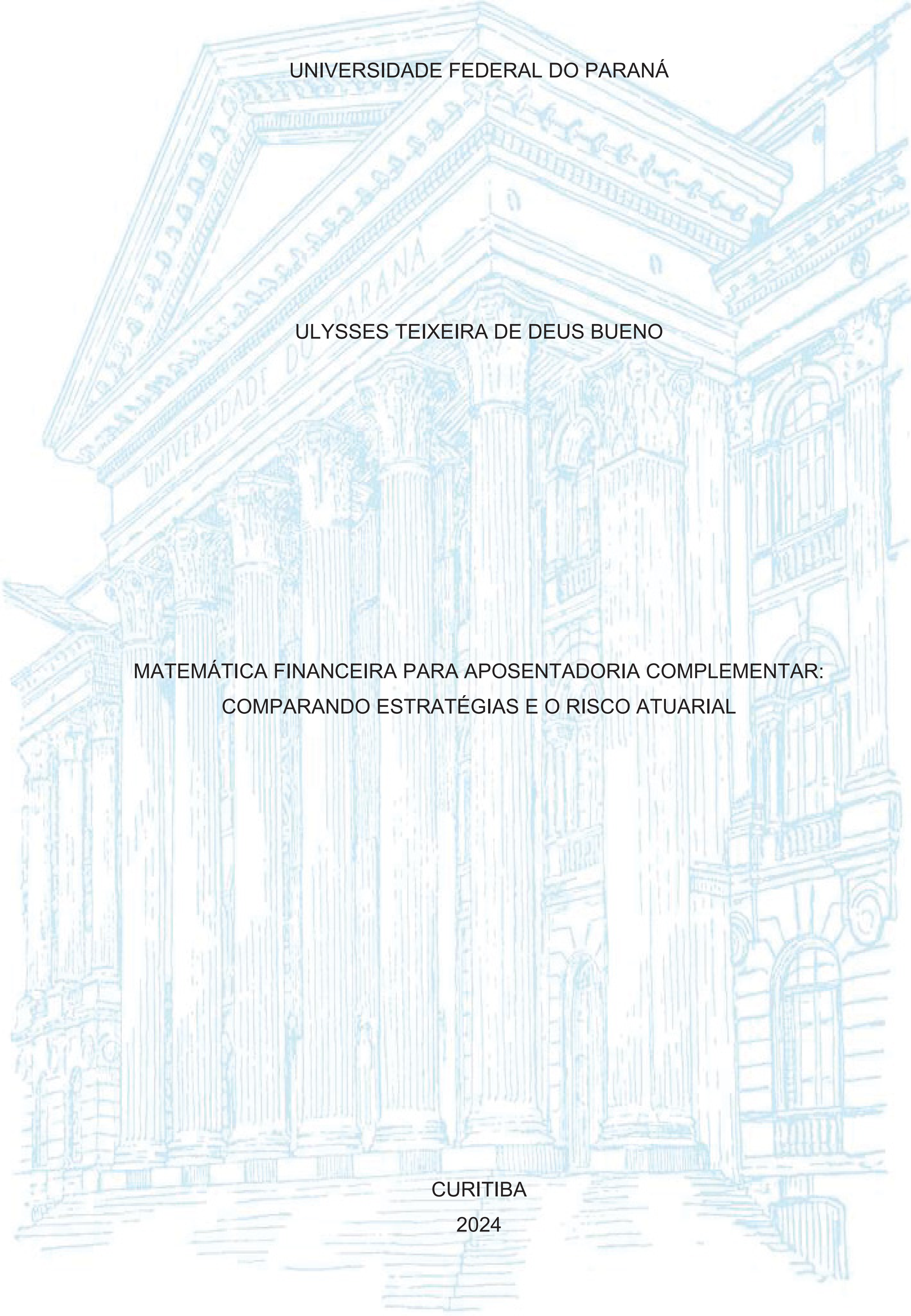

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ULYSSES TEIXEIRA DE DEUS BUENO

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA APOSENTADORIA COMPLEMENTAR: COMPARANDO ESTRATÉGIAS E O RISCO ATUARIAL

CURITIBA

2024

ULYSSES TEIXEIRA DE DEUS BUENO

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA APOSENTADORIA COMPLEMENTAR: COMPARANDO ESTRATÉGIAS E O RISCO ATUARIAL

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática - PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José João Rossetto.

CURITIBA
2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Bueno, Ulysses Teixeira de Deus
Matemática financeira para aposentadoria complementar: comparando estratégias e o risco atuarial / Ulysses Teixeira de Deus Bueno. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: José João Rossetto

1. Matemática financeira. 2. Aposentadoria – Planejamento. 3. Matemática atuarial. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Rossetto, José João. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ULYSSES TEIXEIRA DE DEUS BUENO** intitulada: **MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA APOSENTADORIA COMPLEMENTAR: COMPARANDO ESTRATÉGIAS E O RISCO ATUARIAL**

, sob orientação do Prof. Dr. JOSÉ JOÃO ROSSETTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVADO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 08 de Maio de 2024.

JOSÉ JOÃO ROSSETTO
Presidente da Banca Examinadora

ADRIANA LUIZA DO PRADO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

RAUL PRADO RAYA
Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPR)

LUCELINA BATISTA DOS SANTOS
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), por proporcionar uma formação de qualidade e oportunidades de crescimento profissional.

Ao meu orientador, que acreditou em mim, teve a paciência de esperar eu me encontrar no tema correto e me incentivou a terminar esse projeto com motivação para continuar minha formação.

À Universidade Federal do Paraná e seu corpo docente, pelo ensino público de qualidade, que ajudou a mudar minha vida e a qual sou defensor com orgulho.

Aquela que me abriu as portas do mundo atuarial Sandra Regina Odeli, que permitiu todo o contato e acesso ao campo da atuária, fornecendo recomendações valiosas e facilitou a compreensão dos conceitos fundamentais para a pesquisa.

Ao Leandro Rafael Pinto, irmão que a vida me deu, cuja visão macro e habilidade em metodologia científica foram essenciais para estruturar e dar clareza às ideias deste trabalho. Sua orientação e apoio foram inestimáveis.

À minha família, minha esposa Keila, e minhas filhas Luna e Bianca. Vocês são o maior incentivo e apoio para eu me tornar uma pessoa melhor.

"Não é suficiente saber matemática; é preciso também aplicá-la."

Johann von Goethe

RESUMO

O estudo investiga a viabilidade de incorporar o fator risco no planejamento da aposentadoria complementar, comparando métodos tradicionais de acúmulo de capital. Analisaremos três cenários: guardar dinheiro em casa, poupança e investimento em instituições financeiras, visando compreender sua rentabilidade e segurança. A pesquisa destaca a necessidade de conscientização sobre educação financeira no Brasil, especialmente no planejamento da aposentadoria, em um contexto em que a falta de seguros previdenciários e práticas de investimento sem considerar riscos são comuns. A abordagem problematizadora visa tornar o tema acessível à população, incentivando a visão da matemática como uma ferramenta essencial para compreender e transformar o mundo. Por fim, apresentaremos problemas de matemática financeira e atuarial de forma prática, culminando em uma análise comparativa dos resultados de cada cenário. Este trabalho contribui para uma compreensão mais ampla e informada sobre o planejamento da aposentadoria complementar, oferecendo recomendações valiosas para tomadas de decisão financeira conscientes e eficazes.

Palavras-chave: Matemática Atuarial, Aposentadoria Complementar, Matemática Financeira.

ABSTRACT

The study examines the feasibility of including risk factors in complementary retirement planning by comparing traditional methods of capital accumulation. We will analyze three scenarios: keeping money at home, saving, and investing in financial institutions, to understand their profitability and security. The research emphasizes the need for financial education in Brazil, especially in retirement planning, where the lack of pension insurance and risk-free investment practices are common. The approach aims to make the subject accessible to the public, promoting the view of mathematics as a crucial tool for understanding and transforming the world. Finally, we will present practical financial and actuarial mathematics problems, culminating in a comparative analysis of the results of each scenario. This work contributes to a broader and more informed understanding of complementary retirement planning, offering valuable recommendations for conscious and effective financial decision-making.

Keywords: Actuarial Mathematics, Complementary Retirement, Financial Mathematics.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O envelhecimento da população é um fenômeno global que se manifesta não apenas em países desenvolvidos, mas também em nações em desenvolvimento, incluindo o Brasil. Esse processo é caracterizado pelo aumento da expectativa de vida e pela transformação da estrutura etária da sociedade.

As projeções demográficas indicam que, até o ano de 2060, a população idosa brasileira, composta por indivíduos com 60 anos ou mais, deverá atingir a marca de 73,5 milhões de pessoas, representando 33,7% da população total do país [IBGE, 2013]. Esse rápido e significativo crescimento da população idosa ocorre em paralelo à diminuição da população em idade economicamente ativa.

A certeza do envelhecimento de cada pessoa também traz a confirmação da redução do potencial laboral, ou seja, por mais que a qualidade de vida venha aumentando com os avanços tecnológicos, o corpo e a mente perderão suas plenas funções e será necessário planejar como se manter financeiramente no final da vida.

Este estudo se propõe a abordar a complexa questão da aposentadoria complementar, considerando não apenas os aspectos financeiros, mas também os fatores de risco associados. A partir da observação das lacunas nos métodos convencionais de planejamento de aposentadoria, surge a indagação central deste trabalho: será que é viável e eficaz planejar uma aposentadoria complementar levando em consideração o fator risco? Nesse sentido, este estudo buscará investigar e analisar criticamente diferentes abordagens de planejamento de aposentadoria complementar, explorando como a integração do fator risco pode impactar nas decisões e resultados finais.

A preparação financeira para a aposentadoria é uma questão de extrema importância em um mundo onde a estabilidade econômica após o período laboral torna-se cada vez mais desafiadora. No contexto brasileiro, a educação financeira e a consideração do fator risco no planejamento previdenciário ainda são áreas subdesenvolvidas, onde estratégias de investimento e planejamento de aposentadoria complementar muitas vezes são negligenciadas.

Aqui não será abordada a aposentadoria via INSS, mas um estudo sobre a construção de uma aposentadoria complementar. Este trabalho tem como foco a investigação sobre a viabilidade de incorporar o fator risco no planejamento da aposentadoria complementar, comparando com métodos mais tradicionais de acúmulo de capital, podendo ser reproduzido por vários trabalhadores na prática.

A metodologia apresentada consistirá em demonstrar, por meio de situações-problema (problematização), como uma pessoa de 35 anos contribuirá mensalmente ao longo dos próximos 30 anos de sua vida laboral. O objetivo é que, ao atingir os 65 anos, ela possa acumular um montante que lhe permita usufruir de uma renda mensal para complementar sua aposentadoria durante os próximos 20 anos.

Com a situação problema definida, serão construídos três cenários. O primeiro envolve a ideia mais simples de acumular capital sem atualização monetária, ou seja, guardar dinheiro em casa (debaixo do colchão). O segundo cenário consiste em acumular o capital na poupança, visto que é o investimento mais fácil e popular no Brasil. Por fim, o terceiro cenário envolverá a contratação de uma instituição financeira que leve em consideração os riscos de envelhecimento e a precificação para assumir essa responsabilidade.

A hipótese central deste estudo é a possibilidade de planejar uma aposentadoria complementar levando em consideração o fator risco. Nesse sentido, os objetivos da pesquisa são:

- Demonstrar, por meio de situações-problema, como o fator risco pode ser integrado ao planejamento da aposentadoria complementar.
- Explorar estratégias de investimento, tais como guardar dinheiro no "colchão" e na poupança, e analisar seu impacto no acumulado para a aposentadoria.
- Apresentar conceitos atuariais e sua relevância no contexto do planejamento previdenciário.
- Avaliar o potencial de inclusão do fator risco no planejamento financeiro para a aposentadoria complementar.

1.1 JUSTIFICATIVA

A importância deste estudo reside na necessidade de promover uma maior conscientização sobre a educação financeira no Brasil, especialmente no que tange ao planejamento da aposentadoria. A cultura de guardar dinheiro no "colchão" ou na poupança, sem considerar os riscos financeiros envolvidos, é uma prática comum que pode comprometer a segurança financeira dos indivíduos no longo prazo. Além disso, a falta de seguros previdenciários no país amplia a necessidade de uma abordagem mais atenta e informada em relação ao planejamento da aposentadoria.

A matemática atuarial, apesar de não ser tão popular, é a base para entendermos a análise dos riscos de um planejamento financeiro a longo prazo. Atuária é uma disciplina que utiliza métodos matemáticos e estatísticos para avaliar e gerenciar riscos financeiros e de seguros. Profissionais da área, conhecidos como atuários, aplicam essas técnicas para calcular probabilidades de eventos futuros e suas consequências econômicas, ajudando a garantir a estabilidade financeira de seguradoras, fundos de pensão e outras entidades.

A escolha em apresentar o tema através da problematização é para tornar o trabalho mais acessível à maioria da população, além de identificá-lo como um tema a ser abordado na educação. Os conceitos atuariais são complexos em sua grande maioria, e, para tentar tornar a matemática atuarial mais acessível, optamos por apresentar cada problema como um exercícios tradicional de matemática escolar.

Problematização é um conceito que vem das ciências humanas e sociais e refere-se ao ato de questionar e analisar um tema ou problema complexo, buscando compreendê-lo em suas diversas dimensões e perspectivas. O objetivo da problematização é examinar um tópico de maneira crítica, considerando suas implicações sociais, políticas, culturais e históricas, e questionar suposições subjacentes. Ao problematizar um assunto, os indivíduos são encorajados a examinar as estruturas de poder, as desigualdades e os diversos contextos que moldam e influenciam o tema em questão.

Na educação, a problematização é frequentemente utilizada como uma abordagem de ensino que incentiva os alunos a se envolverem ativamente com os temas e a desenvolverem pensamento crítico e reflexivo. Isso envolve formular perguntas desafiadoras, levantar questões polêmicas e promover discussões significativas para a compreensão aprofundada de um assunto. Ao problematizar, os estudantes são estimulados a analisar diferentes pontos de vista, a considerar implicações práticas e éticas, e a explorar soluções para problemas complexos.

> Problematizar é colocar o aluno em contato com situações que o mobilizam, que o desafiam, que o incitam a buscar soluções e a desenvolver um trabalho investigativo e criativo. O desafio é levar o aluno a ver a matemática como uma ciência viva, útil e necessária para compreender e transformar o mundo.
>
> (Ubiratan D'Ambrosio)

Neste trabalho, abordaremos problemas de matemática financeira e atuária do ponto de vista de problemas práticos. Ao final, iremos comparar os principais resultados e cada cenário, destacando como diferencial do trabalho o cálculo de riscos.

Destacamos também a escassez de produção bibliográfica referente à área de matemática atuarial (cálculo de risco). A quantidade de trabalhos acadêmicos é limitada, com poucas referências bibliográficas disponíveis em português, e não encontramos materiais que estabeleçam a interconexão entre o ensino de atuária e suas aplicações na educação básica. Portanto, um dos diferenciais deste trabalho é a apresentação dessa perspectiva, oferecendo uma contribuição significativa para o fortalecimento desse tema já na construção da matemática escolar.

1.2 EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA FINANCEIRA

A educação financeira é um tema de grande relevância e atual. Trata-se de um conjunto de conhecimentos, habilidades e atitudes que permitem às pessoas gerenciar seus recursos financeiros de forma consciente, responsável e sustentável, buscando atingir seus objetivos de vida e contribuir para o desenvolvimento da sociedade.

A educação financeira tem sido reconhecida como um direito humano e um fator de inclusão social por diversas organizações internacionais, como a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), o Banco Mundial, entre outras. Essas organizações têm promovido iniciativas e recomendações para a implementação da educação financeira em diferentes países e contextos, visando melhorar a qualidade de vida das pessoas e a estabilidade econômica global.

> Educação Financeira é o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que com informação, formação e orientação possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda, adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar e, assim, tenham a possibilidade de contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro.
>
> (OCDE, 2005).

No Brasil, a educação financeira também tem ganhado destaque e importância nos últimos anos, especialmente após a criação da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) em 2010. A ENEF é uma política pública que visa disseminar a educação financeira no país, por meio de ações coordenadas entre o governo, a sociedade civil e o setor privado. Uma das principais ações da ENEF é a inserção da educação financeira na educação básica, como um tema transversal e integrado às diversas áreas do conhecimento.

No contexto da educação matemática no ensino médio, destaca-se a relevância atribuída pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) à conexão dos conteúdos matemáticos com o cotidiano dos alunos.

> “Os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles”
>
> (BRASIL, 2018, p. 535).

Dessa forma, o objetivo deste estudo é apresentar uma ferramenta de ensino de Matemática Financeira que aborde as possibilidades existentes de aposentadoria complementar, levando em consideração além de métodos tradicionais, entender como é feito o cálculo de risco envolvido no planejamento de instituições financeiras para garantir essa modalidade em um período específico.

2. CENÁRIO 1 – GUARDAR DINHEIRO NO COLCHÃO

A expressão "guardar dinheiro debaixo do colchão" é comumente usada no Brasil para descrever a prática de armazenar dinheiro em casa, desconfiando dos bancos ou de métodos mais convencionais. Embora possa parecer absurda, ainda é uma realidade em muitos lares, especialmente entre famílias de menor poder aquisitivo e com pouca familiaridade com o sistema financeiro. A notícia a seguir reflete tal histórico (Figura 1).

globo.com | g1 | ge | gshow | globoplay

MENU G1 GLOBO REPÓRTER

Edição do dia 14/06/2013
14/06/2013 23h06 - Atualizado em 01/07/2013 22h57

Mudança de moeda faz homem perder fortuna guardada no colchão

Valdomiro juntava o dinheiro em casa e não trocou quando surgiu o real. "Era dinheiro de fazer medo", conta ele, que hoje guarda tudo no banco.

Figura1: extrato de notícia sobre guardar dinheiro em casa. [GLOBO, 2013]

Esse modelo funciona como um princípio fundamental para compreender que a aposentadoria complementar é a acumulação de capital ao longo da vida profissional, que será utilizado como fonte de renda durante o período em que não é viável ou desejável continuar trabalhando.

Nesta seção, vamos determinar a quantia mensal a ser economizada, garantindo assim uma renda adicional todo mês após a aposentadoria por um período específico. O período no qual os depósitos mensais serão feitos será chamado de *fase de acumulação*, enquanto o período durante o qual as retiradas mensais serão realizadas será conhecido como *fase de usufruto*. Consequentemente, as contribuições, que chamaremos de investimentos ou contribuições, criarão um fundo acumulado que diminuirá à medida que os resgates, que denominaremos de pagamentos ou benefícios, forem feitos. Para fins de cálculo, todos os valores dos investimentos mensais serão idênticos, assim como todos os benefícios mensais terão o mesmo montante.

2.1 ACUMULAÇÃO DE CAPITAL SEM RENDIMENTOS

Nesse contexto específico, estabelecemos que não haverá qualquer forma de retorno sobre o capital investido, ou seja, seria o caso de alguém que guarda suas economias em casa. Consideremos x como a idade na qual uma pessoa inicia suas economias, e y como a idade na qual ela planeja se aposentar para desfrutar de uma renda mensal até uma determinada idade, w. Nesse sentido, precisamos calcular o valor mensal P que deve ser economizado por um período equivalente a $y-x$ (período de acumulação), a fim de garantir a possibilidade de desfrutar, no futuro, de uma renda mensal R, por um tempo correspondente a $w-y$ (período de usufruto). Representando em forma de equação, temos:

$$(valor\ acumulado) = (valor\ usufruído\ no\ futuro)$$

$$P \cdot (y-x) = R \cdot (w-y)$$

Determinamos, portanto, que o valor mensal poupado deve ser dado por:

$$P = R \cdot \frac{(w-y)}{(y-x)}$$

2.2 Problema 01: Um indivíduo, ao atingir a idade de 35 anos, planeja iniciar uma prática de economia mensal fixa para complementar sua aposentadoria. Ele opta por guardar o montante diretamente em sua residência. O objetivo é se aposentar exatamente ao completar 65 anos e acumular uma reserva de, no mínimo, R$ 1000,00 por mês até atingir a idade de 85 anos. Qual deve ser o valor mensal a ser guardado para atingir a meta desejada, sem considerar os efeitos da inflação?

Solução:

Do enunciado temos:

Período de acumulação: $y-x=65-35=30$ anos

Período de usufruto: $w-y=85-65=20$ anos

$R = R\$1.000,00$

$P = ?$

Utilizando a fórmula $P = R \cdot \frac{(w-y)}{(y-x)}$ temos:

$$P = 1000 \cdot \frac{20}{30}$$
$$P \cong 666,67$$

Portanto, esse indivíduo deve poupar todo mês R$ 666,67.

Ao final de 30 anos (360 meses) o total poupado será de R$ 240.361,20. Esse valor será comparado nas próximas seções para verificar os modelos com atualização de juros.

Este exemplo ilustra a viabilidade de planejar a aposentadoria com noções básicas de matemática, porém sua simplicidade também implica em alto risco, especialmente dentro do atual modelo financeiro. Alguns riscos incluem:

1. Risco de Roubo ou Perda: Manter grandes quantias em casa aumenta a vulnerabilidade ao roubo ou perda devido a desastres naturais, como incêndios ou inundações.

2. Ausência de Seguro: O dinheiro guardado em casa não está segurado, o que significa que não há garantia de recuperação em caso de roubo ou perda.

3. Desvalorização do Dinheiro: A inflação pode reduzir o poder de compra do dinheiro guardado ao longo do tempo, especialmente se não estiver investido em ativos que superem a taxa de inflação.

4. Perda de Oportunidade de Investimento: Manter dinheiro parado em casa impede oportunidades de investimento em veículos financeiros que poderiam gerar retornos mais altos, como ações, títulos ou fundos de investimento.

5. Falta de Registro e Transparência: Guardar dinheiro em casa dificulta o monitoramento e controle dos gastos, tornando mais desafiador o planejamento financeiro a longo prazo.

É importante ressaltar que o Brasil já enfrentou períodos de hiperinflação, como nas décadas de 80 e 90, e durante a pandemia de COVID-19, os preços de muitos produtos aumentaram drasticamente. Portanto, guardar dinheiro em casa pode resultar em perda significativa do poder aquisitivo devido à inflação.

No próximo capítulo, faremos uma análise detalhada do acúmulo de capital através da caderneta de poupança, um dos métodos de investimento mais populares e acessíveis no Brasil. Exploraremos aspectos como rentabilidade, liquidez, segurança e limitações associadas a essa modalidade de poupança.

3. CENÁRIO 2 - GUARDANDO DINHEIRO NA POUPANÇA

A introdução deste capítulo requer uma explanação sobre a escolha da caderneta de poupança como referência para este estudo. Embora haja uma variedade de investimentos disponíveis no Brasil, como a bolsa de valores e o tesouro direto, três fatores preponderaram para essa seleção:

- O valor da sua renda anual,
- A facilidade de acesso e a popularidade no mercado brasileiro,
- A adequação para comparações com modelos atuariais[1].

Desde 2012, a poupança adota um regime de capitalização, conforme segue:

1. Quando a taxa Selic (taxa básica de juros) está igual ou acima de 8,5% ao ano, a poupança rende 0,5% ao mês mais a Taxa Referencial (TR), totalizando aproximadamente 6,17% ao ano.
2. Quando a taxa Selic está abaixo de 8,5% ao ano, a poupança rende 70% da taxa Selic mais a TR, com cálculo diário.

Atualmente, a TR mantém-se próxima de zero[2], resultando no rendimento da poupança essencialmente composto pela taxa fixa de 0,5% ao mês,

[1] Cálculo de fatores de risco.
[2] A TR (Taxa Referencial) tem se mantido próxima de zero devido à baixa Taxa Selic, inflação controlada e decisões de política monetária do Banco Central.

aproximadamente 6,17% ao ano. Esta taxa, de aproximadamente 6% ao ano, é significativa para este estudo considerando que os cálculos atuariais frequentemente consideram juros de, no máximo, 6% ao ano, o que possibilita uma comparação relevante entre os cenários abordados.

Utilizando o montante a juros compostos $M = C(1+i)^n$, onde C é o capital inicial aplicado, a poupança tendo uma taxa de juro $i = 0{,}5\%$ a.m., durante 12 meses ($n = 12$), tem-se:

$$M = C(1+0{,}005)^{12}$$
$$M = C \cdot 1{,}0617$$

Ou seja, um capital aplicado na poupança rende aproximadamente 6,17% a.a.

Nestas condições, temos que a estimativa da quantia a ser economizada ao longo de um período de acúmulo para assegurar um rendimento em um período de desfrute leva em conta a estrutura de aumento de capital em ambos os períodos, como alguém que investe um montante em uma aplicação que gera lucros a juros compostos. Para uma compreensão mais clara desse procedimento, vamos empregar o conceito de pagamentos regulares uniformes.

Uma observação importante é que para facilitar a explicação, optou-se por utilizar apenas o conceito de pagamento postecipado. Existe a opção de pagamento antecipado, mas como o mercado utiliza com mais frequência o modelo postecipado, achamos que não haverá perda de generalidade.

> Pagamento postecipado refere-se a um tipo de transação financeira em que o pagamento é efetuado no final de um determinado período de tempo. Por exemplo, no contexto de empréstimos, o pagamento postecipado implica que os juros e a amortização são pagos após o período de empréstimo, em oposição ao pagamento antecipado, em que os pagamentos são feitos no início do período.
>
> (SILVA, 2022).

3.1 VALOR FUTURO

Considere uma série de pagamentos regulares idênticos, submetidos a juros compostos. Após um intervalo de *n* meses, a soma total desses valores corresponderá ao Valor Futuro.

$$VF = \left\{ \begin{array}{l} P \\ \quad + \\ \quad P\cdot(1+i) \\ \qquad\qquad + \\ \qquad\qquad P\cdot(1+i)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad P\cdot(1+i)^{n-2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad P\cdot(1+i)^{n-1} \end{array} \right.$$

Pode-se observar que a situação acima é uma progressão geométrica de razão $(1+i)$, logo evidenciando *P* e aplicando a fórmula da soma finita de PG, tem-se:

$$VF = P + P\cdot(1+i) + \ldots + P\cdot(1+i)^{n-3} + P\cdot(1+i)^{n-2} + P\cdot(1+i)^{n-1}$$
$$VF = P\left(1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right)$$
$$VF = P\left(\frac{(1+i)^{n-1}(1+i)-1}{(1+i)-1}\right)$$

$$\therefore\ VF = P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Além de permitir calcular o Valor Futuro essa expressão também permite calcular o valor mensal da contribuição. Basta isolar P na expressão, obtendo:

$$P = VF \cdot \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right)$$

De posse dessas ferramentas, pode-se comparar o mesmo cenário trabalhado no Problema 01, e verificar as principais diferenças encontradas quando utilizamos a atualização de juros compostos.

3.1.1 Problema 02: Qual seria o montante acumulado ao longo de 30 anos se alguém investisse regularmente R$ 666,67 por mês na caderneta de poupança, supondo juros compostos com à taxa de 0,5% ao mês?

Solução:

Do enunciado temos:

Tempo: 30 anos = 360 meses

Taxa de juros compostos: 0,005 a.m.

$P = R\$666,67$

Utilizando a fórmula $VF = P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$ temos:

$$VF = 666,67\left(\frac{(1+0,005)^{360} - 1}{0,005}\right)$$
$$VF = 666,67\left(\frac{5,0225}{0,005}\right)$$
$$VF = 666,67 \cdot 1004,51$$

$$\therefore VF = 669.680,04$$

Observamos que o resultado obtido é mais que 2,7 vezes o valor obtido no problema 01. Tal resultado permite uma nova reflexão.

3.1.2 Problema 03: Qual deve ser o valor dos depósitos mensais para que uma pessoa acumule cerca de R$ 240.000,00 em 30 anos, ao investir regularmente o mesmo montante em uma aplicação com uma taxa de rentabilidade de 0,5% ao mês?

Solução:

Do enunciado temos:

Tempo: 30 anos = 360 meses

Taxa de juros compostos: 0,005 a.m.

$VF = R\$240.000,00$

Utilizando a fórmula $P = VF \cdot \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right)$ temos:

$$P = 240.000 \cdot \left(\frac{0,005}{(1+0,005)^{360} - 1} \right)$$
$$P = 240.000 \cdot \left(\frac{0,005}{5,02257} \right)$$
$$P = 240.000 \cdot 0,0009955063$$

$$\therefore P = 238,92$$

Comparando com o resultado do Problema 01, temos que os juros compostos facilitam a contribuição mensal para obter o mesmo total acumulado em 30 anos.

Porém, se os valores atualizados causam essa diferença para arrecadar o valor total, abre-se um novo questionamento: Ao se retirar mensalmente parte do valor acumulado, o restante também sofrerá atualização e terá algum tipo de rendimento. Será que tal efeito não altera o valor que será recebido mensalmente no período de usufruto?

Para responder a essa dúvida vamos estudar o conceito de Valor Presente em uma série de pagamentos.

3.2 VALOR PRESENTE

Suponha uma sequência regular de pagamentos *R* e uma taxa *i* por período. Definimos o *Valor Presente* (*VP*) como a soma de todos os pagamentos descontados (subtraindo os juros[3]) no período inicial (data 0). Assim, pode-se dividir cada prestação futura por $(1+i)^t$, onde t corresponde ao número da parcela antecipada na série de pagamento uniforme. Obtém-se:

$$VP = \begin{cases} \dfrac{R}{(1+i)} \\ \quad + \\ \quad\quad \dfrac{R}{(1+i)^2} \\ \quad\quad\quad + \\ \quad\quad\quad\quad \dfrac{R}{(1+i)^3} \\ \quad\quad\quad\quad\quad + \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \dfrac{R}{(1+i)^{n-1}} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \dfrac{R}{(1+i)^n} \end{cases}$$

Tal situação é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{(1+i)}$, evidenciando R e aplicando a fórmula da soma finita de uma PG para *n* termos:

[3] Pagamentos uniformes já possuem a taxa de juros embutida na prestação.

$$VP=\frac{R}{(1+i)}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\cdots+\frac{R}{(1+i)^{n-1}}+\frac{R}{(1+i)^n}$$

$$VP=R\left(\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}+\frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

$$VP=R\left(\frac{\frac{1}{(1+i)^n}\cdot\frac{1}{(1+i)}-\frac{1}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)}-1}\right)$$

$$VP=\frac{R}{(1+i)}\left(\frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}}\right)$$

$$VP=\frac{R}{(1+i)}\cdot\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\cdot\frac{(1+i)}{-i}$$

$$\therefore VP=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i\cdot(1+i)^n}$$

Além de permite calcular o Valor Presente essa expressão também permite calcular o valor mensal da contribuição. Basta isolar *R* na expressão, obtendo:

$$R=VP\cdot\frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

3.2.1 Problema 04: Qual é o valor do resgate mensal para um montante de R$ 240.000,00 que está em um fundo com taxa de rendimento de 0,5% a.m., com a intenção de realizar saques mensais iguais nos próximos 2 anos?

Solução:

Do enunciado temos:

Tempo: 20 anos = 240 meses

Taxa de juros: 0,006 a.m.

$VP = R\$240.000,00$

Utilizando a fórmula $R = VP \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ temos:

$$R = 240.000 \cdot \frac{0,005 \cdot (1+0,005)^{240}}{(1+0,005)^{240} - 1}$$
$$R = 240.000 \cdot \frac{0,005 \cdot (1,005)^{240}}{(1,005)^{240} - 1}$$
$$R = 240.000 \cdot \frac{0,005 \cdot 3,3102}{3,3102 - 1}$$
$$R = 240.000 \cdot \frac{0,016551}{2,3102}$$
$$R = 240.000 \cdot 0,0071643148$$

$$\therefore R = 1.719,43$$

Se compararmos com o objetivo do Problema 01, que era receber R$ 1.000,00 por mês, temos agora um aumento significativo de R$ 719,43 por mês. Isso mostra que os juros compostos não só facilitaram arrecadar o montante desejado com mais facilidade, mas além disso, permitem um recebimento de pouco mais de 1,7 vezes o valor desejado.

3.3 ANÁLISE SIMULTÂNEA DO VALOR FUTURO E VALOR PRESENTE

Nessa seção, vamos voltar à ideia de que o valor acumulado durante o período de acumulação deve ser igual ao valor usufruído no futuro para que, com isso, seja possível criar uma relação entre o valor presente e o valor futuro.

$$(valor\ acumulado) = (valor\ usufruído\ no\ futuro)$$

Considerando n_p como o número de pagamentos, n_u como o número de recebimentos a serem usufruídos e i como a taxa de juros, o termo "período" denota a totalidade do processo de acumulação e aproveitamento de capital. Se VF é calculado na data do último pagamento n_p, que coincide com a data em que é calculado VP, podemos igualar as funções $VP = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$ com $VF = P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$.

$$P \cdot \left(\frac{(1+i)^{n_p} - 1}{i}\right) = R \cdot \frac{(1+i)^{n_u} - 1}{i \cdot (1+i)^{n_u}}$$

Isolando *P*,

$$P = R \cdot \frac{(1+i)^{n_u} - 1}{i \cdot (1+i)^{n_u}} \cdot \frac{i}{(1+i)^{n_p} - 1}$$

$$\therefore P = R \cdot \frac{(1+i)^{n_u} - 1}{(1+i)^{n_u} \cdot (1+i)^{n_p} - 1}$$

Também é possível obter *R* em função de *P*.

$$R = P \cdot \frac{(1+i)^{n_u} \cdot (1+i)^{n_p} - 1}{(1+i)^{n_u} - 1}$$

3.3.1 Problema 05: Qual é o valor mensal que uma pessoa deve economizar na poupança, dos 35 até os 65 anos de idade, considerando uma taxa de rendimento de 0,5% a.m., para que isso garanta uma renda mensal de R$ 1.000,00 durante um período de 20 anos, com o valor acumulado continuando a ser investido na mesma modalidade?

Solução:

Do enunciado temos:

n_p = 30 anos = 360 meses.

n_u = 20 anos = 240 meses

$i = 0,005\ a.m.$

$R = R\$1.000,00$

Usando a fórmula $P = R \cdot \dfrac{(1+i)^{n_u} - 1}{(1+i)^{n_u} \cdot (1+i)^{n_p} - 1}$

$$P = 1000 \cdot \frac{(1+0,005)^{240} - 1}{(1+0,005)^{240} \cdot (1+0,005)^{360} - 1}$$
$$P = 1000 \cdot \frac{(1,005)^{240} - 1}{(1,005)^{240} \cdot (1,005)^{360} - 1}$$
$$P = 1000 \cdot \frac{3,3102 - 1}{3,3102 \cdot 6,0226 - 1}$$
$$P = 1000 \cdot \frac{2,3102}{19,9360 - 1}$$
$$P = 1000 \cdot \frac{2,3102}{18,9360}$$
$$P = 1000 \cdot 0,1220$$

$$\therefore P \cong 122,00$$

Ao se concluir essa relação simultânea entre VF e VP conseguimos analisar as vantagens de se planejar um modelo financeiro para aposentadoria usufruindo dos juros compostos para acumular o capital e usufruir do montante obtido de maneira inteligente.

Certamente, o modelo que foi analisado até agora oferece uma visão clara do potencial de acumulação de capital ao longo do tempo. A poupança, apesar de baixo rendimento conta ainda com liquidez diária, e isenção do Imposto de Renda. No entanto, não se pode esquecer que a poupança também tem riscos.

Um fato histórico no Brasil com relação a poupança aconteceu em 1990.

> “No dia 16 de março de 1990, milhões de brasileiros ficaram estarrecidos com o que assistiam ao vivo pela TV. Era o dia seguinte à posse do presidente Fernando Collor, e sua equipe econômica, capitaneada pela ministra da Economia, Zélia Cardoso de Mello, anunciava medidas econômicas de grande impacto. E dentro do pacote de 21 medidas provisórias e dezenas de portarias estava o inédito confisco de contas bancárias e poupança de todos os brasileiros por 18 meses.”

[Congresso Nacional, 2006]

Em 2012 também aconteceu uma grande mudança na poupança.

> “A Câmara dos Deputados aprovou nesta quarta-feira (4) a medida provisória que modifica as regras de rendimento da poupança. A MP 567/2012, em vigor desde 4 de maio, segue agora para análise do Senado. A medida estabelece que, quando a taxa básica de juros chegar a 8,5% ou abaixo disso, o rendimento da caderneta passará a render 70% da Selic, que é fixada a cada 45 dias pelo Comitê de Política Monetária do BC, mais a variação da Taxa Referencial (TR).”
>
> [GLOBO, 2012]

Como pode-se observar a poupança no Brasil tem um risco muito grande pois está vinculada de forma direta à legislação, à troca de governos e isso também a torna mais arriscada se pensarmos em prazos longos, como por exemplo, 30 anos.

Além disso, a pessoa que faz esse planejamento tem que entender que essa obrigação, quando não cumprida em algum mês ou período, não atingirá o montante necessário. É necessário o pagamento regular.

Além disso surgem questões pertinentes: e se não estivermos presentes para desfrutar do fruto de nossos investimentos devido a fatores imprevistos? Será que podemos incorporar uma avaliação de probabilidade nesse cenário, a fim de aprimorar o planejamento da nossa futura aposentadoria?

No próximo capítulo, vamos explorar precisamente esse ponto, buscando compreender como podemos integrar uma análise de riscos ao nosso planejamento financeiro, levando em conta fatores como expectativa de vida, probabilidade de morte e o auxílio de instituições financeiras especializadas em organizar aposentadorias complementares. Essas empresas fazem uso de uma área do conhecimento chamada de Atuária.

4. CENÁRIO 3 - MATEMÁTICA ATUARIAL

Segundo AZEVEDO (2005), o objetivo da matemática atuarial é calcular valores dos prêmios, séries de pagamentos, prazos, levando em conta o risco de cada aplicação, baseando-se em dados estatísticos.

A prática atuarial investiga setores da sociedade contemporânea que abrangem diversos tipos de riscos, como os de natureza financeira, biométrica, acidentes, entre outros eventos imprevisíveis. Diversos setores da economia utilizam esses estudos, incluindo o setor de saúde, por meio de planos de saúde privados; os seguros de propriedades, que englobam seguros não relacionados à vida, como os de incêndio, automóveis, industriais, entre outros; e o setor previdenciário, que inclui planos de aposentadoria, pecúlio e pensões.

Este estudo tem como objetivo analisar da aplicação da matemática atuarial direcionada aos planos de previdência, sendo apenas uma das atividades ligadas à profissão do atuário.

A matemática atuarial pode ser simplificadamente compreendida como uma combinação da matemática financeira com fatores demográficos relativos a qualquer grupo de indivíduos em consideração. De fato, ao lidar com cálculos financeiros de períodos prolongados, é fundamental considerar não apenas as taxas de juros, mas também a probabilidade de que os participantes do grupo estejam vivos daqui a 12, 25 ou 34 anos. Isso pode ser justificado da seguinte maneira: imagine que uma pessoa lhe pede emprestado uma “alta quantia” e promete pagar o empréstimo em 25 anos, em uma única parcela, com juros e ajuste monetário. Se essa pessoa tem 20 anos, exceto pelo risco de inadimplência, é altamente provável que ela atinja os 45 anos e cumpra o acordo. No entanto, se ela tiver 75 anos, suas chances de recuperar o dinheiro diminuiriam drasticamente. Nesse exemplo, a idade adiciona um risco extra ao credor.

Da mesma forma, podemos considerar um cenário oposto. Se você é o devedor e deve pagar uma quantia mensal por 25 anos a duas pessoas, uma com 20 anos e outra com 75 anos, é natural que a pessoa mais jovem tenha mais chances de receber todos os pagamentos. No entanto, não tem-se uma certeza, pois há uma probabilidade maior de o evento morte ocorrer em uma pessoa mais velha.

Esse é o cerne do estudo do atuário: os custos previdenciários levam em consideração as probabilidades de sobrevivência dos participantes de um determinado plano de previdência. Em resumo, um atuário calcula os custos de um plano de previdência, ou seja, quanto deve ser pago durante o período de atividade para garantir renda suficiente durante o período de inatividade (aposentadoria).

A seguir, serão introduzidos alguns princípios essenciais relacionados à Atuária a fim de facilitar a compreensão do tema.

4.1 ESPERANÇA MATEMÁTICA

A Esperança Matemática, também conhecida como valor esperado, é um conceito fundamental na teoria das probabilidades e estatística. Representa o valor médio esperado de uma variável aleatória ponderado pelas probabilidades de ocorrência de cada valor possível. Em termos mais simples, é a média ponderada de todos os possíveis resultados, onde cada resultado é multiplicado pela probabilidade de sua ocorrência e, em seguida, somado.

$$E = Q \cdot p \cdot v^n$$

Onde:

E: esperança matemática (valor que se espera receber);

Q: ganho possível;

p : probabilidade de que ocorra o ganho total Q;

v^n : fator de descapitalização ou fator de valor presente, onde $v = \frac{1}{1+i}$, em que *i* é a taxa de capitalização do dinheiro no tempo e *n* é a quantidade de vezes que o valor é capitalizado.

O exemplo a seguir é apresentado por Azevedo (2005) página 101:

"Uma rifa, que levará quatro meses para o seu sorteio, apresenta como prêmio um automóvel no valor de R$ 60.000,00. Sabendo-se que o total de bilhetes é 15.000, qual o valor pelo qual deverá ser vendida cada cartela, se a taxa de juros é de 1% ao mês?"

E = ?

Q = R$ 60.000

$p = \dfrac{1}{15.000}$

$v^n : \left(\dfrac{1}{1+0,01}\right)^4$

$$E = 60.000 \cdot \frac{1}{15.000} \cdot \left(\frac{1}{1+0,01}\right)^4$$

$$E \cong 3,84$$

A cartela de rifa deverá ser comercializada a R$ 3,84, levando-se em conta a valorização do dinheiro durante os 4 meses até o sorteio, e a probabilidade para que certa cartela seja a contemplada.

Além do Valor Esperado, outra teoria que fundamenta a Atuária é a lei dos grandes números.

4.2 LEI DOS GRANDES NÚMEROS

A Lei dos Grandes Números, também conhecida como Teorema da Estabilidade dos Resultados Médios, é um princípio fundamental da teoria das probabilidades e da estatística, que afirma que, à medida que o número de experimentos ou amostras aumenta, a média dos resultados desses experimentos ou amostras tende a se aproximar do valor esperado ou médio teórico. Quem publicou um trabalho de referência sobre isso foi Jacob Bernoulli, matemático suíço do século XVII. Essa lei é crucial para entender o comportamento de médias e probabilidades em eventos aleatórios. baseia-se no fato de que, estatisticamente, quanto maior o grupo, maior a probabilidade de que uma média referente a este grupo mantenha-se constante.

A matemática atuarial é baseada nessa lei, o que significa dizer que os custos projetados para um plano previdenciário tendem a refletir mais precisamente a realidade quanto maior for o número de participantes do plano em questão.

A probabilidade de um determinado evento ocorrer é dada pela relação entre o número de casos possíveis de sucesso e o número de eventos possíveis.

$$p = \frac{s}{n}$$

Temos então que o número provável de sucessos é:

$$s = n \cdot p$$

A dispersão (*desvio padrão*) em relação ao número provável de sucessos é calculada por:

$$\sigma = \pm\sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Onde q é o complementar de p.

Desvio relativo: $\sigma_r = \dfrac{\sigma}{n}$

limite inferior e limite superior:

$$L_s = p + \sigma_r$$
$$L_i = p - \sigma_r$$

4.2.1 Exemplo: Se um dado honesto é arremessado 12 vezes, qual é o número esperado de resultados para a face 3? Analise a situação calculando o desvio padrão, desvio relativo e os limites inferior e superior desse evento.

Solução:

$$p = \frac{1}{6} \Rightarrow q = \frac{5}{6}$$

O número provável de sucessos (face 3) em 12 arremessos de um dado é:

$$s = 12 \cdot \frac{1}{6}$$
$$\therefore s = 2$$

Portanto, jogando um dado 12 vezes, teoricamente deve-se obter a face 3 voltada para cima em 2 arremessos.

A dispersão em relação ao número de sucessos no caso de 12 arremessos:

$$\sigma = \pm\sqrt{n \cdot p \cdot q}$$
$$\sigma = \pm\sqrt{12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}$$
$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$
$$\therefore \sigma = \pm 1,291$$

o desvio relativo: $\sigma_r = \dfrac{\sigma}{n}$

$$\sigma_r = \pm\frac{1,291}{12}$$
$$\sigma_r = \pm 0,108$$

Os limites inferior e superior são:

$$L_s = p + \sigma_r \Rightarrow L_s = \frac{1}{6} + 0,108 \Rightarrow L_s \cong 0,274$$

$$L_i = p - \sigma_r \Rightarrow L_i = \frac{1}{6} - 0,108 \Rightarrow L_i \cong 0,059$$

Nesse último exemplo, exibimos os cálculos que permitem analisar estatisticamente o lançamento de um dado honesto para obter a face 3 em 12 lançamentos. Representando graficamente (Figura 2).

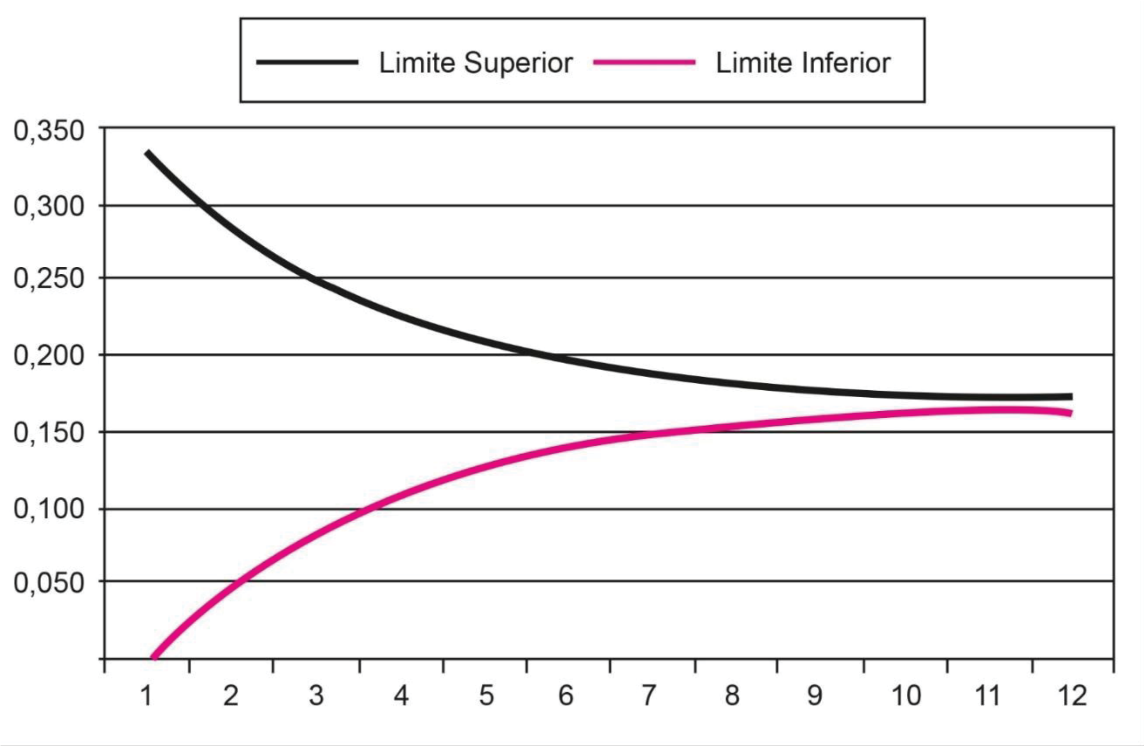

Figura 2: ilustração tendência de resultados, lei dos grandes números. (Autor)

É possível então calcular esse mesmo comportamento para uma quantidade maior de lançamentos e observar que realmente a tendência se aproxima de $\frac{1}{6} = 0{,}1666...$ (Tabela 1).

n	$\sigma = \pm\sqrt{n \cdot p \cdot q}$	$\sigma_r = \frac{\sigma}{n}$	$L_s = p + \sigma_r$	$L_i = p - \sigma_r$
5	0,833	0,167	0,333	0,000
10	1,179	0,118	0,285	0,049
20	1,667	0,083	0,250	0,083
40	2,357	0,059	0,226	0,108
80	3,333	0,042	0,208	0,125
160	4,714	0,029	0,196	0,137
320	6,667	0,021	0,188	0,146
640	9,428	0,015	0,181	0,152
1.280	13,333	0,010	0,177	0,156
2.560	18,856	0,007	0,174	0,159
5.120	26,667	0,005	0,172	0,161
10,240	37,712	0,004	0,170	0,163

Tabela 1: aumento de lançamentos, se aproxima o valor teórico. (Autor)

4.3 TÁBUAS DE VIDA

É uma tabela, formada por dados estatísticos, quantificando um grupo específico de pessoas desde o nascimento até a extinção do último indivíduo. Definindo como "x" a idade de um grupo de pessoas e "l_x" o número de pessoas vivas com idade x.

Idade do grupo	Nº de pessoas vivas do grupo com idade "x"
x	lx
0	10.104.755
1	10.063.932
2	10.048.031
3	10.039.118
4	10.031.940
5	10.025.650
.	.
.	.
107	54
108	16
109	4

Tábua de Mortalidade AT-49

As tábuas de vida, também conhecidas como tábuas de mortalidade ou de sobrevivência, são a base do cálculo atuarial para o planejamento previdenciário, seguros de vida e até de saúde.

> (...) são instrumentos estatísticos destinados a medir as probabilidades de vida e de morte das pessoas, cada idade. Para cada idade ou grupo de idade, nestes casos são apresentadas as quantidades de falecimentos, a taxa de mortalidade específica, a probabilidade de falecimentos, a probabilidade de sobrevivência e a esperança de vida.
>
> (CORDEIRO FILHO, 2016)

As tábuas de Vida são a principal ferramenta para atuários no ramo de vida (previdência, saúde), pois a partir dos dados observados, são construídos os cálculos de Expectativa de Vida "e_x", probabilidades de alcançar uma idade específica, probabilidade de falecer antes de uma idade específica, probabilidade de falecer nos próximos *n* anos, entre outras.

As tábuas de mortalidade, também chamadas de tábuas de vida, são instrumentos que permite calcular as probabilidades de vida e morte de uma população em função da sua idade (ORTEGA, 1987). Este instrumento promove a descrição estatística da mortalidade e constitui a base de um modelo de população estacionária, sendo comumente utilizado para demógrafos, atuários e outros investigadores em uma grande variedade de problemas e questões relacionadas a durabilidade da vida humana.

Normalmente, é apresentada em forma de tabela, na qual se registra, a cada ano, partindo-se de um grupo inicial de pessoas com mesma idade, o número daquelas que vão atingindo as diferentes idades, até a extinção total do grupo inicial observado. Para que a tábua apresente dados confiáveis, os indivíduos observados devem conviver em um mesmo espaço geográfico e possuir as mesmas condições de vida, durante a sua elaboração. Essas condições devem ser consideradas pois não faz sentido comparar probabilidades de sobrevivência entre indivíduos que não apresentam as mesmas condições de sobrevivência.

Ressalta-se ainda a importância de a tábua ser estacionária, ou seja, não se registram nascimentos nem outras formas de entrada de novos indivíduos. Assim, são registrados apenas os óbitos de indivíduos pertencentes ao grupo inicial. Este grupo inicial reflete um contingente de indivíduos, todos os nascidos vivos, dentro de um mesmo espaço geográfico, num mesmo intervalo de tempo, fechado a migrações, que tem a sua trajetória de vida analisada por intermédio de indicadores demográficos, até que o mais longevo venha a falecer (CAPELO, 1986).

A primeira tábua de mortalidade construída sobre princípios realmente científicos foi elaborada pelo astrônomo Edmund Halley em 1693, e analisava dados sobre óbitos e nascimentos da cidade de Breslaw, na Polônia. Entretanto, somente no ano de 1815, Milne conseguiu elaborar uma tábua de mortalidade por meio de técnicas estatísticas e demográficas muito similares às atuais, tomando-se em conta a informação populacional exposta ao risco de morte observados na cidade inglesa de Carlisle (ORTEGA, 1987). A referida tábua registrou uma esperança de vida ao nascer de 38,7 anos para os sexos combinados. Desde então muitas tábuas foram publicadas em todo o mundo.

Normalmente, a elaboração dessas tabelas é baseada nas informações coletadas por seguradoras e, às vezes, por levantamentos demográficos, resultando na existência de várias tabelas em uso atualmente. Cada uma delas possui uma designação específica, como CSO-1958, AT-1983, AT-2000 e BR-EMS. Ao optar pela tabela a ser utilizada, é recomendável selecionar aquela que seja derivada de dados de uma população com características semelhantes àquelas para as quais será aplicada.

Nesse trabalho irá ser usada a tábua AT-2000 com juros de 6% a.a. (ANEXO - CAPÍTULO 7), pois ela é amplamente usada pelo mercado de seguros no Brasil.

Uma tabela de mortalidade comumente apresenta as seguintes colunas:

x: idades específicas para as quais as taxas de mortalidade são fornecidas;

l_x: número de pessoas vivas no início de uma idade específica (do inglês: *live*);

d_x: número de mortes ocorridas durante o período com idade *x*. (do inglês: *death*);

p_x: probabilidade de sobreviver à idade *x;*

q_x: probabilidade de morte para uma idade específica *x*;

e_x: expectativa de vida com a idade *x*;

Algumas relações são imediatas, por exemplo, o número de sobreviventes é decrescente.

$$l_0 > l_1 > l_2 > \ldots > l_{x-2} > l_{x-1} > l_x > l_{x+1} > \ldots > l_\omega$$

q_x é calculado por:

$$q_x = \frac{\text{Quantidade de pessoas falecidas com idade x}}{\text{Total de pessoas com a idade x}} \text{, ou seja, } \boxed{q_x = \frac{d_x}{l_x}}.$$

p_x é calculado por:

$$p_x = \frac{\text{Quantidade de pessoas vivas até a idade x}}{\text{Total de pessoas com a idade x}} \text{, ou seja, } \boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}}.$$

Pode-se provar rapidamente que $p_x + q_x = 1$.

Basta observar que:

$$l_{x+1} + d_x = l_x$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por l_x:

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x}{l_x}$$

$$\therefore \; p_x + q_x = 1$$

4.3.1 PROBABILIDADES DE VIDA E MORTE

Apresentaremos algumas probabilidades notáveis para os cálculos atuarias. Faremos isso através de perguntas específicas.

Se uma pessoa tem a idade de *x* anos no momento, qual é a probabilidade de ela sobreviver por mais *n* anos?

Ao considerar uma pessoa que atualmente tem x anos e deseja sobreviver por mais n anos, ela terá que sobreviver das idades x até $x+1$, depois de $x+1$ até $x+2$, e assim por diante, até atingir a idade $x+n$ anos.

Para facilitar a escrita, usaremos as notações:

s_x: sobreviver até x anos.

s_{x+1}: sobreviver até $x+1$ anos.

$\vdots$

s_{x+n-1}: sobreviver até $x+n-1$

A probabilidade é dada por:

$$P[\text{sobreviver } x+n \text{ anos}] = P\left[(s_x)\cap(s_{x+1})\cap\ldots\cap(\mathrm{s}_{x+n-1})\right]$$

Como os eventos são independentes, multiplicam-se as probabilidades individuais e representa-se esse resultado pelo símbolo ${}_n p_x$, ou seja:

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}$$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}$$

$$\therefore \boxed{{}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$$

4.3.2 Problema 06 – Qual a probabilidade de uma pessoa de 35 anos sobreviver até os 65 anos?

Precisamos calcular ${}_{30}p_{35}$, ou seja:

$${}_{30}p_{35} = \frac{l_{35+30}}{l_{35}}$$

$${}_{30}p_{35} = \frac{l_{65}}{l_{35}}$$

Buscando os valores de l_{35} e l_{65} na tábua AT-2000. (Tabela 3)

idade (x)	q_x	l_x
34	0,000791	97.966,54
35	0,000792	97.889,05
36	0,000794	97.811,52

idade (x)	q_x	l_x
64	0,009968	88.104,45
65	0,010993	87.226,23
66	0,012188	86.267,35

Tabela 3: Extratos de valores tábua AT-2000.

Tem-se:

$${}_{30}p_{35} = \frac{87226,23}{97889,05}$$

$$\therefore {}_{30}p_{35} \cong 0,8911$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa de 35 anos sobreviver até os 65 anos é de 89,11%.

Se uma pessoa tem a idade de *x* anos no momento, qual é a probabilidade de ela falecer nos próximos *n* anos?

Ao considerar uma pessoa que atualmente tem x anos e possa falecer nos próximos *n* anos, ela poderá falecer com idade x ou com idade $x+1$, ou com idade $x+2$, ou com idade $x+3$, e assim por diante, até atingir a idade $x+n-1$. A probabilidade é dada por:

$$P[\text{falecer até } x+n \text{ anos}] = P[(\text{falecer com } x) \cup (\text{falecer com } x+1) \cup ... \cup (\text{falecer com } x+n-1)]$$

Como os eventos são mutuamente exclusivos, soma-se as probabilidades individuais e representa-se esse resultado pelo símbolo ${}_{/n}q_x$, ou seja:

$${}_{/n}q_x = \frac{d_x}{l_x} + \frac{d_{x+1}}{l_x} + \frac{d_{x+2}}{l_x} + \frac{d_{x+3}}{l_x} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

$${}_{/n}q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} + \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_x} + \ldots + \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_{/n}q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_{/n}q_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$\therefore \boxed{{}_{/n}q_x = 1 - {}_n p_x}$$

Tal resultado já era esperado, visto que ${}_{/n}q_x$ e ${}_n p_x$ são complementares.

4.3.3 Problema 07 – Qual a probabilidade de uma pessoa de 35 anos morrer nos próximos 30 anos?

Temos do Problema 06 que ${}_{30}p_{35} \cong 0,8911$, logo

$${}_{/30}q_{35} = 1 - {}_{30}p_{35}$$
$${}_{/30}q_{35} = 1 - 0,8911$$
$${}_{/30}q_{35} = 0,1089$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa com 35 anos falecer até os 65 anos é de 10,89%.

Se uma pessoa tem a idade de *x* anos no momento, qual é a probabilidade de ela sobreviver nos próximos n anos, atingindo a idade *x+n*, mas falecendo de falecendo entre as idades *x+n* e *x+n+k*?

Tal probabilidade pode ser olhada como:

$$P\left[(\text{sobreviver até } x+n)\cap(\text{faceler até } x+n+k)\right]=P\left(\text{sobreviver até } x+n\right)\cdot P\left(\text{faceler até } x+n+k\right)$$

Observamos que o produto das probabilidades acontece porque os eventos são independentes. Representando esse resultado por ${}_{n/k}q_x$, temos:

$${}_{n/k}q_x = {}_{n}p_x \cdot {}_{/k}q_{x+n}$$

$${}_{n/k}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}\cdot\left(1-{}_{k}p_{x+n}\right)$$

$${}_{n/k}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n}\cdot l_{x+n+k}}{l_x\cdot l_{x+n}}$$

$$\therefore \boxed{{}_{n/k}q_x = \frac{l_{x+n}-l_{x+n+k}}{l_x}}$$

4.3.4 PROBLEMA 08 – Qual a probabilidade de uma pessoa, hoje com 35 anos, morrer a partir dos 65 anos sem completar 75 anos?

Queremos:

$${}_{30/10}q_{35} = \frac{l_{35+30}-l_{35+30+10}}{l_{35}}$$

$${}_{30/10}q_{35} = \frac{l_{65}-l_{75}}{l_{35}}$$

Buscando os valores de l_{35} , l_{65} e l_{75} na tábua AT-2000. (Tabela 4)

idade (x)	q_x	l_x
74	0,028552	74.357,25
75	0,031477	72.234,21
76	0,034686	69.960,49

idade (x)	q_x	l_x
34	0,000791	97.966,54
35	0,000792	97.889,05
36	0,000794	97.811,52

idade (x)	q_x	l_x
64	0,009968	88.104,45
65	0,010993	87.226,23
66	0,012188	86.267,35

Tabela 4: Extratos de valores tábua AT-2000.

$$_{30/10}q_{35} = \frac{87.226,23 - 72.234,21}{97.889,05}$$

$$_{30/10}q_{35} = \frac{14.992,02}{97.889,05}$$

$$_{30/10}q_{35} = 0,1531$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa de 35 anos completar 65, mas falecer antes de completar 75 é de 15,31%.

Nos exemplos anteriores, percebemos a utilidade das tábuas de vida ao realizar cálculos de mortalidade e sobrevivência, e como as referências estatísticas podem ser empregadas para modelar problemas futuros. Além disso, é relevante ressaltar que esses temas podem ser abordados em sala de aula, pois envolvem conceitos fundamentais de probabilidade com dados tabelados.

Porém, para evoluirmos nossas aplicações de probabilidade junto aos cálculos financeiros serão necessárias outras ferramentas, chamadas de Comutações.

4.4 TÁBUAS DE COMUTAÇÕES

Ao tratar efetivamente dos produtos de seguro e da aposentadoria, é necessário considerar o impacto das taxas de juros ao longo do tempo. Desta forma, serão estabelecidas aqui mais quatro relações de grandezas conhecidas como *Comutações*.

As *Comutações Atuárias* são funções específicas que permitem calcular de forma eficiente os valores atuais de séries de pagamentos futuros, considerando fatores como taxas de juros e probabilidades de sobrevivência.

Sejam l_x e d_x as grandezas tiradas da tábua de vida e $v^n = (1+i)^{-1}$ o fator de descapitalização, definimos:

$$D_x = l_x \cdot v^n$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega \Rightarrow N_x = \sum_{i=x}^{\omega} D_i$$

$$C_x = d_x \cdot v^{n+1}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_\omega \Rightarrow M_x = \sum_{i=x}^{\omega} C_i$$

Tem-se que D_x e N_x são relacionadas à sobrevivência enquanto C_x e M_x ao falecimento.

A seguir, apresenta-se a Tabela 5 que resume as variáveis apresentadas até agora, as comutações e siglas mais comuns que são usadas no cálculo atuarial.

Comutações	Definições
x	**Idade**
Lx	Numero de pessoas vivas na idade x (central meio do ano)
lx	**número de pessoas vivas, com idade " x ",** em uma determinada data, de uma
dx	**número de pessoas**, entre aquelas do grupo " Lx ", que **morrem antes de atingirem a idade x+1**
Dx	**Numero de pessoas mortas** entre as idade x e x+1 (a comutação Dx pode ser definida como o valor na idade 0 de uma anuidade unitária paga a todos os vivos em qualquer idade x) Usado para renda
Nx	Definido como a somatória da comutação Dx desde a idade x =w , até a extinção do grupo (a comutação Nx pode ser definidada como somatorio na idade x de uma anuidade unitária paga a **todos os vivos** desde a idade x até a idade x=w) Usado para renda
Px	Probabilidade anual de sobrevivencia
Qx	Probabilidade anual de morte
qx	Probabilidade de uma pessoa falecer antes de atingir a idade x+n
Ex	Expectativa de vida
Tx	anos vividos pelos componentes do grupo " x l " desde a idade "x " até a total extinção do grupo
Cx	comutação Cx , como podemos observar, equivale a comutação Dx , apenas uma é para o caso de mortalidade e a outra é para o caso de sobrevivência (usado para seguro por morte)
Mx	comutação Mx , como podemos observar, equivale a comutação Nx , apenas uma é para o caso de mortalidade e a outra é para o caso de sobrevivência (usado para seguro por morte)
PPU	Prêmio Puro Único
PPA	Premio Puro Anual
VABF	Valor atual do Benefício Futuro

Tabela 5: Siglas atuariais e respectivos significados.

4.5 CÁLCULO ATUARIAL

O valor a ser pago pelo segurado (chamado pelas seguradoras de Prêmio), representado pelo símbolo ${}_nE_x$ é calculado considerando que o seguro não pode gerar lucro nem prejuízo[4]. O valor deve ser suficiente para que a seguradora consiga cumprir sua obrigação futura de indenizá-lo com o capital segurado, caso ele atinja a idade contratada. Dessa forma, o valor de ${}_nE_x$ é determinado multiplicando o capital segurado (*CS*) descontado por *n* anos a uma determinada taxa de juros, trazendo-o para a data em que o seguro está sendo contratado, e o segurado tem x anos. Esse resultado é então multiplicado pela probabilidade de alguém com a idade x anos chegar vivo até a idade *x* + *n* anos. Simplificando:

${}_nE_x$: Valor pago à Seguradora pelo segurado com a idade atual x.

RM : Reserva Matemática

i : taxa de juros

${}_np_x$: Probabilidade de alguém com idade x sobreviver até a idade x+n.

$${}_nE_x = RM \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot {}_np_x$$

Se observarmos com atenção a expressão acima, temos a *Esperança Matemática* ou *Valor Esperado* (Capítulo 4.1) sendo aplicado ao modelo financeiro de aposentadoria.

> Matematicamente, como princípio ou tese, deve existir o conceito de que não se deseja lucro, ou seja, as obrigações futuras dos segurados deverão ser iguais às obrigações futuras da seguradora, pois o princípio básico – no caso do seguro – e cobrir

[4] **Princípio da Mutualidade** estabelece que as seguradoras de vida devem operar de maneira a beneficiar todos os segurados, evitando lucros excessivos e garantindo que os recursos sejam utilizados para cobrir os riscos e pagar os benefícios aos segurados. A ideia é que os segurados compartilhem os riscos e os benefícios de forma justa e equitativa.

perdas e não lucrar com sinistros. Da mesma forma, se raciocinarmos financeiramente utilizando os conhecimentos da matemática financeira, o “valor atual” ou “valor presente” das obrigações dos segurados deverão ser iguais ao valor atual, ou valor presente das obrigações da entidade”.

(CORDEIRO FILHO, 2014).

Lembrando que $v^n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$ e que ${}_n p_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_n}$. Tem-se uma maneira diferente de observar a expressão ${}_n E_x = RM \cdot \dfrac{1}{(1+i)^n} \cdot {}_n p_x$:

$$
{}_n E_x = RM \cdot v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}
$$

$$
\underbrace{{}_n E_x \cdot l_x}_{\text{Receita}} = \underbrace{RM \cdot v^n \cdot l_{x+n}}_{\text{Despesas}}
$$

A equação acima comprova o equilíbrio financeiro, pois o valor que a seguradora recebe no momento da contratação (prêmio) é igual ao valor das futuras despesas que ela terá com o pagamento das indenizações. Esse equilíbrio só é possível graças à Lei dos Grandes Números de Bernoulli.

As seguradoras, quando realizam um contrato com um cliente, não consideram como será a passagem dos n anos para apenas um cliente, mas para um conjunto grande de clientes com aquela idade e com contratos semelhantes. Ao fazer isso, aumentar o conjunto de clientes, elas estão aumentando a probabilidade de obter resultados mais próximos daqueles que estão previstos nas tábuas de vida.

4.6 CÁLCULO DO PRÊMIO

Chama-se de prêmio o valor correspondente a cada um dos aportes destinados ao custeio da cobertura contratada. É a soma em dinheiro, paga pelo segurado para a seguradora, para que esta assuma a responsabilidade por um determinado risco.

(AZEVEDO 2005)

Lembrando da equação do equilíbrio financeiro:

$$ {}_{n}E_x \cdot l_x = RM \cdot v^n \cdot l_{x+n} $$

Multiplicando-se ambos os lados da igualdade por v^x:

$$ {}_{n}E_x \cdot l_x \cdot v^x = RM \cdot l_{x+n} \cdot v^n \cdot v^x $$

A Comutação $D_x = l_x \cdot v^x$, logo:

$$ {}_{n}E_x \cdot D_x = RM \cdot D_{x+n} $$

$$ \boxed{{}_{n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot RM} $$

4.6.1 PROBLEMA 09 – Suponha um indivíduo, hoje com 35 anos, faça um contrato com uma instituição financeira para receber uma Reserva Matemática de R$ 240.000,00 quando completar 65 anos. Qual o valor da contribuição único a ser pago à instituição financeira? Utilize a tábua AT-2000 com juros de 6%.

Solução:

$$ {}_{30}E_{35} = \frac{D_{35+30}}{D_{35}} \cdot 240.000 $$

$$ {}_{30}E_{35} = \frac{D_{65}}{D_{35}} \cdot 240.000 $$

Buscando os valores de D_{65} e D_{35} na tábua AT-2000. (Tabela 5)

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x
64	0,009968	88.104,45	878,23	87.665,34	0,990032	19,85	2.115,55
65	0,010993	87.226,23	958,88	86.746,79	0,989007	19,05	1.975,90
66	0,012188	86.267,35	1.051,43	85.741,64	0,987812	18,26	1.843,57

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x
34	0,000791	97.966,54	77,49	97.927,79	0,999209	46,87	13.510,72
35	0,000792	97.889,05	77,53	97.850,28	0,999208	45,91	12.735,88
36	0,000794	97.811,52	77,66	97.772,69	0,999206	44,94	12.005,46

Tabela 5: Extratos de valores tábua AT-2000.

$$ {}_{30}E_{35} = \frac{1.975,90}{12.735,88} \cdot 240.000 $$

$$ {}_{30}E_{35} = 0,155144 \cdot 240.000 $$

$$ \therefore \; {}_{30}E_{35} = 37.234,56 $$

Portanto, seria necessário acumular uma reserva matemática de R$37.234,56 para que daqui 30 anos o indivíduo, se sobreviver, receba R$ 240.000,00.

4.7 CÁLCULO DE RENDAS

A renda atuarial é um pagamento periódico, como uma pensão ou benefício. Ela pode ser vitalícia (paga até o fim da vida) ou temporária (por um período específico). É necessário explicar que o mercado trabalha com dois tipos de renda, a antecipada e a postecipada. Nesse trabalho, optou-se em sempre trabalhar com o pagamento dessa renda na forma postecipada, pois é ela faz mais sentido comparada com os outros métodos estudados no início do trabalho, além de ser mais comum no mercado securitário.

A renda postecipada é uma modalidade em que o valor inicial é conhecido antecipadamente, mas os pagamentos efetivos só ocorrem após um intervalo de tempo determinado.

4.7.1 RENDA IMEDIATA POSTECIPADA VITALÍCIA

Para compararmos afetivamente os resultados dos problemas propostos, será necessário definir tanto uma série de pagamentos para acumulação do Prêmio quanto uma série de pagamentos para recebimento do Capital Segurado. A partir de agora faremos tais análises começando pelo recebimento de renda Postecipada anual.

Define-se a_x o valor da renda única a ser pago.

Neste caso específico, o segurado, então com idade *x*, efetua o pagamento da renda a_x e apenas ao término do primeiro ano recebe da seguradora a primeira renda *R*.

Começando do fato de que:

Receitas = Despesas

Receita: $l_x \cdot a_x$

Despesa: $l_{x+1} \cdot v \cdot R + l_{x+2} \cdot v^2 \cdot R + l_{x+3} \cdot v^3 \cdot R + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega - x} \cdot R$

$$l_x \cdot a_x = l_{x+1} \cdot v \cdot R + l_{x+2} \cdot v^2 \cdot R + l_{x+3} \cdot v^3 \cdot R + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega - x} \cdot R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x:

$$v^x \cdot l_x \cdot a_x = l_{x+1} \cdot v \cdot v^x \cdot R + l_{x+2} \cdot v^2 \cdot v^x \cdot R + l_{x+3} \cdot v^3 \cdot v^x \cdot R + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega - x} \cdot v^x \cdot R$$

$$v^x \cdot l_x \cdot a_x = l_{x+1} \cdot v^{x+1} \cdot R + l_{x+2} \cdot v^{x+2} \cdot R + l_{x+3} \cdot v^{x+3} \cdot R + \ldots + l_\omega \cdot v^\omega \cdot R$$

$$D_x \cdot a_x = D_{x+1} \cdot R + D_{x+2} \cdot R + D_{x+3} \cdot R + \ldots + D_\omega \cdot R$$

$$D_x \cdot a_x = \left(D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_\omega\right) \cdot R$$

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \cdot R}$$

4.7.2 PROBLEMA 10 - Um indivíduo, atualmente com 35 anos de idade, decide adquirir um seguro de vida com cobertura por sobrevivência, de modo a receber R$ 12.000,00 da seguradora no final de cada ano, durante toda a vigência do contrato. Qual seria o valor do prêmio único que esse indivíduo deveria pagar à seguradora hoje? Considere que a taxa de juros da operação com a seguradora é de 6% ao ano.

Queremos:

$$a_{35} = \frac{N_{36}}{D_{35}} \cdot 12.000$$

Buscando os valores $D_{35} = 12.735,88$ e $N_{36} = 191.917,63$ na tábua de comutação AT-2000. (Tabela 6)

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x
34	0,000791	97.966,54	77,49	97.927,79	0,999209	46,87	13.510,72
35	0,000792	97.889,05	77,53	97.850,28	0,999208	45,91	12.735,88
36	0,000794	97.811,52	77,66	97.772,69	0,999206	44,94	12.005,46

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x
35	0,000792	97.889,05	77,53	97.850,28	0,999208	45,91	12.735,88	4.542.674,78	204.653,51
36	0,000794	97.811,52	77,66	97.772,69	0,999206	44,94	12.005,46	4.444.824,49	191.917,63
37	0,000823	97.733,86	80,43	97.693,64	0,999177	43,98	11.316,91	4.347.051,81	179.912,17

Tabela 6: Extratos de valores tábua AT-2000.

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \cdot 12.000$$

$$a_{35} = \frac{191.917,63}{12.735,88} \cdot 12.000$$

$$a_{35} = 15,06905 \cdot 12.000$$

$$a_{35} = 180.828,6$$

Portanto, uma pessoa com 35 anos deve aportar à seguradora o valor de R$ 180.828,60 para que após um ano ela receba, ao final de cada ano subsequente na sua vida um valor de R$ 12.000,00.

Este problema ajuda a compreender o cálculo do a_x, mas não é relevante para nosso critério de comparação. Isso ocorre porque requer um aporte inicial muito elevado e assume que o benefício será pago até o fim da vida do indivíduo (vitalício).

Posteriormente, serão apresentadas outras ferramentas para analisar a renda temporária.

4.7.3 RENDA DIFERIDA POSTECIPADA TEMPORÁRIA

Define-se ${}_{m/n}a_x$ o valor do prêmio único a ser pago, onde *n* representa o número de anos durante os quais o segurado irá receber a renda, enquanto *m* é o número de anos que ele opta por esperar antes de começar a recebê-la.

Como devemos ter:

Receitas = **Despesas**

Receita: $l_x \cdot {}_{m/n}a_x$

Despesa: $l_{m+x+1} \cdot v^{m+1} \cdot R + l_{m+x+2} \cdot v^{m+2} \cdot R + l_{m+x+3} \cdot v^{m+3} \cdot R + \ldots + l_{m+x+n} \cdot v^{m+n} \cdot R$

$$l_x \cdot {}_{m/n}a_x = l_{m+x+1} \cdot v^{m+1} \cdot R + l_{m+x+2} \cdot v^{m+2} \cdot R + l_{m+x+3} \cdot v^{m+3} \cdot R + \ldots + l_{m+x+n} \cdot v^{m+n} \cdot R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x:

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{m/n} a_x = l_{m+x+1} \cdot v^x \cdot v^{m+1} \cdot R + l_{m+x+2} \cdot v^x \cdot v^{m+2} \cdot R + l_{m+x+3} \cdot v^x \cdot v^{m+3} \cdot R + \ldots + l_{m+x+n} \cdot v^x \cdot v^{m+n} \cdot R$$

$$D_x \cdot {}_{m/n} a_x = l_{m+x+1} \cdot v^{m+x+1} \cdot R + l_{m+x+2} \cdot v^{m+x+2} \cdot R + l_{m+x+3} \cdot v^{m+x+3} \cdot R + \ldots + l_{m+x+n} \cdot v^{m+x+n} \cdot R$$

$$D_x \cdot {}_{m/n} a_x = D_{m+x+1} \cdot R + D_{m+x+2} \cdot R + D_{m+x+3} \cdot R + \ldots + D_{m+x+n} \cdot R$$

$$D_x \cdot {}_{m/n} a_x = \left(D_{m+x+1} + D_{m+x+2} + D_{m+x+3} + \ldots + D_{m+x+n}\right) \cdot R$$

$$D_x \cdot {}_{m/n} a_x = \left[N_{m+x+1} - N_{m+x+n+1}\right] \cdot R$$

$$\boxed{{}_{m/n} a_x = \frac{N_{m+x+1} - N_{m+x+n+1}}{D_x} \cdot R}$$

4.7.4 PROBLEMA 11 – Um indivíduo atualmente com 35 anos de idade deseja adquirir um seguro de vida com cobertura por sobrevivência. Ele deseja que daqui a 30 anos (aos 65 anos de idade) que a instituição financeira lhe pague, ao final de cada ano, R$ 12.000,00, por um período de 20 anos. Qual deve ser o valor do prêmio único que esse indivíduo deve pagar à seguradora hoje? Ressalta-se que os juros associados à operação com a seguradora são de 6% ao ano.

Queremos:

$${}_{30/20} a_{35} = \frac{N_{30+35+1} - N_{30+35+20+1}}{D_{35}} \cdot 12.000$$

$${}_{30/20} a_{35} = \frac{N_{66} - N_{86}}{D_{35}} \cdot 12.000$$

Buscando na tábua AT-2000 os valores $D_{35} = 12.735,88$; $N_{66} = 20.430,85$ e $N_{86} = 1.494,2$ (Tabela 7).

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x
34	0,000791	97.966,54	77,49	97.927,79	0,999209	46,87	13.510,72
35	0,000792	97.889,05	77,53	97.850,28	0,999208	45,91	12.735,88
36	0,000794	97.811,52	77,66	97.772,69	0,999206	44,94	12.005,46

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x
65	0,010993	87.226,23	958,88	86.746,79	0,989007	19,05	1.975,90	1.704.893,16	22.406,76
66	0,012188	87.267,35	1.051,43	85.741,64	0,987812	18,26	1.843,57	1.618.146,37	20.430,85
67	0,013572	85.215,92	1.156,55	84.637,65	0,986428	17,48	1.718,02	1.532.404,74	18.587,28

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x
85	0,081326	43.009,79	3.497,81	41.260,88	0,918674	6,69	303,79	309.421,38	1.797,99
86	0,088863	39.511,98	3.511,15	37.756,40	0,911137	6,29	263,28	268.160,49	1.494,20
87	0,096958	36.000,82	3.490,57	34.255,54	0,903042	5,90	226,31	230.404,09	1.230,92

Tabela 7: Extratos de valores tábua AT-2000.

$$_{30/20}a_{35} = \frac{20.430,85 \ -1494,20}{12.735,88} \cdot 12.000$$

$$_{30/20}a_{35} = \frac{18.936,65}{12.735,88} \cdot 12.000$$

$$_{30/20}a_{35} = 1,486874 \cdot 12.000$$

$$_{30/20}a_{35} \cong 17.842,49$$

Portanto, um indivíduo com 35 anos deve pagar R$ 17.842,49 hoje, para que a instituição Financeira lhe pague ao final de cada ano, após os 65 anos de idade, um valor de R$12.000,00.

Até agora vimos que os aportes e os recebimentos são anuais, pois as tábuas de mortalidade são construídas com juros ao ano. No entanto, na prática as seguradoras costumam fazer planos em que os clientes pagam valores mensais para a formação do Capital Segurado. É isso que irá ser discutido na próxima seção.

4.7.5 RENDAS MENSAIS

É mais comum que a maioria das pessoas tenham rendas mensais, portanto as previdências complementares anuais são, no mínimo, estranhas de serem aplicadas na prática. Torna-se necessário um método de relacionar os prêmios envolvidos nas rendas com um valor mensal para as mesmas.

[...] considerando-se a proporcionalidade dos falecimentos para o subperíodo que se deseja e, ainda, que seja utilizada a taxa de juros equivalente ao subperíodo correspondente, calculamos os valores atuais das rendas subanuais com o objetivo de saber o prêmio único puro para as mesmas.

(CORDEIRO FILHO, 2014).

A seguir, as rendas mensais serão deduzidas conforme Azevedo (2014, p. 221), considerando que:

$$_{/1}a_x = a_x - {}_{1/}a_x$$

$$\frac{N_x - N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\frac{D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$1 = a_x - {}_{1/}a_x$$

$$_{1/}a_x = a_x - 1$$

A análise nos leva a pensar que o valor atual de uma renda anual deve ser igual à soma de seus fracionamentos mais algum ajuste, isso devido ao parcelamento de algo que deveria ser pago à vista.

Tem-se que o valor atual de uma renda fracionada postecipada, simbolizado por $a_x^{(m)}$, é deduzido por:

$$m \cdot a_x^{(m)} = a_x + \left(a_x + \frac{1}{m}\right) + \left(a_x + \frac{2}{m}\right) + \ldots + \left(a_x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$\cancel{m} \cdot a_x^{(m)} = \left(a_x + \frac{m-1}{m}\right) \cdot \frac{\cancel{m}}{2}$$

$$\therefore\ a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

4.7.6 PROBLEMA 12 – Suponha um indivíduo com idade de 65 anos que acumulou ao longo da sua vida um capital de R$240.000,00 e decide alocar seus recursos financeiros em um plano de previdência complementar. Qual será sua renda mensal vitalícia postecipada? Considerando uma taxa de juros da operação de 6% ao ano.

Nesse cenário, como a renda desejada é mensal, temos $m = 12$. Então calculando $a_{65}^{(12)}$ temos:

$$a_{65}^{(12)} = a_{65} + \frac{12-1}{2 \cdot 12}$$

$$a_{65}^{(12)} = a_{65} + \frac{11}{24}$$

Lembrando que $a_{65} = \frac{N_{66}}{D_{65}}$

Sendo os recursos do empresário são o prêmio único que será pago para a obtenção de sua renda mensal. Tem-se:

$$240.000 = R \cdot 12 \cdot a_{65}^{(12)}$$

Onde R é a renda mensal que será determinada e, portanto,

$$240.000 = R \cdot 12 \cdot \left(\frac{N_{66}}{D_{65}} + \frac{11}{24} \right)$$

Utilizando a tábua AT-2000 para obter os valores de $N_{66} = 20.430,85$ e $D_{65} = 1.975,90$. (Tabela 8)

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x
65	0,010993	87.226,23	958,88	86.746,79	0,989007	19,05	1.975,90	1.704.893,16	22.406,76
66	0,012188	87.267,35	1.051,43	85.741,64	0,987812	18,26	1.843,57	1.618.146,37	20.430,85
67	0,013572	85.215,92	1.156,55	84.637,65	0,986428	17,48	1.718,02	1.532.404,74	18.587,28

Tabela 8: Extrato de valores tábua AT-2000.

$$240.000 = R \cdot 12 \cdot \left(\frac{20.430,85}{1.975,90} + \frac{11}{24} \right)$$

$$240.000 = R \cdot 12 \cdot (10,80)$$

$$R = \frac{240.000}{129,6}$$

$$R = 1.851,85$$

Portanto, ao se acumular uma Reserva Matemática de R$ 240.000,00, a instituição financeira pagará mensalmente ao segurado o valor de R$1.851,85.

Para completar a comparação dos casos, falta apenas determinar qual o valor que deve ser pago mensalmente podemos supor também qual será o capital assegurado para receber o benefício de R$ 1.000,00 por mês, após a aposentadoria.

4.7.7 Prêmio de Renda Diferida Temporária Postecipada

O termo "Prêmio de Renda Diferida Temporária Postecipada" se refere ao custo pago pelo segurado para adquirir um plano de previdência no qual a renda será paga após um período de espera e será temporária, não vitalícia. Essa modalidade é comum em planos de previdência privada, nos quais o beneficiário recebe pagamentos por um período específico após a aposentadoria ou em outras circunstâncias definidas pelo contrato.

Segundo FERREIRA (1985, p. 253) a expressão que define esse cálculo é dada por:

$$_{k|n}P_x^{(m)} = \frac{_k a_x^{(m)}}{_n a_x} \cdot R$$

Onde:

x : Idade inicial de contribuição

k : anos de contribuição

n : anos de usufruto

m : fração de pagamento anual (meses)

R : Renda fixa postecipada

Para facilitar a explicação dos cálculos usando a tábua de vida temos:

$$_{k|n}P_x^{(m)} = \frac{_k a_x^{(m)}}{_n a_x} \cdot R = \frac{\dfrac{N_{x+k+1} + \left(\dfrac{m-1}{2m}\right) \cdot D_{x+k}}{D_x}}{\dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}} \cdot R = \frac{N_{x+k+1} + \left(\dfrac{m-1}{2m}\right) \cdot D_{x+k}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} \cdot R$$

Pode-se agora resolver o último problema que servirá de comparação para analisar a hipótese inicial do estudo.

4.7.8 PROBLEMA 13 – Um indivíduo atualmente com 35 anos de idade deseja adquirir um plano de aposentadoria complementar. Ele deseja contribuir mensalmente, durante 30 anos para que, ao atingir a idade de 65 anos, receba um benefício de R$1.000 mensais para complementar sua renda, por um período de 20 anos, ou seja, até completar 85 anos de idade. Qual deve ser o valor da prestação mensal paga a Instituição Financeira para satisfazer esse planejamento? Observar que os juros associados à operação com a IF são tabelados em 6% ao ano e a tábua utilizada é a AT-2000.

Solução

x = 35 anos

k = 30 anos

n = 20 anos

m = 12 meses

Substituindo na fórmula

$$_{30|20}P_{35}^{(12)} = \frac{_{30}a_{35}^{(12)}}{_{20}a_{35}} \cdot R = \frac{N_{35+30+1} + \left(\frac{12-1}{2 \cdot 12}\right) \cdot D_{35+30}}{N_{35+1} - N_{35+20+1}} \cdot R$$

$$_{30|20}P_{35}^{(12)} = \frac{N_{66} + \left(\frac{11}{24}\right) \cdot D_{65}}{N_{36} - N_{56}} \cdot R$$

Buscando os valores na Tábua AT-2000. (Tabela 9)

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x
64	0,009968	88.104,45	878,23	87.665,34	0,990032	19,85	2.115,55
65	0,010993	87.226,23	958,88	86.746,79	0,989007	19,05	1.975,90
66	0,012188	86.267,35	1.051,43	85.741,64	0,987812	18,26	1.843,57

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x
65	0,010993	87.226,23	958,88	86.746,79	0,989007	19,05	1.975,90	1.704.893,16	22.406,76
66	0,012188	87.267,35	1.051,43	85.741,64	0,987812	18,26	1.843,57	1.618.146,37	20.430,85
67	0,013572	85.215,92	1.156,55	84.637,65	0,986428	17,48	1.718,02	1.532.404,74	18.587,28

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x
35	0,000792	97.889,05	77,53	97.850,28	0,999208	45,91	12.735,88	4.542.674,78	204.653,51
36	0,000794	97.811,52	77,66	97.772,69	0,999206	44,94	12.005,46	4.444.824,49	191.917,63
37	0,000823	97.733,86	80,43	97.693,64	0,999177	43,98	11.316,91	4.347.051,81	179.912,17

idade (x)	q_x	l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x
55	0,005077	93.731,08	475,87	93.493,14	0,994923	27,38	3.802,43	2.613.247,20	51.352,11
56	0,005465	93.255,21	509,64	93.000,39	0,994535	26,52	3.568,98	2.519.754,06	47.549,68
57	0,005861	92.745,57	543,58	92.473,78	0,994139	25,67	3.348,57	2.426.753,67	43.980,70

Tabela 9: Extratos de valores tábua AT-2000.

$$ {}_{30|20}P_{35}^{(12)} = \frac{20.430,85 + \left(\frac{11}{24}\right) \cdot 1975,90}{191.917,63 - 47549,68} \cdot 1000 $$

$$ {}_{30|20}P_{35}^{(12)} = \frac{21.336,47}{144.367,95} \cdot 1000 $$

$$ {}_{30|20}P_{35}^{(12)} = 0,1477923 \cdot 1000 $$

$$ {}_{30|20}P_{35}^{(12)} \cong 147,79 $$

É importante observar que que as instituições financeiras cobram um valor para administrar e assumir esse risco. Para tornar esse trabalho mais fiel à realidade do mercado, temos que as taxas de carregamento podem variar, chegando até 30%. Portanto, vamos assumir que a taxa praticada será um valor médio de 15%. Logo, multiplica-se o valor encontrado por 1,015.

$$ {}_{30|20}P_{35}^{(12)} \cong 147,79 * 1,015 = 150,00 $$

Portanto, o valor que deve ser pago mensalmente para satisfazer o planejamento é de R$ 150,00.

5 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo se propôs a abordar a questão crucial de como planejar uma aposentadoria complementar considerando o fator risco, com o intuito de demonstrar a viabilidade de incorporar esse elemento nos cálculos desse tipo de planejamento financeiro. Em seguida, uma análise comparativa das estratégias financeiras, abrangendo guardar dinheiro no "colchão", investir na poupança e adotar conceitos atuariais. Será apresentada uma compreensão mais aprofundada dos desafios e oportunidades associados ao processo de planejamento da aposentadoria.

O quadro a seguir busca resumir os três cenários e seus principais resultados. (Tabela 10)

Premissas Comuns	
Idade Atual	35 anos
Período de acumulação	30 anos = 360 meses
Período de usufruto	20 anos = 240 meses
Renda Mensal desejada	R$1.000,00
GUARDAR DINHEIRO NO COLCHÃO	
Prestação	R$666,67
GUARDAR DINHEIRO NA POUPANÇA	
Prestação	R$122,00
MATEMÁTICA ATUÁRIAL (Previdência Privada)	
Prestação	R$150,00

Tabela 10: Comparação de cenários e suas prestações.

No cenário de guardar dinheiro no colchão, tornou-se evidente que essa prática, além de apresentar um alto risco, é também a mais onerosa, uma vez que seu valor mensal de contribuição é mais de 344% superior ao valor obtido atuarialmente. Isso se deve à ausência de qualquer forma de remuneração sobre o valor acumulado, tornando-o, na prática, o modelo menos indicado ou viável para o planejamento da aposentadoria. Até porque em mudanças de moeda e hiperinflação, ter-se-ia perda significativa dos valores reservados.

Ao analisar a opção da poupança, observa-se que, ao contrário de guardar dinheiro no colchão, ela se beneficia dos Juros Compostos, fazendo com que o montante sofra atualizações monetárias e, consequentemente, contribuindo para a redução do valor da contribuição mensal. A poupança mostrou-se inclusive a opção mais econômica para o planejamento da aposentadoria.

Porém, dada a dependência da correção monetária do governo vigente, tem-se o risco de mudança de legislação sobre o rendimento da poupança e podendo se agravar ainda mais em caso de confisco.

É importante ressaltar que existem outras modalidades de investimento, com retornos superiores à poupança, porém, também com maior risco. A compreensão do mercado financeiro pode ser um fator diferencial para os investidores alcançarem sua aposentadoria mais cedo ou com um investimento menor para atingir os mesmos objetivos. Por exemplo, os atrativos do Tesouro Direto e/ou Bolsa de Valores.

A compreensão dos princípios atuariais, como a análise de riscos, expectativas de vida, tábuas de vida e de comutação, oferecem uma base sólida para a formulação de estratégias de investimento mais robustas e adaptáveis às necessidades individuais. Nesse sentido, este estudo contribui para preencher uma lacuna na educação financeira brasileira, destacando a importância de considerar o fator risco no planejamento da aposentadoria.

Um aumento de aproximadamente 23% da previdência privada, em relação à poupança, evidencia que a probabilidade de sobrevivência tem impacto significativo no planejamento financeiro. Por outro lado, ao considerar a análise de risco, é importante observar que, pela lei dos grandes números, os resultados futuros têm maior probabilidade de ocorrência, além das garantias que as instituições financeiras devem cumprir para honrar os pagamentos. A previdência privada possui suas regras e garantias previamente definidas em contrato, ao passo que a poupança está sujeita a alterações repentinas devido às influências políticas.

Ao apresentar alternativas viáveis, descrever os procedimentos estatísticos e matemáticos, esperamos incentivar uma mudança de paradigma em relação à cultura de poupança e da previdência privada no país, promovendo uma abordagem mais consciente e proativa em relação ao futuro financeiro pessoal.

É necessário reconhecer que ainda há desafios e questões a serem explorados em pesquisas futuras. Temas como a diversificação de investimentos, análise da inflação no valor futuro e estratégias de gestão de riscos mais avançadas, como a análise contínua das Tábuas de Vida, são tópicos que merecem uma investigação mais aprofundada.

Em última análise, acreditamos que este trabalho serve como um ponto de partida para uma discussão mais ampla e colaborativa sobre a importância do planejamento financeiro para a aposentadoria e os diferentes caminhos disponíveis para alcançar esse objetivo de forma segura e acessível.

Abrem-se vastas perspectivas para investigações futuras que abrangem a atuária, o mercado securitário, os planos de saúde e os seguros contra acidentes pessoais. Explicar a matemática que está embutida nesses “produtos” é essencial para as instituições financeiras, pois as possibilita serem confiáveis e acessíveis a toda a população.

6. BIBLIOGRAFIA

[1] Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. **Projeções e estimativas da população do Brasil e das Unidades da Federação**. Rio de Janeiro: IBGE, 2013.

[2] D'AMBROSIO, U. **A educação matemática e etnomatemática**. Teoria e Prática da Educação, Maringá - PR, vol. 4, nº 8, jun. p. 15-33, 2001a.

[3] BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC,2018.

[4] OCDE. **Recommendation on Principles and Good Practices For Financial Education and Awareness**. Recommendation of The Council. Julho, 2005.

[5] GLOBO, 2013. Disponível em: https://g1.globo.com/globo-reporter/noticia/2013/06/homem-perde-fortuna-guardada-no-colchao-na-mudanca-de-moeda.html Acessado em: 28/02/2024.

[6] Super Interessante. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-era-a-vida-no-brasil-da-hiperinflacao Acessado em: 28/02/2024.

[7] SILVA, José da. ***Gestão Financeira: Teoria e Prática***. 3ª ed. São Paulo: Editora Financeira, 2022.

[8] CORDEIRO FILHO, Antonio. **Cálculo atuarial aplicado: exercícios resolvidos e propostos**. – 2ª ed. – São Paulo: Atlas, 2016.

[9] Congresso Nacional, Rádio Câmara 2006. Disponível em: <A perplexidade do brasileiro diante do confisco das contas bancárias e poupanças (05' 44") - Rádio Câmara - Portal da Câmara dos Deputados (camara.leg.br)> Acessado em: 08/03/2024.

[10] ORTEGA, J. A. **Tábuas de mortalidade: instrumentos para calcular as probabilidades de vida e morte de uma população em função da idade**. 1987.

[11] GLOBO, 2012. Disponível em: <G1 - Câmara aprova MP que muda regras de rendimento da poupança - notícias em Política (globo.com)> Acessado em: 08/03/2024.

[12] PUCCINI, Ernesto Coutinho. **Matemática Financeira**. Brasília/DF, UAB/MEC. 2007. Disponível em: <http://www.proativams.com.br/files aberto/Livro%20de%20MForiginal.pdf>. Acesso em 20/10/2023

[13] IBGE. **Tábua de Vida 2021**. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9126-tabuas-completas-de-mortalidade.html> Acesso em 24/10/2023.

[14] AZEVEDO, Gustavo Henrique W. de. **Seguros, Matemática Atuarial e Financeira**. Editora Saraiva. São Paulo. 2008.

[15] OLIVEIRA, J. F. **Introdução à Teoria das Probabilidades e Estatística**. Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

[16] FERREIRA, W. J. **Coleção Introdução à Ciência Atuarial** – 1ª ed. – Rio de Janeiro, 1985.

7. ANEXO

Tábua de Comutação AT-2000

Tábua AT-2000 – com juros de 6% ao ano

SOA885 Masculino Idade (x)	AT-2000 q_x	Tx. Juros 6% l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x	S_x	e^o_x	C_x	M_x
0	0,002311	100.000,00	231,10	99.884,45	0,997689	79,57	100.000,00	8.006.910,91	1.730.595,57	28.979.768	80,07	218,02	2.041,76
1	0,000906	99.768,90	90,39	99.723,70	0,999094	78,75	94.121,60	7.907.026,46	1.630.595,57	27.249.172	79,25	80,45	1.823,74
2	0,000504	99.678,51	50,24	99.653,39	0,999496	77,82	88.713,52	7.807.302,76	1.536.473,96	25.618.576	78,32	42,18	1.743,29
3	0,000408	99.628,27	40,65	99.607,95	0,999592	76,86	83.649,82	7.707.649,37	1.447.760,44	24.082.102	77,36	32,20	1.701,11
4	0,000357	99.587,62	35,55	99.569,85	0,999643	75,90	78.882,73	7.608.041,42	1.364.110,63	22.634.342	76,40	26,57	1.668,92
5	0,000324	99.552,07	32,25	99.535,94	0,999676	74,92	74.391,10	7.508.471,57	1.285.227,90	21.270.231	75,42	22,74	1.642,35
6	0,000301	99.519,82	29,96	99.504,84	0,999699	73,95	70.157,54	7.408.935,63	1.210.836,80	19.985.003	74,45	19,92	1.619,61
7	0,000286	99.489,86	28,45	99.475,63	0,999714	72,97	66.166,44	7.309.430,79	1.140.679,26	18.774.167	73,47	17,85	1.599,69
8	0,000328	99.461,41	32,62	99.445,09	0,999672	71,99	62.403,32	7.209.955,16	1.074.512,82	17.633.487	72,49	19,31	1.581,84
9	0,000362	99.428,78	35,99	99.410,79	0,999638	71,01	58.851,74	7.110.510,06	1.012.109,50	16.558.975	71,51	20,10	1.562,53
10	0,000390	99.392,79	38,76	99.373,41	0,999610	70,04	55.500,41	7.011.099,28	953.257,76	15.546.865	70,54	20,42	1.542,43
11	0,000413	99.354,03	41,03	99.333,51	0,999587	69,07	52.338,46	6.911.725,87	897.757,35	14.593.607	69,57	20,39	1.522,01
12	0,000431	99.312,99	42,80	99.291,59	0,999569	68,10	49.355,51	6.812.392,36	845.418,88	13.695.850	68,60	20,07	1.501,62
13	0,000446	99.270,19	44,27	99.248,05	0,999554	67,12	46.541,74	6.713.100,77	796.063,37	12.850.431	67,62	19,58	1.481,55
14	0,000458	99.225,91	45,45	99.203,19	0,999542	66,15	43.887,72	6.613.852,72	749.521,63	12.054.368	66,65	18,96	1.461,96
15	0,000470	99.180,47	46,61	99.157,16	0,999530	65,18	41.384,54	6.514.649,53	705.633,91	11.304.846	65,68	18,35	1.443,00
16	0,000481	99.133,85	47,68	99.110,01	0,999519	64,22	39.023,67	6.415.492,37	664.249,37	10.599.212	64,72	17,71	1.424,65
17	0,000495	99.086,17	49,05	99.061,65	0,999505	63,25	36.797,08	6.316.382,35	625.225,70	9.934.963	63,75	17,18	1.406,94
18	0,000510	99.037,12	50,51	99.011,87	0,999490	62,28	34.697,04	6.217.320,71	588.428,62	9.309.737	62,78	16,69	1.389,76
19	0,000528	98.986,61	52,26	98.960,48	0,999472	61,31	32.716,36	6.118.308,84	553.731,58	8.721.308	61,81	16,30	1.373,07
20	0,000549	98.934,35	54,31	98.907,19	0,999451	60,34	30.848,20	6.019.348,36	521.015,21	8.167.577	60,84	15,98	1.356,77
21	0,000573	98.880,03	56,66	98.851,71	0,999427	59,37	29.086,10	5.920.441,16	490.167,02	7.646.562	59,87	15,72	1.340,79
22	0,000599	98.823,38	59,20	98.793,78	0,999401	58,41	27.423,99	5.821.589,46	461.080,92	7.156.395	58,91	15,50	1.325,07
23	0,000627	98.764,18	61,93	98.733,22	0,999373	57,44	25.856,19	5.722.795,68	433.656,93	6.695.314	57,94	15,29	1.309,57
24	0,000657	98.702,26	64,85	98.669,83	0,999343	56,48	24.377,34	5.624.062,46	407.800,74	6.261.657	56,98	15,11	1.294,28
25	0,000686	98.637,41	67,67	98.603,58	0,999314	55,52	22.982,38	5.525.392,63	383.423,40	5.853.856	56,02	14,87	1.279,17
26	0,000714	98.569,74	70,38	98.534,55	0,999286	54,56	21.666,62	5.426.789,05	360.441,02	5.470.433	55,06	14,59	1.264,30

Tábua de Comutação AT-2000 - Parte I

27	0,000738	98.499,36	72,69	98.463,02	0,999262	53,59	20.425,61	5.328.254,50	338.774,40	5.109.992	54,09	14,22	1.249,70
28	0,000758	98.426,67	74,61	98.389,37	0,999242	52,63	19.255,22	5.229.791,48	318.348,79	4.771.217	53,13	13,77	1.235,48
29	0,000774	98.352,06	76,12	98.314,00	0,999226	51,67	18.151,54	5.131.402,11	299.093,56	4.452.868	52,17	13,25	1.221,71
30	0,000784	98.275,94	77,05	98.237,42	0,999216	50,71	17.110,84	5.033.088,11	280.942,03	4.153.775	51,21	12,66	1.208,46
31	0,000789	98.198,89	77,48	98.160,15	0,999211	49,75	16.129,64	4.934.850,70	263.831,19	3.872.833	50,25	12,01	1.195,80
32	0,000789	98.121,41	77,42	98.082,70	0,999211	48,79	15.204,64	4.836.690,54	247.701,55	3.609.002	49,29	11,32	1.183,80
33	0,000790	98.043,99	77,45	98.005,27	0,999210	47,83	14.332,68	4.738.607,84	232.496,91	3.361.300	48,33	10,68	1.172,48
34	0,000791	97.966,54	77,49	97.927,79	0,999209	46,87	13.510,72	4.640.602,57	218.164,23	3.128.803	47,37	10,08	1.161,80
35	0,000792	97.889,05	77,53	97.850,28	0,999208	45,91	12.735,88	4.542.674,78	204.653,51	2.910.639	46,41	9,52	1.151,72
36	0,000794	97.811,52	77,66	97.772,69	0,999206	44,94	12.005,46	4.444.824,49	191.917,63	2.705.986	45,44	8,99	1.142,20
37	0,000823	97.733,86	80,43	97.693,64	0,999177	43,98	11.316,91	4.347.051,81	179.912,17	2.514.068	44,48	8,79	1.133,21
38	0,000872	97.653,42	85,15	97.610,85	0,999128	43,01	10.667,55	4.249.358,16	168.595,26	2.334.156	43,51	8,78	1.124,42
39	0,000945	97.568,27	92,20	97.522,17	0,999055	42,05	10.054,95	4.151.747,32	157.927,71	2.165.560	42,55	8,96	1.115,64
40	0,001043	97.476,07	101,67	97.425,23	0,998957	41,09	9.476,84	4.054.225,15	147.872,76	2.007.633	41,59	9,32	1.106,68
41	0,001168	97.374,40	113,73	97.317,53	0,998832	40,13	8.931,09	3.956.799,92	138.395,93	1.859.760	40,63	9,84	1.097,36
42	0,001322	97.260,67	128,58	97.196,38	0,998678	39,18	8.415,71	3.859.482,38	129.464,84	1.721.364	39,68	10,50	1.087,51
43	0,001505	97.132,09	146,18	97.059,00	0,998495	38,23	7.928,86	3.762.286,01	121.049,13	1.591.899	38,73	11,26	1.077,02
44	0,001715	96.985,90	166,33	96.902,74	0,998285	37,29	7.468,80	3.665.227,01	113.120,27	1.470.850	37,79	12,08	1.065,76
45	0,001948	96.819,57	188,60	96.725,27	0,998052	36,36	7.033,95	3.568.324,27	105.651,48	1.357.730	36,86	12,93	1.053,68
46	0,002198	96.630,97	212,39	96.524,77	0,997802	35,43	6.622,87	3.471.599,00	98.617,53	1.252.078	35,93	13,73	1.040,75
47	0,002463	96.418,57	237,48	96.299,83	0,997537	34,50	6.234,26	3.375.074,23	91.994,65	1.153.461	35,00	14,49	1.027,02
48	0,002740	96.181,09	263,54	96.049,33	0,997260	33,59	5.866,89	3.278.774,40	85.760,39	1.061.466	34,09	15,17	1.012,53
49	0,003028	95.917,56	290,44	95.772,34	0,996972	32,68	5.519,64	3.182.725,07	79.893,50	975.706	33,18	15,77	997,37
50	0,003330	95.627,12	318,44	95.467,90	0,996670	31,78	5.191,44	3.086.952,73	74.373,86	895.812	32,28	16,31	981,60
51	0,003647	95.308,68	347,59	95.134,89	0,996353	30,89	4.881,28	2.991.484,83	69.182,42	821.438	31,39	16,79	965,29
52	0,003980	94.961,09	377,95	94.772,12	0,996020	30,00	4.588,18	2.896.349,94	64.301,14	752.256	30,50	17,23	948,50
53	0,004331	94.583,15	409,64	94.378,33	0,995669	29,12	4.311,25	2.801.577,82	59.712,96	687.955	29,62	17,62	931,27
54	0,004698	94.173,51	442,43	93.952,29	0,995302	28,25	4.049,60	2.707.199,50	55.401,71	628.242	28,75	17,95	913,65
55	0,005077	93.731,08	475,87	93.493,14	0,994923	27,38	3.802,43	2.613.247,20	51.352,11	572.840	27,88	18,21	895,70
56	0,005465	93.255,21	509,64	93.000,39	0,994535	26,52	3.568,98	2.519.754,06	47.549,68	521.488	27,02	18,40	877,49
57	0,005861	92.745,57	543,58	92.473,78	0,994139	25,67	3.348,57	2.426.753,67	43.980,70	473.938	26,17	18,52	859,09
58	0,006265	92.201,99	577,65	91.913,16	0,993735	24,82	3.140,51	2.334.279,90	40.632,13	429.958	25,32	18,56	840,58

Tábua de Comutação AT-2000 - Parte II

59	0,006694	91.624,34	613,33	91.317,67	0,993306	23,97	2.944,18	2.242.366,74	37.491,63	389.326	24,47	18,59	822,02
60	0,007170	91.011,01	652,55	90.684,73	0,992830	23,14	2.758,94	2.151.049,06	34.547,44	351.834	23,64	18,66	803,42
61	0,007714	90.358,46	697,03	90.009,94	0,992286	22,30	2.584,11	2.060.364,33	31.788,50	317.287	22,80	18,81	784,76
62	0,008348	89.661,43	748,49	89.287,19	0,991652	21,48	2.419,03	1.970.354,39	29.204,39	285.498	21,98	19,05	765,96
63	0,009093	88.912,94	808,49	88.508,70	0,990907	20,66	2.263,06	1.881.067,20	26.785,36	256.294	21,16	19,41	746,90
64	0,009968	88.104,45	878,23	87.665,34	0,990032	19,85	2.115,55	1.792.558,50	24.522,30	229.508	20,35	19,89	727,49
65	0,010993	87.226,23	958,88	86.746,79	0,989007	19,05	1.975,90	1.704.893,16	22.406,76	204.986	19,55	20,49	707,60
66	0,012188	86.267,35	1.051,43	85.741,64	0,987812	18,26	1.843,57	1.618.146,37	20.430,85	182.579	18,76	21,20	687,11
67	0,013572	85.215,92	1.156,55	84.637,65	0,986428	17,48	1.718,02	1.532.404,74	18.587,28	162.148	17,98	22,00	665,91
68	0,015160	84.059,37	1.274,34	83.422,20	0,984840	16,72	1.598,77	1.447.767,09	16.869,27	143.561	17,22	22,87	643,91
69	0,016946	82.785,03	1.402,88	82.083,60	0,983054	15,98	1.485,41	1.364.344,89	15.270,49	126.692	16,48	23,75	621,05
70	0,018920	81.382,16	1.539,75	80.612,28	0,981080	15,26	1.377,59	1.282.261,29	13.785,08	111.421	15,76	24,59	597,30
71	0,021071	79.842,41	1.682,36	79.001,23	0,978929	14,55	1.275,02	1.201.649,01	12.407,49	97.636	15,05	25,35	572,71
72	0,023388	78.160,05	1.828,01	77.246,04	0,976612	13,86	1.177,50	1.122.647,78	11.132,47	85.229	14,36	25,98	547,36
73	0,025871	76.332,04	1.974,79	75.344,65	0,974129	13,20	1.084,87	1.045.401,73	9.954,97	74.096	13,70	26,48	521,38
74	0,028552	74.357,25	2.123,05	73.295,73	0,971448	12,55	996,99	970.057,09	8.870,09	64.141	13,05	26,85	494,91
75	0,031477	72.234,21	2.273,72	71.097,35	0,968523	11,91	913,70	896.761,36	7.873,11	55.271	12,41	27,13	468,05
76	0,034686	69.960,49	2.426,65	68.747,17	0,965314	11,30	834,85	825.664,01	6.959,41	47.398	11,80	27,32	440,92
77	0,038225	67.533,84	2.581,48	66.243,10	0,961775	10,71	760,27	756.916,84	6.124,56	40.439	11,21	27,42	413,60
78	0,042132	64.952,36	2.736,57	63.584,07	0,957868	10,13	689,82	690.673,74	5.364,29	34.314	10,63	27,42	386,18
79	0,046427	62.215,79	2.888,49	60.771,54	0,953573	9,58	623,36	627.089,67	4.674,47	28.950	10,08	27,30	358,77
80	0,051128	59.327,29	3.033,29	57.810,65	0,948872	9,05	560,77	566.318,13	4.051,11	24.275	9,55	27,05	331,46
81	0,056250	56.294,01	3.166,54	54.710,74	0,943750	8,53	501,98	508.507,48	3.490,34	20.224	9,03	26,64	304,41
82	0,061809	53.127,47	3.283,76	51.485,59	0,938191	8,04	446,93	453.796,74	2.988,36	16.734	8,54	26,06	277,78
83	0,067826	49.843,71	3.380,70	48.153,36	0,932174	7,57	395,57	402.311,14	2.541,43	13.746	8,07	25,31	251,72
84	0,074322	46.463,01	3.453,22	44.736,40	0,925678	7,12	347,87	354.157,78	2.145,86	11.204	7,62	24,39	226,40
85	0,081326	43.009,79	3.497,81	41.260,88	0,918674	6,69	303,79	309.421,38	1.797,99	9.058	7,19	23,31	202,01
86	0,088863	39.511,98	3.511,15	37.756,40	0,911137	6,29	263,28	268.160,49	1.494,20	7.260	6,79	22,07	178,71
87	0,096958	36.000,82	3.490,57	34.255,54	0,903042	5,90	226,31	230.404,09	1.230,92	5.766	6,40	20,70	156,63
88	0,105631	32.510,26	3.434,09	30.793,21	0,894369	5,53	192,80	196.148,55	1.004,61	4.535	6,03	19,21	135,93
89	0,114858	29.076,17	3.339,63	27.406,35	0,885142	5,19	162,67	165.355,34	811,81	3.531	5,69	17,63	116,72
90	0,124612	25.736,53	3.207,08	24.132,99	0,875388	4,86	135,84	137.948,99	649,14	2.719	5,36	15,97	99,09

Tábua de Comutação AT-2000 - Parte III

91	0,134861	22.529,45	3.038,34	21.010,28	0,865139	4,55	112,18	113.816,00	513,30	2.070	5,05	14,27	83,13
92	0,145575	19.491,11	2.837,42	18.072,40	0,854425	4,26	91,56	92.805,72	401,12	1.556	4,76	12,57	68,85
93	0,156727	16.653,69	2.610,08	15.348,65	0,843273	3,99	73,80	74.733,32	309,56	1.155	4,49	10,91	56,28
94	0,168290	14.043,61	2.363,40	12.861,91	0,831710	3,73	58,71	59.384,67	235,76	846	4,23	9,32	45,37
95	0,180245	11.680,21	2.105,30	10.627,56	0,819755	3,48	46,07	46.522,76	177,05	610	3,98	7,83	36,05
96	0,192565	9.574,91	1.843,79	8.653,01	0,807435	3,25	35,63	35.895,20	130,98	433	3,75	6,47	28,21
97	0,205229	7.731,12	1.586,65	6.937,79	0,794771	3,02	27,14	27.242,19	95,35	302	3,52	5,25	21,74
98	0,218683	6.144,47	1.343,69	5.472,62	0,781317	2,80	20,35	20.304,39	68,22	206	3,30	4,20	16,49
99	0,233371	4.800,78	1.120,36	4.240,60	0,766629	2,59	15,00	14.831,77	47,87	138	3,09	3,30	12,29
100	0,249741	3.680,42	919,15	3.220,84	0,750259	2,38	10,85	10.591,17	32,87	90	2,88	2,56	8,99
101	0,268237	2.761,26	740,67	2.390,93	0,731763	2,17	7,68	7.370,33	22,02	58	2,67	1,94	6,43
102	0,289305	2.020,59	584,57	1.728,31	0,710695	1,96	5,30	4.979,41	14,35	35	2,46	1,45	4,49
103	0,313391	1.436,02	450,04	1.211,01	0,686609	1,76	3,55	3.251,10	9,05	21	2,26	1,05	3,04
104	0,340940	985,99	336,16	817,91	0,659060	1,57	2,30	2.040,09	5,49	12	2,07	0,74	1,99
105	0,372398	649,82	241,99	528,83	0,627602	1,38	1,43	1.222,19	3,19	7	1,88	0,50	1,25
106	0,408210	407,83	166,48	324,59	0,591790	1,20	0,85	693,36	1,76	3	1,70	0,33	0,75
107	0,448823	241,35	108,32	187,19	0,551177	1,03	0,47	368,77	0,91	2	1,53	0,20	0,42
108	0,494681	133,03	65,81	100,12	0,505319	0,86	0,25	181,58	0,44	1	1,36	0,11	0,22
109	0,546231	67,22	36,72	48,86	0,453769	0,71	0,12	81,46	0,19	0	1,21	0,06	0,11
110	0,603917	30,50	18,42	21,29	0,396083	0,57	0,05	32,59	0,08	0	1,07	0,03	0,05
111	0,668186	12,08	8,07	8,05	0,331814	0,44	0,02	11,30	0,03	0	0,94	0,01	0,02
112	0,739483	4,01	2,96	2,53	0,260517	0,31	0,01	3,26	0,01	0	0,81	0,00	0,01
113	0,818254	1,04	0,85	0,62	0,181746	0,20	0,00	0,73	0,00	0	0,70	0,00	0,00
114	0,904945	0,19	0,17	0,10	0,095055	0,10	0,00	0,11	0,00	0	0,60	0,00	0,00
115	1,000000	0,02	0,02	0,01	0,000000	0,00	0,00	0,01	0,00	0	0,50	0,00	0,00

Tábua de Comutação AT-2000 - Parte IV