UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRENO FALSETI FILGUEIRAS

# PREVISÃO DE RISCO COM DISTRIBUIÇÕES ASSIMÉTRICAS PARA AÇÕES BRASILEIRAS: UM ESTUDO COMPARATIVO PELA PERDA REALIZADA

CURITIBA

2024

BRENO FALSETI FILGUEIRAS

# PREVISÃO DE RISCO COM DISTRIBUIÇÕES ASSIMÉTRICAS PARA AÇÕES BRASILEIRAS: UM ESTUDO COMPARATIVO PELA PERDA REALIZADA

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Setor de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Doutor José Guilherme Silva Vieira

CURITIBA

2024

Breno Falseti Filgueiras
Previsão de Risco com Distribuições Assimétricas para Ações Brasileiras: Um Estudo Comparativo Pela Perda Realizada/ Breno Falseti Filgueiras. – Curitiba, 2024-
57 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Doutor José Guilherme Silva Vieira

Trabalho Acadêmico – Universidade Federal do Paraná, 2024.

1. Previsão de risco, *Value at Risk*, Modelos GARCH, Distribuições Assimétricas, Mercado Financeiro.
I. Orientador: Prof. Doutor José Guilherme Silva Vieira.
II. Universidade Federal do Paraná
III.
IV. Previsão de Risco com Distribuições Assimétricas para Ações Brasileiras: Um Estudo Comparativo Pela Perda Realizada

CDU

**TERMO DE APROVAÇÃO**

**BRENO FALSETI FILGUEIRAS**

**PREVISÃO DE RISCO COM DISTRIBUIÇÕES ASSIMÉTRICAS PARA AÇÕES BRASILEIRAS: UM ESTUDO COMPARATIVO PELA PERDA REALIZADA**

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Setor de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas, pela seguinte banca examinadora:

**Prof. Doutor José Guilherme Silva Vieira**
**Orientador**

Prof. Dr. Fabiano Abranches Silva Dalto
UFPR

Prof. Dr. Lucas Lautert Dezordi
PUC-PR

Curitiba, 21 de Novembro de 2024.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu pai e à minha mãe por terem sido os maiores exemplos que eu poderia ter de dedicação e de conquista, além de terem propiciado toda a estrutura e o apoio necessários para que meus objetivos fossem alcançados.

Em segundo lugar, obrigado à Tassya Mara por todo o apoio, por compartilhar os momentos bons, os momentos difíceis e por ser minha companheira em toda essa trajetória.

Por último, agradeço aos professores da banca e, em especial, ao professor Adalto Acir Althaus Junior, por ter motivado a conclusão do presente projeto.

# RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal avaliar a performance de diferentes distribuições de probabilidade aplicadas ao modelo AR(1)-GARCH(1,1) na previsão da medida de risco *Value at Risk* para três ações brasileiras: VALE3, ITUB4 e EQTL3. Utilizando distribuições simétricas e assimétricas, como a normal, normal assimétrica, t de Student e t de Student assimétrica, são analisadas, variando os níveis de significância ($\alpha = 1\%$ e $\alpha = 5\%$). as previsões de risco em três períodos distintos, o total (2018 a 2024) e dois períodos fracionados considerando as metades do periodo total. Foram utilizadas janelas móveis para capturar diferentes horizontes temporais. Os resultados indicam que distribuições com caudas pesadas e assimetrias, como a t de Student assimétrica, proporcionam previsões de risco mais precisas no geral, especialmente em cenários de riscos mais flexíveis considerando $\alpha = 5\%$. Bem como, para periodos mais curtos de janelas rolantes e com maior volatilidade, a distribuição normal assimétrica teve uma performance nótavel. Disso, a análise das perdas realizadas confirma a superioridade dessas distribuições assimétricas para capturar a variabilidade de retornos de mercado no contexto brasileiro. Deste modo, o estudo contribui para o campo financeiro ao demonstrar a importância da escolha de modelos de previsão de risco adequados a diferentes cenários econômicos e perfis de volatilidade.

**Palavras-chave**: Previsão de risco, *Value at Risk*, Modelos GARCH, Distribuições Assimétricas, Mercado Financeiro.

## ABSTRACT

This study aims to evaluate the performance of different probability distributions applied to the AR(1)-GARCH(1,1) model in forecasting the risk measure Value at Risk for three Brazilian stocks: VALE3, ITUB4, and EQTL3. Symmetric and asymmetric distributions, such as the normal, skewed normal, Student's t, and skewed Student's t, are analyzed, varying the significance levels ($\alpha = 1\%$ and $\alpha = 5\%$). Risk forecasts are evaluated across three distinct periods: the total period (2018 to 2024) and two fractional periods representing halves of the total period. Rolling windows were employed to capture different time horizons. The results indicate that heavy-tailed and asymmetric distributions, such as the skewed Student's t, generally provide more accurate risk forecasts, particularly in more flexible risk scenarios at the $\alpha = 5\%$ level. Additionally, for shorter rolling windows and higher volatility periods, the skewed normal distribution exhibited notable performance. The analysis of realized losses confirms the superiority of these asymmetric distributions in capturing market return variability in the Brazilian context. Thus, the study contributes to the financial field by demonstrating the importance of selecting appropriate risk forecasting models for different economic scenarios and volatility profiles.



**Keywords**: Risk forecasting, Value at Risk, GARCH models, Asymmetric Distributions, Financial Markets.

## LISTA DE TABELAS

# LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

**AR-GARCH:** Modelo Autoregressivo de Heterocedasticidade Condicional Auto-Regressiva Generalizada

**AR:** Modelo Autorregressivo

**ARCH:** Modelo de Heterocedasticidade Condicional Autorregressiva

**ARMA:** Modelo Autorregressivo de Médias Móveis

**CVaR:** *Conditional Value at Risk*

**EQTL3:** Ação da empresa Equatorial Energia

**ES:** *Expected Shortfall*

**EWMA:** Modelo de Média Móvel Exponencialmente Ponderada

**GARCH:** Modelo de Heterocedasticidade Condicional Auto-Regressiva Generalizada

**ITUB4:** Ação da empresa Itaú Unibanco

**MA:** Modelo de Médias Moveis

**RB:** Ruído Branco

**VALE4:** Ação da empresa Vale S.A.

**VaR:** *Value at Risk*

# LISTA DE SÍMBOLOS

$a$: Parâmetro Constante

$\alpha$ : Nível de Significância

$\varepsilon$ : Termo de Erro

$\gamma$ : Parâmetro Constante de um Ruído Branco

$\lambda$ : Fator de Decaimento do Modelo EWMA

$\mu$ : Média

$\omega$ : Parâmetro de Sensibilidade dos Modelos GARCH em Relação ao Termo de Erro

$\Omega$ : Espaço Amostral

$\phi$ : Parâmetro do Processo AR

$\psi$ : Vetor de Parâmetros de Distribuições de Probabilidade

$\rho$ : Funcional de Risco

$\sigma$ : Volatilidade

$\theta$ : Parâmetro do Processo MA

$\zeta$ : Parâmetro de Sensibilidade dos Modelos GARCH em Relação à Variância Condicional

$W_E$: Comprimento da Janela de Estimação

$W_q$: Comprimento da Janela Rolante

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A economia brasileira é amplamente influenciada por setores estratégicos como os de Materiais Básicos, Bancos e *Utilities*, que desempenham um papel crucial na formação de um ambiente de risco no mercado financeiro. O setor de Materiais Básicos, ilustrado pela VALE3, é altamente dependente de fatores macroeconômicos e das flutuações nos preços de commodities, o que aumenta sua exposição ao risco. O setor bancário, representado pela ITUB4, reflete diretamente as condições econômicas do país, com implicações sobre crédito, liquidez e desempenho financeiro, sendo um termômetro da estabilidade financeira. Já o setor de *Utilities*, ilustrado pela EQTL3, tende a ser mais resiliente em momentos de crise, devido à sua natureza regulada e à demanda relativamente estável por serviços essenciais, o que lhe confere um perfil defensivo.

A escolha desses setores e ativos específicos reflete a importância de se avaliar o risco de diferentes segmentos da economia, especialmente em contextos de alta incerteza econômica. A previsão de risco para essas ações, em particular, é fundamental para investidores e gestores de portfólio que buscam estratégias de alocação de ativos otimizadas. Analisando períodos críticos da economia brasileira, como de 2018 a 2020, marcados pela recessão e, posteriormente, pela pandemia de COVID-19, e de 2021 a 2024, que inclui o processo de recuperação econômica, torna-se evidente a necessidade de compreender como esses setores respondem a crises e choques macroeconômicos.

No contexto financeiro, duas medidas amplamente utilizadas para avaliar o risco de retornos são o *Value at Risk* (VaR) e o *Expected Shortfall* (ES). Nos apoiamos na elicitabilidade, propriedade que permite a comparação de previsões por meio de funções de *score*, tornando possível a utilização da função de perda realizada para avaliar a acurácia das previsões entre as diferentes distribuições (Gneiting, 2011). Como o ES não é completamente elicitável, o foco desta monografia está na aplicação do VaR, o qual oferece uma métrica eficaz para a previsão de risco, permitindo capturar com precisão o comportamento dos retornos em diferentes setores e períodos. Para estimar e prever o risco dos retornos desses ativos, este estudo utiliza o modelo AR(1)-GARCH(1,1), reconhecido por sua capacidade de capturar a dinâmica dos retornos financeiros e a volatilidade condicional, como demonstrado em estudos como Escanciano e Olmo (2011) e Guo (2021).

Os resultados obtidos indicam que a distribuição t de Student assimétrica apresentou melhor desempenho geral na previsão de risco, especialmente em cenários de maior flexibilidade e períodos mais longos, como o total e o primeiro fracionado.

Para as ações VALE3 e EQTL3, essa distribuição capturou de forma eficaz caudas pesadas e assimetrias. Por outro lado, a distribuição normal assimétrica mostrou melhor performance em períodos de alta volatilidade, como durante a pandemia, sendo mais eficaz para ativos como ITUB4 e EQTL3. Esses resultados ressaltam a necessidade de adaptar a escolha da distribuição ao contexto econômico e à natureza específica de cada ativo, reforçando a importância de modelar adequadamente a assimetria e caudas pesadas em mercados financeiros.

Este estudo oferece uma contribuição significativa tanto para a academia quanto para o setor financeiro. No âmbito acadêmico, ele avança o entendimento sobre a aplicação de modelos de previsão de risco no mercado brasileiro, uma área pouco explorada, especialmente se considerar a fundamentação em funções que abrangem a propriedade de elicitabilidade, o qual não foi aplicado no contexto do mercado brasileiro e comparação entre setores. Apesar de já aplicada em mercados externos por Bellini e Bignozzi (2015), Garcia-Jorcano e Novales (2021) e Müller et al. (2023), além de criptomoedas como nos estudos de Liu et al. (2020), Müller et al. (2022) e (Scolaro e Müller, 2024). Além disso, a análise do impacto da pandemia na previsão de risco e na avaliação de modelos traz é outra novidade no cenário da aplicação deste modelo preditivo. Para o mercado financeiro, a pesquisa oferece a análise prática sobre a adequação de diferentes metodologias de previsão de risco, o que pode auxiliar na tomada de decisões estratégicas por gestores de risco e investidores que lidam com a incerteza e a volatilidade do mercado brasileiro, com base em previsões de risco mais precisas e ajustadas às condições de mercado específicas.

Além desta introdução, o estudo está organizado nas seguintes seções: "Risco Financeiro", que aborda as métricas *Value at Risk* e *Expected Shortfall*; "Previsão de Risco", que apresenta os modelos de estimação de séries temporais para média e variância; "Procedimentos Metodológicos", que detalha o processo de seleção das ações utilizadas como objetos de estudo, bem como o método empregado para a previsão de risco e sua avaliação por meio da perda realizada; "Discussão de Resultados", que apresenta e analisa os resultados das previsões e avaliações dos modelos estimados; e, por fim, "Conclusões Finais", que sintetiza as principais considerações sobre os resultados obtidos ao longo do trabalho.

# 2 RISCO FINANCEIRO

No âmbito financeiro, risco pode ser entendido como a probabilidade de perdas em um investimento. Entretanto, para fins práticos, especialmente em instituições financeiras, é necessário um entendimento mais rigoroso do conceito de risco (McNeil et al., 2015). Em um ambiente financeiro, onde a possibilidade de perdas é concreta, a previsão precisa das medidas de risco torna-se crucial para uma gestão eficaz (Daniélsson, 2011). Dentre os tipos de risco, o risco de mercado é amplamente reconhecido. Este se refere à possibilidade de variações no valor de uma carteira devido a flutuações nos preços de ativos subjacentes, como ações, títulos, taxas de câmbio e commodities (McNeil et al., 2015). Nesse contexto, as medidas de risco surgem como ferramentas matemáticas para quantificar essa incerteza (Daniélsson, 2011). A eficácia de uma medida de risco é geralmente avaliada com base em sua capacidade de fornecer informações úteis, sendo que, quando diferentes medidas produzem resultados equivalentes, a escolha pode se basear na simplicidade de uso. O objetivo central dessas medidas é auxiliar na tomada de decisões informadas, permitindo uma avaliação precisa dos riscos associados a diferentes opções de investimento (Artzner et al., 1999).

Diante do exposto, esta seção tem como objetivo apresentar as propriedades essenciais que uma medida de risco deve possuir para quantificar o capital de maneira adequada. Em particular, são examinadas as duas principais medidas de risco amplamente utilizadas no mercado financeiro e na academia: o *Value at Risk* e o *Expected Shortfall*. Serão discutidas suas principais vantagens e limitações na quantificação do risco.

## 2.1 MEDIDAS DE RISCO

A quantificação do risco de uma posição financeira é um aspecto essencial tanto para reguladores quanto para instituições financeiras, além de representar um desafio teórico significativo (Righi e Ceretta, 2014). A teoria das medidas de risco, proposta por Artzner et al. (1999), oferece um arcabouço axiomático que esclarece essa questão e estabelece conexões importantes com outras áreas da economia, estatística e matemática, particularmente na teoria de preferências em situações de risco e incerteza. Artzner et al. (1999) investigam as características essenciais que uma medida de risco deve possuir para ser considerada eficaz e razoável. Eles identificam quatro axiomas que essas medidas idealmente devem respeitar. Uma medida de risco que cumpre esses quatro princípios é classificada como coerente, conforme McNeil et al. (2015):

1. **Invariância de Translação**: Para qualquer $X \in L_p$ e $C \in \mathbb{R}$,

$$\rho(X+C) = \rho(X) - C.$$

2. **Subaditividade**: Para quaisquer $X, Y \in L_p$,

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

3. **Monotonicidade**: Se $X \leq Y$, então

$$\rho(X) \geq \rho(Y) \quad \forall X, Y \in L_p.$$

4. **Homogeneidade Positiva**: Para $X \in L_p$ e $c \geq 0$,

$$\rho(cX) = c\rho(X).$$

A invariância de translação estabelece que, ao adicionar um ganho certo a uma posição, o risco associado deve reduzir-se exatamente na mesma proporção. A subaditividade sugere que o risco de uma posição combinada deve ser inferior à soma dos riscos das posições individuais, refletindo o princípio da diversificação. A monotonicidade determina que, se uma posição consistentemente apresenta resultados piores do que outra, o risco da primeira deve ser superior ao da segunda. A homogeneidade positiva relaciona-se com a magnitude da posição, indicando que posições maiores aumentam o risco de forma proporcional, devido a questões de liquidez e custos de transação.

A teoria foi expandida e aprimorada por outros autores, como Kusuoka (2001), Föllmer e Weber (2015) e Müller et al. (2023). Essa abordagem visa quantificar o risco de queda como um requisito de capital, definindo o risco $\rho(X)$ de uma posição financeira em função do montante monetário necessário para torná-la aceitável (Föllmer e Weber, 2015).

A volatilidade, frequentemente medida pelo desvio padrão dos retornos, é uma das principais métricas utilizadas na análise de riscos financeiros. Ela é considerada uma medida de risco adequada apenas sob a premissa de que os retornos seguem uma distribuição normal. Sob essa condição, as propriedades estatísticas da distribuição normal são adequadamente capturadas pela média e pela variância. Contudo, essa suposição é frequentemente violada em retornos financeiros reais, levando a uma subestimação sistemática do risco quando a volatilidade é utilizada como única medida (Daniélsson, 2011). Essa limitação é especialmente relevante em aplicações que lidam com eventos extremos, onde a volatilidade pode não refletir adequadamente o risco envolvido.

Para lidar com a imprecisão da volatilidade, houve o desenvolvimento de outras medidas de risco. Sendo as duas mais comuns e relevantes na literatura e na prática o *Value at Risk* e o *Expected Shortfall*. O VaR é definido como a perda máxima esperada em uma carteira, a uma probabilidade $p$, em um dado período de tempo. Em contraste, o ES representa a expectativa das perdas que superam o limite estabelecido pelo VaR (McNeil et al., 2015). Esses conceitos são fundamentais para a avaliação da adequação de capital regulatório, conforme delineado pelo Basel Committee on Banking Supervision (2013).

Ademais, podem ser formalmente descritos como mapeamentos de risco, onde $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto de variáveis aleatórias de possíveis resultados financeiros no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Ao focar em $\rho(X)$, a medida de risco de uma posição financeira, em vez da distribuição completa dos retornos, simplifica a comparação entre diferentes carteiras. No entanto, essa abordagem reduz a quantidade de informação disponível. O principal objetivo ao utilizar $\rho(X)$ é oferecer uma métrica de risco clara e compreensível, que pode ser interpretada como o valor monetário necessário para proteger contra perdas ou como um indicador da segurança relativa de uma carteira (Brehmer, 2017).

Nesse contexto, é importante ressaltar que valores mais elevados de $\rho$ indicam posições financeiras mais arriscadas. A principal abordagem para modelar uma posição arriscada $X$ envolve a análise de sua função de distribuição $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Essa função representa a probabilidade de que, ao final do período considerado, o valor do risco $X$ seja menor ou igual a um valor específico $x$ (McNeil et al., 2015).

Medir o risco financeiro é indispensável para a seleção de portfólios, gestão interna de risco e para reguladores externos encarregados de determinar o capital regulatório para instituições financeiras. O risco financeiro é abstrato, em que não há consenso sobre como medi-lo, mesmo quando o foco é restrito à determinação do capital regulatório (Scolaro e Müller, 2024). A utilização de medidas de risco como o VaR e o ES é amplamente adotada devido à sua aplicabilidade prática e teórica na avaliação de riscos financeiros, proporcionando uma base sólida para a análise e a regulamentação do risco no setor financeiro (Basel Committee on Banking Supervision, 2013).

### 2.1.1 *Value at Risk*

Vamos considerar o *framework* estabelecido por Artzner et al. (1999), seguindo as teorias axiomáticas de Kromer et al. (2016) e Föllmer e Weber (2015). Neste cenário, o valor presente líquido de posições financeiras $X$ e as medidas de risco $\rho(X)$ são frequentemente representados no espaço das variáveis aleatórias, definido por $\mathbb{Z}$. Aqui, $\mathbb{Z} = L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, onde $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ é o espaço de probabilidade. Nesse contexto, seguindo um nível de significância $\alpha \in (0,1)$, a função de distribuição acumulada e o quantil à esquerda de uma variável aleatória, $X \in \mathbb{Z}$, são definidos, respectivamente

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \forall\, x,$$
$$F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}, \forall\, \alpha \in (0,1).$$

No contexto da medida de risco $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, para um retorno $X \in \mathbb{Z}$ e um nível de significância $\alpha \in (0,1)$, o *Value at Risk* é definido como:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha) \equiv -\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}, \quad \forall\, X \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

O *Value at Risk* é uma das medidas de risco mais utilizadas, sendo popular principalmente pela sua simplicidade e capacidade de fornecer uma visão clara do risco em termos monetários. Ele é definido como a perda máxima esperada de uma carteira ou investimento, em um nível de confiança específico durante um determinado período (Righi e Ceretta, 2014). Dessa forma, a mensuração do VaR baseia-se no valor esperado da perda, considerando a probabilidade de ocorrência do evento de risco, geralmente caracterizado pela perda de uma proporção específica do valor do ativo (Righi e Ceretta, 2014).

O cálculo do VaR envolve três etapas principais. A primeira consiste em especificar a probabilidade de que as perdas excedam o VaR, denotada por $\alpha$. O nível de probabilidade mais utilizado é $1\%$. Embora a teoria forneça pouca orientação sobre a escolha de $\alpha$, essa decisão depende principalmente da interpretação que o usuário do sistema de gestão de risco deseja atribuir ao número do VaR. Na prática, níveis de VaR entre $1\%$ e $5\%$ são bastante comuns, mas valores mais elevados, como $10\%$, são frequentemente usados na gestão de risco operacional. Níveis mais extremos, como $0,1\%$, são aplicáveis em análises de risco de longo prazo e capital econômico (Daniélsson, 2011).

A segunda etapa envolve a determinação do período de retenção, ou seja, o período durante o qual as perdas podem ocorrer. Normalmente, esse período é de um dia, mas pode variar dependendo das circunstâncias. Traders ativos podem optar por um período de um dia, enquanto investidores institucionais e empresas não financeiras podem preferir períodos mais longos (Daniélsson, 2011).

A terceira etapa envolve a identificação da distribuição de probabilidade dos lucros e perdas da carteira. Este é o aspecto mais desafiador e crucial da modelagem de risco, geralmente estimado usando dados históricos e modelos estatísticos (Daniélsson, 2011).

No entanto, o VaR apresenta algumas limitações significativas. Uma delas é que ele não é uma medida de risco coerente, pois não satisfaz todos os axiomas propostos por Artzner et al. (1999). Em particular, o VaR não é subaditivo, o que significa que o risco de uma carteira combinada pode ser maior do que a soma dos riscos individuais. Isso pode ser problemático em uma análise multivariada. Contudo, em uma mensuração univariada dos retornos, onde os ativos distintos são independentes entre si, essa limitação do VaR não interfere no estudo do risco dos ativos, pois não há diversificação entre ativos nesse contexto (Scolaro e Müller, 2024).

Além disso, o VaR não captura adequadamente o risco de eventos extremos, uma vez que é apenas um quantil na distribuição de lucros e perdas (McNeil et al., 2015). Como o VaR é apenas um ponto na distribuição de retornos, ele não fornece informações sobre a forma da cauda da distribuição além do nível de confiança escolhido. Isso significa que o VaR de $5\%$ não consegue capturar o risco de eventos extremos que ocorrem além desses $5\%$, assim como o formato da cauda (Brehmer, 2017).

Mesmo com essas limitações, diversos autores argumentam que o VaR pode ser mais robusto em certas situações comparado ao *Expected Shortfall*. Por exemplo, Cont et al.(2010) e Kou et al. (2013) destacam que o VaR pode ser preferido ao ES em termos de estabilidade e robustez contra *outliers*[1].

Apesar das falhas bem documentadas, o VaR continua sendo a medida de risco preferida no setor financeiro por proporcionar um equilíbrio eficaz entre as medidas de risco disponíveis, sustentando a maioria dos modelos práticos de gestão de risco e sendo uma base sólida para a análise e a regulamentação do risco no setor financeiro o Comitê de Basileia para Supervisão Bancária (2013).

### 2.1.2 *Expected Shortfall*

O *Expected Shortfall*, também conhecido como *Conditional Value at Risk* (CVaR), é uma medida de risco que visa superar as limitações do *Value at Risk*, especialmente no que se refere à subaditividade e à representação da forma da cauda da distribuição. O ES é definido como o valor esperado das perdas que excedem o VaR dentro de um intervalo de confiança predefinido, capturando não apenas as perdas até um certo ponto, mas também ponderando as perdas além desse limiar (Righi e Ceretta, 2014).

No contexto da medida de risco $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, para um retorno $X \in \mathbb{Z}$ e um nível de significância $\alpha \in (0,1)$, o *Expected Shortfall* é formalmente definido como:

$$\mathrm{ES}_{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \mathrm{VaR}_u(X)\,du, \quad \forall\, X \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

[1] Os *outliers* são observações que se desviam significativamente do padrão dos dados, podendo ocorrer devido a erros de medição, eventos raros ou extremos. No contexto de análise de risco, *outliers* impactam o ES ao exacerbar a média das perdas esperadas acima de um determinado limite, reduzindo sua estabilidade. Isso pode levar a uma superestimação ou subestimação do risco real, comprometendo a confiabilidade dos resultados(He et al., 2022).

O ES é sensível à forma da distribuição da cauda, capturando o valor esperado das perdas que ultrapassam o VaR dentro de um intervalo de confiança predefinido. Isso significa que, ao contrário do VaR, que apenas define um ponto de corte na distribuição, o ES pondera as perdas além desse ponto, abrangendo perdas extremas. Isso é especialmente relevante em situações onde a distribuição dos retornos apresenta caudas pesadas, uma característica comum em mercados financeiros (Föllmer e Weber, 2015). Dessa forma, para um mesmo nível de significância e ativo, o ES será sempre maior ou igual ao VaR, oferecendo uma medida de risco mais conservadora (Müller et al., 2022). Além disso, o ES é uma medida convexa, o que implica que ele adere ao princípio da diversificação, diferentemente do VaR (McNeil et al., 2015).

Contudo, apesar das vantagens teóricas do ES, sua aplicação prática enfrenta desafios. Um dos principais problemas é que o ES é estimado com maior incerteza em comparação ao VaR. A estimativa do ES envolve duas etapas: primeiro, determinar o VaR e, em seguida, calcular a expectativa das observações na cauda da distribuição. Esse processo introduz duas fontes de erro, aumentando a incerteza associada ao ES (Daniélsson, 2011).

Outro desafio é a dificuldade de testar o ES em comparação com o VaR. O procedimento de *backtesting* do ES requer estimativas da expectativa da cauda, o que não é necessário para o VaR. Portanto, enquanto o VaR pode ser diretamente comparado com observações reais, o ES depende de modelos que estimam as perdas extremas, dificultando a validação empírica. Essa característica torna o ES menos prático para aplicações cotidianas em instituições financeiras, que, em sua maioria, continuam a preferir o VaR (Daniélsson, 2011).

Além dessas questões práticas, He et al. (2022) destacam que medidas de risco devem ser robustas e elicitáveis. A robustez permite acomodar a incerteza do modelo, enquanto a elicitação possibilita a comparação do desempenho de modelos econométricos concorrentes (He et al., 2022). Apesar das desvantagens teóricas do ES, sua robustez e elicitação são critérios que frequentemente o colocam atrás do VaR, já que o VaR atende a ambos os critérios, enquanto o ES não (Cont et al., 2010;Gneiting, 2011; Kou et al., 2013).

Outro ponto crítico é que, por não ser robusto, o ES é altamente sensível a outliers e erros de especificação de parâmetros. Estudos indicam que o ES é mais vulnerável à arbitragem regulatória e a erros na modelagem do que o VaR (Bellini e Bignozzi, 2015; Kellner e Rösch, 2016). Além disso, há um conflito entre a convexidade e a robustez a distúrbios nos dados. O ES não passa em testes de robustez qualitativa e apresenta alta sensibilidade a *outliers* (Cont et al., 2010). Para uma discussão mais aprofundada sobre diferentes noções de robustez, Embrechts et al. (2015) oferecem uma visão abrangente das várias abordagens exploradas na literatura científica.

Em resumo, embora o ES ofereça uma visão mais detalhada e conservadora das perdas potenciais em uma carteira, especialmente em relação a eventos extremos, sua aplicação prática é limitada pela incerteza na medição e pela dificuldade em realizar *backtesting* (Daniélsson, 2011). As propriedades de robustez e elicitação, nas quais o VaR se destaca, são fundamentais para a adoção de medidas de risco na indústria financeira. Com ambas as métricas descritas, passamos para o método que será utilizado para as previsões de risco.

# 3 PREVISÃO DE RISCO

A previsão de séries temporais envolve o uso das observações disponíveis no tempo $t$ para estimar o valor da série em um momento futuro $t+l$ (Francq e Zakoian, 2010). Em particular, a previsão de risco financeiro apresenta desafios notáveis, uma vez que o risco não pode ser medido diretamente e deve ser inferido a partir do comportamento dos preços observados no mercado (Daniélsson, 2011). Diferentemente dos preços de mercado, a volatilidade não é observável diretamente; ela precisa ser deduzida com base na variabilidade dos preços. Grandes flutuações indicam alta volatilidade, mas é difícil determinar a magnitude exata dessa variabilidade, pois não se pode distinguir com clareza se um grande choque nos preços é temporário ou permanente (Trucíos et al., 2020).

A modelagem e previsão da volatilidade têm sido fundamentais no desenvolvimento das finanças empíricas, impulsionadas pelo crescimento dos derivativos financeiros, pela negociação quantitativa e pela modelagem de risco. No entanto, prever a volatilidade requer o uso de modelos estatísticos que, por sua vez, dependem de suposições rigorosas. Superestimar o risco pode levar a uma retenção excessiva de capital, resultando em custos de oportunidade. Por outro lado, subestimar o risco pode causar grandes déficits, especialmente em períodos de turbulência financeira, como crises e colapsos no sistema financeiro (Müller e Righi, 2018). A presença de fatos estilizados financeiros, como as não normalidades[1] e os *clusters* de volatilidade[2], complica ainda mais esse processo (McNeil et al., 2015).

Em síntese, a previsão de risco é uma componente crucial da gestão financeira, exigindo uma abordagem robusta e sofisticada devido à complexidade e à natureza latente da volatilidade. O uso adequado de métodos estatísticos e a sua avaliação podem melhorar significativamente a precisão das previsões, ajudando a mitigar riscos e a promover a estabilidade financeira.

Considerando o foco deste estudo na previsão de risco, que lida diretamente com a variância das séries temporais, os modelos que abordam a média dos retornos serão discutidos de forma breve pelo modelo ARMA. O principal enfoque será na modelagem da volatilidade dos retornos, que será detalhadamente explorada com foco nos modelos

[1] Os retornos financeiros podem ocasionalmente apresentar valores extremos, tanto positivos quanto negativos, que seriam altamente improváveis se os retornos seguissem uma distribuição normal (McNeil et al., 2015).

[2] Retornos absolutos elevados $|X_t|$ tendem a aparecer aglomerados. Essa característica é geralmente perceptível nas trajetórias amostrais. Períodos turbulentos (com alta volatilidade) são seguidos por períodos tranquilos (com baixa volatilidade). Embora esses subperíodos sejam recorrentes, eles não se manifestam de forma periódica, o que poderia contradizer a suposição de estacionaridade (Francq e Zakoian, 2010).

GARCH.

## 3.1 MODELOS ARMA

Para compreender os modelos de séries temporais, é fundamental primeiro definir algumas propriedades e conceitos essenciais que esses modelos devem atender para proporcionar um melhor ajuste. De forma geral, uma série temporal univariada pode ser representada por:

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, \varepsilon_t),$$

onde $x_t$ é uma sequência de variáveis aleatórias reais (Francq e Zakoian, 2010)..

Essa variável pode ser decomposta de forma observável para $t = 1, 2, \ldots, n$, assumindo-se que as condições iniciais $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{1-p}$ estão disponíveis quando necessário. O conjunto de informações disponíveis em $t-1$ é representado por $\Omega_{t-1}$, que inclui todos os dados necessários para prever valores futuros $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots$. Quando $\Omega_{t-1}$ não contém informações úteis para prever $x_t$ em um modelo linear, a série temporal correspondente é chamada de ruído branco (Francq e Zakoian, 2010).

Para que uma série temporal seja considerada um ruído branco, denotada por $\varepsilon_t$, ela deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varepsilon_t] &= 0, \\ \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] &= \sigma^2, \\ \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s] &= 0, \forall\, s \neq t. \end{aligned}$$

Essas condições garantem que a série tenha uma média constante e igual a zero, além de uma variância constante. A condição de que todas as autocovariâncias de $\varepsilon_t$ sejam nulas implica que $\Omega_{t-1}$ não contém informações suficientes para prever $\varepsilon_t$ usando modelos lineares (Francq e Zakoian, 2010).

Uma série de ruído branco é um caso particular de uma série estacionária. De modo geral, uma série temporal $x_t$ é considerada estacionária se sua média, variância e covariâncias permanecerem constantes ao longo do tempo (Box et al., 2008). Especificamente, isso significa que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_t] &= \mu \quad \forall\, t = 1, \ldots, n, \\ \mathbb{E}[(x_t - \mu)^2] &= \gamma_0 \quad \forall\, t = 1, \ldots, n, \\ \mathbb{E}[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)] &= \gamma_k, \end{aligned}$$

onde $\mu$, $\gamma_0$ e $\gamma_k$ são valores finitos.

A estacionaridade desempenha um papel crucial na análise de séries temporais, pois substitui de maneira natural a hipótese de observações independentes e identicamente distribuídas (iid) presente na estatística clássica (Box et al., 2008). Isso é especialmente relevante na previsão de risco, que lida diretamente com a variância das séries temporais (Box et al., 2008)..

Dessa forma, para analisar séries temporais, podemos decompor uma série temporal $x_t$ em duas partes: uma previsível, baseada em informações passadas, e outra imprevisível. Assim, $x_t$ pode ser escrito como:

$$x_t = \mathbb{E}[x_t|\Omega_{t-1}] + \nu_t,$$

onde $\mathbb{E}[.|.]$ representa o valor esperado condicional e $\nu_t$ é a parte imprevisível que satisfaz $\mathbb{E}[\nu_t|\Omega_{t-1}] = 0$, caracterizando um processo de ruído branco (Francq e Zakoian, 2010).

Um modelo comumente utilizado para a parte previsível de $x_t$ é o modelo autorregressivo de ordem $p$ [AR(p)], que assume que a previsão pode ser feita por meio de uma combinação linear das defasagens passadas da série:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

onde $\phi_1, \ldots, \phi_p$ são parâmetros desconhecidos do processo AR(p) e $\varepsilon_t$ é um ruído branco com média zero e variância constante, $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Se considerarmos uma única defasagem e uma perturbação que se comporta como ruído branco estacionário, obtemos o processo autorregressivo de primeira ordem [AR(1)]:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

onde $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Se $|\phi_1| < 1$, então $x_t$ é estacionário, e a expectativa condicional de $x_t$ é:

$$\mathbb{E}(x_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} = \mu.$$

Isso implica que a esperança incondicional de $x_t$ é constante e invariável ao longo do tempo. Além disso, a variância incondicional de $x_t$ é:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2},$$

onde $\sigma_x^2$ é a variância de $x_t$ e $\sigma_\varepsilon^2$ é a variância do termo de erro $\varepsilon_t$.

Por outro lado, a parte previsível de $x_t$ pode ser modelada como uma combinação linear dos últimos $q$ choques $\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_{t-q}$, resultando no modelo de médias móveis de ordem $q$ [MA(q)]:

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad t = 1,\ldots,n.$$

onde $\theta_1,\ldots,\theta_q$ são parâmetros desconhecidos do processo MA(q) e $\varepsilon_t$ é um ruído branco com média zero e variância constante, $\varepsilon_t \sim RB(0,\sigma_\varepsilon^2)$.

Considerando uma única defasagem, temos o processo MA(1):

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1},$$

onde $\varepsilon_t \sim RB(0,\sigma_\varepsilon^2)$. A expectativa incondicional de $x_t$ é:

$$\mathbb{E}(x_t) = \theta_0,$$

e a variância incondicional é:

$$\sigma_x^2 = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2).$$

onde $\sigma_x^2$ é a variância de $x_t$ e $\sigma_\varepsilon^2$ é a variância do termo de erro $\varepsilon_t$.

A condição $|\theta_1| < 1$ é conhecida como condição de invertibilidade e é análoga à condição de estacionariedade para um processo AR(1). No entanto, a estacionariedade de um processo MA(1) não requer restrições sobre $\theta_1$.

Combinando os modelos AR(p) e MA(q), obtemos o modelo autorregressivo de médias móveis de ordem (p,q) [ARMA(p,q)], expresso como:

$$x_t = a + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}.$$

onde $a$ é o parâmetro constante, $\phi_1,\ldots,\phi_p$ são parâmetros desconhecidos do processo AR(p), $\theta_1,\ldots,\theta_q$ são parâmetros desconhecidos do processo MA(q) e $\varepsilon_t$ é um ruído branco com média zero e variância constante, $\varepsilon_t \sim RB(0,\sigma_\varepsilon^2)$.

A estacionariedade do processo ARMA (p,q) exige que as raízes do polinômio $\phi(L)$ estejam fora do círculo unitário. Considerando defasagens iguais a um, temos o processo ARMA (1,1):

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Esses modelos ARMA são fundamentais na análise de séries temporais devido à sua capacidade de capturar a dependência temporal e a estrutura de autocorrelação na média das séries financeiras (Box et al., 2008).

## 3.2 MODELOS DE VOLATILIDADE UNIVARIADOS

Existem diversos métodos para prever a volatilidade, mas apenas alguns são comumente utilizados. A presença de *clusters* de volatilidade sugere que o uso de observações mais recentes ou a atribuição de maior peso a essas observações pode ser mais eficiente na previsão da volatilidade. No contexto dos métodos paramétricos para previsão de risco, a abordagem baseia-se na estimativa da distribuição dos retornos e na obtenção de previsões a partir dessa distribuição (McNeil et al., 2015).

A primeira etapa geralmente envolve a previsão da matriz de covariância e a determinação da volatilidade condicional $\sigma_t$, utilizando modelos de séries temporais para estimar a média e a volatilidade dos retornos, como o modelo de Média Móvel (MA), Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA) ou modelos de Heterocedasticidade Condicional Auto-Regressiva Generalizada (GARCH). Esses procedimentos estatísticos são aplicados a uma amostra de observações de retornos passados, compondo a janela de estimativa $W_E$ (Daniélsson, 2011).

Essas metodologias fornecem previsões de volatilidade condicional, representadas por:

$$\sigma_t = f(\text{retornos passados} x_{t-1}, \ldots, x_{t-W})$$

onde diferentes métodos são empregados para especificar a função $f$.

### 3.2.1 Modelos de Medias Móveis

Uma abordagem simples para prever a volatilidade é o cálculo do desvio padrão da amostra dos retornos. Esse método mantém o tamanho da amostra constante, adicionando o retorno mais recente e removendo o mais antigo a cada período $t$. Essa técnica é conhecida como modelo de média móvel (MA) e pode ser expressa como:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{W_E} \sum_{i=1}^{W_E} x_{t-i}^2$$

onde $x_t$ é o retorno observado no dia $t$, $\hat{\sigma}_t$ é a previsão de volatilidade para o dia $t$, e $W_E$ representa o comprimento da janela de estimativa (Francq e Zakoian, 2010). Vale destacar que apenas as observações passadas são utilizadas na previsão, sendo o retorno mais recente o do dia $t-1$ (Daniélsson, 2011)..

Uma limitação significativa dos modelos MA é a atribuição de pesos iguais a todas as observações, o que se torna problemático em cenários de *clusters* de volatilidade, onde os dados mais recentes tendem a refletir melhor o comportamento atual do mercado (Box et al., 2008). Na prática, esse método é sensível ao comprimento da janela de estimativa, o que pode resultar em previsões de volatilidade que variam consideravelmente, frequentemente sendo muito altas ou muito baixas. Além disso, quando aplicado ao cálculo do VaR, suas previsões de risco tendem a ser subestimadas (McNeil et al., 2015).

Para melhorar o desempenho do modelo MA, uma abordagem alternativa é ponderar exponencialmente os retornos, atribuindo maior peso às observações mais recentes. Esse modelo foi proposto pela J.P. Morgan em 1993 sob o nome de RiskMetrics™ e posteriormente ficou conhecido como modelo de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA). A equação que representa esse modelo é:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda(1-\lambda^{W_E})}\sum_{i=1}^{W_E}\lambda^i x_{t-i}^2$$

onde $\lambda$ é o fator de decaimento do EWMA a soma dos pesos é igual a um, conforme garantido pela primeira parte da equação. O modelo EWMA ajusta o modelo MA de modo que os pesos $\lambda$ decresçam exponencialmente ao longo do tempo (Daniélsson, 2011).

O modelo EWMA pode ser reescrito como uma soma ponderada entre a previsão de volatilidade do período anterior e os retornos quadrados:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\lambda)x_{t-1}^2 + \lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2,$$

onde $0 < \lambda < 1$ é o fator de decaimento, e $\hat{\sigma}_t^2$ é a previsão de volatilidade condicional no dia $t$.

No entanto, os pesos exponenciais diminuem rapidamente para zero, o que é uma das razões pelas quais esse método não é permitido pelos Acordos de Basileia para cálculos de VaR (Basel Committee on Banking Supervision, 2019). Além disso, o modelo apresenta covariância não estacionária, o que impede o cálculo de variâncias incondicionais. Ademais, a aplicação contínua de um processo EWMA ao longo do tempo pode resultar em volatilidade explosiva. Outra desvantagem é que o valor de $\lambda$ é fixo e idêntico para todos os ativos, o que não é ideal, pois não captura as características específicas de cada ativo, diferentemente dos modelos GARCH, que permitem maior flexibilidade na parametrização (Daniélsson, 2011).

Em resumo, apesar de suas limitações, os modelos de médias móveis e suas variações, como o EWMA, são ferramentas úteis na previsão de volatilidade. Entretanto, para uma previsão mais precisa e adaptável, recomenda-se o uso de modelos mais sofisticados, como os GARCH, que oferecem maior flexibilidade na estrutura e parametrização.

### 3.2.2 Modelos GARCH

Os modelos de heterocedasticidade condicional autorregressiva (ARCH) e sua extensão generalizada, os modelos GARCH, desenvolvidos por Bollerslev (1986), desempenham um papel crucial na modelagem da volatilidade financeira (Williams, 2011). Esses modelos são particularmente eficazes na captura dos principais fatos estilizados das séries financeiras, especialmente a heterocedasticidade condicional, que se refere à variação da volatilidade ao longo do tempo (Francq e Zakoian, 2010).

O método paramétrico utilizado nos modelos ARCH e GARCH baseia-se na suposição de que a variância condicional segue distribuições de probabilidade específicas, permitindo a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança (McNeil et al., 2015). Para compreender melhor esses modelos, é necessário definir suas representações e as condições de estacionariedade, em especial as de primeira ordem.

O principal objetivo é estudar as propriedades estatísticas dos retornos com base nas informações disponíveis no tempo $t-1$ e criar um modelo que descreva como essas propriedades evoluem ao longo do tempo. Observações amostrais são indicadas por letras minúsculas $x_t$, enquanto variáveis aleatórias são denotadas por letras maiúsculas $X_t$. O foco está na volatilidade condicional $\sigma_t$. No entanto, é essencial lidar com a média dos retornos, geralmente separando a estimação da média da estimação da volatilidade. Assim, a maioria dos modelos de volatilidade trabalha com retornos centralizados, assumindo que $E(X_t) = 0$, salvo indicação contrária (Daniélsson, 2011).

No modelo ARCH, a inovação nos retornos $X_t$ é impulsionada por choques aleatórios $Z_t$ de ruído branco, onde o retorno no dia $t$ é dado por:

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$

com $\{Z_t\}$ sendo uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média 0 e variância 1 (McNeil et al., 2015).

Para capturar *clusters* de volatilidade, o modelo ARCH é representado por:

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^{L_1} \omega_i X_{t-i}^2,$$

onde $L_1$ é o número de defasagens, $a$ é o parâmetro constante, e $\omega_i$ são os parâmetros variáveis do modelo. Ajustando a defasagem para um, obtém-se o modelo ARCH(1):

$$\sigma_t^2 = a + \omega X_{t-1}^2.$$

Nesse modelo, a variância condicional do retorno de hoje é igual a uma constante mais o quadrado do retorno de ontem (Box et al., 2008).

Enquanto isso, a volatilidade incondicional do modelo ARCH(1) é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{a}{1-\omega}.$$

Em que, existem duas restrições principais frequentemente impostas aos parâmetros do modelo ARCH (Tsay, 2005):

1. Para garantir previsões de volatilidade positivas: $\omega_i, a > 0 \quad , \forall \quad i = 1, \ldots, L_1$;

2. Para assegurar a estacionariedade da covariância, garantindo que a volatilidade incondicional seja definida, impõe-se: $\sum_{i=1}^{L_1} \omega_i < 1$.

A restrição de não negatividade é sempre necessária, enquanto a restrição de estacionariedade da covariância pode ser opcional, dependendo da aplicação. No caso do modelo ARCH(1), se $\omega \geq 1$, a volatilidade incondicional é indefinida (Tsay, 2005). No entanto, a imposição da restrição de estacionariedade da covariância não é sempre necessária. Se o modelo estiver corretamente especificado, a restrição pode ser útil, mas todos os modelos possuem falhas. Isso implica que os parâmetros estimados e as previsões de volatilidade resultantes podem ser arbitrários. Em estimativas sequenciais repetidas, os parâmetros podem variar de um dia para o outro, causando inconsistência e contribuindo para a variabilidade da volatilidade (Daniélsson, 2011).

Uma das principais limitações do modelo ARCH é a necessidade de longas defasagens para capturar o impacto dos retornos históricos na volatilidade atual. O modelo GARCH, ao incluir a volatilidade defasada, consegue incorporar melhor esses impactos históricos (Francq e Zakoian, 2010). O modelo GARCH($L_1$, $L_2$) é representado por:

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^{L_1} \omega_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{L_2} \zeta_j \sigma_{t-j}^2.$$

onde $a$ é o parâmetro constante, enquanto $L_1$ e $L_2$ são os números de defasagens dos parâmetros variáveis $\omega_i$ e $\zeta_i$ do modelo, na devida ordem.

No modelo GARCH tradicional, a variância condicional é uma função linear dos valores passados quadrados da série, utilizando uma ponderação exponencial otimizada dos retornos históricos para prever a volatilidade. Isso implica que os retornos no dia $t$ são influenciados pelos retornos dos dias anteriores, com os retornos mais antigos recebendo menos peso que os mais recentes (Epaphra, 2017).

Esses modelos também fornecem uma dinâmica para a variação temporal condicional dos parâmetros de distribuição de variância, tentando capturar fenômenos como a autocorrelação nos retornos e nos retornos ao quadrado (Bollerslev, 1986). Ademais, a volatilidade incondicional depende de toda a amostra, enquanto as volatilidades condicionais ($\sigma_t$) são determinadas pelos parâmetros do modelo e pelas observações recentes de retornos (Francq e Zakoian, 2010).

A versão mais comum do modelo GARCH utiliza apenas uma defasagem, resultando no modelo GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = a + \omega X_{t-1}^2 + \zeta \sigma_{t-1}^2.$$

Este modelo, em particular, tornou-se amplamente utilizado na modelagem de séries temporais financeiras e é implementado na maioria dos pacotes de software de estatística e econometria (Ghalanos, 2023). O GARCH(1,1) é frequentemente preferido por economistas devido à sua implementação relativamente simples e à facilidade de lidar com a função de verossimilhança, especialmente considerando que os dados financeiros geralmente são coletados em intervalos discretos (Williams, 2011).

Nesse contexto, a volatilidade incondicional pode ser calculada de maneira semelhante ao modelo ARCH, utilizando as mesmas suposições. No modelo GARCH(1,1), a volatilidade incondicional é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{a}{1 - \omega - \zeta}.$$

Existem duas restrições principais impostas aos parâmetros no modelo GARCH(1,1) (Tsay, 2005):

1. Para garantir previsões de volatilidade positivas: $a, \omega, \zeta > 0$;

2. Para garantir a estacionariedade da covariância: $\omega + \zeta < 1$.

A variância incondicional torna-se infinita quando $\omega + \zeta = 1$ e indefinida quando $\omega + \zeta > 1$. Semelhante ao modelo ARCH, a restrição de estacionariedade não é necessária se o objetivo for apenas a previsão da volatilidade condicional, mas é essencial para prever a volatilidade incondicional (Tsay, 2005).

Dessarte, a utilização dos modelos GARCH representa um avanço na previsão de volatilidade em séries temporais financeiras, superando as limitações dos modelos ARCH ao incorporar a influência da volatilidade defasada, proporcionando uma melhor compreensão e previsão da volatilidade futura.

# 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, serão apresentados os critérios e procedimentos adotados para a seleção dos dados utilizados na análise da variabilidade dos retornos. Além disso, serão discutidos os métodos aplicados à previsão e avaliação de risco por meio do *Value at Risk* (VaR), com destaque para a propriedade de elicitabilidade, que visa aprimorar a precisão das previsões e a eficácia dos mecanismos de avaliação dos modelos preditivos. Conforme Gneiting (2011), a elicitabilidade é uma característica essencial em modelos preditivos, pois possibilita uma comparação direta e teoricamente fundamentada entre diferentes métodos de previsão de risco. No contexto deste estudo, essa abordagem justifica o uso da perda realizada exclusivamente para o VaR, uma vez que o *Expected Shortfall* não é plenamente elicitável. A perda realizada será empregada como método para avaliar e comparar as previsões de risco geradas ao longo da análise.

## 4.1 SELEÇÃO DE DADOS

Este estudo foca em três ações do índice Ibovespa: VALE3, ITUB4 e EQTL3, que foram escolhidas por representarem diferentes setores da economia brasileira: Materiais Básicos, Bancos e *Utilities*, respectivamente. A escolha desses ativos não apenas reflete sua importância no mercado de capitais brasileiro, mas também permite explorar as diferentes dinâmicas de risco e volatilidade em setores com características contrastantes. Dessa forma, a análise tem como objetivo testar a aderência do modelo de VaR em diferentes cenários econômicos, capturando a heterogeneidade de risco entre setores que exibem dinâmicas de volatilidade distintas.

A seleção dos ativos foi baseada em sua representatividade dentro dos respectivos setores e na relevância que possuem para o mercado financeiro brasileiro. O setor bancário, representado pela ITUB4, reflete um segmento de geração de valor perene, com impacto significativo em políticas econômicas e monetárias. O setor de Materiais Básicos, representado pela VALE3, é cíclico, com alta dependência de variáveis exógenas como os preços de commodities, enquanto o setor de *Utilities*, através da EQTL3, caracteriza-se por sua estabilidade e menor volatilidade, sendo frequentemente considerado um porto seguro em momentos de alta incerteza. Essa diversidade setorial permite uma avaliação abrangente das características de risco em condições normais de mercado e em períodos de maior instabilidade.

A VALE3 representa a Vale S.A., uma das maiores empresas de mineração do mundo, com foco na extração de minério de ferro e níquel. Como um pilar do setor de Materiais Básicos, a Vale desempenha um papel fundamental na economia global, especialmente em países dependentes de commodities. As oscilações nos preços de commodities, como o minério de ferro, impactam diretamente seu desempenho financeiro e, consequentemente, a volatilidade de suas ações e no setor como um todo. A escolha da VALE3 se justifica pela importância da Vale tanto para o mercado de capitais brasileiro quanto para a economia global, sendo um ativo amplamente negociado, o que proporciona liquidez e confiabilidade na análise dos dados, assim a VALE3 detêm uma alta relevância para representar a exposição ao risco atrelado a flutuações macroeconômicas e mudanças nas demandas globais no setor de materiais básicos brasileiro.

A ITUB4, ação preferencial do Itaú Unibanco, reflete o desempenho de um dos maiores bancos do Brasil e da América Latina. O setor bancário é um dos principais pilares de geração de valor perene, sensível a fatores como políticas monetárias, taxas de juros e crises financeiras. O Itaú é um ator chave nas finanças, crédito e investimentos, o que torna ITUB4 um ativo adequado para capturar o comportamento do risco no setor financeiro. A análise do VaR para ITUB4 permite capturar a dinâmica de risco de um setor intimamente ligado às condições econômicas locais, sendo também sensível às políticas econômicas e à regulação financeira. Dessa forma, o estudo do comportamento dessa ação é crucial para entender como o setor bancário reage a mudanças nos cenários macroeconômicos, seu impacto sobre a previsibilidade e volatilidade do setor bancário.

EQTL3 refere-se à Equatorial Energia S.A. responsável pela distribuição de energia elétrica no Brasil foi selecionada como representante do setor de *Utilities*, devido à sua estabilidade característica e menor volatilidade em comparação a setores mais cíclicos. O setor de utilidades é frequentemente considerado mais estável e previsível, devido à sua natureza regulada e à demanda inelástica por serviços essenciais, como eletricidade. No entanto, variações regulatórias e políticas governamentais podem influenciar os custos operacionais e tarifas, afetando a previsão de risco associada à EQTL3. A análise de EQTL3 em termos de VaR oferece um contraponto importante às ações mais voláteis, como mineração e bancos, com um setor tradicionalmente defensivo.

A comparação entre VALE3, ITUB4 e EQTL3 em um ambiente de previsão de risco se justifica pela necessidade de compreender como diferentes setores econômicos reagem a choques macroeconômicos e eventos específicos do período analisado. Essas ações, amplamente negociadas na B3, podem ser utilizadas como bons indicadores da volatilidade e risco de seus respectivos setores. Dessa forma, tornam-se elementos fundamentais para investidores interessados em medir o risco de seus portfólios.

A análise será conduzida com base nos log-retornos diários dos preços ajustados de mercado para os três ativos selecionados. Os log-retornos são utilizados para garantir a estacionariedade das séries temporais, uma característica fundamental para a modelagem de risco, conforme destacado por Daniélsson (2011). O período de estudo compreende os dados de 01/01/2018 a 01/01/2024, totalizando 1.486 observações por ação. Além disso, o período completo será dividido em dois subperíodos: o primeiro de 01/01/2018 a 31/12/2020, com 741 retornos, e o segundo de 01/01/2021 a 01/01/2024, com 745 retornos.

A divisão em dois períodos é crucial para a identificação de potenciais mudanças estruturais nos retornos das ações ao longo do tempo. O primeiro período, de 2018 a 2020, foi marcado por significativas instabilidades, como a pandemia de COVID-19, que impactou de maneira acentuada diversos setores, em especial os mais cíclicos, como mineração e finanças. O segundo período, de 2021 a 2024, reflete um processo de recuperação parcial, notadamente no setor de commodities, embora ainda revele vulnerabilidades em setores como o bancário, em função de mudanças políticas e econômicas. Dessarte, a comparação entre esses períodos permite uma compreensão mais detalhada dos impactos diferenciados de choques econômicos e eventos específicos sobre os diversos setores da economia. Ademais, a análise dos períodos fracionados oferece perspectivas sobre a resiliência e a capacidade de recuperação dos setores após crises significativas, o que é fundamental para a projeção de riscos em cenários futuros.

A previsão de risco será realizada com base no *Value at Risk*, utilizando diferentes níveis de significância ($\alpha$) e janelas rolantes ($W_q$) para capturar as dinâmicas de risco ao longo do tempo. Serão adotados dois níveis de significância, $\alpha = 1\%$, conforme recomendado pelo Comitê da Basileia (2013), e $\alpha = 5\%$, amplamente utilizado na literatura (Scolaro e Müller, 2024). Quanto às janelas rolantes, serão aplicados três tamanhos: 250 e 500 dias para todos os períodos, e uma janela adicional de 1000 dias para o período total, conforme recomendado por Müller et al. (2023). As previsões de VaR serão feitas utilizando dados fora da amostra, com o objetivo de testar a robustez dos modelos em diferentes cenários. O uso de diferentes níveis de significância e janelas rolantes oferece maior flexibilidade na avaliação do risco, permitindo uma análise mais robusta diante de diferentes contextos econômicos e setoriais.

Diferentes tamanhos de janela representam um compromisso entre estabilidade e reatividade nas previsões de VaR. A aplicação de janelas maiores, como a de 1000 dias, permite capturar uma visão mais estável do risco, embora possa demorar mais para refletir mudanças recentes no ambiente econômico. Por outro lado, janelas menores, como a de 250 dias, são mais responsivas a variações bruscas, mas podem ser mais sensíveis a ruídos e observações extremas. Essa combinação de diferentes tamanhos de janela, juntamente com os níveis de significância variados, proporciona uma avaliação robusta do risco para cada setor em diferentes contextos econômicos, conforme observado por Daniélsson (2011).

## 4.2 MODELO AR-GARCH

A volatilidade condicional $\sigma_t$ é um dos principais focos na modelagem de séries temporais financeiras, embora a média também exija consideração. Normalmente, é mais eficiente separar a estimação da média da estimação da volatilidade. Em decorrência disso, muitos modelos de volatilidade utilizam retornos ajustados pela média (Tsay, 2005).

Para a análise univariada e a estimação de medidas de risco, consideramos o modelo AR(p)-GARCH($L_1$, $L_2$) (Modelo Autoregressivo Generalizado Autorregressivo Condicionalmente Heterocedástico). A média condicional é frequentemente modelada por um modelo autoregressivo (AR) ou por um modelo ARMA, enquanto a variância condicional do ruído branco não se mantém constante, diferenciando-se dos modelos tradicionais que assumem erros independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) (Li et al., 2002).

Neste contexto, adotamos uma especificação AR(1) para a média condicional e um modelo GARCH(1,1) para a variância condicional. Garcia-Jorcano e Novales (2021) explicam que os retornos não apresentam correlação serial, sendo o modelo AR(1) suficiente para modelar $\mu_t$ e produzir inovações não correlacionadas serialmente para todos os ativos. A escolha do GARCH(1,1) é justificada por sua competitividade segundo o critério de informação de Akaike (AIC) e por ser uma configuração comum para a previsão de risco (Müller et al., 2022).

Assim, nossa análise adota o modelo AR(1)-GARCH(1,1). Essas escolhas de defasagens iguais a um, se mostram competitivas com base nos critérios de *backtesting* para séries temporais e são frequentemente utilizadas na análise de previsão de risco, conforme demonstrado em diversos estudos (Righi e Ceretta, 2015; Escanciano e Olmo, 2011; Telmoudi et al., 2016; Guo, 2021). A literatura revela consistentemente a superioridade do modelo AR(1)-GARCH(1,1) em comparação com outros modelos univariados de diferentes defasagens (Troster et al., 2019; Garcia-Jorcano e Novales, 2021).

A especificação do modelo AR(1)-GARCH(1,1) é expressa pelas seguintes equações (Scolaro e Müller, 2024):

$$X_{i,t} = \phi_0 + \phi_1 X_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} = \mu_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \tag{4.1}$$

$$\sigma_{i,t}^2 = a + \omega_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 + \zeta_1 \sigma_{i,t-1}^2, \tag{4.2}$$

$$\varepsilon_{i,t} = \sigma_{i,t} Z_{i,t}. \tag{4.3}$$

Aqui, $Z_{i,t} \sim F_k(\psi)$ é um processo de ruído branco com distribuição $F_k(\psi)$. A letra $k$ denota as distribuições consideradas, e $\psi$ é um vetor de parâmetros que inclui média zero, variância unitária e parâmetros adicionais que variam conforme a distribuição de probabilidade. As variáveis $\sigma_{i,t}^2$ e $\varepsilon_{i,t}$ representam a variância condicional e o termo de erro do ativo $i$ no tempo $t$. Os parâmetros $\phi_0$ e $\phi_1$ são referentes ao modelo AR, enquanto $a$, $\omega_1$ e $\zeta_1$ pertencem ao modelo GARCH.

Após a estimação dos parâmetros condicionais por meio da análise univariada, utilizando a média ($\mu_{i,t+1}$) e o desvio padrão ($\sigma_{i,t+1}$) do próximo período, podemos prever o risco com uma previsão de um passo à frente do $\text{VaR}_t^\alpha$ para o período $t+1$:

$$\text{VaR}_t^\alpha = -\mu_{i,t+1} + \text{VaR}^\alpha(Z_{t+1}^k). \tag{4.4}$$

Portanto, os valores previstos dependem significativamente da distribuição do modelo estimado em relação à distribuição de probabilidade atual $\text{VaR}^\alpha(Z_{t+1}^k)$, que possui média zero e variância unitária, distribuídos segundo $F_k(\psi)$.

As distribuições consideradas neste estudo são amplamente utilizadas na academia. Incluímos a análise da distribuição normal (norm) e da t de Student (std), bem como suas versões assimétricas: normal assimétrica (snorm) e t de Student assimétrica (sstd), para capturar tanto a simetria quanto a assimetria, além da presença de caudas pesadas nos retornos. Para uma explicação mais detalhada e representações visuais dessas distribuições, recomenda-se consultar Ghalanos (2023). As estimativas foram obtidas utilizando o pacote `rugarch` na linguagem de programação R.Essa diversidade de distribuições se baseia nas conclusões de Garcia-Jorcano e Novales (2021), que indicam que a distribuição de probabilidade exerce maior influência na qualidade da previsão do que o próprio modelo de volatilidade condicional. O estudo também sugere que a assimetria e a forma da distribuição de probabilidade são mais cruciais do que a incorporação de efeitos de alavancagem da volatilidade no desempenho do VaR (Garcia-Jorcano e Novales, 2021).

Portanto, ao empregar o modelo AR-GARCH, a flexibilidade na escolha da distribuição do erro é fundamental para aprimorar a precisão das previsões de risco. A separação entre a estimação da média e da volatilidade, juntamente com a consideração de diferentes distribuições de erro, enriquece a precisão e a relevância das previsões de risco, oferecendo um ferramental eficaz para modelar a volatilidade condicional e fundamentar as previsões de risco na literatura acadêmica. Por outro lado, os métodos de previsão de risco devem considerar não apenas a precisão das previsões, mas também a capacidade de elicitação, que permite a comparação e escolha do modelo mais adequado com base nos parâmetros escolhidos na modelagem de risco (Brehmer, 2017).

## 4.3 ELICITABILIDADE E PERDA REALIZADA

Ao consideramos um tomador de decisão que necessita de informações sobre uma variável aleatória $X$ cuja distribuição é desconhecida, para obter essas informações, ele consulta diversos previsores, que formulam suas previsões baseadas nas melhores estimativas que possuem sobre a distribuição de $X$. Após a avaliação da qualidade dessas previsões, os previsores recebem recompensas financeiras. Enquanto os previsores buscam maximizar seus ganhos esperados, o tomador de decisão almeja obter a previsão mais precisa (Brehmer, 2017). A incerteza é modelada por meio dessa variável aleatória $X$, que possui uma distribuição desconhecida. As decisões são orientadas por previsões de uma característica real de $X$ e, para avaliar a precisão dessas previsões, utiliza-se uma função de pontuação $S$. Os $n$ previsores fornecem relatórios $R_1,\ldots,R_n$, que são comparados a uma realização $x$ de $X$ utilizando a função de pontuação $S$ (Brehmer, 2017).. A escolha da função de pontuação é responsabilidade do tomador de decisão e determina quais previsões são consideradas mais precisas. Se $S(R_j,x) < S(R_i,x)$, a previsão $R_j$ é considerada superior à $R_i$, resultando em uma recompensa maior para o previsor $j$ em relação ao previsor $i$. Assim, os previsores buscam minimizar sua pontuação esperada para maximizar seu ganho esperado. Nesse contexto, o conceito de elicitabilidade torna-se crucial para essa avaliação (Brehmer, 2017).

Logo, um funcional é considerado elicitável se existe uma função de pontuação que garante que a previsão correta do funcional seja o único minimizador da pontuação esperada. Ademais, a elicitabilidade de um funcional permite a comparação de previsões concorrentes e a classificação delas com base em suas pontuações observadas (Fissler e Ziegel, 2015).

Essa propriedade é particularmente relevante na validação de estimativas de medidas de risco (Gneiting, 2011), pois facilita a comparação direta entre diferentes procedimentos de previsão de risco utilizando funções de pontuação (Müller et al., 2023). Contudo, alguns funcionais importantes, como a variância, a moda ou o *Expected Shortfall*, não possuem a propriedade de elicitabilidade, enquanto o *Value at Risk* satisfaz essa condição (Gneiting, 2011). Dado que o ES é deficiente em relação a essa propriedade estatística fundamental para a comparação de modelos de previsão, a estimação e a previsão de risco neste estudo serão realizadas exclusivamente pelo VaR. O *Value at Risk* além de ser elicitável, apresenta outras propriedades desejáveis para modelos de previsão de risco univariados, como a robustez dos resultados.

Além de determinar se um funcional é elicitável, é fundamental identificar a classe de funções de pontuação estritamente consistentes para esse funcional ou, ao menos, caracterizar as condições necessárias e suficientes para a consistência estrita de uma função de pontuação (Gneiting, 2011; Fissler e Ziegel, 2015).

Dessarte, as funções de pontuação são mapeamentos $S : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ que satisfazem os seguintes requisitos para todos $R, x \in \mathbb{R}$:

1. $S(R,x) = 0$ se, e somente se, $R = x$;
2. $x \mapsto S(R,x)$ é não decrescente para $x > R$ e não crescente para $x < R$;
3. $S(R,x)$ é contínua em $x$.

Essas funções de pontuação podem ser interpretadas como "funções de perda". A maioria das funções de perda é uma transformação positiva de $|R_i - x|$. A perda zero ocorre se, e somente se, não há erro ($R_i = x$), e a perda aumenta com a distância entre $R$ e $x$, variando continuamente em relação ao segundo argumento (Müller et al., 2023).

Avaliar previsões pontuais concorrentes é comum em termos de uma função de perda, como o erro quadrático ou o erro absoluto. Essas funções penalizam a previsão com base no valor real $S(R_i, x)$, incentivando os previsores a minimizar sua perda esperada $\mathbb{E}[S(R_i, x)]$ (Gneiting, 2011).

Desse modo, para que uma medida de risco $\rho$ seja considerada elicitável, deve existir uma função de pontuação $S_\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ que satisfaça a seguinte relação:

$$\rho(R_i) = -\arg\min_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[S_\rho(R_i, x)], \forall\, R_i \in \mathbb{Z}, \tag{4.5}$$

nesse contexto, a função $S_\rho$ é considerada consistente em relação a $\rho$ (Schlag e Weele, 2015).

Ao passo que, de acordo com Fissler e Ziegel (2021), o VaR é elicitável sob a seguinte pontuação:

$$S^{\alpha}_{\text{VaR}}(R, x) = \alpha(R_i - x)^+ + (1 - \alpha)(R_i - x)^-. \tag{4.6}$$

Quando o risco de uma posição $R_i$ deve ser medido por uma medida de risco $\rho$, como o VaR, é essencial selecionar um procedimento que forneça uma estimativa precisa de $\rho(R)$. Este processo geralmente envolve a validação do modelo ou do procedimento de estimativa (Brehmer, 2017).

A elicitabilidade desempenha um papel central na comparação de previsões. Um *backtest* tradicional é projetado para testar a hipótese de que o procedimento de medição de risco é adequado. Se a hipótese nula for rejeitada, o gestor de risco deve reconsiderar a abordagem de medição; caso contrário, o procedimento permanece inalterado. Na comparação de duas previsões diferentes para $\rho(R)$, a elicitabilidade torna-se essencial, um processo conhecido como *backtesting* comparativo. Esse método é especialmente relevante na regulação financeira, onde um *backtest* comparativo pode ser utilizado para comparar o procedimento de medição de risco de uma instituição financeira com um procedimento de referência elaborado por um regulador (Brehmer, 2017).

Por fim, são avaliados os desempenhos de cada distribuição e método na previsão da medida de risco *Value at Risk* pela perda realizada, conforme proposto por Scolaro e Müller (2024):

$$\mathbf{L}_{\text{VaR}_k}(R) = (T - W_q)^{-1} \sum_{q=1}^{T-W_q} S_{\text{VaR}_\alpha}(\rho_{kW_q}(R), R_{qW_q+1}), \tag{4.7}$$

onde $T$ é ó número de retornos utilizados na estimação, $W_q$ é a janela rolante, $S_{\text{VaR}_\alpha}$ representa as funções de pontuação para o VaR, $\rho_{kW_q}(R)$ e $R_{qW_q+1}$ são respectivamente, a previsão de risco e o retorno previsto feito pelo modelo AR(1) - GARCH(1,1).

Em que, há uma relação inversa entre a perda realizada e a precisão da medida de risco, em que uma perda maior indica um desempenho pior na previsão de risco. A elicitabilidade das funções de pontuação do VaR possibilita a verificação e a comparação de previsões sem a necessidade de *backtests* tradicionais, onde uma função de pontuação mais baixa indica menor erro de previsão (Ziegel, 2016; Müller et al., 2022).

# 5 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Primeiro, são apresentados os resultados da análise descritiva dos retornos das ações VALE3, ITUB4 e EQTL3 durante o período de 2018 a 2024, além da divisão em dois períodos fracionados: 2018 a 2021 e 2021 a 2024. A análise se baseia em medidas estatísticas descritivas como mínimo, máximo, média, mediana, desvio padrão, assimetria e curtose. Essas estatísticas são importantes para entender o comportamento dos retornos das ações e servirão de base para a subsequente previsão de risco via *Value at Risk*.

TABELA 1 – Estatísticas Descritivas dos Retornos das Ações (01/01/2018 a 01/01/2024)

| | Mínimo | Máximo | Média | Mediana | Des. Padrão | Assimetria | Curtose |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VALE3 | -28.18 | 19.36 | 0.07 | 0.04 | 2.47 | -0.72 | 17.50 |
| ITUB4 | -19.80 | 10.49 | 0.02 | 0.00 | 2.05 | -0.59 | 7.78 |
| EQTL3 | -11.47 | 8.06 | 0.07 | 0.04 | 1.82 | -0.26 | 4.15 |

**Fonte:** Elaborada pelo autor.

A Tabela 1 apresenta as estatísticas descritivas dos retornos das três ações ao longo do período do início de 2018 ao início de 2024. Os resultados gerais indicam que a VALE3 apresentou o maior intervalo entre valores mínimos e máximos, refletindo a alta volatilidade associada ao setor de commodities. A curtose de 17,50 e a assimetria negativa sugerem a presença de retornos extremos negativos, o que pode ser atribuído a choques globais, como a queda nos preços de commodities e o impacto do desastre de Brumadinho em 2019. ITUB4, com uma assimetria negativa (-0.59) e curtose elevada (7.78), também revela a ocorrência de eventos extremos, refletindo a volatilidade do setor bancário durante o período, influenciado pelas mudanças nas políticas monetárias e a pandemia de COVID-19. Já a EQTL3 apresenta menor volatilidade (desvio padrão de 1.82) e menor curtose (4.15), refletindo a natureza mais estável do setor de *Utilities*, que é tradicionalmente menos cíclico.

A Tabela 2 apresenta as estatísticas descritivas do primeiro período fracionado, do início de 2018 ao final de 2020. A VALE3, no período inicial, apresentou uma assimetria ainda mais negativa (-1.18) e curtose elevada (21.59), indicando eventos extremos mais frequentes. A ITUB4, por outro lado, apresentou uma assimetria próxima de zero (-0.05), o que sugere uma distribuição de retornos mais simétrica durante este período, refletindo uma certa estabilidade no setor bancário antes do impacto mais profundo da pandemia. A EQTL3, novamente, apresentou uma volatilidade moderada, confirmando seu perfil defensivo.

A Tabela 3 apresenta as estatísticas descritivas para o período do início de 2021 ao início de 2024. Durante o segundo período fracionado, a VALE3 apresentou uma volatilidade reduzida (desvio padrão de 2.13) e uma assimetria positiva (0.29), sugerindo

TABELA 2 – Estatísticas Descritivas dos Retornos das Ações (01/01/2018 a 31/12/2020)

| | Mínimo | Máximo | Média | Mediana | Des. Padrão | Assimetria | Curtose |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VALE3 | -28.18 | 19.36 | 0.11 | 0.06 | 2.77 | -1.18 | 21.59 |
| ITUB4 | -10.34 | 10.49 | 0.03 | 0.00 | 2.25 | -0.05 | 2.50 |
| EQTL3 | -11.48 | 7.84 | 0.08 | 0.07 | 2.00 | -0.64 | 4.69 |

**Fonte:** Elaborada pelo autor.

uma recuperação da empresa após o aumento dos preços das commodities. ITUB4 mostrou uma assimetria negativa elevada (-1.56) e alta curtose (18.31), indicando eventos extremos negativos, o que pode estar relacionado aos impactos econômicos da pandemia de COVID-19 e às políticas monetárias restritivas. EQTL3, por sua vez, continuou a apresentar a menor volatilidade (desvio padrão de 1.62) e uma assimetria positiva (0.44), confirmando seu caráter mais defensivo e estável.

TABELA 3 – Estatísticas Descritivas dos Retornos das Ações (01/01/2021 a 01/01/2024)

| | Mínimo | Máximo | Média | Mediana | Des. Padrão | Assimetria | Curtose |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VALE3 | -7.89 | 9.89 | 0.02 | 0.01 | 2.13 | 0.29 | 1.31 |
| ITUB4 | -19.80 | 7.94 | 0.03 | 0.00 | 1.84 | -1.56 | 18.31 |
| EQTL3 | -5.16 | 8.06 | 0.07 | 0.00 | 1.62 | 0.44 | 1.94 |

**Fonte:** Elaborada pelo autor.

Comparando as tabelas dos três períodos, algumas diferenças e semelhanças podem ser observadas. A VALE3 apresentou maior volatilidade no período de 2018 a 2021, o que pode ser explicado pelos eventos adversos, como o desastre de Brumadinho e a volatilidade nas commodities. A partir de 2021, a volatilidade da VALE3 diminuiu, indicando uma recuperação e maior estabilidade nos preços das commodities. Já ITUB4, que apresentou uma assimetria relativamente estável no primeiro período, sofreu maior volatilidade e eventos extremos negativos no segundo período, especialmente devido à pandemia e ao impacto das políticas econômicas no setor bancário. Por outro lado, a EQTL3 manteve um comportamento relativamente estável ao longo de ambos os períodos, refletindo a natureza previsível e menos volátil do setor de *Utilities*.

Após a estimativa do *Value at Risk* utilizando as distribuições estatísticas normal, normal assimétrica, t de Student e t de Student assimétrica, seguimos para a previsão do risco do VaR, cujos dados estão apresentados no Anexo A. As Tabelas 7, 8 e 9 apresentam as estatísticas descritivas das previsões de risco do VaR para as ações VALE3, ITUB4 e EQTL3, considerando níveis de significância de 1% e 5% nas janelas rolantes de $W_1 = 250$, $W_2 = 500$ e $W_3 = 1000$ para o período total, além das janelas móveis de 250 e 500 dias úteis em ambos os períodos fracionados. A análise da previsão de risco concentrar-se-á nos dados referentes às janelas rolantes intermediárias ($W_2 = 500$), uma vez que estas cobrem os três períodos analisados e ambos os níveis de significância. [1]

[1] Essa escolha visa evitar que a análise descritiva de risco se torne excessivamente extensa e repetitiva;

O valor médio do VaR indica o quanto de perda máxima é esperada em determinado intervalo de confiança, ou seja, a perda que não será ultrapassada com 99% ou 95% de certeza. Ao analisar as ações para o nível de 1%, o valor médio do VaR é sensivelmente maior para a VALE3 do que para ITUB4 e EQTL3, o que pode ser atribuído à maior volatilidade observada nesta ação, uma vez que o setor de commodities é altamente suscetível às variações de preços internacionais e eventos geopolíticos. Essa maior sensibilidade a eventos exógenos torna o VaR da VALE3 mais conservador, refletindo os riscos de grandes variações negativas nos retornos. Comparativamente, os valores médios do VaR de ITUB4 e EQTL3 são menores, o que reflete a maior estabilidade relativa dessas empresas em seus setores. Enquanto o setor bancário (ITUB4) lida com riscos de crédito e política monetária, o setor de energia elétrica (EQTL3) é mais regulado e historicamente menos volátil, o que resulta em previsões de VaR mais modestas.

A diferença entre as previsões do VaR entre as três ações torna-se relevante quando se considera o perfil de risco dos investidores. Aqueles com menor apetite por risco podem preferir ações como EQTL3, que exibem um VaR relativamente mais baixo, enquanto investidores com maior tolerância a perdas podem estar mais inclinados a alocar em VALE3, buscando retornos mais elevados apesar de previsões de perdas maiores.

O desvio padrão do VaR nos dá uma ideia da variabilidade das perdas esperadas. Notamos que a VALE3 apresenta o maior desvio padrão para os níveis de 1% e 5%, refletindo não apenas a maior média de VaR, mas também a instabilidade maior associada às perdas extremas. Esse comportamento é consistente com a natureza volátil do setor de mineração e commodities. EQTL3, por outro lado, apresenta o menor desvio padrão em ambos os níveis de significância, o que indica uma previsão de perdas esperadas mais estável, reforçando a percepção de que ações desse ativo possuem menor variação nas perdas extremas.

Esse contraste é relevante para decisões de alocação de capital, já que investidores podem optar por ações com menor desvio padrão (como EQTL3), quando buscam uma previsibilidade maior em suas carteiras, ou podem preferir ações com maior desvio (como VALE3) se estiverem dispostos a aceitar variações maiores em troca de retornos potencialmente mais altos.

A assimetria e curtose são particularmente úteis para avaliar a forma da distribuição das perdas previstas. Valores elevados de curtose indicam caudas mais pesadas, enquanto a assimetria nos revela a direção da inclinação da distribuição. Para VALE3, observamos uma assimetria negativa acentuada e uma curtose elevada, o que sugere

no entanto, é importante ressaltar que previsões também foram realizadas para as demais janelas rolantes $W_1 = 250$ nos três períodos e $W_3 = 1000$ para o período total, conforme ilustrado nas Tabelas 7, 8 e 9.

a presença de eventos de perdas extremas com mais frequência do que o esperado em uma distribuição normal. Isso é consistente com o comportamento de ativos altamente voláteis, onde o risco de grandes quedas é uma preocupação central. Para ITUB4 e EQTL3, ambas apresentam assimetrias menos pronunciadas e níveis de curtose mais próximos de uma distribuição normal. Isso sugere que as previsões de VaR para essas ações tendem a estar menos sujeitas a eventos extremos, tornando-as mais previsíveis em termos de perdas potenciais.

A persistência de padrões semelhantes entre os períodos também pode ser observada em relação à diferença entre $VaR^{1\%}$ e $VaR^{5\%}$. Independentemente do período ou ação, o $VaR^{1\%}$ sempre apresenta valores médios maiores, andando em concordância com a literatura e refletindo a maior exigência de capital para cobrir perdas em eventos extremos.

No período total (Tabela 7), observamos uma clara distinção entre as previsões de risco com relação à significância de 1% e 5%. Para VALE3, a diferença entre o VaR a 1% e 5% é substancialmente maior do que para ITUB4 e EQTL3, indicando que, em cenários extremos, a ação da VALE3 apresenta uma maior probabilidade de perdas severas. Isso confirma a relevância de analisar essa ação com maior cuidado, especialmente em situações de crise ou alta volatilidade. Em ITUB4 e EQTL3, a diferença entre os níveis de significância é menor, o que indica uma transição mais suave entre cenários menos e mais extremos de perdas. Esse padrão é mais consistente com ações de setores que têm riscos mais controláveis e previsíveis, como bancos e utilidades.Além disso, as distribuições std e sstd apresentam assimetrias e curtoses mais elevadas, sugerindo a presença de caudas mais largas, o que indica maior probabilidade de eventos extremos, principalmente para o $VaR^{1\%}$. Comparando as três ações, VALE3 mostra maior risco médio para ambos os níveis de significância, seguido por ITUB4 e EQTL3, o que pode ser explicado pela volatilidade histórica mais alta de VALE3. Os valores de assimetria e curtose também variam significativamente, com VALE3 apresentando as distribuições mais assimétricas e com caudas mais longas, sugerindo maior propensão a grandes variações no preço das ações.

No primeiro período fracionado (Tabela 8), as previsões de risco para VALE3 e ITUB4 mostram um aumento geral na média dos valores de $VaR^{1\%}$ e $VaR^{5\%}$, quando comparados ao período total. Esse comportamento pode ser atribuído à maior incerteza e volatilidade econômica decorrente do contexto global instável, que inclui o início da pandemia de COVID-19 em 2020. Isso é corroborado pela elevação dos desvios-padrão e pela maior assimetria e curtose nas distribuições std e sstd, que refletem um aumento nas caudas, sugerindo maior exposição a choques extremos. No entanto, a ação EQTL3 parece ter sido menos impactada, com variações menores na média do $VaR$ em relação ao período total. Isso pode ser justificado pela menor volatilidade do setor elétrico durante o período, que tradicionalmente apresenta maior estabilidade.

No segundo período fracionado (Tabela 9), os valores médios de $VaR$ para todas as ações e distribuições caem significativamente em comparação com o período fracionado anterior. Esse comportamento reflete uma estabilização nos mercados após os picos de volatilidade observados durante o primeiro fracionado. As previsões de risco para VALE3 e ITUB4 mostram uma redução substancial na média dos valores de $VaR$, acompanhada de menor assimetria e curtose, indicando uma diminuição na probabilidade de eventos extremos. As distribuição normal assimétrica e t-student assimétrica continuam a mostrar maiores valores de assimetria, mas de maneira mais moderada. A ação EQTL3 mantém um comportamento similar ao período fracionado anterior, com pouca variação nas médias e desvios-padrão, indicando a estabilidade persistente da ação no período pós-pandemia. O comportamento da ação VALE3, que apresenta uma leve assimetria negativa, também sugere uma redução nos riscos extremos.

Apesar da utilização de uma janela rolante fixa ($W_2 = 500$), os resultados mostram que a variação entre os períodos não é apenas uma questão de tamanho da amostra, mas também das condições econômicas e de mercado. A comparação entre o período total e os períodos fracionados revela uma diminuição nas previsões de risco no segundo fracionado, especialmente para as distribuições mais conservadoras (std e sstd), o que reflete a recuperação e estabilização dos mercados após o período de maior volatilidade.

Entre as distribuições de probabilidade, a distribuição t-Student ajustada (sstd) tende a capturar melhor as variações nas caudas no periodo total e no periodo mais recente das tabelas 7 e 5, explicando melhor momentos com menor volatilidade. No entanto, as distribuições normais (norm e snorm) apresentam previsões mais precisas nos momentos de alta volatilidade, como observado no primeiro período fracionado da Tabela 8.

Em termos gerais, o uso de uma janela rolante fixa garante que as previsões de risco considerem a mesma quantidade de observações ao longo do tempo, mas as variações nas estatísticas descritivas evidenciam que as condições de mercado afetam diretamente os resultados. O período mais estável (2021-2024) resulta em menores previsões de risco, enquanto o período de maior incerteza (2018-2020) apresenta previsões mais conservadoras e com maior dispersão. Donde é visto que a VALE3, com seus valores médios e desvios padrão mais altos, reflete uma maior exposição a riscos de mercado, enquanto ITUB4 e EQTL3 se mostram opções mais conservadoras. A análise dos níveis de significância de 1% e 5% reforça essas conclusões, com VALE3 mostrando maior sensibilidade a eventos extremos.

Para realizar uma avaliação mais detalhada dos modelos AR(1)-GARCH(1,1) na previsão de risco, as Tabelas 4, 5 e 6 apresentam as estatísticas de perdas realizadas, conforme as funções de score associadas às previsões de VaR para as ações VALE3, ITUB4 e EQTL3. Essas tabelas abrangem o período total de 01/01/2018 a 01/01/2024, assim como os períodos fracionados de 01/01/2018 a 31/12/2020 e de 01/01/2021 a 01/01/2024, respectivamente, proporcionando uma análise comparativa da precisão dos modelos ao longo do tempo.

TABELA 4 – Perda realizada do $VaR_{t+1}^{\alpha}$ prevista para os retornos das ações VALE3, ITUB4 e EQTL3. Considerando o período total de 01/01/2018 a 01/01/2024.

| | VALE3-norm | VALE3-snorm | VALE3-std | VALE3-sstd |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 9.78 | 9.96 | **9.70** | 9.75 |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | 26.71 | 27.06 | 26.57 | **26.01** |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | 8.16 | **8.10** | 8.19 | 8.26 |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 25.39 | 25.67 | 25.23 | **24.94** |
| $\alpha$ = 1% e $W_3 = 1000$ | **5.68** | 6.09 | 5.73 | 5.86 |
| $\alpha$ = 5% e $W_3 = 1000$ | 21.27 | 21.28 | 21.28 | **21.21** |
| | ITUB4-norm | ITUB4-snorm | ITUB4-std | ITUB4-sstd |
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 7.15 | 7.43 | 7.25 | **7.09** |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | 21.69 | 21.63 | 21.46 | **21.14** |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | **7.67** | 7.94 | 7.68 | **7.67** |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 22.96 | 23.07 | 22.72 | **22.53** |
| $\alpha$ = 1% e $W_3 = 1000$ | 4.47 | 4.96 | **4.41** | 4.52 |
| $\alpha$ = 5% e $W_3 = 1000$ | 16.76 | 16.61 | 16.46 | **16.22** |
| | EQTL3-norm | EQTL3-snorm | EQTL3-std | EQTL3-sstd |
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 5.48 | **5.45** | 5.54 | 5.54 |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | **18.97** | 19.02 | 19.08 | 18.98 |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | **5.81** | 5.93 | 5.90 | 5.91 |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 19.81 | 19.96 | 19.85 | **19.80** |
| $\alpha$ = 1% e $W_3 = 1000$ | **4.72** | 4.75 | **4.72** | 4.75 |
| $\alpha$ = 5% e $W_3 = 1000$ | 16.85 | **16.72** | 16.79 | **16.72** |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Para o período total (Tabela 4), as distribuições t de Student e t de Student assimétrica demonstram desempenho superior em todas as ações, destacando-se como os melhores modelos para a previsão de risco com o AR(1)-GARCH(1,1). Isso ocorre principalmente em cenários que variam os níveis de significância e as janelas rolantes. Esse resultado sublinha a importância de capturar assimetrias e caudas pesadas em um período de maior volume de dados, caracterizado por uma volatilidade de mercado instável. Um destaque adicional é a janela rolante mais ampla, $W_3 = 1000$ e cenário mais extremo de $\alpha = 1\%$, a distribuição normal apresentou os melhores desempenhos para VALE3 e EQTL3. Esse resultado sugere que, ao incluir mais observações na amostra em um cenário onde a menos flexíblidade para riscos, o comportamento dessas ações se aproxima mais de retornos médios de risco, com menor impacto das assimetrias. No entanto, ao se considerar o nível de significância de $\alpha = 5\%$, a distribuição sstd prevalece na maioria dos casos, exceto em um, sugerindo que, para previsões menos extremas, a inclusão de assimetrias pode capturar melhor a volatilidade do mercado.

No primeiro período fracionado (Tabela 5), que corresponde ao início da pandemia, momento de maior volatilidade na análise, os resultados são notáveis. Para a ação ITUB4, a distribuição normal assimétrica se destacou em todos os cenários, indicando que, em um ambiente de risco elevado, a média de risco não apresentou variações significativas, sendo melhor modelada por uma distribuição normal com assimetria, especialmente para o setor bancário. Resultados semelhantes foram observados para a EQTL3, com as distribuições normal e normal assimétrica demonstrando o melhor desempenho. Por outro lado, para a VALE3, inserida em um setor notoriamente mais volátil, modelos que capturam caudas mais gordas apresentaram os melhores *scores*, refletindo o comportamento de maior volatilidade de risco nesse período.

TABELA 5 – Perda realizada do $VaR^{\alpha}_{t+1}$ prevista para os retornos das ações VALE3, ITUB4 e EQTL3. Considerando o período fracionado entre 01/01/2018 a 31/12/2020.

| | VALE3-norm | VALE3-snorm | VALE3-std | VALE3-sstd |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 14.79 | 15.45 | **14.53** | 14.56 |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | 33.47 | 34.47 | 32.89 | **32.10** |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | 13.91 | **13.46** | 13.75 | 13.75 |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 35.67 | 37.17 | 34.66 | **34.40** |
| | ITUB4-norm | ITUB4-snorm | ITUB4-std | ITUB4-sstd |
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 6.83 | **6.67** | 6.84 | 6.81 |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | 23.06 | **22.87** | 23.06 | 23.07 |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | 8.98 | **8.15** | 9.21 | 9.08 |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 29.48 | **29.38** | 29.65 | 29.60 |
| | EQTL3-norm | EQTL3-snorm | EQTL3-std | EQTL3-sstd |
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 6.73 | **6.62** | 6.80 | 6.66 |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | **21.99** | 22.10 | 22.05 | **21.99** |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | 9.53 | **9.10** | 9.60 | 9.53 |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | **27.99** | 28.53 | 28.05 | 28.10 |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

No segundo período fracionado (Tabela 6), que corresponde à fase de recuperação da pandemia, observa-se uma redução consistente no risco de mercado, evidenciada pela queda acentuada das perdas realizadas em comparação ao primeiro período fracionado. Essa diminuição indica que o mercado tornou-se menos arriscado, com uma menor probabilidade de ocorrência de perdas extremas conforme indicado pelo VaR.

Além disso, similarmente ao período total, as distribuições t de Student e, em especial, a t de Student assimétrica, apresentam o melhor desempenho na maioria dos cenários analisados, registrando as menores perdas realizadas. Isso é especialmente evidente para as ações VALE3 e ITUB4, bem como para EQTL3 quando condicionada à janela rolante $W_2 = 500$. Em todos esses casos, os modelos mais adequados pertencem a essas distribuições, sugerindo que, em períodos recentes e com janelas rolantes mais extensas e precisas, que incorporam mais informações, essas distribuições são mais eficazes para capturar assimetrias e volatilidades do mercado em relação ao risco.

A menor perda realizada associada à distribuição $std$ pode ser justificada pela sua capacidade de captar volatilidades moderadas de forma eficaz, enquanto a distribuição $sstd$ parece ser mais eficiente para ajustar picos de volatilidade, especialmente em horizontes temporais mais longos. Isso reforça a relevância dessas distribuições na modelagem de risco durante períodos de mercado mais calmos, porém com potencial para eventos de volatilidade significativa.

TABELA 6 – Perda realizada do $VaR^{\alpha}_{t+1}$ prevista para os retornos das ações VALE3, ITUB4 e EQTL3. Considerando o período fracionado entre 01/01/2021 a 01/01/2024.

| | VALE3-norm | VALE3-snorm | VALE3-std | VALE3-sstd |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 10.90 | 11.08 | 10.77 | **10.73** |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | 28.78 | 28.91 | 28.55 | **28.36** |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | 8.55 | 8.58 | **8.50** | 8.68 |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 24.88 | 24.96 | 24.83 | **24.67** |
| | ITUB4-norm | ITUB4-snorm | ITUB4-std | ITUB4-sstd |
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | 4.67 | 5.27 | **4.44** | 4.68 |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | 17.12 | 17.07 | 16.28 | **15.97** |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | 4.01 | 4.86 | **3.92** | 4.28 |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 14.92 | 15.01 | 14.83 | **14.53** |
| | EQTL3-norm | EQTL3-snorm | EQTL3-std | EQTL3-sstd |
| $\alpha$ = 1% e $W_1 = 250$ | **4.69** | 4.83 | 4.75 | 4.86 |
| $\alpha$ = 5% e $W_1 = 250$ | **15.71** | 15.97 | 15.78 | 15.97 |
| $\alpha$ = 1% e $W_2 = 500$ | 4.87 | 5.01 | 4.89 | **4.82** |
| $\alpha$ = 5% e $W_2 = 500$ | 16.63 | 16.72 | 16.71 | **16.52** |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

De modo geral, a VALE3 registra os maiores valores de perda realizada, evidenciando um maior risco associado a essa ação, bem como, demonstra maior dependência de distribuições assimétricas em períodos mais recentes. Por ser uma ação ligada a commodities, está mais sujeita a choques externos, o que resulta em uma maior sensibilidade a distribuições que capturam caudas mais pesadas e assimetrias. Por outro lado, a EQTL3 apresenta consistentemente os menores valores de perda realizada, refletindo menor volatilidade dos retornos, independentemente do período total ou fracionado. A EQTL3 apresenta um comportamento mais estável em comparação às demais ações. Essa característica defensiva indica que a EQTL3 está menos sujeita a choques extremos, o que faz com que distribuições assimétricas sejam mais adequadas para capturar movimentos moderados e contínuos ao longo do tempo. É importante também destacar que a ITUB4, no segundo período fracionado (01/01/2021 a 01/01/2024), apresentou uma redução significativa no risco, o que é consistente com a estabilização econômica observada no período pós-pandemia. Isso reforça a importância de uma análise cuidadosa das ações, especialmente em contextos de crise ou alta volatilidade.

Deste modo, a escolha da distribuição impacta substancialmente a qualidade da previsão de risco, com distribuições que capturam caudas pesadas mostrando-se mais adequadas para o período total (Tabela 4) e o segundo período fracionado (Tabela 6). Em contrapartida, as distribuições normais, que tendem a captar valores mais próximos da média, apresentam melhor desempenho em cenários de maior instabilidade, como evidenciado na Tabela 5. No conjunto, a análise das *Score Functions* evidencia que não existe um único modelo que seja universalmente superior para todas as ações ou períodos. A seleção da distribuição deve ser ajustada conforme a ação em análise e o horizonte temporal considerado, levando em conta as características de volatilidade e assimetria dos retornos esperados.

# 6 CONCLUSÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar a previsão de risco de mercado utilizando o modelo AR(1)-GARCH(1,1) aplicado às ações VALE3, ITUB4 e EQTL3, selecionadas por sua relevância no índice Ibovespa e pela diversidade de seus setores: commodities, financeiro e utilidade pública, respectivamente. A escolha dessas empresas se mostrou estratégica, pois permitiu observar as nuances de risco e volatilidade em diferentes segmentos do mercado, fornecendo uma visão abrangente das características particulares de cada setor.

A problemática central girava em torno da necessidade de identificar quais modelos e distribuições de probabilidade seriam mais eficientes na previsão de *Value at Risk* em diferentes cenários econômicos, especialmente durante períodos de alta incerteza, como o da pandemia de COVID-19. A solução proposta por meio da aplicação do modelo AR(1)-GARCH(1,1), com a consideração de diversas distribuições de probabilidade (normal, normal assimétrica, t de Student e t de Student assimétrica), permitiu uma avaliação detalhada das diferentes formas de capturar assimetrias e caudas pesadas nos retornos financeiros, refletindo a realidade dos mercados voláteis. Ao considerar períodos distintos — o total, de 01/01/2018 a 01/01/2024, e dois fracionados (2018-2020 e 2021-2024) — foi possível analisar a eficácia das previsões em contextos de choque e recuperação econômica. A avaliação da qualidade dessas previsões foi conduzida por meio de *Score Functions* e das perdas realizadas.

Os resultados indicaram que a distribuição t de Student assimétrica apresentou o melhor desempenho global, destacando-se especialmente no primeiro período fracionado e no período total. A distribuição normal assimétrica, por sua vez, obteve maior precisão nas previsões para as ações ITUB4 e EQTL3 no primeiro período fracionado, sugerindo que, durante momentos de incerteza extrema, como o início da pandemia, distribuições que capturam assimetrias moderadas são mais eficazes para certos ativos. No entanto, no segundo período fracionado, com a recuperação econômica especialmente em cenários mais flexíveis de perdas (nível de significância de 5%), a distribuição t de Student prevaleceu novamente, evidenciando a importância de capturar assimetrias e caudas pesadas em condições de mercado menos extremas. Esses achados são importantes para o gerenciamento de risco e para a previsão de perdas potenciais em diferentes contextos de mercado.

No que se refere às perdas realizadas, a VALE3 demonstrou consistentemente os maiores valores, refletindo seu perfil de maior risco de mercado, enquanto a EQTL3, com suas características defensivas, revelou-se a mais estável, apresentando as menores perdas em todos os períodos analisados. A ITUB4, por sua vez, apresentou uma redução significativa no risco durante o segundo período fracionado, coerente com a estabilização do mercado no pós-pandemia.

No âmbito financeiro, a análise das previsões de risco, considerando diferentes distribuições de probabilidade e múltiplos cenários econômicos e temporais, oferece perspectivas importantes para a gestão de portfólios, especialmente para a escolha de distribuições que capturam adequadamente a assimetria e a leptocurtose dos retornos financeiros. A análise detalhada das previsões de VaR para as ações VALE3, ITUB4 e EQTL3 contribui para uma compreensão mais profunda dos riscos enfrentados por diferentes setores da economia, permitindo a adaptação das estratégias de hedge e a tomada de decisões mais informadas em momentos de volatilidade elevada.

No contexto acadêmico, este trabalho reforça a importância de incorporar distribuições assimétricas e com caudas pesadas nos modelos de previsão de risco. A abordagem adotada aqui, ao comparar diferentes distribuições de probabilidade em múltiplos períodos econômicos, contribui significativamente para a literatura de econometria financeira, especialmente no que tange ao uso de modelos de VaR para previsões em mercados emergentes, como o brasileiro. A análise proposta, ao comparar empresas de diferentes segmentos, como commodities (VALE3), financeiro (ITUB4) e utilidade pública (EQTL3), é ampliado o entendimento sobre a variabilidade do risco em mercados locais. Ademais. a escolha de ativos relevantes no índice Ibovespa, permitiu explorar as características de volatilidade e risco de cada um, ampliando o alcance da análise.

Como possíveis caminhos para trabalhos futuros, recomenda-se a ampliação da amostra para incluir um número maior de ativos, o que poderia fornecer resultados mais generalizáveis para avaliar o risco dos setores. A adoção de modelos econométricos mais complexos, como aqueles com volatilidade estocástica ou regimes de mudança, também poderia enriquecer a análise, permitindo uma comparação mais abrangente da eficácia das abordagens de previsão de risco. Além disso, a inclusão de variáveis macroeconômicas, como taxas de câmbio e juros, poderia oferecer uma análise mais completa sobre as interações entre o ambiente macroeconômico e a volatilidade dos retornos financeiros, especialmente para empresas ligadas a commodities, como a VALE3.

Concluindo, este estudo fornece uma base para futuras investigações no campo da previsão de risco no mercado financeiro brasileiro, destacando a relevância de distribuições flexíveis e adaptáveis às condições de mercado. A análise realizada reforça a necessidade de modelos robustos que consigam captar adequadamente as complexidades dos retornos financeiros em diferentes contextos econômicos, e sua aplicação prática pode ter impactos significativos tanto para a academia quanto para o setor financeiro. Assim, esperamos que as descobertas apresentadas aqui incentivem novas pesquisas e aprimoramentos nos modelos de previsão de risco, especialmente em mercados emergentes.

# REFERÊNCIAS


ACEREDA, B.; LEON, A.; MORA, J. Estimating the expected shortfall of cryptocurrencies: An evaluation based on backtesting. *Finance Research Letters*, v. 33, 2020.

ACERBI, C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, v. 26, n. 7, p. 1505–1518, 2002.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION. Fundamental Review of the Trading Book: A Revised Market Risk Framework. Disponível em: `https://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf`, Outubro 2013.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION. Minimum capital requirements for market risk. *Basel Committee on Banking Supervision*, 2019.

BELLINI, F.; BIGNOZZI, V. On elicitable risk measures. *Quantitative Finance*, v. 15, n. 5, p. 725–733, 2015.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.

BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M.; REINSEL, G.C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2008.

BREHMER, Jonas. *Elicitability and its application in risk management*. arXiv preprint arXiv:1707.09604, 2017.

BRUTTI RIGHI, M.; CERETTA, P. S. Teoria de Medidas de Risco: uma revisão abrangente. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 12, n. 3, p. 411-464, 2014.

BUTERIN, V. Ethereum Whitepaper. Ethereum.org. Disponível em: `https://blockchainlab.com/pdf/Ethereum_white_papera_next_generation_smart_contract_and_decentralized_application_platform-vitalikbuterin.pdf`, 2013.

CABEDO, D.; MOYA, I. Estimating oil price 'Value at Risk' using the historical simulation approach. *Energy Economics*, v. 25, n. 3, p. 239-253, 2003.

CONT, Rama; DEGUEST, Romain; SCANDOLO, Giacomo. Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures. *Quantitative Finance*, v. 10, n. 6, p. 593-606, 2010.

COINMARKETCAP. Disponível em: `https://coinmarketcap.com/`, Fevereiro 2024.

CORDEIRO, Daniel Francisco Scolaro; MÜLLER, Fernanda Maria. Previsão de Risco para Bitcoin e Ethereum: Uma Comparação Usando Função Score. 2024.

DANÍELSSON, J. Financial Risk Forecasting. John Wiley & Sons Ltd., Reino Unido, 2011.

EMBRECHTS, Paul; WANG, Bin; WANG, Ruodu. Aggregation-robustness and model uncertainty of regulatory risk measures. *Finance and Stochastics*, v. 19, p. 763-790, 2015.

EPAPHRA, M. Modeling Exchange Rate Volatility: Application of the GARCH and EGARCH Models. *Journal of Mathematical Finance*, v. 7, p. 121-143, 2017.

ESCANCIANO, Juan Carlos; OLMO, Jose. Robust backtesting tests for Value-at-Risk models. *Journal of Financial Econometrics*, v. 9, n. 1, p. 132-161, 2011.

FENU, G.; MARCHESI, L.; MARCHESI, M.; TONELLI, R. The ICO phenomenon and its relationships with ethereum smart contract environment. In: 2018 International Workshop on Blockchain Oriented Software Engineering (IWBOSE). IEEE, p. 26-32, 2018.

FISSLER, T.; ZIEGEL, J. F. Higher order elicitability and Osband's principle. *The Annals of Statistics*, v. 44, p. 1680–1707, 2016. doi: 10.1214/16-AOS1439.

FISSLER, T.; ZIEGEL, J. F. On the elicitability of range value at risk. *Statistics & Risk Modeling*, v. 38, n. 1–2, p. 25–46, 2021.

FÖLLMER, H.; WEBER, S. The axiomatic approach to risk measures for capital determination. *Annual Review of Financial Economics*, v. 7, p. 301–337, 2015.

FRANCQ, Christian; ZAKOIAN, Jean-Michel. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Chichester: Wiley, 2010. DOI: 10.1002/9780470670057.

GARG, R. Ethereum based Smart Contracts for Trade and Finance. *International Journal of Economics and Management Engineering*, v. 16, n. 11, p. 619–629, 2022.

GARCIA-JORCANO, L.; NOVALES, A. Volatility specifications versus probability distributions in VaR forecasting. *Journal of Forecasting*, v. 40, n. 2, p. 189–212, 2021.

GENSLER, G. Statement on the Approval of Spot Bitcoin Exchange-Traded Products. Disponível em: `https://www.sec.gov/news/statement/gensler-statement-spot-bitcoin-011023`,

GERLACH, R.; WALPOLE, D.; WANG, C. Semi-parametric bayesian tail risk forecasting incorporating realized measures of volatility. *Quantitative Finance*, v. 17, n. 2, p. 199–215, 2017.

GIUNGATO, P.; RANA, R.; TARABELLA, A.; TRICASE, C. Current Trends in Sustainability of Bitcoins and Related Blockchain Technology. *Sustainability*, v. 9, n. 12, p. 2214, 2017.

GHALANOS, A. Introduction to the rugarch package. R vignette. Disponível em: `https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/vignettes/Introduction_to_the_rugarch_package.pdf`, Setembro 2023.

GNEITING, T. Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, v. 106, n. 494, p. 746–762, 2011.

GUO, Z. Y. Risk management of bitcoin futures with GARCH models. *Finance Research Letters*, p. 102197, 2021.

HE, X. D.; KOU, S.; PENG, X. Risk measures: robustness, elicitability, and backtesting. *Annual Review of Statistics and Its Application*, v. 9, p. 141–166, 2022.

JIANG, K.; ZENG, L.; SONG, J.; LIU, Y. Forecasting Value-at-Risk of cryptocurrencies using the time-varying mixture-accelerating generalized autoregressive score model. *Research in International Business and Finance*, v. 61, p. 1-15, outubro 2022.

KELLNER, R.; RÖSCH, D. Quantifying market risk with Value-at-Risk or Expected Shortfall? – Consequences for capital requirements and model risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 68, p. 45-63, julho 2016.

KUSUOKA, S. On law invariant coherent risk measures. In: *Advances in Mathematical Economics*. Springer, p. 83–95, 2001.

KROMER, E.; OVERBECK, L.; ZILCH, K. Systemic risk measures on general measurable spaces. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 84, n. 2, p. 323–357, 2016.

KUFUOGLU, S.; OZKURAN, M. Energy Consumption of Bitcoin Mining. Faculty of Economics, University of Cambridge, maio 2019.

KUSHWAHA, S. S. et al. Ethereum smart contract analysis tools: A systematic review. *IEEE Access*, v. 10, p. 57037-57062, 2022.

LAWUOBAHSUMO, K. K.; ALGIERI, B.; LECCADITO, A. Forecasting cryptocurrencies returns: Do macroeconomic and financial variables improve tail expectation predictions? *Qual Quant.*, 2023.

LI, W. K.; LING, S.; MCALEER, M. Recent theoretical results for time series models with GARCH errors. *Journal of Economic Surveys*, v. 16, n. 3, p. 245–269, 2002.

LIU, W.; SEMEYUTIN, A.; LAU, C. K. M.; GOZGOR, G. Forecasting value-at-risk of cryptocurrencies with RiskMetrics type models. *Research in International Business and Finance*, v. 54, p. 101259, 2020.

MCNEIL, A. F.; FREY, R.; EMBRICHTS, P. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2015.

MNIF, E.; JARBOUI, A.; MOUAKHAR, K. How the cryptocurrency market has performed during COVID-19? A multifractal analysis. *Finance Research Letters*, v. 36, p. 1-15, outubro 2020.

MÜLLER, F. M.; SANTOS, S. S.; GÖSSLING, T. W.; RIGHI, M. B. Comparison of risk forecasts for cryptocurrencies: A focus on range value at risk. *Finance Research Letters*, p. 102916, 2022.

MÜLLER, F. M.; GÖSSLING, T. W.; SANTOS, S. S.; RIGHI, M. B. A Comparison of Range Value at Risk (RVaR) Forecasting Models. *Journal of Forecasting*. Social Science Research Network, 2023.

MÜLLER, F. M.; SANTOS, S. S.; RIGHI, M. B. A description of the COVID-19 outbreak role in financial risk forecasting. *The North American Journal of Economics and Finance*, v. 66, p. 101894, 2023.

METCALFE, W. et al. Ethereum, smart contracts, DApps. *Blockchain and Cryptocurrency*, v. 77, 2020.

MEYNKHARD, A. Fair market value of bitcoin: halving effect, 2019.

NAKAMOTO, S. Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System, 2008.

NEKHILI, R.; SULTAN, J. Jump Driven Risk Model Performance in Cryptocurrency Market. *International Journal of Financial Studies*, v. 8, n. 2, p. 19, 2020.

ORHAN, M.; KÖKSAL, B. A comparison of GARCH models for VaR estimation. *Expert Systems with Applications*, v. 39, 2012.

PRITSKER, M. The hidden dangers of historical simulation. *Journal of Banking & Finance*, v. 30, n. 2, p. 561-582, 2006.

R CORE TEAM. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2021. Disponível em: `http://www.R-project.org/`.

RIGHI, M. B.; CERETTA, P. S. A comparison of expected shortfall estimation models. *Journal of Economics and Business*, v. 78, p. 14–47, 2015.

RYAN, J. A. et al. Package ‘quantmod’. Disponível em: `https://cran.r-project.org/web/packages/quantmod/quantmod.pdf`, 2023.

SCHLAG, K. H.; WEELE, J. J. A method to elicit beliefs as most likely intervals. *Judgment and Decision Making*, v. 10, n. 5, p. 456-468, outubro 2015.

SCOLARO, Daniel Francisco Cordeiro; MüLLER, Fernanda Maria. Previsão de Risco para Bitcoin e Ethereum: Uma Comparação Usando Função Score. Disponível em: <https://doity.com.br/anais/24ebfin/trabalho/349246>

TELMOUDI, Fedya; EL GHOURABI, Mohamed; LIMAM, Mohamed. On conditional risk estimation considering model risk. *Journal of Applied Statistics*, v. 43, n. 8, p. 1386-1399, 2016.

TRUCÍOS, C. Forecasting bitcoin risk measures: A robust approach. *International Journal of Forecasting*, v. 35, p. 836–847, 2019.

TRUCÍOS, C.; TIWARI, A. K.; ALQAHTANI, F. Value-at-risk and expected shortfall in cryptocurrencies' portfolio: A vine copula–based approach. *Applied Economics*, v. 52, p. 2580–2593, 2020.

TROSTER, V.; TIWARI, A. K.; SHAHBAZ, M.; MACEDO, D. N. Bitcoin returns and risk: A general GARCH and GAS analysis. *Finance Research Letters*, v. 30, p. 187–193, 2019.

TSAY, Ruey S. *Analysis of Financial Time Series*. Hoboken: John Wiley and Sons, 2005.

WILLIAMS, Brandon. *GARCH(1,1) Models*. Bachelorarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Fakultät für Mathematik und Informatik, Bachelor of Science (B. Sc.), 15. Juli 2011.

ZIEGEL, J. F. Coherence and elicitability. *Mathematical Finance*, v. 26, p. 901–918, 2016.

# A ANEXO A: TABELAS DETALHADAS DAS PREVISÕES DA MEDIDA DE RISCO *VALUE AT RISK*

TABELA 7 – Estatísticas descritivas das previsões da medida de risco $VaR^{1\%}_{t+1}$, $VaR^{5\%}_{t+1}$ para as ações VALE3, ITUB4 e EQTL3. Os dados estão em porcentagem, considerando o período de 01/01/2018 a 01/01/2024 e são baseados em janelas móveis de 250, 500 e 100 observações.

| | $\alpha = 1\%$ | | | | | | $\alpha = 5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ação-Distribuição | *Min* | *Max* | *Md.* | *Dp.* | *Ass.* | *Cur.* | *Min* | *Max* | *Md.* | *Dp.* | *Ass.* | *Cur.* |
| **Janela Rolante:** $W_1 = 250$ | | | | | | | | | | | | |
| VALE3-norm | 2.03 | 27.55 | 5.39 | 2.15 | 5.17 | 36.91 | 1.36 | 19.97 | 3.78 | 1.53 | 5.07 | 36.37 |
| VALE3-snorm | 2.28 | 31.08 | 6.10 | 2.88 | 3.73 | 19.57 | 1.27 | 19.19 | 3.62 | 1.66 | 3.96 | 22.68 |
| VALE3-std | 2.25 | 27.71 | 5.32 | 2.10 | 5.80 | 41.90 | 1.53 | 20.20 | 3.74 | 1.50 | 5.73 | 41.76 |
| VALE3-sstd | 2.48 | 31.71 | 5.84 | 2.43 | 5.84 | 42.21 | 1.47 | 18.71 | 3.51 | 1.35 | 5.68 | 42.26 |
| ITUB4-norm | 2.43 | 20.44 | 4.64 | 1.83 | 3.06 | 14.15 | 1.66 | 14.84 | 3.28 | 1.31 | 3.02 | 14.04 |
| ITUB4-snorm | 2.33 | 22.93 | 5.19 | 2.15 | 2.81 | 12.80 | 1.41 | 14.19 | 3.10 | 1.27 | 2.88 | 13.43 |
| ITUB4-std | 2.57 | 20.32 | 4.48 | 1.73 | 3.53 | 17.97 | 1.77 | 14.75 | 3.17 | 1.24 | 3.51 | 18.00 |
| ITUB4-sstd | 2.61 | 20.33 | 4.73 | 1.75 | 3.42 | 17.50 | 1.71 | 14.60 | 3.09 | 1.22 | 3.49 | 17.78 |
| EQTL3-norm | 2.62 | 15.77 | 3.98 | 1.53 | 4.02 | 20.93 | 1.73 | 11.31 | 2.78 | 1.08 | 3.95 | 20.31 |
| EQTL3-snorm | 2.62 | 19.51 | 4.26 | 2.00 | 4.21 | 21.95 | 1.57 | 11.15 | 2.54 | 1.11 | 4.15 | 21.58 |
| EQTL3-std | 2.62 | 15.42 | 4.03 | 1.49 | 3.97 | 20.57 | 1.73 | 11.06 | 2.83 | 1.05 | 3.87 | 19.73 |
| EQTL3-sstd | 2.69 | 15.40 | 4.22 | 1.49 | 3.69 | 19.13 | 1.72 | 10.78 | 2.74 | 1.03 | 4.03 | 20.94 |
| **Janela Rolante:** $W_2 = 500$ | | | | | | | | | | | | |
| VALE3-norm | 3.26 | 21.18 | 5.39 | 1.35 | 4.18 | 31.98 | 2.20 | 15.39 | 3.78 | 0.98 | 4.14 | 32.25 |
| VALE3-snorm | 3.33 | 32.36 | 6.16 | 2.21 | 4.20 | 32.55 | 1.93 | 19.16 | 3.63 | 1.25 | 4.44 | 37.35 |
| VALE3-std | 3.29 | 23.14 | 5.34 | 1.63 | 5.38 | 39.76 | 2.23 | 16.61 | 3.75 | 1.16 | 5.30 | 39.23 |
| VALE3-sstd | 3.58 | 26.22 | 5.87 | 1.88 | 5.38 | 39.46 | 2.11 | 15.18 | 3.54 | 1.06 | 5.02 | 36.82 |
| ITUB4-norm | 2.72 | 17.10 | 4.90 | 1.78 | 3.06 | 12.96 | 1.88 | 11.99 | 3.47 | 1.26 | 3.01 | 12.53 |
| ITUB4-snorm | 2.58 | 19.95 | 5.72 | 2.10 | 2.93 | 12.84 | 1.56 | 11.71 | 3.39 | 1.23 | 2.87 | 12.12 |
| ITUB4-std | 2.82 | 16.48 | 4.70 | 1.76 | 3.05 | 11.90 | 1.95 | 11.78 | 3.32 | 1.25 | 3.02 | 11.69 |
| ITUB4-sstd | 2.88 | 17.24 | 5.00 | 1.78 | 3.14 | 13.08 | 1.84 | 11.77 | 3.24 | 1.25 | 2.93 | 11.06 |
| EQTL3-norm | 2.79 | 13.91 | 4.21 | 1.45 | 3.58 | 15.36 | 1.89 | 9.69 | 2.95 | 1.03 | 3.55 | 15.05 |
| EQTL3-snorm | 2.88 | 16.09 | 4.54 | 1.78 | 3.34 | 13.45 | 1.79 | 9.31 | 2.70 | 1.03 | 3.44 | 13.99 |
| EQTL3-std | 2.83 | 13.89 | 4.20 | 1.45 | 3.64 | 15.58 | 1.90 | 9.67 | 2.94 | 1.03 | 3.60 | 15.29 |
| EQTL3-sstd | 2.89 | 14.26 | 4.40 | 1.46 | 3.64 | 15.90 | 1.89 | 9.60 | 2.88 | 1.03 | 3.56 | 14.87 |
| **Janela Rolante:** $W_3 = 1000$ | | | | | | | | | | | | |
| VALE3-norm | 3.45 | 9.17 | 5.15 | 0.82 | 0.60 | 1.12 | 2.40 | 6.63 | 3.61 | 0.60 | 0.68 | 1.44 |
| VALE3-snorm | 3.68 | 11.49 | 6.05 | 1.33 | 0.44 | -0.07 | 2.18 | 6.97 | 3.53 | 0.74 | 0.62 | 0.69 |
| VALE3-std | 3.57 | 10.05 | 5.02 | 0.81 | 1.58 | 4.58 | 2.50 | 7.28 | 3.52 | 0.58 | 1.71 | 5.38 |
| VALE3-sstd | 3.91 | 11.14 | 5.57 | 0.92 | 1.49 | 4.06 | 2.40 | 6.89 | 3.35 | 0.54 | 1.70 | 5.42 |
| ITUB4-norm | 3.04 | 7.10 | 4.14 | 0.64 | 1.17 | 2.13 | 2.13 | 5.03 | 2.93 | 0.46 | 1.16 | 2.11 |
| ITUB4-snorm | 3.59 | 8.14 | 4.87 | 0.73 | 1.10 | 1.88 | 2.09 | 4.83 | 2.87 | 0.43 | 1.10 | 1.94 |
| ITUB4-std | 3.00 | 6.46 | 4.02 | 0.59 | 0.98 | 1.21 | 2.10 | 4.59 | 2.84 | 0.42 | 0.98 | 1.26 |
| ITUB4-sstd | 3.24 | 7.02 | 4.35 | 0.64 | 1.01 | 1.25 | 2.01 | 4.47 | 2.75 | 0.42 | 0.95 | 1.20 |
| EQTL3-norm | 2.85 | 6.74 | 3.73 | 0.59 | 1.30 | 2.32 | 1.97 | 4.81 | 2.61 | 0.42 | 1.32 | 2.53 |
| EQTL3-snorm | 3.05 | 7.20 | 4.05 | 0.63 | 1.22 | 2.07 | 1.82 | 4.44 | 2.42 | 0.39 | 1.29 | 2.45 |
| EQTL3-std | 2.84 | 6.56 | 3.74 | 0.56 | 1.18 | 1.92 | 1.99 | 4.70 | 2.62 | 0.40 | 1.22 | 2.14 |
| EQTL3-sstd | 2.99 | 6.91 | 3.96 | 0.60 | 1.19 | 1.75 | 1.92 | 4.60 | 2.58 | 0.40 | 1.19 | 2.08 |

*Nota: As estatísticas representam Mínimo (Min), Máximo (Max), Mediana (Méd.), Desvio Padrão (Dp.), Assimetria (Ass.) e Curtose (Cur.) para as previsões do VaR.*

TABELA 8 – Estatísticas descritivas das previsões da medida de risco $VaR_{t+1}^{1\%}$, $VaR_{t+1}^{5\%}$ para as ações VALE3, ITUB4 e EQTL3. Os dados estão em porcentagem, considerando o período fracionado entre 01/01/2018 a 31/12/2020 e são baseados em janelas móveis de 250 e 500 observações.

| | $\alpha = 1\%$ | | | | | | $\alpha = 5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ação-Distribuição | *Min* | *Max* | *Md.* | *Dp.* | *Ass.* | *Cur.* | *Min* | *Max* | *Md.* | *Dp.* | *Ass.* | *Cur.* |
| **Janela Rolante:** $W_1 = 250$ | | | | | | | | | | | | |
| VALE3-norm | 2.76 | 27.55 | 6.12 | 3.13 | 3.53 | 15.59 | 1.86 | 19.97 | 4.30 | 2.23 | 3.51 | 15.68 |
| VALE3-snorm | 2.79 | 31.08 | 7.63 | 3.95 | 2.51 | 8.21 | 1.57 | 19.19 | 4.40 | 2.31 | 2.69 | 9.65 |
| VALE3-std | 2.99 | 27.71 | 5.81 | 3.12 | 3.96 | 17.32 | 1.96 | 20.20 | 4.08 | 2.22 | 3.98 | 17.66 |
| VALE3-sstd | 3.30 | 31.71 | 6.60 | 3.58 | 3.97 | 17.43 | 1.83 | 18.71 | 3.67 | 2.02 | 4.02 | 18.31 |
| ITUB4-norm | 2.95 | 20.43 | 4.98 | 2.33 | 2.62 | 9.01 | 2.05 | 14.83 | 3.52 | 1.66 | 2.63 | 9.25 |
| ITUB4-snorm | 3.25 | 22.94 | 5.56 | 2.61 | 2.63 | 9.29 | 1.92 | 14.18 | 3.33 | 1.58 | 2.65 | 9.47 |
| ITUB4-std | 2.95 | 20.31 | 4.97 | 2.33 | 2.58 | 8.66 | 2.06 | 14.74 | 3.52 | 1.67 | 2.59 | 8.86 |
| ITUB4-sstd | 3.01 | 20.30 | 5.07 | 2.35 | 2.48 | 8.04 | 2.05 | 14.57 | 3.51 | 1.66 | 2.56 | 8.60 |
| EQTL3-norm | 2.62 | 15.77 | 4.21 | 2.27 | 2.80 | 8.37 | 1.73 | 11.31 | 2.92 | 1.60 | 2.78 | 8.20 |
| EQTL3-snorm | 2.62 | 19.51 | 4.88 | 2.94 | 2.66 | 7.73 | 1.57 | 11.15 | 2.81 | 1.64 | 2.69 | 7.81 |
| EQTL3-std | 2.62 | 15.42 | 4.20 | 2.22 | 2.75 | 8.05 | 1.73 | 11.06 | 2.92 | 1.57 | 2.73 | 7.87 |
| EQTL3-sstd | 2.69 | 15.40 | 4.27 | 2.21 | 2.75 | 8.19 | 1.72 | 10.78 | 2.90 | 1.53 | 2.78 | 8.23 |
| **Janela Rolante:** $W_2 = 500$ | | | | | | | | | | | | |
| VALE3-norm | 5.17 | 21.18 | 6.51 | 1.92 | 3.95 | 19.39 | 3.61 | 15.39 | 4.61 | 1.39 | 3.95 | 19.98 |
| VALE3-snorm | 6.51 | 32.36 | 8.61 | 2.98 | 4.17 | 22.57 | 3.61 | 19.16 | 4.93 | 1.73 | 4.28 | 24.69 |
| VALE3-std | 3.90 | 23.14 | 6.08 | 2.86 | 3.27 | 11.60 | 2.69 | 16.61 | 4.28 | 2.03 | 3.25 | 11.69 |
| VALE3-sstd | 4.45 | 26.22 | 6.91 | 3.26 | 3.24 | 11.41 | 2.36 | 15.18 | 3.87 | 1.86 | 3.23 | 11.53 |
| ITUB4-norm | 3.10 | 16.78 | 5.93 | 2.44 | 1.68 | 3.28 | 2.20 | 12.00 | 4.19 | 1.73 | 1.69 | 3.34 |
| ITUB4-snorm | 3.45 | 19.59 | 6.69 | 2.90 | 1.74 | 3.45 | 2.07 | 11.72 | 3.99 | 1.70 | 1.72 | 3.45 |
| ITUB4-std | 3.11 | 16.50 | 5.94 | 2.42 | 1.63 | 3.05 | 2.20 | 11.79 | 4.20 | 1.72 | 1.64 | 3.10 |
| ITUB4-sstd | 3.14 | 16.68 | 6.01 | 2.42 | 1.61 | 3.04 | 2.20 | 11.78 | 4.18 | 1.70 | 1.63 | 3.11 |
| EQTL3-norm | 2.82 | 13.91 | 5.20 | 2.43 | 1.74 | 2.42 | 1.89 | 9.69 | 3.62 | 1.73 | 1.72 | 2.32 |
| EQTL3-snorm | 3.36 | 16.09 | 6.00 | 2.80 | 1.74 | 2.43 | 1.85 | 9.31 | 3.48 | 1.66 | 1.71 | 2.31 |
| EQTL3-std | 2.83 | 13.89 | 5.22 | 2.44 | 1.72 | 2.29 | 1.90 | 9.67 | 3.64 | 1.74 | 1.70 | 2.20 |
| EQTL3-sstd | 2.92 | 14.26 | 5.34 | 2.50 | 1.73 | 2.37 | 1.89 | 9.60 | 3.61 | 1.72 | 1.70 | 2.23 |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

TABELA 9 – Estatísticas descritivas das previsões da medida de risco $VaR_{t+1}^{1\%}$, $VaR_{t+1}^{5\%}$ para as ações VALE3, ITUB4 e EQTL3. Os dados estão em porcentagem, considerando o período fracionado entre 01/01/2021 a 01/01/2024 e são baseados em janelas móveis de 250 e 500 observações.

| | $\alpha = 1\%$ | | | | | | $\alpha = 5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ação-Distribuição | *Min* | *Max* | *Md.* | *Dp.* | *Ass.* | *Cur.* | *Min* | *Max* | *Md.* | *Dp.* | *Ass.* | *Cur.* |
| **Janela Rolante:** $W_1 = 250$ | | | | | | | | | | | | |
| VALE3-norm | 2.03 | 8.03 | 4.98 | 0.77 | -0.39 | 0.02 | 1.36 | 5.81 | 3.52 | 0.56 | -0.33 | 0.22 |
| VALE3-snorm | 2.28 | 7.26 | 5.24 | 0.85 | -0.40 | -0.57 | 1.27 | 4.76 | 3.21 | 0.52 | -0.32 | -0.26 |
| VALE3-std | 2.25 | 7.45 | 5.06 | 0.74 | -0.16 | -0.52 | 1.53 | 5.36 | 3.58 | 0.54 | -0.13 | -0.37 |
| VALE3-sstd | 2.48 | 7.91 | 5.48 | 0.75 | -0.24 | -0.36 | 1.47 | 5.28 | 3.47 | 0.53 | -0.17 | -0.37 |
| ITUB4-norm | 2.43 | 12.03 | 4.01 | 1.14 | 2.41 | 10.41 | 1.66 | 8.80 | 2.85 | 0.85 | 2.43 | 10.38 |
| ITUB4-snorm | 2.33 | 12.11 | 4.49 | 1.39 | 0.95 | 1.28 | 1.41 | 7.40 | 2.67 | 0.79 | 1.03 | 2.34 |
| ITUB4-std | 2.57 | 5.16 | 3.76 | 0.59 | 0.04 | -0.80 | 1.77 | 3.80 | 2.65 | 0.43 | 0.12 | -0.67 |
| ITUB4-sstd | 2.61 | 5.66 | 4.09 | 0.70 | -0.06 | -0.89 | 1.71 | 3.63 | 2.54 | 0.40 | 0.26 | -0.47 |
| EQTL3-norm | 2.64 | 4.95 | 3.55 | 0.48 | 0.37 | -0.51 | 1.82 | 3.52 | 2.50 | 0.34 | 0.32 | -0.50 |
| EQTL3-snorm | 2.68 | 4.87 | 3.62 | 0.47 | 0.21 | -0.74 | 1.60 | 3.06 | 2.22 | 0.29 | 0.22 | -0.54 |
| EQTL3-std | 2.64 | 4.71 | 3.68 | 0.47 | 0.06 | -1.18 | 1.82 | 3.33 | 2.60 | 0.34 | 0.02 | -1.12 |
| EQTL3-sstd | 2.83 | 5.37 | 4.00 | 0.63 | 0.29 | -1.39 | 1.79 | 3.26 | 2.44 | 0.28 | -0.07 | -0.33 |
| **Janela Rolante:** $W_2 = 500$ | | | | | | | | | | | | |
| VALE3-norm | 3.30 | 5.73 | 4.68 | 0.50 | -0.25 | -0.36 | 2.30 | 4.15 | 3.31 | 0.37 | -0.23 | -0.36 |
| VALE3-snorm | 3.33 | 6.18 | 4.91 | 0.69 | -0.46 | -0.94 | 1.93 | 3.87 | 3.00 | 0.42 | -0.41 | -0.79 |
| VALE3-std | 3.50 | 5.64 | 4.75 | 0.43 | -0.32 | -0.01 | 2.46 | 4.07 | 3.37 | 0.32 | -0.32 | -0.05 |
| VALE3-sstd | 3.84 | 6.12 | 5.08 | 0.54 | -0.27 | -0.80 | 2.36 | 3.95 | 3.21 | 0.35 | -0.24 | -0.59 |
| ITUB4-norm | 2.72 | 6.17 | 3.86 | 0.61 | 0.39 | 0.05 | 1.88 | 4.47 | 2.72 | 0.45 | 0.39 | 0.17 |
| ITUB4-snorm | 2.58 | 7.58 | 4.71 | 1.06 | -0.62 | -0.83 | 1.56 | 4.54 | 2.76 | 0.59 | -0.49 | -0.73 |
| ITUB4-std | 2.82 | 4.68 | 3.77 | 0.40 | -0.50 | -0.67 | 1.95 | 3.37 | 2.66 | 0.29 | -0.49 | -0.57 |
| ITUB4-sstd | 2.88 | 5.20 | 4.13 | 0.53 | -0.71 | -0.54 | 1.84 | 3.22 | 2.55 | 0.28 | -0.61 | -0.32 |
| EQTL3-norm | 2.94 | 4.52 | 3.64 | 0.26 | -0.20 | -0.01 | 2.04 | 3.16 | 2.56 | 0.19 | -0.25 | -0.13 |
| EQTL3-snorm | 3.07 | 4.07 | 3.69 | 0.22 | -0.53 | -0.73 | 1.83 | 2.52 | 2.25 | 0.15 | -0.55 | -0.69 |
| EQTL3-std | 3.06 | 4.04 | 3.68 | 0.22 | -0.48 | -0.64 | 2.13 | 2.88 | 2.60 | 0.16 | -0.45 | -0.64 |
| EQTL3-sstd | 3.33 | 4.45 | 4.02 | 0.25 | -0.33 | -0.74 | 2.00 | 2.70 | 2.46 | 0.16 | -0.52 | -0.63 |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.