentativa de delimitação formal do que “deveríamos”

entender por número, o que responderia à pergunta anterior: Onde está o limite, que determina que um número complexo é um número e uma matriz não é? Extensões dos números naturais que de uma forma “controlada” preservem o paradigma aritmético poderiam ainda ser chamadas de números, como seria o caso dos números complexos.

No entanto, a “expansão natural”<sup>8</sup> dos números complexos, são os “quatérnios”, números de quatro dimensões da forma  $a + bi + cj + dk$ , onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são números reais e  $i$ ,  $j$  e  $k$  são unidades imaginárias. Nos quatérnios, a multiplicação entre essas unidades segue a chamada de “regra da mão direita”:

- i)  $i.j = k = -j.i$
- ii)  $j.k = i = -k.j$
- iii)  $k.i = j = -i.k$

Esta regra multiplicativa é não comutativa, mas se quisermos considerar os quatérnios como números precisamos abandonar este paradigma aritmético da comutatividade multiplicativa. E voltamos novamente à estaca zero.

Os algebristas resolveram esta situação de forma muito simples: considerando uma matriz como um número, ou melhor, considerando “número”, por extensão simples do conceito, qualquer elemento de um sistema algébrico que envolva, mesmo que parcialmente, as quatro operações elementares da aritmética. Esta é uma “mudança de face” muito importante para a constituição do que entendemos hoje por matemáticas. Na definição dos objetos da álgebra, o que importa é o conjunto com sua estrutura (algébrica), isto é, as propriedades das operações definidas no conjunto. O conceito de número precede esse ponto de vista (por alguns milênios) e talvez, por isso, seja tão complicado conciliar as duas coisas.

<sup>8</sup> Os quatérnios podem ser considerados uma expansão natural dos complexos na medida em que preservam todas as propriedades de corpo a menos da comutatividade do produto. Prova-se que não existe tal extensão em três dimensões.

Tradicionalmente, ao conceito de número interessa a natureza do objeto, enquanto que a álgebra moderna, que é formalista, não se importa com tal natureza. Para essa visão tradicional, o conteúdo e não apenas a forma é o importante para delimitar uma noção “adequada” de número, havendo, portanto, uma metafísica no substrato dessa delimitação. No entanto, na álgebra moderna, tudo se resume a estruturas e relações entre estruturas; para a álgebra, duas raízes do mesmo polinômio irredutível são "a mesma coisa", são indiscerníveis, já que é possível trocar uma pela outra por meio de um automorfismo de um corpo apropriado. Mais ainda, do ponto de vista da álgebra moderna, duas estruturas isomorfas são consideradas o mesmo objeto algébrico, mesmo que a natureza de seus elementos seja diversa.

Esta concepção moderna de álgebra teve também forte influência a partir do *grupo Bourbaki*, que foi um coletivo de matemáticos que se formou no início do século XX com o objetivo de reformular e reorganizar os fundamentos da matemática. Embora sua influência tenha sido mais significativa nas décadas de 1930 a 1960, seu impacto no estabelecimento da racionalidade na matemática do século XX é amplamente reconhecido.

O grupo Bourbaki desenvolveu uma abordagem rigorosa, axiomática e estrutural para a matemática, buscando estabelecer um sistema formal e consistente para a disciplina. Seus trabalhos, principalmente o *Éléments de mathématique* (Elementos de Matemática), publicados em uma série de volumes, abrangiam diversas áreas da matemática, incluindo álgebra, análise, topologia e teoria dos conjuntos.

A influência deste grupo foi notável em várias frentes, dentre elas, no destaque ao rigor e ao formalismo, enfatizando a importância de rigor matemático, definições precisas e demonstrações formais em todas as áreas da matemática da época. Isso ajudou a estabelecer os padrões aceitos de rigor, precisão e coerência na área. Também houve uma busca pela unificação de definições e estruturas matemáticas, criando uma linguagem comum e generalizando resultados em diferentes áreas. Essa abordagem ajudou a criar conexões entre diferentes campos

da matemática e a promover uma nova compreensão da estrutura da matemática, como disciplina.

Além da influência do grupo na própria matemática, ele teve influências pedagógicas. Seus textos foram amplamente utilizados como referências em cursos de matemática, tanto em nível de graduação quanto de pós-graduação. Eles ajudaram a difundir a abordagem axiomática e rigorosa, contribuindo para a formação de matemáticos e professores de matemática em todo o mundo. Esta abordagem contribui para afastar uma conceitualização, ou ao menos a valorização de uma conceitualização metafísica de número, reforçando apenas a necessidade pragmática de definições ou construções axiomáticas de conjuntos numéricos específicos.

Voltando ao nosso exemplo anterior, do ponto de vista teórico, uma vez que a álgebra moderna não se preocupa com a essência ou natureza metafísica de seus objetos e sim somente com as operações entre eles, dizer que uma matriz é um número não é um problema. Mas, apesar disso, em nível mais elementar, e talvez até para um algebrista em sua informalidade, uma matriz não é vista como um número, afinal, “definir” número não é um problema matemático, e o que vem a ser ou não um número se constitui também socialmente em forma convencional, tanto que na Álgebra define-se a noção de “Corpo Numérico” que não inclui corpos de matrizes.

É interessante ressaltar que, apesar de não poder dizer com precisão o que é um número, podemos destacar que a natureza particular de um número é dada pelo contexto em que ele está inserido, tornando este conceito, então, não definível intrinsecamente. Por exemplo: o número 2 é um número natural? É um número complexo? Se respondermos “sim” para ambas as perguntas, então estamos falando de objetos de naturezas diferentes. A saber, o número 2, enquanto número natural é um número primo, isto é, só é divisível por 1 e por ele próprio. Já o número 2, enquanto número complexo, pode ser escrito como  $2 = (1 + i) \cdot (1 - i)$ , ou seja, ele não é divisível apenas por 1 e por ele próprio, aliás, nem faz sentido falar em número primo no contexto do corpo dos complexos, já que, em um corpo, todo número é divisível por qualquer número não nulo. Por outro lado, considerando o

número 2 como membro do anel dos inteiros complexos, isto é, os números complexos com parte real e parte imaginária inteiras, aí este número admite a mesma fatoração acima ( $2 = (1 + i) \cdot (1 - i)$ ), com o adendo de que tanto  $1 + i$  quanto  $1 - i$  são primos neste anel (numa acepção conveniente de “primo” que generaliza o caso elementar), fazendo com que 2 não seja primo. Isso mostra que, a propriedade “ser primo” não é algo intrínseco ao número 2 enquanto objeto, mas é uma propriedade que se dá a partir do momento em que esse número está inserido em um determinado contexto algébrico (CIFUENTES, 2010).

Aliás, as próprias estruturas numéricas tradicionais dependem do contexto onde estão inseridas. Por exemplo, os números naturais, vistos dentro do conjunto dos números inteiros, têm natureza diferente que os mesmos números vistos dentro dos conjuntos racionais ou reais.

Esses exemplos destacam que um número se constitui socialmente, tanto em um sentido humano quanto matemático, ou seja, sua construção se dá tanto por um fator social extrínseco, a partir da construção humana por meio das experiências daquilo que entendemos por número e guiados pela nossa intuição, quanto por meio de um fator intrínseco, ligado ao contexto matemático em que este número está inserido e pelas relações matemáticas que se formam a partir de noções já conhecidas em outros contextos quando transportadas a uma nova ideia. E estas qualidades “extrínseco” e “intrínseco” também são dinâmicas, pois são contextuais, dependem de um contexto social e/ou matemático.

Pela discussão anterior, podemos aventar a ideia de que o conceito de número é ampliado pelos jogos de linguagem que admite. Mais especificamente, um número, colocado num contexto puramente linguístico, não tem identidade própria, ele adquire uma identidade quando colocado num contexto semântico que lhe atribui um certo significado. Essas diversas “colocações em contextos semânticos” podem ser consideradas jogos de linguagem que movimentam e ampliam a concepção de número. Por exemplo, diante da pergunta de se as soluções da equação  $X^2 + \underline{1} = \underline{0}$  são números, só podemos responder semanticamente associando a essa equação um campo de soluções: no corpo dos números complexos as soluções são  $X = \pm i$ , no anel dos quatérnios são soluções

todos os vetores  $X = a_1i + a_2j + a_3k$  com  $\|X\| = 1$ , mais ainda, no conjunto das matrizes reais  $2 \times 2$  são soluções as seguintes:

$$X = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Interpretando, neste caso,  $\underline{1}$  como a matriz identidade e  $\underline{0}$  como a matriz nula. Esta última solução, aparentemente estranha nas matemáticas elementares, não se afasta muito das soluções complexas se levamos em conta que os números complexos da forma  $a + bi$  admitem uma representação (isomórfica) com as matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Todas essas manipulações semânticas podem ser consideradas jogos de linguagem que perfilam a nossa concepção de “número” ampliando seu significado.

Outro exemplo interessante é o de “ângulo”. Vianna e Cury (2001) trazem uma discussão sobre definições de “ângulo” contidas em livros didáticos. Os autores apresentam definições que recorrem a semirretas, regiões do plano ou outras ideias de cunho geométrico, definições que incluem ângulos nulos e rasos bem como definições que não aceitam ângulos nulos e/ou rasos; das mais simples às mais complexas, apelando a um certo senso comum.

Ao discutir sobre a “correção” da noção de definição, a respeito de ângulo, Vianna e Cury (2001) enfatizam seu uso em um determinado contexto:

Em filosofia, [...], poderíamos dizer que uma definição é qualquer tentativa de resposta à pergunta: o que é isso? Ou, se preferirmos, poderíamos indagar ao próprio conceito: o que você é? E desse modo uma definição dependerá do uso que se pode fazer daquilo que se pretende definir. Assim, para encaminhar nossas discussões, vamos aceitar que “definir” é equivalente a restringir ou limitar o uso de um termo a um contexto determinado. [...]

Assim, adotado o nosso critério para dar definições, não existiria uma “essência”, um significado “correto” e aplicável a todas as significações para a palavra ângulo. (2001, p. 8-9)

Mesmo no caso de precisar dar definições de alguns objetos matemáticos, devemos reparar que elas são, em sua maioria, apenas convencionais, não tendo caráter de necessidade lógica, e sim de necessidade estética como, por exemplo, permitir uma maior “harmonia” num certo contexto teórico. Por exemplo, podemos definir retângulo de modo a incluir os quadrados nessa definição ou não os incluir (exigindo que um retângulo deva ter lados não paralelos diferentes), porém, a primeira definição permite, dentre outras coisas, simplificar (ou harmonizar) muitas demonstrações.

Para as matemáticas modernas, muitos objetos matemáticos não precisam ser definidos, basta torná-los operativos despidendo-os de todo conteúdo metafísico. Assim, a noção, originalmente metafísica, de “infinito” torna-se um objeto matemático quando da possibilidade de medi-lo através da noção de “cardinalidade”. Também, na geometria não precisamos definir ângulo, basta saber medi-lo e isto se consegue através da noção de “radiano”.

Imre Lakatos, matemático e filósofo das matemáticas já mencionado, que também se contrapunha ao neopositivismo do Círculo de Viena, na sua obra *Provas e Refutações: a lógica da descoberta matemática* (1978), traz, como exemplo, uma abordagem historicista sobre a conjectura de Euler, que afirma inicialmente que, para todo poliedro no espaço tridimensional, vale a relação  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces do poliedro. Sua abordagem ilustra que, entre os matemáticos, a definição de poliedro foi mudando com o tempo, tendo significados diferentes para Cauchy ou para Poincaré no século XIX. Desta forma, a dificuldade em definir um poliedro gerava contraexemplos para a conjectura, o que levava não à sua total refutação, mas à necessidade de “melhorar” a definição de poliedro, englobando primeiramente a ideia de “convexo” e posteriormente de “simplesmente conexo” (MOLINA, 2001), o que permite ainda a generalização dessa noção (de poliedro) para dimensões maiores do que 3.

Nosso objetivo, aqui, não é comparar esses autores (Wittgenstein e Lakatos), mas sim, com estes exemplos, destacar o caráter dinâmico, no âmbito social e

matemático que, para eles, um conceito tem, caráter que pode mudar tanto ao longo do tempo quanto de acordo com seu uso em contextos diferentes e, portanto, não possui barreiras nem limites claros, superando o limite do citar, informar e avançando para o de “formar”. Do mesmo modo, vemos que esta dinamicidade também se dá por razões intrínsecas, inerentes às próprias naturezas das matemáticas.

Assim, sempre que falarmos da formação de um conceito, devemos dar igual ênfase à forma quanto à ação (processo de forma-ação), pois esta forma deve ser vista como dinâmica, em movimento e em constante construção e reconstrução.

“Definir”, desta maneira, é “fazer um recorte”, “tirar uma foto” de um conceito, ou seja, “dar um fim”, dar limites, criar um modelo a ser perseguido, copiado. Assim, uma definição, de forma alguma, pode ser confundida com o conceito em si, mas tem seu valor em determinados contextos e com finalidades específicas, geralmente práticas.

Vale reforçar que, sem uma definição bem colocada, não existe matemática possível do modo como é feita a partir do século XX. Os conceitos guiam as descobertas, mas provas só podem ser feitas com as definições, ou seja, só é possível obter resultados com as definições.

Esta é, de certa maneira, a concepção moderna para “definição”, donde, ao definirmos um termo:

[...] não existe uma essência privilegiada do termo (nem nominal nem real), mas existem possibilidades diferentes de defini-lo para fins diferentes; todas as possibilidades podem, embora em graus diferentes, ser declaradas essenciais aos seus fins. Assim, pode-se considerar D[efinição] qualquer restrição ou limitação do uso de um termo em determinado contexto. (ABBAGNANO, 2007, p. 248)

### 3.2 A NATUREZA DOS CONCEITOS: DEFINIÇÃO, EXPANSÃO E LIMITAÇÕES

Sobre “conceito”, de um ponto de vista filosófico, pode-se dizer que “é”,

Em geral, todo processo que torne possível a descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis. Assim entendido, esse termo tem

significado generalíssimo e pode incluir qualquer espécie de sinal ou procedimento semântico, seja qual for o objeto a que se refere, abstrato ou concreto, próximo ou distante, universal ou individual, etc. [...] Embora o C[onceito] seja normalmente indicado por um nome não é o nome, já que diferentes nomes podem exprimir o mesmo C[onceito] ou diferentes conceitos podem ser indicados, por equívoco, pelo mesmo nome. O C[onceito], além disso, não é um elemento simples ou indivisível [...]. O C[onceito] tampouco se refere necessariamente a coisas ou fatos reais, já que pode haver C[onceito] de coisas inexistentes ou passadas, cuja existência não é verificável nem tem um sentido específico. Enfim, o alegado caráter de universalidade subjetiva ou validade intersubjetiva do C[onceito] na realidade é simplesmente a sua comunicabilidade de signo linguístico: a função primeira e fundamental do C[onceito] é a mesma da linguagem, isto é, a comunicação. (ABBAGNANO, 2007, p. 175)

Isso revela como o “conceito”, em sua amplitude, abrange uma variedade de domínios cognitivos, da teoria à prática, da linguagem à matemática. Ele serve como um meio fundamental para a compreensão e comunicação de fenômenos, independentemente de sua natureza concreta ou abstrata. Isso fica evidente na discussão sobre números como base das matemáticas, onde a definição abrangente de conceitos pode se tornar desafiadora, destacando a complexidade e a importância de se compreender o papel do conceito na busca pelo entendimento do mundo que nos rodeia. Em essência, o conceito desempenha um papel crucial como um elo unificador na aquisição e transmissão de conhecimento, independentemente da complexidade ou abstração do assunto em questão.

O exemplo dado anteriormente por Wittgenstein sobre “número” é bastante significativo para nós por dois motivos. Primeiro porque é um exemplo fundamental. Mesmo tendo consciência de que as matemáticas modernas não se resumem apenas a números, não podemos deixar de reconhecer que os números naturais são a base das matemáticas – tudo o que entendemos por matemáticas parte diretamente ou indiretamente deles. Segundo porque é um exemplo extremo. Como vimos, dar uma definição razoável de número, que englobe tudo aquilo que entendemos por número não é tarefa fácil, se não impossível – todas as tentativas se mostraram falhas.

Então, podemos dizer que o conceito de “número”, como entendemos hoje, tanto por sua natureza, mas principalmente por conta de suas expansões, não pode

ser traduzido por meio de uma definição expressa em uma linguagem.

No entanto, dar definições daquilo que se fala, inclusive de conceitos, quando possível, é parte essencial da construção de teorias matemáticas. No caso dos números, nas teorias matemáticas modernas, os autores partem do pressuposto de que já há um “entendimento geral” do que é um número e não os definem (assim como “conjunto” ou “ponto” na geometria euclidiana) e, a partir daí, formulam suas novas definições e proposições.

O que é essencial para nós, é entendermos que “conceito” e “definição” são coisas diferentes. Enquanto o conceito não possui uma fronteira fixa, pode estar em constante expansão e modificação, a definição, por já ter um objetivo, uma finalidade, *necessita*, muitas vezes, ter uma rigidez específica, mas deve ser suscetível a modificações.

Com relação aos “números naturais”, como discutimos anteriormente, os axiomas de Peano trazem para eles uma delimitação. Da mesma forma, podemos definir “número inteiro”, “número racional”, etc. No entanto, os axiomas de Peano não definem “número” e, como vimos, de acordo com os Teoremas de Gödel, não é possível “axiomatizar” “número”, dar uma delimitação, uma definição para este conceito.

Porém, para outras noções matemáticas, podemos dar definições “satisfatórias”. A discussão apresentada por Vianna e Cury (2001) sobre definições de ângulos, presentes em livros didáticos de matemáticas, é interessante para nós, uma vez que exemplifica que, por meio de definições matemáticas distintas, que delimitam a noção de ângulo para determinado uso, múltiplas significações podem ser formuladas. Isso é um exemplo de como, dentro das matemáticas, a significação pode se dar a partir do uso, como defendido pelo (segundo) Wittgenstein. Desta forma, mesmo que uma definição não seja capaz de capturar toda a essência metafísica de um objeto matemático, ela permite, por meio de seu uso, possibilitar significações.

Na discussão mencionada, Vianna e Cury (2001) apresentam um total de 14 definições que recorrem a semirretas, onde 5 destas aceitam ângulos nulo e raso, 5 não aceitam ângulos nulo e raso, 2 aceitam ângulo nulo, mas não aceitam ângulo

raso e 2 não aceitam ângulo nulo, mas aceitam ângulo raso. Também apresentam 8 definições que recorrem a regiões do plano e outras 3 definições que recorrem a outras ideias. Não traremos todas estas definições aqui, mas, a fim de ilustração, podemos destacar algumas:

Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a origem comum (Quintella, 1950, p. 139, 3º ginásial).

[...]

Ângulo é a reunião de duas semi-retas não-colineares e de mesma origem (Pompeu e outros, s/d, p. 85, 7ª série).

[...]

Ângulo é uma figura geométrica plana, formada por duas semi-retas, não opostas e de mesma origem (Mori e Onaga, 1998, p. 229, 6ª série).

[...]

Duas retas  $r$  e  $s$  que se cortam em um ponto  $A$ , dividem um plano em quatro regiões. Cada uma dessas regiões recebe o nome de ângulo (Pierro Neto, s/d, p. 258, 1ª série ginásial).

[...]

Ângulo é a abertura formada por duas rectas que partem do mesmo ponto (Collecção FTD, 1925, p. 8). (VIANNA, CURY, 2001, p. 24 – 25)<sup>9</sup>

Feito isso, os autores discutem sobre uma possível “correção” das definições e, para tal, antes, trazendo outros autores, refletiram sobre o que vem a ser uma definição.

Não temos por objetivo listar classificações nem entrar na terminologia apresentada por Vianna e Curry (2001) com base em outras referências, mas gostaríamos de destacar a importância dada pelos autores para a distinção entre a definição e aquilo a qual ela se refere. Os autores julgam

[...] importante sublinhar que essa distinção entre o que tentamos definir e as palavras que usamos para fazê-lo não é consensual [é uma convenção] e, se enveredássemos pela filosofia, ela nos remeteria a um emaranhado de problemas que são muito antigos e que não encontram solução no sentido de que uma única resposta satisfaça a todos os pontos de vista. (p. 29)

<sup>9</sup> Além das devidas citações, Vianna e Cury destacaram a série para a qual o material era destinado.

Desta forma, os autores, conforme já mencionamos, entendem que definir está ligado a dar uma restrição, dar uma limitação ao uso de um termo, ou conceito, em um contexto determinado. Além disso, destacam que, adotado este critério para definições “[...] não existiria uma “essência”, um significado “correto” e aplicável a todas as significações para a palavra ângulo”. (VIANNA, CURY, 2001, p. 30)

Ernest (1991, p. 250, *apud* VIANNA, CURY, 2001, p. 34) mostra que a visão do que vem a ser uma definição, dada por um professor, está ligada à própria concepção de matemática (em singular) que este tem. O autor aponta três possíveis filosofias da matemática hegemônica que, desta forma, influenciam suas práticas pedagógicas: a visão instrumental, a platônica e a de resolução de problemas.

No primeiro caso, a Matemática é vista como “uma acumulação de fatos, regras e habilidades para serem usados na busca de algum objetivo externo” [concepção wittgensteiniana de atribuir resultados através do uso].

A concepção platônica considera a Matemática como um corpo estático e unificado de conhecimento absoluto. A visão de resolução de problemas é dinâmica, aceitando que a Matemática está em contínua expansão e evolução.

Desta forma, se um professor vislumbra a Matemática como um conjunto de regras, tenderá a escolher as definições que dizem como fazer determinada operação, ou seja, as que apresentam passo a passo os itens de que ele necessita para a sua construção. Além disso, escolhida uma definição, essa será tomada como “certa”, como uma regra a ser seguida.

Do mesmo modo, se um professor aceita que o conhecimento matemático é estático, que as coisas *são* ou *não são*, ele terá a tendência a aceitar as *verdades* enunciadas nos livros como absolutas; dessa forma, terá dificuldade em adaptar uma definição ao contexto em que atua, pois sua postura “engessa” tal conhecimento.

Finalmente, se o professor crê que a Matemática pode ser expandida e modificada, que é uma ciência falível e corrigível como todas as outras, então ele poderá dispor de uma definição e remodelá-la de acordo com as necessidades de sua turma. (VIANNA, CURY, 2001, p. 32, grifos dos autores)

Gaston Bachelard (1884 – 1962), um filósofo da ciência da primeira metade do século XX, principalmente em sua obra *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*, nos fornece outras interpretações dos casos platônico e instrumental das matemáticas, se referindo a elas de forma singular, do ponto de vista da filosofia, complementando o ponto de

vista didático de Ernest. Para Bachelard (1996), uma concepção platônica das matemáticas exigiria de seus objetos ter uma substância, uma certa concretude, que aplicada à noção de ângulo exigiria dar uma definição que “delimite seus contornos” para ser susceptível de visualização. No entanto, para uma abordagem instrumental das matemáticas, bastaria, no caso da noção de ângulo, fornecer uma forma de medi-lo. No caso dessa noção, o conceito de radiano permite essa instrumentalização. Isso mesmo aconteceu historicamente quando, no século XIX, as matemáticas incorporaram para si a noção de infinito através do conceito de cardinalidade, que é a sua medida.

Sem querer entrar numa categorização do que vem a ser as matemáticas, com base em algumas das filosofias listadas, precisamos, de antemão, destacar que não vimos estas filosofias como meras opções de escolha. No que segue, defenderemos que o entendimento filosófico acerca do que vem a ser as matemáticas traz implicações pedagógicas significativas do ponto de vista formativo, e uma visão de matemáticas enquanto ciências falíveis tem muito mais a contribuir para tal. Além do mais, esta visão é coerente com o que, até então, mostramos entender por conceito e definição.

#### 4 PENSAMENTOS MATEMÁTICOS: UMA JORNADA DINÂMICA

No capítulo 1, baseados em teóricos como Acosta (2016), refletimos sobre as necessidades econômicas e ambientais de construirmos novas visões de mundo, novas formas de lidar com os recursos naturais e com as relações humanas; isto é, refletimos sobre a necessidade de construirmos novas racionalidades.

Entendemos que as matemáticas, enquanto linguagens e áreas de conhecimento, são fundamentais na formação, manutenção e transformação da forma como pensamos, na racionalidade humana. No capítulo 2, mostramos que, apesar de comumente se defender uma noção estática, exata e puramente racionalista, partindo do pressuposto de uma razão universal da matemática hegemônica, esta possui um caráter dinâmico e depende de concepções e conceitos construídos pelo ser humano com base em suas experiências de vida, o que já aponta para a possibilidade de construções de matemáticas alternativas. Além disso, mostramos que historicamente a própria matemática hegemônica foi se modificando e se reconstruindo. Por isso, defendemos referir-se às matemáticas no plural.

Desta forma, acreditamos ser necessário repensar a concepção singular de matemática, bem como incentivar, por meio da educação, a construção de novas matemáticas, pois acreditamos que assim poderíamos criar subsídios epistemológicos para a construção de novas racionalidades.

Buscando um aprofundamento maior de nossa investigação no âmbito da educação matemática, no capítulo anterior discutimos a noção de “conceito”, com base principalmente nas observações teóricas de Wittgenstein.

Wittgenstein, ao reformular suas ideias, repensou a linguagem de uma forma mais ampla do que anteriormente, de maneira não restrita a significados puramente lógicos. Ele defendeu uma linguagem rica em significados, construídos socialmente a partir de uma forma de experiência. Esta concepção de linguagem de Wittgenstein abre para nós uma discussão análoga àquela apresentada por Platão no diálogo *Mênon* sobre se a virtude poderia ser ensinada.

Discutimos uma noção de conceito como algo dinâmico e tendo em sua dinamicidade o aspecto de não possuir limites bem definidos, tornando-se difuso e ganhando sua significação por meio de seu uso socialmente, a partir da experiência humana. Esta noção, reforçada pela epistemologia da matemática feita por Lakatos, nos levará a defender a ideia de que conceitos matemáticos não podem ser ensinados na mesma concepção de ensino que estabeleceremos futuramente.

Neste capítulo, abordaremos a noção de "pensamento matemático" de forma aprofundada. O que buscamos fazer aqui é demonstrar que o "pensar matematicamente" também possui um caráter dinâmico e social, construído também por meio de uma certa vivência, experiência matemática, e, portanto, também não poderia ser ensinado na mesma concepção de ensino mencionada.

#### 4.1 O PENSAR MATEMATICAMENTE

Cifuentes (2016, p. 49), em alusão a uma resposta de Albert Einstein ao físico Robert Thornton, nos traz a ideia de “floresta matemática”. Thornton indagou Einstein, em 1944, sobre a importância da filosofia e história da ciência no ensino da física, e Einstein respondeu que um conhecimento sem base histórica e filosófica seria como conhecer muitas árvores, no campo da ciência, porém nunca ter “percebido” uma floresta. Cifuentes, nesse sentido, diferencia um ensino matemático baseado apenas em definições, algoritmos, técnicas, lógica e demonstrações, colocados na forma de conteúdos, de uma educação matemática formadora do espírito e do pensamento matemático. Para tentar entender o que vem a ser o pensamento matemático nas diversas matemáticas ou o “pensar matematicamente” vamos começar pelo “pensamento numérico”.

A contagem surge como invenção humana para controlar quantidades, por meio da relação biunívoca, como por exemplo, relacionando a quantidade de ovelhas de um rebanho com a quantidade de pedras em um saco. Não é muito diferente de quando utilizamos o ábaco associando quantidades para fazer operações matemáticas.

A contagem, o ábaco e suas regras constituem o *cálculo manual*. Ele é a técnica operacional que o trabalho humano criou para controlar a quantidade da matéria incorporada ao processo produtivo como objeto de trabalho. O *cálculo manual* é a técnica que fornece a plataforma material, o real humano, para o desenvolvimento da linguagem matemática. (MOURA, *et al.*, 2016, p.280-281, grifos dos autores)

Os autores Moura, *et al.* (2016, p. 280-281) enfatizam que, enquanto essa correspondência se mantiver no âmbito do concreto, no âmbito da linguagem técnica, ela não penetra na linguagem das matemáticas, se mantém apenas como técnica, ou como algoritmo. Deste ponto de vista, em nosso entendimento, se mantém como um conteúdo, que pode perfeitamente ser ensinado, às vezes como uma receita, mas ainda não constitui o pensamento numérico, que se dá pela “abstração” (p. 291). Ou seja, o pensamento numérico só se distingue da técnica de contagem quando o número se dá como um objeto matemático, isto é, abstratamente, que independe dos objetos concretos que representa. Também vale ressaltar novamente que, ao falarmos de “ensinar a técnica ou algoritmo” não estamos interpretando o “ensinar” como “treinar”, ou seja, o puramente mecânico. Entendemos que este ensino/aprendizagem já traz aspectos cognitivos que vão além de um mero treino mecânico, mas, por si só, ainda não constitui um pensamento matemático, ainda não movimenta conceitos com a dinamicidade necessária para tal.

Os autores (MOURA, *et al.*) destacam que

a linguagem técnica é a plataforma necessária para que se forme, com base nela, o pensamento numérico e a linguagem matemática. Mas ela, mesmo com sua cadeia operacional de simplificações sucessivas da contagem, *não constitui ainda pensamento numérico ou linguagem matemática*. (2016, p. 284, grifos dos autores)

Assim, a técnica, enquanto conteúdo, é ingrediente na formulação dos pensamentos matemáticos, mas, ela, por si só, não é o suficiente para tal formulação. É importante destacar também que, apesar de ser imprescindível para a constituição do pensamento numérico, os algoritmos podem ser um empecilho para o entendimento do processo envolvido, principalmente quando o ensino de

determinado algoritmo, em sua forma representacional, se antepõe ao cálculo manual e é desprovido de significado concreto no campo da contagem.

No caso dos diversos sistemas numéricos, temos ainda o problema, de cunho epistemológico, da unicidade da representação (cuja complexidade já vislumbramos no caso dos números complexos com suas representações cartesiana e matricial). Com os números naturais, tem-se uma unicidade representativa (fixando a base de numeração): um número é representado de uma única maneira como uma sequência de algarismos. Já nos números racionais (positivos, por simplicidade), cada número pode ser representado de maneira única<sup>10</sup>, fixada uma base de numeração (por exemplo na base 10, é a sua representação decimal), embora haja muitas frações que têm mesma representação. Essas diversas frações são ditas equivalentes.

Por exemplo, o número “meio” pode ser representado pelas frações equivalentes  $1/2$ ,  $2/4$ ,  $3/6$ ,  $4/8$ , etc., mas só pode ser representado, na forma decimal, por  $0,5$ <sup>11</sup>

Pensando no significado das frações como proporção, há várias frações que respeitam a mesma proporção, representadas pela fração chamada reduzida, isto é, quando numerador e denominador não têm fator comum. E o mesmo vale para outros significados de frações (divisão, parte-todo, etc.). Assim, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes, podemos nos beneficiar dessa ideia para encontrar frações equivalentes às anteriores, mas que possuem denominadores iguais e, com isso, recaímos a um caso que já deve ter sentido para os educandos.

Entendemos que a fórmula de adição de frações com denominadores não necessariamente iguais ( $a/b$  e  $c/d$ ), quando dada apenas pela expressão

<sup>10</sup> Na verdade, nos números racionais, mesmo com a representação decimal, fixada uma base de numeração, já é possível apresentar uma dubiedade de representação. Por exemplo, podemos representar o número 1 pela dízima periódica  $0,999....$  De qualquer forma, do ponto de vista pedagógico, em níveis mais elementares esta dubiedade costuma ser ignorada, essencialmente porque envolve uma compreensão sobre “o infinito”.

<sup>11</sup> Ou  $0,4999 ....$

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd,$$

ou outra equivalente utilizando o *mmc* de  $b$  e  $d$ , é uma definição puramente algorítmica, uma vez que é só uma fórmula para adição de frações que, quando ensinada diretamente, desprezando sua gênese, pouco tem a contribuir para sua compreensão nos pensamentos matemáticos.

Podemos resgatar algumas ideias relacionadas à adição de frações a fim de construir uma ou mais formas de somar frações. Para partir do “concreto”, pode-se utilizar duas frações como exemplo, digamos  $1/3$  e  $1/4$ . Assim, pode-se criar frações equivalentes a ambas, (a equivalência consiste em atribuir a ambas as frações um mesmo significado intuitivo, por exemplo na relação parte todo):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} = \frac{8}{24} = \frac{9}{27} = \frac{10}{30} = \frac{11}{33} = \frac{12}{36} = \dots \\ \frac{1}{4} &= \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} = \frac{7}{28} = \frac{8}{32} = \frac{9}{36} = \frac{10}{40} = \frac{11}{44} = \frac{12}{48} = \dots \end{aligned}$$

E, observando que podemos utilizar as frações com denominadores 12, 24, 36, ... para somarmos  $1/3$  e  $1/4$ , como por exemplo

$$\frac{8}{24} + \frac{6}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \left( = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \right).$$

A partir daí os próprios educandos podem ser capazes, com o auxílio do educador, de “induzir um algoritmo” da soma de frações por meio das fórmulas citadas, e mesmo que não o sejam capazes, o ensino de tal definição (de adição de frações) terá sentido desde que o educador, ao ensiná-lo, enfatize essa sua gênese a partir da ideia de substituir as frações por outras equivalentes.

O educador, de alguma forma, seja por desenhos, *softwares* ou materiais manipuláveis, deve buscar uma maneira de contribuir para que o educando “visualize” tais frações e o porquê se faz necessário que os denominadores sejam

iguais para poder realizar a adição (tal processo já deve ser previamente realizado com soma de frações com denominadores iguais, dando sentido à adição de frações). O educador também pode, ou deve, dar a oportunidade para que os educandos busquem criar outras técnicas, promovendo o desenvolvimento dos pensamentos matemáticos deles, indo, assim, muito além da mera assimilação de processos algorítmicos.

Neste caso, o *definir* pode se tornar uma ação, uma construção, uma forma de experiência matemática, uma vez que se dá por um processo, expandindo o conceito de soma de frações, que até então faria sentido apenas para frações com denominador comum, tendo o conceito de proporção como “ingrediente qualitativo” para tal construção.

Para o caso específico de definições em geometria, Cifuentes e Franco (2017, p. 10) apontam que as geometrias podem ser abordadas de forma “qualitativa” em contraponto à abordagens puramente “quantitativas”. Para exemplificar, partem da noção de distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Na versão “quantitativa”, a distância entre dois pontos  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  é dada por

$$d(P, Q) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Esta é a chamada “distância euclidiana-pitagórica”, que surge da definição de norma euclidiana de  $P$ , dada por

$$\|P\| = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, entendemos que a distância entre  $P$  e  $Q$  se dá por

$$d(P, Q) = \|Q - P\|.$$

Os autores (p. 11-12) discutem que a distância entre dois pontos pode ser apresentada “qualitativamente”, isto é, sem levar em consideração a fórmula específica desta métrica, mas sim, por exemplo, a partir de uma noção abstrata de distância que será dada por suas propriedades “básicas” ou axiomas, como será mostrado a seguir, onde a condição de serem “básicas” das propriedades escolhidas depende do nível de generalidade pretendido. Em especial, uma definição qualitativa de norma, por exemplo, que dará origem a uma noção qualitativa de distância, seria a seguinte (p. 13-14):

Seja  $E$  um espaço vetorial (que pode ser o plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ ). Para todo  $u, v \in E$  e  $t \in \mathbb{R}$ , definimos uma norma em  $E$  como uma função  $\| \cdot \|: E \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo:

1.  $\|u\| \geq 0$ ;
2.  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ;
3.  $\|tu\| = |t| \|u\|$ ;
4.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

Estes axiomas definem uma norma em  $E$ , mas, a diferença neste caso é que, a partir deles, não temos apenas a fórmula euclidiana anterior que satisfaz tais propriedades em  $\mathbb{R}^2$ . Temos, entre outras, em especial, as chamadas  $p$ -normas, definidas pela expressão

$$\|P\|_p = (|x_1|^p + |y_1|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

para  $p \geq 1$ .

Assim, se pensarmos na distância entre  $P$  e  $Q$  como a norma de  $Q - P$  em  $\mathbb{R}^2$ , temos uma definição de distância diferente para cada  $p \geq 1$ :

$$d_p(P, Q) = (|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Os autores defendem a utilização do *Software GeoGebra 3D* como recurso pedagógico para visualizar diversas figuras na geometria decorrente dessas novas fórmulas para a noção de distância, em particular, a “circunferência” planar dada a partir de cada  $p$ -norma, uma vez que a circunferência é definida qualitativamente como o conjunto de pontos que estão a uma “mesma distância” de um ponto fixo.

Se mudarmos nossa noção quantitativa de distância, ou seja, sua fórmula concreta, a forma gráfica da circunferência passa a ser diferente também. Além disso, os autores (p. 22) “quebram o paradigma” de que  $\pi$  é um número fixo (3,14 ...), definindo-o qualitativamente como a razão entre o comprimento da circunferência e seu respectivo diâmetro, vendo-o assim como um resultado, dependendo apenas da métrica tomada. Mais uma vez, mudando a fórmula para medir distância, muda-se o valor quantitativo de  $\pi$ , mas não muda sua forma qualitativa.

Desta maneira, tem-se que:

O ensino da matemática na Educação Superior pode ou deve partir do concreto rumo ao abstrato visando o despertar, ou melhor, a liberação da imaginação no campo da matemática. Intuição e imaginação, então, fazem parte essencial de nossa concepção de matemática, uma concepção dinâmica, que considera a matemática como atividade, como forma de pensar, que incorpora também formas de argumentação que escapam ao puramente lógico-dedutivo. (CIFUENTES, FRANCO, 2017, p. 10)

George Pólya (1887 - 1985), matemático e educador, sem fazer diferenciação entre ensino e educação como discutiremos aqui, já destacava aspectos ligados às matemáticas que distanciam do meramente procedimental:

[...] o pensamento matemático não é puramente “formal”, não está relacionado apenas com axiomas, definições e provas rígidas, mas também com muitas outras coisas: generalização a partir de casos observados, argumentos indutivos, argumentos a partir de analogia, reconhecimento de conceitos matemáticos, ou sua extração a partir de situações concretas. (PÓLYA, 1963, p. 606)<sup>12</sup>

<sup>12</sup> Do original: [...] mathematical thinking is not purely “formal”; it is not concerned only with axioms, definitions, and strict proofs, but many other things belong to it: generalizing from observed cases, inductive arguments, arguments from analogy, recognizing a mathematical concept in, or extracting it from, a concrete situation.

Para esse autor, o conhecimento se constitui a partir de três fases: exploração, formalização e assimilação.

A primeira fase, a exploratória, está mais próxima da ação e da percepção e desenrola-se a nível mais intuitivo, mais heurístico.

A segunda fase, a da formalização, ascende a um nível mais conceitual, introduzindo terminologia, definições, provas.

A fase de assimilação vem por último: ela implica a tentativa de perceber a “essência” das coisas. [...] Esta fase prepara o caminho para as aplicações por um lado e para generalizações maiores pelo outro. (p. 608 - 609)<sup>13</sup>

Percebemos, assim, que o concreto e o abstrato, dentro dos pensamentos matemáticos, se tornam relativos. O abstrato precisa ganhar certa “concretude intelectual”, penetrando no âmbito da intuição matemática para, a partir daí, dar origem à novas formulações. Pólya já entendia que, de certa forma, esta concretude se dá em um nível conceitual.

Em (Moura, *et al.*, 2016), os autores, diferenciando a contagem do pensamento numérico, também destacam a importância da *imaginação*:

A contagem gera a correspondência biunívoca, que, no cálculo manual, permanece no campo visual e no alcance do toque e, no cálculo escrito, permanece subentendida. O aspecto matemático (o pensamento numérico) não está na cadeia causal técnica que tem como pressuposto a contagem. Ele se faz no desenvolvimento algébrico que toma essa técnica e, com base nela, faz a sua abstração por meio da produção mental de vários modelos numéricos, tantos quantos forem necessários para a aplicação generalizada em todas as situações da vida. O número é o pensamento da quantidade abstraído de qualquer referência concreta. Ele resulta de um desenvolvimento da intuição até a produção de uma plasticidade imaginativa que captura instantaneamente as quantidades por meio de modelos mentais. Ao desenvolver essa imaginação, a mente

<sup>13</sup> Do original: A first exploratory phase is closer to action and perception and moves on a more intuitive, more heuristic level.

A second formalizing phase ascends to a more conceptual level, introducing terminology, definitions, proofs.

The phase of assimilation comes last: there should be an attempt to perceive the "inner ground" of things, [...] this phase paves the way to applications on one hand, to higher generalizations on the other.

torna-se capaz de *pensar numericamente*, isto é, de aprofundar a técnica da contagem até a abstração *número*. (2016, p. 304, grifos dos autores)

Assim, também a intuição ganha papel importante na formação dos pensamentos matemáticos, principalmente porque entendemos que, por meio dela, um conceito, que se dá abstratamente, ganha uma dinâmica especial, passando a ter certa concretude para a formação de outros objetos ou conceitos matemáticos. O número tem sua formação pela abstração e, a partir daí, ganha certa substância, certa concretude, não física, mas sim intelectual. Esta é a chave para a formação do “pensamento algébrico”. Vamos exemplificar.

Moura, *et al.* (2016, p. 283) entendem o “cálculo” como “a técnica de permanente simplificação do controle das quantidades”, por exemplo, a simplificação da contagem é a adição. Se contarmos os objetos em grupos iguais, ao juntarmos, temos a multiplicação. A adição  $4 + 4 + 4$  pode ser simplificada como  $3 \times 4$ . Da mesma forma, a multiplicação também pode ser simplificada, dando origem à potenciação:  $4 \times 4 \times 4$  pode ser simplificada por  $4^3$ .

A partir do momento em que a adição, a multiplicação e a potenciação ganham caráter abstrato, que os pensamentos matemáticos movimentam, ou seja, são operações numéricas que, mesmo motivadas pela contagem, independem de objetos concretos, apenas do “objeto abstrato” número, pode-se olhar para as relações entre estes objetos e as operações, surgindo, assim, propriedades como:

$$\begin{aligned} i. \quad & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ ii. \quad & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \end{aligned}$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $m$  e  $n$  são números naturais, pois ainda remetem à ideia de contagem.

Com base nessas propriedades, e na noção de raiz quadrada de um número, podemos também representar uma raiz por potências fracionárias e expandimos, assim, o nosso conceito de multiplicação também para números irracionais. Com efeito, se quisermos representar  $\sqrt{a}$ , para  $a$  um número natural, por uma potência, digamos  $a^m$ , e que as propriedades anteriores ainda valessem nesta situação,

teríamos o seguinte: pela propriedade (i), como  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ , pois  $\sqrt{a}$  é solução da equação  $x^2 = a$ , então  $a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m} = a^1$  e, portanto,  $m$  deve ser  $1/2$ ; pela propriedade (ii), temos ainda que  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a^{1/2} \cdot b^{1/2} = (ab)^{1/2} = \sqrt{ab}$ . Desta forma, podemos “descobrir”, por exemplo, que  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$  é igual a  $\sqrt{6}$ .

Generalizando, se definimos  $\sqrt[n]{a}$  como o único número real positivo tal que  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ . Por definição temos que  $(\sqrt[n]{ab})^n = ab$  e, para  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  e  $(\sqrt[n]{b})^n = b$ , pela propriedade (ii), temos que  $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$ . Daí,  $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{ab})^n$  e  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ .

Note que essa multiplicação  $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})$  não faria o menor sentido no âmbito da contagem, não tem como ter “raiz de dois parcelas de raiz de três objetos”. No entanto, quando o número passa a ganhar certo caráter concreto intelectual, por meio da intuição, podemos generalizar definições, propriedades e formar novas abstrações.

Por outro lado, se quisermos discutir acerca de raiz cúbica, podemos considerar o exemplo da  $\sqrt[3]{-8} = -2$ , uma vez que  $(-2)^3 = -8$ . Repare que se quisermos escrever  $\sqrt[3]{-8}$  por meio de uma potência de expoente fracionário, teríamos, por um raciocínio análogo ao anterior,  $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3}$  e essa escrita advém da propriedade (i). Porém, aplicando a propriedade (ii), temos, por um lado:

$$(-8)^{1/3} = (-8)^{2/3} = [(-8)^2]^{1/6} = (64)^{1/6} = 2$$

considerando  $(64)^{1/6} = \sqrt[6]{64}$ . Ou também, poderíamos ter

$$(-8)^{1/3} = (-8)^{(1/2) \cdot (2/3)} = [\sqrt{-8}]^{2/3}$$

e esta operação não está definida no conjunto dos números reais. Isso mostra porque, por exemplo, não poderíamos generalizando  $\sqrt[n]{a}$  como um número real (não necessariamente positivo) tal que  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ . E as próprias generalizações

algébricas, tem suas limitações impostas pela própria linguagem e sentidos que atribuímos aos números.

Por motivo semelhante, definimos o número complexo  $i$  como um “número” tal que  $i^2 = -1$ . Esta definição não traz uma resposta do que é o número  $i$ , de um ponto de vista de sua “essência metafísica”, mas permite seu uso, trazendo assim significações para ele, dentro de um contexto em que propriedades matemáticas já conhecidas, como as mencionadas anteriormente, ainda fazem sentido para este “novo número”. Por esta razão que não se define  $i$  pela equação  $i = \sqrt{-1}$ . Veja que a primeira equação ( $i^2 = -1$ ) não fala diretamente de  $i$ , mas sim de seu quadrado, ou seja, o definimos indiretamente, enquanto que a segunda equação ( $i = \sqrt{-1}$ ) seria uma definição direta deste número. Porém, se admitíssemos esta definição direta e a propriedade ( $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ), teríamos:

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \\ i^2 &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Assim, para evitar a contradição de  $1 = -1$ , teríamos que abandonar a propriedade mencionada, porém tal propriedade, mesmo partindo de uma abstração, já possui uma significação que lhe dá certa concretude intelectual.

O pensamento algébrico tem isso como premissa. Os objetos “concretos” da álgebra já são os números abstraídos de qualquer concretude. Um anel é uma estrutura algébrica que generaliza os números inteiros, não pelo que podem representar, mas sim pelas suas propriedades.

Assim, novos conhecimentos se formam e, por consequência, novos objetos matemáticos, como quocientes algébricos ( $\mathbb{Z}_p$ ), múltiplos de um inteiro  $m$  qualquer ( $m\mathbb{Z}$ ); conjuntos de matrizes quadradas de mesma dimensão ( $M_n(\mathbb{R})$ ), dentre outros.

Da mesma forma, embora não seja simples distinguir ou caracterizá-los, há outras manifestações do pensamento matemático como o pensamento geométrico, o estatístico, o variacional, etc. No entanto, acreditamos que os exemplos citados já ilustram a dinâmica dos pensamentos matemáticos, constituídos por um vai e vem

de abstração, concretização, aprimoramento da intuição, generalização, etc., como apontado por Pólya (1962-64) e Moura, *et. al.* (2016), todos eles atos de experiência matemática, conforme discutiremos mais adiante.

## 5 ENTRE ENSINO E EDUCAÇÃO

No primeiro capítulo, refletimos sobre a necessidade de novas visões econômicas e ambientais, visando a necessidade da construção de novas racionalidades. A educação, em todos os níveis, desempenha um papel central nesse processo, permitindo abrir espaço para alternativas aos pensamentos hegemônicos.

Autores da Educação Matemática, especialmente os da Etnomatemática, discutem a abrangência de uma única matemática dominante. Defendemos a possibilidade de uma educação matemática que promova a construção de matemáticas alternativas, estendendo essa ideia a outras áreas do conhecimento para provocar mudanças necessárias na sociedade.

No segundo capítulo, exploramos como a matemática lida com conceitos, destacando que esses são construções intelectuais humanas para compreender o entorno. Os metateoremas de Gödel mostram a impossibilidade de uma conceitualização lógica para uma abordagem clássica da "matemática". Tal impossibilidade sugere que sua base, a aritmética, depende da concepção humana do número, desenvolvida ao longo do tempo na prática social.

No terceiro capítulo, discutimos que os conceitos, sejam filosóficos ou científicos, são construções sociais suscetíveis a modificações. A diferenciação entre "conceito" e "definição" é crucial, evidenciando que a dinamicidade dos conceitos surge da experiência humana, permitindo a flexibilidade e alternativas em seu entendimento.

Ao longo desse capítulo, mostramos a dinamicidade dos conceitos, apoiando-nos em concepções filosóficas de Wittgenstein. Sua visão ampla da linguagem, construída socialmente a partir da experiência, ecoa, para nós, sobre a natureza dos conceitos científicos e matemáticos, complementada pela epistemologia de Lakatos.

Já no capítulo anterior a este, buscamos mostrar que o pensamento matemático também possui toda uma dinamicidade própria e que esta dinamicidade

não poderia ser “capturada” por uma noção de ensino restrita apenas a definições, algoritmos, técnicas, lógicas e demonstrações, colocados na forma de conteúdos, como apontado por Cifuentes (2016, p. 49). Discutimos que a técnica é ingrediente fundamental na formulação dos pensamentos matemáticos, mas ela, por si só, não é suficiente para tal formulação.

Por meio do exemplo das frações, defendemos que os educadores podem, ao utilizar desenhos, *softwares* ou materiais manipuláveis, buscar maneiras de contribuir para que os educandos “visualizem” propriedades matemáticas e justificativas do porquê tais propriedades e algoritmos serem como tal, mas também estimulando a criação de outros possíveis algoritmos. Defendemos, assim, que “definir” deve ser uma ação matemática, uma construção, uma forma de experiência matemática em contraponto a receber a definição já pronta.

Trazendo Pólya para a discussão, mostramos que além da visualização, a intuição é aspecto fundamental ao pensamento matemático e que este se dá por um processo de abstração, no qual objetos matemáticos, antes vistos de forma abstrata, a partir da experiência, ganham certa concretude intelectual, servindo, assim, como base para novos processos de generalização e, portanto, construção de novos conceitos matemáticos.

Neste capítulo, como já mencionamos algumas vezes, utilizaremos o diálogo *Mênon* de Platão, onde se discute se a virtude pode ser ensinada para emular uma discussão análoga no âmbito da educação matemática. Defenderemos, ao delimitar a noção de ensino, que conceitos e o pensamento matemáticos não podem ser ensinados nesta noção limitada de ensino.

## 5.1 PLATÃO E O ENSINO DA VIRTUDE

Platão, em um de seus diálogos, mais precisamente no diálogo *Mênon*, dentre outros, levanta o problema pedagógico se a virtude pode ser ensinada:

MEN<sup>14</sup>. Podes dizer-me, Sócrates: a virtude é coisa que se ensina? Ou não é coisa que se ensina mas que se adquire pelo exercício? Ou nem coisa que se adquire pelo exercício nem coisa que se aprende, mas algo que advém aos homens por natureza ou por alguma outra maneira? (PLATÃO, 2001, p. 70)

e, na voz de Sócrates, Platão conclui, como veremos, que a virtude não pode ser ensinada!

O argumento para a impossibilidade de seu ensino, no final das contas, pode até dar a impressão de ser de natureza prática, como a ausência de pessoas capazes de realizar tal tarefa. No entanto, a discussão apresentada por Platão é mais teórica e sutil, pois passa pelo entendimento de que, para ensinar a virtude, seria necessário defini-la, e isto significa, segundo Cifuentes (2016, p. 50), transformar a virtude em um “conteúdo de ensino”, devidamente sistematizado e cristalizado pela sua definição, uma vez que a palavra “ensinar” já trazia o entendimento, ainda presente hoje, de que, no processo de ensino, há algo para ser transmitido “pedagogicamente” a alguém. Essa transmissão, no caso do ensino escolar, se daria no sentido de uma elaboração técnica de algo que tem tempo e lugar no currículo, estruturado essencialmente a partir de um conjunto de conteúdos de ensino, para ser endereçado a outros momentos pedagógicos. Desta forma, não seria possível transformar a virtude em uma nota, um esquema ou uma sequência de ações delimitadas por uma definição do que está sendo transmitido.

Esta reflexão já aponta para possíveis limites do ensino, ou seja, que existem assuntos, mesmo no campo das matemáticas, que talvez não possam ser ensinados na forma de conteúdos. É claro que isso dependerá do que entendamos por “matemáticas”.

Aqui, pretendemos, com inspiração na pergunta de Platão, discutir quais são os limites do ensino de matemática, pensada esta num sentido mais tradicional e singular; ou seja, o que, dentro desta matemática, pode ser ensinado e o que não pode ser ensinado na forma de conteúdos, bem como apontar que estes limites se dão tanto por um fator social, que entende as matemáticas como construções

<sup>14</sup> MEN é uma abreviação para Mênon. A fala citada é deste personagem.

humanas, e que chamamos de “limites extrínsecos”, assim como os que se dão por um fator interno, inerente às próprias matemáticas, os “limites intrínsecos”.

Buscamos evidenciar alguns aspectos dos limites intrínsecos do ensino da matemática e, mais do que isso, pretendemos delinear uma concepção do que entendemos por “formação matemática” ou o que é “educar matematicamente”, a partir dessa concepção ampliada de matemática, atribuindo ao termo “educação” um significado mais abrangente que o que tem o termo “ensino” na medida em que a educação supera os limites do ensino, o que nos conduzirá a uma abordagem de “educação matemática” como algo que busca, mais do que ensinar conteúdos de matemática, “promover” o pensamento matemático, envolvendo não só conceitos senão também o movimento desses conceitos que o pensamento na sua dinamicidade possibilita.

Acreditamos que essa abordagem pode servir como subsídio para uma reflexão filosófica mais profunda dos educadores matemáticos acerca de suas práticas, bem como de suas concepções sobre ensino, sobre educação e sobre as próprias matemáticas.

Para imprimir características dinâmicas aos conceitos, levaremos em consideração a noção de “conceito”, baseada principalmente nas concepções filosóficas de Ludwig Wittgenstein, e a diferenciação que fizemos entre “conceito” e “definição”, entendendo que as matemáticas possuem características que a afastam do puramente lógico, cujos conceitos trazem sentidos além de significados, e que possuem uma dinâmica, também proveniente do social. Esta discussão será o nosso ponto de partida para abordar aspectos dos pensamentos matemáticos que ampliam sua dimensão nas próprias matemáticas e também entender que, assim como a “virtude”, eles não podem ser ensinados, pelo menos não na forma de conteúdos, o que nos levará a nos alinharmos com uma concepção de educação mais ampla do que a de ensino.

Também discutiremos o quanto uma visão reducionista de ensino, baseada apenas em conteúdos, pode causar prejuízos, em um contexto mais amplo da educação, para a formação intelectual do estudante, especialmente no âmbito das matemáticas.

## 5.2 O ENSINO DA MATEMÁTICA “LIMITADO” PELOS SEUS CONTEÚDOS

Não faz sentido discutir “ensino” sem discutir “aprendizagem”, esses termos andam juntos, pois ensinar faz referência a ensinar “algo” a alguém, no caso, àquele que aprende. Inspirados novamente na pergunta de Platão: “a virtude pode ser ensinada?”, fazemos os seguintes questionamentos: “conceitos, especialmente os conceitos matemáticos, podem ser ensinados?”; “podemos ensinar a pensar matematicamente?”, ou seja, conceitos e pensamentos matemáticos podem ser “traduzidos” na forma de conteúdos?

Desta maneira, iniciaremos discutindo o significado da palavra “aprender”. Na língua portuguesa, temos tanto a palavra “aprender” quanto “apreender”. “Apreender” faz referência à ação de pegar, capturar, enquanto que “aprender” se refere à aquisição de conhecimento. No entanto, segundo Anders, *et al.* (2001 – 2019), aprender vem do latim *apprehendere* (ou *adprehendere*) composta pelos prefixos *ad* (para) e *prae* (antes) e pelo verbo *hendere* que significa “agarrar”, “prender”. Ou seja, apesar de estar ligado ao conhecimento, o termo “aprender” traz, em sua etimologia, a mesma ideia de “apreender”, como se o conhecimento fosse, de alguma forma, capturado ou preso. Aquele “algo” que se aprende ou se apreende tem uma certa “materialidade”, não no sentido físico, é claro<sup>15</sup>.

Antes de continuarmos com nosso raciocínio, é importante olharmos o que diz um dicionário de filosofia sobre o termo “aprendizado” ou “aprendizagem”. O dicionário filosófico Abbagnano traz a noção de “aprendizado” ou “aprendizagem” como a

<sup>15</sup> É importante destacar aqui que iniciamos esta parte da discussão a partir da etimologia da palavra “aprender” apenas como um “ponta pé” inicial. Não temos por intenção nos prender aos significados etimológicos das palavras para assim fixar os seus significados; esta seria uma incoerência com o que foi tratado anteriormente a partir de Wittgenstein. O mesmo faremos posteriormente para os termos “ensinar” e “educar”.

Aquisição de uma técnica qualquer, simbólica, emotiva ou de comportamento, ou seja, mudança nas respostas de um organismo ao ambiente, que melhore tais respostas com vistas à conservação e ao desenvolvimento do próprio organismo. Esse é o conceito que a psicologia moderna dá de A[prendizagem], apesar da variedade de teorias que apresenta. Esse conceito, além disso, não é senão a generalização de uma noção antiquíssima de A[prendizagem], considerado como forma de associação. (2007, p. 86)

E destacamos logo a primeira palavra apresentada: “aquisição”.

Assim, podemos conjecturar que a noção de “aprendizado” está intimamente ligada à etimologia da palavra “aprender” que já remete à ideia de ensino ligado a conteúdos enquanto matéria, onde “a noção original de ‘conteúdo’ aponta para algo que ocupa um ‘recipiente’, um ‘continente’, é uma ideia que traz uma conotação estática de um conhecimento pronto e delimitado” (CIFUENTES, 2016, p. 47). Desta forma, se entendemos “conceito” como algo dinâmico e não delimitado, não podemos pensar que ele ocupa um determinado “recipiente”, que está contido em algo, ou seja, não é um conteúdo e, se não é um conteúdo, não pode ser aprendido nem tão pouco ensinado (uma vez que estamos relacionando ensinar com aprender e aprender com prender).

Devemos esclarecer que, como dizemos anteriormente, para ensinar um conceito, seria necessário defini-lo e, em certos casos, até podemos construir definições de conceitos com finalidades específicas, mas que estas definições não podem ser confundidas com o conceito em si, pois tratam-se de objetos filosóficos distintos, uma vez que uma definição não é capaz de capturar a dinamicidade de movimento e expansão que um conceito pode ter.

Cifuentes (2016) continua:

[...] O ensino (técnico) de matemática baseia-se usualmente na apresentação do conhecimento na forma de conteúdos encaixotados ou encapsulados em didáticas e metodologias, base do currículo escolar. Os conteúdos, na medida em que trazem um conhecimento cristalizado, sistematizado, formalizado, são, então, colocados em disciplinas, em áreas, e se lhes atribui, quando colocados em textos “didáticos”, o papel principal de informar e não necessariamente o de formar. (p. 47, grifos do autor)

Por exemplo, os números complexos, quando apresentados no Ensino Médio, permitem ilustrar essa situação, mas antes precisamos abrir um parêntese: a palavra “ensino” também vem do latim, mais precisamente da palavra *insignare* que significa “por um signo” ou “pôr uma marca” (MICHAELIS, 1998). Esta etimologia remete a um certo controle, e a analogia com um gado ou escravo marcado pode não ser, para nós, em determinadas concepções ou finalidades de ensino, tão absurda assim. Discutiremos, no próximo capítulo, que o ensino pode ser visto como uma tecnologia, isto é, como algo pelo qual o ser humano exerce certo controle sobre algo da natureza, neste caso, aquilo que outros seres humanos aprendem ou, pelo menos, podem ou devem aprender.

Voltando aos números complexos, dizíamos que eles, quando apresentados no Ensino Médio, são permitidos para ilustrar a situação do ensino como sendo informativo e não formativo. Talvez, de todos os conhecimentos do Ensino Básico, seja o que mais desperte no educando a seguinte pergunta: “Para que isso *serve*?”, e nossas respostas já tendem a dar uma “serventia” restrita à sua condição de instrumento para as aplicações, ou ao mercado de trabalho. Por exemplo, eles são ensinados para serem utilizados no estudo da corrente elétrica, na análise de circuitos, etc., ou seja, já restringimos o uso dos números complexos às aplicações práticas, embora essas aplicações já atribuam um significado a estes números. De fato, é importante que os educandos saibam onde determinado conhecimento é aplicado na sociedade atual, bem como no mercado de trabalho, o que rebatemos aqui é o ensino que se restringe apenas à utilidade das matemáticas nas aplicações práticas, sem explicitar seus demais aspectos conceituais.

Do ponto de vista formativo, é conveniente uma melhor compreensão dos números complexos. Até então, tudo que o sujeito tinha por número era englobado pelos números reais, cuja existência está intimamente ligada ao problema de medir grandezas. Este era o seu mundo, o seu sentido, o seu universo matemático. Mas, este mundo não dá conta de resolver todos os problemas, como encontrar a raiz quadrada de um número negativo, o que muitas vezes é expresso pelo problema, já discutido, de resolver a equação  $X^2 + 1 = 0$ . Então, o ser humano cria um novo universo, mais amplo, capaz de dar respostas a este problema, e o conceito de

número se expande, o mundo matemático do sujeito aumenta e a “serventia” das matemáticas, do ponto de vista pedagógico<sup>16</sup>, deixa de ser apenas técnica para ser um exemplo de que “limites” conceituais podem ser ultrapassados.

Vale lembrar que no capítulo 2 vimos no que Hilbert acreditava que a matemática (hegemônica) seria epistemologicamente completa. Isso significaria que sempre seria possível ampliá-la de tal forma que fosse possível responder a qualquer pergunta que fosse formulada nela. Também vimos que os teoremas de Gödel mostraram que isso não é possível, já que sempre seria possível construir sentenças que não admitissem prova nem da sua verdade nem da sua falsidade (teorema da incompletude). Isso nos indica que os próprios números complexos não respondem a todas as “perguntas algébricas” que podemos formular em sua linguagem.

Modernamente, os números complexos não formam um conjunto qualquer que contém os números reais, eles mantêm as propriedades algébricas, aritméticas e geométricas dos reais. Por exemplo, as operações adição e multiplicação entre dois números complexos  $z_1 = a_1 + b_1i$  e  $z_2 = a_2 + b_2i$  são:

$$\text{i) } z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$\text{ii) } z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i.$$

Assim, dois números reais  $r_1$  e  $r_2$  podem ser entendidos como os números complexos  $z_1 = r_1 + 0i$  e  $z_2 = r_2 + 0i$  e

$$z_1 + z_2 = (r_1 + r_2) + (0 + 0)i = r_1 + r_2$$

<sup>16</sup> Do ponto de vista histórico, os números complexos apareceram de forma um pouco diferente: se uma equação de grau 3 tem três soluções reais, então a fórmula de Cardano precisa de raízes quadradas de números negativos, ou seja, já se fazia necessário “passar” pelos complexos, mesmo para encontrar raízes reais. O primeiro trabalho onde os complexos aparecem de forma mais clara é o livro *L'Algebra*, escrito originalmente em italiano por Rafael Bombelli (1526 – 1572) em 1572. Nesta obra, os complexos se fazem necessários justamente para formalizar melhor as contas que aparecem no caso de três raízes reais. Assim, trabalhar com os complexos foi uma *necessidade* para a evolução das matemáticas dos números “reais” (aqui em oposição aos “imaginários”), uma expansão conceitual que ilumina um campo menor.

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2 - 0 \cdot 0) + (r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot 0)i = r_1 \cdot r_2,$$

sendo, então, estas operações complexas, extensão natural das correspondentes reais.

Tal expansão nos permite resolver problemas reais no campo dos complexos, como, por exemplo calcular integrais reais via cálculo complexo, por meio de um procedimento conhecido como Método dos Resíduos (CONWAY, 1978). É frequente nas matemáticas que um determinado problema seja formulado num campo e precise da ampliação teórica dele para sua solução, o que é parte do jogo teórico.

Outro exemplo importante é o *Teorema Fundamental da Álgebra*, que diz que todo polinômio  $p(z)$ , com coeficientes complexos, de grau  $n$ , possui  $n$  raízes complexas (não necessariamente distintas). A busca pela demonstração do teorema levou a um grande desenvolvimento das matemáticas, uma vez que, apesar de ser um problema de cunho puramente algébrico, fez com que os matemáticos precisassem ampliar o campo conceitual com ferramentas avançadas de topologia, geometria e teoria de grupos para demonstrá-lo e, obviamente, tais ferramentas não possuem utilidade apenas para tal.

Da mesma forma, a busca pela demonstração do chamado *Último Teorema de Fermat*, que diz que a expressão  $x^n + y^n = z^n$ , com  $n$  natural, não possui solução  $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$  não trivial, para  $n > 2$ , também levou a um desenvolvimento importante das matemáticas. Tal teorema, cuja formulação é puramente algébrica, precisou de ferramentas avançadas no campo ampliado da geometria algébrica para sua demonstração, consolidada apenas em 1995.

Assim, os números complexos, mais do que uma informação, podem ser um meio para a formação criativa e emancipadora do educando, uma vez que são, então, um exemplo de resposta que o ser humano deu à sua necessidade de ampliar seu conhecimento e seu conhecimento sobre seus próprios conhecimentos, preenchendo lacunas conceituais, completando, complementando e, acima de tudo, criando seus saberes. Desta forma, os números complexos não são um mero

conteúdo que apenas preenche o currículo quantitativamente, eles ampliam e potencializam a noção de número, mantendo suas propriedades aritméticas, além de ampliar a nossa compreensão do que já sabíamos.

Faz-se necessário esclarecer que não pretendemos desvalorizar o papel dos conteúdos na formação do conhecimento, nem mesmo diminuir a importância do ensino. Mas sim, possibilitar uma visão mais ampla de “educação por matemáticas”, restringindo, como hipótese inicial de trabalho, mas sem desvalorizar, a concepção de “ensino de matemática” à transmissão de técnicas, algoritmos e lógicas, porém entendendo que as matemáticas possuem um caráter que vai muito além disso, constituindo os “pensamentos matemáticos” como algo que lidam com conceitos matemáticos de forma dinâmica como pensado por Wittgenstein. Nesta visão, os conteúdos deixam de ser o fim, o objetivo final, e passam a ser um meio. Essa hipótese de trabalho impede, no início, tomar outro caminho: o de expandir a ideia de ensino, englobando, de alguma forma, conceitos e pensamentos matemáticos. Consideramos esta segunda opção um tanto quanto perigosa, apesar de possível, pois, assim, poderíamos cair na armadilha de conceber o pensamento como algo técnico, sujeito a metodologias, o que pode ocasionar na perda de sua dinamicidade e efetividade na construção dos conhecimentos matemáticos.

## 6 EXPERIÊNCIA E EDUCAÇÃO

Até agora, salientamos a importância das novas perspectivas econômicas e ambientais e como a educação desempenha um papel vital ao abrir caminho para alternativas aos pensamentos dominantes. Concordamos com outros estudiosos da Educação Matemática ao debater as limitações de uma única matemática predominante, defendendo, em vez disso, um modelo educacional que cultive múltiplas abordagens matemáticas, impulsionando, assim, diferentes formas de pensamento que possam impactar a sociedade.

Ao explorar a natureza humana dos conceitos matemáticos, destacamos os metateoremas de Gödel, evidenciando a impossibilidade de uma concepção puramente lógica ou da redução da matemática a um sistema puramente formal. Isso se deve à base da matemática, a aritmética, que se apoia na concepção humana de número, desenvolvida socialmente ao longo do tempo.

Abordamos também a natureza flexível dos conceitos, sejam eles filosóficos ou científicos, como construções sociais moldáveis. Destacamos uma abordagem que diferencia "conceito" de "definição", mostrando como a dinâmica dos conceitos está associada à experiência humana. Utilizando ideias filosóficas de Wittgenstein e Lakatos, ilustramos a natureza social subjacente à construção desses conceitos.

Assim, ressaltamos a importância de uma educação matemática mais ampla, que vai além de definições prontas e algoritmos, e incentivam o desenvolvimento de múltiplas abordagens na compreensão da matemática.

No capítulo anterior, examinamos o diálogo de Platão, "*Mênon*", no qual Sócrates questiona se a virtude pode ser ensinada. Esse debate destacou limites no ensino, inclusive na matemática, indicando que nem tudo pode ser ensinado apenas como conteúdo. Discutimos os limites intrínsecos e extrínsecos do ensino da matemática, enfatizando que educar em matemática vai além da mera transmissão de conteúdo, buscando, em vez disso, promover o pensamento matemático. Novamente, recorreremos a Wittgenstein para mostrar a dinâmica e a profundidade dos conceitos matemáticos. Argumentamos que uma abordagem

estritamente centrada em conteúdos pode restringir o desenvolvimento intelectual, especialmente na matemática.

Também discutimos a conexão entre ensino e aprendizagem, explorando como “ensinar” está intrinsecamente ligado a “aprender”. Inspirados na pergunta de Platão sobre se a virtude pode ser ensinada, questionam se seria possível ensinar conceitos e pensamento matemático e concluímos que não seria interessante vê-los como conteúdos de ensino. E propomos uma visão ampliada da educação matemática, sugerindo que os conteúdos não devem ser apenas um fim em si mesmos, mas um meio para promover um pensamento matemático dinâmico e da movimentação de conceitos matemáticos.

Neste capítulo, abordaremos uma reflexão sobre a educação e o conhecimento a partir das perspectivas filosóficas de Wittgenstein e de Larrosa, ainda que este último não faça menção direta ao primeiro. A discussão se concentra na compreensão da linguagem, experiência e sentido, explorando como a educação pode ser percebida através de diferentes prismas e não se restringir apenas ao ensino de conteúdos estáticos. Destacaremos a concepção de jogos de linguagem como uma maneira de construir significados e entendimentos, desafiando a busca por fundamentações últimas e propondo uma visão mais ampla e experiencial da educação.

Wittgenstein, ao discutir os jogos de linguagem, sugere uma abordagem mais ampla da linguagem e do conhecimento, focando na construção social da lógica por meio do uso das palavras. Ele propõe uma reflexão filosófica sobre o conceito de jogo de linguagem, utilizando essa metodologia para explorar e entender o próprio conceito. Larrosa, por sua vez, apesar de não fazer referência direta a Wittgenstein, propõe uma abordagem semelhante ao buscar uma reflexão sobre a experiência e o sentido a partir da interação com as palavras, proporcionando ao leitor a construção de suas próprias noções e entendimentos.

Ambos os autores defendem a ideia de que a linguagem e o conhecimento não são estáticos, mas sim produtos dinâmicos da interação humana. Larrosa destaca a importância da experiência genuína, diferenciando-a da simples informação, e critica a ideia de educação centrada apenas na transmissão de dados,

destacando que a experiência autêntica é fundamental para uma educação significativa. Ele aponta para a necessidade de uma educação que não apenas informe, mas permita a verdadeira reflexão, questionamento e construção de sentido para além do acúmulo de informações.

Discutiremos a origem etimológica da palavra "educar" e seu significado, destacando uma possível concepção que diferencia ensino e educação, em que o ensino estaria associado à transmissão de conhecimento, isto é, um movimento de fora para dentro, e a educação é vista como um processo de emancipação intelectual, promovendo um movimento de dentro para fora. A reflexão parte da ideia de que a educação não se limita ao ensino, pois envolve a formação do pensamento e dos conceitos, indo além da simples transmissão de conteúdos. A abordagem destaca a importância de considerar não apenas o que é ensinado, mas também o desenvolvimento dos processos mentais e da formação do educando, centrando-se nele como sujeito do processo educativo.

Além disso, buscaremos explorar a educação matemática, desafiando a concepção tradicional de ensino de matemática como mera transmissão de conteúdo acabado, destacando que os conceitos matemáticos não podem ser ensinados da mesma maneira que os conteúdos, pois envolvem atitudes, processos dinâmicos de pensamento e visões que não se restringem apenas ao conhecimento pronto. Em vez de simplesmente transmitir informações matemáticas, defendemos propostas que possibilitem, de maneira dinâmica, a experiência, incentivando a criatividade, a imaginação e a reflexão crítica, promovendo a construção, desconstrução e reconstrução contínuas dos conceitos.

Ressaltamos a importância de não apenas ensinar conceitos matemáticos, mas também encorajar atitudes como a formulação de perguntas, a conjectura, a definição e a formalização, destacando que essas atitudes são fundamentais para a formação de pensamento matemático. A ênfase é colocada na experiência como um processo em movimento, não apenas na aquisição passiva de conhecimento, mas na interação dinâmica com os conceitos matemáticos, buscando expandi-los e relacioná-los de maneira flexível e criativa.

## 6.1 DA EXPERIÊNCIA À EDUCAÇÃO POR MATEMÁTICAS

Vimos anteriormente que, em *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein enfoca sua investigação sobre o conhecimento no campo da linguagem a partir de uma concepção de linguagem mais ampla da concepção defendida por ele mesmo anteriormente. Vimos que esta concepção mais ampla implica em uma linguagem que não se restringe apenas aos significados lógicos, absolutos, das definições, e que engloba uma “lógica” mais abrangente. Esta lógica seria construída socialmente, por meio do uso das palavras nos *jogos de linguagem*.

Também vimos que Wittgenstein não define “jogo de linguagem”, até como crítica aos filósofos da época, que buscavam a fundamentação última. O que o filósofo buscava fazer era levar o leitor a uma reflexão filosófica sobre o que vem a ser jogo de linguagem justamente por meio de jogos de linguagem. Podemos dizer que apresentar jogos de linguagem ao leitor seria a “metodologia” do autor para construir sua filosofia.

Da mesma forma, como Wittgenstein se opunha à fundamentação última, podemos dizer que ele construía jogos de linguagem para que seus leitores, de certa maneira, conceitualizassem determinadas palavras, ou movimentassem determinados conceitos. Concordamos com o autor e, mais do que isso, de certa maneira, o seguimos de duas formas. A primeira forma, teórica, interna a este trabalho, se dá ao discutir alguns conceitos, como fizemos com “ensino”, “educação”, “matemática(s)”, etc. por meio de jogos de linguagem e não buscando dar uma fundamentação última. A segunda forma, “prática”, como consequência desta teoria, seria defender a distinção entre conceito e definição tal como fizemos. Assim, os conceitos das matemáticas, por mais que possam ser definidos para certas finalidades, se diferem de suas possíveis definições epistemologicamente e, portanto, podem ser “apresentados” pedagogicamente a partir de jogos de linguagem. Também argumentaremos que este processo, que podemos chamar de conceitualização, depende de uma experiência.

Sem fazer qualquer alusão a Wittgenstein, e é importante destacar já isso, Larrosa (2019) aponta duas formas distintas vigentes de pensar a educação, dadas ambas por pares. O primeiro par é o par ciência/técnica e o segundo é o par teoria/crítica. O autor faz uma crítica à estas duas formas vigentes e, como alternativa, defende pensar a educação pelo par experiência/sentido. De forma semelhante ao que Wittgenstein faz, metodologicamente, Larrosa não define o par experiência/sentido (e nem os outros pares), ele busca “falar” com seu leitor a fim de que o mesmo construa, de alguma forma, sua própria noção de experiência e que tal noção seja relativamente próxima daquilo que ele próprio entende por experiência. Em outras palavras, podemos dizer que Larrosa, em seu texto, busca proporcionar que o leitor, ao lê-lo, tenha experiências a partir de reflexões próprias que faça daquilo que está escrito e construa, assim, sua própria noção de experiência a partir de tais experiências. Nas palavras do autor:

O que vou fazer em seguida é sugerir certo significado para estas duas palavras [experiência e sentido] em distintos contextos, e depois vocês me dirão como isso lhes soa. O que vou fazer é, simplesmente, explorar algumas palavras e tratar de compartilhá-las.

E isto a partir da convicção de que as palavras produzem sentido, criam realidades e, às vezes, funcionam como potentes mecanismos de subjetivação. Eu creio no poder das palavras, na força das palavras, creio que fazemos coisas com as palavras e, também, que as palavras fazem coisas conosco. As palavras determinam nosso pensamento porque não pensamos com pensamentos, mas com palavras, não pensamos a partir de uma suposta genialidade ou inteligência, mas a partir de nossas palavras. E pensar não é somente “raciocinar” ou “calcular” ou “argumentar”, como nos tem sido ensinado<sup>17</sup> algumas vezes, mas é sobretudo dar sentido ao que somos e ao que nos acontece. (LARROSA, 2019, p. 16, grifos do autor)

Por mais que a citação acima pode ser resumida pelas palavras do próprio autor na frase “Quando fazemos coisas com as palavras, do que se trata é de como

<sup>17</sup> Sempre que voltamos a esta citação, ou em qualquer outra em que Larrosa critica a forma em que algo “nos é ensinado”, inevitavelmente lembramos da etimologia da palavra ensinar, que remete a “pôr uma marca”. A analogia com um “gado marcado” é inevitável.

damos sentido ao que somos e ao que nos acontece” ou ainda “o homem é palavra” (p.17), entendemos que trazer uma citação mais ampla ao leitor pode proporcionar uma experiência mais ampla também. Aliás, nos parece que o próprio Larrosa acredita nisso. Seu livro é repleto de longas citações. É como se o autor dissesse: “eu li isso aqui e esta leitura mexeu comigo, então leia também e me diga o que você acha.” Esta é uma postura que nos parece muito interessante.

Em nossa interpretação, tentando buscar um possível diálogo entre Wittgenstein e Larrosa. Novamente, destacamos que Larrosa em nenhum momento cita Wittgenstein, apesar de possivelmente conhece-lo, nem para concordar com algo e nem para criticá-lo. Então, já enfatizamos que não queremos fazer parecer que Larrosa seria um wittgensteiniano. O que fazemos aqui é tentar interpretar as palavras de Larrosa a partir das noções que já construímos até então e de nossas interpretações, principalmente de Wittgenstein. Em nossas interpretações, buscando fazer possíveis aproximações entre estes autores, poderíamos dizer que Larrosa acredita que a partir do contato com palavras – apresentadas em formatos de textos que, neste caso, conteriam jogos de linguagem, sejam estes apresentados por ele ou por outros autores, a partir da leitura ou de outra forma – o sujeito, ao pensar sobre tais palavras, poderia dar significados e sentidos a elas e estas palavras poderiam transformá-lo, tocá-lo de certa forma, caracterizando uma experiência.

Fica bem claro que Larrosa procura distanciar a noção de experiência de como se ela fosse um conceito acabado, assim como Wittgenstein procura distanciar a sua noção de conceito, conforme interpretamos antes, da noção tradicional. Este distanciamento fica claro na citação seguinte, onde Larrosa simula, ou relata, como costuma ser questionado:

[...] Algo assim como ‘tudo bem professor, muito interessantes suas palavras, muito sugestiva sua exposição, mas, qual é a sua ideia de experiência? o que entende exatamente por experiência? o que seria então pensar o professor e o aluno como sujeitos da experiência? como se poderia pensar a formação do professor a partir da experiência? qual é o seu conceito de experiência? o que é exatamente experiência?’ Parece-me que, se a função dos conceitos, como certa vez escreveu María Zambrano, é tranquilizar

o homem que consegue possuí-los, talvez querer chegar demasiado rápido ao conceito seja como querer se tranquilizar demasiado rápido. (LARROSA, 2019, p. 42)

Vale destacar que, para Larrosa (2019)

Não existe, na tradição, uma ideia de experiência, ou uma série reconhecível de ideias de experiência. [...] A experiência não é uma realidade, uma coisa, um fato, não é fácil de definir nem de identificar, não pode ser objetivada, não pode ser reproduzida. E tampouco é um conceito, uma ideia clara e distinta. A experiência é algo que (nos) acontece e que às vezes treme, ou vibra, algo que nos faz pensar, algo que nos faz sofrer ou gozar, algo que luta pela expressão, e que às vezes, algumas vezes, quando cai em mãos de alguém capaz de dar forma a esse tremor, então, somente então, se converte em canto. E esse canto atravessa o tempo e o espaço. E ressoa em outras experiências e em outros tremores e em outros cantos. (p. 10)

Destacamos, mais uma vez, que Larrosa utiliza uma noção de “conceito” diferente da que utilizamos aqui a partir de interpretação de Wittgenstein. Para Larrosa, o conceito seria como algo praticamente materializado no campo das ideias, de forma clara e distinta, como ele mesmo diz, a fim de ser “manipulado” pelos filósofos.

O autor, então, se dispõe a falar sobre experiência e destaca alguns aspectos. O primeiro aspecto que Larrosa destaca é que a experiência é algo que se difere da informação. Nas palavras do autor:

A experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca. A cada dia se passam muitas coisas, porém, ao mesmo tempo, quase nada nos acontece. [...] Nunca se passaram tantas coisas, mas a experiência é cada vez mais rara. Em primeiro lugar pelo excesso de informação. A informação não é experiência. E mais, a informação não deixa lugar para a experiência, ela é quase o contrário da experiência, quase uma antiexperiência. Por isso a ênfase contemporânea na informação, em estar informados, e toda a retórica destinada a constituir-nos como sujeitos informantes e informados; a informação não faz outra coisa que cancelar nossas possibilidades de experiência. O sujeito da informação sabe muitas coisas, passa seu tempo buscando informação, o que mais o preocupa é não ter bastante informação; cada vez sabe mais, cada vez está mais bem informado, porém, com essa obsessão pela informação e pelo saber (mas saber não

no sentido de ‘sabedoria’, mas no sentido de ‘estar informado’), o que consegue é que nada lhe aconteça. (LARROSA, 2019, p. 18 – 19, grifos do autor)

E esse aspecto é importantíssimo para nós quando buscamos separar teoricamente ensino de educação. Fica claro que a informação pode, de alguma forma ser ensinada, enquanto que o saber, tal como colocado por Larrosa, de forma mais ampla, envolve experiência. O filósofo novamente critica quando a experiência é vista resumindo-se a mera informação cristalizada:

Não deixa de ser curioso a troca, a intercambialidade entre os termos ‘informação’, ‘conhecimento’ e ‘aprendizagem’. Como se o conhecimento se desse sob a forma de informação, e como se aprender não fosse outra coisa que não adquirir e processar informação. (LARROSA, 2019, p. 19, grifos do autor)

E ainda complementa: “[...] uma sociedade constituída sob o signo da informação é uma sociedade na qual a experiência é impossível” (LARROSA, 2019, p. 20).

A partir daí, o autor constrói uma crítica à sociedade atual e ao seu modelo de “educação” – que, em nossa acepção (e do Larrosa também), se resumiria à um modelo de ensino apenas – que privilegia a informação obtida rapidamente e em larga escala, dificultando processos de experiência. O autor destaca que esta maneira de conceber o conhecimento privilegia a formação de “opiniões” rasas. É como se a nossa sociedade já nos dissesse que precisamos ser bem informados, isto é, precisamos ter informação sobre tudo: política, religião, questões climáticas, questões de gênero, liberdade social, etc. e, como consequência, também precisamos ter opiniões formadas a respeito de tudo isto. Por exemplo, todo mundo precisa ter informação sobre o aquecimento global e, obrigatoriamente, esta informação deve motivar uma opinião que deve necessariamente ser crítica sobre o tema. Assim, as pessoas bem informadas têm opinião sobre tudo, mas não têm experiência em nada. Larrosa destaca que o excesso de opinião também torna a experiência algo cada vez mais raro e destaca a influência disso nos processos

educacionais. Referindo-se a esta relação entre informação e opinião, Larrosa nos diz que permeiam nossa ideia de aprendizagem,

[...] inclusive do que os pedagogos e psicopedagogos chamam de 'aprendizagem significativa'. Desde pequenos até a universidade, ao largo de toda nossa travessia pelos aparatos educacionais, estamos submetidos a um dispositivo que funciona da seguinte maneira: primeiro é preciso informar-se e, depois, há de opinar, há que dar uma opinião obviamente própria, crítica e pessoal sobre o que quer que seja. A opinião seria como a dimensão 'significativa' da assim chamada 'aprendizagem significativa'. [...] Com isso, nos convertemos em sujeitos competentes para responder como Deus manda as perguntas dos professores que, cada vez mais, se assemelham a comprovações de informações e a pesquisas de opinião. Diga-me o que você sabe, diga-me com que informação conta e exponha, em continuação, a sua opinião: esse o dispositivo periódico do saber e da aprendizagem, o dispositivo que torna impossível a experiência. (LARROSA, 2019, p. 21 – 22, grifos do autor)

O autor também destaca que nosso modelo de sociedade também torna impossível a experiência por falta de tempo e excesso de trabalho. Assim, naturalmente, uma educação que oportunize experiências exige um modelo de escola diferente do modelo que temos, que, por muitas vezes, se assemelha a modelos industriais e/ou comerciais, onde a “educação” é tratada como mercadoria de uma escola submissa ao mercado.

A experiência, a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que ocorrem: requer parar para pensar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar os outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço. (LARROSA, 2019, p. 25)

Larrosa (2019, p. 15) aponta que a educação vem sendo pensada a partir da sua relação entre ciência e técnica ou a partir da sua relação entre teoria e prática.

Estas duas formas de pensar a educação são dadas, respectivamente, pelo par ciência/técnica, que “remete a uma perspectiva positiva e retificadora” e o par teoria/prática, que “remete sobretudo a uma perspectiva política crítica”.

[...] na primeira alternativa as pessoas que trabalham em educação são concebidas como sujeitos técnicos que aplicam com maior ou menor eficácia as diversas tecnologias produzidas pelos cientistas, pelos técnicos e pelos especialistas, na segunda alternativa estas mesmas pessoas aparecem como sujeitos críticos que, armados de distintas estratégias reflexivas, se comprometem, com maior ou menor êxito, com práticas educativas concebidas na maioria das vezes sob uma perspectiva política. Tudo isso é suficientemente conhecido, posto que nas últimas décadas o campo pedagógico tem estado separado entre os chamados técnicos e os chamados críticos, entre os partidários da educação como ciência aplicada e os partidários da educação como práxis política [...]. (LARROSA, 2019, p. 16)

Precisamos destacar que enxergar a educação somente pelo par ciência/técnica implica necessariamente em uma redução. Esta redução trata-se de um recorte que restringiria o processo de educação somente ao ensino.

Entendemos que este recorte não apenas é uma perspectiva teórica para pensar a educação como pode ser também uma ideologia que impede, do ponto de vista da prática, a própria educação.

Além do mais, complementando, Larrosa (2019, p. 16) propõe que a educação seja explorada a partir “de outra possibilidade, digamos que mais existencial (sem ser existencialista) e mais estética (sem ser esteticista), a saber, pensar a educação a partir do par *experiência/sentido*” (grifos do autor), conforme já comentamos. Também defendemos uma educação por matemáticas, que deve ser pensada a partir de *experiências*, como veremos na próxima seção, onde a noção de experiência conversa com a de Larrosa. Para este autor “a educação sempre tem a ver com uma vida que está mais além de nossa própria vida, com um tempo que está mais além de nosso próprio tempo, com um mundo que está mais além de nosso próprio mundo...” (LARROSA, 2019, p. 36), o que nos faz pensar a educação como o meio de reflexão e ação para transformação do mundo em contrapartida de uma visão reducionista dela própria como agente de manutenção de mundo.

Para Larrosa,

se a educação não quer estar a serviço do que existe, tem que se organizar em torno de uma categoria livre, não sistemática, não intencional, inassimilável, em torno de uma categoria, poderíamos dizer, que não possa ser apropriada por nenhuma lógica operativa funcional. (LARROSA, 2019, p. 12)

Lembramos que o autor destaca que a educação foi ou ainda é pensada a partir de dois pontos de vistas, que ele simplifica por meio de dois pares, os pares ciência/tecnologia e o par teoria/crítica. “Para os positivistas, a educação é uma ciência aplicada. Para os assim chamados críticos, a educação é uma práxis reflexiva.” O autor entende que, a partir destas duas perspectivas, os assuntos da educação já foram esgotados. Para ele

[...] tanto os positivistas quanto os críticos já pensaram o que tinham de pensar e disseram o que tinham de dizer sobre a educação. O que não significa que não continuem tendo um lugar no campo pedagógico. Os *experts*, porque podem nos ajudar a melhorar as práticas. Os críticos porque continua sendo necessário que a educação lute contra a miséria, contra a desigualdade, contra a violência, contra a competitividade, contra o autoritarismo, porque é preciso manter alguns ideais para que nossa vida continue tendo sentido mais além de nossa própria vida. (LARROSA, 2019, p. 36, grifos do autor)

Larrosa, na sequência, define uma “gramática constituída” como “uma série finita de regras de constituição de enunciados susceptíveis de uma produtividade infinita” e um “esquema de pensamento” como “uma série finita de regras de constituição de ideias também suscetíveis de uma produtividade infinita” (p. 37). Podemos, de certa forma, correlacionar tanto “gramática constituída”, quanto “esquema de pensamento”, quando este se dá a partir de uma gramática constituída, com as noções de “paradigma vigente”, nas palavras de Kuhn, ou “estilo de pensamento”, nas palavras de Fleck. Para Larrosa, a gramática constituída

[...] permite dizer ‘o que todo mundo diz’, ainda que creiamos que dizemos coisas ‘inovadoras’, e um esquema de pensamento constituído nos faz ‘pensar o que todo mundo pensa’ mesmo que tenhamos a impressão de que somos nós mesmos que os pensamos. A partir dessa perspectiva, tanto os positivistas quanto os críticos já encarnam o que Foucault chamou de ‘a ordem do discurso’, essa ordem que determina o que se

pode dizer e o que se pode pensar, os limites de nossa língua e de nosso pensamento. (LARROSA, 2019, p. 37 – 38, grifos do autor)

Assim, se entendemos a necessidade de transformação do mundo, da construção de novas lógicas, novas racionalidades, para a utilização dos recursos naturais, distribuição de riquezas, etc. e pensarmos a educação como agente de promoção de tal transformação, como meio de produção ou ao menos incentivo para a produção de novas racionalidades, precisamos pensar a educação a partir de outras lógicas, ou melhor, talvez novas racionalidades. Aqui, aparece a necessidade de questionarmos qual é o papel da educação por matemáticas, dito de maneira bem sintética, contribuindo para possíveis elaborações de novas racionalidades, pensada de forma mais ampla que ensino de matemática, tal como nos alinhamos, frente ao desafio de contribuir para a possibilidade de tal construção.

Concordamos com Larrosa quando este diz que tem a impressão:

[...] de que a palavra experiência ou, melhor ainda, o par experiência/sentido, permite pensar a educação a partir de outro ponto de vista, de outra maneira. Nem melhor, nem pior, de outra maneira. Talvez chamando a atenção sobre aspectos que outras palavras não permitem pensar, não permitem dizer, não permitem ver. Talvez, configurando outras gramáticas e outros esquemas de pensamento. Talvez produzindo outros efeitos de verdade e outros efeitos de sentido. (LARROSA, 2019, p. 38)

Assim, entendemos que uma educação que tenha como fonte experiências, em especial experiências matemáticas, pode contribuir para a formação de novas racionalidades enquanto que a redução do processo educacional ao ensino estático, tende a contribuir apenas para a manutenção de uma racionalidade já vigente, promovendo, talvez, mais informação do que formação.

## 6.2 A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA COMO FONTE DE EDUCAÇÃO POR MATEMÁTICAS

De acordo com Anders, *et al.* (2001 – 2019), a palavra “educar” vem do latim *ducere*, que significa “guiar”, “conduzir”, juntamente com o prefixo *ex*, que significa

“fora de”, “a partir de”. Portanto, podemos entender “educar” (*exducere*) como “guiar para fora”. Esse é um dos aspectos que, de alguma forma, diferencia ensino, como sugerimos vê-lo anteriormente, de educação. Enquanto ensino está ligado à aprendizagem e, portanto, a prender, se dá como um movimento “de fora para dentro”, já educar está relacionado a soltar, libertar, emancipar, isto é, como um movimento “de dentro para fora”.

A etimologia da palavra “educar” claramente traz uma noção divergente daquela utilizada comumente nos ambientes educacionais. Inclusive, o dicionário filosófico Abbagnaro (2007), sobre o termo “educação”, destaca que

Em geral, designa-se com esse termo a transmissão e o aprendizado das técnicas culturais, que são as técnicas de uso, produção e comportamento, mediante as quais um grupo de homens é capaz de satisfazer suas necessidades, proteger-se contra a hostilidade do ambiente físico e biológico e trabalhar em conjunto, de modo mais ou menos ordenado e pacífico. (p. 316)

Nesta concepção, as noções de “ensinar” e “educar” se misturam. No entanto, ao fazermos a diferenciação proposta entre estes termos, veremos que enquanto o ensino compete aos conteúdos e às definições, conforme discutimos na seção anterior, a educação o complementa, referindo-se aos conceitos e ao pensamento, tendo, assim, um caráter mais dinâmico. Desta forma, a educação pressupõe o ensino, mas não se reduz a ele.

Voltando à nossa questão inicial, podemos dizer que os conceitos e os pensamentos matemáticos não podem ser ensinados, pois não se limitam ou restringem a conteúdos. Mas, aí, surgem novos questionamentos: conceitos e o pensar matemáticos podem ser assunto de educação, no sentido dado acima? Como?

Enquanto os objetos de ensino são os conteúdos, que são direcionados a alguém, o termo “educar” já é diretamente direcionado àquele sujeito: podemos educar alguém, e não educar algo a alguém. Portanto, enquanto o ensino remete ao seu objeto, os conteúdos a serem ensinados, a educação remete ao seu sujeito, o educando, que deve ser formado e não apenas informado.

Desta maneira, ao invés de termos o conteúdo no centro da discussão sobre educação, colocamos o educando nesta posição. Enquanto antes pensávamos em como (com quais técnicas) ensinaríamos determinado conteúdo, e este ensino se daria normalmente por definições, exemplos e problemas práticos para atribuir significado ao conteúdo, para que os sentidos se façam nele, agora, além disso, pensamos em como utilizar tal conteúdo para a formação dos pensamentos matemáticos e humanos no geral, ou seja, quais são as características epistemológicas e sociais por trás de tal conteúdo que podem, de alguma forma, contribuir para a formação dos pensamentos matemáticos e formação intelectual e humana do educando.

É evidente que não traremos aqui receitas ou técnicas para uma educação envolvendo conceitos ou aprimoramento dos pensamentos matemáticos, pois esta seria uma contradição com o nosso próprio entendimento de “conceito” e de “pensamento matemático”, mas pretendemos contribuir para uma discussão que possa apontar direções e possíveis diálogos para o que se constitui como uma ideia de “educação por matemáticas” que transcende o ensino de matemática. Nesta concepção de educação por matemáticas são salientados, complementando a ideia de Pólya, os processos de *criação* e *descoberta* matemáticas, de *formação* e *transformação* de conceitos, definições, teoremas, etc. com ênfase na *imaginação*, *intuição* e *visualização*, assim como nos processos de *abstração*, *generalização*, *analogia* e *formalização* matemática, que pela sua constituição dinâmica, são manifestações de uma “experiência matemática”, entendendo que não há tal experiência sem essa dinamicidade subjacente aos pensamentos matemáticos.

Para Larrosa (2019),

[...] pensar a educação a partir da experiência a converte em algo mais parecido com uma arte do que com uma técnica ou uma prática. E é verdade que, a partir daí, a partir da experiência, tanto a educação como as artes podem compartilhar algumas categorias comuns. (p. 12)

Já Cifuentes (2016, p. 49), emulando a discussão de Platão sobre a possibilidade do ensino da virtude, aponta que “os valores, parte essencial da

floresta do conhecimento, não podem ser ensinados como seria o caso dos conteúdos, pois envolvem atitudes, ações, e não apenas conhecimentos prontos”. O autor aponta que a noção de conteúdo matemático, vistos como algo pronto, do ponto de vista pedagógico,

não permite incorporar diversos aspectos da floresta matemática, como os aspectos epistemológicos, estilísticos, etc., os quais envolvem atitudes de pensamento e visões de matemática, aspectos que não podem ser ensinados como os conteúdos os são, porque os atravessam em forma transversal. (CIFUENTES, 2016, p. 49)

Desta forma, vemos que alguns aspectos relacionados às matemáticas devem ser encarados como atos ou atitudes. Por exemplo, “provar” deve refletir uma atitude de *emancipação*, não apenas no sentido de já procurar provar a veracidade, mas no sentido de duvidar da veracidade, de questionar se aquilo que é apresentado de fato é verdadeiro; é procurar primeiramente o próprio convencimento e posteriormente o convencimento do outro. “Conjecturar” deve refletir uma atitude de *liberdade*, de criatividade, de investigação de propriedades, formulação de hipóteses, testes, etc. “Definir” deve ser consequência de uma atitude de *responsabilidade* pois está ligado a dar limites, amarrar, fechar, e essas amarras exigem a responsabilidade de representar adequadamente, um conceito que é dinâmico. Da mesma forma, “formalizar” deve decorrer de uma atitude de *socialização*, uma vez que formalizar é dar uma forma, não uma forma cristalizada, incontestável e absoluta, mas uma forma aceita por uma determinada sociedade como adequada.

Esta concepção de considerar aspectos ligados às matemáticas como atitudes vem ao encontro com o que defende Cifuentes (2010, p. 18), que destaca que, na construção do conhecimento, “mais importante que a consolidação de uma resposta é a elaboração, como movimento, de uma pergunta [...]”. E continua:

No método científico, nos padrões positivistas, a formulação de perguntas muitas vezes se traduz na elaboração ou criação de hipóteses ou conjecturas; elas são, na realidade, respostas provisórias, ocultando sua condição mais dinâmica de pergunta.

No método científico, a palavra ‘método’ refere a regras que visam a resolução de um problema. No método científico as regras são gerais, porém, não substituem a imaginação, a intuição e a criatividade do cientista, capacidades estas de natureza individual. (CIFUENTES, 2010, p. 18, grifos do autor)

Cifuentes (2016), destaca que além das ideias, se faz necessário observar a sua movimentação e a dinâmica do conhecimento, promovendo e desenvolvendo a imaginação, a sensibilidade, a intuição e aprimorando a criatividade no campo das matemáticas por meio de diversas formas de pensamento e raciocínio matemáticos, “como o pensamento avançado, o pensamento elementar, o pensamento visual” (p. 50) e formas de argumentação, como o raciocínio dedutivo, a indução, a abdução e a analogia, ligadas à intuição e imaginação.

Entendendo o caráter dinâmico de um conceito, não podemos falar em aprendê-lo, mas certamente pode haver um primeiro contato com ele, onde há uma formulação, mas já destinada a ser reformulada e movimentada constantemente. A nossa própria linguagem já nos trai quando temos que falar de *o conceito*, pois ela nos dá a impressão de que estamos falando de algo já pronto e acabado, mas não é isso que entendemos por conceito.

Tendo esse primeiro contato, podemos falar na evolução de um conceito, não em um sentido de atribuição de valor, querendo “torná-lo melhor”, mas com a ideia de expandi-lo, (des)envolvendo-o (ou seja, abstraindo-o tirando o envolvimento deste conceito com outros conceitos, definições, objetos que constituem sua gênese, olhando para ele de forma isolada) e também o envolvendo com outros conceitos e outros objetos.

Acreditamos que tanto a formação de conceitos matemáticos, enquanto ações, quanto os próprios pensamentos matemáticos podem ser formas de experiências matemáticas, onde estas experiências podem ser entendidas como uma vivência com as matemáticas, em um processo dinâmico de construção, desconstrução e reconstrução, descoberta e redescoberta, elaboração e reelaboração do feito, do concluído provisoriamente.

Não cabe, pelo discutido anteriormente, uma definição de “experiência matemática”, pois a temos como um conceito e, portanto, em evolução, não

podendo ser limitada. No entanto, já podemos considerar que uma experiência matemática deve se contrapor à “simples” aquisição de “informação matemática”. Em uma experiência estamos em movimento, nos valendo dos nossos múltiplos sentidos, tendo por primado a percepção das coisas para com ela avançar, o que diferencia experiência de sensação.

A fim de ilustração, discutiremos o Teorema do Isomorfismo no campo da *Teoria de Grupos*. Basicamente, o teorema consiste em afirmar que, se  $f$  é um homomorfismo entre dois grupos  $G$  e  $H$ , então o quociente de  $G$  pelo núcleo de  $f$  é isomorfo à imagem de  $f$ , isto é,

$$G / \text{Ker } f \cong \text{Im } f,$$

sendo a relação de equivalência em  $G$  correspondente a seguinte:  $a \equiv_{\text{Ker } f} b$  se, e somente se,  $a - b \in \text{Ker } f$ .

Primeiro devemos reconhecer que o conceito de “isomorfismo” dá uma limitação à possibilidade de penetrar, através da linguagem, na materialidade dos objetos (neste caso, grupos) envolvidos: do ponto de vista algébrico, se dois grupos são isomorfos, então, eles se comportam como se fossem o mesmo grupo, não importando sua natureza particular.

Do ponto de vista procedimental, normalmente este teorema é apresentado através de uma afirmação (ou proposição) e, na sequência, é provado (formalmente), logo, em seguida, são apresentados exemplos de aplicação e diversas consequências.

Esta abordagem esconde a historicidade por trás do teorema e sua gênese. Um primeiro passo na experiência matemática de sua prova (no sentido de experimentar, ou experienciar), poderia se dar pela formulação da seguinte pergunta: dado um homomorfismo  $f$  entre dois grupos  $G$  e  $H$ , como posso extrair dele um isomorfismo? Isto seria mais revelador da natureza da estrutura em estudo.

Pode parecer banal, mas o simples fato de, ao invés de trazer uma verdade pronta (ou seja, um teorema, que já é pré-estabelecido como verdadeiro, faltando

apenas “apresentar” a prova), fazer uma pergunta, já pode despertar atitudes, questionamentos e reflexões, afinal, segundo Cifuentes (2010):

O ponto de vista crítico incorpora o qualitativo na construção do conhecimento e põe em evidência suas características dialéticas e dinâmicas. Mais ainda, desse ponto de vista constatamos [como já observado] que, mais importante que a consolidação de uma resposta é a elaboração, como movimento, de uma pergunta. (p. 18)

Inicialmente, consideremos apenas  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer e  $f$  uma função entre estes conjuntos. Posteriormente, trataremos  $A$  e  $B$  como grupos, desta forma, pretendemos enfatizar um substrato conjuntista por trás do Teorema do Isomorfismo.

Nesse caso, para de um homomorfismo se extrair um isomorfismo, ele deve ser “transformado” em uma função injetora e sobrejetora. Tornar tal função em sobrejetora é fácil, basta restringir o contradomínio à imagem da função.

Para ser injetora teríamos que ter elementos distintos do domínio sendo levados em elementos distintos do contradomínio. Uma primeira ideia seria também limitar o domínio, retirando elementos que teriam imagens repetidas, mas daí, assim, poderíamos facilmente perder a ideia de morfismo. Uma ideia um pouco mais sofisticada seria criar uma relação de equivalência ( $\equiv$ ) para identificar elementos que têm a mesma imagem, isto é:

$$a \equiv b \text{ se, e somente se, } f(a) = f(b)$$

Assim, no processo de transformação, surge um novo conjunto como domínio da função  $f$ , o conjunto das classes de equivalência formadas por essa relação; este conjunto é o chamado “conjunto quociente”:

$$A/\equiv = \{[a]_{\equiv} ; a \in A\},$$

onde a classe de equivalência de  $a$  módulo a relação  $\equiv$  é:

$$[a]_{\equiv} = \{b \in A; f(b) = f(a)\}.$$

Desta forma, pode ser definida uma nova aplicação  $f$  no quociente (usando a mesma letra  $f$  por simplicidade), por  $f([a]_{\equiv}) = f(a)$  e ela está “bem definida”, pois, para cada  $b \in A$ , elemento de  $[a]_{\equiv}$ , temos que  $f(b) = f(a)$ , ou, em outras palavras, a aplicação não depende do representante escolhido da classe.

Assim, elementos que possuem mesma imagem formam uma mesma classe e a função definida no quociente resulta ser injetora, isto é,

$$f : A/\equiv \rightarrow \text{Im } f.$$

No entanto, se  $f$  for um homomorfismo entre dois grupos  $G$  e  $H$ , que por simplicidade consideraremos abelianos e com notação aditiva, temos que

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(a) - f(b) = 0 \Leftrightarrow f(a - b) = 0 \Leftrightarrow a - b \in \text{Ker } f.$$

Daí decorre que

$$a \equiv b \text{ se, e somente se, } a \equiv_{\text{Ker } f} b,$$

e, com isso, obtemos a versão do Teorema do Isomorfismo para Teoria de Grupos, de onde segue que

$$f : G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f,$$

é um isomorfismo.

Há outras versões para o Teorema do Isomorfismo, como na Teoria de Anéis, de Módulos e de Álgebras e até mesmo para Espaços Topológicos. Em níveis mais avançados, para alunos de pós-graduação em Matemática, uma investigação que

busque identificar as diferenças e semelhanças em cada teoria poderia ser uma experiência matemática bastante rica.

Note que o processo anterior não deve ser tomado como a demonstração lógica do teorema, e sim como um processo construtivo que ilumina o caráter de verdade da proposição como resposta à pergunta anterior que motiva o teorema.

Não estamos dizendo aqui que o explicitado anteriormente, se visto por um educando de teoria de grupos, o levaria à uma “conceitualização” do Teorema do Isomorfismo ou ao aprimoramento dos pensamentos matemáticos. O que estamos dizendo é que se o educador procurar, de alguma forma, questionar seus educandos sobre o objetivo deste teorema, que poderia ser a tentativa de “transformar” um homomorfismo em isomorfismo, a investigação para responder tal pergunta pode se constituir para o sujeito como uma experiência matemática que também pode, inclusive, levar a outros questionamentos e talvez até a outros teoremas análogos, enquanto que o simples enunciar e demonstrar o teorema, por si só, tem apenas caráter lógico informativo e restrito ao conteúdo específico ou, em outras palavras, que conhecer apenas o enunciado e a demonstração do teorema seria uma mera aprendizagem sem uma compreensão mais profunda, ou mais conceitual, onde o termo “compreensão” não deve ser visto à partir de seu significado literário, ligado à conter, nos remetendo à famosa citação de Heráclito: “Muito aprendido não nos ensina a compreender”.

Entendemos que este é um exemplo “simples” de como que a educação pela matemática acadêmica, vista como um processo que transcende o ensino desta matemática, dando ênfase aos questionamentos e a construção de matemáticas, frente ao ensino de uma matemática pronta e acabada, pode ser uma alternativa pedagógica que possibilite uma formação intelectual dos pensamentos matemáticos ao invés de uma mera informação matemática de cunho puramente lógico.

Esse caráter lógico informativo esconde não apenas a gênese do teorema, se não, também, sua importância para as matemáticas em seu processo de abstração, processo que, a partir do século XIX, trata a essência dos objetos apenas pela sua forma e não pelo seu conteúdo. A esse respeito, Cifuentes relata que:

[...] a nova Matemática não trata com objetos e sim com relações entre os objetos. Essa postura já foi pré-anunciada por David Hilbert quando afirmava que na geometria moderna tanto faz falar de pontos, retas e planos quanto de mesas, carteiras e canecas de cerveja, o importante são as relações entre esses objetos. Essa nova ontologia é a base da moderna visão estruturalista da Matemática, visão que permeia o século XX. (2012, p. 160)

Entendemos que ter a visão de que um conceito deve ser totalmente dominado, aprendido plenamente por uma pessoa, é mais do que um equívoco acerca da própria noção de conceito. No caso das matemáticas, é a transmissão falsa de que ela é algo “celestial”, inabalável, inquestionável e eterna. É jogar fora todo o processo de construção intelectual humana e social. Mais do que propor o conhecimento de conteúdos matemáticos, a educação por matemáticas pode e deve ser um meio formativo e transformativo de um cidadão flexível, sensível, criativo e questionador, capacidades estas necessárias para a construção do conhecimento, especialmente no campo das matemáticas.

Da mesma forma, Larrosa, a partir de Kertész, faz uma relação entre experiência e formação, porém usando o termo “educação” em um sentido mais restrito do que utilizamos aqui, que podemos trocar por “ensino” em nosso contexto:

a experiência é o que me acontece e o que, ao me acontecer, me forma ou me transforma, me constitui, me faz como sou, marca minha maneira de ser, configura minha pessoa e minha personalidade. Por isso, o sujeito da formação não é o sujeito da educação [do ensino] ou da aprendizagem e sim o sujeito da experiência: a experiência é a que forma, a que nos faz como somos, a que transforma o que somos e o que converte em outras coisas. (LARROSA, 2019, p. 48)

## 7 O LABIRINTO DA RACIONALIDADE: ALÉM DO LÓGICO E DO IDEOLÓGICO

Nos capítulos anteriores, discutimos, de um ponto de vista etimológico, entre outras, duas palavras em especial, “aprender” e “educar”. Com base em Anders, *et al.* (2001 – 2019), vimos que a palavra “aprender” vem do latim *apprehendere* e é composta pelos prefixos *ad* (para) e *prae* (antes) e pelo verbo *hendere* que significa “agarrar”, “prender”. Também vimos que sua etimologia, de certa forma, conota uma concepção, mesmo ligada ao ensino, de que o conhecimento poderia, de alguma forma, ser capturado, preso, pego, cristalizado. Uma concepção que, de alguma maneira, materializa a noção de conhecimento.

Também com base em Anders, *et al.* (2001 – 2019), vimos que a palavra “educar”, que também vem do latim, é composta pela palavra *ducere*, que significa “guiar”, “conduzir”, com o prefixo *ex*, que significa “fora de”, “a partir de” e que, desta forma, sua etimologia conota uma concepção de educação como algo semelhante a “guiar para fora”.

No entanto, uma de nossas principais referências é Wittgenstein. Como mencionamos anteriormente, a transição do primeiro para o segundo Wittgenstein marca uma mudança significativa na sua filosofia, especialmente no que diz respeito à questão da significação das palavras.

No primeiro Wittgenstein, como apresentado principalmente no *Tractatus Logico-Philosophicus*, a linguagem era vista como um reflexo direto da realidade, propondo uma teoria do significado, baseada na correspondência entre linguagem e mundo. Nesta concepção, as palavras tinham significado ao se referirem a objetos do mundo real, e a compreensão de uma sentença vinha da maneira como ela retratava fatos ou estados de coisas. Assim, a linguagem era vista como uma representação fiel da realidade, seguindo uma estrutura lógica precisa.

Já quando Wittgenstein reformulou suas ideias, naquilo que nos referimos como segundo Wittgenstein, apresentado especialmente no livro *Investigações Filosóficas*, o autor revolucionou essa abordagem. Ele argumentou que a linguagem é muito mais complexa e variada do que uma simples representação da realidade. Ao invés de buscar significados fixos e universais das palavras, ele propôs uma

visão mais pragmática e contextual da linguagem. Nessa nova perspectiva, os significados das palavras não estão em uma correspondência direta com objetos do mundo, mas são moldados pelos seus usos dentro de diferentes contextos, especialmente sociais, culturais e práticos. Wittgenstein introduziu a noção de "jogos de linguagem", nos quais as palavras obtêm significados por meio das atividades e práticas nas quais são empregadas, isto é, por meio da experiência. Assim, os significados não são fixos, mas são fluidos e mutáveis, dependendo do contexto e do uso.

O uso da palavra "educação" pode ser considerado um exemplo da noção de significação do segundo Wittgenstein. Vamos explicar melhor: Ao longo do tempo, os diversos contextos, necessidades e interesses que envolveram os processos de "educação", em sua complexidade, fizeram que esta palavra fosse utilizada de múltiplas formas, dando novos significados, menosprezando outros e, de forma dinâmica e, podemos aventar, até imperceptível, ressignificando seu uso. Entendemos que, assim, o caráter "formativo", relacionado à finalidade da palavra "educação", perdeu relevância frente a um caráter "informativo".

Assim, enquanto a etimologia da palavra "educação" remete a um significado intimamente ligada à *liberdade*, o seu uso, com o passar do tempo, trouxe uma significação em que a palavra é muitas vezes vista como algo que pode ser compreendido de maneira até contrária a "conduzir para fora". Quando se diz que uma criança é "mal-educada" e que, portanto, é preciso "educá-la", o que pode ficar subentendido é que é preciso "colocá-la dentro" de um determinado padrão de comportamento.

Vale destacar que, para os gregos, na noção de *paideia* (παιδεία), que se refere ao processo de educação, buscava-se "colocar" os jovens "dentro" de um padrão idealizado de humanidade, mas este padrão envolveria, de certa forma, alcançar o *aretê* (ἀρετή), que seria a "virtude" ou a "excelência", e a *sophia* (σοφία), que seria tanto o conhecimento teórico quanto a aplicação prática desse conhecimento para viver uma vida virtuosa e ética. Assim, entendia-se que, por meio da *paideia*, era possível alcançar o *aretê* e a *sophia* e, assim, o indivíduo seria livre, isto é, alcançaria a liberdade, a *eleutheria* (ἐλευθερία), sendo autônomo, capaz

de pensar criticamente, agir de acordo com “a razão”, capaz de governar a si mesmo e participar no governo da “pólis”.

A FEBEM (Fundação Estadual do Bem-Estar do Menor), que foi uma instituição brasileira criada para abrigar menores em situação de vulnerabilidade social, muitas vezes envolvidos em atos considerados infracionais, inicialmente, era encarregada de oferecer “educação”, assistência e reabilitação a esses jovens. Curiosamente, os jovens que estavam sob a responsabilidade da FEBEM eram chamados de “educandos” porque, oficialmente, a instituição tinha como objetivo principal proporcionar não apenas cuidados básicos, mas também oferecer oportunidades “educacionais” e de formação para ajudá-los a se reintegrar à sociedade. Cabe o questionamento se o termo “educando” destacava a ênfase na tentativa de “educar” e reabilitar esses jovens, visando à sua ressocialização, em uma concepção “emancipadora” – de *eleuthería*, onde estes jovens tornar-se-iam pensadores críticos, autônomos ética, intelectual e socialmente e ativos na política – ou em uma concepção de “enquadrá-los”, sabe-se lá como<sup>18</sup>, dentro de um padrão esperado, com uma ideologia por trás, previamente definida, onde estes jovens seriam adequados para servir à sociedade como mão de obra barata e sem participação política.

Entendendo a “exclusão social” como:

O processo pelo qual certos indivíduos e grupos são sistematicamente barrados ao acesso às posições que poderiam capacitá-los a uma vida autônoma dentro dos padrões sociais delimitados pelas instituições e instituições e valores em um dado contexto. (CASTELLS, 1998, apud SKOVSMOSE, 2007, p. 61)

E, desta forma, defendemos uma educação emancipadora, que objetive uma formação crítica, de pensamentos autônomos, ética e que contribua na formação para a participação política. Além do mais, defendemos uma educação que possa

<sup>18</sup> Recomendamos a leitura do depoimento “Na Febem é assim? A gente só aprende na porrada?” de Liane Pessin dos Santos e Lia Beatriz de Lucca Freitas, publicado na revista Psicologia: Ciência e Profissão em 1989, disponível em < <https://www.scielo.br/j/pcp/a/57mxPQdGzWyGGn6sHPwTr9m/> > acesso em 05 de janeiro de 2024.

oportunizar uma formação que possibilite aos educandos a capacidade de se conduzirem “para fora” de uma racionalidade, de um paradigma, de um estilo pensamento, contribuindo para a formação de novas racionalidades, buscando novas perguntas e novas repostas aos problemas emergentes. Isso não significa dizer que eles não devem ser capazes de compreender e pensar de acordo com a racionalidade ou as racionalidades vigentes. Pelo contrário, acreditamos que conhecer os limites de um conhecimento, ou de um pensamento, é uma forma de ultrapassá-los.

É importante para nós, por uma questão teórica, “abrir parênteses” e dizer que, quando defendemos uma concepção de “educação” mais abrangente à noção discutida de “ensino”, isto é, que remete à significação etimológica da palavra “educar”, por mais que isso possa dar a sensação de que estamos defendendo que a noção que damos aos termos e aos seus usos deva se restringir à tal significação, algo que remeteria ao primeiro Wittgenstein, não é isso que pretendemos! Quando discutimos, em especial, os termos “ensinar” e “educar” a partir de suas etimologias, estamos apenas trazendo um contexto de significação como um ponto de partida, mas não defendendo, no geral, que a significação das palavras deva se restringir a sua etimologia. “Fecha parênteses”.

Voltando à noção de educação, no campo da matemática, defendemos uma concepção da mesma como algo que vai além do ensino desta ciência, que dê ênfase à noção de emancipação neste campo, pois acreditamos que, concebendo a educação desta forma, podemos objetivar oportunizar a formação de conceitos matemáticos e o aprimoramento do pensamento matemático, como defendemos anteriormente, mas, além disso, acreditamos que esta seja uma forma de, por meio da educação (institucionalizada), contribuir para a formação de novas *racionalidades*, o que se faz vital para trazer possíveis respostas aos emergentes problemas sociais e ambientais que vivemos.

Da mesma forma, como sugerido anteriormente, vamos discutir aqui, mais a fundo, a noção de “racionalidade” e também começaremos pela etimologia da palavra.

## 7.1 RACIONALIDADE: ETIMOLOGIA, SIGNIFICAÇÃO E A VISÃO DE JÜRGEN HABERMAS

Mais uma vez, de acordo com Anders, *et al.* (2001 - 2019), a palavra “racionalidade” também vem do latim e é formada pelos componentes léxicos *reor*, que significa “pensar”, mais o sufixo *acionalidade*, que seria a “qualidade relacionada com a ação e efeito de”, portanto, racionalidade significa “qualidade relacionada à ação e efeito de conhecer, pensar e julgar”. Outra possível etimologia para a palavra “racionalidade”, seria também do latim, porém de *ratio*, que significa razão, proporção.

O *Dicionário de Filosofia* de Abbagnano (2007), que temos utilizado para discutir os termos que conceitualizamos neste trabalho, não traz a palavra “racionalidade” apesar de, curiosamente, utilizá-la noventa vezes para significar outros termos! Já o *Dicionário de Filosofia* de Mário Bunge (BUNGE, 2002, p. 325 – 327) nos diz que a palavra “racionalidade” pode ser utilizada com vários propósitos distintos, sem dizer o que seria a própria racionalidade, revelando uma noção universal do autor para o termo.

No entanto, de uma maneira geral, podemos dizer que, na filosofia, o termo “racionalidade” refere-se à capacidade humana de raciocinar, pensar “logicamente” e tomar decisões com base na “razão”. Esta noção que aqui trazemos, acreditamos, que poucos filósofos contestariam e muitos já a discutem com mais profundidade.

Os primeiros questionamentos que formularemos aqui, e que pretendemos abordar neste capítulo, referem-se às noções de “lógica” e “razão” e suas interrelações. Uma concepção positivista engendra tanto a lógica quanto a razão como estas sendo universais e, portanto, cristalizadas. A sociologia e a antropologia já combatem há tempo esta concepção. Assim, há “lógicas” e “razões” e, portanto, formas diferentes de “pensar logicamente” e “tomar decisões com base na ‘racionalidade’”. Por consequência, não haveria uma racionalidade universal, mas sim diversas formas de racionalidade.

Veremos que, desta forma, o termo “racionalidade” pode se confundir com o termo “ideologia” em um contexto sociológico, mas destacamos o distanciamento

de uma concepção preconceituosa deste último termo em um sentido político em uma acepção pejorativa.

Na filosofia, em especial, podemos começar citando Jürgen Habermas, nascido em 1929 na Alemanha, um dos filósofos contemporâneos mais influentes. Sua obra extensa e diversificada abrange campos como teoria crítica, ética, filosofia política e sociologia. Habermas é conhecido por suas contribuições significativas para a compreensão da “racionalidade comunicativa” e suas implicações para a sociedade e a política modernas.

A noção de “racionalidade comunicativa” é uma das áreas centrais do pensamento de Habermas. Ele se baseia na ideia de que a comunicação é a essência da atividade humana racional. Contrapondo-se a visões puramente instrumentais da razão, Habermas enfatiza a importância da comunicação como um processo fundamental para alcançar o entendimento mútuo. Vale destacar que para Habermas, evidentemente que comunicação é pensada em um sentido amplo de múltiplos significados e sentidos dados aos termos e não em uma acepção que restringe a significação dos termos aos seus “significados lógicos”. Por consequência, a racionalidade comunicativa, que é uma forma de racionalidade que se baseia na comunicação e no diálogo entre indivíduos para alcançar entendimento e consenso, também é dinâmica e não cristalizada e está suscetível a constantes modificações e reconstruções.

Dentre as principais obras de Habermas, em que ele discute a “racionalidade comunicativa”, podemos rapidamente destacar: *A Lógica das Ciências Sociais*, *Teoria do Agir Comunicativo* e *Entre Naturalismo e Religião*.

No livro *A Lógica das Ciências Sociais*, Habermas (2009) oferece uma análise crítica da teoria do conhecimento e da metodologia das ciências sociais. Ele questiona a tentativa das ciências sociais de se equipararem às ciências naturais e propõe uma abordagem distinta para compreender o mundo social.

Habermas destaca a singularidade das ciências sociais em relação às ciências naturais. Ele enfatiza que a complexidade das interações humanas e a natureza dos fenômenos sociais demandam uma compreensão que ultrapasse a simples aplicação de métodos científicos objetivos. O autor sugere que a

racionalidade na esfera social está intimamente relacionada à comunicação entre indivíduos, ressaltando também o papel crucial da ação comunicativa e da linguagem na construção e interpretação da realidade social. O autor critica a ideia de transferir diretamente os métodos científicos das ciências naturais para o estudo da sociedade, enfatizando a necessidade de uma abordagem *reflexiva* e *crítica* para compreender a sociedade. Nesta obra, Habermas estabelece os alicerces para a posterior *teoria da ação comunicativa*. Nesta teoria, a racionalidade não é apenas técnica, mas uma construção social derivada da comunicação e interação entre os indivíduos (HABERMAS, 2009).

Assim, Habermas faz uma crítica a chamada “racionalidade técnica”, especialmente em sua forma instrumental, por se concentrar principalmente na eficiência e na funcionalidade, muitas vezes, se não todas as vezes, desconsiderando questões éticas e sociais. Ele argumenta que essa forma de racionalidade, a técnica, tende a tratar seres humanos e sociedades como objetos a serem manipulados, em vez de sujeitos ativos com interesses, valores e direitos. Assim, tal racionalidade poderia implicar naquilo que ele chama de dominação técnica, onde decisões seriam tomadas exclusivamente com base em critérios puramente técnicos, sem considerar a participação ou o consenso das pessoas afetadas.

Já em *Teoria do Agir Comunicativo*, Habermas (2012) explora a importância da comunicação na formação da sociedade. Ele argumenta que a racionalidade não é apenas algo individual, mas um processo social construído por meio da interação entre as pessoas. O autor destaca dois tipos de racionalidade: a instrumental, voltada para a eficiência individual, e a comunicativa, focada na busca pelo entendimento mútuo por meio da linguagem.

Não temos por intenção aprofundar os nossos estudos nesta classificação de tipos de racionalidades. Para nós, basta destacar que o autor enfatiza que a linguagem desempenha um papel crucial na coordenação social, permitindo que indivíduos “compartilhem” significados e normas e que ele defende a construção de uma racionalidade que não foque exclusivamente na eficiência e na eficácia de meios para alcançar determinados fins (individuais). Ao contrário, ele defende uma

racionalidade orientada para a interação e a coordenação de ações através do entendimento mútuo. O autor ressalta a esfera pública como um espaço onde debates racionais formam opiniões públicas fundamentadas. Isso, para ele, é vital para uma sociedade democrática, onde decisões políticas são legitimadas por meio do discurso racional.

Resumindo, em *Teoria do Agir Comunicativo*, Habermas oferece uma visão abrangente sobre como a comunicação, a linguagem e a interação são fundamentais para a construção da racionalidade e da ordem social, destacando o papel crucial do discurso racional na formação de consensos e na estruturação da esfera pública em sociedades democráticas.

Por fim, em *Entre Naturalismo e Religião*, Habermas (2007) explora o diálogo entre visões seculares e religiosas na sociedade contemporânea. Publicada em 2005, essa obra destaca o potencial de colaboração e entendimento entre estas perspectivas aparentemente divergentes. O autor investiga como o discurso racional e a ética podem servir como pontos de convergência entre o naturalismo, que tende a valorizar a razão e a ciência, e as perspectivas religiosas, que se baseiam em fundamentos transcendentais e espirituais. Habermas defende que, apesar das diferenças fundamentais, tanto o naturalismo quanto a religião podem contribuir para questões morais e políticas na esfera pública. Habermas acredita na necessidade de um diálogo respeitoso entre ambos os campos para abordar desafios éticos e sociais complexos da atualidade. O autor também analisa a contribuição das tradições religiosas para a formação de valores e normas compartilhados na sociedade, reconhecendo seu potencial na construção de uma ética comum, mesmo em um mundo cada vez mais secularizado.

Em suma, com base nestas obras, podemos dizer que Habermas defende que a racionalidade comunicativa é baseada na busca por um consenso racional e não na dominação ou manipulação, criticando abordagens puramente técnico-instrumentais da racionalidade e argumentando que a construção de uma racionalidade participativa, aberta ao diálogo e à contestação, que ele chama de “verdadeira racionalidade”, destacando mais uma vez que esta não seria engessada já que, por natureza da comunicação seria destinada a estar sempre em constante

mudança. Sua teoria da ação comunicativa propõe que a racionalidade não é apenas um atributo individual ou técnica, mas é construída socialmente por meio do discurso, isto é, da comunicação e interação entre as pessoas. A validade das afirmações é estabelecida através do consenso alcançado em condições ideais de comunicação, onde todos teriam a oportunidade de expressar seus pontos de vista de forma livre e igual. Vale enfatizar o papel da linguagem, da significação, em especial nos meios institucionais, como os meios de educação, para a construção e reconstrução da racionalidade.

Lembramos que na lógica matemática já se defende que "a verdade é o que a comunidade aceita como verdade" e isso tem a ver com a mudança do conceito de rigor matemático. A maior parte dos matemáticos dos séculos XVII ao século XIX achava que os cálculos com infinitesimais eram satisfatórios.

As contribuições de Jürgen Habermas para a filosofia da racionalidade, se assim podemos chamar, particularmente através de sua teoria da ação comunicativa, continuam a influenciar campos que vão desde a filosofia política até a ética e a sociologia. Entendemos que sua defesa de racionalidade, como um processo social e participativo, é fundamental para a compreensão de como a comunicação desempenha um papel crucial na construção do conhecimento e na tomada de decisões nas sociedades contemporâneas. Além disso, suas contribuições sobre o tema, especialmente em relação às ciências sociais, oferecem uma perspectiva crítica e reflexiva que pode ser aplicada de maneira frutífera ao que pensamos e já discutimos por educação matemática, encontrando também ressonância nas pesquisas de Ole Skovsmose. Ao explorar a crítica de Habermas à "racionalidade técnica" e à sua ênfase na ação comunicativa, objetivamos desenvolver uma compreensão mais ampla, ética e crítica na educação por meio das matemáticas.

Por exemplo, Habermas (2009), em *A Lógica das Ciências Sociais*, destaca a complexidade dos fenômenos sociais e a necessidade de uma abordagem que vai além da aplicação de métodos científicos objetivos. Ele argumenta que a comunicação e a interação são fundamentais para a construção e interpretação da realidade social, e que as ciências sociais não devem simplesmente imitar as

ciências naturais em sua metodologia. Esse ponto é particularmente relevante para a educação, uma vez que uma acepção restrita de matemática, em uma tendência de tratar o seu ensino como uma mera transmissão de técnicas e procedimentos, pode desconsiderar o papel crucial da comunicação e do entendimento contextual. Pouco contribuindo para o que Habermas chama de “racionalidade comunicativa” ou simplesmente o que entendemos por formas alternativas de racionalidade.

Ole Skovsmose, pesquisador em Educação Matemática que mencionamos, tem enfatizado a importância de uma abordagem crítica e reflexiva no ensino da matemática. Ele, assim como muitos pesquisadores desta área, argumenta que o ensino da matemática não deve ser visto apenas como a transmissão de conhecimentos técnicos, mas como uma prática que deve considerar o contexto social e cultural dos estudantes. Skovsmose (2007) propõe que a matemática poderia ser um meio de empoderamento, permitindo que os estudantes compreendam e questionem as estruturas sociais e econômicas ao seu redor, criticando que normalmente não é isso o que ocorre.

[...] Em *Discipline and Punish*, Foucault descreve prisões e escolas como tecnologias do social, de tal forma que a população possa ser manipulada. De acordo com Walkerdine<sup>19</sup>, a educação matemática é uma de tais técnicas, que ajuda a garantir o funcionamento da ordem social, não pela coerção aberta, mas por tornar certo que cidadãos racionais utilizem seu livre-arbítrio aceitando a ordem imposta. (SKOVSMOSE, 2007, p. 28, grifos do autor)

Essa perspectiva ressoa com a crítica de Habermas à racionalidade técnica. Skovsmose (2007) sugere que a matemática, muitas vezes apresentada de maneira neutra e descontextualizada, pode ser utilizada para perpetuar formas de dominação técnica. Por exemplo, a ênfase excessiva na eficiência e precisão pode obscurecer as implicações éticas e sociais do uso da matemática em questões como a economia, a política e o planejamento urbano. Assim, Skovsmose (2007) defende uma educação matemática que vá além da técnica, incorporando uma análise crítica dos contextos em que os conhecimentos matemáticos são aplicados.

<sup>19</sup> Valerie Walkerdine, mais precisamente na obra *Counting Girls Out*.

Vamos além e defendemos uma educação por matemáticas, que além de incorporar uma análise crítica dos contextos em que os conhecimentos matemáticos são aplicados, busque construir novos conhecimentos matemáticos que forneçam respostas alternativas à problemas sociais, econômicos e ambientais.

A ênfase de Habermas na ação comunicativa também oferece uma base para repensar as práticas pedagógicas na educação por matemáticas. Em vez de ver os estudantes como receptores passivos de conhecimento, a teoria da ação comunicativa sugere um modelo onde os estudantes são participantes ativos no processo de aprendizado, algo que há muito também vem sendo defendido dentro não só da Educação Matemática quanto em outras áreas, como a Psicologia, em consonâncias com as teorias de Piaget e Vygotsky, entre outros. Isso envolve o diálogo aberto, a discussão crítica e a construção conjunta de entendimento, permitindo que os estudantes, enquanto educandos, desenvolvam não apenas habilidades técnicas, mas também competências comunicativas e reflexivas.

Portanto, a crítica de Habermas à racionalidade técnica e sua ênfase na comunicação e na ação reflexiva proporcionam uma estrutura teórica rica para as pesquisas de Skovsmose. Não à toa ele é uma de suas referências. Ambas as perspectivas desafiam a visão tradicional do ensino de matemática como um campo puramente técnico e promovem uma abordagem que integra considerações éticas, sociais e comunicativas, tornando a matemática, ou como entendemos, as matemáticas, ferramenta não apenas para a solução de problemas técnicos, mas também para a compreensão e transformação do mundo social.

Também vale destacar, ou reforçar, que a teoria da ação comunicativa de Habermas, que diferencia a racionalidade instrumental da racionalidade comunicativa, também oferece contribuições importantes para a educação por matemáticas, uma vez que a racionalidade comunicativa é baseada na busca de entendimento mútuo por meio da linguagem e do diálogo, ao contrário da racionalidade instrumental, que se concentra na eficiência individual. Desta forma, no contexto educacional, isso sugere que o ensino de matemáticas deve promover o diálogo e a interação entre alunos e professores, valorizando o processo de construção coletiva de conhecimentos.

Habermas destaca o papel da linguagem na coordenação social e na formação de consensos, especialmente em uma sociedade democrática. Ele argumenta que o discurso racional é essencial para a formação de opiniões públicas fundamentadas e para a legitimidade das decisões políticas. Na educação matemática, isso implica a necessidade de criar espaços onde os estudantes possam expressar livremente suas ideias e preocupações, discutir e criticar conceitos matemáticos, e construir coletivamente significados e entendimentos.

Além disso, em *Entre Naturalismo e Religião*, Habermas explora o potencial de colaboração entre visões seculares e religiosas, destacando a importância do diálogo para abordar questões éticas e sociais complexas. Essa ideia de diálogo e integração de diferentes perspectivas e visões também é relevante para nós no contexto da educação por matemáticas, pois, assim, fica evidente a importância de reconhecer e valorizar a diversidade de experiências e contextos culturais dos educandos, algo muito defendido, em especial, no campo da Etnomatemática. Da mesma forma Skovsmose (2007) argumenta que a matemática – ou as matemáticas, conforme estamos discutindo – pode ser uma ferramenta poderosa para compreender e criticar as realidades sociais, desde que os educandos sejam encorajados a explorar como os conceitos matemáticos se aplicam ao mundo real e às questões sociais, e que ela também tem papel importante na formação da racionalidade.

A matemática representa uma preocupação da educação matemática crítica. A matemática deve ser considerada não somente de uma perspectiva educacional, mas também de uma perspectiva filosófica e sociológica. Ela representa um importante aspecto de desenvolvimento da racionalidade ou “razão”. Representa uma gigantesca variedade de técnicas culturais integradas em artes manuais, rotinas de vida diária, ciências, tecnologias, economia, negócios, indústrias, Forças Armadas ao redor de todo o mundo. Mais, a matemática parece representar um aspecto particular da globalização e, por conseguinte, da guetorização. A matemática está em ação em uma variedade de técnicas e tecnologias, que definem tanto a sociedade informacional como a rede global. (SKOVSMOSE, 2007, p. 76 – 77, grifos do autor)

Em suma, as contribuições de Habermas para a compreensão da racionalidade como um processo social e comunicativo são fundamentais para repensar a educação matemática. Sua crítica à racionalidade técnica e sua ênfase na racionalidade comunicativa oferecem uma base para uma abordagem da educação matemática que valoriza o diálogo, a reflexão crítica e a participação ativa dos alunos. As pesquisas de Skovsmose se alinham a essa visão, propondo uma educação matemática que não apenas ensina habilidades técnicas, mas também promove uma compreensão crítica das funções sociais da matemática, preparando os alunos para serem cidadãos informados, mas também formados e críticos em uma sociedade democrática.

## 7.2 CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE CHARLES TAYLOR PARA A NOÇÃO DE RACIONALIDADE E INFERÊNCIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Já o canadense Charles Taylor, nascido em 1931, é um filósofo contemporâneo que oferece contribuições substanciais para a compreensão da racionalidade por meio de suas investigações acerca de questões que vão desde a identidade individual até a natureza da ação humana em contextos sociais e culturais. Suas reflexões destacam-se na filosofia contemporânea, especialmente em campos como a filosofia política, moral e social.

Taylor é conhecido por seu foco na questão da identidade e da autenticidade. Na obra *As Fontes do Self: A Construção da Identidade Moderna* (1997), publicada originalmente em 1989, na língua inglesa<sup>20</sup>, ele explora a formação da identidade humana ao longo da história, examinando como as ideias sobre o "eu" evoluíram e como influenciam a maneira como nos percebemos e nos relacionamos com o mundo.

<sup>20</sup> Sources of the Self: The Making of the Modern Identity. Harvard University Press, 1989. United States. 624 páginas.

Nesta obra, o autor canadense analisa a evolução histórica da noção de racionalidade, desde a antiguidade até a modernidade, destacando como essa evolução impactou a compreensão de si mesmo, da identidade pessoal, onde, para ele, “racionalidade significa pensar de acordo com certos cânones, é uma propriedade interna do sujeito, em vez de constituir em sua visão [nua] da realidade” (TAYLOR, 1997, p. 206). Esta concepção já revela uma noção não universal de racionalidade, mas sim individual – mesmo que esta esteja em constante reconstrução e adaptação por processos de socialização, ficando a mercê de processos que busquem moldá-la dentro de um padrão – fechando, assim, as portas para a impossibilidade da construção de novas racionalidades, onde sugerimos que a educação por matemáticas deve contribuir.

Taylor discute a questão da racionalidade como um dos aspectos centrais na formação da “identidade moderna”, explorando como a racionalidade, especialmente a racionalidade instrumental, guiada por procedimentos (influência cartesiana), se tornou uma característica da modernidade.

Mais precisamente, o autor argumenta que, na modernidade, houve uma ênfase crescente na racionalidade instrumental – “o tipo de racionalidade em que nos baseamos ao calcular a aplicação mais econômica dos meios para determinado fim. Eficiência máxima, a melhor relação entre custo-benefício, é a sua medida de sucesso” (TAYLOR, 2011, p. 14) –, que foca na eficiência, no controle e na utilidade. Neste sentido, a razão é utilizada para alcançar objetivos específicos de forma “eficaz e eficiente”, em um sentido de capacidade de manipular e controlar o mundo ao nosso redor para atender às necessidades e desejos, contribuindo para a compreensão das noções de ciência e tecnologia e seus avanços por consequência. Para o autor, é importante destacar que a razão instrumental:

também cresceu com um modelo livre de sujeito humano, o qual possui uma grande sustentação em nossa imaginação. Oferece um retrato ideal de um humano que pensa que se dissociou de sua incorporação confusa em nossa constituição corporal, nossa situação dialógica, nossas emoções e nossas formas tradicionais de vida com o intuito de ser racionalidade pura, autoverificante. (TAYLOR, 2011, p. 102)

Vale destacar que a racionalidade instrumental se refere ao uso de meios eficientes para alcançar fins específicos, sendo, assim, uma forma de raciocínio focada na eficácia, na escolha dos métodos mais apropriados e eficientes para atingir determinados objetivos. Esse tipo de racionalidade é frequentemente associado a processos de tomada de decisão em que o sucesso é medido pelo grau de alcance de um objetivo predefinido. Ela é essencialmente utilitária, concentrando-se na maximização dos resultados com base nos recursos disponíveis.

Já a racionalidade técnica, criticada por Habermas, conforme discutimos na seção anterior, por outro lado, é um conceito mais específico que se aplica ao uso de técnicas e tecnologias para alcançar eficiência e funcionalidade. Ela se assemelha a racionalidade instrumental no sentido de que também se preocupa com a aplicação de meios eficientes, mas está mais estreitamente ligada à utilização de conhecimentos técnicos e científicos para resolver problemas práticos. A racionalidade técnica envolve a implementação de métodos técnicos, a aplicação de ciências naturais e engenharias, e o uso de dispositivos tecnológicos para melhorar a eficácia de processos e produtos.

Assim, a racionalidade técnica pode ser vista como uma forma específica de racionalidade instrumental aplicada a contextos técnicos e tecnológicos. Enquanto a racionalidade instrumental abrange uma ampla gama de atividades humanas onde a eficiência e a eficácia são valorizadas, a racionalidade técnica se foca em contextos onde conhecimentos técnicos e tecnológicos são aplicados. De qualquer forma, a “busca pela eficácia” está presente em ambos os conceitos.

Da mesma forma que, como vimos, Skovsmose (2007) sugere que uma concepção de matemática como conhecimento neutro e descontextualizado pode contribuir, inclusive propositalmente, para a manutenção de formas de poder, por meio da técnica, podemos sugerir aqui, de forma mais abrangente, que tal concepção de matemática também não tem a contribuir com a desconstrução da racionalidade instrumental, uma vez que, assim, ela própria se consolida como principal “instrumento” de tal racionalidade.

Essa matemática pode ser vista como um bem último, realizado pelos “embaixadores” da matemática, sendo Dieudonné um deles. Tais embaixadores olhavam a matemática como um aspecto essencial de nossa cultura, a única forma de pensamento e análise, como uma indispensável ferramenta conceitual para nosso entendimento da natureza. Conseqüentemente, eles acreditavam que a matemática podia ser um bom início para conduzir os estudantes para esse quadro de conhecimento e pensamento. (SKOVSMOSE, 2007, p. 30, grifos do autor)

Já Taylor (2005) argumenta que essa ênfase na “eficácia” pode levar a uma visão reducionista da vida humana, onde tudo é avaliado com base em sua utilidade prática, deixando de lado outros valores e formas de entendimento. Ele contrasta essa visão com a noção de racionalidade que valoriza a realização de potencialidades humanas mais amplas. Entendemos que uma noção de ensino de matemática, conforme discutimos no capítulo 5, restrita à transmissão de conteúdos, contribui para a consolidação desta racionalidade instrumental. Em contrapartida, sugerimos que uma concepção mais abrangente de educação, conforme discutimos no mesmo capítulo 5, por matemáticas, possa contribuir para esta visão de racionalidade defendida por Taylor, valorizando potencialidades humanas mais amplas. Esta educação aproximar-se-ia, assim da noção grega de *paideia*.

Ainda de acordo com o autor canadense, desprovido do convívio com o próximo, ou seja, sem a interação com o outro na sociedade, torna-se impossível que o ser humano desenvolva plenamente todas as suas potencialidades enquanto ente relacional, possuidor de linguagem e, ademais, dotado de dimensões simbólicas. Taylor critica que, na sociedade atual, ao contrário disso, para o ser humano:

[...] a experiência mais significativa, que lhe parece mais vital, que lhe parece tocar o cerne de seu ser, é a experiência privada. A experiência pública lhe parece secundária, estreita e paroquial, tocando meramente uma parte de seu ser. Caso essa experiência tente fazer valer sua reivindicação da antiga centralidade, o indivíduo entra em conflito com ela e tem de combatê-la. (TAYLOR, 2005, p. 117 - 118)

O autor acredita que uma forma de racionalidade, que valorize o convívio social, é crucial para uma vida autêntica, pois permitiria que os indivíduos se conectem com suas verdadeiras aspirações e que, assim, vivam de forma coerente com quem realmente são, enquanto ser coletivo. Desta forma, para ele, um desafio atual em nossa sociedade seria integrar essas duas formas de racionalidade. Ele sugere que uma identidade plena e autêntica requer um equilíbrio entre a eficiência prática e a realização pessoal mais profunda. No que tange ao papel da educação matemática e sua contribuição nesse contexto, fica claro que o ensino, por si só, não contribui para este desafio e, assim, uma visão de educação mais ampla, que transcende o ensino, como defendemos, se faz não só mais adequada como necessária.

Em resumo, Taylor está preocupado com o fato de que a ênfase excessiva na racionalidade instrumental na modernidade pode suprimir outras formas importantes de compreender e viver a vida, e ele propõe a necessidade de um equilíbrio que permita uma expressão mais completa da identidade humana. A discussão do autor sobre a racionalidade está inserida em um quadro mais amplo de sua análise sobre as fontes do *self* e como diferentes culturas e épocas históricas moldaram a compreensão da identidade. Nesta análise, ele argumenta que a identidade moderna é profundamente influenciada pela tensão entre diferentes formas de racionalidades e pelos desafios de integrar essas diferentes perspectivas em uma vida autêntica e coerente.

Outra obra de Taylor que podemos destacar, que aborda a racionalidade, é *The Language Animal: The Full Shape of the Human Linguistic Capacity* (2016). Nesta obra, o autor aborda e explora como a linguagem molda nossa compreensão do mundo e influencia nossos modos de racionalização e tomada de decisão.

A criação do espaço público pela linguagem é a capacidade de colocar as coisas *entre* e *diant*e dos interlocutores em uma conversação. Por meio dessa capacidade o que é falado deixa de ser uma questão para *mim* e para *você* e torna-se assunto para *nós*. O exemplo paradigmático usado por Taylor para ilustrar essa propriedade da linguagem é o de uma conversação informal que cria uma relação entre duas pessoas a qual ele procura distinguir de uma mera comunicação visando troca de informações, pois, neste

último caso, o *locus* consiste sempre nos indivíduos (, 1985, p.259) (*sic*). Com efeito, no seu *The Language Animal* o autor remete-nos ao conceito de *atenção conjunta* (*joint attention*) evocado, entre outros, pelo psicólogo Michael Tomasello e à relação desse conceito com a noção de comunhão. Segundo a perspectiva evocada por esse conceito, o processo de desenvolvimento da linguagem no indivíduo muito provavelmente está associado à capacidade já presente em crianças de *compartilhar* com outros um objeto como foco de referência e essa habilidade primitiva é algo que a linguagem também permite expandir enormemente. (COSTA, 2021, p. 35, grifos do autor)

Podemos dizer que Taylor contribui para uma visão mais ampla a noção de racionalidade. Ele critica abordagens estritamente científicas desse conceito, enfatizando a importância das experiências e das perspectivas individuais e culturais na formação de juízos e decisões. O autor destaca a necessidade de reconhecer a complexidade da racionalidade, considerando a diversidade de influências que moldam o pensamento humano, ressaltando a importância das dimensões culturais, históricas e linguísticas na maneira como compreendemos e interagimos com o mundo, defendendo uma racionalidade mais contextualizada.

Vale destacar também que sua obra não só aborda questões fundamentais sobre a natureza da racionalidade humana, mas também reflete uma profunda influência das ideias de Wittgenstein. Ao argumentar em *As Fontes do Self* que a racionalidade não pode ser entendida apenas como um processo cognitivo isolado, mas deve ser compreendida dentro do contexto mais amplo da vida humana e das interações sociais e culturais, o autor vê a racionalidade não apenas como uma questão de seguir princípios lógicos, mas também envolvendo aspectos emocionais, sociais e históricos. Ele destaca a importância das narrativas e das tradições culturais na formação da racionalidade individual e coletiva. Ao examinar as diversas fontes de significado e identidade, Taylor propõe uma abordagem mais holística da racionalidade, que leva em consideração tanto os aspectos racionais quanto os emocionais e sociais da experiência humana.

Isso se dá, pois, uma das ideias centrais de Wittgenstein que ressoa na obra de Taylor é a noção de que o significado não reside apenas nas palavras em si, mas surge da maneira como são utilizadas em contextos específicos. Taylor compartilha

da visão de Wittgenstein de que a compreensão humana é profundamente enraizada em práticas sociais e linguísticas, e que os significados das palavras e conceitos estão intrinsecamente ligados ao seu uso em diversas situações.

Além disso, Taylor argumenta que a racionalidade está intrinsecamente ligada à questão da autenticidade e da realização pessoal. Ele defende a ideia de que a busca pela autenticidade é uma parte essencial da vida racional, e que os indivíduos devem buscar viver de acordo com seus próprios valores e aspirações, em vez de simplesmente seguir normas externas ou convencionalismos sociais.

Entendemos que as reflexões sobre a racionalidade instrumental feita por Charles Taylor, assim como a discussão sobre a racionalidade técnica, feita por Jürgen Habermas, juntamente com as contribuições de Ole Skovsmose, oferecem um panorama amplo e complexo sobre a forma como a racionalidade influencia e é influenciada pela educação matemática e a compreensão da identidade humana na modernidade. Através de uma análise detalhada, podemos entender como esses conceitos se entrelaçam e moldam a prática educacional, especialmente no contexto da matemática, e como eles influenciam a formação de uma concepção singular de racionalidade, restringindo apenas ao ensino o papel da educação matemática, amparada na “eficácia”.

Habermas e Taylor criticam a supremacia da racionalidade que se concentra na eficiência e funcionalidade, muitas vezes ignorando questões éticas e sociais. Podemos emular estas críticas no campo da educação matemática quando há uma tendência de focar excessivamente em habilidades técnicas e procedimentos, negligenciando o desenvolvimento crítico e a contextualização social do conhecimento matemático. De certa forma, é isso o que faz Ole Skovsmose, quando se alinha às críticas de Habermas, argumentando que a educação matemática deve transcender a mera transmissão de técnicas, promovendo uma compreensão crítica que permita aos indivíduos questionar e interagir com o mundo ao seu redor de maneira crítica.

No contexto da educação matemática, essa supremacia da racionalidade baseada na eficiência pode se manifestar na forma de um currículo que privilegia a memorização e a aplicação de fórmulas em detrimento do desenvolvimento de um

pensamento crítico e reflexivo, assim como em instrumentos de “avaliação” ou “sistemas de classificação” daqueles que “estão aptos” para ingressar em uma universidade pública ou privada e daqueles que não estão aptos para nenhuma das duas. Além do mais, entendemos que, de qualquer forma, tal visão nos distancia cada vez mais da possibilidade de dar resposta aos problemas emergentes de nossa sociedade. Por exemplo, enquanto precisamos de alternativas à nossa forma de mercado, a racionalidade instrumental só contribui para encontrarmos formas diferentes de ser ainda mais eficiente dentro do mesmo modelo de mercado.

Taylor, ao discutir a importância de uma racionalidade que valorize o convívio social e o desenvolvimento pleno das potencialidades humanas, nos sugere a necessidade de uma educação que vá além do técnico e do instrumental. Ele defende uma abordagem que promova o diálogo, a interação social e a construção de significados compartilhados, alinhando-se com a teoria da ação comunicativa de Habermas, que valoriza a comunicação e o entendimento mútuo como pilares da racionalidade.

Além disso, Taylor explora como a linguagem e as práticas culturais influenciam nossa compreensão do mundo e nossas formas de racionalidade. Ele argumenta que a linguagem não é apenas um meio de comunicação, mas também uma ferramenta crucial na formação de nossa identidade e na maneira como entendemos a realidade. Essa perspectiva sugere a importância de considerar o contexto cultural e linguístico no processo educacional, especialmente na educação matemática, onde a linguagem desempenha um papel fundamental na construção de conceitos e na resolução de problemas.

Por exemplo, na língua portuguesa temos tanto o verbo “ser” quanto o verbo “estar” com significados diferentes. Da mesma forma para as outras línguas de origem latina. Já no inglês, alemão e russo, por exemplo, temos apenas um verbo que pode designar o “ser” ou o “estar”, no inglês é o *to be*, no russo é o *быть* (byt) e no alemão temos o *sein*. A pergunta que fazemos é: quais significados são atribuídos a estes verbos pelos nativos destes idiomas? Os significados estão mais próximos dos que damos ao verbo “ser” ou ao verbo “estar”? Aos dois ou a nenhum dos dois? Responder estas perguntas, se assim for possível, pode ajudar a entender

características do pensamento e, portanto, das ciências apresentadas nos diferentes países que falam estas línguas. Talvez possa ajudar a entender porque Popper tentou entender a ciência em um sentido mais individual, racionalista, enquanto Kuhn em um sentido mais social e contextual. Pode ajudar a entender porque Piaget tentou entender o conhecimento a partir do indivíduo enquanto Vygotsky a partir das interações sociais. Pode ajudar a entender porque Smith olhou pra economia a partir do liberalismo enquanto Marx a partir do socialismo, para ser bem sucinto e evasivo.

E se não tivéssemos o verbo ser na língua portuguesa? Podemos fazer o seguinte experimento mental, considere o seguinte texto:

*A definição de um número primo é fundamental para entender a razão pela qual o número dois é considerado primo. Em termos matemáticos, um número primo é um número natural maior que 1 que possui exatamente dois divisores distintos: ele próprio e 1. Vamos examinar o número dois à luz dessa definição para compreender por que ele é classificado como um número primo.*

*Definição de Número Primo: Um número primo é um número natural  $p$  que tem exatamente dois divisores: 1 e  $p$  (ele mesmo). Isso significa que não existem outros números naturais que dividem  $p$  sem deixar resto.*

*Consideremos o número dois: Vamos listar os números que podem dividir o número dois sem deixar resto.*

- O número um (1) divide o dois;
- O número dois (2) divide o dois.

*Logo, os únicos números naturais que dividem o número dois são 1 e 2.*

*Não há outros números naturais que possam dividir o número dois sem deixar resto. Por exemplo:  $2 \div 3$  não resulta em um número inteiro,  $2 \div 4$  não resulta em um número inteiro. E assim por diante para qualquer número maior que 2.*

Nossa ideia aqui não é discutir aspectos matemáticos, em especial formais deste texto, queremos apenas sugerir o seguinte exercício, releia o mesmo texto substituindo o verbo “ser” pelo verbo “estar”:

*A definição de um número primo está fundamental para entender a razão pela qual o número dois está considerado primo. Em termos matemáticos, um número primo está um número natural maior que 1 que possui exatamente dois divisores distintos: ele próprio e 1. Vamos examinar o número dois à luz dessa definição para compreender por que ele está classificado como um número primo.*

*Definição de Número Primo: Um número primo está um número natural  $p$  que tem exatamente dois divisores: 1 e  $p$  (ele mesmo). Isso significa que não existem outros números naturais que dividem  $p$  sem deixar resto.*

*Consideremos o número dois: Vamos listar os números que podem dividir o número dois sem deixar resto.*

- O número um (1) divide o dois;
- O número dois (2) divide o dois.

*Logo, os únicos números naturais que dividem o número dois estão 1 e 2.*

*Não há outros números naturais que possam dividir o número dois sem deixar resto. Por exemplo:  $2 \div 3$  não resulta em um número inteiro,  $2 \div 4$  não resulta em um número inteiro. E assim por diante para qualquer número maior que 2.*

Entendemos que enquanto o verbo *ser* carrega consigo uma noção essencialista, a primeira leitura do texto já traz implicitamente uma noção imutável do número dois como primo, algo da sua essência. Já a segunda leitura, trocando o verbo “*ser*” por “*estar*”, já carrega consigo uma noção de “*se está, quando não estaria?*”, isto é, uma noção mais contextual. Essa discussão já foi feita por nós, de um ponto de vista matemático, no capítulo 3.

### 7.3 METAPEDAGOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA CONSTRUÇÃO NECESSÁRIA

A educação matemática é frequentemente percebida como uma área tecnicamente densa e, por vezes, desconectada das dinâmicas sociais e culturais mais amplas.

[...] (da perspectiva de muitos teóricos sociais, a educação matemática parece tão insignificante quanto o sistema postal.) As observações de Stone, Bourdieu, Bishop e D'Ambrosio, anteriormente comentadas, indicam, entretanto, que a educação matemática pode ter algum significado. [...] Matemática e educação matemática podem ter especial significado no processamento de conhecimento e, desse modo, podem operar juntas no processo de formação de guetos e globalização. (SKOVSMOSE, 2007, p. 51 – 52)

Assim, ao explorar os papéis multifacetados da matemática e sua pedagogia, encontramos uma necessidade urgente de desenvolver uma metapedagogia – uma abordagem que transcenda métodos tradicionais e aborde as complexidades culturais, sociais e tecnológicas do ensino de matemática.

Se considerarmos a educação matemática como parte do processo global de preparação das bases para a sociedade informacional, devemos estar conscientes de que a globalização "divide tanto quanto une." (SKOVSMOSE, 2007, p. 66). A educação matemática, nesse contexto, não é apenas um meio de ensinar habilidades numéricas e analíticas, mas também um campo de batalha onde questões de inclusão e exclusão social são frequentemente jogadas.

[...] Eu não proponho que a educação matemática ou a educação em geral seja a provedora da causa principal da inclusão e da exclusão social. Em um nível global, muitas causas se interconectam. Mas as salas de aula podem ser um importante lugar a ser considerado.)

Eu considero que o papel da educação matemática em promover mais formação é crítico. Para mim, isso significa duas coisas. Primeiro, que a educação matemática desempenha um papel significativo nos processos geopolíticos. (SKOVSMOSE, 2007, p. 67)

No ambiente de sala de aula, a educação matemática desempenha um papel crucial na formação das mentes jovens, influenciando tanto suas capacidades cognitivas quanto suas visões de mundo.

A ideologia da certeza designa uma atitude para com a matemática. Refere-se a um respeito exagerado em relação aos números. A ideologia afirma que a matemática, mesmo quando aplicada, representará soluções corretas asseguradas por suas certezas. A precisão da matemática (pura) é como que transferida para a

precisão das soluções aos problemas. A matemática é vista como uma ferramenta adequada para resolver problemas de uma área abrangente de questões cotidianas e tecnológicas. Essa afirmação tem uma raiz na filosofia da matemática, mas, também, na matemática trabalhada em sala de aula. A ideologia da certeza representa um elemento dogmático alimentado pela educação matemática, mas não, espera-se, por todas as suas modalidades. (SKOVSMOSE, 2007, p. 81)

Na educação matemática, essa ideologia da certeza pode ser vista nas abordagens tradicionais que enfatizam a precisão e a exatidão dos cálculos matemáticos, muitas vezes em detrimento do pensamento crítico e da aplicação contextual. Por exemplo, ao ensinar geometria, os docentes podem focar excessivamente nas fórmulas e na precisão das construções geométricas, sem explorar como esses conceitos podem ser aplicados em situações do mundo real ou sua construção como processo de abstração de situações reais e formas de leitura de mundo. Isso cria uma percepção limitada das matemáticas, onde os estudantes podem ver a disciplina como um conjunto de regras a serem memorizadas, em vez de uma ferramenta para resolver problemas complexos e interdisciplinares ou uma construção intelectual humana.

Lembremos que, como vimos no anteriormente a noção do jogo de linguagem de Wittgenstein torna possível ver que algo é feito por meio da linguagem.

Essa ideia é explicitada na teoria do ato da fala, na qual linguagem e ação se tornam intimamente conectadas. Linguagem significa ação (embora nem todas as ações signifiquem linguagem). Assim, dizer algo significa fazer algo. [...] linguagens podem abrir ou fechar espaços para ações políticas, sociais e econômicas. Levando ao extremo: um discurso pode produzir nosso mundo. (SKOVSMOSE, 2007, p. 129 – 130).

Em outras palavras, a forma como falamos sobre a matemática e a utilizamos pode abrir ou fechar espaços para ações políticas, sociais e econômicas. Em um ambiente educacional, isso significa que o discurso matemático não é neutro; ele pode influenciar significativamente as oportunidades e as perspectivas dos estudantes.

[...] A dimensão ética da linguagem (científica) é silenciada pelo positivismo lógico e alocada como uma preocupação extracientífica. Currículos recentes em cursos universitários de ciência e tecnologia recapitulam esse silêncio. Considerações sobre desumanização, rotina, autorização, etc., não são tópicos de cursos de matemática aplicada, embora todos sejamos “pegos” nas características dos aspectos de ações baseadas em matemática. O discurso do “verdadeiro e falso” é separado do discurso do “bom e mau”. (SKOVSMOSE, 2007, p. 137, grifos do autor)

Na educação matemática, isso se traduz em uma desconexão entre o que é ensinado e as implicações éticas e sociais do uso da matemática. Por exemplo, ao ensinar estatística, se discute como os dados podem ser manipulados ou interpretados de maneiras que favorecem certos interesses políticos ou econômicos? Em uma aula de probabilidade, os estudantes podem aprender a calcular a probabilidade de eventos específicos sem considerar como esses cálculos podem ser usados para tomar decisões em políticas públicas, como a alocação de recursos de saúde ou a análise de riscos em projetos ambientais. Ao ignorar essas dimensões éticas, a educação matemática, restrita ao ensino de tais técnicas, perde a oportunidade de contribuir para a formação de cidadãos críticos e responsáveis.

Além disso, tendo também como referência o diálogo *Mênon* de Platão e a filosofia do segundo Wittgenstein, Skovsmose nos diz que

A posição ontológica do conhecimento se torna similar a uma “dor de cabeça”. Temos nossa dor de cabeça individual. Podemos construí-la e reconstruí-la, mas não podemos partilhá-la com os outros. Transmissão da dor de cabeça é impossível, como também é impossível a transmissão de conhecimento. Podemos facilitar o processo de construção de dor de cabeça. Sendo professor podemos ajudar os alunos a construírem sua própria dor de cabeça. Mas isso é tudo que podemos fazer, devido à própria natureza da dor de cabeça. Dor de cabeça é estritamente pessoal, e não é possível para ninguém experienciar a dor de cabeça de qualquer outra pessoa. Eu posso estabelecer minha própria dor de cabeça. Pensar sobre a transmissão de uma dor de cabeça parece ser um erro conceitual. Eu posso explicar problemas que eu suponho terem causado minha dor de cabeça. Porém, sempre que faço isso, a outra pessoa deve construir sua própria dor de cabeça. (SKOVSMOSE, 2007, p. 200 – 201, grifos do autor)

Esta metáfora da dor de cabeça ilustra a dificuldade de transmitir conhecimento de forma direta e objetiva, ilustrando a discussão que já fizemos anteriormente sobre a impossibilidade do ensino de conceitos e defendendo que em vez tentar transmitir conhecimentos, os educadores devem facilitar o processo de construção do conhecimento, tentando ajudar, de alguma forma, os educandos a desenvolver suas próprias compreensões.

Por exemplo, no campo da álgebra, ao invés de simplesmente mostrar como resolver equações, os educadores podem incentivar os educandos a explorar diferentes métodos de solução, discutindo as vantagens e desvantagens de cada abordagem, e, se possível, incentivando a elaboração de um novo método. Isso pode permitir que os estudantes aprimorem seu próprio entendimento do conceito, em vez de simplesmente memorizar procedimentos.

Esse tipo de atitude já pode ser observado em muitos livros didáticos e pedagogias diferentes, no entanto "Alguns processos sociotecnológicos tomariam diferentes caminhos se a educação matemática fosse radicalmente transformada." (SKOVSMOSE, 2007, p. 214). A educação matemática tem o potencial de influenciar profundamente os rumos da sociedade, especialmente em uma era onde a tecnologia desempenha um papel central.

Bloor argumenta que uma sociologia consistente deve apresentar o conhecimento como algo profundamente relacionado com nossas experiências do mundo material. "Uma sociologia consistente não poderia jamais apresentar o conhecimento como uma fantasia sem relação com nossas experiências do mundo material que nos cerca." (BLOOR, 2009, p. 59). Isso significa reconhecer que as matemáticas não são apenas um conjunto de verdades abstratas, mas um conhecimento, uma linguagem e um conjunto de ferramentas que emergiu de práticas sociais e culturais específicas.

Desta forma, ao ensinar conteúdos da Teoria dos Números, os educadores podem ilustrar como diferentes culturas desenvolveram sistemas numéricos únicos para resolver problemas práticos em suas sociedades, como a contagem de bens ou a medição de terras. Mais do que isso, tentar compreender ou, ao menos, conjecturar aspectos diferentes da racionalidade destas culturas que se refletem em

diferenças nestes sistemas numéricos. Entendemos que isso pode não apenas enriquecer a compreensão dos educandos sobre a própria matemática, mas também valorizar a diversidade cultural e histórica das práticas matemáticas.

Bloor também enfatiza que "quase sempre, quando utilizamos a palavra 'verdade', queremos dizer apenas isto: como o mundo é. Com essa palavra, disponibilizamos e afirmamos esse esquema último com o qual pensamos." (BLOOR, 2009, p. 70). Isso sugere que nossas concepções de verdade e conhecimento estão profundamente enraizadas nas estruturas sociais e culturais que habitamos.

Assim, para o autor, a razão, como um recurso puramente individual, é inadequada. "A razão da qual dependemos, e da qual devemos depender, é o saber socialmente incorporado de nossa sociedade, o que, em linguajar moderno, poderia ser denominado de suas 'normas'." (BLOOR, 2009, p. 106). Isso implica que o conhecimento não é apenas uma realização individual, mas uma construção coletiva, moldada pelas normas e práticas sociais.

"O que pode parecer ao filósofo a análise pura desses conceitos, ou o apelo imaculado ao seu significado, ou a mera exibição de suas implicações lógicas, será, na verdade, a repetição de parte das experiências acumuladas de nossa época." (BLOOR, 2009, p. 119). Essa perspectiva reforça a ideia de que o conhecimento e a racionalidade estão intrinsecamente ligados às experiências e contextos históricos.

Sobre tecnologia, Feenberg destaca que a tecnologia não é apenas um meio para alcançar fins, mas define partes importantes do ambiente social.

A tecnologia não é, assim, um mero meio para se chegar a um fim; os padrões do projeto técnico definem partes importantes do ambiente social, tais como espaços urbanos e construções, ambientes de trabalho, atividades e expectativas médicas, estilos de vida e assim por diante." (FEENBERG, 2019, p. 54).

Isto, para nós, quer dizer que o uso de tecnologias educacionais deve ser cuidadosamente considerado em termos de como elas afetam o processo de aprendizagem e a interação social dos estudantes, mas, mais do que isso, também

significa que é importante entender o próprio sistema de educação, enquanto sua estruturação social e política, currículo, etc. como tecnologia.

O uso de *softwares* de geometria dinâmica pode contribuir para a forma como os estudantes exploram conceitos geométricos, permitindo-lhes visualizar construções de maneiras interativas. Mas, além disso, a desigualdade social pode se refletir no acesso à tal *software* e, um currículo pensado a partir que uma pedagogia que enxerga apenas isso, mas que desconsidere aspectos sociais locais pode ser uma ferramenta – técnica, neste caso, e, portanto, uma tecnologia – que serve a um fim específico, conforme discussões anteriores com base nas contribuições de Skovsmose.

Feenberg também observa que

a racionalidade da nossa sociedade responde a uma definição particular de tecnologia como um meio para obter lucro e poder. Uma compreensão mais abrangente da tecnologia sugere uma noção muito diferente de racionalização, baseada na responsabilidade de ação técnica em relação aos contextos humanos e naturais. (FEENBERG, 2019, p. 61)

Isso sugere que precisamos reconsiderar a forma como a tecnologia é integrada na educação, não apenas como uma ferramenta de eficiência, mas como um meio de promover a responsabilidade social e ambiental. Além disso, considerar o próprio sistema educacional como também sendo uma tecnologia que está inserida dentro de uma racionalidade técnica, uma racionalidade instrumental mensurada pela eficiência técnica. Desta forma, a educação, como tal, é mais um artifício da própria racionalidade atual que se protege, impedindo sua substituição por novas racionalidades.

Feenberg (2019, p. 71) também argumenta que a Teoria das Revoluções Científicas de Thomas Kuhn mostrou “que importantes avanços científicos podem parecer puramente racionais, são subdeterminados pela racionalidade, na medida em que respondem a mudanças na própria ideia de evidência e de argumentos.” E, Além disso,

Esta abordagem tem consequências para a nossa compreensão da racionalidade e da autonomia das profissões técnicas. Em qualquer etapa da história da sua disciplina, os especialistas herdaram os resultados das revoluções anteriores, que nasceram de controvérsias técnicas e de lutas. Os estudantes de engenharia não precisam de aprender como esta ou aquela regulamentação foi trazida numa especificação de projeto. Os resultados são tecnicamente racionais por si mesmos e apresentados como tal. Isto dá origem a uma característica ilusão de autonomia. Mas, de facto, a autonomia destas disciplinas é limitada. O seu passado não foi uma sucessão de decisões para identificar “o melhor caminho” validado cientificamente, mas sim o resultado de uma escolha social entre vários caminhos bons com diferentes consequências sociais. (FEENBERG, 2019, p. 71 – 73, grifos do autor)

Assim, uma ideia de automação educacional

descontextualiza tanto quem aprende como o “produto” educacional, ao isolá-los do mundo existente da universidade. O mundo revelado nesta base confronta o aluno, como sujeito técnico, com menus, exercícios e questionários, em vez de outros seres humanos envolvidos num processo de aprendizagem partilhado. (FEENBERG, 2019, p. 225, grifos do autor)

Com base nisso, o autor argumenta que “[...] uma noção tecnocrática de modernidade inspira um posicionamento do utilizador que restringe muito a sua iniciativa potencial, enquanto que a conceção democrática aumenta a iniciativa em mundos virtuais mais complexos (FEENBERG, 2019, p. 226). Isso sugere que devemos promover abordagens que encorajam a criatividade e a iniciativa dos educandos, em vez de restringi-los a roteiros tecnocráticos.

Feenberg também argumenta que a racionalidade não é uma alternativa à cultura, mas uma mediação entre expressões culturais, indicando que a educação deve ser vista como uma prática cultural, e não apenas como técnica.

[...] A racionalidade não é uma alternativa à cultura que possa funcionar isolada, como princípio de uma ordem social, para o melhor ou para o pior. Antes pelo contrário, a racionalidade, na sua forma técnica moderna, faz a mediação entre expressões culturais por formas que, em princípio, podem concretizar uma grande variedade de valores. (FEENBERG, 2019, p. 227)

No campo da educação, isso sugere que devemos equilibrar a busca pela eficiência técnica com a consideração das dimensões humanas e significativas da aprendizagem, uma vez que

[...] A procura da eficiência técnica substitui uma compreensão da estrutura do significado, que é o que constitui os mundos experimentados. O foco exclusivo sobre os meios deixa de fora dimensões humanamente significativas da experiência que parecem ser funcionalmente irrelevantes. (FEENBERG, 2019, p. 291)

Donde, para o autor,

O objetivo mais importante não é meramente enfrentar problemas particulares, à medida que vão aparecendo, mas reconstruir a tecnologia moderna à volta de um novo modelo de riqueza que seja ambientalmente compatível e que use as capacidades humanas suprimidas ou ignoradas na presente situação. (FEENBERG, 2019, p. 309)

#### 7.4 INTEGRAÇÃO CULTURAL E TRANSFORMAÇÃO SOCIAL

A educação, especialmente a educação matemática, está intrinsecamente ligada às complexas dinâmicas culturais e sociais, que influenciam e são influenciadas pelos processos de ensino e aprendizagem.

Apenas nós diferenciamos de forma absoluta entre a natureza e a cultura, entre a ciência e a sociedade, enquanto todos os outros, sejam eles chineses ou ameríndios, zandés ou barouyas, não podem separar de fato aquilo que é conhecimento do que é sociedade, o que é signo do que é coisa, o que vem da natureza, tal como ela é, daquilo que suas culturas requerem. [...] Não importa o que nós façamos, por mais criminosos ou imperialistas que sejamos, escapamos da prisão do social ou da linguagem e temos acesso às próprias coisas através de uma porta de saída providencial, a do conhecimento científico. (LATOURETTE, 2019, p. 125).

Este entendimento também sublinha a possibilidade de uma abordagem mais holística e contextualizada de ciência na educação, onde o conhecimento é inseparável das práticas culturais e sociais, em contraponto à visão usual. No entanto, mesmo a ciência na concepção usual, frequentemente vista como fria e

objetiva, é, na verdade, cheia de nuances humanas. "Como poderíamos ser congelados pelo sopro frio das ciências, quando são quentes e frágeis, humanas e controvertidas, cheias de caniços pensantes e de sujeitos que estão, por sua vez, povoados por coisas?" (LATOUR, 2019, p. 144).

Esta observação de Latour destaca que o processo científico é dinâmico e envolve sujeitos humanos, cujas interações e contextos culturais influenciam diretamente suas práticas. Portanto, na educação matemática, é crucial reconhecer que o aprendizado é influenciado por esses mesmos fatores humanos e contextuais. D'Ambrosio complementa essa visão ao enfatizar que

Todo indivíduo vivo desenvolve conhecimento e tem um comportamento que reflete esse conhecimento, que por sua vez vai-se modificando em função dos resultados do comportamento. Para cada indivíduo, seu comportamento e seu conhecimento estão em permanente transformação, e se relacionam numa relação que poderíamos dizer de verdadeira simbiose, em total interdependência. (2020, p. 19)

A educação, então, deve ser vista como um processo contínuo de transformação, onde conhecimento e comportamento se influenciam mutuamente, destacando a necessidade de currículos adaptáveis e dinâmicos. Dentro deste contexto, D'Ambrosio sugere que

Dentre as distintas maneiras de fazer e de saber, algumas privilegiam comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, de algum modo, avaliar. Falamos então de um saber/fazer matemático na busca de explicações de maneiras de lidar com o ambiente imediato e remoto. Obviamente, esse saber/fazer matemático é contextualizado e responde a fatores naturais e sociais. (2020, p. 24)

Portanto, a educação matemática deve ser contextualizada, reconhecendo e respondendo aos fatores sociais e naturais que afetam os educandos, integrando práticas culturais no ensino das ciências exatas. Os encontros culturais no ambiente escolar são inevitáveis e possuem uma dinâmica complexa, uma vez que

O momento de encontro cultural tem uma dinâmica muito complexa. Esse encontro se dá entre povos, como se passou na conquista e

na colonização, entre grupos. Também no encontro da criança ou do jovem, que tem suas raízes culturais, com a outra cultura, a cultura da escola, com a qual o professor se identifica. O processo civilizatório, e podemos dizer o mesmo do processo escolar, é essencialmente a condução dessa dinâmica. A dinâmica escolar poderia também ter resultados positivos e criativos, que se manifestem na criação do novo. Mas geralmente se notam resultados negativos e perversos, que se manifestam sobretudo no exercício de poder e na eliminação ou exclusão do dominado. (D'AMBROSIO, 2020, p. 44).

Assim, é fundamental que a educação reconheça e valorize a diversidade cultural e promova a inclusão, evitando a perpetuação de desigualdades e exclusões. No entanto, esses encontros culturais e a introdução de novos conhecimentos também podem gerar conflitos.

O encontro intercultural gera conflitos que só poderão ser resolvidos a partir de uma ética que resulta do indivíduo conhecer-se e conhecer a sua cultura e respeitar a cultura do outro. O respeito virá do conhecimento. De outra maneira, o comportamento revelará arrogância, superioridade e prepotência, o que resulta, inevitavelmente, em confronto e violência. (D'AMBROSIO, 2020, p. 47).

Portanto, a educação deve promover uma ética do respeito e do conhecimento mútuo, essencial para a convivência pacífica e produtiva em uma sociedade multicultural. A história mostra que a forma como as gerações passadas lidaram com o conhecimento moldou o presente, frequentemente de maneira negativa.

A maneira como as gerações passadas lidaram com o futuro, ancorada em todo o conhecimento oferecido pela modernidade, deu o nosso presente. Um presente angustiante, de iniquidades, injustiças, arrogância, exclusão, destruição ambiental, conflitos inter e intraculturais, guerras. Não é isso que devemos legar para nossos bisnetos e tataranetos e para as gerações futuras. (D'AMBROSIO, 2020, p. 48).

Para evitar repetir esses erros, entendemos que a educação deve se transformar fundamentalmente, adotando uma abordagem que busque promover a

sustentabilidade e a justiça social. A transição educacional deve focar na formação integral dos educandos, não apenas na transmissão de conteúdos.

A educação nessa transição não pode focalizar a mera transmissão de conteúdos obsoletos, na sua maioria desinteressantes e inúteis, e inconsequentes na construção de uma nova sociedade. O que podemos fazer para as nossas crianças é oferecer a elas os instrumentos comunicativos, analíticos e materiais para que elas possam viver, com capacidade de crítica, numa sociedade multicultural e impregnada de tecnologia." (D'AMBROSIO, 2020, p. 48).

Acreditamos que isso requer verdadeiras experiências, no sentido discutido neste trabalho e que tais experiências quando proporcionadas pelos educadores, devem ser vistas como ingredientes de uma educação por matemáticas dessa nova abordagem educativa.

"A aquisição dinâmica da matemática integrada nos saberes e fazeres do futuro depende de oferecer aos alunos experiências enriquecedoras. Cabe ao professor do futuro idealizar, organizar e facilitar essas experiências." (D'AMBROSIO, 2020, p. 49). Assim, o papel do educador é muito mais amplo e deve envolver a preparação dos educandos para enfrentar desafios reais de forma crítica e criativa. Desta forma, as prioridades educacionais devem ser repensadas, com foco em uma educação que promova paz e cidadania plena.

As prioridades maiores são a busca de paz nas suas múltiplas dimensões, alfabetização e contagem, embora necessárias são insuficientes para o pleno exercício de cidadania. Uma boa educação não será avaliada pelo conteúdo ensinado pelo professor e aprendido pelo aluno. O desgastado paradigma educacional sintetizado no binômio 'ensino-aprendizagem', verificado por avaliações inidôneas, é insustentável. Espera-se que a educação possibilite, ao educando, a aquisição e utilização dos instrumentos comunicativos, analíticos e materiais que serão essenciais para seu exercício de todos os direitos e deveres intrínsecos à cidadania." (D'AMBROSIO, 2020, p. 68).

A educação deve, portanto, ir além da simples transmissão de conhecimento e buscar formar cidadãos críticos e conscientes e a matemática, em especial, como forma de conhecimento, está profundamente ligada à ética e à paz.

A matemática, como uma forma de conhecimento, tem tudo a ver com ética e, conseqüentemente, com paz. A busca de novas direções para o desenvolvimento da matemática deve ser incorporada ao fazer matemático. Devidamente revitalizada, a matemática, como é hoje praticada no ambiente acadêmico e organizações de pesquisa, continuará sendo o mais importante instrumento intelectual para explicar, entender e inovar, auxiliando principalmente na solução de problemas maiores que estão afetando a humanidade. Será necessário, sem dúvida, reabrir a questão dos fundamentos, evidentemente um ponto vulnerável da matemática atual." (D'AMBROSIO, 2020, p. 73).

Portanto, os sistemas educacionais devem ser reestruturados para buscar novas alternativas que não reproduzam modelos ultrapassados.

A meta dos sistemas educacionais, coordenando ações em nível local, nacional e internacional, deve ser coerente com a busca de novas alternativas, não com a reprodução do modelo atual, ancorado na matemática [hegemônica]. Como parece ser próprio da natureza humana, o novo modelo também se apoiará na matemática, mas uma nova matemática. O papel de uma nova matemática na busca dessa nova ordem econômica é inegável. (D'AMBROSIO, 2020, p. 75).

D'Ámbrosio também entende que

A educação formal, baseada na transmissão de explicações e teorias (ensino teórico e aulas expositivas) e no adestramento em técnicas e habilidades (ensino prático com exercícios repetitivos), é totalmente equivocada, como mostram os avanços mais recentes de nosso entendimento dos processos cognitivos. (2020, p. 84).

E que, portanto, é necessária uma nova abordagem educacional que promova a criatividade e a diversidade. Para ele,

A adoção de uma nova postura educacional, na verdade a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino-aprendizagem, baseada numa relação obsoleta de causa-efeito, é essencial para o desenvolvimento de criatividade desinibida e conducente a novas formas de relações interculturais, proporcionando o espaço adequado para preservar a diversidade e eliminar a desigualdade numa nova organização da sociedade. (D'AMBROSIO, 2020, p. 85).

No entanto, no contexto da educação matemática, é fundamental reconhecer que já há diferentes racionalidades em jogo.

Há, pois, racionalidades diferentes operando na Educação Matemática praticada na escola e fora dela: a Matemática Escolar tem como marca a transcendência e as práticas fora da escola são marcadas pela imanência. O pensamento etnomatemático está centralmente interessado em examinar as práticas de fora da escola, associadas a racionalidades que não são idênticas à racionalidade que impera na Matemática Escolar, com seus estreitos vínculos com a razão universal instaurada pelo Iluminismo. (KNIJNIK, 2019, p. 17).

Knijnik também destaca que os sujeitos escolares são moldados pelo que aprendem e ensinam:

Nós, sujeitos escolares – aqui compreendidos como estudantes, professores e demais membros da escola –, somos assujeitados, damos sentido às nossas vidas e às coisas do mundo, “nos tornamos o que somos” também por meio do que aprendemos e ensinamos e de como isso é feito nas disciplinas escolares, em particular, na disciplina de Matemática. (2019, p. 25, grifos da autora).

Além disso, Knijnik também argumenta que estas ideias de D'Ambrosio, sobre a multiplicidade de matemáticas, podem ser relacionadas à filosofia de Wittgenstein, mesmo que o autor não tenha feito citação a ele, “ao reconhecer diferentes e múltiplas Matemáticas, colocando sob suspensão a existência de uma linguagem matemática universal – [suas ideias] podem ser pensadas com base na filosofia de maturidade wittgensteiniana.” (KNIJNIK, 2019, p. 28).

A autora acrescenta que o pensamento de Wittgenstein nos ajuda a considerar diferentes formas de matemática.

O pensamento de Wittgenstein, em nosso entendimento, é produtivo para nos fazer pensar em diferentes Matemáticas geradas por diferentes *formas de vida* – como as associadas a grupos de crianças, jovens, adultos, trabalhadores de setores específicos, acadêmicos, estudantes, etc.), que ganham sentido em seus usos. (KNIJNIK, 2019, p. 29, grifos da autora).

Assim, as matemáticas produzidas em diferentes culturas podem ser vistas como jogos de linguagem:

[...] podem-se considerar as Matemáticas produzidas nas diferentes culturas como conjuntos de jogos de linguagem que se constituem por meio de múltiplos usos.

A matemática Acadêmica, a Matemática Escolar, as Matemáticas Camponesas, as Matemáticas Indígenas, em suma, as Matemáticas geradas por grupos culturais específicos podem ser entendidas como conjuntos de jogos de linguagem engendrados em diferentes formas de vida, agregando critérios de racionalidade específicos. Porém, esses diferentes jogos não possuem uma essência invariável que os mantenha completamente incomunicáveis uns com os outros, nem uma propriedade comum a todos eles, mas algumas analogias ou parentescos – o que Wittgenstein (2004) denomina *semelhanças de família*. (KNIJNIK, 2019, p. 30, grifos da autora)

"Seguindo os argumentos de Wittgenstein (2004), pode-se afirmar que é na relação entre jogos de linguagem e as semelhanças de família que se engendram os critérios de racionalidade." (KNIJNIK, 2019, p. 31). Desta forma, o questionamento das verdades estabelecidas é crucial na educação.

O jogo também consiste em 'virar ao avesso' o que fazemos, pôr em questão as verdades que fazem de nós o que somos, para lembrar Foucault, examinar nossas práticas escolares, nossas pesquisas, para abrir possibilidades de 'pensar o impensável' e, com isto, abrir possibilidades para outros modos de significar nossas vidas e a sociedade na qual vivemos." (KNIJNIK, 2019, p. 82, grifos da autora).

A autora também defende que é necessário democratizar o acesso aos jogos de linguagem matemáticos:

[...] O jogo também consiste em “virar ao avesso” o que fazemos, pôr em questão as verdades que fazem de nós o que somos, para lembrar Foucault, examinar nossas práticas escolares, nossas pesquisas, para abrir possibilidades de “pensar o impensável” e, com isto, abrir possibilidades para outros modos de significar nossas vidas e a sociedade na qual vivemos.

Estamos cientes da necessidade de democratizar o acesso ao conjunto de jogos de linguagem que tem sido nomeado por Matemática. São esses jogos legitimados socialmente como conhecimentos científicos que têm dado suporte e por sua vez têm sido alimentados pelas novas tecnologias que marcam o nosso tempo. Tais tecnologias têm contribuído para uma potencial melhora

na qualidade de vida das pessoas, propiciando, por exemplo, ao aumento da expectativa de vida, o diagnóstico precoce de doenças, a descoberta de medicamentos mais eficientes que possam minorar o sofrimento humano. Mas são essas mesmas tecnologias que também têm intensificado a distância entre os que têm acesso a esse progresso científico e os que deles estão cada vez mais afastados. (KNIJNIK, 2019, p. 82, grifos da autora)

E acrescenta que este acesso aos jogos de linguagem matemáticos deve ser equitativo e inclusivo:

Se, por um lado, estamos cientes da relevância de que as novas gerações tenham acesso aos jogos de linguagem matemáticos e tecnológicos que hoje são socialmente legitimados, também estamos cientes de que o 'preço a ser pago' a esse acesso não pode ser o do silenciamento, no currículo escolar, de outros jogos de linguagem matemáticos. (KNIJNIK, 2019, p. 83).

Além disso, ignorar outros jogos de linguagem matemáticos seria um erro.

Se, por um lado, estamos cientes da relevância de que as novas gerações tenham acesso aos jogos de linguagem matemáticos e tecnológicos que hoje são socialmente legitimados, também estamos cientes de que o “preço a ser pago” a esse acesso não pode ser o do silenciamento, no currículo escolar, de outros jogos de linguagem matemáticos [...].

Seria um preço “demasiadamente alto” ignorar os jogos de linguagem matemáticos que, por não serem marcados pelo formalismo, pela “pureza”, pela pretensão de universalidade – como os que conformam a Matemática Escolar – acabam por ser pensados como de “menos” valor, como contaminados pela “sujeira” das formas de vida mundanas. Mas é preciso que se diga: nós todos também circulamos por tais formas de vida e, portanto, aprender como ali se pratica os jogos de linguagem matemáticos deve ser, necessariamente, parte dos processos educativos das novas gerações.

Ademais, ao ampliar o repertório dos jogos de linguagem matemáticos ensinados na escola, estamos possibilitando que nossos alunos aprendam outros modos de pensar matematicamente, a outras racionalidades. Isso é importante não só do ponto de vista do acesso a um conjunto mais amplo de conteúdos. (KNIJNIK, 2019, p. 83 – 84, grifos da autora)

Entendemos que, para lidar com a complexidade do real e as interações culturais de maneira adequada, é essencial reconsiderar a maneira como a educação é estruturada e implementada. Os autores até aqui discutidos apontam

que precisamos de um novo paradigma educacional que promova a ética, a criatividade e o respeito mútuo em uma sociedade multicultural e tecnologicamente avançada. Isso, para nós, implica repensar a educação a partir de uma nova pedagogia, que reflita sobre si mesma e também seja uma pedagogia de si, portanto uma metapedagogia, que, por meio de educação por matemáticas, busque oportunizar a construção de novas racionalidades. Essa mudança exige um compromisso com a transformação contínua, integrando práticas culturais diversas e reconhecendo a interdependência entre conhecimento e comportamento, tal como argumentado por D'Ambrosio (2020).

## 7.5 NAVEGANDO ENTRE CULTURA, COMPLEXIDADE E CONHECIMENTO

Tanto na introdução deste capítulo quanto na primeira seção, utilizando a etimologia para explorar o significado de conceitos importantes na filosofia e na educação, examina as palavras "aprender", "educar" e "racionalidade". Baseamos-nos em referências filosóficas e etimológicas para fundamentar suas discussões.

Defendemos a importância de uma abordagem educacional crítica. Na introdução, discutimos como a concepção de educação pode ser emancipadora ou reprodutora de padrões sociais, enquanto na seção 1 exploramos como a educação por matemáticas deve ir além da técnica, incorporando uma análise crítica e uma abordagem participativa.

Referenciamos Wittgenstein e Habermas para embasar nossas argumentações. Na introdução mencionamos a mudança na filosofia de Wittgenstein para discutir a evolução na significação das palavras e a importância do uso contextual. Na primeira seção, utilizamos a teoria da ação comunicativa de Habermas para discutir a racionalidade comunicativa e suas implicações para a educação matemática.

Destacamos a evolução dos conceitos de "aprender" e "educar", destacando a mudança na concepção de educação e a influência da etimologia e da filosofia de Wittgenstein sobre o entendimento desses termos. Enfatizamos uma crítica às concepções tradicionais de educação e a defesa de uma educação emancipadora.

Já sobre a palavra "racionalidade" e suas implicações filosóficas e sociológicas, fizemos uma análise detalhada das contribuições de Jürgen Habermas sobre a racionalidade comunicativa e sua aplicação à educação matemática, dando ênfase a uma ênfase na crítica à racionalidade técnica e na defesa de uma abordagem educacional que valorize a comunicação e o diálogo.

Exemplificamos nossas discussões sobre como a noção de "educação" em diferentes contextos históricos e sociais, destacando como ela pode ser tanto emancipadora quanto reprodutora de padrões sociais. Assim, defendemos a importância de uma abordagem crítica que incorpore a teoria da ação comunicativa e a perspectiva de Habermas, estabelecendo uma conexão com a educação matemática crítica e a influência de Skovsmose.

A linguagem é discutida em termos de sua etimologia e o impacto das mudanças filosóficas sobre a compreensão de conceitos educacionais. Discutimos a forma como a linguagem pode refletir e reproduzir ideologias. Além do mais, vimos que a linguagem e a comunicação são centrais, com uma análise detalhada da teoria da ação comunicativa de Habermas e a importância do diálogo e da interação na construção da racionalidade. A crítica à racionalidade técnica e a defesa da racionalidade comunicativa são fundamentais para a discussão.

Na segunda seção, apresentamos a visão de Charles Taylor sobre a racionalidade e a identidade, fazendo inferências na educação matemática, destacando sua crítica à racionalidade instrumental.

Mostramos que Taylor critica a ênfase na racionalidade instrumental, que foca na eficiência e no cálculo dos meios para alcançar fins específicos. Ele argumenta que essa visão pode levar a uma redução da complexidade da vida humana a meros cálculos de custo-benefício, negligenciando aspectos mais amplos da existência humana.

Lembramos que a racionalidade técnica, criticada por Habermas e discutida também por Taylor, é vista como uma forma específica de racionalidade instrumental aplicada a contextos técnicos e tecnológicos, focando na eficiência e na funcionalidade.

Taylor e Habermas nos sugerem que a ênfase na eficiência e na técnica no ensino de matemática pode limitar o desenvolvimento crítico e reflexivo dos estudantes. A visão instrumental da matemática, como um simples conjunto de técnicas e fórmulas, pode consolidar a racionalidade instrumental. Vimos que Skovsmose compartilha essa crítica, argumentando que a matemática deve transcender a mera técnica e promover uma compreensão crítica que permita aos indivíduos interagir de forma mais reflexiva com o mundo.

Também vale destacar que vimos que o conceito de identidade em Taylor é influenciado pela visão de Wittgenstein de que o significado está enraizado em práticas sociais e linguísticas, e a racionalidade deve ser entendida no contexto mais amplo da vida humana e das interações sociais e culturais.

Em sua obra *The Language Animal*, Taylor explora como a linguagem molda nossa compreensão do mundo e influencia nossos modos de racionalização e tomada de decisão. Ele argumenta que a linguagem e as práticas culturais desempenham um papel crucial na formação da identidade e na compreensão da racionalidade.

Taylor, Habermas e Skovsmose oferecem uma visão crítica da racionalidade instrumental e sugerem a importância de uma abordagem educacional que vá além da técnica e da eficiência. Eles propõem a necessidade de uma educação que promova o diálogo, a interação social e a construção de significados compartilhados.

Essas ideias se conectam na medida em que todas elas criticam a visão limitada da racionalidade e da educação que se concentra exclusivamente na eficiência e na técnica. Elas propõem uma abordagem mais holística e contextualizada, que valoriza o desenvolvimento pessoal, a identidade e a interação social, e sugerem que a educação matemática deve ser reformulada para refletir essas perspectivas.

Já na quarta seção, oferecemos uma análise da educação matemática, destacando a necessidade de uma abordagem metapedagógica que vá além dos métodos tradicionais e considere as complexidades culturais, sociais e tecnológicas.

Argumentamos que a educação matemática é frequentemente vista como técnica e desconectada das realidades sociais e culturais. Além disso, autores como

Skovsmose argumentam que a educação matemática pode desempenhar um papel significativo na formação de guetos e na globalização, e que precisa ser revista para incorporar questões de inclusão e exclusão social.

Skovsmose critica a ideologia da certeza na educação matemática, onde a ênfase excessiva na precisão matemática pode desconsiderar o pensamento crítico e a aplicação contextual dos conceitos. Isso resulta em uma visão limitada da matemática, que é vista mais como um conjunto de regras a serem memorizadas do que como uma ferramenta para resolver problemas complexos.

Exploramos novamente as ideias de Wittgenstein, argumentando que o discurso matemático pode influenciar as oportunidades e perspectivas dos estudantes. O discurso matemático não é neutro; ele pode ter implicações éticas e sociais importantes.

Dizemos que acreditamos que há uma necessidade de integrar dimensões éticas e sociais no ensino da matemática. Por exemplo, ao ensinar estatística e probabilidade, é importante discutir como esses conceitos podem ser aplicados em contextos políticos e econômicos.

Defendemos que a educação matemática deve ser repensada para incluir uma maior ênfase na ética, contextualização e aplicação prática, e deve ser flexível o suficiente para se adaptar a novas transformações sociais.

Da mesma forma, Bloor e Feenberg sugerem que a matemática e a tecnologia não devem ser vistas apenas como ferramentas técnicas, mas como construções sociais que refletem e moldam as normas e práticas culturais.

Feenberg destaca que a tecnologia não é apenas uma ferramenta para alcançar fins, mas define importantes aspectos do ambiente social. A educação deve considerar o impacto das tecnologias educacionais não apenas em termos de eficiência, mas também em termos de responsabilidade social e ambiental.

Novamente, todas as ideias mencionadas destacam a necessidade de uma abordagem mais integrada e crítica na educação matemática, que leve em conta não apenas os aspectos técnicos, mas também as dimensões sociais, culturais e éticas da matemática e da tecnologia.

Na seção 4, buscamos fazer uma análise sobre a interconexão entre educação matemática e as dinâmicas culturais e sociais. Nossa discussão girou em torno da necessidade de uma abordagem educacional que reconheça a importância da contextualização e da diversidade cultural no processo de ensino-aprendizagem.

Argumentamos que a educação matemática não deve ser isolada do contexto cultural e social em que é aplicada, uma vez que o conhecimento é influenciado por práticas culturais e sociais, e o ensino deve refletir isso. Como Latour observa, a ciência é moldada por contextos humanos e culturais, e D'Ambrosio enfatiza a interdependência entre conhecimento e comportamento.

Também argumentamos que a educação deve ser um processo dinâmico e adaptável, que reconheça a necessidade de transformar currículos para refletir a realidade multicultural e tecnologicamente avançada. D'Ambrosio sugere que a educação matemática deve ser mais do que simplesmente resolver problemas matemáticos abstratos; deve preparar os educandos para enfrentar desafios reais e promover a cidadania crítica.

Revimos que a matemática não é uniforme; existem diferentes racionalidades e formas de matemáticas que são influenciadas por contextos culturais específicos. Knijnik destaca que a Matemática Escolar muitas vezes ignora outras formas de conhecimento matemático que não se encaixam no paradigma dominante e defende que é crucial que a educação matemática inclua essas diversas perspectivas para proporcionar uma compreensão mais abrangente.

A inclusão de diferentes jogos de linguagem matemáticos no currículo escolar é, então, vital para garantir um acesso equitativo ao conhecimento. Ignorar essas práticas seria um erro, pois isso perpetua desigualdades e limita a capacidade dos educandos de desenvolver uma visão crítica e abrangente das matemáticas e de seu papel na sociedade.

Nossa proposta é de uma metapedagogia que reflita sobre si mesma e busque construir novas racionalidades através da educação por matemáticas. Isso envolve um compromisso com a transformação contínua da educação, integrando práticas culturais diversas e reconhecendo a interdependência entre conhecimento e comportamento.

Esse enfoque implica uma reavaliação fundamental da educação matemática, buscando uma abordagem mais inclusiva, contextualizada e crítica, que possa preparar os alunos para um mundo complexo e multicultural.

Resumindo, A educação matemática, longe de ser um campo isolado e descontextualizado, está profundamente imbricada nas dinâmicas culturais e sociais que moldam o processo de ensino e aprendizagem. Essa perspectiva é amplamente abordada por diversos autores, que discutem a necessidade de uma abordagem mais holística e integrada na educação, especialmente no que tange à matemática.

Em sua análise, Latour critica a tendência moderna de separar rigidamente a natureza e a cultura, a ciência e a sociedade. Ele sugere que essa divisão é uma construção artificial, que ignora o fato de que o conhecimento científico é, na verdade, profundamente enraizado em contextos humanos e culturais. Latour argumenta que a ciência, frequentemente considerada fria e objetiva, é na realidade um campo cheio de nuances e complexidades humanas. Isso implica que a matemática, enquanto forma de conhecimento, também é moldada por esses contextos e deve ser ensinada de forma a refletir essa complexidade.

D'Ambrosio reforça essa visão ao destacar a interdependência entre conhecimento e comportamento. Ele afirma que a educação matemática deve ser adaptável e dinâmica, refletindo a realidade das práticas culturais e sociais dos Educandos. Segundo o autor, o conhecimento matemático não é algo estático, mas está em constante transformação em função dos resultados do comportamento humano. A educação, portanto, deve proporcionar experiências que busquem preparar os educandos para enfrentar desafios e promover a cidadania crítica.

A ideia de que a matemática escolar deve incluir uma variedade de formas de conhecimento é também apoiado por Knijnik, que argumenta que a matemática praticada fora do ambiente escolar muitas vezes é negligenciada em favor da matemática escolar hegemônica. Knijnik, ao se basear na filosofia de Wittgenstein, sugere que diferentes formas de matemática, associadas a distintas formas de vida e contextos culturais, podem ser compreendidas como "jogos de linguagem". Esses jogos de linguagem refletem a multiplicidade de racionalidades que existem e que

são moldadas por práticas culturais específicas. Para Knijnik, reconhecer e integrar essas diferentes matemáticas no currículo escolar é essencial para oferecer uma educação que seja verdadeiramente inclusiva e representativa da diversidade de formas de conhecimento.

Além disso, a inclusão de diversas formas de matemática no currículo não precisaria vir necessariamente à custa da exclusão de outros tipos de conhecimento. Knijnik argumenta que o acesso às novas tecnologias e jogos de linguagem matemáticos deve ser equilibrado com o reconhecimento e a valorização de práticas matemáticas que não se encaixam no formalismo acadêmico predominante. Ignorar essas práticas seria um preço “demasiadamente alto”, que perpetua desigualdades e limita a capacidade dos alunos de desenvolver uma compreensão crítica e abrangente da matemática.

A visão de D'Ambrosio sobre a necessidade de uma nova abordagem educacional também é crucial. Ele critica o modelo tradicional de ensino que foca apenas na transmissão de conteúdos obsoletos e adestramento em técnicas repetitivas. Em vez disso, defende a adoção de uma pedagogia que promova a criatividade, a diversidade e o respeito mútuo, essencial para a convivência pacífica em uma sociedade multicultural e tecnologicamente avançada. Essa abordagem requer uma mudança fundamental no sistema educacional, que deve focar em preparar os alunos para enfrentar os desafios complexos do mundo moderno de forma crítica e criativa.

Por fim, a educação matemática deve se transformar fundamentalmente para não reproduzir modelos ultrapassados. É necessário adotar um novo paradigma educacional que não apenas transmita conteúdos, mas também promova a paz, a justiça social e a cidadania plena. A educação deve ser vista como um processo contínuo de transformação, onde o conhecimento e o comportamento estão em constante interdependência. Assim, as matemáticas devem ser ensinadas de maneira a integrar práticas culturais diversas e a refletir as complexidades da realidade social e cultural dos alunos.

Para complementar nossas discussões, gostaríamos de discutir a noção de “complexidade”, conforme explorado por Edgar Morin. Entendemos que esta noção

revela-se fundamental para a compreensão da evolução do conhecimento científico e dos desafios enfrentados pela humanidade. Morin destaca que, apesar de termos adquirido conhecimentos profundos e abrangentes sobre o mundo físico, biológico, psicológico e sociológico, há uma crescente dependência de métodos de verificação empírica e lógica na ciência.

As luzes da Razão parecem fazer refluir os mitos e trevas para as profundezas da mente. E, no entanto, por todo lado, erro, ignorância e cegueira progridem ao mesmo tempo que os nossos conhecimentos.

Necessitamos de uma tomada de consciência radical:

1. A causa profunda do erro não está no erro de fato (falsa percepção) ou no erro lógico (incoerência), mas no modo de organização de nosso saber num sistema de ideias (teorias, ideologias);
2. Há uma nova ignorância ligada ao desenvolvimento da própria ciência;
3. Há uma nova cegueira ligada ao uso degradado da razão;
4. As ameaças mais graves em que incorre a humanidade estão ligadas ao progresso cego e incontrolado do conhecimento (armas termonucleares, manipulações de todo tipo, desregramento ecológico, etc.)

Gostaria de mostrar que esses erros, ignorâncias, cegueiras e perigos têm um caráter comum resultante de um modo mutilador de organização do conhecimento, incapaz de reconhecer e de aprender a complexidade do real. (MORIN, 2015, p. 9 – 10)

Ele aponta que a causa profunda do erro não reside apenas no erro factual ou lógico, mas no modo como organizamos nosso saber dentro de sistemas de ideias, como teorias e ideologias. Morin sugere que esses erros, ignorâncias e perigos têm um caráter comum que resulta de um modo mutilador de organização do conhecimento, incapaz de reconhecer e aprender a complexidade do real.

Morin também observa que estamos nos aproximando de uma mutação inaudita no conhecimento. O conhecimento atual

[...] é cada vez menos feito para ser refletido e discutido pelas mentes humanas, cada vez mais feito para ser registrado em memórias informacionais manipuladas por forças anônimas, em primeiro lugar os Estados. Ora, esta nova, maciça e prodigiosa ignorância é ela própria ignorada pelos estudiosos. Estes, que praticamente não dominam as consequências de suas descobertas,

sequer controlam intelectualmente o sentido e a natureza de sua pesquisa. (MORIN, 2015, p. 12 – 13)

Um dos pontos críticos abordados por Morin é a limitação do aparelho lógico-matemático atual para lidar com a complexidade da realidade.

[...] se nosso aparelho lógico-matemático atual “cola” com certos aspectos da realidade fenomênica, ele não cola com os aspectos verdadeiramente complexos. Isso significa que ele próprio deve se desenvolver e se ultrapassar no sentido da complexidade. (MORIN, 2015, p. 36)

Esse desafio é evidenciado pelo erro ontológico de petrificar os conceitos de base da ciência e da filosofia (MORIN, 2015, p. 44). Em vez disso, Morin defende a abertura para um conhecimento mais rico e menos certo, que exige a construção de um metassistema de caráter lógico para examinar a teoria sob a ótica de sua consistência interna. No entanto, ele ressalta que o teorema de Gödel demonstra que, em qualquer sistema formalizado, existe ao menos uma proposição que é indecisa, o que abre uma brecha no sistema e o torna incerto.

Precisamos, pois, de um outro metassistema, de caráter lógico, que examine a teoria do ponto de vista de sua consistência interna. Aqui, entramos no campo clássico da epistemologia, mas esbarramos no problema da indecidibilidade gödeliana. O teorema de Gödel, aparentemente limitado à lógica matemática, vale *a fortiori* para qualquer sistema teórico: ele demonstra que, num sistema formalizado, existe ao menos uma proposição que é indecisa: essa indecidibilidade abre uma brecha no sistema, que então torna-se incerto. É fato, a proposição indecidível pode ser demonstrada num outro sistema, até mesmo um metassistema, mas este comportará também sua brecha lógica. (MORIN, 2015, p. 45 – 46, grifos do autor)

O autor também destaca uma incerteza no conceito de ciência, sugerindo que qualquer pretensão de definir as fronteiras da ciência de maneira assegurada é, por si só, não científica.

Ora, esse paradigma do Ocidente, afinal um filho fecundo da esquizofrênica dicotomia cartesiana e do puritanismo clerical, comanda também o duplo aspecto da práxis ocidental, de um lado antropocêntrica, etnocêntrica, egocêntrica quando se trata do sujeito (porque baseada na autoadoração do sujeito: homem, nação

ou etnia, indivíduo), de outro lado e correlativamente manipuladora, frieza “objetiva” quando se trata do objeto. Não deixa de ter relação com a identificação da racionalização com eficácia, da eficácia com os resultados contabilizáveis; ele é inseparável de toda uma tendência classificacional reificadora etc., tendência corrigida, às vezes com vigor, às vezes suavemente, por contratendências aparentemente “irracionais”, “sentimentais”, românticas, poéticas. (MORIN, 2015, p. 55, grifos do autor)

Morin sugere que a estrutura do sistema de pensamento está em constante transformação e que “é toda uma enorme superestrutura de ideias que desaba. Eis para o que é preciso se preparar.” (MORIN, 2015, p. 55). Assim,

A razão corresponde a uma vontade de ter uma visão coerente dos fenômenos, das coisas, do universo. A razão tem um aspecto incontestavelmente lógico. Mas, aqui também, é possível distinguir entre racionalidade e racionalização.

A racionalidade é o jogo, é o diálogo incessante entre nossa mente, que cria estruturas lógicas, que as aplica ao mundo e que dialoga com este mundo real. Quando este mundo não está de acordo com nosso sistema lógico, é preciso admitir que nosso sistema lógico é insuficiente, que só encontra uma parte do real. A racionalidade, de todo modo, jamais tem a pretensão de esgotar num sistema lógico a totalidade do real, mas tem a vontade de dialogar com o que lhe resiste. Como já dizia Shakespeare: “Há mais coisas no mundo que em toda nossa filosofia”. O universo é muito mais rico do que podem conceber as estruturas de nosso cérebro, por mais desenvolvido que ele seja.

[...] A racionalização consiste em querer prender a realidade num sistema coerente. E tudo o que, na realidade, contradiz esse sistema coerente é afastado, esquecido, posto de lado, visto como ilusão ou aparência.

Aqui damos conta de que a racionalidade e racionalização têm exatamente a mesma fonte, mas ao se desenvolverem tornam-se inimigas uma da outra. [...] Todos nós temos uma tendência inconsciente a afastar de nossa mente o que possa contradizê-la, em política como em filosofia. [...] Com frequência a racionalização se desenvolve na própria mente dos cientistas. (MORIN, 2015, p. 70, grifos do autor)

Morin também argumenta que

[...] Foram precisos novos desenvolvimentos da razão para começar a compreender o mito. Para isso, foi preciso que a razão crítica se tornasse autocrítica. Devemos lutar sem cessar contra a deificação da razão que, entretanto, é nossa única ferramenta confiável, à condição de ser não só crítica, mas autocrítica. (MORIN, 2015, p. 71)

Ele também destaca que, embora sociedades ditas primitivas tenham uma racionalidade difusa em suas práticas e crenças, nós também vivemos embebidos de mitos e magia, mas de um tipo diferente. Portanto, a necessidade de uma racionalidade autocrítica é essencial para lidar com o delírio da coerência absoluta, que só pode ser combatido pela racionalidade autocrítica e pelo apelo à experiência.

Com isso, Morin conclui que,

A única coisa possível do ponto de vista da complexidade, e que já se revela muito importante, é ter metapontos de vista sobre nossa sociedade, exatamente como num campo de concentração onde poderíamos edificar mirantes que nos permitiriam olhar melhor nossa sociedade e nosso meio ambiente externo. Não podemos jamais atingir o metassistema, ou seja, o sistema superior que seria meta-humano e metassocial. Mesmo que pudéssemos alcançá-lo, não seria um sistema absoluto, por que a lógica de Tarski, assim como o teorema de Gödel, nos diz que nenhum sistema é capaz de se autoexplicar totalmente nem de se autodemonstrar totalmente. (MORIN, 2015, p. 75 – 76)

Além disso, ele observa que a própria sociedade, da forma como é organizada e como se organiza “retroage para produzir os indivíduos pela educação, a linguagem, a escola. Assim os indivíduos, em suas interações, produzem a sociedade, que produz os indivíduos que a produzem” (MORIN, 2015, p. 87).

Em relação à ciência, Morin afirma que ela se baseia no consenso e no conflito, operando simultaneamente com racionalidade, empirismo, imaginação e verificação e que há um conflito permanente entre racionalismo e empirismo, e a complexidade científica é caracterizada pela presença do não científico no científico, o que, em vez de anular o científico, permite que ele se expresse.

A ciência se baseia ao mesmo tempo no consenso e no conflito. Anda ao mesmo tempo sobre quatro patas independentes e interdependentes: a racionalidade, o empirismo, a imaginação, a verificação. Há conflito permanente entre racionalismo e empirismo; o empírico destrói as construções racionais que se reconstituem a partir das novas descobertas empíricas. Há uma complementariedade conflitual entre a verificação e a imaginação. Enfim, a complexidade científica é a presença do não científico no científico, o que não anula o científico; ao contrário, lhe permite exprimir-se. (MORIN, 2015, p. 106)



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, tivemos como principal objetivo desenvolver uma teoria da metapedagogia, baseada em fundamentos epistemológicos a partir de uma educação por matemáticas. Utilizando uma abordagem teórica, buscamos explorar como novas racionalidades necessitam ser construídas através da educação matemática, promovendo uma visão plural e dinâmica do conhecimento matemático.

Nossos objetivos principais foram investigar os fundamentos epistemológicos de uma educação por matemáticas e propor uma teoria que possa contribuir para a construção de novas racionalidades, capazes de enfrentar desafios sociais e ambientais contemporâneos. Para isso, adotamos uma abordagem teórica, apoiada em análises filosóficas e reflexões sobre a prática educacional.

As principais reflexões feitas aqui indicam que a concepção tradicional de matemática como um conjunto único e estático de conhecimentos não é suficiente para atender às necessidades contemporâneas da educação. Em vez disso, propomos uma visão de matemáticas, reconhecendo a diversidade de racionalidades matemáticas e suas implicações para a construção do conhecimento. Nossas discussões sugerem que a educação por matemáticas pode desempenhar um papel crucial na formação de novas racionalidades, contribuindo para a resolução de problemas sociais e ambientais. Entendemos que, ao promover experiências matemáticas que transcendem o ensino tradicional, podemos incentivar a criatividade e a inovação, fundamentais para enfrentar os desafios do século XXI.

No primeiro capítulo, *Introdução: Construindo uma Teoria como Flexibilidade Contemplativa Frente à Rigidez Acadêmica*, apresentamos a problemática da tese e justificamos a necessidade de uma nova abordagem teórica para a educação matemática. Discutimos as diferentes concepções de teoria e como a nossa proposta se distancia das concepções rígidas e estáticas, buscando uma teoria dinâmica e contemplativa da educação matemática. Citando Umberto Eco, esclarecemos nossa intenção de propor uma tese teórica que não apenas revisita

perspectivas existentes, mas que também abra diálogos e provoque tensões no campo da educação matemática.

Exploramos a definição de "teoria" a partir de diversas fontes, ressaltando as distinções entre as concepções mais rígidas e aquelas mais especulativas e provisórias. Utilizamos essas definições para construir uma base teórica flexível, contemplativa e aberta a reformulações. Rejeitamos a noção de uma teoria acabada e enfatizamos a importância de uma "teoria em ação" ou programa de pesquisa que possa se complementar e dialogar com outras teorias.

Também abordamos a necessidade de novas racionalidades para enfrentar os problemas atuais, destacando a relevância da educação matemática nesse contexto. Introduzimos a expressão "educação por matemáticas" e sua importância, propondo um entendimento mais amplo e plural da matemática como meio para a construção de novas racionalidades.

No capítulo 2, *Da Matemática às Matemáticas: Desconstrução e Exploração*, abordamos a evolução histórica e epistemológica da matemática, destacando a transição de uma visão singular para uma pluralidade de matemáticas. Inicialmente, discutimos a concepção tradicional da matemática como um conjunto único de conhecimentos específicos, referida como "matemática hegemônica". Apresentamos a frustração das tentativas históricas de caracterizar a matemática de forma definitiva e singular, mencionando os Teoremas de Incompletude de Gödel como um marco significativo nessa discussão.

Exploramos as contribuições de diferentes correntes filosóficas e matemáticas que buscaram fundamentar a matemática, incluindo o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. Discutimos as limitações dessas correntes e como os teoremas de Gödel evidenciaram a impossibilidade de uma fundamentação última e definitiva da matemática. A partir disso, argumentamos a favor de uma compreensão plural das matemáticas, reconhecendo sua natureza falível e dinâmica.

Também destacamos a epistemologia matemática de Imre Lakatos, que propôs uma visão falibilista e quase-empírica da matemática. Através de sua teoria dos programas de pesquisa, Lakatos mostrou como o conhecimento matemático se

desenvolve por meio de conjecturas, refutações e reformulações contínuas. Essa perspectiva apoia nossa proposta de uma educação por matemáticas que valorize a diversidade de racionalidades matemáticas.

No capítulo 3: *Além da Lógica: A Evolução dos Conceitos e a Educação Matemática*, exploramos várias discussões sobre a natureza da matemática, a educação matemática e as implicações pedagógicas dessas discussões.

Discutimos a importância da técnica na formulação dos pensamentos matemáticos, mas argumentamos que a técnica por si só não é suficiente. Utilizando o exemplo das frações, defendemos que educadores devem utilizar desenhos, *softwares* ou materiais manipuláveis para ajudar os alunos a visualizarem propriedades matemáticas e justificativas de algoritmos.

Fizemos uma analogia com o diálogo *Mênon* de Platão, onde se discute se a virtude pode ser ensinada. Platão, na voz de Sócrates, conclui que a virtude não pode ser ensinada no sentido tradicional, pois isso implicaria transformá-la em um conteúdo de ensino cristalizado. Essa discussão é utilizada para argumentar que conceitos e pensamentos matemáticos também não podem ser ensinados de forma limitada e técnica.

José Carlos Cifuentes é citado para reforçar que valores, como os encontrados na educação matemática, não podem ser ensinados da mesma maneira que conteúdos tradicionais. Suas contribuições nos sugerem que aspectos como "provar", "conjecturar", "definir" e "formalizar" devem refletir atitudes de emancipação, liberdade, responsabilidade e socialização, respectivamente.

Abordamos a visão de Ludwig Wittgenstein sobre a linguagem, que é vista como uma construção social rica em significados derivados da experiência. Essa concepção é utilizada para argumentar que conceitos matemáticos são dinâmicos e não possuem limites bem definidos, ganhando significado através do uso social. Também exploramos a noção de "pensar matematicamente" como um processo dinâmico e social. A contagem é apresentada como uma invenção humana para controlar quantidades, evoluindo para técnicas operacionais como o cálculo manual e, eventualmente, para abstrações matemáticas. Essa evolução é utilizada para

diferenciar entre o ensino de técnicas e o desenvolvimento do pensamento matemático.

Também apontamos para a necessidade de uma educação que promova a sustentabilidade e a justiça social, indo além da mera transmissão de conteúdos. Ubiratan D'Ambrosio é citado para reforçar que a educação deve preparar os educandos para viverem criticamente em uma sociedade multicultural e tecnologicamente avançada.

Defendemos que o uso do *software* GeoGebra 3D para visualizar figuras na geometria pode ajudar os educandos a entenderem conceitos como a distância euclidiana e outras métricas. A utilização de diferentes definições de distância é apresentada como uma forma alternativa das múltiplas possibilidades de pensamento dentro da matemática.

Mais uma vez discutimos a necessidade de uma mudança na lógica do sistema educacional para promover novas racionalidades. Alberto Acosta é citado para argumentar que a educação deve ser reestruturada para buscar novas alternativas que não reproduzam modelos ultrapassados, promovendo o Bem Viver através de princípios de reciprocidade, redistribuição e solidariedade.

Já no capítulo 4, intitulado *Pensamentos Matemáticos: Uma Jornada Dinâmica*, apresenta várias ideias relacionadas à natureza dinâmica e social do pensamento matemático.

Nesse capítulo, exploramos como o pensamento matemático é dinâmico e construído socialmente, a partir de experiências matemáticas e práticas sociais. Assim, a matemática não deve ser vista apenas como um conjunto fixo de técnicas e algoritmos, mas como um campo em constante evolução e adaptação às necessidades humanas.

Cifuentes e Einstein são citados para ilustrar a importância de entender a história e a filosofia da matemática para uma educação matemática completa. Sem essa base, o conhecimento matemático é como conhecer muitas árvores sem perceber a floresta.

Exemplos de abstração e concretização no pensamento matemático são discutidos, mostrando como conceitos matemáticos evoluem a partir de necessidades práticas e da experiência humana.

Enfatizamos que os conceitos matemáticos são construções sociais que ganham significado através do uso social e da experiência. Isso é apoiado pela filosofia de Wittgenstein sobre a linguagem. A visualização e a intuição são apresentadas como aspectos fundamentais do pensamento matemático, destacando que a interpretação visual matemática pode ser tão importante quanto a compreensão técnica.

Defendemos mais uma vez que a educação matemática deve ir além da transmissão de conteúdos estáticos e deve incentivar a formação do pensamento matemático dinâmico, promovendo a criatividade e a inovação.

No capítulo 5, chamado *Entre Ensino e Educação*, apresentamos várias ideias relacionadas à distinção entre ensino e educação e à importância de uma abordagem mais ampla para a formação matemática. O capítulo começa com a diferenciação entre os conceitos de ensino e educação, onde “ensino” pode ser resumido descrito como a transmissão de conhecimentos, enquanto educação é vista como um processo de emancipação intelectual.

Argumentamos que a educação vai além da simples transmissão de conteúdos. A formação do pensamento matemático envolve processos dinâmicos, como a criação de novos conceitos, a abstração, a concretização e a generalização.

As ideias filosóficas de Wittgenstein sobre jogos de linguagem e a construção social do conhecimento são utilizadas para argumentar que a linguagem e o conhecimento são produtos dinâmicos da interação humana. Larrosa complementa essa visão ao destacar a importância da experiência genuína na educação.

Discutimos os limites do ensino tradicional, que se concentra apenas na transmissão de conteúdos. Apresentamos a ideia de que certos aspectos do pensamento matemático não podem ser ensinados como conteúdos estáticos, mas devem ser experienciados e construídos dinamicamente.

Utilizando o diálogo *Mênon* de Platão, fazemos uma analogia entre o ensino da virtude e o ensino de conceitos matemáticos, concluindo que nem tudo pode ser

ensinado na forma de conteúdos. A virtude, assim como certos aspectos do pensamento matemático, não pode ser transformada em um simples conteúdo de ensino. Com isso, destacamos a importância da experiência na educação matemática, onde a experiência é vista como um processo em movimento, essencial para a formação de novas racionalidades e para a construção de um pensamento matemático crítico e criativo.

Assim, buscamos uma abordagem que valoriza a formação integral do educando, promovendo a emancipação intelectual e a construção de conhecimentos dinâmicos e contextualizados.

No capítulo 6, *Experiência e Educação*, tentamos enfatizar a importância da experiência no processo educacional e como ela difere do mero ensino de conteúdos. A experiência é enfatizada como fundamental para uma educação como abordamos, ela vai além da simples informação e é essencial para a formação do pensamento e dos conceitos.

Com base nas contribuições de Larrosa, a experiência é entendida como algo que nos transforma e constitui nossa maneira de ser, em contraste com a informação, que não deixa espaço para a experiência.

Buscamos novamente explorar as ideias de Wittgenstein sobre jogos de linguagem, sugerindo que a linguagem e o conhecimento são construções sociais dinâmicas. Essa abordagem é usada para entender como a experiência pode construir significados e entendimentos. Larrosa também é citado, argumentando que a educação deve ser mais parecida com uma arte do que com uma técnica, e que a experiência autêntica é crucial para a educação.

Novamente criticamos o modelo tradicional de educação, que se concentra na transmissão de dados e informações. Defendemos que esse modelo impede a verdadeira experiência e formação do educando, uma vez que, conforme Larrosa, a educação baseada apenas na informação e na formação de opiniões superficiais torna a experiência cada vez mais rara e menos valorizada.

Por fim, a experiência matemática é apresentada como uma fonte vital para a educação por matemáticas. Destacamos a importância de encorajar atitudes

como a formulação de perguntas, a conjectura, a definição e a formalização, que são essenciais para a formação do pensamento matemático.

Por fim, no capítulo 7, intitulado *O Labirinto da Racionalidade: Além do Lógico e do Ideológico*, apresentamos discussões centradas na noção de “racionalidade”: sua etimologia, significação, e críticas às concepções tradicionais.

A racionalidade é discutida como a capacidade humana de raciocinar, pensar logicamente e tomar decisões baseadas na razão. Na concepção positivista tradicional enxerga a lógica e a razão como universais e cristalizadas.

A racionalidade técnica é criticada por sua ênfase na eficácia e nos resultados quantificáveis, frequentemente negligenciando aspectos mais amplos e complexos da realidade. A racionalidade técnica tende a racionalizar a realidade, afastando e ignorando o que contradiz seu sistema coerente. A racionalidade comunicativa de Jürgen Habermas é introduzida como uma alternativa, destacando a importância do diálogo e da interação na construção do conhecimento. Habermas defende uma racionalidade participativa e aberta ao diálogo.

Edgar Morin é citado, argumentando que a racionalidade deve ser autocrítica para compreender o mito. A razão crítica deve se tornar autocrítica para lidar com as limitações e complexidades da realidade. Morin também observa que a sociedade moderna, apesar de se considerar racional, ainda está imersa em mitos e magia de um tipo diferente das sociedades primitivas. Portanto, uma racionalidade autocrítica é essencial para combater a ilusão de uma coerência absoluta.

Nesse capítulo, discutimos como a educação pode promover a formação de novas racionalidades. A educação deve ir além do ensino técnico e incorporar uma análise crítica e participativa, incentivando a construção de novas formas de pensar e enfrentar os problemas emergentes.

A educação por matemáticas é apresentada como uma forma de oportunizar a formação de novas racionalidades. Assim, a matemática deve ser vista não apenas como um conjunto de conhecimentos técnicos, mas como um campo dinâmico que pode contribuir para a formação de cidadãos críticos e criativos

A abordagem de Morin sobre a complexidade é explorada, destacando a necessidade de uma racionalidade que reconheça e lide com a complexidade do

real. Esta deve ser capaz de dialogar com o mundo real e admitir suas próprias limitações. Morin argumenta que a ciência deve ser baseada no consenso e no conflito, operando com racionalidade, empirismo, imaginação e verificação. Há um conflito permanente entre racionalismo e empirismo, e a complexidade científica é caracterizada pela presença do não científico no científico.

Essas ideias principais mostram uma abordagem que valoriza a crítica à racionalidade técnica e promove uma educação que incentive a formação de novas racionalidades, reconhecendo a complexidade do real e a importância do diálogo e da participação na construção do conhecimento.

A metapedagogia surge como uma necessidade de resposta e crítica às abordagens tradicionais da educação matemática. Ao invés de se limitar à transmissão de conhecimentos técnicos e estáticos, essa teoria propõe uma educação dinâmica e plural, que reconhece a matemática como um campo em constante evolução e profundamente enraizado nas práticas sociais e culturais. Mas não só isso. Para ter uma noção mais ampla de metapedagogia, enquanto conceito, é essencial não apenas explorar seus fundamentos epistemológicos, mas também suas implicações práticas e intelectuais e suas críticas às concepções tradicionais e vigentes de ensino e educação.

A metapedagogia baseia-se na premissa de que a matemática não é um conjunto fixo de verdades absolutas, mas sim um campo plural e dinâmico. Essa perspectiva é apoiada pela filosofia de Wittgenstein, que argumenta que os conceitos matemáticos são construções sociais que ganham significado através do uso e da experiência. Ao adotar essa visão, a metapedagogia desafia a ideia de que a matemática é uma disciplina homogênea e imutável, promovendo uma compreensão mais ampla e inclusiva do conhecimento matemático.

Edgar Morin e Jürgen Habermas também influenciam a metapedagogia com suas ideias sobre racionalidade e complexidade. Morin destaca a necessidade de uma racionalidade autocrítica que reconheça e lide com a complexidade do real, enquanto Habermas promove uma racionalidade comunicativa baseada no diálogo e na interação. Essas perspectivas são fundamentais para a metapedagogia, que

busca fomentar uma educação que vá além da racionalidade técnica e incorpore uma análise autocrítica e participativa.

Uma das ideias centrais da metapedagogia é a educação por matemáticas. Em vez de ensinar a matemática como um conjunto monolítico de conhecimentos, a educação por matemáticas reconhece a diversidade de práticas e formas de pensamento matemático. Essa abordagem busca valorizar a pluralidade de conhecimentos e promove uma educação que incentive a criatividade e a construção de novas racionalidades.

A metapedagogia argumenta que a matemática deve ser ensinada como um campo dinâmico e aberto à interpretação. Isso significa que os educadores devem incentivar os educandos a explorar diferentes métodos e abordagens, promovendo uma compreensão mais rica e diversificada da matemática. A ênfase está na formação do pensamento crítico e na capacidade de resolver problemas de maneira criativa.

Outro aspecto fundamental da metapedagogia é a ênfase na experiência como um meio essencial para a formação do pensamento matemático. Inspirada pelas ideias de Larrosa, que vê a educação como uma arte, a metapedagogia argumenta que a experiência genuína é crucial para a formação integral do educando. A experiência pode permitir que os educandos aprimorem seus pensamentos matemáticos, construam e reconstruam conceitos matemáticos, em contraste com a mera memorização de fórmulas e técnicas.

A experiência matemática, portanto, deve ser central na educação por matemáticas. Isso envolve proporcionar aos educandos oportunidades para vivenciar e explorar conceitos matemáticos de maneira diversas. A educação deve ser um processo dinâmico e interativo, onde os educandos devem ser incentivados a formular perguntas, fazer conjecturas, definir problemas e buscar soluções distintas.

A metapedagogia critica fortemente o modelo tradicional de ensino, que se concentra na transmissão de conteúdos de maneira rígida e linear. Esse modelo, segundo a metapedagogia, é insuficiente para formar indivíduos críticos e criativos, capazes de enfrentar os desafios complexos do mundo contemporâneo. A

educação tradicional muitas vezes reforça uma visão limitada e reducionista da matemática, negligenciando a importância da pluralidade e da experiência. Ao invés disso, a metapedagogia propõe uma abordagem que valorize a formação integral do educando, promovendo a emancipação intelectual e a construção de novos conhecimentos.

Entendemos que a metapedagogia tem várias implicações práticas para a educação matemática. Em primeiro lugar, os currículos devem ser reformulados para incorporar a pluralidade de conhecimentos matemáticos e valorizar a experiência prática. Isso significa que as aulas de matemática devem ser mais interativas e exploratórias, proporcionando aos educandos oportunidades para experimentar e aplicar conteúdos matemáticos, além de propor outros conteúdos e outras abordagens.

Além disso, os educadores devem ser formados para adotar uma abordagem metapedagógica. Isso envolve não apenas certo conhecimento matemático, mas também a capacidade de promover um ambiente de aprendizagem aberto a novas matemáticas. Os educadores devem, então, incentivar os educandos a explorar, questionar e construir conhecimentos, inclusive novos.

A metapedagogia, enquanto teoria aqui exposta, representa uma abordagem que vai ao encontro do que muitos outros pesquisadores da Educação Matemática e outras áreas defendem. Representa uma crítica ao modelo vigente de educação matemática, desafiando as concepções tradicionais de ensino e promovendo uma visão mais ampla e inclusiva do conhecimento. Ao valorizar a pluralidade de práticas matemáticas, a experiência prática e a formação do pensamento crítico, a metapedagogia oferece uma maneira de formar indivíduos capazes de enfrentar os desafios complexos do mundo contemporâneo. Em última análise, a metapedagogia busca promover uma educação que vá além do lógico e do ideológico, incentivando a construção de novas racionalidades e a formação de cidadãos críticos e criativos.

Entendemos que apesar desta ser uma pesquisa teórica, as implicações práticas podem ser amplas e variadas. Acreditamos que a teoria da metapedagogia, como estamos chamando este trabalho, pode e deve ser aplicada em diferentes

contextos educacionais, desde a educação básica até o ensino superior, promovendo uma educação matemática que valorize a pluralidade de pensamentos e práticas. Além disso, a metapedagogia pode contribuir para a formação de cidadãos críticos e criativos, capazes de enfrentar os desafios do mundo contemporâneo com novas perspectivas e soluções.

Reconhecemos que esta pesquisa possui limitações. A natureza teórica do trabalho requer validação empírica para confirmar a aplicabilidade prática das propostas aqui apresentadas. Futuras pesquisas podem se beneficiar de estudos de caso e experimentações em contextos educacionais reais para avaliar a eficácia das abordagens sugeridas, mas vale destacar que isso deve ser feito dando o devido entendimento ao termo “eficácia”. Além disso, repensar os currículos educacionais a partir das contribuições da metapedagogia deve ser explorada em diferentes contextos culturais e institucionais para garantir sua relevância e eficácia.

Recomendamos que futuras investigações explorem a interação entre diferentes formas de racionalidades matemáticas e sua aplicação em contextos variados. Também sugerimos que se investigue como a metapedagogia pode ser integrada em currículos educacionais e como essa integração pode contribuir para a formação de novas racionalidades em educandos e educadores.

Além disso, pesquisas futuras poderiam focar na adaptação da metapedagogia a diferentes níveis de ensino e disciplinas, investigando como as experiências matemáticas podem ser incorporadas em áreas como ciências naturais, engenharia, economia e artes. A análise de impactos a longo prazo na formação de estudantes, em termos de pensamento crítico, criatividade e capacidade de resolução de problemas, também seria uma área de grande interesse.

Por fim, se você chegou até aqui e ainda não está claro o que é metapedagogia, te dizemos que metapedagogia é um conceito e “os conceitos viajam e é melhor que viajem sabendo que viajam. É melhor que não viajem clandestinamente. É bom também que eles viajem sem serem percebidos pelos aduaneiros!” (MORIN, 2015, p. 117)

## REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. Tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revisada por Alfredo Bossi; revisão da tradução e tradução dos novos textos Ivone Castilho Benedetti. – 5ª ed. – São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ACOSTA, Alberto. **O bem viver: uma oportunidade para imaginar outros mundos**. Tradução de Tadeu Breda. – São Paulo: Autonomia Literária, Elefante, 2016. 246 p.

ANDERS, Valentín e múltiplos colaboradores. **Etimología de aprender**. Etimologías de Chile. (2001 – 2019). Disponível em: < <http://etimologias.dechile.net/?aprender> >. Acesso em: 21 de jul. de 2019.

ANDERS, Valentín e múltiplos colaboradores. **Etimología de apocalipsis**. Etimologías de Chile. (2001 – 2019). Disponível em: < <http://etimologias.dechile.net/?educar> >. Acesso em: 21 de jul. de 2019.

ANDERS, Valentín e múltiplos colaboradores. **Etimología de educar**. Etimologías de Chile. (2001 – 2019). Disponível em: < <http://etimologias.dechile.net/?apocalipsis> >. Acesso em: 19 de jul. de 2022.

ANDERS, Valentín e múltiplos colaboradores. **Etimología de racionalidad**. Etimologías de Chile. (2001 – 2019). Disponível em: < <https://etimologias.dechile.net/?racionalidad> >. Acesso em: 05 de jan. de 2024.

ANDERS, Valentín e múltiplos colaboradores. **Etimología de teoria**. Etimologías de Chile. (2001 – 2019). Disponível em: < <http://etimologias.dechile.net/?teori.a> >. Acesso em: 04 de ago. de 2022.

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Tradução: Leonel Vallandro. Porto Alegre: Globo, 1969.

BACHELARD, Gastón. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Tradução Esteia dos Santos Abreu. - Brasília: Paulus, 2013.

BÍBLIA. Português. Bíblia sagrada. Tradução de João Ferreira Almeida. Rio de Janeiro: King Cross Publicações, 2008. 1110 p. Velho Testamento e Novo Testamento

BLOOR, David. **Conhecimento e imaginário social**. Tradução Marcelo do Amaral Penna-Forte. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOTELHO, José Francisco. **Versões do fim do mundo: como diversas ideologias explicam o apocalipse**. Aventuras na História, 06 de set. 2019. Disponível em: < <https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/reportagem/historia-apocalipse-entenda-como-diferentes-povos-imaginaram-o-fim-do-mundo.phtml> >. Acesso em: 19 de jul. de 2022.

BUNGE, M. **Dicionário de Filosofia**. Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectivas, 2002. (Coleção Big Bang)

CIFUENTES, José Carlos. **Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: Uma “Odisséia Espiritual”**. In CLARETO; Sônia Maria, DETONI, Adlai Ralph; PAULO, Rosa Monteiro (org.) Filosofia, Matemática e Educação Matemática. Florianópolis (SC), v. 11, Ed. Filosofia da Educação Matemática, Juiz de Fora: Editora UFJF, p. 13 – 31, 2010.

CIFUENTES, José Carlos. **A Matemática elementar de um ponto de vista superior: uma contribuição ao “Projeto Felix Klein” para o ensino de Matemática na formação inicial de professores**. In CURY; Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (org.) Formação do professor de matemática: Reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, p. 145 – 182, 2012.

CIFUENTES, José Carlos. **Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na “Floresta Matemática”**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v. 11, Ed. Filosofia da Educação Matemática, p. 46 – 65, (nov.) 2016.

CIFUENTES, José Carlos; FRANCO, Valdeni Soliani. **O Pensamento Geométrico no Ensino Superior e o Despertar da Imaginação**. Rivista UNIÓN, n. 50, 2017. (p. 09 – 28)

CONDE, Mauro. Ciência e Linguagem: Fleck e Wittgenstein. In: CONDE, Mauro (org.) **Ludwik Fleck: estilos de pensamento na ciência**. Belo Horizonte: Fino Traço, 2012. (p.77 – 108)

CONWAY, John Bligh. **Functions of One Complex Variable** (Graduate Texts in Mathematics - Vol 11) (v. 1). Springer: 2nd Edition. 330 p. 1978

COSTA, Cleison Daniel. **A compreensão de democracia no pensamento de Charles Taylor** [manuscrito] / Cleison Daniel Costa. - 2021. 246 f. Orientador: Carlo Gabriel Kszan Pancera. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. -- 6. ed., 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020. – (Coleção Tendências em Educação Matemática)

DUMMETT, Michael. **Frege: Philosophy of Language**. London: Duckworth, 1973.

DUMMETT, Michael. **Truth and Other Enigmas**. British Journal for the Philosophy of Science 32 (4):419 – 425, 1978.

ECO, Umberto. **Como se faz uma tese**. Tradução Gilson Cesar Cardoso de Souza. - São Paulo: Perspectiva, 2008. 21. ed. - (Estudos; 85)

ENCICLOPEDIA Britânica. São Paulo: **Encyclopaedia Britannica do Brasil**, 1995. p. 897 – 906. 6V.

FEENBERG, Andrew. **Entre a razão e a experiência: Ensaio sobre tecnologia e modernidade**. Tradução Eduardo Beira, Cristiano Cruz e Ricardo Neder. Portugal: Inovatec. 2019

HABERMAS, Jürgen. **A lógica das ciências sociais**. Petrópolis: Vozes, 2009.

HABERMAS, Jürgen **Entre naturalismo e religião: estudos filosóficos**. Rio de Janeiro, Tempo Brasileiro. 399p. 2007

HABERMAS, Jürgen. **Teoria do Agir Comunicativo**. v. 1. Racionalidade da ação e racionalização social. São Paulo: Martins Fontes, 2012a.

HABERMAS, J. **Teoria do Agir Comunicativo**. v. 2. Sobre a crítica da razão funcionalista. São Paulo: Martins Fontes, 2012b.

JOURDAN, Camila. **As Observações De Wittgenstein Sobre O Teorema De Gödel**. *Philosophos*, Goiânia, v.18, n. 2, p. 61 – 104, jul./dez. 2013

KNIJNIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; GIONGO, Ieda Maria; DUARTE, Claudia Glavam. **Etnomatemática em movimento**. -- 3. ed. -- Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. -- (Coleção Tendências em Educação Matemática)

LAKATOS, Imre. **Provas e Refutações: A lógica da descoberta matemática**. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1978.

LAKATOS, Imre. **Matemática, ciencia y epistemología**. Versão espanhola de Diego Ribas Nicolás. Alianza Editorial, 1987.

LARROSA, Jorge. **Tremores: escritos sobre experiência**. Tradução Cristina Antunes, João Wanderley Geraldi. 1. Ed.; 4. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

LATOUR, Bruno. **Jamais fomos modernos: ensaio de antropologia simétrica**. Tradução de Carlos Irineu da Costa; revisão técnica de Stelio Marras. -- São Paulo: Editora 34, 2019 (4ª Edição)

MADDY, Penelope. **Realism in Mathematics**. Oxford, Clarendon Press, 1990.

MICHAELIS. **Moderno dicionário da língua portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos, 1998. Dicionários Michaelis, 2259 p.

MICHAELIS. **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**. Editora Melhoramentos Ltda. 2015. Disponível em: < <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/> > Acesso em: 19 de jul. de 2022.

MOLINA, Jorge Alberto. **Lakatos como filósofo da matemática**. *Episteme*, Porto Alegre, n. 13, p.129 – 153, jul./dez. 2001.

MORIN, Edgard. **Introdução ao pensamento complexo**. Tradução Eliane Lisboa. 5.ed. -- Porto Alegre: Sulina, 2015. 120 p.

MOURA, Anna Regina L. de; LIMA, Luciano Castro; MOURA, Manoel Oriosvaldo de; MOISÉS, Roberto Perides. **Educar com a Matemática: Fundamentos**. 1. ed. – São Paulo: Cortez, 2016.

PARSONS, Charles. **From Kant to Husserl: Selected Essays**, *Philosophia Mathematica*, Volume 20, Issue 3, October 2012, Page 404, disponível em < <https://doi.org/10.1093/phimat/nks015> > Acesso em 17 de julho de 2023.

PARSONS, Charles. **Mathematics in Philosophy: Selected Essays**, Ithaca: Cornell University Press, 1983.

PLATÃO. **Mênon**. Texto estabelecido e anotado por John Burnet; tradução de Maura Iglésias. Rio de Janeiro. Ed. PUC-Rio; Loyola 2001. 117p.

PÓLYA, George. **On Learning, Teaching and Learning Teaching**. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No.6 (Jun.- Jul., 1963), 605 – 619

SHAPIRO, Stewart. **Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology**. Oxford University Press, Oxford, 1997.

SHAPIRO, Stewart. **Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics**. Oxford University Press, Oxford, 2000.

SILVA, Gustavo Augusto Fonseca. **Observações sobre a filosofia da matemática de Ludwig Wittgenstein**. *Griot: Revista de Filosofia, Amargosa/Bahia*, v.11, n.1, p.97 – 113, junho/2018.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. – São Paulo: Cortez, 2007.

SNAPPER, Ernst. **As Três Crises da Matemática: o Logicismo, o Intuicionismo, e o Formalismo**. Tradução de J. P. de Carvalho. *Humanidades*, v. 2, n. 8, p. 85 – 93, jul/set. 1984.

TAYLOR, Charles. **A Ética da Autenticidade**. São Paulo: Realizações Editora, 2011, 127 p. Col. Abertura Cultural.

TAYLOR, Charles. **As fontes do self: A construção da identidade moderna**. (Trad. Adail U. Sobral e Dinah de Azevedo de Abreu). São Paulo: Edições Loyola, 1997.

TAYLOR, Charles. **Hegel e a sociedade moderna**. São Paulo: Edições Loyola, 2005

TAYLOR, Charles. **The Language Animal: The Full Shape of the Human Linguistic Capacity**. Cambridge, MA: Harvard University Press. 2016

VALVERDE, Willian. **A experiência matemática: fundamentos epistemológicos e implicações pedagógicas**. Orientador: CIFUENTES, José Carlos. 2019. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática. Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

VIANNA, Carlos R.; CURY, Helena N. **Ângulos: uma “História” escolar**. Revista História & Educação Matemática, v. 1, n. 1, p. 23 – 37, 2001.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. Tradução Marcos G. Montagnoli. 9ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: Editora Universitária São Francisco, 2014

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Remarks on Foundations of Mathematics**. Edited by G.H.von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe. Translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Blackwell, 1967.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus**. Tradução Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1994.