

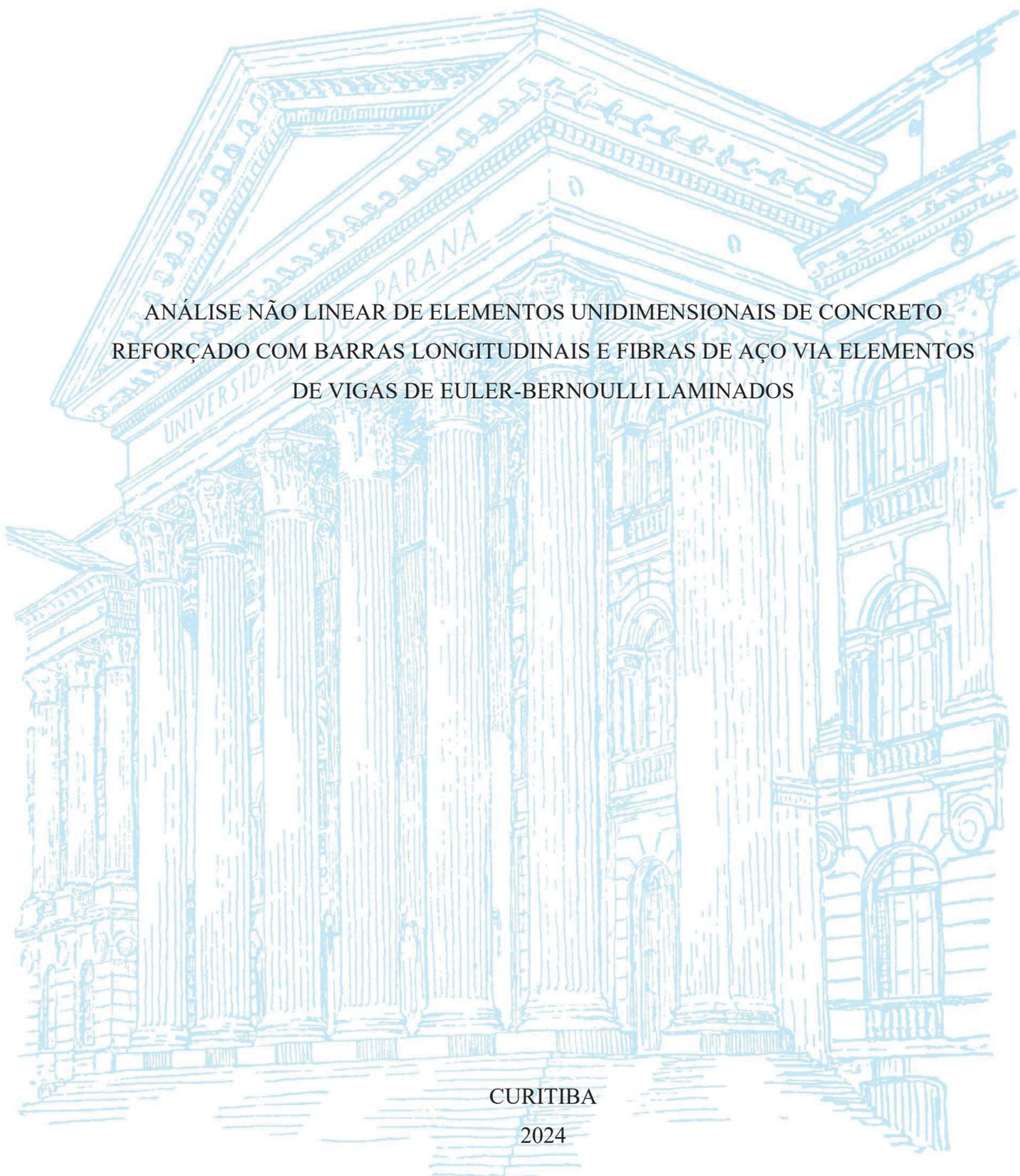
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ELORAH REGINA DINIZ ROCHA

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS DE CONCRETO
REFORÇADO COM BARRAS LONGITUDINAIS E FIBRAS DE AÇO VIA ELEMENTOS
DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI LAMINADOS

CURITIBA

2024



ELORAH REGINA DINIZ ROCHA

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS DE CONCRETO
REFORÇADO COM BARRAS LONGITUDINAIS E FIBRAS DE AÇO VIA ELEMENTOS
DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI LAMINADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil, Setor de Tecnologia, da
Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial
à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, Área
de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Peralisi

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Rocha, Elorah Regina Diniz

Análise não linear de elementos unidimensionais de concreto reforçado com barras longitudinais e fibras de aço via elementos de vigas de Euler-Bernoulli laminados / Elorah Regina Diniz Rocha. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Ricardo Pieralisi

1. Concreto armado. 2. Fibras de Aço. 3. Método dos elementos finitos. 4. Análise funcional não-linear. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Pieralisi, Ricardo. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **ELORAH REGINA DINIZ ROCHA** intitulada: **Análise não linear de elementos unidimensionais de concreto reforçado com barras longitudinais e fibras de aço via elementos de vigas de Euler-Bernoulli laminados**, sob orientação do Prof. Dr. RICARDO PIERALISI, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 05 de Setembro de 2024.

Assinatura Eletrônica

06/09/2024 10:27:28.0

RICARDO PIERALISI

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

06/09/2024 11:45:02.0

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

06/09/2024 11:08:26.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho a Deus.

Ao meu noivo, Wellington, por seu incentivo constante, companheirismo, amor e carinho.

Aos meus pais, Edison e Denise, e aos meus irmãos, Flávio e Aline, cujo apoio e incentivo me permitiram alcançar este momento.

Aos meus familiares e amigos, cuja presença e encorajamento foram fundamentais ao longo desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar minha mais sincera gratidão ao meu orientador, Professor Dr. Ricardo Pieralisi, por seu apoio, orientação e paciência ao longo de todo período deste mestrado. Sua disponibilidade constante e disposição para compartilhar seu conhecimento, foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por me fazer acreditar que tudo daria certo e por todo o conhecimento que compartilhou ao longo desta jornada.

Agradeço também à equipe da Barão Engenharia, à qual tenho muito orgulho de fazer parte. Em especial aos Engenheiros Sr. Gerson Gasparin Barão e Mateus de Azevedo Barão, por todo suporte e oportunidades oferecidas, especialmente durante o período do mestrado. Também gostaria de agradecer aos meus colegas de trabalho Eng.º Alexandre Bakker, Kauany Turkot e Roberta Fernandes pelo incentivo e apoio que foram essenciais para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional durante este período.

À Flávia Fasolo, por seu apoio constante, incentivo e paciência com minhas dúvidas, sua disposição para ajudar foi essencial para meu progresso ao longo do mestrado.

À minha colega de mestrado Beatriz Veiga, por compartilhar comigo os momentos de estudo e dificuldades, pelo apoio e incentivo. Agradeço também pela amizade, pelos momentos de desabafos e por sempre me lembrar de que tudo daria certo.

Ao meu noivo, Wellinton M. Polopes, com quem tenho a felicidade de compartilhar a vida. Agradeço por sua paciência e compreensão durante todos esses anos, especialmente durante o mestrado, e por sempre me incentivar e acreditar nos meus sonhos.

Aos meus pais, Denise e Edison Rocha, e aos meus irmãos, Aline e Flávio, por sempre apoiarem todas as minhas escolhas e ajudarem a construir meu futuro. Tudo que sou hoje é resultado do amor, incentivo e suporte incondicional que vocês me deram ao longo dos anos. Sem vocês, este momento não teria sido possível.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) e à Universidade Federal do Paraná (UFPR), pela oportunidade de cursar o mestrado em uma instituição de alta qualidade. E a todos os professores, pelos valiosos ensinamentos que constituíram a base para este trabalho e para meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Por fim, agradeço aos meus demais familiares, amigos e professores que, de alguma forma, contribuíram para esta etapa da minha vida. Sou grata a todos que fizeram parte dessa jornada e ajudaram a tornar este sonho realidade.

"Eu sou daqueles que pensam que a ciência tem uma grande beleza. Um cientista em seu laboratório não é apenas um técnico: ele é também uma criança diante dos fenômenos naturais que o impressionam como contos de fadas."

Marie Curie

RESUMO

A engenharia estrutural avança constantemente, buscando novos materiais e tecnologias para construir estruturas mais resistentes, duráveis, seguras e eficientes. Nesse contexto, o concreto reforçado com fibras (CRF) se destaca por aumentar a durabilidade e resistência das estruturas, controlando melhor a formação de fissuras, aumentando a ductilidade e tenacidade, e melhorando o desempenho estrutural sob diversas solicitações. No entanto, muitos modelos ainda necessitam da realização de uma análise inversa para a representação do comportamento do CRF, que requerem múltiplas iterações de ajuste e validação. O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver um modelo numérico capaz de prever o comportamento mecânico de elementos unidirecionais de concreto reforçado com barras longitudinais e fibras de aço quando submetidos à flexão simples. Para alcançar esse objetivo, foi desenvolvido um código numérico em linguagem *Python*, utilizando elementos finitos de vigas de *Euler-Bernoulli* associados ao modelo de rigidez equivalente. Para descrever o comportamento do CRF foram adotados os modelos constitutivos propostos pelo *fib Model Code* e pelo *Código Estructural*, além disso, foi implementado um modelo para a consideração das barras de aço longitudinais. Por se tratar de uma análise não linear, foi adotado o método de *Newton-Raphson* com incrementos de deslocamento para a resolução das equações de equilíbrio. Além disso, foi realizada uma análise da influência da quantidade de incrementos necessários para verificar a eficiência do modelo em capturar o comportamento não linear do material, foi observada também a influência da quantidade de camadas utilizadas para discretizar a seção transversal do elemento simulado, como também a influência da quantidade de elementos no modelo. Foram obtidas imagens da distribuição de tensões e as respostas de força *versus* deslocamento geradas por meio da simulação computacional realizada com o código desenvolvido neste estudo e, posteriormente, comparadas com os resultados experimentais encontrados na literatura de vigas de concreto reforçadas com fibras de aço (CRFA) e armaduras longitudinais. Os resultados indicam que o modelo numérico desenvolvido mostrou boa concordância com os dados experimentais, especialmente na fase inicial de carregamento, na previsão da capacidade máxima de carga e em sua fase pós-pico. Contudo, o modelo apresentou limitações em capturar o comportamento pré-pico, no início da fase não linear. Além disso, a precisão da simulação foi influenciada pelo tamanho dos incrementos de deslocamento, pelo nível de discretização da seção transversal e pela quantidade de elementos utilizados, com incrementos menores e maior discretização melhorando a representação do comportamento estrutural. Com base nas informações apresentadas, conclui-se que a metodologia adotada é eficaz na previsão do comportamento de elementos de concreto reforçado com fibras de aço, com uma boa precisão nas fases iniciais, na capacidade máxima de carga e na fase pós-pico, embora os modelos adotados possam limitar a captura completa do comportamento pré-pico.

Palavras-chave: Concreto Armado Reforçado com Fibras de Aço; Modelos Numéricos; Elementos Finitos; Análise não linear.

ABSTRACT

Structural engineering is constantly advancing, seeking new materials and technologies to build structures that are stronger, more durable, safer, and more efficient. In this context, fiber-reinforced concrete (FRC) stands out for enhancing the durability and strength of structures, better controlling crack formation, increasing ductility and toughness, and improving structural performance under various loading conditions. However, many models still require an inverse analysis to represent the behavior of FRC, which demands multiple iterations for adjustment and validation. The objective of this work is to develop a numerical model capable of predicting the mechanical behavior of unidirectional concrete elements reinforced with longitudinal bars and steel fibers when subjected to simple bending. To achieve this goal, a numerical code was developed in Python, using Euler-Bernoulli beam finite elements combined with the equivalent stiffness model. The constitutive models proposed by the fib Model Code and the Código Estructural were adopted to describe the behavior of FRC. Additionally, a model was implemented to account for the longitudinal steel bars. Due to the non-linear nature of the analysis, the Newton-Raphson method with displacement increments was employed to solve the equilibrium equations. Moreover, an analysis was conducted on the influence of the number of increments required to verify the model's efficiency in capturing the non-linear behavior of the material. The influence of the number of layers used to discretize the cross-section of the simulated element, as well as the influence of the number of elements in the model, was also observed. Stress distribution images and force versus displacement responses were obtained through computational simulations performed with the code developed in this study and were subsequently compared with experimental results found in the literature for beams reinforced with steel fibers (FRC) and longitudinal reinforcements. The results indicate that the developed numerical model showed good agreement with the experimental data, particularly in the initial loading phase, in predicting the maximum load capacity, and in its post-peak phase. However, the model showed limitations in capturing pre-peak behavior at the onset of the non-linear phase. Additionally, the accuracy of the simulation was influenced by the size of the displacement increments, the level of cross-sectional discretization, and the number of elements used, with smaller increments and greater discretization improving the representation of the structural behavior. Based on the presented information, it is concluded that the adopted methodology is effective in predicting the behavior of steel fiber-reinforced concrete elements, with good accuracy in the initial phases, maximum load capacity, and post-peak phase, although the adopted models may limit the complete capture of pre-peak behavior.

Key-words: Steel Fiber-Reinforced Concrete; Numerical Models; Finite Elements; Nonlinear Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – a) Shopping na Letônia; b) Edifício comercial na Estônia; c) Edifício comercial na Espanha.....	25
Figura 2 – Exemplos de aplicações CRF.....	26
Figura 3 – Organização da Dissertação	31
Figura 4 - Modelo compósito considerado como um sistema com dois componentes (fibras e matriz).....	34
Figura 5 - Característica das fibras	34
Figura 6 - Diferentes tipos de fibras	35
Figura 7 – Distribuição de microfibras e macrofibras	36
Figura 8 – Parâmetros mecânicos que controlam o comportamento mecânico do compósito.....	37
Figura 9 - Esquema da concentração de tensões	38
Figura 10 - Transferências de tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz após desligamento parcial da fibra.....	39
Figura 11 - Fator de forma.....	40
Figura 12 - Distribuições de tensão em relação ao comprimento crítico: a) igual; b) maior; c) menor.....	40
Figura 13 - Comportamento do concreto reforçado com fibras	42
Figura 14 – Contribuição da fibra através de sua orientação no plano de fratura	43
Figura 15 – Diagrama tensão x deformação elástica de matriz e fibras de alto e baixo módulo de elasticidade trabalhando em conjunto.....	44
Figura 16 – Diagrama tensão x deformação na compressão uniaxial: comparação entre concreto sem e com diferentes teores de fibras.....	45
Figura 17 – Influência do volume de fibras na resistência à compressão, curva tensão x deformação.	46
Figura 18 – Ensaio compressão diametral de concreto sem e com diferentes teores de fibras.....	47
Figura 19 – Comportamento de softening e hardening do CRF sob tração direta	48
Figura 20 – Conceitos de softening e hardening em função do volume de fibras.....	49
Figura 21 – Representação cronológica das normativas que apresentam modelos constitutivos para CRF.....	50
Figura 22 – Modelos constitutivos para o CRF em termos de σ -w e σ - ϵ	53

Figura 23 – Diagramas rígido-plástico e elástico-linear em termos de tensão-abertura de fissuras ($\sigma-w$).	54
Figura 24 – Definição do parâmetro y para seção de concreto armado	55
Figura 25 – Casos de formulação definido pelo MC2010 a) caso I, b) caso II, c) caso III	56
Figura 26 – Diagrama tensão-deformação retangular	58
Figura 27 – Diagrama tensão-deformação multilinear	59
Figura 28 – Viga submetida a esforços de flexão por 3 pontos a) esquema do ensaio; b) seção transversal	61
Figura 29 – Curva típica de carga-abertura de entalhe para o concreto reforçado com fibras.	62
Figura 30 – Processo de análise em elementos finitos	70
Figura 31 – Etapas de obtenção do sistema de equações de um elemento.	72
Figura 32 – Caminho do Equilíbrio.	75
Figura 33 – Pontos Críticos e comportamento do caminho de equilíbrio: a) Snap-through; b) Snap-back; c) Bifurcação.	76
Figura 34 – Seção transversal de um elemento de viga de Euler-Bernoulli laminado.	77
Figura 35 – Esquema da metodologia adotada no trabalho.	80
Figura 36 – Elemento finito de viga.	81
Figura 37 – Malha auxiliar para consideração das outras dimensões no elemento de viga laminada de Euler-Bernoulli.	82
Figura 38 – Refino de camadas variáveis na seção transversal à medida que são inseridas as armaduras.	83
Figura 39 – Representação gráfica do método de Newton Raphson.	86
Figura 40 – Testes de flexão em vigas rasas: (a) laboratório L1 e (b) laboratório L2.	87
Figura 41 – Modelo constitutivo adotado para: a) CRFA pelo MC2010; b) CRFA pelo CE2021; c) Armaduras longitudinais.	90
Figura 42 – Fluxograma da implementação computacional.	94
Figura 43 – Ilustração do elemento simulado a) vista lateral; b) seção transversal.	95
Figura 44 – Modelos constitutivos CRFA	97
Figura 45 – Diagrama multilinear $\sigma-\varepsilon$ - MC2010.	98
Figura 46 – Diagrama multilinear $\sigma-\varepsilon$ - CE2021	99
Figura 47 – Força versus deslocamento considerando diferentes incrementos – 55A+R	101
Figura 48 – Força versus deslocamento considerando diferentes camadas – 55A+R	104
Figura 49 – Força versus deslocamento considerando diferentes elementos – 55A+R	105
Figura 50 – Força versus deslocamento – 55A+R	107

Figura 51 – Indicação força de pico modelos MC2010 e CE2021.....	108
Figura 52 – Pontos de análise da distribuição de tensões viga 55A+R.....	110
Figura 53 – Distribuição de tensões – 55A+R.....	110
Figura 54 – Distribuição de tensões do CRFA – 55A+R.....	111
Figura 55 – Distribuição de tensões da Armadura Longitudinal – 55A+R.....	114
Figura 56 – Força versus deslocamento – 55B+R.....	116
Figura 57 – Pontos de análise da distribuição de tensões viga 55B+R.....	118
Figura 58 – Distribuição de tensões – 55B+R.....	118
Figura 59 – Distribuição de tensões do CRFA – 55B+R.....	119
Figura 60 – Distribuição de tensões da Armadura Longitudinal – 55B+R.....	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grupos de fibras de aço	36
Tabela 2 – Modelos Constitutivos em diferentes normativas (continua)	51
Tabela 3 – Dados do ensaio de caracterização das vigas	96
Tabela 4 – Parâmetros do modelo constitutivo do CRFA	97
Tabela 5 – Dados de entrada e parâmetros do material – 55A + R	100
Tabela 6 – Dados de entrada e parâmetros do material – 55B + R	115

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
CDP	Concrete Damaged Plasticity
CE2021	Código Estructural
CMOD	Medida da abertura do entalhe
CNR-DT 204	National Research Council – Guide for Design and Construction of Fiber Reinforced Concrete Structures (Conselho Nacional de Pesquisa - Guia para Projeto e Construção de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibra)
CRF	Concreto Reforçado com Fibras
CRFA	Concreto Reforçado com Fibras de Aço
DAfStb	Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (Comitê Alemão para Concreto Armado)
ECO	Equivalent Crack Opening (Abertura de Fissura Equivalente)
EHE	Instrucción de Hormigón Estructural (Instrução de Concreto Estrutural)
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
EN	European Committee For Standardization
FCO	Full Crack Opening (Abertura de Fissura Total)
MC2010	fib Model Code
MEF	Métodos dos Elementos Finitos
NBR	Normativa Brasileira
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

RILEM

Recomendação RILEM TC 162-TDF

UFPR

Universidade Federal do Paraná

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Distância medida do apoio até o ponto de aplicação da carga
$A_{camada(i)}$	Tensor de primeira ordem das áreas de cada camada analisada
b	Largura da seção transversal
[B]	Matriz de deformação
$CMOD_i$	Valor da abertura do entalhe, $i = 1, 2, 3$ ou 4 , sendo $CMOD_1 = 0,5$ mm, $CMOD_2 = 1,5$ mm, $CMOD_3 = 2,5$ mm e $CMOD_4 = 3,5$ mm
d	Profundidade efetiva da seção; Diâmetro da fibra
[D]	Matriz constitutiva do material
E_c	Módulo de elasticidade do CRF
E_s	Módulo de elasticidade do aço
EI_{eqv}	Rigidez equivalente
$E_{camada(i)}$	Tensor de primeira ordem dos módulos de deformação de cada camada analisada
F	Força
F_{cr}	Força de formação da fissuração
$F_{ext(j)}$	Força externa para a iteração atual
$F_{i(j)}$	Força interna para a iteração em questão
$F_{int(j)}$	Força interna para a iteração atual
F_j	Carga pontual medida no meio do vão do corpo de prova correspondente ao $CMOD = CMOD_i$
F_L	Maior carga medida no meio do vão do corpo de prova entre $0 \leq CMOD \leq 0,05$

F_{max}	Força máxima
f	Vetor de forças externas
f^c	Vetor das forças desconhecidas (reações de apoio)
f_{ck}	Resistência característica à compressão do CRF
f_{ct}	Resistência à tração axial do CRF/ Resistência de pico
$f_{ct,d}$	Resistência de projeto à tração do CRF de acordo com CE2021
$f_{ct,fl}$	Resistência à tração na flexão do CRF
f_{ctm}	Resistência média do CRF à tração
$f_{ctR,d}$	Resistência de projeto à tração residual do CRF correspondente ao $CMOD = CMOD_i$, de acordo com CE2021
f^e	Vetor de forças nodais equivalente elementar
f_{eq1}	Resistência equivalente pós-fissuração do CRF para estado limite de serviço de acordo com CNR-DT 204
$f_{ctd,L1}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF com fibra de aço na classe de desempenho 1 de acordo com DAfStb
$f_{ctd,L2}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF com fibra de aço na classe de desempenho 2 de acordo com DAfStb
$f_{ctd,s}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF no ELS de acordo com DAfStb
$f_{ctd,u}^f$	Resistência de projeto à tração pós-fissuração do CRF no ELU de acordo com DAfStb
$f_{ctm,fl}$	Resistência média à tração na flexão do CRF de acordo com RILEM
$f_{ctR,L1}^f$	Resistência à tração do CRF na classe de desempenho 1 de acordo com DAfStb

$f_{ctR,L2}^f$	Resistência à tração do CRF na classe de desempenho 2 de acordo com DAfStb
$f_{ctR,s}^f$	Resistência à tração do CRF de acordo com DAfStb no ELS
$f_{ctR,u}^f$	Resistência à tração do CRF de acordo com DAfStb no ELU
f_{Fts}	Resistência à tração direta do CRF, valor de serviço de acordo com CNRDT 204, MC2010 e NBR16935
f_{Ftu}	Resistência à tração direta do CRF, valor último de acordo com CNR-DT 204, MC2010 e NBR16935
f_L	Limite de proporcionalidade; e
f_{Ri}	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao $CMOD = CMOD_i$
f^u	Vetor das forças aplicadas
f_u	Resistência última do aço de reforço à tração
f_y	Resistência ao escoamento do aço de reforço à tração
$g_{(j)}$	Tensor de primeira ordem que calcula a força residual entre a força externa e a força interna para a iteração em questão
h_{sp}	Altura de um corpo de prova padrão descontado o entalhe
i	Índice para indicar o número de camadas
$I_{camada(i)}$	Tensor de primeira ordem com os momentos de inércia de cada camada analisada
j	Índice para indicar o número de iterações
k	Coefficiente para o tipo de tensão na seção transversal de acordo com CNR-DT 204 e MC2010
K	Matriz de rigidez do elemento finito

K^e	Matriz de rigidez elementar
$K_{eqv(j-1)}$	Matriz de rigidez atualizada resultante do modelo de rigidez equivalente para iteração anterior a iteração vigente.
K^{cc}	Submatriz de rigidez correspondente aos graus de liberdade conhecidos (restritos);
K^{cu}	Submatriz de rigidez que relaciona os graus de liberdade conhecidos (restritos) com os desconhecidos (não restringidos);
K^{uc}	Submatriz de rigidez que relaciona os graus de liberdade desconhecidos (não restringidos) com os conhecidos (restritos);
K^{uu}	Submatriz de rigidez correspondente aos graus de liberdade desconhecidos (não restringidos)
K_H	Fator de tamanho de acordo com RILEM
k_1	Coefficiente para o tipo de tensão na seção transversal de acordo com CE2021
L	Comprimento da fibra
l	Comprimento total do elemento finito de viga delimitado entre os nós inicial e final / Vão do corpo de prova
$\frac{L}{d}$	Fator de forma
L_c	Comprimento crítico
l_{cs}	Comprimento característico
[L]	Matriz de operadores diferenciais
$M_{camada(i)}$	Tensor de primeira ordem com os momentos de cada camada analisada
$M_{seção}$	Momento fletor atuante na seção
n	Número de camadas
[N]	Matriz das funções de forma

s_{rm}	Valor médio da distância entre fissuras
u	Vetor de deslocamentos
$u^{(e)}$	Campo de deslocamento transversal elementar
$u_{(j)}$	Tensor de primeira ordem com os deslocamentos resultantes da iteração antes da aplicação do Método de <i>Newton-Raphson</i> .
$u_{(j+1)}$	Tensor de primeira ordem com os deslocamentos finais da iteração após aplicação do Método de <i>Newton-Raphson</i>
V_f	Volume de fibras
w	Abertura de fissura
w_u	Abertura última de fissura
w_{i2}	Abertura média de fissura no ponto final do intervalo em que f_{eq2} é avaliado de acordo com CNR-DT 204
x	Valor da coordenada no eixo x ao longo do elemento finito; e
y	Altura da linha neutra
y_i	Valores das coordenadas no eixo y da divisão dos pontos das i-ésimas camadas consecutivas, que subtraídas resultam na altura da camada
$y_{camada(i)}$	Tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada
$y_{camada_novo(i)}$	Tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada atualizados conforme a nova posição da linha neutra
y_{LN}	Nova posição da linha neutra
ε	Deformação / Deformação no ponto nodal de interesse
ε_c	Deformação concreto
$\varepsilon_{camada(i)}$	Tensor de primeira ordem com as deformações de cada camada analisada
ε_{Fu}	Deformação última do CRF de acordo com CNR-DT 204 e MC2010

ε_{SLS}	Deformação de serviço do CRF de acordo com MC2010 e CE2021
ε_u	Deformação última
ε_{um}	Deformação última do aço
ε_y	Deformação do aço
ε_1	Deformação associada à resistência à tração σ_1
ε_2	Deformação associada à σ_2
ε_3	Deformação última em um diagrama σ - ε trilinear (deformação associada a σ_3)
ε^*	Deformação associada à tensão de pico
σ	Tensão
$\sigma_{camada(i)}$	Tensor de primeira ordem com as tensões de cada camada analisada
σ_1	Resistência à tração em um diagrama σ - ε trilinear
σ_2	Tensão que define o segundo ponto de um diagrama σ - ε trilinear
σ_3	Tensão que define o terceiro ponto de um diagrama σ - ε trilinear (associada à deformação última)
σ^*	Tensão de pico de um diagrama σ - ε multilinear
σ_f^*	Tensão máxima da fibra
σ_x	Tensões axiais
σ_y e σ_z	Tensões normais
δ	Deslocamento
τ_{au}	Tensão de aderência entre a fibra e a matriz
τ_{fu}	Tensão máxima da interface de atrito
Δu^c	Vetor dos deslocamentos conhecidos (restritos)
Δu^u	Vetor dos deslocamentos desconhecidos (não restringidos)
ξ	Tolerância

α^f_c

Coeficiente para o comportamento da resistência a longo prazo de acordo com DAfStb

γ^f_{ct}

Fator de segurança de acordo com DAfStb

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
1.1	OBJETIVOS.....	27
1.2	DELIMITAÇÃO DO TRABALHO.....	28
1.3	JUSTIFICATIVA.....	29
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	30
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	33
2.1	CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS (CRF).....	33
2.2	FIBRAS.....	34
2.3	COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CRF.....	37
2.3.1	Interação Fibra-Matriz.....	37
2.3.2	Fator de Forma	39
2.3.3	Teor das Fibras	41
2.3.4	Orientação das Fibras	42
2.3.5	Resistência Mecânica e Módulo de Elasticidade	43
2.4	MODELOS CONSTITUTIVOS CRF.....	49
2.4.1	<i>fib Model Code</i> (MC2010).....	54
2.4.2	Norma Espanhola: <i>Código Estructural</i> (CE2021)	58
2.4.3	Ensaio de caracterização EN 14651:2007 (CEN 2007)	61
2.5	ANÁLISE NUMÉRICA.....	63
3	REFERENCIAL TEÓRICO	69
3.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	69
3.2	TEORIA DE VIGA DE <i>EULER-BERNOULLI</i>	73
3.3	ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR	74
3.3.1	Tipos de não linearidade.....	74
3.3.2	Caminho de Equilíbrio	74
3.3.3	Método para solução de equações não lineares.....	76
4	METODOLOGIA	80
4.1	DEFINIÇÃO DO ELEMENTO	81
4.2	MÉTODO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES	81
4.2.1	Modelo de rigidez equivalente	82
4.2.2	Método de <i>Newton Raphson</i>	83

4.3	MODELOS CONSTITUTIVOS	86
4.4	VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS	87
4.5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	88
5	RESULTADOS.....	95
5.1	MODELOS CONSTITUTIVOS	96
5.2	ELEMENTO 55A + R.....	100
5.2.1	Influência do Tamanho do Incremento de Deslocamento.....	101
5.2.2	Influência da Quantidade de Camadas	103
5.2.3	Influência da Quantidade de Elementos	105
5.2.4	Resultados em termos de $F - \delta$	107
5.2.5	Distribuição de Tensões	109
5.3	ELEMENTO 55B + R.....	115
5.3.1	Resultados em termos de $F - \delta$	115
5.3.2	Distribuição de Tensões	117
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	122
6.1	CONCLUSÕES GERAIS	122
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	124
	REFERÊNCIAS	126

1 INTRODUÇÃO

O concreto é um material compósito obtido pela combinação de cimento, água, agregados miúdos, agregados graúdos e aditivos. Sua utilização é amplamente difundida na construção civil devido a diversas vantagens, como o custo acessível, a disponibilidade dos materiais, a versatilidade para se adequar a diferentes formas e processos construtivos, a facilidade de manuseio e aplicação, além de sua boa resistência a esforços de compressão (FARIA, 2017). No entanto, o concreto apresenta um comportamento frágil e limitações significativas na sua capacidade de resistir a esforços de tração, o que é particularmente relevante nas estruturas, onde esses esforços são frequentes, principalmente em elementos submetidos à flexão (RAVIKUMAR; RAMASAMY; THANDAVAMOORTHY, 2015).

A flexão no concreto pode resultar na formação de fissuras, comprometendo a integridade estrutural. Para reduzir esses problemas, é essencial utilizar reforços no concreto, o que proporciona maior ductilidade. A inclusão de barras de aço permite que o concreto suporte melhor os esforços de tração e flexão, aumentando sua resistência estrutural e durabilidade (FARIA, 2017).

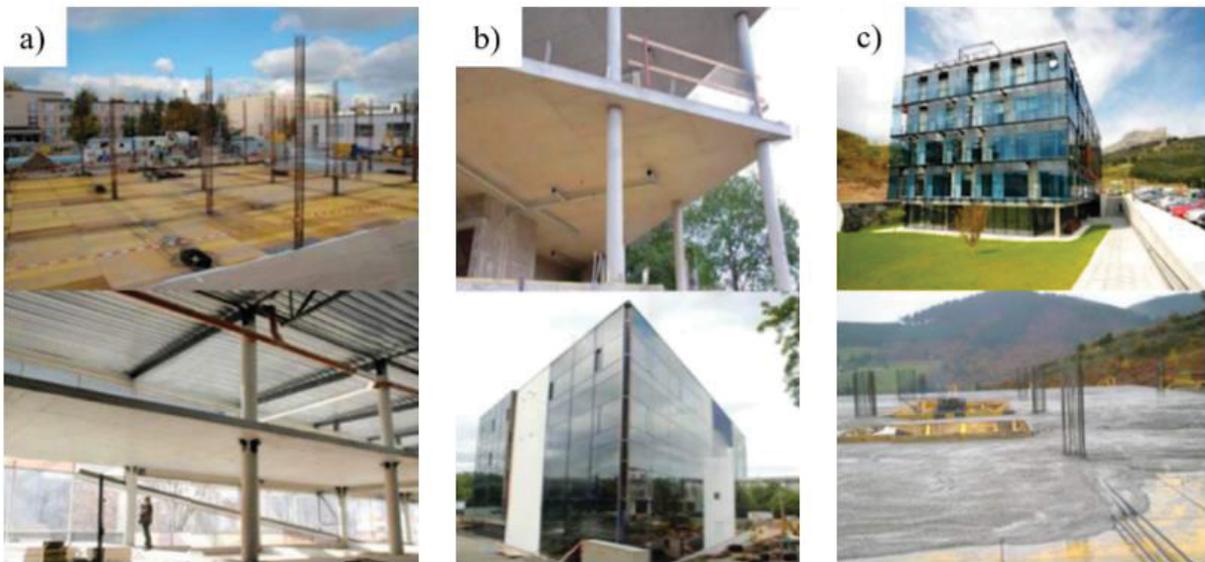
Além do uso de barras de aço (armadura convencional), outras alternativas de reforço têm sido estudadas para melhorar as propriedades mecânicas do concreto. Uma dessas opções é a adição de fibras à mistura do concreto em estado fresco. De acordo com Islam et al. (2014), a incorporação de fibras no concreto proporciona melhorias na resistência à tração, à flexão, ao cisalhamento e ao impacto, além de contribuir para o controle da fissuração. Essas fibras podem ser de diferentes materiais, como aço, polipropileno, vidro, entre outros, e sua adição resulta em um compósito mais resistente e durável.

O uso de fibras é uma técnica promissora, pois, além de melhorar as propriedades mecânicas do concreto, também contribui para uma melhor distribuição das tensões, reduzindo a propagação de fissuras e aumentando a vida útil das estruturas. O concreto reforçado com fibras está se tornando cada vez mais popular em todo o mundo devido ao seu excelente desempenho estrutural em comparação com o concreto simples (AL-AHMED et al., 2022). Segundo Pasa (2007), as fibras de aço têm sido amplamente empregadas em diversas obras, como pisos industriais, elementos pré-moldados, pavimentos de aeroportos e portos, e revestimento de túneis com concreto projetado.

De acordo com Trindade (2018), o CRF tem sido cada vez mais utilizado em projetos com maiores responsabilidades estruturais. Um exemplo disso pode ser visto na Figura 1, que mostra aplicações de lajes utilizando apenas fibras de aço como reforço estrutural. A Figura 1a

apresenta uma expansão realizada no *Ditton Nams, shopping* localizado na Letônia, com lajes planas de 42,5 m x 24 m e vãos de até 7 m. Na Figura 1b, está representado o edifício comercial *Rocca Tower*, localizado na Estônia, que possui um formato triangular com lajes de 21 cm de espessura e vãos de até 7 m, reforçadas unicamente com fibras de aço. Já a Figura 1c mostra o edifício comercial LKS, localizado na Espanha, possuindo cinco andares com lajes de 28 cm de espessura, também reforçadas somente com fibras de aço (DESTRÉE; MANDL, 2008). De acordo com os autores as lajes planas foram reforçadas exclusivamente com fibras de aço como forma de otimizar tempo e custo, substituindo o reforço tradicional de telas e barras.

Figura 1 – a) Shopping na Letônia; b) Edifício comercial na Estônia; c) Edifício comercial na Espanha.



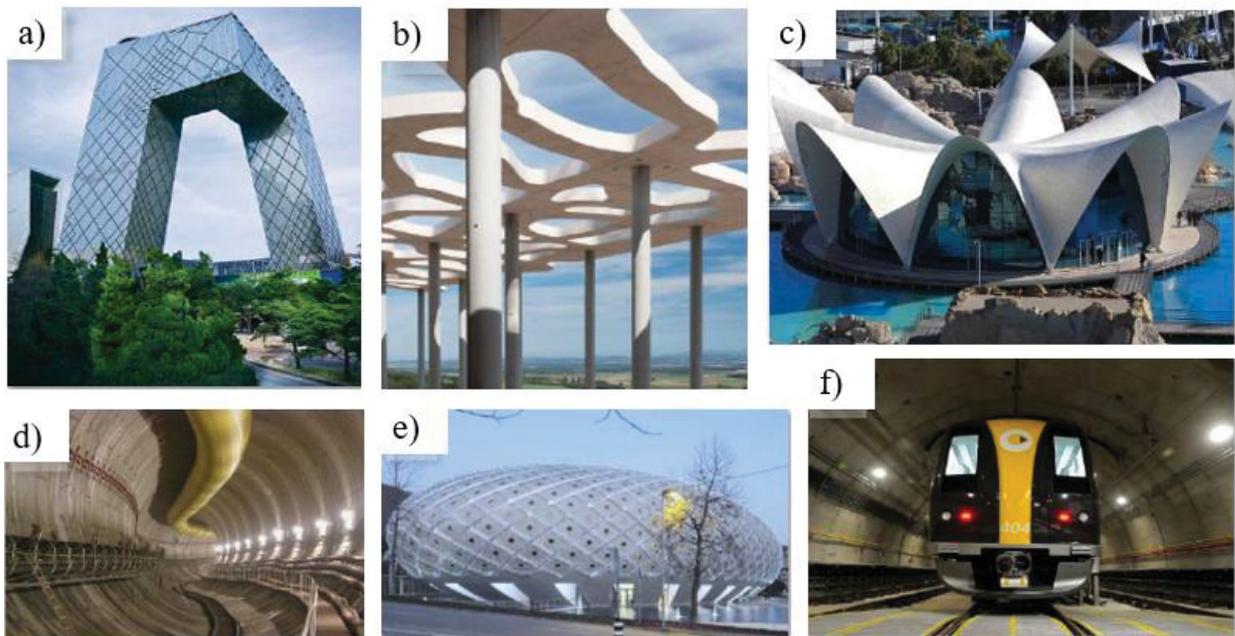
Fonte: Destrée; Mandl (2008).

Outros exemplos da aplicação das fibras de aço com substituição completa ou parcial das armaduras convencionais estão exemplificados na Figura 2. O primeiro exemplo, indicado na Figura 2a, apresenta o edifício *CCTV Tower*, localizado em Pequim, construído com barras de aço convencionais e concreto autoadensável com fibras de aço (TRINDADE, 2018). Na Figura 2b, está representada a cobertura da *Maison de l'Écriture*, localizada na Suíça; nesta estrutura, a utilização das fibras de aço permitiu reduzir a armadura mínima e remover as armaduras convencionais em locais de difícil instalação, devido à complexidade da geometria da estrutura (MUTTONI, 2014). Na Figura 2c, está representada a cobertura do Restaurante Submarino no Museu Oceanográfico, localizado na Espanha, onde foram utilizadas fibras de aço com malha de reforço convencional para atender aos requisitos de tensões de flexão e controle de fissuras em uma cobertura com espessura de 6 cm (SERNA et al., 2009). A Figura

2d mostra o revestimento do túnel da linha 9 do metrô de Barcelona, construído com uma combinação de fibras de aço e reforço convencional nos segmentos de concreto pré-moldado (TRINDADE, 2018). A Figura 2e apresenta um *shopping* localizado na Suíça; além do uso de reforço convencional e pós-tensionamento, foram empregadas fibras de aço com gancho para melhorar o controle de fissuras na região pós-tensionada e aumentar a ductilidade do concreto sob altas forças normais e de cisalhamento na ligação com o subsolo (MUTTONI et al., 2013). Por fim, a Figura 2f mostra o revestimento segmentar pré-moldado da linha 4 do Metrô de São Paulo, no Brasil, onde as fibras de aço foram utilizadas apenas como reforço do concreto (TELLES; FIGUEIREDO, 2006).

Dessa forma, a combinação de armaduras convencionais com fibras proporciona um reforço significativo ao concreto, tornando-o mais adequado para uma ampla gama de aplicações estruturais e garantindo maior segurança e desempenho das edificações. Essa abordagem integrada maximiza os benefícios de ambos os materiais, resultando em estruturas mais robustas e duráveis, capazes de suportar as diversas demandas mecânicas ao longo de sua vida útil. Além disso, o uso das fibras reduz as dificuldades de armação e permite a execução de geometrias complexas com maior facilidade.

Figura 2 – Exemplos de aplicações CRF.



Fonte: Trindade (2018).

Recentemente, foi publicada a normativa brasileira NBR 16935 (ABNT, 2021), específica para o projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras, estabelecendo

requisitos de desempenho mecânico para essas estruturas, tanto quando as fibras atuam isoladamente quanto em conjunto com as armaduras tradicionais. Adicionalmente, foram instituídas outras normas nacionais que tratam do controle de qualidade e da caracterização mecânica das fibras de aço.

Esses avanços normativos têm o potencial de aumentar o interesse pelo uso de fibras de aço como opção de reforço para o concreto no Brasil, seguindo uma tendência observada em outros países, como na Europa. Nesses locais, a publicação de normas e recomendações de projeto impulsionou o uso de fibras e estimulou a realização de pesquisas nessa área (BLANCO, 2013).

Apesar dos avanços nas pesquisas sobre o CRF, ainda há lacunas no entendimento do comportamento estrutural desse material. Um dos principais desafios na análise do CRF é a sua natureza não linear, tanto no material quanto no comportamento estrutural. A não linearidade no CRF é influenciada por fatores como a interação entre a matriz de concreto e as fibras e o fenômeno de fissuração do concreto. A análise numérica se apresenta como uma ferramenta poderosa para explorar essas propriedades e validar modelos constitutivos complexos (MATOS, 2021).

Assim, torna-se evidente a necessidade de desenvolver modelos que representem com segurança o comportamento das estruturas, considerando efeitos como a não linearidade dos materiais e a identificação do modelo constitutivo mais adequado para reproduzir o comportamento do material. Deste modo, o uso de métodos computacionais na engenharia torna-se cada vez mais relevante, pois permite a realização de estudos mais realistas e, conseqüentemente, a obtenção de análises precisas. Além disso, possibilitam a simulação e verificação das premissas necessárias para garantir a confiabilidade dos parâmetros de projeto (PARASKI, 2012).

1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho consiste em desenvolver um modelo numérico para prever o comportamento mecânico de elementos unidirecionais de concreto reforçado com barras longitudinais e fibras de aço submetidos à flexão simples, considerando a não linearidade do material. Para alcançar esse objetivo, tem-se os seguintes objetivos específicos:

- Validar as respostas dos elementos estruturais simulados em termos de força-deslocamento, por meio de uma análise comparativa com os resultados experimentais disponíveis na literatura;
- Avaliar a influência do número de incrementos no comportamento não linear do material e verificar a eficiência do modelo em capturar esse comportamento com diferentes números de incrementos;
- Investigar a importância da discretização em camadas da seção transversal dos elementos e verificar a precisão do modelo com diferentes números de camadas.

1.2 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho foca no desenvolvimento e validação de um modelo numérico para prever o comportamento mecânico de elementos unidimensionais de concreto reforçado com barras longitudinais e fibras de aço sob flexão simples. Abaixo são especificados os limites e as principais abordagens adotadas:

- a) Escopo dos Materiais: Este estudo considera vigas de concreto reforçadas com barras de aço longitudinais (armadura convencional) e fibras de aço. Outros tipos de fibras ou reforços, ou adições de materiais distintos, não são incluídos na modelagem;
- b) Modelo Numérico: O modelo numérico desenvolvido utiliza elementos finitos de vigas de *Euler-Bernoulli* e o modelo de rigidez equivalente, considerando um comportamento não linear através de modelos constitutivos propostos pelo *fib Model Code* e pelo *Código Estrutural* para o concreto sob tração. Os efeitos não lineares complexos e detalhados do concreto e do aço são abordados de maneira simplificada, adotando um modelo elástico-linear para o aço e o concreto sob compressão;
- c) Ferramentas Computacionais: A implementação foi realizada em linguagem *Python*, utilizando o método de *Newton-Raphson* com incrementos de deslocamento para resolver as equações de equilíbrio. O uso de outras plataformas, softwares comerciais ou técnicas avançadas de elementos finitos, não foram considerados;
- d) Validação Experimental: Os resultados numéricos foram comparados com dados de ensaios experimentais específicos disponíveis na literatura. Este trabalho não inclui a

realização de experimentos laboratoriais próprios, limitando-se a simulações computacionais e comparações com dados publicados;

- e) Aplicação dos Resultados: Este estudo foca em vigas unidimensionais sob flexão simples. Não são abordadas aplicações em elementos bidimensionais ou tridimensionais.

1.3 JUSTIFICATIVA

Nos últimos anos, houve um aumento no interesse por estudos numérico-computacionais sobre o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço, complementando as pesquisas experimentais. Essas análises computacionais permitem uma investigação mais detalhada do comportamento estrutural, incluindo a distribuição de tensões e deformações, a capacidade de carga e os mecanismos de falha (MATOS, 2021). A abordagem numérica é valiosa não apenas para aprofundar o conhecimento sobre o material, mas também para modelar peças estruturais de concreto armado com armaduras convencionais e fibras de aço (TRINDADE, 2018).

O CRF apresenta um comportamento complexo devido à interação entre a matriz de concreto e as fibras. Este comportamento é influenciado por diversos fatores, incluindo as propriedades das fibras, a distribuição e orientação das fibras dentro da matriz, e a interação entre as fibras e o concreto. Para desenvolver modelos constitutivos precisos que possam ser utilizados em análises numéricas e projetar estruturas seguras e eficientes, é essencial entender e quantificar esses fatores (RODRIGUES, 2023).

As leis constitutivas se fundamentam em dois modelos principais: o modelo de tensão *versus* abertura de fissuras (σ - w) e o modelo de tensão *versus* deformação (σ - ϵ). Estes modelos podem ser obtidos por meio de abordagens diretas.

A análise direta permite aplicar imediatamente os parâmetros dos modelos constitutivos, com base nos dados experimentais obtidos através de ensaios de flexão de 3 pontos, teste de tração uniaxial, teste de painel circular, teste de Barcelona, entre outros. Sendo possível calcular diretamente o comportamento do material sob condições específicas de carregamento, alinhando-se com as práticas estabelecidas em normas e diretrizes reconhecidas, como DBV, RILEM, CE2021 e *fib Model Code* (LARANJEIRA DE OLIVEIRA, 2010).

No entanto, de acordo com Buttignol et al. (2018), uma das principais desvantagens do uso de ensaios de flexão para caracterizar o CRF é a necessidade da análise inversa para

obter a curva de resistência à tração do material. A análise inversa é um processo em que se ajusta um modelo numérico para que ele simule com precisão os resultados experimentais observados em laboratório. Esse ajuste é feito por tentativa e erro, adaptando continuamente os parâmetros do modelo até que ele reproduza o comportamento observado no ensaio. Embora a análise inversa permita a identificação de parâmetros do material a partir dos dados experimentais, sua aplicação em ensaios de flexão do CRF apresenta limitações. Essas limitações incluem a dependência da qualidade dos dados experimentais, o fato de que múltiplas combinações de parâmetros podem fornecer ajustes adequados, e a necessidade de pressupor uma forma prévia da curva constitutiva, o que pode influenciar a precisão dos parâmetros obtidos, tornando o método menos eficiente e confiável em comparação com ensaios diretos de tração.

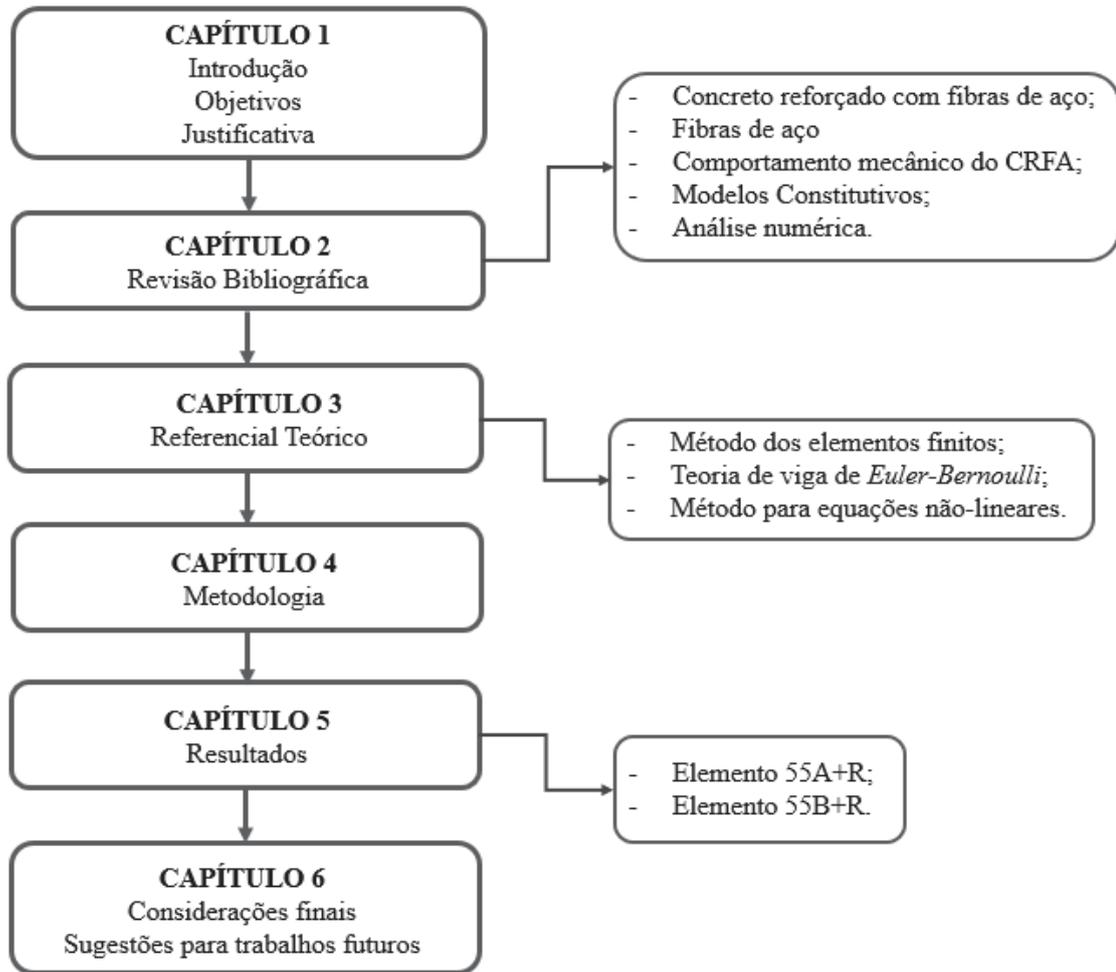
Apesar de proporcionar uma calibração mais precisa dos parâmetros do modelo constitutivo, demanda um esforço significativo em termos de tempo e recursos. A análise inversa requer múltiplas iterações de ajuste e validação, o que pode ser um processo demorado e complexo. Muitas vezes, os parâmetros precisam ser reajustados mais de uma vez para garantir que o modelo represente fielmente os dados experimentais, tornando-se um processo iterativo que pode atrasar a obtenção de resultados práticos.

Tendo em vista os pontos citados, o desenvolvimento e a aplicação de um código computacional sem a necessidade de uma análise inversa do CRF contribuem para o avanço do conhecimento na engenharia estrutural, reduzindo processos associados a simulação. Permitindo assim uma análise do comportamento do CRF com base em modelos consagrados e amplamente validados, sem a necessidade de ajustes contínuos e revalidações exigidos pela análise inversa.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação está organizada em seis capítulos, cada um com um propósito específico que contribui para a construção do trabalho como um todo, conforme apresentado no esquema da Figura 3.

Figura 3 – Organização da Dissertação



Fonte: A autora (2024).

No primeiro capítulo, é realizada uma introdução ao tema da dissertação, com uma contextualização sobre o assunto em questão. Além disso, são apresentados os objetivos da pesquisa, indicando o que se pretende alcançar com o estudo. Por fim, a justificativa é apresentada, demonstrando a relevância do tema e os motivos pelos quais a pesquisa foi realizada.

O segundo capítulo é dedicado à revisão da literatura existente sobre o tema da dissertação, apresentando os principais trabalhos, estudos e teorias relacionados ao assunto, buscando embasar teoricamente a pesquisa, conforme tópicos apresentados na Figura 3. Na sequência, dando continuidade aos embasamentos teóricos da pesquisa, é apresentado o capítulo 3 com uma breve abordagem teórica das estratégias de simulações numéricas que serviram como base para o desenvolvimento desta pesquisa, com tópicos indicados na Figura 3.

O capítulo 4 descreve a metodologia adotada para realização da simulação numérica para verificação do comportamento à flexão simples de elementos unidirecionais de concreto reforçado com barras longitudinais e fibras de aço.

O capítulo 5 apresenta os resultados obtidos nas simulações computacionais realizadas com o código desenvolvido neste trabalho, com a simulação de duas vigas para validar a eficiência da implementação do programa, por meio de gráficos de força-deslocamento comparados com dados experimentais. Além disso, realiza-se uma análise da eficiência do modelo quanto à discretização das camadas e incrementos.

Por fim, o último capítulo apresenta as conclusões do trabalho com base nos resultados obtidos e sugere possíveis direções para pesquisas futuras que possam complementar e expandir os achados deste estudo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O concreto reforçado com fibras tem ganhado cada dia mais destaque no setor da construção civil. A adição de fibras ao concreto contribui para uma melhor transferência de tensões e, conseqüentemente, contribuem para o controle de abertura de fissuras, proporcionando um aumento na resistência do compósito (MUNIZ, 2021). Com o aumento da utilização do concreto reforçado com fibras de aço se faz necessária a avaliação do comportamento estrutural em diferentes geometrias, elementos e aplicações. Investigar diversos comportamentos em diferentes situações apenas de maneira experimental torna o processo demorado e custoso (BITENCOURT JR. et al., 2019).

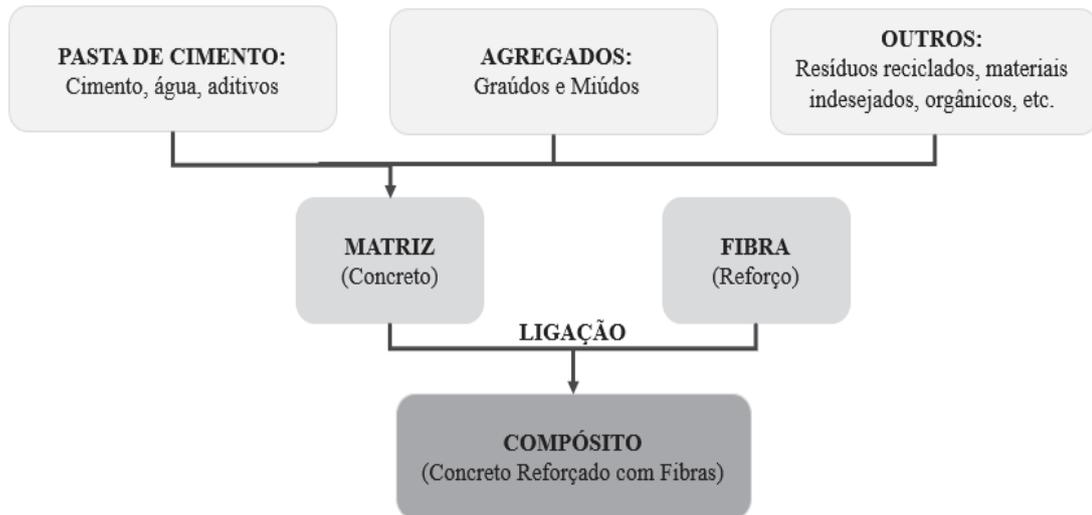
Desta forma, estudos para análise computacional do concreto reforçado com fibras são fundamentais para a compreensão de seu comportamento. Assim, neste capítulo serão abordados os conceitos básicos para dar subsídio à realização da análise computacional de estruturas de concreto armado reforçado com fibras de aço, sendo apresentados os conceitos a respeito do concreto reforçado com fibras, das propriedades e comportamento mecânico das fibras, os modelos constitutivos para CRF, como também a descrição de alguns estudos que realizaram simulações numéricas do CRF.

2.1 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS (CRF)

O concreto reforçado com fibras é composto por uma matriz cimentícia e fibras dispersas de maneira aleatória, denominado como um material compósito (JANSSON, 2008).

Segundo Nossa (2011), os materiais compósitos são formados pela matriz e pelo componente estrutural. De acordo com a autora, a matriz tem a função de conectar o componente estrutural e dar forma ao compósito, sendo através dela realizadas as transferências de tensões para o material de reforço, além de protegê-lo de agentes agressivos (no caso do CRF, constituído pelo concreto ou argamassa). Já o componente estrutural é parte do compósito que proporciona a resistência mecânica (no caso do CRF, constituído pelas fibras). Ambos os componentes trabalham de maneira simultânea através da ligação existente entre eles, o que resulta em um compósito eficaz, com uma combinação das propriedades de seus constituintes, conforme apresentado na Figura 4 (QASRAWI; SHALABI; ASI, 2007).

Figura 4 - Modelo compósito considerado como um sistema com dois componentes (fibras e matriz)

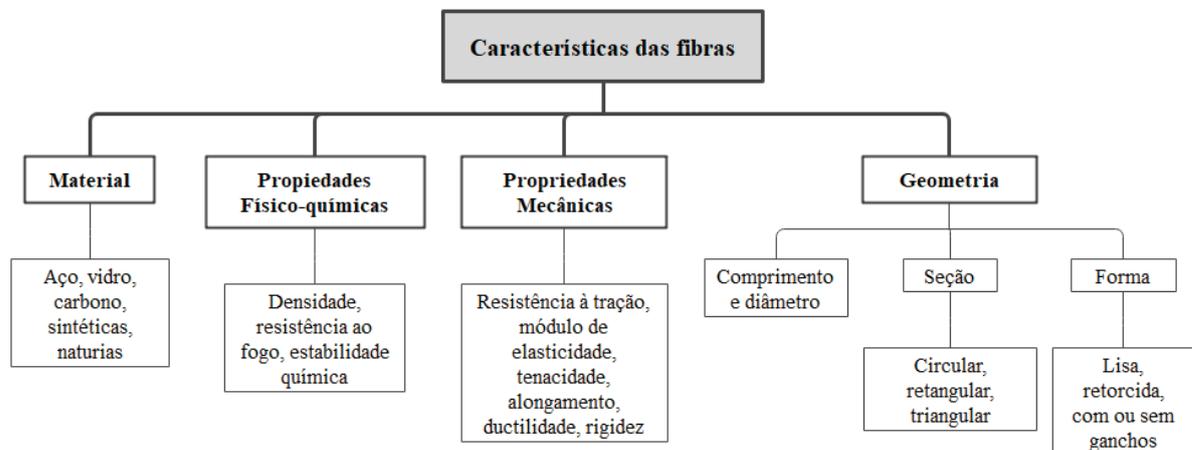


Fonte: Adaptado de Qasrawi, Shalabi, Asi (2007).

2.2 FIBRAS

As fibras utilizadas no concreto podem ser classificadas de diferentes formas, de acordo com o material empregado em sua composição – aço, vidro, carbono, sintéticas ou naturais –, de acordo com suas propriedades físico-químicas – densidade, resistência ao fogo, estabilidade química –, segundo suas propriedades mecânicas – resistência à tração, módulo de elasticidade, tenacidade, alongamento, ductilidade, rigidez –, ou ainda conforme sua geometria – comprimento, diâmetro, seção, forma – (NAAMAN, 2008). Tais características estão apresentadas no esquema da Figura 5.

Figura 5 - Característica das fibras



Fonte: Adaptado de Naaman (2008).

Diferente do reforço normalmente utilizado com barras de aço ou telas soldadas, as fibras de acordo com Bolandim (2021), são caracterizadas como um reforço descontínuo, tridimensionalmente orientado, isotrópico ou anisotrópico. Nos dias atuais existem diversos tipos de fibras disponíveis para construção civil (Figura 6), variando desde seu processo de fabricação, tipo de material utilizado, formato, ancoragem, tamanho ou ainda em suas propriedades mecânicas.



Fonte: Weiler; Groose, 1996, apud Barros, 2009; Figueiredo, 2011; Vaz, 2015; Dos Santos, 2020; Abreu, 2021; Menezes, 2011; Dos Santos, 2021

De acordo com a normativa brasileira NBR 15530 (2019), são previstos três tipos de fibras com base em seus perfis: Tipo A, com ancoragem nas extremidades; Tipo C, com ondulações no corpo (corrugada); Tipo R, reta sem ancoragem. Além disso, a norma ainda traz uma classificação com base no tipo de material utilizado para a fabricação das fibras de aço, conforme indicado na Tabela 1, ou ainda com base na sua forma – retas ou deformadas –, seu revestimento, com base na classificação do aço – teor de carbono utilizado –, ou ainda com base nas tolerâncias de comprimento e diâmetro da fibra.

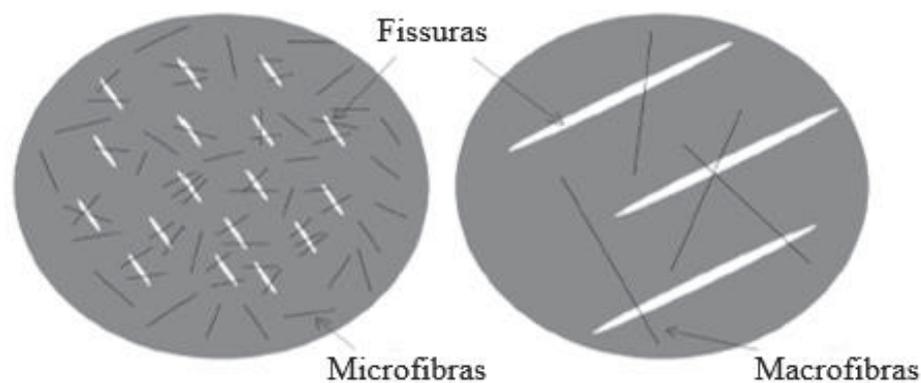
Tabela 1 – Grupos de fibras de aço

Grupo I	arames trefilados a frio
Grupo II	chapas cortadas
Grupo III	arames trefilados a frio e escarificados
Grupo IV	fibras produzidas por fusão
Grupo V	usinadas a partir de blocos de aço

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 15530 (2019).

Em relação ao formato, as fibras podem ser classificadas de acordo com suas dimensões como microfibras e macrofibras. De acordo com Salvador (2013), as microfibras possuem comprimento entre 3 e 18mm e diâmetro na ordem de 10 a 30 μm e são utilizadas para controle de retração e fissuração do concreto, com dosagens na faixa de 0,10% a 0,30% em volume. Já as macrofibras possuem comprimento entre 30 e 60mm e diâmetro superior a 0,30mm e são utilizadas para melhorar a resistência residual à tração do concreto, com dosagens que variam de 0,20% a 0,60% em volume. A Figura 7 mostra a distribuição das microfibras e macrofibras no concreto.

Figura 7 – Distribuição de microfibras e macrofibras



Fonte: Dantas (2020).

A utilização das fibras para reforço no concreto tem um papel importante principalmente no seu estado de pós-fissuração, com aumento da ductilidade do material e melhor distribuição de tensões reduzindo a abertura de fissuras (JANSSON, 2008). A redução da abertura de fissuras como outros benefícios da utilização das fibras no concreto, dependem de diversos fatores atribuídos às fibras, como o fator de forma, o teor das fibras, a orientação das fibras, resistência mecânica e módulo de elasticidade.

2.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CRF

Para que o concreto reforçado com fibras tenha um comportamento mecânico adequado, é necessário levar em consideração vários fatores relacionados às fibras, tais como sua orientação, distribuição e eficiência. Além disso, é importante avaliar parâmetros relacionados à interface entre a fibra e a matriz, como a aderência, o atrito, a resistência mecânica e o intertravamento das fibras na matriz. O volume de fibras em relação ao tipo de concreto utilizado e o fator de forma das fibras também são considerações importantes (NAAMAN, 2008). A Figura 8 esquematiza todos esses parâmetros para uma melhor compreensão do comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras, e na sequência é abordada uma breve explicação a respeito do comportamento mecânico do CRF.

Figura 8 – Parâmetros mecânicos que controlam o comportamento mecânico do compósito



Fonte: Adaptado de Naaman (2008).

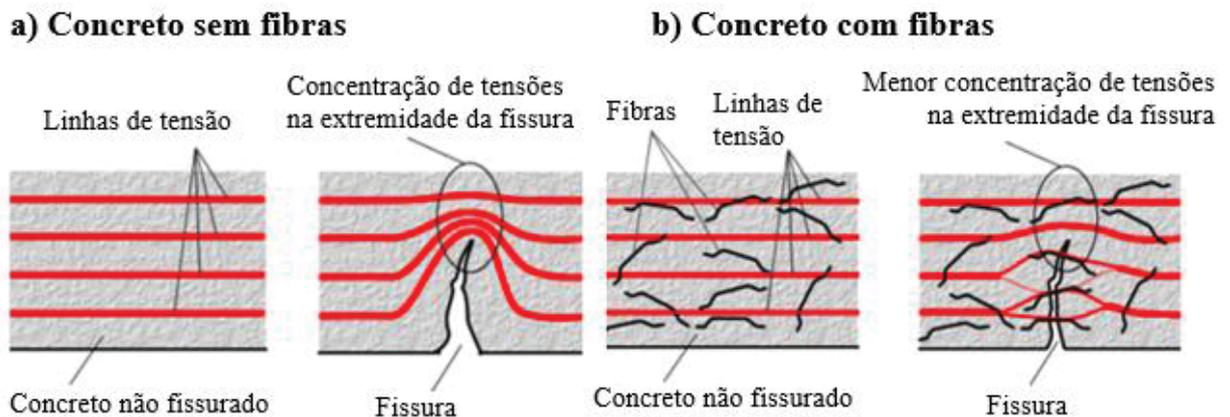
2.3.1 Interação Fibra-Matriz

O concreto simples é caracterizado muitas vezes por ser um material com comportamento frágil quando solicitado por esforços de tração. No instante que o concreto fissa, as linhas de tensão sofrem um desvio para a região da extremidade da fissura, que irá implicar na concentração de tensões nessa região, conforme indicado na Figura 9a, quando essa tensão supera a resistência do concreto, ocorrerá uma ruptura abrupta do material, devido ao

comportamento tipicamente frágil que o concreto apresenta (BARROS, 2009; FIGUEIREDO, 2011).

Com a adição de fibras no concreto, ocorre a interação entre a fibra e a matriz, reduzindo a propagação e abertura de fissuras, deixando o concreto mais dúctil e aumentando sua capacidade de absorção e distribuição de tensões (FIGUEIREDO, 2011). De acordo com o autor, isso ocorre pelo fato de as fibras servirem como uma ponte de transferência de tensões, reduzindo a concentração de tensões nas extremidades das fissuras, conforme indicado na Figura 9b. Além disso, segundo Bentur e Mindess (2006), elas são capazes de conferir tenacidade ao concreto, através dos mecanismos de absorção de energia relacionados à quebra da ligação entre a fibra e a matriz e ao arrancamento da fibra.

Figura 9 - Esquema da concentração de tensões



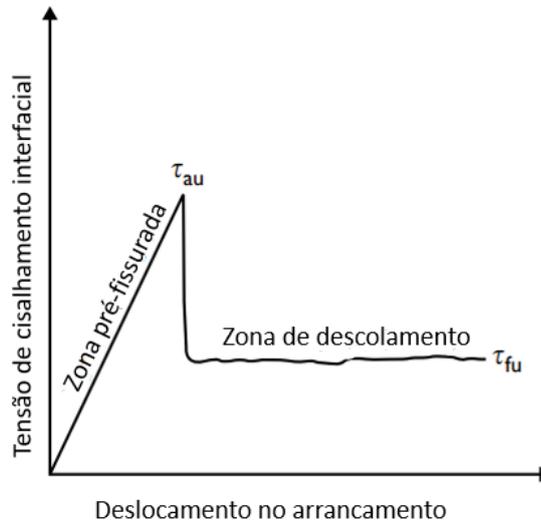
Fonte: Barros (2009).

O desempenho da interação entre a fibra e a matriz depende de fatores, como a geometria e rugosidade das fibras e as características da matriz cimentícia. A interação entre a fibra e a matriz definirá como a matriz se comporta e como será o arrancamento das fibras. Segundo Bentur e Mindess (2006), existem dois comportamentos para transferência de esforços entre a matriz e as fibras, são eles: pré e pós-fissuração da matriz, dos quais o mecanismo de reforço é composto por uma parcela elástica e por uma parcela de atrito.

No estágio de pré-fissuração, as tensões de cisalhamento possuem um comportamento elástico, as deformações na interface são compatíveis e a transferência de tensões entre a fibra e a matriz acontece por aderência (GERCEZ, 2005). De acordo com a autora, em virtude da diferença de rigidez entre os componentes, surgem tensões tangenciais ao longo da interface entre fibra e matriz, que auxiliam na transferência de parte da força aplicada para as fibras. Quando essas tensões ultrapassam a tensão de aderência entre a fibra e a matriz (τ_{au}), surgem

as tensões de atrito e inicia-se a fase de deslizamento das fibras da matriz, ocorrendo a transição entre as transferências de tensões de aderência para as transferências de tensões por atrito, sendo τ_{fu} a tensão máxima da interface de atrito, que permanece constante após o escorregamento da fibra, conforme indicado na Figura 10 (BENTUR; MINDESS, 2006).

Figura 10 - Transferências de tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz após desligamento parcial da fibra



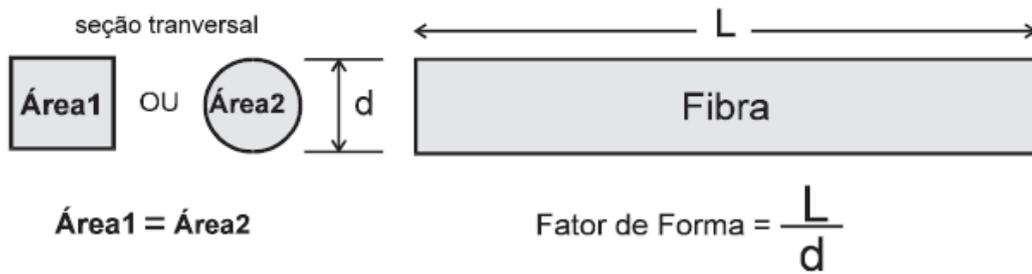
Fonte: Adaptado de Bentur e Mindess (2006).

No estágio de pós-fissuração, conforme as solicitações de carregamento vão aumentando, o campo de tensões passa a atuar de forma não linear e após o surgimento das primeiras fissuras críticas, o mecanismo principal na transferência de tensões entre a matriz e a fibra passa a ser por atrito no deslizamento da fibra, fator que influencia as propriedades mecânicas do CRF em seu estado pós-pico. As fibras passam então a formar as pontes de ligação, dando origem as “costuras” das fissuras, aumentando a capacidade de transferência de tensões (BENTUR; MINDESS, 2006 apud DANTAS, 2020).

2.3.2 Fator de Forma

De acordo com a NBR 15530 (ABNT, 2019), o fator de forma é a relação entre o comprimento da fibra (L) e o diâmetro da circunferência com área equivalente a seção transversal (d), conforme indicado na Figura 11. E é capaz de indicar o grau de eficiência da fibra em função da sua geometria (NUNES, 2006).

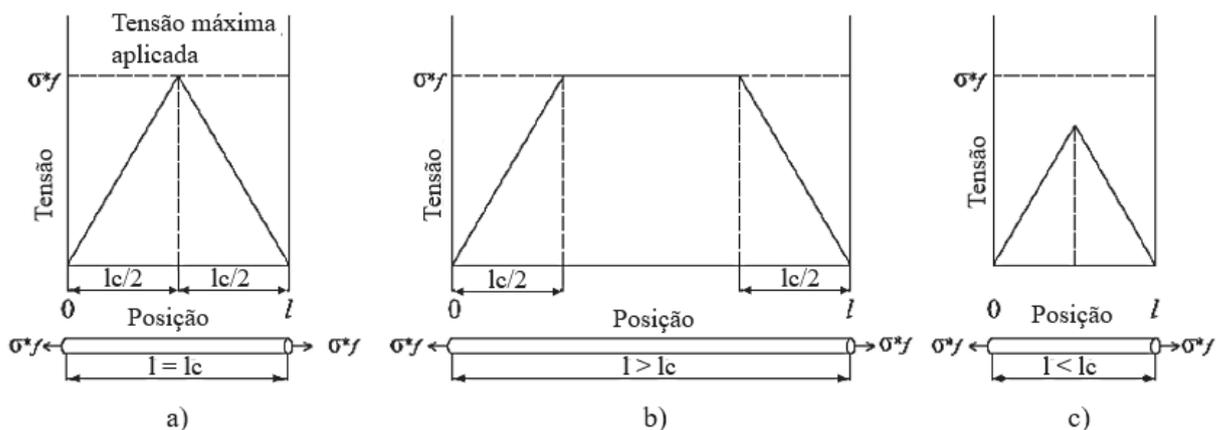
Figura 11 - Fator de forma



Fonte: Nunes (2006).

Segundo Dantas (2020), o aumento do comprimento da fibra indica um maior comprimento de ancoragem, além de possuir relação com sua resistência de arrancamento. De acordo com o autor, para que as tensões sejam transferidas de maneira efetiva, as fibras devem possuir um valor mínimo para seu comprimento, chamado de comprimento crítico (l_c), sendo este a medida da extensão máxima que as fibras podem ter antes de perder sua capacidade de transferir tensão para a matriz do concreto. A Figura 12 ilustra a distribuição de tensões ao longo do comprimento da fibra, quando aplicada uma tensão máxima da fibra (σ_f^*), com comprimento equivalente (a), maior (b) e menor (c) ao comprimento crítico.

Figura 12 - Distribuições de tensão em relação ao comprimento crítico: a) igual; b) maior; c) menor.



Fonte: Dantas (2020).

Outro fator que está diretamente relacionado ao fator de forma das fibras é o melhor desempenho do concreto reforçado com fibras em seu estado endurecido, principalmente em seu estado pós-pico. Com o aumento do fator de forma há uma melhor aderência entre a fibra e a matriz. No entanto, um maior fator de forma reduz a trabalhabilidade no comportamento fresco do CRF (CHANH, 2005 apud BARROS, 2009).

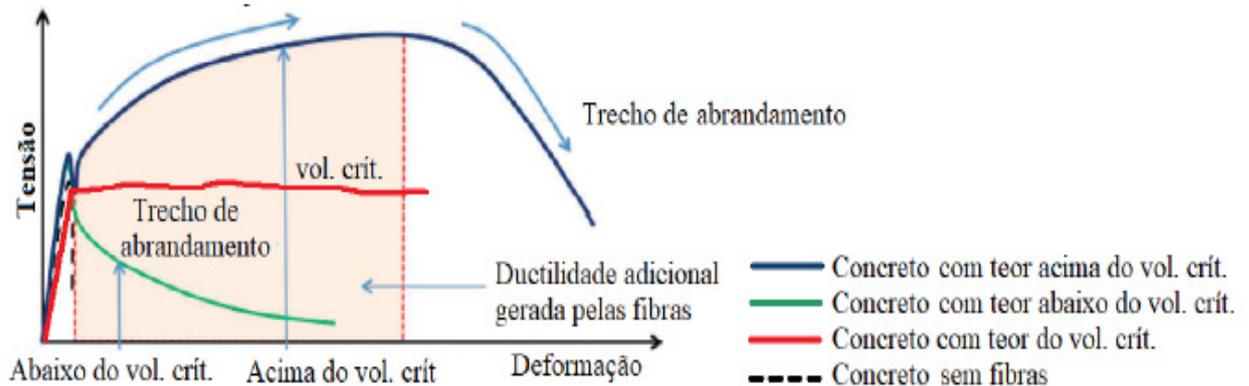
2.3.3 Teor das Fibras

Um papel importante da utilização das fibras no concreto está relacionado ao controle de fissuração e ao aumento da capacidade de absorção de tensões após o surgimento da primeira fissura. O aumento do teor de fibras incorporadas ao concreto está diretamente associado à capacidade de reforço que as fibras apresentam, visto que, quanto maior for o teor, maior será o número de fibras atuando como ponte de transferência de tensões, aumentando o número de fibras atuantes nas fissuras e no reforço pós fissuração do concreto, além de apresentar um aumento na tenacidade à flexão (NUNES, 2006; FIGUEIREDO, 2011; GARCEZ, 2005).

No entanto, um grande volume de fibras adicionado ao concreto também pode apresentar certas desvantagens ao comportamento pós-fissuração, em virtude de problemas de compactação e dispersão das fibras no concreto, acarretando agrupamentos de fibras e na formação de ouriços, o que pode trazer prejuízos na resistência mecânica do compósito (MATOS, 2021; NUNES, 2006).

O teor de fibras é um fator importante no comportamento do compósito, e um conceito fundamental nesse contexto é o volume crítico de fibras. Esse volume corresponde ao teor de fibras que permite ao material manter a capacidade portante do seu estado pré-pico, mesmo após o surgimento de uma fissura crítica. Se o teor de fibras for inferior ao volume crítico, ocorre uma queda na capacidade de carga suportada pelo material após a fissuração da matriz, caracterizando um comportamento *strain-softening*, ou seja, um abrandamento da curva tensão-deformação no pós-pico. Por outro lado, se o teor de fibras for superior ao volume crítico, o compósito é capaz de suportar níveis de carregamento crescentes mesmo após o surgimento de uma fissura crítica, o que é conhecido como comportamento *strain-hardening* ou enrijecimento da curva tensão-deformação no pós-pico (DANTAS, 2020; NAAMAN, 2008 apud FIGUEIREDO, 2011). Este conceito encontra-se ilustrado na Figura 13, onde são apresentadas as curvas de tensão deformação do concreto sem fibras, com teor de fibras igual, superior e inferior ao volume crítico.

Figura 13 - Comportamento do concreto reforçado com fibras



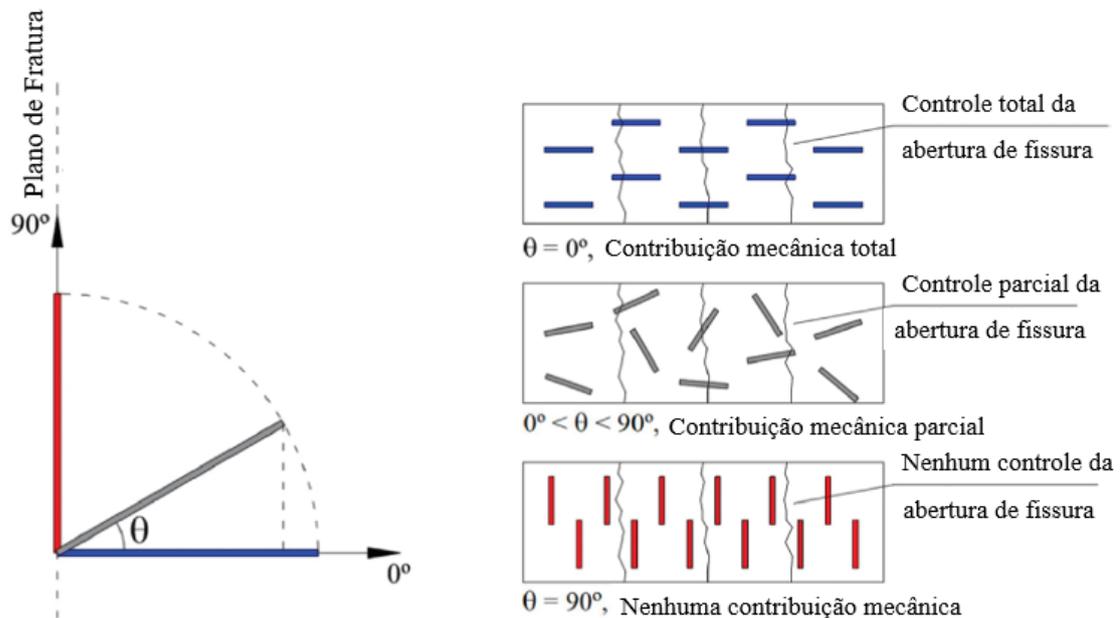
Fonte: ACI 544.4R:18, 2018 apud Dantas, 2020.

2.3.4 Orientação das Fibras

A orientação das fibras é um aspecto importante quando se fala da caracterização do CRF, pois ela pode influenciar significativamente as propriedades mecânicas do material como na resistência à tração residual do elemento (ZIRGULIS et al., 2016).

As fibras distribuídas no concreto nem sempre estão alinhadas na direção do esforço principal da seção. Segundo Laranjeira et al. (2012), a transferência dos esforços em uma seção fissurada do concreto reforçado com fibras depende não só das propriedades mecânicas das fibras, mas também da sua orientação e distribuição na matriz de concreto. Assim, a eficiência das fibras no comportamento pós-fissuração do concreto pode ser aumentada ou reduzida, dependendo do ângulo de orientação em que se encontram. A Figura 14 ilustra a eficiência das fibras de acordo com o ângulo de orientação na matriz, mostrando que as fibras orientadas perpendicularmente ao plano da fratura - ou seja, fibras orientadas a 0° - apresentam uma contribuição total para a resistência mecânica, com uma resistência residual maior e, portanto, uma eficiência estrutural maior, em comparação às fibras inclinadas em 90° no plano de fratura, ou seja, orientadas paralelamente ao plano de fratura (DE ANDRADE et al., 2021).

Figura 14 – Contribuição da fibra através de sua orientação no plano de fratura



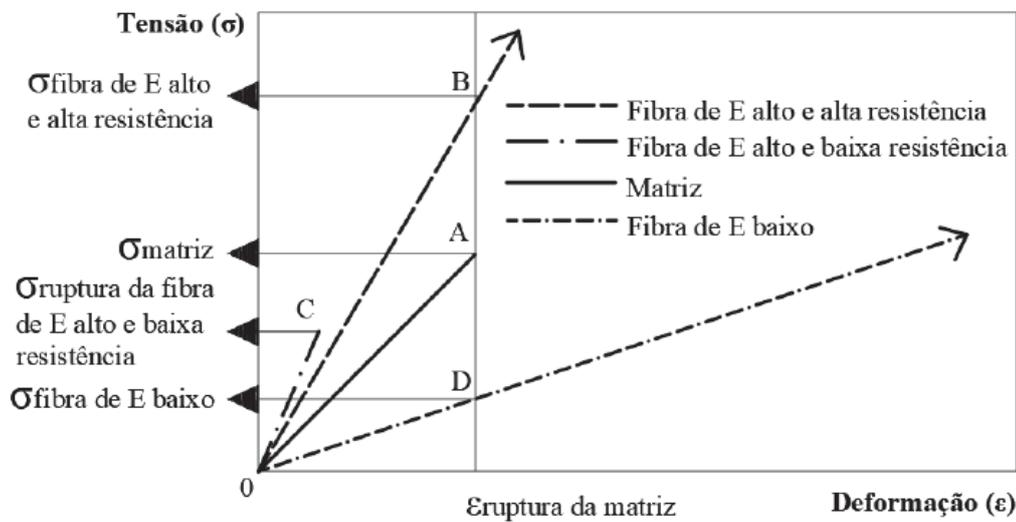
Fonte: Adaptado de De Andrade et al. (2021).

2.3.5 Resistência Mecânica e Módulo de Elasticidade

A resistência mecânica à tração e ao cisalhamento, assim como o módulo de elasticidade da fibra, são as duas propriedades mais importantes que influenciam na capacidade de reforço que a fibra proporciona ao concreto. A partir destas propriedades, as fibras são classificadas como de alto ou baixo módulo. Fibras com módulo de elasticidade superior ao do concreto endurecido são classificadas como de alto módulo, como é o caso das fibras de aço e de vidro. Já as fibras de baixo módulo, são aquelas que possuem módulo de elasticidade inferior ao do concreto endurecido, como é o caso das fibras poliméricas (FIGUEIREDO, 2011).

Para ilustrar como estas propriedades influenciam no concreto reforçado com fibras, a Figura 15 apresenta o diagrama tensão deformação de uma matriz reforçada com três tipos de fibras com módulo de elasticidade e resistências distintas, sendo uma com alto módulo de elasticidade e alta resistência, uma com alto módulo de elasticidade e baixa resistência e outra com baixo módulo de elasticidade.

Figura 15 – Diagrama tensão x deformação elástica de matriz e fibras de alto e baixo módulo de elasticidade trabalhando em conjunto



Fonte: Figueiredo (2011).

É possível perceber na Figura 15, que uma fibra com baixo módulo de elasticidade suporta um nível de tensão inferior à tensão de ruptura da matriz, necessitando desta forma, de elevados teores de fibras para se obter uma boa capacidade de reforço e controle de fissuração.

Por outro lado, uma fibra com alto módulo de elasticidade e alta resistência, apresenta um nível de tensão superior à tensão de ruptura da matriz, o que permite que a fibra atue como reforço no momento pós-fissuração. E desta forma, podem ser utilizadas como reforço primário do concreto, substituindo parcial ou totalmente o reforço convencional, não sendo utilizadas apenas para controle de fissuração.

No entanto, ter um alto módulo de elasticidade não confere à fibra uma boa capacidade de reforço. As fibras com alto módulo, mas com baixa resistência possuem uma capacidade de reforço reduzida ou até mesmo inexistente, visto que a ruptura das fibras pode ocorrer antes mesmo da ruptura da matriz, inviabilizando o reforço da matriz no pós-fissuração (FIGUEIREDO, 2011)

Naaman (2000) cita que para conferir capacidade de reforço aos compósitos, as fibras precisam possuir resistência à tração, duas a quatro vezes, superior à resistência da matriz; módulo de elasticidade pelo menos três vezes superior ao da matriz; resistência da interface fibra-matriz da mesma ordem ou superior à resistência à tração da matriz e fibras dúcteis para matrizes de concreto frágil.

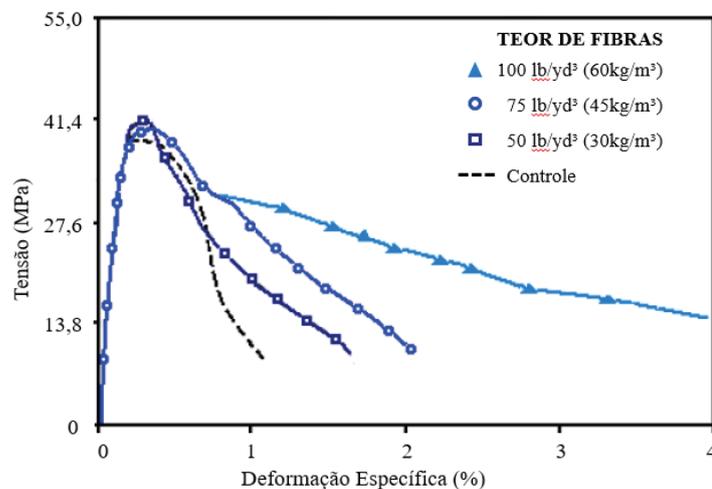
Em relação a resistência à compressão do CRF, a normativa brasileira para uso de concretos com fibras em estruturas (ABNT NBR 16935, 2021) estabelece que as classificações

de resistência à compressão são as mesmas válidas para concreto convencional. De maneira geral, a adição de fibras não apresenta um grande aumento na resistência à compressão, em relação a outros esforços como tração e cisalhamento. De acordo com o ACI 544.4 R-98 (1998), teores de fibras menores que 2% não geram aumento significativo na resistência à compressão axial do concreto. No entanto, em uma análise realizada para o comportamento à flexão, há uma influência significativa na ductilidade e tenacidade do concreto (ACI 544.1 R-96, 2002).

Conforme citado anteriormente, a adição de fibras no concreto reduz a propagação e abertura de fissuras. De acordo com Garcez (2005), as restrições à abertura e propagação das fissuras promovidas pela adição de fibras ao concreto, alteram os diagramas tensão x deformação do compósito, resultando no aumento da absorção de energia durante o processo de fraturamento do mesmo.

No que diz respeito a alteração do diagrama tensão x deformação do concreto, a adição de fibras traz poucas alterações quando se fala no ramo ascendente do diagrama à compressão. No entanto, as mudanças mais significativas aparecem no comportamento pós-pico, no ramo descendente da curva, tornando o diagrama com uma declividade mais suave, fazendo com que o concreto seja capaz de atingir níveis de deformação específica maiores, até a ruptura, o que pode ser explicado pelo fato da capacidade de absorção de energia das fibras (PASA, 2007). Tal fator pode ser observado na Figura 16, dados dos ensaios realizados por Ezeldin e Balaguru (1992, apud PASA, 2007), que verificaram o diagrama tensão x deformação na compressão uniaxial de concreto sem e com diferentes teores de fibras, com o objetivo de verificar a influência das características do reforço de fibras no desempenho à compressão do concreto.

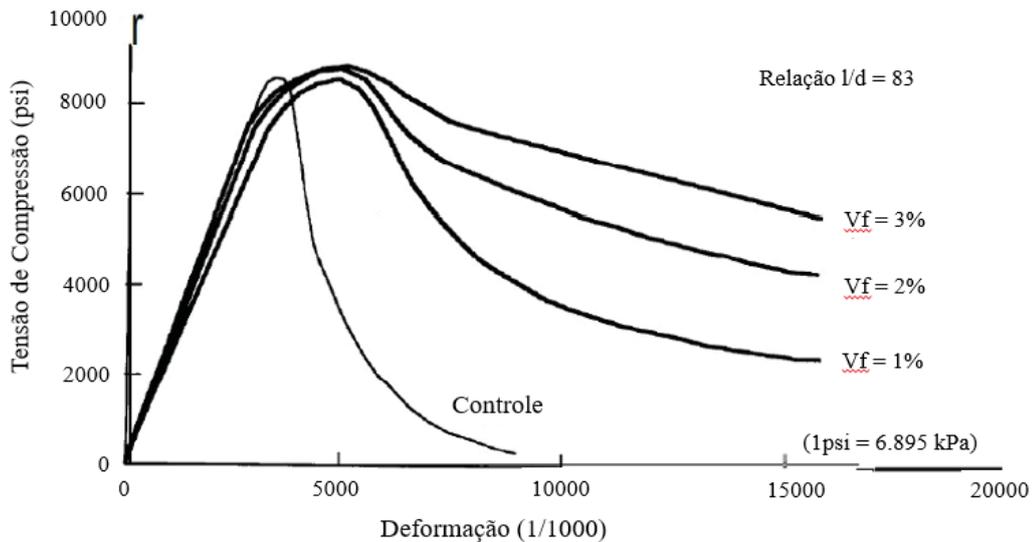
Figura 16 – Diagrama tensão x deformação na compressão uniaxial: comparação entre concreto sem e com diferentes teores de fibras.



Fonte: Adaptado de Ezeldin e Balaguru, 1992 apud Pasa, 2007.

O mesmo conceito pode ser observado na Figura 17, dados dos ensaios realizados por Fanella e Naaman (1985, apud MATOS, 2021), que verificaram a influência do volume de fibras na resistência à compressão e observaram uma curva no diagrama tensão x deformação mais suave com o aumento do teor de fibras.

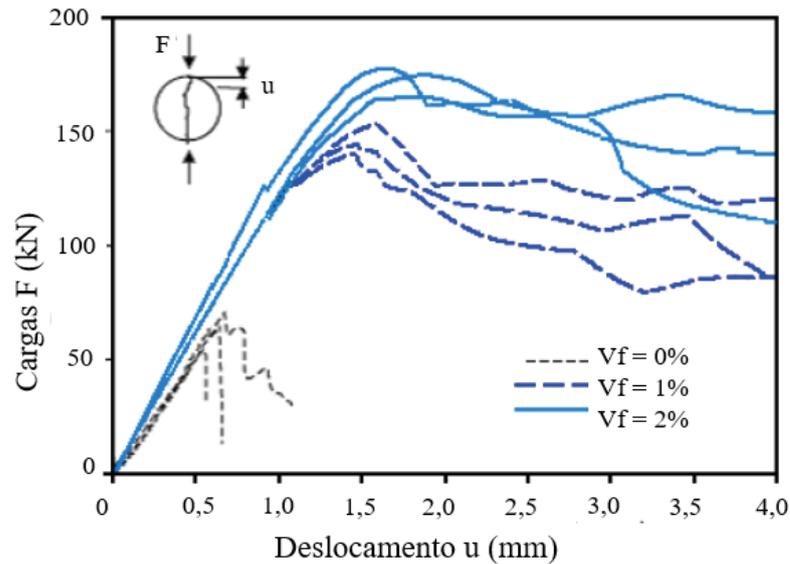
Figura 17 – Influência do volume de fibras na resistência à compressão, curva tensão x deformação.



Fonte: Adaptado de Fanella e Naaman, 1985 apud Matos, 2021.

A restrição à propagação e abertura de fissuras com a adição de fibras ao concreto também influencia no desempenho do CRF sob esforços de tração, visto que a adição de fibras proporciona ao concreto o aumento da resistência à tração. Foi observado nos ensaios de compressão diametral realizados por Cucchiara, Mendola e Papia (2004), que o concreto reforçado com fibras continua resistindo ao incremento de carga, com deformações superiores às deformações do concreto convencional, que rompe de maneira abrupta quando submetido a esforços de tração, conforme apresentado na Figura 18.

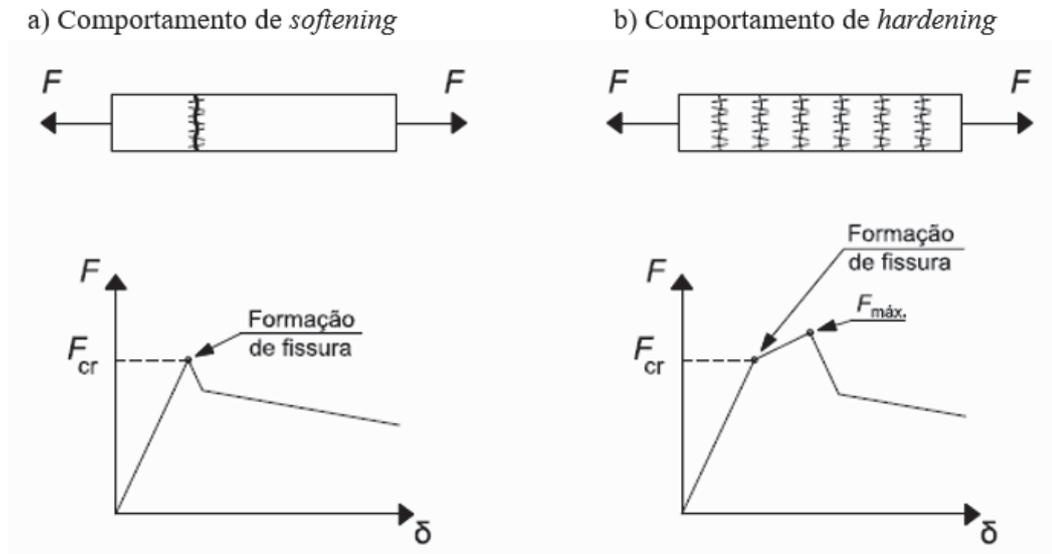
Figura 18 – Ensaio compressão diametral de concreto sem e com diferentes teores de fibras.



Fonte: Adaptado de Cucchiara, Mendola, Papia, 2004.

De acordo com a normativa brasileira (ABNT NBR 16935, 2021), o concreto reforçado com fibras, quando submetido à tração direta, no comportamento pós-fissuração a curva força x deslocamento pode apresentar dois tipos de comportamento, o *strain-softening* (ou amolecimento) e o *strain-hardening* (ou endurecimento), conforme apresentado na Figura 19. O comportamento *strain-softening*, ilustrado na Figura 19a, ocorre após a máxima resistência à tração ser atingida. Nessa fase, o material sofre uma redução gradual na rigidez, acompanhada de um aumento na deformação. Isso ocorre devido à ruptura gradual das fibras, que transferem a carga para o material circundante, tornando-o cada vez mais frágil, no comportamento *softening* há uma redução de resistência após a primeira fissura, impedindo a formação de novas fissuras. Já no comportamento *strain-hardening*, ilustrado na Figura 19b, o compósito continua a suportar carga mesmo com um aumento na deformação, resultando em uma curva de tensão-deformação crescente, uma vez que o material apresenta ganho da capacidade resistente, permitindo a formação de múltiplas fissuras antes de atingir a força máxima. Após atingir a força máxima, o CRF apresenta um comportamento de *strain-softening*, com a abertura das fissuras formadas (AMMAR; FRANZÉN, 2011).

Figura 19 – Comportamento de *softening* e *hardening* do CRF sob tração direta



Fonte: ABNT NBR 16935 (2021).

No entanto, devido à alta complexidade de montagem e interpretação dos resultados dos ensaios de tração direta, o *fib Model Code* (2010) não recomenda a utilização destes ensaios, sendo recomendado como a forma mais indicada para determinação da resistência à tração, a realização de ensaios de tração na flexão, sendo obtida de maneira indireta, através de ensaios como flexão de três pontos em prismas entalhados, com controle de carga aplicada e da abertura de fissura nesse entalhe.

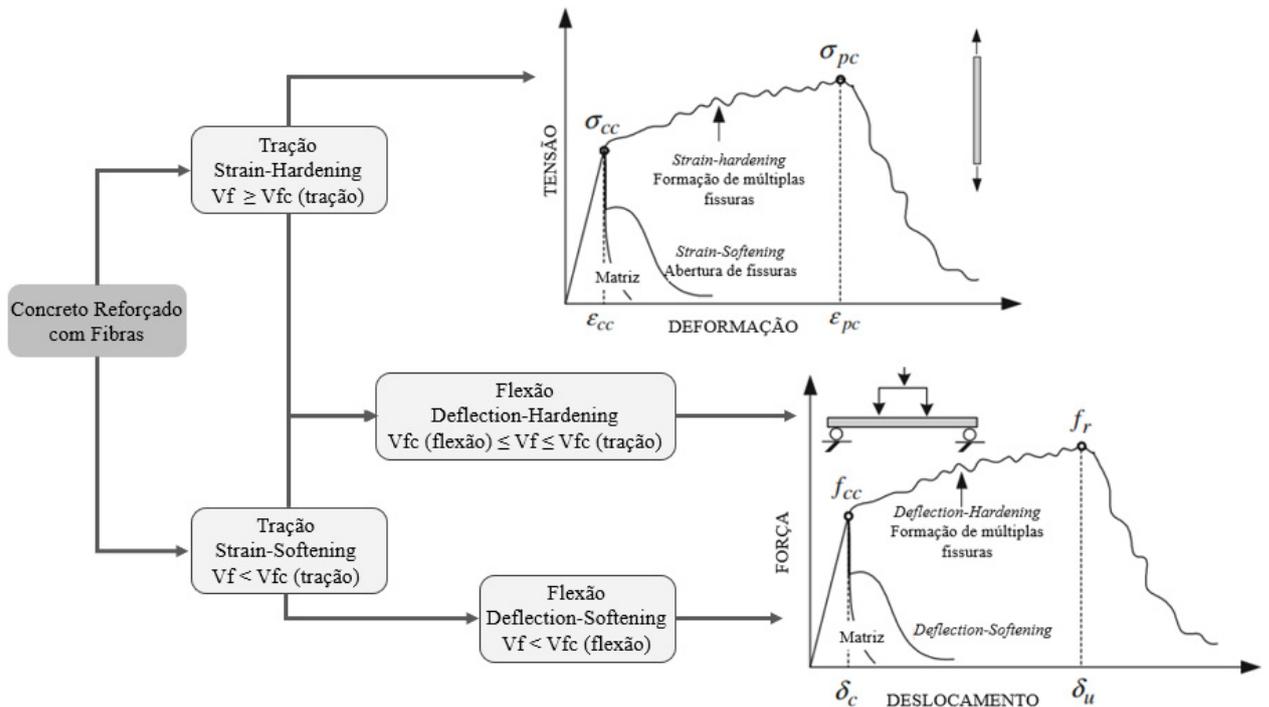
De acordo com Naaman (2003), para ensaios de flexão o compósito pode ser classificado de dois modos, *deflection-softening* ou *deflection-hardening*. No primeiro caso, a carga resistida pelo compósito é menor que a carga de pico obtida no ensaio após a ruptura da matriz, acompanhado da abertura de apenas uma fissura. Já no segundo caso, a carga resistida pela matriz é maior que a carga necessária para romper a matriz, sendo acompanhado da formação de várias fissuras antes da ruptura da matriz.

No entanto, nos ensaios de flexão, o comportamento *hardening* é induzido pelo fato da deformação da seção não fissurada favorecer a propagação estável de fissuras. Desta forma, o compósito apresentar um comportamento *deflection-hardening* em um ensaio de flexão, não garantirá obrigatoriamente que o mesmo apresentará um comportamento *strain-hardening* em um ensaio de tração (DI PRISCO; PLIZZARI; VANDEWALLE, 2009).

Estes comportamentos estão diretamente relacionados com o volume crítico de fibras. Visto que, se o teor de fibras for inferior ao volume crítico, ocorre uma queda na capacidade de carga suportada pelo material após a fissuração da matriz, caracterizando um comportamento

strain-softening. Por outro lado, se o teor de fibras for superior ao volume crítico, o compósito é capaz de suportar níveis de carregamento crescentes mesmo após o surgimento de uma fissura crítica, caracterizando o comportamento *strain-hardening*, conforme representado na Figura 20 (DI PRISCO; PLIZZARI; VANDEWALLE, 2009).

Figura 20 – Conceitos de *softening* e *hardening* em função do volume de fibras



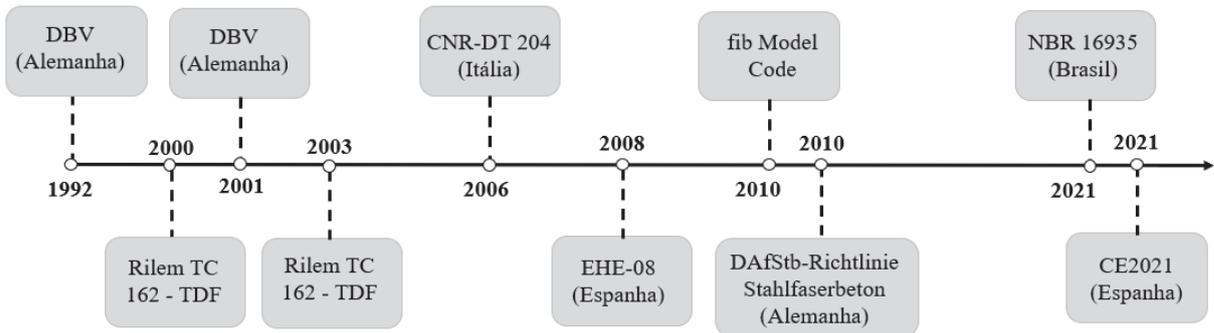
Fonte: Adaptado de Di Prisco, Plizzari e Vandewalle, 2009.

2.4 MODELOS CONSTITUTIVOS CRF

Um modelo constitutivo é uma representação matemática simplificada do comportamento mecânico do material, que leva em conta suas propriedades físicas e mecânicas. Esse modelo descreve como o material responde a diferentes tipos de carregamento em diferentes estágios de deformação (PASA, 2007).

Em 1992 a norma alemã, que sofreu alterações em 2001 e por último em 2010, foi a primeira normativa que propôs um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras. Atualmente, com o crescimento do uso de fibras como reforço no concreto, surgiram novas diretrizes e normativas que vem discutindo diferentes propostas de modelos constitutivos para o CRF (BLANCO, 2013). A Figura 21 apresenta em ordem cronológica algumas das normas e diretrizes que possuem um modelo constitutivo para o CRF.

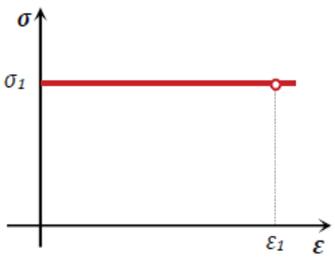
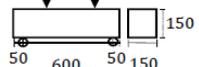
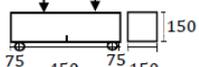
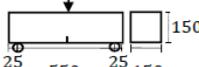
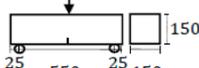
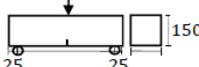
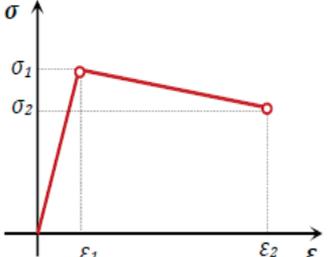
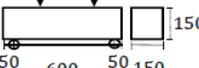
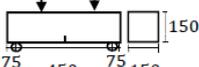
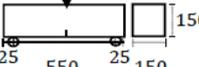
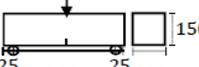
Figura 21 – Representação cronológica das normativas que apresentam modelos constitutivos para CRF



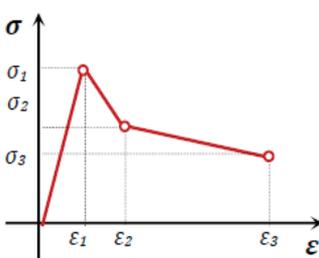
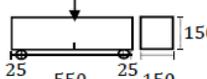
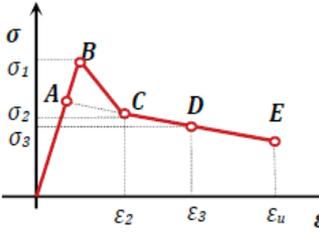
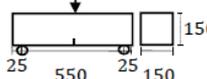
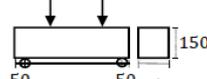
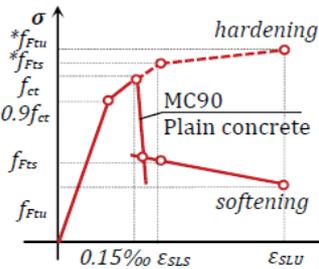
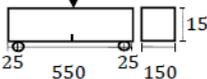
Fonte: A autora, 2024.

Os modelos constitutivos são elaborados a partir de dados experimentais obtidos por meio de ensaios mecânicos realizados em corpos de prova de concreto reforçado com fibras. Esses ensaios podem incluir ensaios de tração direta, compressão diametral, flexão em três ou quatro pontos, entre outros. A partir dos resultados desses ensaios, são obtidas informações sobre as propriedades mecânicas do material, como módulo de elasticidade, resistência à tração, resistência à compressão, tenacidade, entre outras. Essas informações são então utilizadas para desenvolver modelos matemáticos que descrevem o comportamento mecânico do material em diferentes situações, como a aplicação de cargas estáticas ou dinâmicas. A Tabela 2 apresenta os modelos constitutivos de algumas normativas, com seus respectivos diagramas (retangular, bilinear, trilinear ou multilinear) e parâmetros dos ensaios realizados para caracterização deles.

Tabela 2 – Modelos Constitutivos em diferentes normativas (continua)

Diagrama	Parâmetros	Ensaio de caracterização	Norma
	$\sigma_1 = f_{ctd,u}^f = \alpha_c^f \times f_{ctR,u}^f / \gamma_{ct}^f$ <p style="text-align: center;">ou</p> $\sigma_1 = f_{ctd,s}^f = \alpha_c^f \times f_{ctR,s}^f / \gamma_{ct}^f$ $\epsilon_1 = \epsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 4P (DIN EN 12390) 	DAfStb
	$\sigma_1 = f_{Ftu} = f_{R3}/3$ $\epsilon_1 = \epsilon_u = (20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening})$	Ensaio à flexão de 4P (UNI 11039) 	CNR-DT 204
	$\sigma_1 = f_{ctR,d} = f_{R3,d}/3$ $\epsilon_1 = \epsilon_u = (20\text{‰ flexão}; 10\text{‰ tração})$	Ensaio à flexão de 3P (EN 14651) 	CE2021
	$\sigma_1 = f_{Ftu} = f_{R3}/3$ $\epsilon_1 = w_u = CMOD_3 = 2,5 \text{ mm}$	Ensaio à flexão de 3P (EN 14651) 	MC2010
	$\sigma_1 = f_{Ftu} = f_{R3}/3$ $\epsilon_1 = w_u = CMOD_3 = 2,5 \text{ mm}$	Ensaio à flexão de 3P (NBR 16940) 	NBR 16935
	$\sigma_1 = f_{eq,ctd,I} = f_{eq,ctk,I} \times \alpha_c^f \times \alpha_{sys} / \gamma_{ct}^f$ $\sigma_2 = f_{eq,ctd,II} = f_{eq,ctk,II} \times \alpha_c^f \times \alpha_{sys} / \gamma_{ct}^f \leq f_{eq,ctd,I}$ $\epsilon_1 = 0\text{‰}$ $\epsilon_2 = \epsilon_u = 10\text{‰}$	Ensaio à flexão de 4P (NBN B 15-238) 	DBV
	$\sigma_1 = f_{Fts} = 0,45 \times f_{eq1}$ $\sigma_2 = f_{Ftu} = k \times (f_{Fts} - (w_u/w_{i2}) \times (f_{Fts} - 0,5 \times f_{eq2} + 0,2 \times f_{eq1}))$ $k = (0,7 \text{ tração pura}, 1 \text{ outros casos})$ $\epsilon_2 = \epsilon_u = (20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening})$	Ensaio à flexão de 4P (UNI 11039) 	CNR-DT 204
	$\sigma_1 = f_{Fts} = 0,45 \times f_{R1}$ $\sigma_2 = f_{Ftu} = f_{Fts} - \left(\frac{w_u}{CMOD_3} \right) \times (f_{Fts} - 0,5 \times f_{R3} + 0,2 \times f_{R1}) \geq 0$ $\epsilon_1 = CMOD_2 = 1,5 \text{ mm}$ $\epsilon_2 = w_u = CMOD_3 = 2,5 \text{ mm}$ $\text{se } \epsilon_2 = w_u \neq CMOD_3, \text{ sendo } CMOD_1 < w_u < CMOD_3$ $\sigma_2 = f_{Ftu} = 0,5 \times f_{R3} - 0,2 \times f_{R1}$	Ensaio à flexão de 3P (NBR 16940) 	NBR 16935
	$\sigma_1 = 0,7 \times f_{ctm,fl} \times (1,6 - d)$ $\sigma_2 = 0,45 \times K_H \times f_{R,1}$ $\sigma_3 = 0,37 \times K_H \times f_{R,4}$ $\epsilon_1 = \sigma_1 / E_c$ $\epsilon_2 = \epsilon_1 + 0,1\text{‰}$ $\epsilon_3 = \epsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 3P (RILEM TEST) 	RILEM

(conclusão)

Diagrama	Parâmetros	Ensaio de caracterização	Norma
	$\sigma_1 = \sigma_2 = f^f_{ctd,L1} = \alpha^f_c \times f^f_{ctR,L1} / \gamma^f_{ct}$ $\sigma_3 = f^f_{ctd,L2} = \alpha^f_c \times f^f_{ctR,L2} / \gamma^f_{ct}$ $\varepsilon_1 = 0,1\text{‰}$ $\varepsilon_2 = 3,5\text{‰}$ $\varepsilon_3 = \varepsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 4P (DIN EN 12390) 	DAfStb
	$\sigma_1 = 0,7 \times f_{ctm,fl} \times (1,6 - d)$ $\sigma_2 = 0,45 \times K_H \times f_{R,1}$ $\sigma_3 = 0,37 \times K_H \times f_{R,4}$ $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E_c$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 0,1\text{‰}$ $\varepsilon_3 = \varepsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 3P (RILEM TEST) 	RILEM
	$\sigma_1 = f_{ct,d} = 0,6 \times f_{ct,fl,d}$ $\sigma_2 = f_{ctR1,d} = 0,45 \times f_{R,1,d}$ $\sigma_3 = f_{ctR3,d} = k_1 \times (0,5 \times f_{R,3,d} - 0,2 \times f_{R,1,d})$ $\varepsilon_2 = 0,1 + 1000 \times f_{ct,d} / E_c$ $\varepsilon_3 = 2,5 / l_{cs} (\text{lcs: comp. característico})$ $\varepsilon_u = (20\text{‰ flexão}; 10\text{‰ tração})$	Ensaio à flexão de 3P (EN 14651) 	CE2021
	$\sigma_1 = f_{ctm}$ $\sigma_2 = \sigma_3 = f^f_{ctd,L1} = \alpha^f_c \times f^f_{ctR,L1} / \gamma^f_{ct}$ $\sigma_4 = f^f_{ctd,L2} = \alpha^f_c \times f^f_{ctR,L2} / \gamma^f_{ct}$ $\varepsilon_2 = 0,3\text{‰}$ $\varepsilon_3 = 3,5\text{‰}$ $\varepsilon_4 = \varepsilon_u = 25\text{‰}$	Ensaio à flexão de 4P (DIN EN 12390) 	DAfStb
	$f_{ctm} = 0,3 \times f_{ck}^{2/3}$ $f_{Fts} = 0,45 \times f_{R1}$ $f_{Ftu} = k \times [f_{Fts} - (w_u / CMOD_3) \times (f_{Fts} - 0,5 \times f_{R3} + 0,2 \times f_{R1})]$ $\varepsilon_{SLs} = CMOD_1 / l_{cs}$ $\varepsilon_{SLU} = \frac{w_u}{l_{cs}} = \min \left(\varepsilon_{Fwu}, \frac{2,5}{l_{cs}} = \frac{2,5}{y} \right)$ $\varepsilon_{Fwu} = (20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening})$	Ensaio à flexão de 3P (EN 14651) 	MC2010

Dada a quantidade de variáveis apresentada na tabela, elas não serão descritas em sequência, mas sim em ordem alfabética na lista de símbolos.

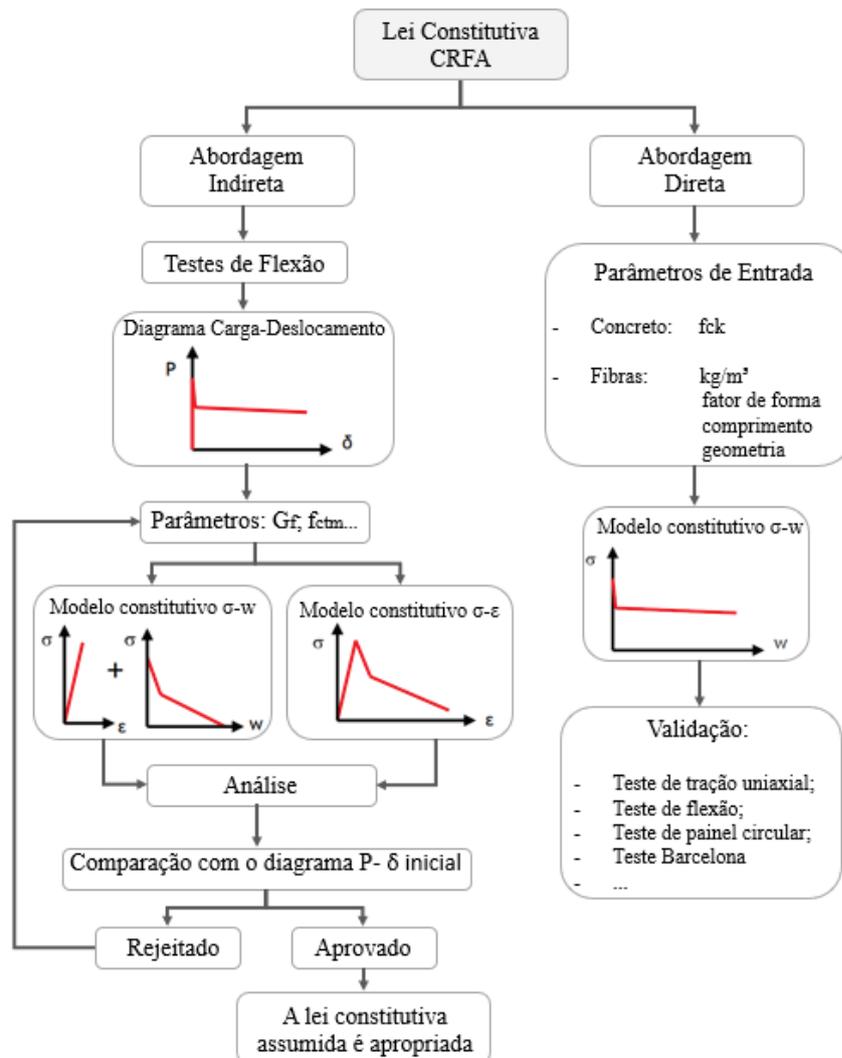
Fonte: Adaptado de Blanco, 2013.

As leis constitutivas estão baseadas em dois modelos principais: o modelo de tensão - abertura de fissuras (σ - w) e o modelo de tensão - deformação (σ - ε), sendo obtidos por meio de abordagens diretas ou indiretas.

A Figura 22 ilustra essas duas abordagens para caracterizar o comportamento à tração do CRF. De acordo com Laranjeira de Oliveira (2010) na abordagem indireta os parâmetros são definidos através de um processo iterativo, utilizando um diagrama Carga-Deslocamento obtido em testes de flexão. Os parâmetros, como a energia de fratura (G_f) e a resistência à tração média

(f_{ctm}), permitem desenvolver modelos constitutivos que descrevem a relação entre tensão (σ) e abertura de fissura (w) ou deformação (ϵ). A adequação do modelo é verificada comparando-o com dados experimentais; se houver boa correspondência, o modelo é aceito. Já na abordagem direta os parâmetros são obtidos diretamente de dados experimentais ou das propriedades dos materiais. Não há necessidade de ajuste iterativo, e os parâmetros são definidos a partir de ensaios padronizados. O modelo constitutivo σ - w é validado por testes como tração uniaxial e flexão. Se os resultados experimentais confirmarem o comportamento previsto, a lei constitutiva é considerada adequada.

Figura 22 – Modelos constitutivos para o CRF em termos de σ - w e σ - ϵ



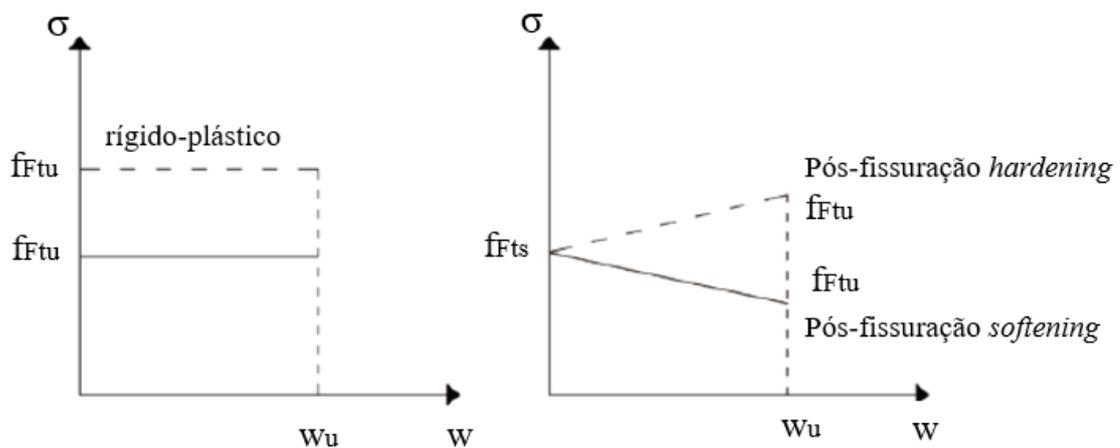
Fonte: Adaptado de Laranjeira de Olivera, 2010.

A seguir, será tratada uma breve análise sobre os modelos constitutivos abordados pelo *fib Model Code* (2010) e Norma espanhola: *Código Estructural* (2021), utilizados na simulação numérica deste trabalho.

2.4.1 *fib Model Code* (MC2010)

O MC2010 da Federação Internacional do Concreto (*fib*) propõe dois modelos constitutivos para o comportamento à tração do CRF: um modelo plástico-rígido e um modelo que descreve um comportamento linear pós-fissuração, conforme apresentado na Figura 23. Esses modelos são apresentados em termos de diagramas de tensão-abertura de fissuras (σ - w) e representam tanto o comportamento de encruamento (*hardening*) quanto o de amolecimento (*softening*).

Figura 23 – Diagramas rígido-plástico e elástico-linear em termos de tensão-abertura de fissuras (σ - w).



$fFtu$ - força residual máxima (resistência pós-fissuração para abertura máxima de fissura)
 $fFts$ - Força residual de serviço (resistência pós-fissuração para abertura de fissura em serviço)
 w - abertura de fissura
 wu - abertura última de fissura

Fonte: Adaptado de *fib Model Code*, 2010.

O modelo rígido-plástico utiliza um único valor $fFtu$ e leva em consideração a equivalência estática, onde toda força de compressão está concentrada na fibra superior da seção, nesse modelo o valor da abertura última da fissura é de 2,5mm. Já no modelo elástico-linear são considerados dois valores de referência o $fFtu$ e o $fFts$ e o valor da abertura última da fissura depende da ductilidade requerida, mas não excederá 2,5mm.

Como esses dois modelos são simplificações, *fib Model Code* recomenda o uso de diagramas constitutivos mais avançados para análises numéricas, que incluem a resistência à

tração na primeira fissura. Além disso, o código também apresenta modelos definidos em termos de tensão-deformação (σ - ε).

Neste caso é necessário distinguir entre materiais com comportamento *strain-hardening* ou *strain-softening*. O material é considerado *strain-hardening*, se apresentar um comportamento *hardening* à tração até uma deformação última de até 1%, caso contrário, o material é considerado *strain-softening*.

Nos materiais com comportamento *strain-softening*, o diagrama de tensão-deformação é definido a partir da abertura da fissura (w) e o comprimento característico estrutural correspondente (l_{cs}), sendo a deformação expressa por:

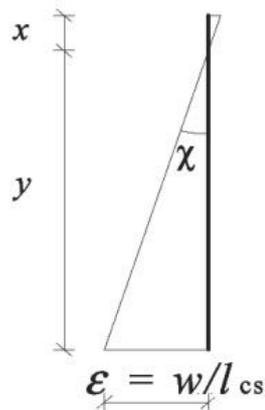
$$\varepsilon = \frac{w}{l_{cs}} \quad (1)$$

Onde em elementos com reforço convencional, l_{cs} pode ser avaliado como:

$$l_{cs} = \min\{s_{rm}, y\} \quad (2)$$

sendo s_{rm} o valor médio da distância entre fissuras e y a distância entre o eixo neutro e o lado tracionado da seção transversal (Figura 24), avaliada na fase elástica fissurada, desprezando a resistência residual à tração do CRF, e para uma configuração de carga correspondente ao estado de serviço de abertura de fissuras e espaçamento de fissuras.

Figura 24 – Definição do parâmetro y para seção de concreto armado

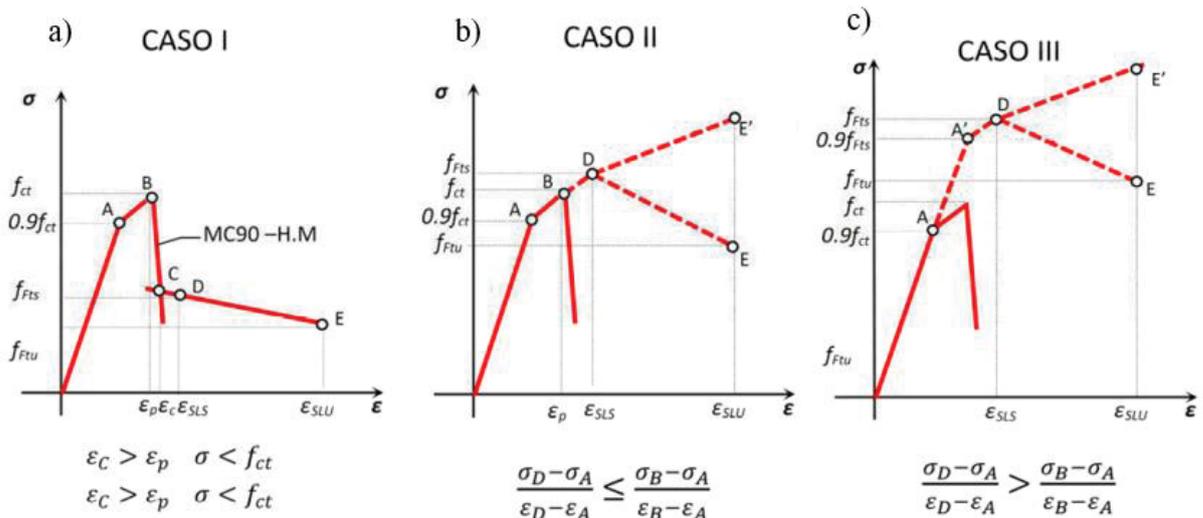


Fonte: Adaptado de *fib Model Code*, 2010.

Nos materiais com comportamento *strain-hardening*, não é necessário o lcs e o diagrama de tensão-deformação é definido assumindo o valor de deformação última igual a 20‰ para distribuição variável de deformação ao longo da seção transversal e 10‰ para distribuição uniforme de deformação de tração ao longo da seção transversal.

O código traz três casos para a adaptação de coeficientes de segurança parciais para o cálculo de verificação dos estados limites. O Caso I trata a respeito de coeficientes para projeto de estado limite de serviço (ELS) em materiais com comportamento *softening*, a mesma relação constitutiva adotada para o concreto simples em tração uniaxial é utilizada até a resistência de pico f_{ct} , na fase pós-fissuração é aplicada uma relação bilinear, conforme indicado na Figura 25a. No Caso II o processo de fissuração torna-se estável até a deformação no ELS e quatro ramos definem novamente a relação constitutiva, os dois primeiros ramos permanecem os correspondentes ao concreto simples, enquanto o terceiro ramo B-D trata de um material com comportamento *hardening*, conforme indicado na Figura 25b. E por fim no Caso III a fissuração permanece estável até a deformação no ELS e três ramos definem a relação constitutiva, o segundo ramo A'-D trata de um material com comportamento *hardening*, conforme indicado na Figura 25c. Tanto no Caso II quanto no Caso III, o material pode apresentar um comportamento *softening* no trecho D-E, como um comportamento *hardening* no trecho D-E', dependendo da inclinação do último ramo.

Figura 25 – Casos de formulação definido pelo MC2010 a) caso I, b) caso II, c) caso III



Fonte: *fib Model Code* (2010).

Os parâmetros de tensão e deformação, de acordo com o *fib Model Code*, podem ser calculados por:

$$\begin{aligned}
f_{ctm} &= 0,3fck^{\frac{2}{3}} \\
f_{Fts} &= 0,45f_{R1} \\
f_{Ftu} &= k[f_{Fts} - \left(\frac{w_u}{CMOD_3}\right)(f_{Fts} - 0,5f_{R3} + 0,2f_{R1})] \\
\varepsilon_{SLS} &= \frac{CMOD_1}{l_{CS}} \\
\varepsilon_{SLU} &= \frac{w_u}{l_{CS}} = \min\left(\varepsilon_{FU}, \frac{2,5}{l_{CS}} = \frac{2,5}{y}\right) \\
\varepsilon_{FU} &= 20\text{‰ softening}; 10\text{‰ hardening}
\end{aligned} \tag{3}$$

onde:

f_{ctm} = resistência média à tração;

f_{ck} = resistência característica à compressão;

f_{Fts} = força residual de serviço (resistência pós-fissuração para abertura de fissura em serviço);

f_{Ftu} = força residual máxima (resistência pós-fissuração para abertura máxima de fissura);

$CMOD_1$ = medida da abertura da fissura;

f_{Rj} = resistência residual à tração na flexão correspondente ao $CMOD = CMOD_j$;

ε_{SLS} = deformação de serviço associada à fFts;

ε_{SLU} = deformação última associada à fFtu;

ε_{FU} = deformação última do concreto; e

w_u = abertura última de fissura.

Os parâmetros para os diagramas mencionado são definidos através das resistências residuais à tração por flexão, obtidas por meio de ensaios de flexão em três pontos, conforme estabelecido pela norma EN 14651:2005 (CEN 2005) apresentada no item 2.4.3.

O MC2010 apresenta ainda critérios para verificar a substituição total ou parcial das armaduras convencionais por fibras de aço. Reconhece-se que o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço é complexo e depende de vários fatores, como a orientação, taxa e dispersão das fibras, forma e rugosidade das fibras, além das propriedades mecânicas tanto das fibras quanto do concreto. Por isso, o MC2010 e outras diretrizes incluem um fator de orientação das fibras e recomendam ensaios específicos para avaliar esses aspectos, além da adoção de modelos constitutivos apropriados para análises estruturais.

2.4.2 Norma Espanhola: *Código Estructural* (CE2021)

A primeira normativa espanhola que abordou o concreto reforçado com fibras foi a *Instrucción de Hormigón Estructural* (EHE/08), posteriormente substituída pelo Real Decreto 470/2021, que instituiu o *Código Estructural* em junho de 2021.

Assim como a normativa anterior, o novo código estabelece um diagrama retangular em termos de tensão-deformação (σ - ϵ) para o cálculo de seções sujeitas a solicitações normais, nos Estados Limite Últimos (ELU), caracterizado pela resistência residual à tração de cálculo $f_{ctR,d}$ conforme apresentado na Figura 26.

Figura 26 – Diagrama tensão-deformação retangular



Fonte: BOE (2021).

Com $f_{ctR,d}$ dado por:

$$f_{ctR,d} = 0,33f_{R3,d} \quad (4)$$

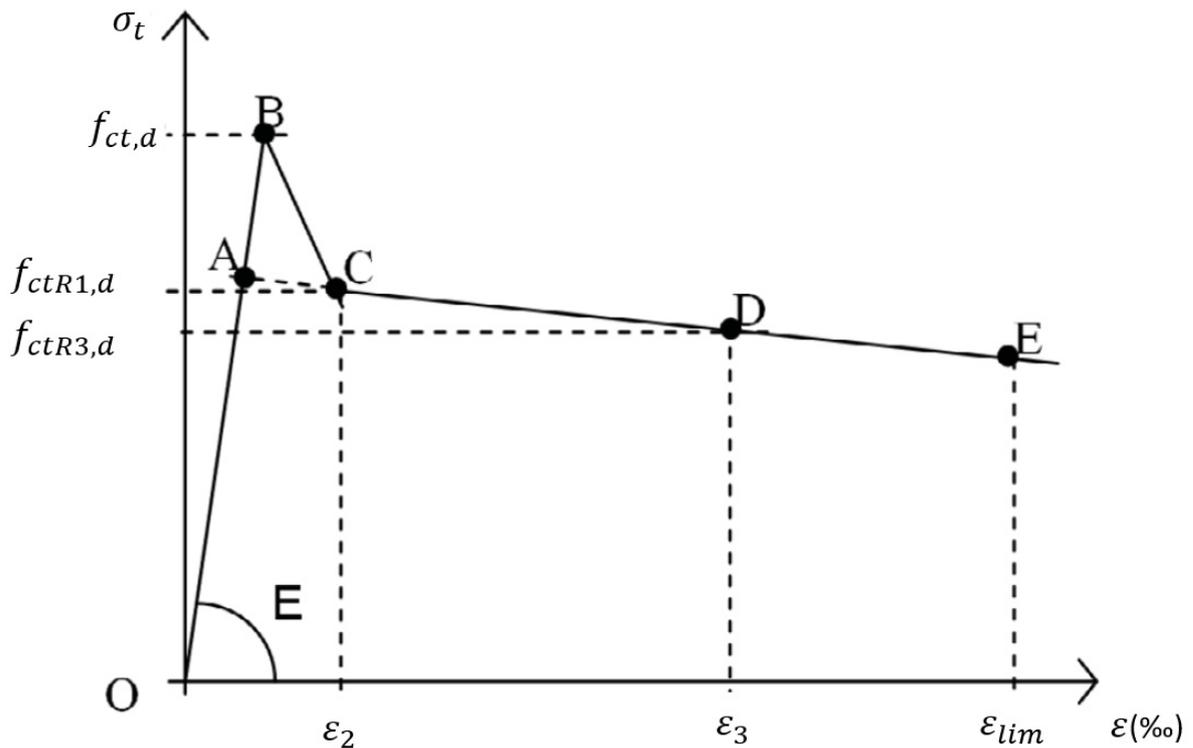
A normativa também estabelece um diagrama multilinear em termos de tensão-deformação (σ - ϵ), para aplicações que exigem um cálculo mais preciso, definido por uma resistência à tração de cálculo $f_{ctR,d}$ e pelas resistências residuais à tração de cálculo $f_{ctR1,d}$ e

$f_{ctR3,d}$ associadas a deformações ε_2 e ε_3 no regime pós-pico, conforme apresentado na Figura 27.

No diagrama multilinear, apresentado na Figura 27, os pontos A-C-D-E, se aplicam em casos que exigem um nível elevado de precisão, e os pontos A-B-C-D-E são utilizados para cálculo do estado limite de serviço, visto que, de acordo com o *Boletín Oficial del Estado* (2021) o efeito do pico formado pelos pontos A-B-C é importante quando uma análise não linear é aplicada, especialmente para pequenas deformações.

Ambos os diagramas estabelecem como limite da deformação de $\varepsilon_{lim}=20\%$ para seções submetidas à flexão e $\varepsilon_{lim}=10\%$ para seções submetidas à tração. Além disso, assim como no MC2010, o *Código Estructural* traz a respeito três casos para verificação dos estados limites, conforme indicado na Figura 25.

Figura 27 – Diagrama tensão-deformação multilinear



Fonte: BOE (2021).

Os parâmetros de tensão e deformação para o modelo multilinear, de acordo com o *Código Estructural*, podem ser calculados por:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= f_{ct,d} = 0,6f_{ct,fl,d} \\
\sigma_2 &= f_{ctR1,d} = 0,45f_{R1,d} \\
\sigma_3 &= f_{ctR3,d} = k_1 (0,5f_{R3,d} - 0,2f_{R1,d}) \\
\varepsilon_1 &= 0,1 + 1000 \frac{f_{ct,d}}{E_c} \\
\varepsilon_2 &= \frac{2,5}{lcs} \\
\varepsilon_{lim} &= 20\%_{00} \text{ flexão}; 10\%_{00} \text{ tração}
\end{aligned} \tag{5}$$

Onde:

$f_{ct,d}$ = Resistência de projeto à tração do CRF;

$f_{ct,fl,d}$ = Resistência de projeto à flexo-tração do CRF;

$f_{ctRi,d}$ = Resistência de projeto à tração residual do CRF flexão correspondente ao

$CMOD = CMOD_i$;

k_1 = Coeficiente para o tipo de tensão na seção transversal;

E_c = Módulo de elasticidade CRF;

lcs = Comprimento característico;

ε_2 = Deformação associada à σ_2 ;

ε_3 = Deformação última em um diagrama σ - ε trilinear (deformação associada a σ_3);

ε_u = Deformação última;

σ_1 = Resistência à tração em um diagrama σ - ε trilinear;

σ_2 = Tensão que define o segundo ponto de um diagrama σ - ε trilinear; e

σ_3 = Tensão que define o terceiro ponto de um diagrama σ - ε trilinear (associada à deformação última).

Os valores das forças residuais para ambos os diagramas, tal como no MC2010, são definidos com base em parâmetros obtidos em ensaios de flexão em três pontos, conforme estabelecido pela norma EN 14651:2005 (CEN 2005), apresentada no item 2.4.3.

Entre os destaques desta nova versão em relação à publicação anterior (EHE), estão a introdução de um fator de orientação, que visa antecipar possíveis influências decorrentes da distribuição e orientação das fibras, e a recomendação do uso de um coeficiente de fluência do concreto para fibras sintéticas empregadas em aplicações estruturais. Assim, fica claro que o novo código espanhol, além de consolidar o conhecimento e os principais conceitos das

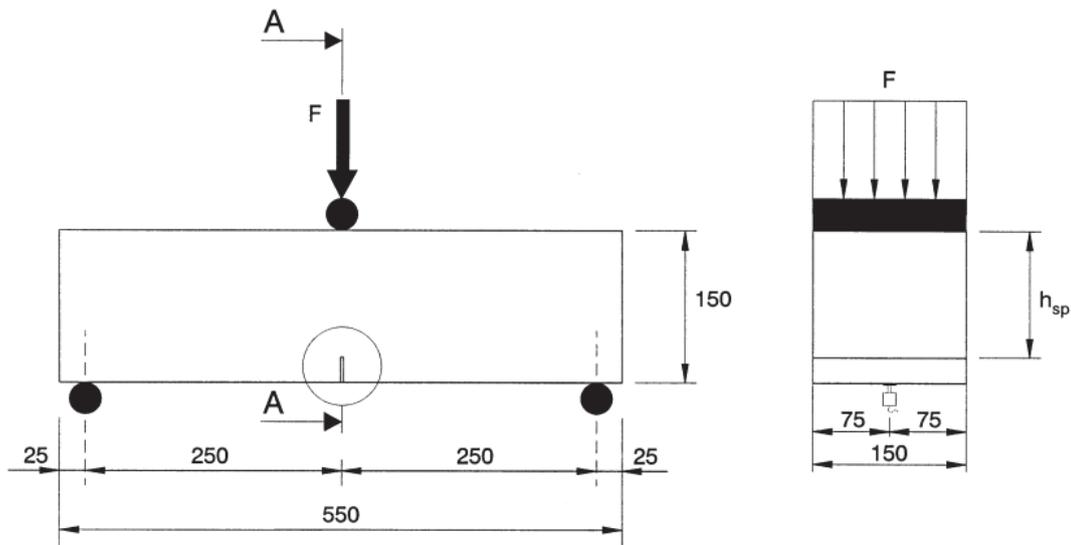
recomendações anteriores, incorporou avanços significativos ao propor coeficientes de correção que abordam fatores de influência no comportamento pós-fissuração do CRF.

2.4.3 Ensaio de caracterização EN 14651:2007 (CEN 2007)

Conforme mencionado, tanto no *fib Model Code* quanto o *Código Estrutural*, os parâmetros para a elaboração dos diagramas de tensão *versus* deformação são definidos através das resistências residuais à tração por flexão, obtidas por meio de ensaios de flexão em três pontos, conforme estabelecido pela norma EN 14651:2007 (CEN 2007).

O ensaio utiliza vigas prismáticas de 550mm de comprimento e vão de 500mm, com seção transversal de 150 x 150 mm, sendo realizado um entalhe de 25 mm de profundidade localizado no meio do vão da viga, conforme apresentado na Figura 28.

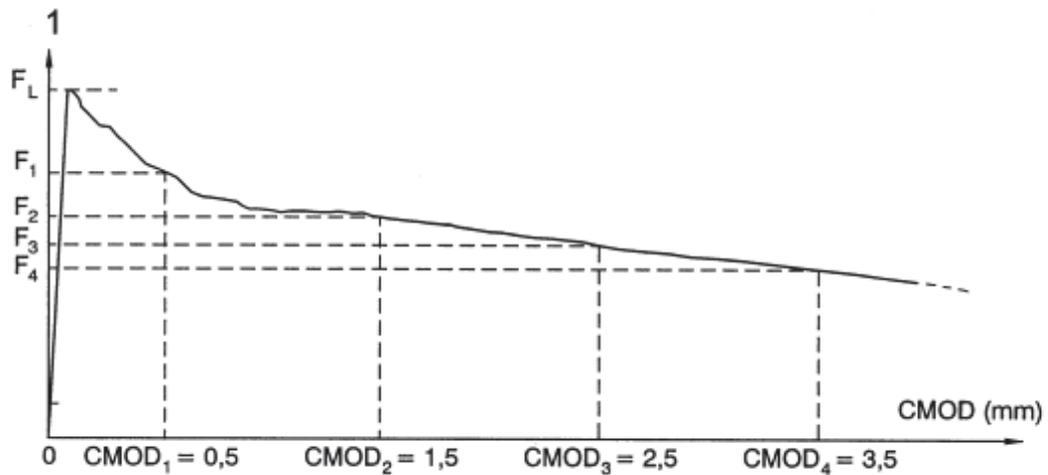
Figura 28 – Viga submetida a esforços de flexão por 3 pontos a) esquema do ensaio; b) seção transversal



Fonte: EN 14651 (CEN, 2007).

A partir dos dados desse ensaio, são então calculados os valores das forças residuais. Neste teste, a deformação é expressa baseada na abertura do entalhe (CMOD) e a tensão gerada na viga é medida através da força F aplicada ao elemento, como indicado Figura 29, os pontos j referem-se aos valores de abertura de entalhe pré-estabelecidos pela norma.

Figura 29 – Curva típica de carga-abertura de entalhe para o concreto reforçado com fibras.



Fonte: EN 14651 (CEN, 2007).

Os parâmetros, f_{Rj} , que representam a resistência residual à tração por flexão, são avaliados a partir da relação F-CMOD, conforme segue:

$$f_{R,j} = \frac{3F_j l}{2bh_{sp}^2} \quad (6)$$

Onde:

f_{Rj} = resistência residual à tração na flexão correspondente ao $CMOD = CMOD_i$;

F_j = carga pontual medida no meio do vão do corpo de prova correspondente ao $CMOD = CMOD_i$;

l = vão do corpo de prova;

b = largura da seção transversal do corpo de prova; e

h_{sp} = altura de um corpo de prova padrão descontado o entalhe.

O limite de proporcionalidade é outro parâmetro importante usado no projeto de CRF e pode ser determinado pela seguinte equação:

$$f_L = \frac{3F_L l}{2bh_{sp}^2} \quad (7)$$

Onde:

f_L = limite de proporcionalidade; e

F_L = maior carga medida no meio do vão do corpo de prova entre $0 \leq CMOD \leq 0,05$.

A partir dos dados das resistências residuais à tração por flexão são então calculados os diagramas de tensão-deformação de acordo com as normativas mencionadas anteriormente.

2.5 ANÁLISE NUMÉRICA

Os modelos numéricos têm se mostrado ferramentas eficientes para investigar e prever o comportamento do CRFA em diferentes condições de carregamento, fornecendo uma base sólida para o projeto e a análise de estruturas reforçadas com fibras de aço. Diversos estudos têm sido conduzidos para compreender o comportamento desse material e a influência das fibras na resistência e na ductilidade das estruturas. É apresentada a seguir uma revisão de alguns trabalhos que realizaram simulações do CRFA.

Al-Ta'an e Ezzadeen (1995) desenvolveram um procedimento numérico baseado no método dos elementos finitos com elementos unidimensionais e um sistema de camadas para analisar elementos de concreto armado reforçados com fibras de aço. O método empregado pelos autores incluiu um processo iterativo para lidar com soluções não-lineares, utilizando o método de *Newton-Raphson*. No estudo, foram adotados diferentes modelos constitutivos para representar o comportamento do CRFA. Esses modelos abrangeram o comportamento do CRFA sob compressão, tração com uma curva bilinear no ramo pós-fissuração, além de modelos bilineares e multilinares para representar as propriedades das armaduras convencionais e de alta resistência. Diversos casos foram simulados, incluindo pilares com diferentes alturas e excentricidades, vigas simplesmente apoiadas com variação de comprimento e carregamento concentrado, uma viga de concreto armado reforçada com fibras sob inversão de carga e duas conexões viga-pilar. Com base nos resultados obtidos, os autores concluíram que o modelo numérico desenvolvido, utilizando o método dos elementos finitos, foi uma ferramenta útil para investigar os efeitos das fibras de aço no comportamento e resistência dos elementos de concreto armado.

Pasa (2007) realizou estudo de CRFA em análises numéricas tridimensionais via método dos elementos finitos considerando a não linearidade física, com o desenvolvimento de um código computacional em linguagem FORTRAN90/95. A representação do comportamento do concreto com fibras foi feita por meio de uma variante da superfície de ruptura de *William-*

Warnke, enquanto a fissuração do concreto foi modelada pelo modelo de fissuras distribuídas. Para representar o comportamento do concreto sob compressão uniaxial, a autora adotou um modelo de tensão-deformação proposto pelo *fib Model Code*. Já o concreto em tração foi tratado com o modelo de tensão-deformação proposto por Hinton (1988). Para o concreto tracionado reforçado com fibras, foi utilizado o modelo proposto por Lim et al. (1987), no qual o concreto se comporta de forma elástico-linear até a ruptura e, após a fissuração, admite-se a colaboração do concreto entre as fissuras. A representação das armaduras convencionais foi feita através de um modelo uniaxial com diagrama de tensão-deformação bilinear. Por fim, a autora realizou a validação dos resultados do modelo por meio da simulação de ensaios experimentais em vigas bi-apoiadas de concreto armado e reforçado com diferentes porcentagens de fibras de aço, submetidas a carregamentos instantâneos até a ruptura, através de duas cargas concentradas. Com base nos resultados, a autora verificou um comportamento adequado das curvas carga-deslocamento. No entanto, o modelo adotado por Lim et al. (1987) para CRFA apresentou uma queda abrupta da resistência do concreto após a ruptura por tração, o que não foi observado experimentalmente.

Blanco (2013) realizou um estudo comparativo da capacidade dos modelos constitutivos em códigos e diretrizes europeus, incluindo o *fib Model Code 2010 (MC2010)*, para prever o comportamento de vigas em escala real, a fim de identificar o procedimento mais adequado para simular o comportamento de tração pós-fissuração do CRFA. A autora realizou a modelagem do concreto com discretização em camadas com espessura constante e as armaduras foram simuladas como elementos de área constante. Com base nos resultados a autora concluiu que o modelo proposto pelo MC2010 representou satisfatoriamente a resposta estrutural, mas superestimou para pequenas deflexões.

Meskenas et al. (2014), realizaram em seus estudos a quantificação das tensões residuais em tração no concreto reforçado com fibras de aço. A pesquisa teve como objetivo determinar a relação tensão–abertura de fissuras do CRFA. Para isso, os autores utilizaram uma técnica de análise inversa que utiliza dados experimentais de testes de flexão em três pontos em membros entalhados para determinar as tensões residuais. Os resultados obtidos foram analisados com o auxílio do programa de análise não linear por elementos finitos ATENA, que verificou a relação tensão–abertura de fissura obtida. A adequação da técnica inversa foi confirmada através da comparação das curvas simuladas de deslocamento de abertura na ponta da fissura com dados experimentais.

Faria (2017) realizou simulações em elementos finitos de corpos de prova de CRFA para ensaios de arrancamento, tração e flexão. Neste trabalho o concreto foi simulado utilizando

modelos constitutivos não lineares de dano proposto por Mazars (1984) e de trinca embutida proposto por Kotsovos (2015). Para as fibras, o modelo constitutivo utilizado foi o elástico perfeitamente plástico. O autor realizou simulações de arrancamento com fibras de diferentes seções transversais, simulações de tração em um cilindro com entalhe, simulações de tração em um corpo de prova cúbico e simulações para uma viga submetida à flexão. Com base nos resultados o autor cita que os dois modelos reproduziram satisfatoriamente o comportamento elástico no início da simulação, mas que após a ruptura os resultados não se mostraram coerentes.

Matos (2021) reproduziu numericamente por meio de uma rotina de cálculo desenvolvida em MATLAB, o comportamento de vigas de CRFA utilizando o Método dos Elementos Finitos em combinação com previsões de resistência por modelos adotados por Dutra (2012), baseado numa abordagem micromecânica do CRFA, e o modelo de dano plástico *Concrete Damaged Plasticity* (CDP). Toda análise foi desenvolvida através do Método dos Elementos Finitos, no *software* Abaqus SE. O autor desenvolveu um modelo capaz de reproduzir o comportamento não-linear do compósito através de parâmetros de controle relacionados ao estado de tensões biaxiais e triaxiais de tensão. No estudo, foram adotados diferentes modelos constitutivos para representar o comportamento do CRFA. Esses modelos abrangeram o comportamento do concreto sob compressão uniaxial e curva tensão-deformação para tração do CRFA com as relações propostas pelo *fib Model Code*, e um modelo uniaxial bilinear para descrever o comportamento das armaduras. O autor realizou simulações de ensaios experimentais disponíveis na literatura, incluindo vigas de concreto armado com diferentes porcentagens de fibras sob flexão de quatro pontos e vigas em CRFA armadas para verificar a capacidade resistente com a substituição parcial ou total dos estribos por fibras de aço. A partir dos resultados o autor concluiu que os modelos adotados se mostraram capazes de gerar bons resultados para previsão de resistência de elementos estruturais em CRFA no âmbito numérico, mas que o modelo CDP mostrou-se uma ferramenta muito sensível a mudanças devido à grande quantidade de parâmetros a serem determinados para entrada.

Matos et al. (2021) apresentaram em seus estudos uma abordagem de análise inversa para derivar os parâmetros de fratura no modo I do concreto reforçado com fibras. A abordagem se baseia em uma estratégia de ajuste global, através da modificação das variáveis que regem o comportamento de tração do CRFA, onde a resposta numérica é simulada por modelos analíticos e ajustada aos resultados experimentais de testes de flexão de três pontos e testes em painéis redondos apoiados em três pontos. Os autores utilizaram um algoritmo de ajuste não linear multivariável com restrições, acoplado a um procedimento automático de atualização dos

parâmetros de entrada com base no erro de desvio de força entre os resultados numéricos e experimentais. O desempenho da metodologia foi avaliado com base em resultados experimentais e a robustez da abordagem é investigada, considerando o impacto das suposições iniciais sobre os parâmetros derivados. Os autores utilizaram este modelo para analisar uma viga de CRF em escala real, demonstrando a eficácia da metodologia proposta na derivação dos parâmetros de fratura no modo I.

Sloboda (2022) desenvolveu um código computacional por meio do método dos elementos finitos, em linguagem *Python*, para análise de estruturas de concreto armado reforçado com fibras de aço, levando em consideração a Mecânica do Dano Contínuo aplicada em peças sujeitas a carregamentos monotônicos crescentes. O autor utilizou o método de *Newton-Raphson* e a técnica do comprimento do arco para analisar não linearmente o CRFA com um modelo de dano baseado em Mazars (1984). Quatro problemas foram simulados, incluindo ensaio de um corpo de prova uniaxial à tração e à compressão; ensaio de uma viga-parede biengastada de concreto à flexão com diferentes teores de fibras, sujeita a dois carregamentos; ensaio de viga biapoiada de concreto armado à flexão com diferentes teores de fibras; e por fim ensaio de uma viga-laje biapoiada de concreto reforçado com fibras de aço. Os resultados numéricos apresentaram boa concordância com os dados experimentais, no entanto o autor constatou que o modelo de dano adotado de Mazars não é o mais adequado para a modelagem de concreto com fibras.

Al Ahmed et al. (2022) realizaram um estudo numérico tridimensional, desenvolvido por meio do MATLAB, em mesoescala para investigar o efeito das fibras de aço nas propriedades mecânicas de vigas de CRFA. O concreto foi simulado usando elementos sólidos com um modelo de plasticidade danificada, enquanto as fibras de aço foram modeladas por elementos treliçados. Os autores adotaram um modelo constitutivo bilinear para compressão e um modelo de queda para tração. Os resultados indicaram uma melhoria no comportamento das vigas com a presença das fibras.

Yadav e Prashanth (2022) modelaram numericamente o comportamento de vigas de CRFA usando o programa ABAQUS, considerando diferentes porcentagens volumétricas de fibras. Os autores utilizaram um modelo numérico de plasticidade danificada do concreto (CDP) para modelar o concreto e um modelo constitutivo na zona de compressão e na zona de tração da viga de CRFA desenvolvido por Al-Ta'an e Ezzadeen (1995). Os autores constataram que a presença de fibras resultou em melhoria significativa no desempenho flexural e na absorção de energia das vigas.

Debella Santos (2023) realizou um estudo sobre o comportamento da força cortante em concreto reforçado com fibras de aço. Uma das abordagens utilizadas em seu trabalho foi a modelagem computacional de um modelo 2D do ensaio de tração na flexão e um modelo 3D das vigas reforçadas com fibras de aço. A autora aplicou uma metodologia de análise inversa para ajustar a curva do modelo constitutivo do CRFA, utilizando-o posteriormente na modelagem 3D das vigas de sua campanha experimental. A simulação do ensaio de tração na flexão foi realizada no *software* Abaqus, e os resultados da curva força-deslocamento ($F-\delta$) foram comparados com os resultados experimentais. Este procedimento foi repetido até que se alcançasse a concordância entre as curvas, o que exigiu de duas a três iterações. A autora menciona que foram necessárias mais iterações, porém as curvas permaneciam semelhantes à iteração anterior ou apresentavam pior proximidade em relação aos valores experimentais. A partir dos resultados, a autora constatou a eficácia da análise inversa no modelo numérico para a obtenção de resultados precisos.

Fasolo (2023) desenvolveu um código em linguagem *Python*, utilizando método dos elementos finitos, para análise do comportamento de elementos unidirecionais de concreto reforçado apenas com fibras de aço sob flexão simples até a carga última. A autora utilizou um esquema de carregamento incremental e uma técnica iterativa com o método de *Newton Rapshon* associada a teoria de vigas laminadas de *Euler-Bernoulli*. Para descrever o comportamento à tração do CRFA, a autora utilizou modelos constitutivos trilineares propostos pelo RILEM, CE2021 e MC2010, e a representação do comportamento do concreto sob compressão a autora adotou um modelo elástico linear simples. Foram realizadas simulações de elementos biapoiados submetidos a carregamentos de 4 e 3 pontos, verificando-se os resultados em termos de $F-\delta$. Para prever resultados mais representativos em elementos de CRFA mais finos e verificar o efeito de escala, a autora adotou uma abordagem proposta por Galeote et al. (2020). Essa abordagem se baseia na substituição do CMOD (Medida da abertura do entalhe), denominada abordagem FCO (Abertura de Fissura Total), pela rotação do corpo de prova, abordagem ECO (Abertura de Fissura Equivalente), como parâmetro de referência para determinar as resistências residuais dos compósitos. A partir dos resultados, a autora concluiu que o efeito de escala influenciou os elementos mais finos, com dimensões significativamente diferentes daquelas utilizadas nos ensaios de caracterização do material. Em relação aos modelos constitutivos adotados, a autora concluiu que o MC2010 foi o mais apropriado para obter os resultados desejados.

Os modelos numéricos têm demonstrado ser ferramentas valiosas para investigar e prever o comportamento do CRFA sob diversas condições de carregamento, fornecendo uma

base sólida para o projeto e análise de estruturas reforçadas com fibras de aço. Os estudos revisados neste tópico ilustram a evolução das técnicas de modelagem e os diferentes enfoques adotados para representar o comportamento complexo do CRFA.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos teóricos que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho, com foco na aplicação do método dos elementos finitos e nas abordagens para solução de problemas não lineares.

Inicialmente, serão discutidos os princípios do método dos elementos finitos. Em seguida, serão introduzidas as técnicas de modelagem numérica utilizadas, juntamente com as estratégias de solução para problemas não-lineares, enfatizando os métodos iterativos, como a técnica de *Newton-Raphson*.

Assim, este capítulo fornecerá uma base teórica para a análise e interpretação dos resultados obtidos, justificando a escolha das metodologias empregadas ao longo do trabalho.

3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (MEF) se baseia na divisão de um problema contínuo em um número discreto de subdomínios interligados entre si, ou seja, sendo a discretização do meio contínuo em um conjunto de elementos finitos, consistindo em elementos menores, que são mais fáceis de analisar matematicamente (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

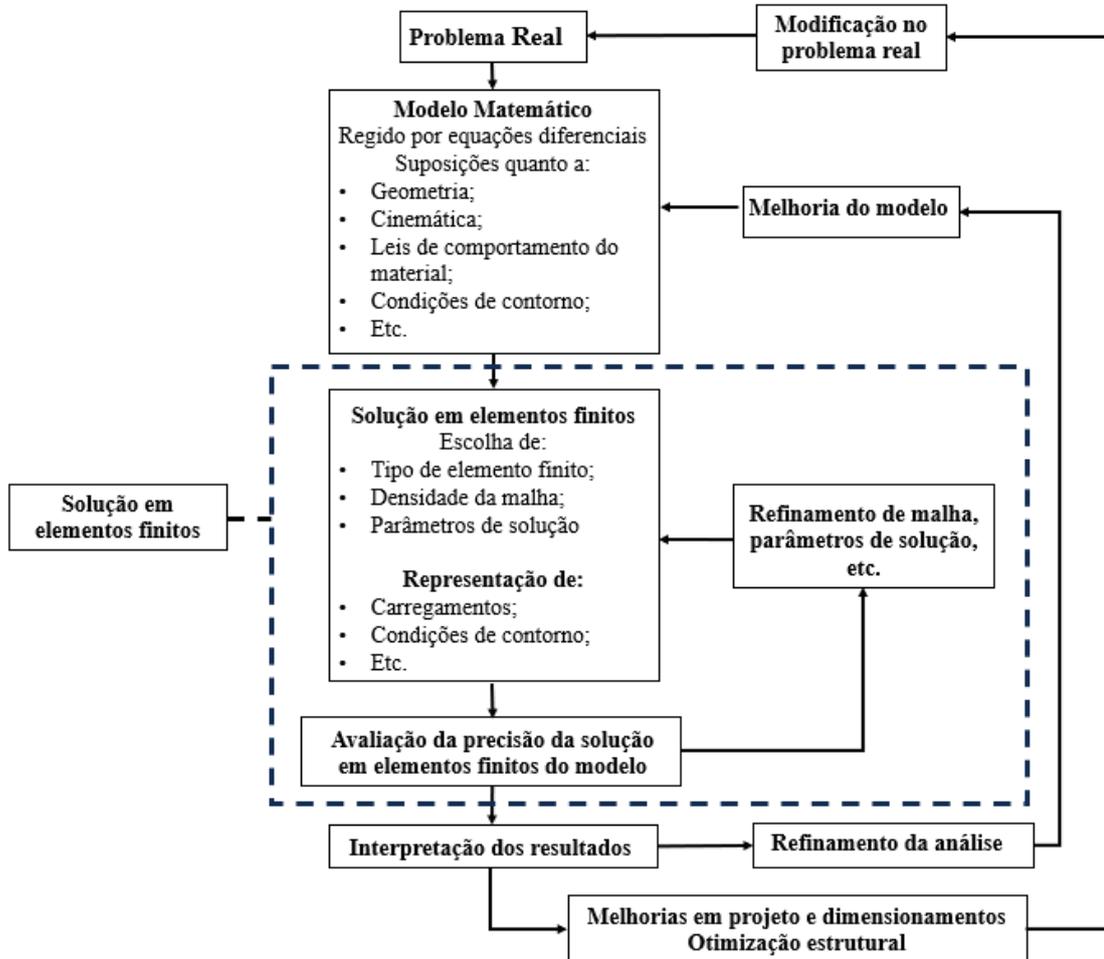
O objetivo do método consiste em encontrar uma solução aproximada para o problema original, realizado pela divisão do domínio em elementos finitos, estabelecendo equações que governam o comportamento dos elementos individuais e combinando essas equações para obter uma solução global para todo o domínio (SORIANO, 2009).

Para obter soluções mais precisas no MEF, é importante escolher a quantidade e qualidade adequada das funções de aproximação dos elementos que serão usadas para descrever o problema. Geralmente, quanto maior o número de elementos utilizados para discretizar o domínio, mais próximos os resultados estarão da solução real do problema. No entanto, a qualidade dos resultados não depende apenas do número de elementos, mas também do tipo de elemento utilizado, das condições de contorno e dos modelos constitutivos adotados para descrever o comportamento dos materiais (FARIA, 2017).

As equações que descrevem o comportamento dos elementos individuais são geralmente obtidas a partir de leis físicas fundamentais, como as equações de equilíbrio de forças, a lei de conservação da massa ou as leis do comportamento dos materiais. Essas equações são então transformadas em um sistema de equações algébricas, que podem ser

resolvidas numericamente para obter a solução aproximada do problema (SORIANO, 2009). Um esquema do processo de análise em elementos finitos pode ser observado na Figura 30.

Figura 30 – Processo de análise em elementos finitos



Fonte: Matos (2021).

A modelagem das estruturas de concreto armado em MEF pode ser realizada por diferentes tipos de elementos finitos, como elementos lineares, bidimensionais ou tridimensionais.

A escolha do elemento é realizada com base na interpolação dos deslocamentos nodais contidos no vetor elementar $\{u^e\}$, utilizando as funções de forma da matriz $[N]$. Esse processo permite obter os deslocamentos de um determinado nó da estrutura, contidos no vetor $\{u\}$, onde cada nó do elemento possui uma função de forma associada a ele, conforme descrito a seguir:

$$\{u\} = [N]\{u^e\} \quad (8)$$

Em seguida, são determinadas as deformações específicas $\{\varepsilon\}$ no interior de cada elemento, conforme descrito a seguir:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u^e\} \quad (9)$$

onde $[B]$ é a matriz das derivadas das funções de forma que relaciona o campo de deformações específicas com os deslocamentos nodais do elemento, obtida através da multiplicação da matriz das funções de forma $[N]$ pela matriz de operadores diferenciais $[L]$, conforme descrito abaixo:

$$[B] = [N][L] \quad (10)$$

A componente de tensão é obtida através da multiplicação do vetor de deformação $\{\varepsilon\}$ pela matriz constitutiva do material $[D]$, conforme apresentado a seguir:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (11)$$

O sistema de equações de equilíbrio de um elemento genérico é descrito de maneira compacta como (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000):

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} \quad (12)$$

Onde K^e é a matriz de rigidez elementar, e f^e é o vetor de forças nodais equivalente elementar.

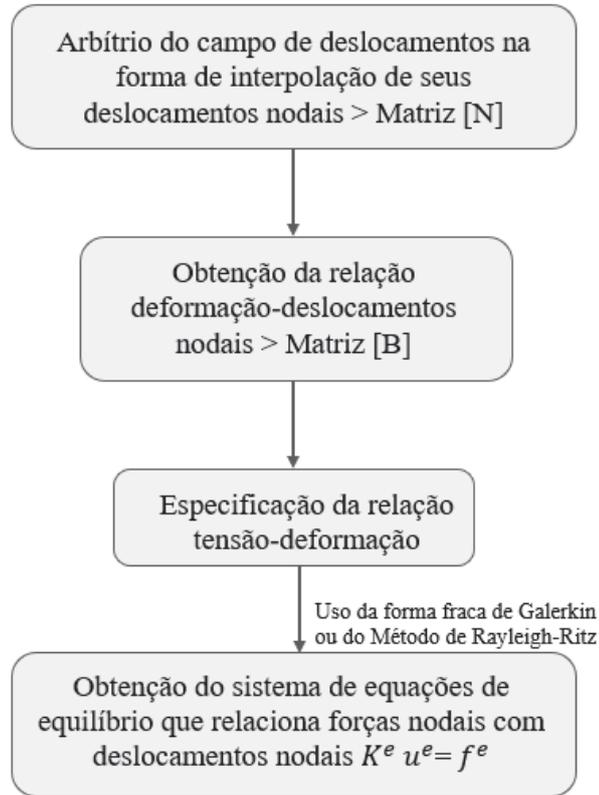
A montagem da matriz de rigidez, foi realizada utilizando o método dos elementos finitos com elemento de viga de *Euler-Bernoulli* e funções de interpolação cúbicas de *Hermite*, resultando na matriz elementar indicada abaixo (AZEVEDO, 2003):

$$K^{(e)} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ \cdot & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \cdot & \cdot & 12 & -6l \\ sim & \cdot & \cdot & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

A matriz apresentada na Equação 13 representa a rigidez de cada elemento local da viga. Essa matriz será incorporada a uma matriz de rigidez global, que abrange toda a estrutura e contém as informações de todas as matrizes de rigidez dos elementos individuais (AZEVEDO, 2003).

A Figura 31 apresenta um esquema das etapas para a obtenção do sistema de equações de um elemento.

Figura 31 – Etapas de obtenção do sistema de equações de um elemento.



Fonte: Adaptado de Soriano (2009).

A obtenção do sistema de equações começa com a formulação do problema em sua forma fraca. Uma abordagem comum para essa formulação é o método de Galerkin, que se baseia na busca de soluções aproximadas em um espaço de funções adequadas. Nesse contexto, uma função de teste é utilizada para multiplicar a equação diferencial e integrar ao longo do domínio, garantindo que o erro seja minimizado em um sentido integral. Isso resulta em um sistema de equações lineares que pode ser resolvido numericamente.

Outra abordagem, o método de Rayleigh-Ritz, também é utilizado para a formulação da forma fraca. Nesse método, a solução aproximada é expressa como uma combinação linear de funções base (ou funções de forma), que são escolhidas de maneira a satisfazer as condições de contorno do problema. Ao substituir essa expressão na equação diferencial e aplicar o princípio da energia, obtém-se um sistema de equações que representa o equilíbrio do sistema.

Este trabalho foi fundamentado com base em referências como Zienkiewicz e Taylor (2000), Reddy (2006) e Hughes (2000), que oferecem uma base sólida para a compreensão detalhada das formulações citadas.

3.2 TEORIA DE VIGA DE *EULER-BERNOULLI*

A teoria de *Euler-Bernoulli*, também conhecida como teoria das vigas, é uma teoria clássica da resistência dos materiais que descreve o comportamento de vigas sujeitas a cargas e deformações. De modo simplificado, a teoria considera a viga como um elemento unidimensional que se deforma apenas em uma direção, ao longo do seu eixo longitudinal.

A teoria baseia-se em algumas premissas simplificadoras. Entre elas, estão as seguintes características citadas por Craig (1981):

- Hipótese da linha neutra, no eixo médio em x da viga: assume-se que a linha que passa pelo centro das seções transversais, chamada de eixo médio, não sofre tração nem compressão;
- Hipótese das seções planas: considera-se que as seções transversais da viga permanecem planas mesmo após a deformação, e as deformações em virtude do cisalhamento são negligenciadas;
- Hipótese das pequenas deformações: assume-se que as deformações ao longo da viga são pequenas o suficiente para que as relações entre tensões e deformações sejam lineares. Isso significa que a viga permanece elástica durante a análise;
- As tensões σ_y e σ_z são desprezíveis se comparadas à tensão axial σ_x ; e
- O plano xy é um plano principal.

Com base nessas premissas, a teoria de *Euler-Bernoulli* permite determinar as equações diferenciais que descrevem o comportamento de uma viga sujeita a cargas externas. Essas equações levam em consideração a relação entre as deformações e os momentos fletores ao longo da viga. A partir dessas equações, é possível determinar as deflexões e as tensões internas na viga.

3.3 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

De acordo com Bathe (2006), em uma análise linear de estruturas, a formulação dos elementos finitos é dada assumindo em um modelo estrutural as seguintes hipóteses:

- Os deslocamentos nodais são infinitesimalmente pequenos;
- O material é linear elástico; e
- As condições de contorno não se modificam durante a aplicação das cargas.

Com essas hipóteses, o vetor de deslocamentos se relaciona linearmente com o vetor de cargas. No entanto, devido a fenômenos como fissuração, esmagamento do concreto e escoamento do aço, a matriz constitutiva do elemento é alterada a cada novo carregamento, com isso a estrutura começa a perder rigidez, de forma que a matriz $[K]$ é alterada e o sistema deixa de ser linear.

3.3.1 Tipos de não linearidade

As estruturas podem apresentar duas principais fontes de não linearidade: a física e a geométrica. A não linearidade física ocorre devido às mudanças nas propriedades mecânicas dos materiais estruturais quando estão sujeitos a tensões e deformações crescentes. Esta situação resulta em uma relação tensão-deformação não linear, conforme destacado por Lacerda (2014). Essas alterações nas propriedades dos materiais podem levar a comportamentos complexos, que exigem modelos mais sofisticados para uma previsão precisa do desempenho estrutural.

Por outro lado, a não linearidade geométrica está relacionada às deformações significativas da estrutura, que não podem ser desconsideradas em comparação com suas dimensões iniciais. Esses efeitos, também conhecidos como efeitos de segunda ordem, são cruciais para uma análise precisa. Eles devem ser considerados tanto globalmente na estrutura, influenciando o comportamento geral, quanto em nível local nos elementos finitos, afetando as respostas específicas de cada componente, conforme indicado por Paraski (2012).

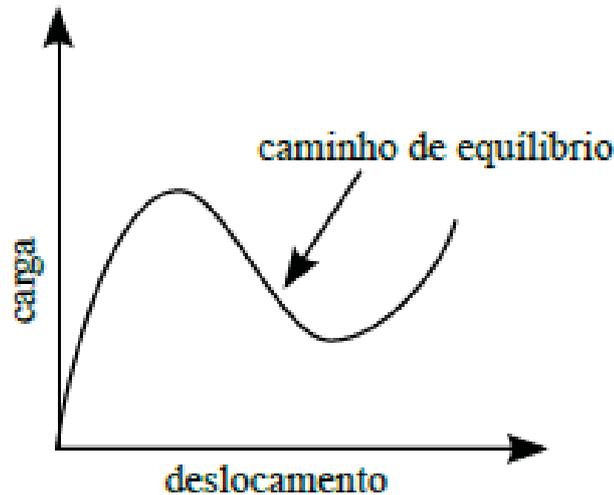
3.3.2 Caminho de Equilíbrio

De acordo com Lacerda (2014), um gráfico comumente utilizado para estudar o comportamento de um sistema estrutural é o que relaciona carga e deslocamento. A curva

presente neste gráfico é denominada "caminho de equilíbrio" e cada ponto ao longo deste caminho representa uma configuração de equilíbrio da estrutura, conforme indicado na

Figura 32.

Figura 32 – Caminho do Equilíbrio.



Fonte: Lacerda (2014).

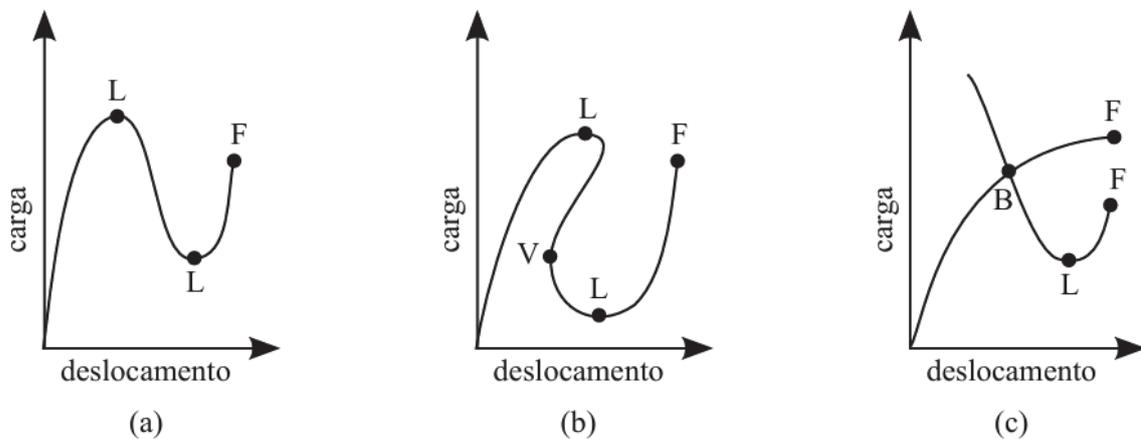
O estudo do caminho de equilíbrio é fundamental para compreender o comportamento estrutural não linear. A análise dessa curva revela como a estrutura se deforma sob diferentes níveis de carga, identificando pontos críticos onde ocorrem mudanças significativas no comportamento, como o início de fissuração, plastificação ou outros fenômenos de degradação.

Pontos críticos podem incluir o ponto de limite (L), que é um ponto máximo ou mínimo no caminho do equilíbrio onde a tangente é horizontal, e o ponto de bifurcação (B), onde dois ou mais caminhos se cruzam. Quando a estrutura atinge esses pontos críticos, ela se torna instável, tendendo a singularizar a matriz de rigidez nas proximidades do ponto limite (SILVA, 2018).

Além desses, existem outros pontos especiais no caminho de equilíbrio, como o ponto de viragem (V), onde a tangente é vertical e está associado ao comportamento de *snap-back*. Por fim, há o ponto de falha (F), onde ocorre a falha da estrutura (LACERDA, 2014).

A Figura 33 ilustra os pontos críticos do caminho de equilíbrio, associados aos fenômenos de *snap-through* (salto de deslocamento), *snap-back* (salto de força) e bifurcação.

Figura 33 – Pontos Críticos e comportamento do caminho de equilíbrio: a) *Snap-through*; b) *Snap-back*; c) Bifurcação.



Fonte: Lacerda (2014).

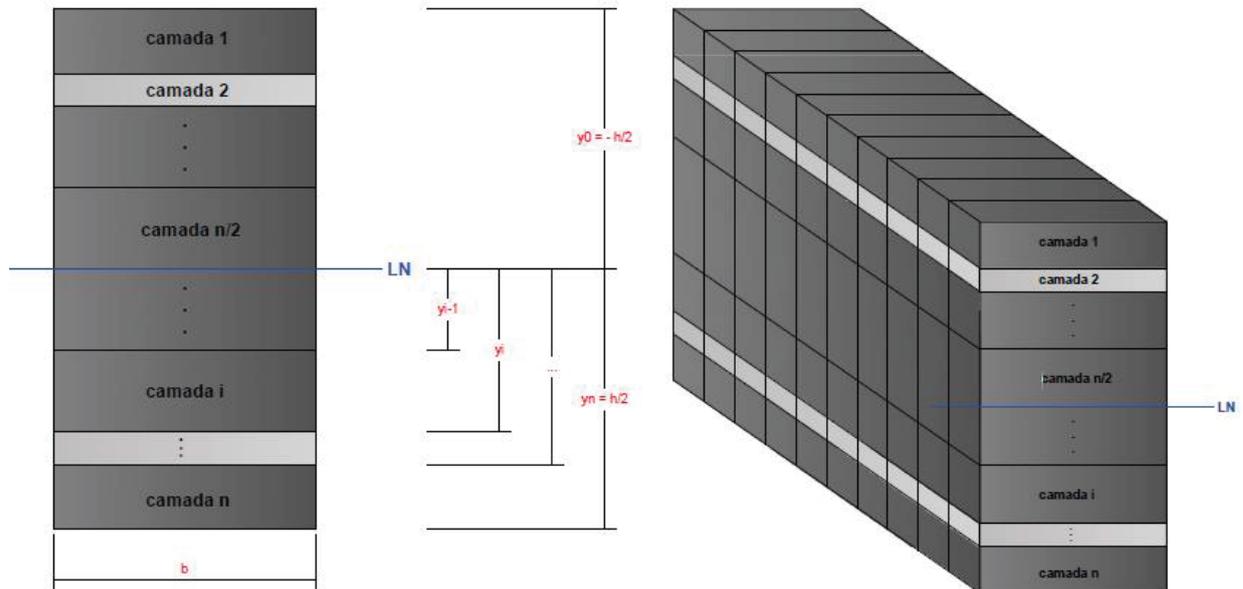
3.3.3 Método para solução de equações não lineares

De acordo com Melo (2019), dentre os diferentes modelos que tratam a respeito do modelo constitutivo não linear das estruturas, o modelo unidimensional é bastante utilizado em razão de sua simplicidade e bons resultados obtidos. Esse modelo conta com duas abordagens numéricas diferentes para solução de problemas com não linearidade física, através da análise da seção transversal dos elementos: o método de momento-curvatura e o método das lamelas, que consiste em dividir a seção transversal em camadas.

O método de momento-curvatura considera seções transversais homogêneas e utiliza relações previamente calculadas entre momento e curvatura (KWAK; KIM, 2002). De acordo com Melo (2019) essa abordagem permite representar a seção transversal por meio de leis que vinculam os esforços aplicados à seção às deformações correspondentes. Dessa forma, estabelece-se uma relação entre os esforços e suas respectivas deformações (curvaturas). Utilizando essas relações de momento-curvatura, é possível estimar os esforços na seção para um dado estado de deformação e, assim, determinar a matriz de rigidez dos elementos.

Nos estudos de Abeche (2015) e Imai (2018), é apresentado o método das lamelas com um modelo de rigidez equivalente para analisar o comportamento não-linear do concreto em vigas de *Euler-Bernoulli*. Este método utiliza as leis constitutivas de tensão-deformação, dividindo a seção transversal em várias camadas e subdividindo-a em áreas menores, conforme ilustrado na Figura 34.

Figura 34 – Seção transversal de um elemento de viga de *Euler-Bernoulli* laminado.



Fonte: Imai (2018).

Desse modo, à medida que o carregamento incremental é aplicado, é possível avaliar as mudanças das propriedades de cada camada, como o módulo de elasticidade, a inércia, e assim, determinar a rigidez à flexão resultante para cada seção. Isso permite calcular as tensões e deformações de cada camada individualmente e, assim, é possível calcular a rigidez equivalente para cada camada de cada elemento (IMAI, 2018). Considerando o caso de simetria em vigas laminadas de material composto com largura b constante, a rigidez à flexão equivalente EI_{eqv} é determinada por:

$$EI_{eqv} = \frac{1}{3} b \sum_{i=1}^n E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3) \quad (14)$$

onde:

EI_{eqv} = rigidez equivalente;

b = largura da seção transversal;

n = número de camadas;

i = índice para indicar o número de camadas;

E_i = módulo de elasticidade de cada camada, considerando E_c para o módulo de elasticidade do concreto e E_s para o módulo de elasticidade do aço; e

y_i = valores das coordenadas no eixo y da divisão dos pontos das i-ésimas camadas consecutivas, que subtraídas resultam na altura da camada.

Com um comportamento não-linear, é necessária a implementação de um método para resolver sistemas não lineares. Portanto, é preciso realizar um processo incremental iterativo, uma vez que a matriz de rigidez $[K]$ passa a ser uma função do vetor de deslocamentos $\{u\}$, resultando em:

$$[K(u)]\{u\} = \{f\} \quad (15)$$

Onde:

K = Matriz de rigidez do elemento finito;

u = Vetor de deslocamentos; e

f = Vetor de forças externas.

De acordo com Bitencourt Jr. (2009), o método de *Newton Raphson* é um dos métodos mais utilizados para resolução de problemas que envolvem equações de equilíbrio não-lineares. O método consiste na aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por tangentes até a convergência, onde a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração.

Segundo Lacerda (2014), o método de *Newton-Raphson* fornece a solução de um ponto do caminho de equilíbrio, sendo necessário combinar um procedimento incremental às iterações de *Newton-Raphson*. Fasolo (2023) adotou em seu trabalho este método com base nos conceitos apresentados por Bathe (1996), onde foi utilizado um incremento de carga. A cada incremento de carga, o incremento de deslocamento correspondente é calculado até que o equilíbrio seja atingido.

Contudo, Silva (2018) aponta que o uso do método de *Newton-Raphson* com incremento de carga tende a singularizar a matriz de rigidez nas proximidades do ponto limite. Isso ocorre porque o incremento de carga possui apenas um sentido (positivo ou negativo), impossibilitando o retorno à trajetória de equilíbrio e tornando ineficaz a análise após os pontos limites da estrutura, onde o sentido do incremento de carga deveria ser modificado.

Para superar essa limitação, pode-se utilizar o método de *Newton-Raphson* com incremento de deslocamento. Neste método, são aplicados incrementos de deslocamentos prescritos constantes, e o vetor de forças externas não é aumentado diretamente, mas resulta da aplicação desse deslocamento. Esta abordagem permite uma análise mais eficaz e precisa,

especialmente em situações onde a estrutura passa por pontos críticos ou limites, garantindo uma representação mais fiel do comportamento estrutural não linear.

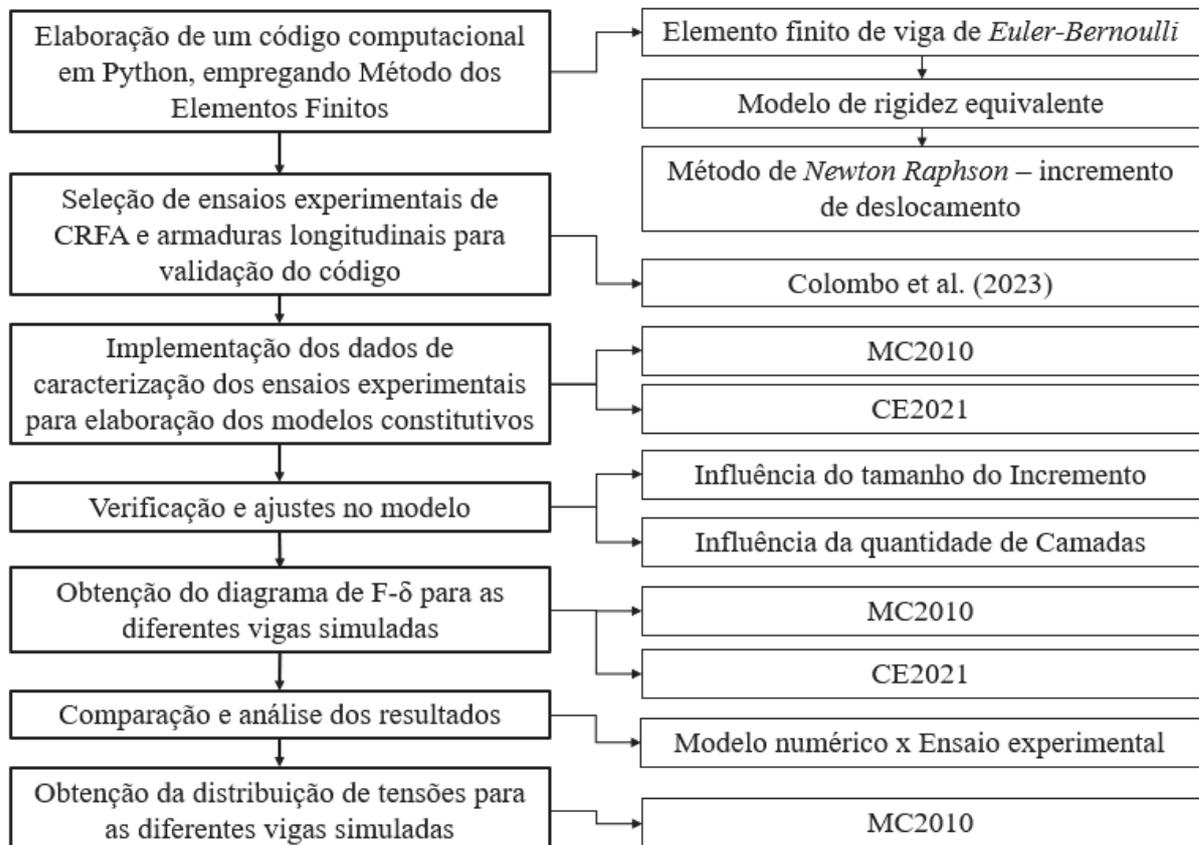
4 METODOLOGIA

Este trabalho foi desenvolvido com base na continuidade e aprimoramento do código computacional em linguagem *Python*, originalmente desenvolvido por Fasolo (2023) no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná. A pesquisa inicial da autora focou na análise do comportamento de elementos unidirecionais de concreto reforçado integralmente com fibras de aço, submetidos à flexão simples até a carga última.

Neste capítulo, são apresentadas as metodologias adotadas para a elaboração do código, com ênfase em sua adaptação para incluir barras longitudinais de aço, além das fibras, bem como, a adaptação do método incremental adotado. O código utiliza o método dos elementos finitos com elementos de viga de *Euler-Bernoulli* laminados, e um procedimento incremental e iterativo para solução dos sistemas não-lineares.

A Figura 35 ilustra de maneira simplificada a metodologia empregada neste trabalho.

Figura 35 – Esquema da metodologia adotada no trabalho.

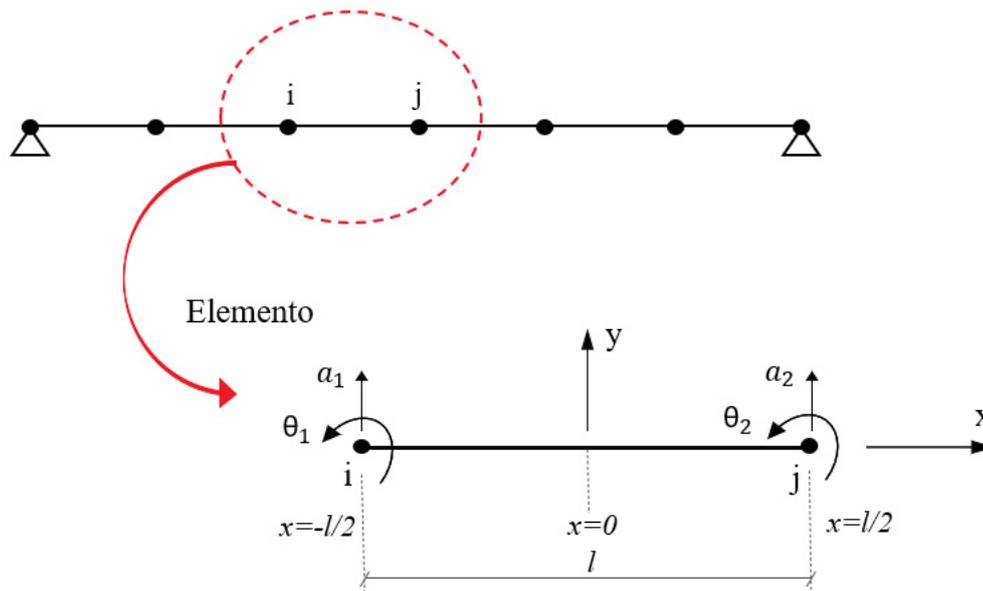


Fonte: Autora (2024).

4.1 DEFINIÇÃO DO ELEMENTO

Para aplicar a teoria de *Euler-Bernoulli* na análise estrutural, foi utilizada a viga de *Euler-Bernoulli* com quatro graus de liberdade, o qual foi dividido em várias partes menores, denominadas elementos. Cada elemento possui dois nós, um em cada uma de suas extremidades, que definem seu início e fim, com dois graus de liberdade em cada nó, conforme indicado na Figura 36.

Figura 36 – Elemento finito de viga.



Fonte: Autora (2024).

4.2 MÉTODO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Para resolver o sistema estrutural não linear utilizando o método dos elementos finitos, é necessário aplicar métodos incrementais e iterativos para a solução dos sistemas de equações não lineares da estrutura. Esse processo consiste em determinar os deslocamentos por meio das equações de equilíbrio da estrutura e a correção das forças internas através de um processo iterativo (PARASKI, 2012).

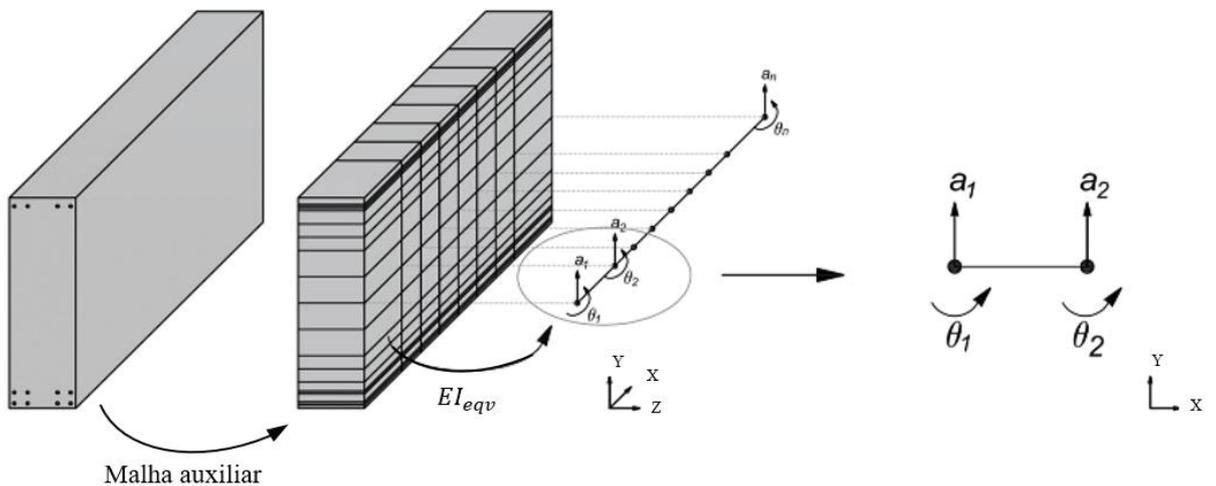
Os tópicos a seguir apresentam as metodologias e estratégias empregadas para a resolução das equações não lineares implementadas no código.

4.2.1 Modelo de rigidez equivalente

Neste trabalho, foi adotado o método das lamelas com um modelo de rigidez equivalente, conforme descrito por Abeche (2015) e Imai (2018), para considerar o comportamento não linear do CRFA no modelo de viga de *Euler-Bernoulli*.

Apesar do elemento finito de viga *Euler-Bernoulli* ser unidimensional com dois graus de liberdade por nó, com o modelo de rigidez equivalente é possível analisar os parâmetros físicos das outras dimensões, realizando uma malha auxiliar conforme indicado na Figura 37.

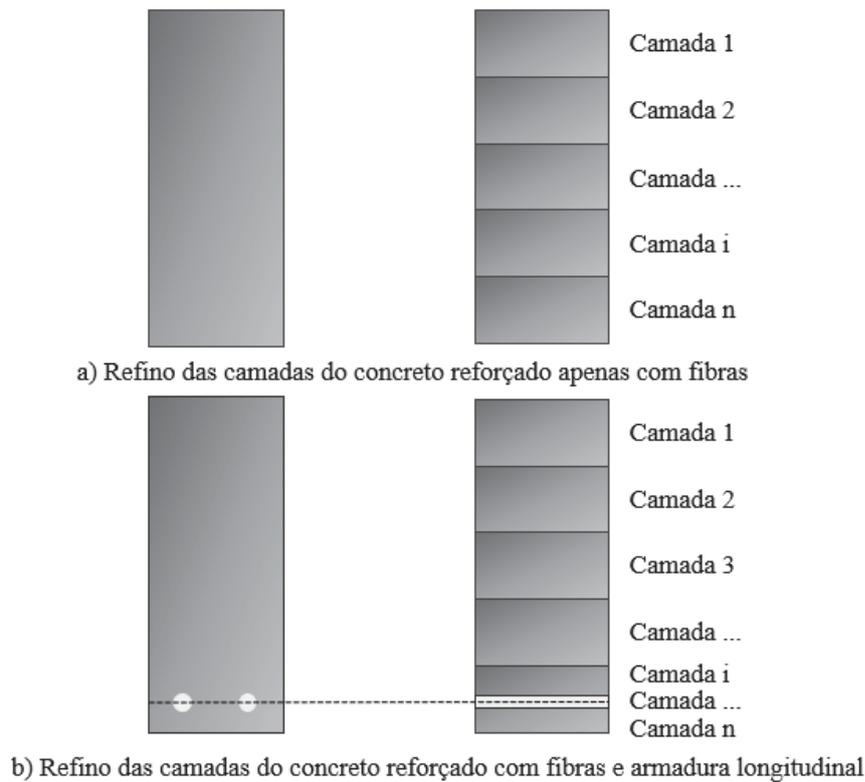
Figura 37 – Malha auxiliar para consideração das outras dimensões no elemento de viga laminada de *Euler-Bernoulli*.



Fonte: Adaptado de Imai (2023).

Além do refinamento dos elementos ao longo do comprimento da viga, realiza-se também o refinamento no número de camadas ao longo da seção transversal. As camadas compostas exclusivamente por concreto reforçado com fibras de aço são divididas de forma constante. Quando são adicionadas armaduras, estas são consideradas em camadas variáveis. Calculam-se as áreas de aço da seção e criam-se camadas equivalentes, garantindo a coincidência no centro de massa e altura equivalente. Assim, a área da camada com armadura é considerada uma área equivalente disposta na largura da seção transversal da viga, conforme indicado na Figura 38. Dessa forma, é possível calcular a rigidez equivalente para cada seção transversal de cada elemento finito, considerando o material adequado para cada camada.

Figura 38 – Refino de camadas variáveis na seção transversal à medida que são inseridas as armaduras.



Fonte: Autora (2024).

4.2.2 Método de *Newton Raphson*

O código foi elaborado com um processo iterativo incremental, que, inicialmente desenvolvido por Fasolo (2023), utilizava a técnica iterativa de *Newton-Raphson* com incrementos de carga, destinada à obtenção das respostas de deslocamentos não lineares. No entanto, o incremento de carga pode levar à singularidade da matriz de rigidez próximo ao ponto de limite, resultando na simulação apenas até a carga de pico da curva $F-\delta$. Com o intuito de obter a curva além da carga última, adotou-se a técnica iterativa de *Newton-Raphson* com incrementos de deslocamento.

Neste método o vetor de deslocamento é dividido em duas partes: uma referente aos deslocamento não restritos (desconhecidos) e outra referente aos deslocamentos restritos (deslocamentos incrementais aplicados e conhecidos), representados respectivamente como Δu^u e Δu^c , resultando no seguinte sistema reordenado como:

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{uc} \\ K^{cu} & K^{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^u \\ \Delta u^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^u \\ f^c \end{Bmatrix} \quad (16)$$

onde:

K^{uu} = Submatriz de rigidez correspondente aos graus de liberdade desconhecidos (não restringidos);

K^{uc} = Submatriz de rigidez que relaciona os graus de liberdade desconhecidos (não restringidos) com os conhecidos (restritos);

K^{cu} = Submatriz de rigidez que relaciona os graus de liberdade conhecidos (restritos) com os desconhecidos (não restringidos);

K^{cc} = Submatriz de rigidez correspondente aos graus de liberdade conhecidos (restritos);

Δu^u = Vetor dos deslocamentos desconhecidos (não restringidos);

Δu^c = Vetor dos deslocamentos conhecidos (restritos);

f^u = vetor das forças aplicadas; e

f^c = vetor das forças desconhecidas (reações de apoio).

Os deslocamentos desconhecidos são calculados a partir da primeira linha do sistema, como:

$$[K^{uu}]\{\Delta u^u\} = \{f^u\} - [K^{uc}]\{\Delta u^c\} \quad (17)$$

Onde a cada iteração são calculados os deslocamentos com a matriz de rigidez equivalente atualizada com:

$$\left[K_{eqv(j-1)}^{uu} \right] \{ \Delta u_{(j)}^u \} = \{ f_{(j)}^u \} - \left[K_{eqv(j-1)}^{uc} \right] \{ \Delta u_{(j)}^c \} \quad (18)$$

onde:

$K_{eqv(j-1)}$ = matriz de rigidez atualizada resultante do modelo de rigidez equivalente para iteração anterior a iteração vigente.

A força externa $\{f^p\}$ resultante do incremento do deslocamento é calculada então a partir da segunda linha do sistema, com a matriz de rigidez equivalente atualizada:

$$\left[K_{eqv(j-1)}^{cu} \right] \{ \Delta u_{(j)}^u \} + \left[K_{eqv(j-1)}^{cc} \right] \{ \Delta u_{(j)}^c \} = \{ f_{(j)}^p \} \quad (19)$$

A partir da força externa resultante do incremento do deslocamento é verificado o equilíbrio do sistema, calculando-se o resíduo (g) entre a força externa e a força interna como:

$$g_{(j)} = F_{ext(j)} - F_{int(j)} \quad (20)$$

$g_{(j)}$ = tensor de primeira ordem que calcula a força residual entre a força externa e a força interna para a iteração em questão;

$F_{ext(j)}$ = força externa para a iteração atual; e

$F_{int(j)}$ = força interna para a iteração atual.

Em seguida, verifica-se o critério de convergência adotado para interromper o processo iterativo. O processo é interrompido quando a diferença entre a força externa e a força interna atinge um valor inferior ao limite estabelecido. O critério de convergência adotado é o seguinte:

$$\xi \geq \frac{\|g_i\|}{\|F_{ext(j)}\|} \quad (21)$$

onde:

ξ = tolerância.

Ao final de cada iteração os deslocamentos são atualizados de acordo com:

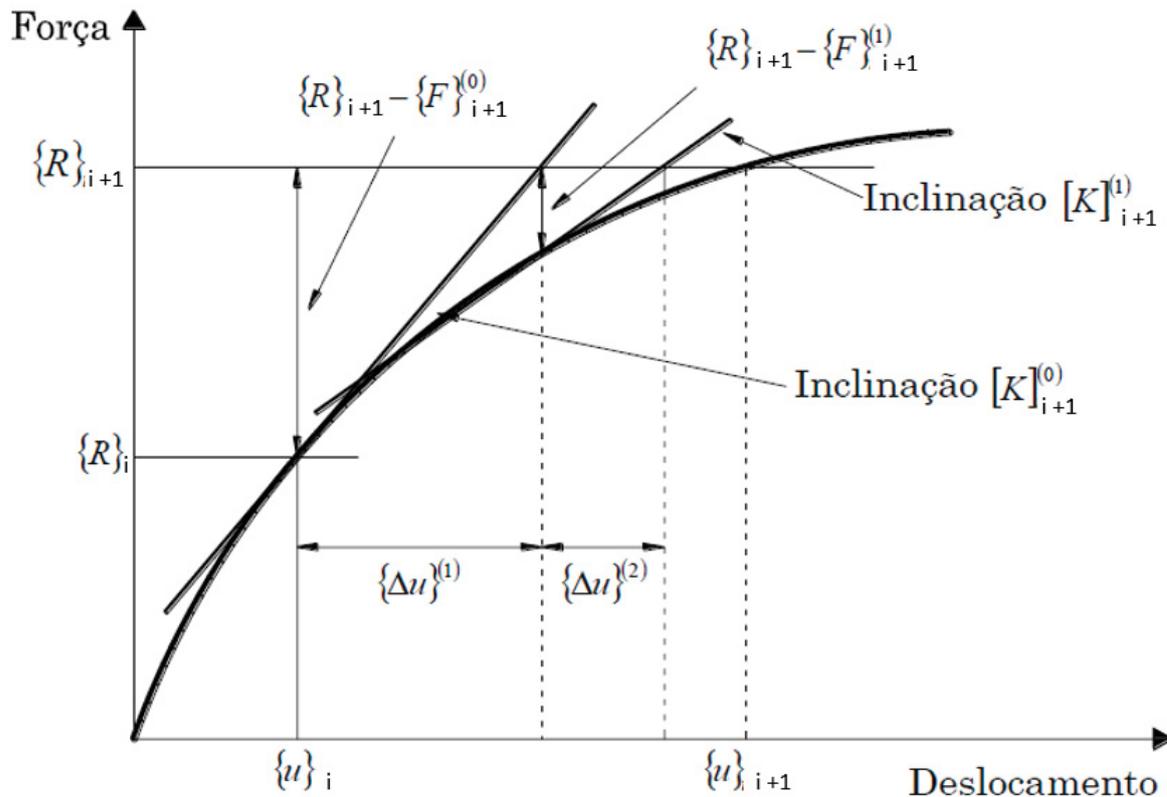
$$u_{(j+1)} = u_{(j)} + \Delta u_{(j)} \quad (22)$$

onde:

$u_{(j+1)}$ = tensor de primeira ordem com os deslocamentos finais da iteração após aplicação do Método de *Newton-Raphson*; e

$u_{(j)}$ = tensor de primeira ordem com os deslocamentos resultantes da iteração antes da aplicação do Método de *Newton-Raphson*.

As iterações dentro de cada incremento de deslocamento são mantidas até que o critério de convergência seja atingido. Ao atingir o critério de convergência, significa que o sistema se encontra em equilíbrio e um novo incremento de deslocamento é aplicado. Neste método, a matriz de rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração, conforme ilustrado na Figura 39.

Figura 39 – Representação gráfica do método de *Newton Raphson*.

Fonte: Adaptado de Bathe (1996).

4.3 MODELOS CONSTITUTIVOS

Para simular adequadamente o comportamento estrutural dos materiais constituintes dos elementos, foram utilizados modelos constitutivos calculados com base nos dados de caracterização experimental. Para a consideração do CRFA, foram adotadas as leis constitutivas do *fib Model Code* (MC2010) e do *Código Estrutural* (CE2021). Esta escolha se deve ao reconhecimento e à ampla utilização destes modelos na engenharia estrutural, oferecendo um modelo abrangente e experimentalmente validado para representar o comportamento à tração do CRFA.

Para descrever o comportamento do aço estrutural utilizado como reforço convencional do concreto, foi adotado um modelo simplificado elástico-linear. Essa simplificação foi implementada com base em justificativas técnicas e práticas que visam facilitar a modelagem e análise estrutural. A principal justificativa para essa escolha é a simplicidade e a facilidade de uso da lei elástico-linear, que é mais simples de implementar em análises numéricas. Além disso, em muitos projetos estruturais, o aço estrutural opera

predominantemente dentro do regime elástico sob as cargas de serviço previstas, tornando a abordagem elástico-linear uma boa aproximação para a maioria dos cenários de carga durante a vida útil da estrutura. Quando o foco da análise é o comportamento pós-fissuração do CRFA, a simplificação do comportamento do aço para uma lei elástico-linear é adequada, pois o aço estrutural não atinge níveis significativos de plasticidade ou deformação.

4.4 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Após a implementação do código, foi necessário utilizar dados de ensaios experimentais para validar os resultados numéricos obtidos. Para tanto, foram pesquisados artigos publicados que disponibilizassem dados experimentais e de caracterização compatíveis com o objetivo deste trabalho. Identificou-se o artigo de Colombo et al. (2023), que conduziu uma campanha experimental de testes de flexão em vigas rasas em escala real com 0,12 m de espessura, 3 m de comprimento e 0,6 m de largura, a Figura 40 apresenta os testes de flexão realizado pelos autores em dois laboratórios distintos.

Figura 40 – Testes de flexão em vigas rasas: (a) laboratório L1 e (b) laboratório L2.



Fonte: Colombo et al. (2023).

Os autores testaram três tipos de concreto em dois laboratórios diferentes: 3 vigas com concreto armado (RC), 6 vigas com concreto reforçado exclusivamente com fibras de aço (70A/70B) e 6 vigas reforçadas com fibras de aço e armadura longitudinal (55A+R/55B+R), sendo A e B a diferenciação entre os tipos de fibras de aço utilizadas. Neste trabalho, foram utilizados apenas os dados das vigas 55A+R e 55B+R, compatíveis com os objetivos propostos.

Além disso, é importante destacar que os parâmetros adotados para as armaduras longitudinais e para o CRFA foram obtidos a partir dos ensaios de caracterização dos materiais conduzidos pelos autores.

Para a caracterização do CRFA, os autores utilizaram o ensaio de flexão em três pontos, seguindo as recomendações da norma EN 14651. Este método permite a obtenção de parâmetros sobre a resistência e a ductilidade do material sob condições de flexão, dados que foram utilizados para calcular o modelo constitutivo adotado na simulação computacional.

Quanto à caracterização das armaduras longitudinais, foi realizado o ensaio de tração uniaxial. Este ensaio é fundamental para determinar as propriedades mecânicas do aço, como a resistência à tração, o limite de escoamento e o módulo de elasticidade.

4.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O processo de implementação computacional compreendeu em quatro etapas principais: entrada de dados, pré-processamento, análise e pós-processamento. Esta seção aborda cada uma dessas etapas, utilizadas na implementação computacional, seguindo uma sequência lógica e estruturada.

Inicialmente, procedeu-se à entrada dos dados necessários para a simulação da viga em questão. Em seguida, foi realizada a etapa de pré-processamento, que incluiu a leitura desses dados de entrada, bem como a definição e montagem das matrizes e vetores inalteráveis. Esses incluem o vetor de deslocamentos incrementais e a matriz de graus de liberdade.

Após a conclusão da etapa inicial, inicia-se o ciclo para a montagem da matriz de rigidez que, conforme já mencionado, foi realizada utilizando o método dos elementos finitos com elemento de viga de *Euler-Bernoulli* e funções de interpolação cúbicas de *Hermite*.

Com o ciclo incremental iniciado, os deslocamentos prescritos são divididos em vários incrementos, de modo que o modelo precisa encontrar o estado de equilíbrio a cada incremento de deslocamento dentro do processo iterativo-incremental.

Desta forma, após a montagem da matriz de rigidez, os deslocamentos não restritos são determinados e as coordenadas da estrutura são, então, atualizadas. E a partir dos deslocamentos nodais e da matriz de deformação determinada por:

$$[B] = \left[\frac{12x}{l^3} \quad -\frac{1}{2} + \frac{6x}{l^2} \quad \frac{12x}{l^3} \quad \frac{1}{2} + \frac{6x}{l^2} \right] \quad (23)$$

onde:

B = matriz de deformação;

x = valor da coordenada no eixo x ao longo do elemento finito; e

l = comprimento total do elemento finito de viga delimitado entre os nós inicial e final.

As respectivas deformações nos pontos nodais de interesse são calculadas por:

$$\varepsilon = B u^{(e)} \quad (24)$$

onde:

ε = deformação no ponto nodal de interesse; e

$u^{(e)}$ = campo de deslocamento transversal elementar.

A determinação das deformações de cada camada da seção transversal de cada ponto nodal é calculada por:

$$\varepsilon_{camada(i)} = y_{camada(i)} \varepsilon \quad (25)$$

onde:

$\varepsilon_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com as deformações de cada camada analisada;

$y_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada.

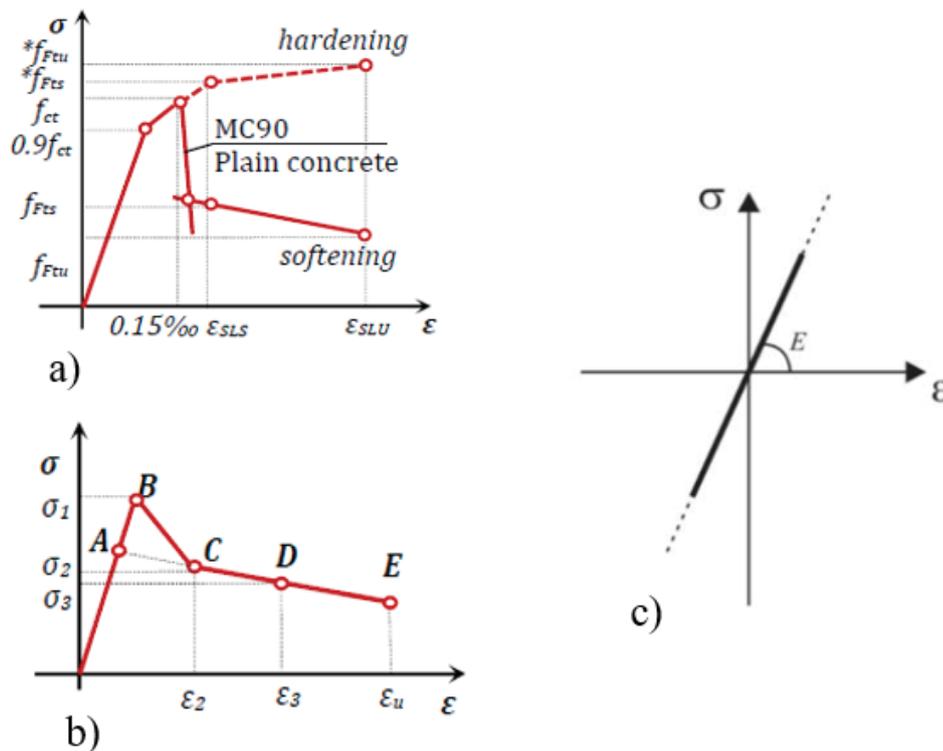
Para representar o comportamento estrutural dos materiais presentes na viga em questão, foram empregados modelos constitutivos, calculados com base nos dados obtidos a partir da caracterização experimental disponível na literatura. Esses modelos são capazes de descrever o comportamento à tração tanto do concreto reforçado com fibras de aço quanto do reforço convencional com armaduras longitudinais.

A metodologia adotada foi a da rigidez equivalente, na qual a seção transversal da viga é dividida em várias camadas. Dessa forma, foi possível aplicar a lei constitutiva correspondente a cada material presente em cada camada específica. Para as camadas compostas por CRFA, o comportamento à tração do material foi representado por leis constitutivas multilíneas propostas pelo *fib Model Code* (MC2010) e pelo *Código Estructural*

(CE2021), conforme ilustrado na Figura 41a e b respectivamente. No que diz respeito à compressão do concreto, foi adotado um modelo elástico-linear como simplificação.

Para as camadas contendo armaduras de aço, o comportamento do material foi representado por meio de um modelo simplificado elástico-linear, conforme ilustrado na Figura 41c.

Figura 41 – Modelo constitutivo adotado para: a) CRFA pelo MC2010; b) CRFA pelo CE2021; c) Armaduras longitudinais.



Fonte: Blanco (2013); Rodrigues (2019).

No início do carregamento, antes de ocorrerem as primeiras fissuras na viga, as camadas são associadas ao módulo de elasticidade inicial do material, correspondente ao primeiro trecho do diagrama de tensão-deformação do CRFA. Posteriormente, a cada incremento de deslocamento, realiza-se a verificação da deformação em cada camada, determinando se a deformação atingiu o limite elástico linear.

À medida que surgem fissuras na viga, a rigidez do elemento sofre alterações significativas. Quando a deformação ultrapassa o ponto de deformação limite do trecho linear, o comportamento do material entra em um regime não linear. Neste estágio, o módulo de elasticidade é recalculado com base na lei constitutiva específica de cada camada, utilizando-se o módulo secante correspondente à deformação observada, dado por:

$$E_{camada(i)} = \frac{\sigma_{camada(i)}}{\varepsilon_{camada(i)}} \quad (26)$$

onde:

$E_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem dos módulos de deformação de cada camada analisada; e

$\sigma_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com as tensões de cada camada analisada.

Observa-se que, antes do surgimento das primeiras fissuras na viga, o modelo comporta-se de maneira linear. Nesse estágio inicial, a posição da linha neutra permanece inalterada, refletindo o comportamento elástico linear do material.

No entanto, conforme a viga começa a sofrer danos e fissuras, a rigidez do material é afetada, levando a alterações na posição da linha neutra. À medida que a deformação progride, camadas que inicialmente estavam sujeitas a compressão podem passar a ser tracionadas, modificando significativamente a distribuição de tensões e deformações ao longo da seção transversal da viga.

Devido a essas mudanças no estado de tensão, a posição da linha neutra não pode mais ser considerada constante. É necessário, portanto, recalcular a posição da linha neutra a cada iteração do processo de análise. Esse recálculo leva em consideração a redistribuição das tensões e as propriedades não lineares dos materiais envolvidos, garantindo uma representação do comportamento estrutural da viga sob carregamento progressivo e é dado por:

$$y_{LN} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{camada(i)} E_{camada(i)} A_{camada(i)}}{E_{camada(i)} A_{camada(i)}} \quad (27)$$

onde:

y_{LN} = nova posição da linha neutra; e

$A_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem das áreas de cada camada analisada.

Com a atualização da posição da linha neutra, as novas coordenadas no eixo y são atualizadas de acordo com as coordenadas absolutas das camadas e a nova posição do eixo neutro por:

$$y_{camada_novo(i)} = y_{camada(i)} - y_{LN} \quad (28)$$

onde:

$y_{camada_novo(i)}$ = tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y de cada camada atualizados conforme a nova posição da linha neutra; e

$y_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com os valores das coordenadas no eixo y considerando a linha neutra passando no meio da seção.

Na sequência, são determinadas as tensões atuantes em cada camada de cada ponto nodal, dada por:

$$\sigma_{camada(i)} = E_{camada(i)} \varepsilon_{camada(i)} \quad (29)$$

O tensor que contém as rigidezes equivalentes de cada elemento é definido a partir da equação já apresentada pelo modelo de rigidez equivalente proposto por Abeche (2015), dado por:

$$EI_{eqv} = \frac{1}{3} b \sum_{i=1}^n E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3) \quad (30)$$

Observa-se que o momento de inércia de cada elemento com seção transversal constante é obtido através do somatório dos momentos de inércia das camadas discretizadas que compõem esses elementos. Dessa forma, tem-se:

$$I_{camada(i)} = \frac{1}{3} b \sum_{i=1}^n (y_{camada_novo(i)}^3 - y_{camada_novo(i-1)}^3) \quad (31)$$

onde:

$I_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com os momentos de inércia de cada camada analisada.

Com as tensões e os momentos de inércia de cada camada e ponto nodal calculados, são então determinados os momentos atuantes em cada camada de cada ponto nodal, dado por:

$$M_{seção} = \sum_{i=1}^n M_{camada(i)} = \frac{\sigma_{camada(i)} I_{camada(i)}}{y_{camada_novo(i)}} \quad (32)$$

onde:

$M_{seção}$ = momento fletor atuante na seção; e

$M_{camada(i)}$ = tensor de primeira ordem com os momentos de cada camada analisada.

Para o cálculo do vetor das forças internas em uma estrutura, adotou-se a equação dos momentos resultantes da resistência dos materiais. Especificamente, no contexto de um ensaio de viga submetida a flexão por 4 pontos (utilizado para validar a implementação computacional descrita neste trabalho) a fórmula empregada é a seguinte:

$$F_{i(j)} = \frac{M_{seção}}{a} \quad (33)$$

onde:

$F_{i(j)}$ = força interna para a iteração em questão;

j = índice para indicar o número de iterações; e

a = corresponde à distância medida do apoio até o ponto de aplicação da carga.

É importante salientar que, caso a configuração estrutural em questão seja distinta da apresentada no ensaio de flexão por 4 pontos, será necessário revisar a equação mencionada e realizar ajustes para assegurar que ela se adeque às características da nova configuração estrutural que se pretende analisar ou reproduzir.

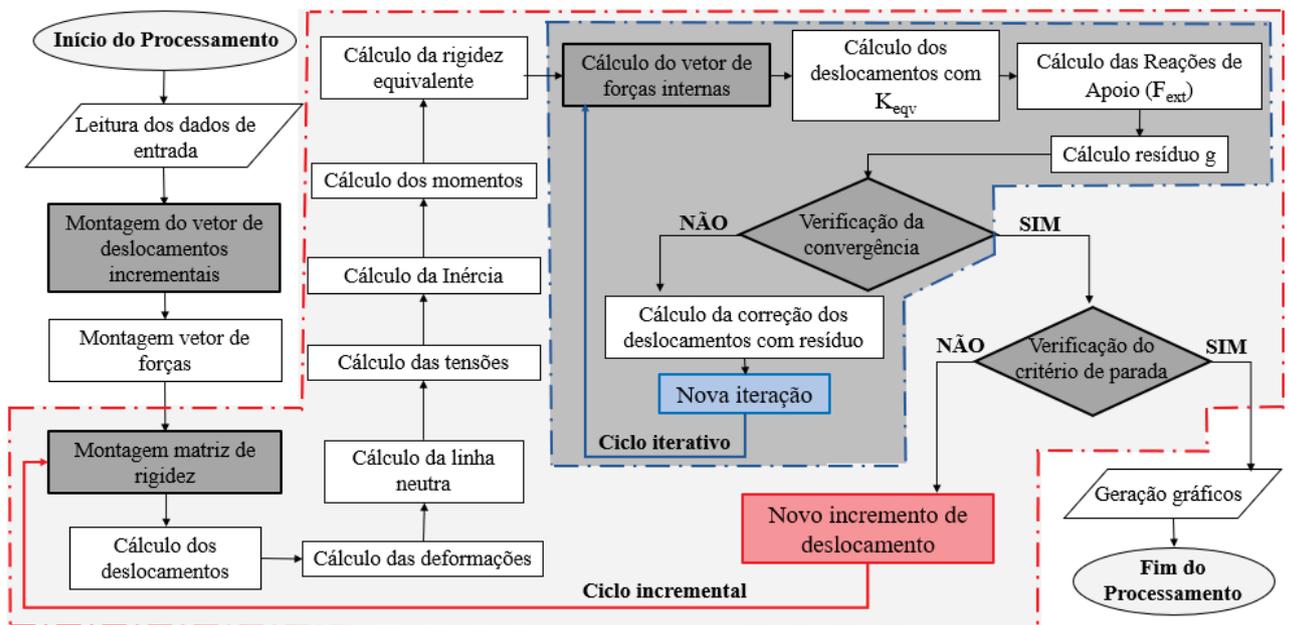
Como o processo incremental adotado no código utiliza incrementos de deslocamentos, as forças externas do sistema são provenientes da aplicação desses deslocamentos em força de reações. Para garantir o equilíbrio do sistema, inicialmente, realiza-se o cálculo da reação gerada pela aplicação do deslocamento incremental, utilizando o método dos elementos finitos, conforme detalhado no item 4.2.2.

Após a determinação das forças internas e externas, esses valores são alocados em seus respectivos vetores de forças globais, associados aos graus de liberdade correspondentes. Subsequentemente, calcula-se a diferença entre a força interna e a força externa para verificar a estabilidade do sistema. Esta diferença é utilizada para avaliar o critério de convergência.

Se a convergência numérica estabelecida não for alcançada, o índice contador de iterações é incrementado e o procedimento iterativo (neste caso, o método de *Newton-Raphson*) é reiniciado. Este processo é repetido até que as respostas obtidas atinjam a convergência necessária. Após a confirmação da convergência, isto é, quando se verifica que a estrutura está em equilíbrio, as variáveis são atualizadas e o processo é reiterado até o último incremento, conforme descrito na Seção 4.2.2.

Com base nas informações apresentadas anteriormente, a Figura 42 mostra um fluxograma que ilustra o processo de implementação computacional adotado neste trabalho.

Figura 42 – Fluxograma da implementação computacional



Fonte: Autora (2024).

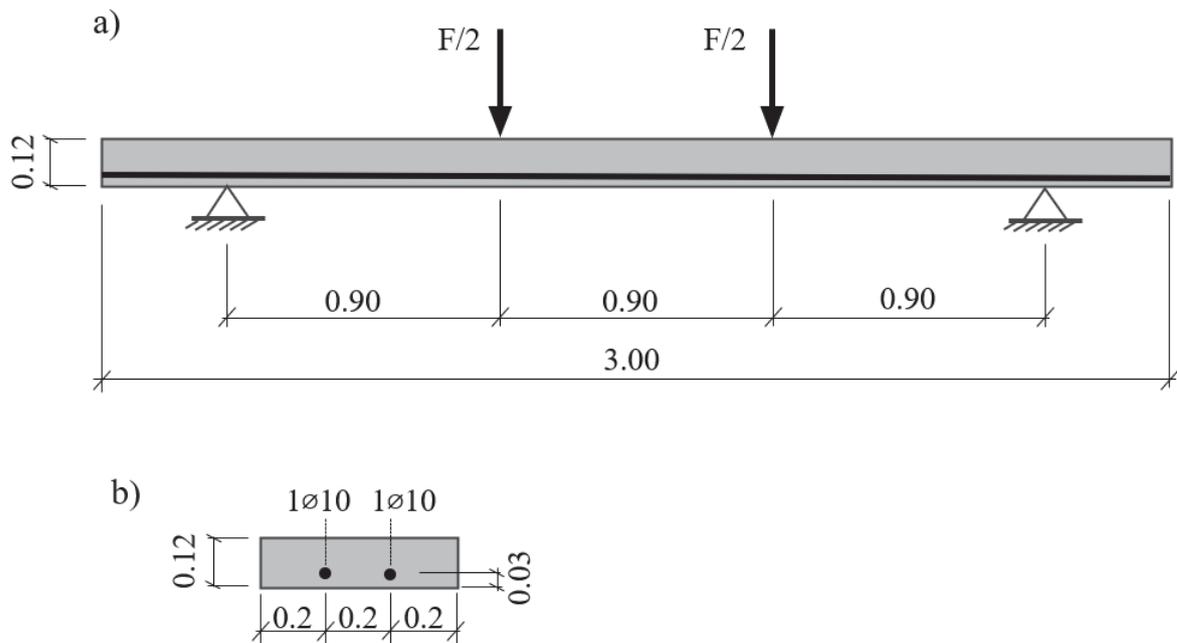
5 RESULTADOS

Este tópico apresenta os resultados obtidos nas simulações computacionais realizadas com o código desenvolvido neste trabalho. Foram analisadas duas vigas rasas, cada uma com 0,12 m de espessura, 3 m de comprimento e 0,6 m de largura, ambas reforçadas com fibras de aço e armadura longitudinal.

As vigas em questão diferem entre si pelas propriedades mecânicas das fibras de aço utilizadas. Elas são identificadas como 55A + R e 55B + R, onde o sufixo 'R' indica a presença de reforço convencional, composto por duas barras de 10 mm de diâmetro em ambas as vigas. As letras 'A' e 'B' especificam o tipo de fibra empregada: a fibra 'A' possui extremidade em gancho simples, resistência à tração de 1900 MPa e fator de forma de 67, enquanto a fibra 'B' tem extremidade em gancho duplo, resistência à tração de 2300 MPa e fator de forma de 65.

As vigas foram modeladas como elementos biapoiados e estão submetidas a um carregamento aplicado em 4 pontos, com um vão central de 2,7 m e 0,15 m de balanço em cada extremidade. A Figura 43a apresenta uma vista lateral do elemento, destacando a localização dos apoios e dos carregamentos, enquanto a Figura 43b ilustra a seção transversal das vigas, indicando a posição das armaduras convencionais utilizadas.

Figura 43 – Ilustração do elemento simulado a) vista lateral; b) seção transversal.



(Medidas expressas em metros)

No item 5.1, serão apresentados os modelos constitutivos utilizados para descrever o comportamento estrutural do concreto reforçado com fibras de aço. Serão exibidos os dados e os diagramas de tensão-deformação de cada uma das vigas, que posteriormente serão utilizados como dados de entrada nas simulações computacionais.

No item 5.2, será realizada a análise da viga designada como 55A + R. Neste tópico, serão abordados os dados do modelo empregado e os parâmetros dos materiais utilizados. Além disso, será apresentada uma análise sobre a influência do tamanho do incremento de deslocamento, da quantidade de camadas e da quantidade de elementos. Ao final serão apresentados os resultados obtidos da relação força-deslocamento ($F-\delta$) e a distribuição de tensões na viga.

O item 5.3 se concentrará na análise da viga identificada como 55B + R. De forma semelhante ao item anterior, serão discutidos os dados do modelo correspondente e os parâmetros dos materiais. Serão também apresentados os resultados obtidos para esta viga, abordando a relação força-deslocamento ($F-\delta$) e a distribuição de tensões.

5.1 MODELOS CONSTITUTIVOS

Na simulação computacional realizada, foram utilizados modelos constitutivos multilíneares para descrever o comportamento estrutural à tração do CRFA. Esses modelos ajustam o módulo de elasticidade de acordo com a deformação em cada camada da seção de cada ponto nodal, permitindo a reprodução da não linearidade no comportamento do CRFA sob flexão simples.

São apresentados na Tabela 3 os dados obtidos através dos ensaios de caracterização realizados por Colombo et al. (2023), que na sequência serão utilizados para a realização dos cálculos dos parâmetros para a formulação dos modelos constitutivos.

Tabela 3 – Dados do ensaio de caracterização das vigas

Viga	CMODi (mm)	0.50	1.50	2.50	3.50
55A+R	f_{Ri} (MPa)	8.58	10.19	10.21	9.91
55B+R		5.35	7.08	6.99	6.04

Fonte: Autora (2024).

A Tabela 4 apresenta os valores dos parâmetros calculados para os modelos multilíneares propostos pelo MC2010 e pelo CE2021, conforme descrito nos itens 2.4.1 e 2.4.2, respectivamente, desta dissertação. É importante destacar que, para esta análise, não foram

aplicados coeficientes parciais de segurança na determinação dos valores de tensão e deformação.

É relevante observar ainda que a notação utilizada para a resistência à tração é representada por σ_1 no modelo CE2021, enquanto no MC2010, esse valor é indicado por σ^* , conforme ilustrado na Figura 44.

Tabela 4 – Parâmetros do modelo constitutivo do CRFA

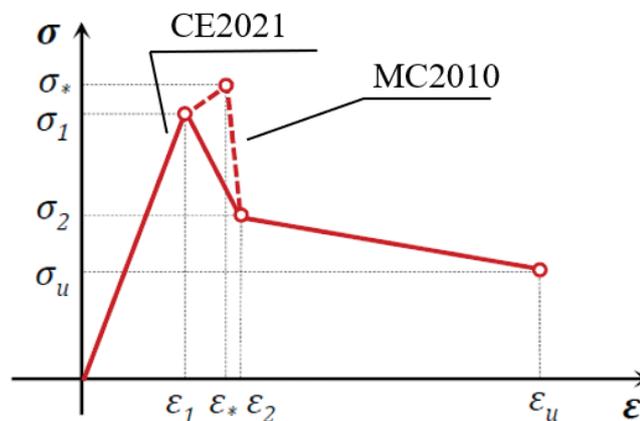
Identificação	Modelo	σ_1 (MPa)	ϵ_1 (‰)	σ^* (MPa)	ϵ^* (‰)	σ_2 (MPa)	ϵ_2 (‰)	σ_u (MPa)	ϵ_u (‰)
55A+R	MC2010	4.99	0.125	5.55	0.15	3.86	4.00	3.39	20
55B+R	MC2010	4.86	0.123	5.40	0.15	2.41	4.00	2.28	20
55A+R	CE2021	5.17	0.117	-	-	3.86	0.22	3.39	20
55B+R	CE2021	4.60	0.105	-	-	2.41	0.21	2.28	20

Fonte: Autora (2024).

Os modelos multilíneares são mais adequados para reproduzir com precisão o comportamento do CRFA, pois simulam o comportamento elástico-linear antes da fissuração, e consideram a tensão de pico e a subsequente perda de rigidez após a fissuração, especialmente para materiais que exibem amolecimento por deformação.

Como detalhado no item 2.4.1 desta dissertação, o MC2010 oferece três diferentes abordagens para a representação do comportamento do CRFA. Neste estudo, dado que o material apresentou um valor de tensão de tração (f_{ct}) superior ao valor de tensão de fissuração (f_{FTS}), caracterizando um comportamento *softening*, foi selecionado o Caso I proposto pelo MC2010. Essa abordagem está ilustrada na Figura 44, que mostra como o comportamento do CRFA foi modelado para refletir suas propriedades específicas sob as condições mencionadas.

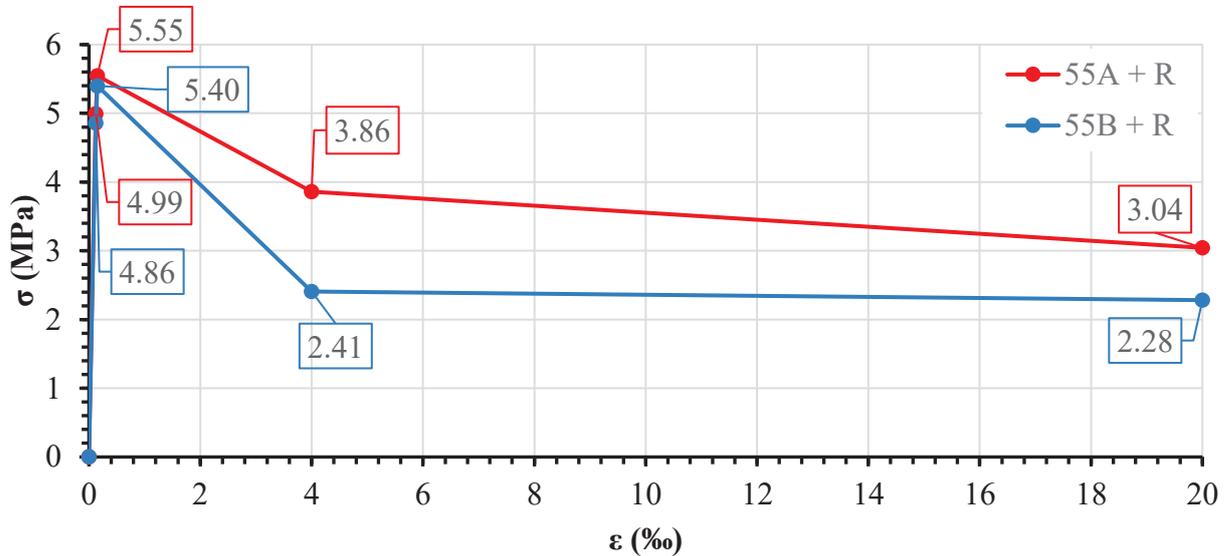
Figura 44 – Modelos constitutivos CRFA



Fonte: Adaptado de Blanco (2013).

A Figura 45 apresenta o diagrama tensão-deformação multilinear do MC2010, calculado com base nos dados apresentados na Tabela 4 para cada uma das vigas estudadas.

Figura 45 – Diagrama multilinear σ - ϵ - MC2010



Fonte: Autora (2024).

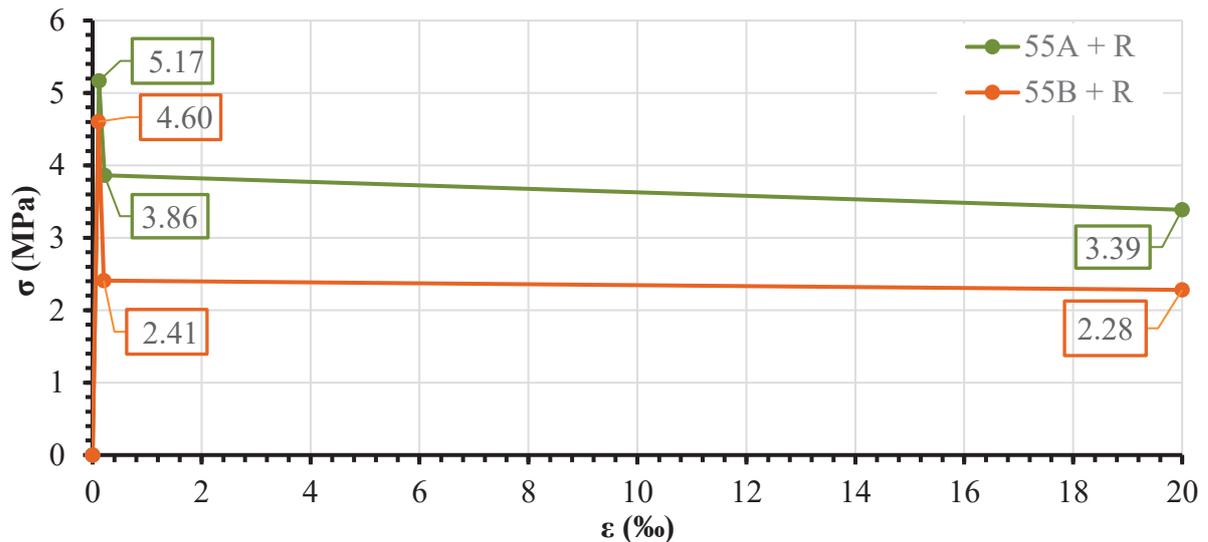
Analisando as informações apresentadas no diagrama de tensão-deformação da Figura 45, observa-se que as tensões de pico (representadas por σ^*) são semelhantes para ambos os concretos, com o concreto 55A+R apresentando um valor 2,70% superior ao concreto 55B+R. Embora a fibra 'B' tenha maior resistência à tração, a fibra 'A' contribui para um desempenho inicial ligeiramente melhor. Isso pode ser atribuído ao seu maior fator de forma, que melhora a ancoragem e a interação com a matriz de concreto, resultando em uma tensão de pico um pouco mais alta na viga 55A+R.

Em relação à contribuição das fibras (relação entre σ_2 e σ^*), os valores de σ_2 representam 69,55% de σ^* para o concreto 55A+R e 44,69% para o concreto 55B+R, indicando uma melhor contribuição das fibras no concreto 55A+R. Apesar da alta resistência à tração da fibra 'B', seu menor fator de forma pode resultar em menor eficiência na transferência de tensões. A maior contribuição das fibras no concreto 55A+R sugere que a fibra 'A' melhora significativamente a resistência pós-fissuração do concreto, proporcionando uma maior capacidade de absorção de energia e uma distribuição de tensões mais eficaz ao longo da deformação.

Em relação à tensão última, o concreto 55A+R também apresentou um valor superior ao do concreto 55B+R, com um valor 25% superior.

No que se refere ao modelo CE2021, foi adotado o modelo constitutivo multilinear calculado conforme descrito no item 2.4.2 desta dissertação. A Figura 46 apresenta o diagrama tensão-deformação multilinear do CE2021, calculado com base nos dados apresentados na Tabela 4 para cada uma das vigas estudadas.

Figura 46 – Diagrama multilinear σ - ϵ – CE2021



Fonte: Autora (2024).

Ao analisar as informações apresentadas no diagrama de tensão-deformação na Figura 46, verifica-se que, similar ao modelo MC2010, o concreto 55A+R exibiu uma tensão de pico superior à do concreto 55B+R, com uma diferença de 11,02%, o que representa uma variação maior em comparação ao modelo MC2010.

Quanto à contribuição das fibras, expressa pela relação entre σ_2 e σ_1 , os valores de σ_2 correspondem a 74,66% de σ_1 para o concreto 55A+R e 52,39% para o concreto 55B+R, indicando uma melhor contribuição das fibras no concreto 55A+R. O modelo CE2021 demonstrou uma contribuição das fibras superior ao modelo MC2010 para ambos os concretos, com uma diferença de 6,84% no concreto 55A+R e 14,69% no concreto 55B+R.

Em relação à tensão última, o concreto 55A+R também apresentou um valor superior ao do concreto 55B+R no modelo CE2021, com uma diferença de 32,74% entre os dois concretos.

Esses resultados, de acordo com o esperado, com a combinação de resistência à tração adequada e um fator de forma elevado resultam em melhor controle de fissuras e resistência contínua após o início da fissuração, fazendo com que a fibra 'A' proporcione uma melhoria

contínua na resistência do compósito, aumentando a capacidade do concreto de resistir a deformações adicionais sem falhar para o concreto 55A+R.

As propriedades das fibras de aço, como comprimento, diâmetro, fator de forma, resistência à tração e formato, desempenham um papel crucial no comportamento dos concretos de CRFA, conforme evidenciado pelos diagramas de tensão-deformação. As fibras ‘A’, com um maior fator de forma e um formato que facilita melhor a ancoragem, demonstram uma contribuição mais significativa para a resistência pós-fissuração e a capacidade de absorção de energia do concreto reforçado com fibras. Isso resulta em uma maior tensão de pico, uma maior contribuição das fibras e uma tensão última mais alta no concreto 55A+R, em comparação com o concreto 55B+R, que utiliza fibras de maior resistência à tração, mas com menor eficiência de interação com a matriz de concreto.

5.2 ELEMENTO 55A + R

Nesta seção, são apresentados os resultados da análise da viga 55A+R. Inicialmente, são exibidos os dados de entrada e os parâmetros do material, os quais estão detalhados na Tabela 5. A tabela inclui informações sobre o deslocamento incremental utilizado, os parâmetros das armaduras longitudinais e do CRFA, bem como, os dados referentes ao número de camadas discretizadas na seção, número de elementos e a tolerância adotada no modelo computacional.

Tabela 5 – Dados de entrada e parâmetros do material – 55A + R

Informações do deslocamento	Número de incrementos	1500/1800/2400/2500
	Flecha final (m)	90×10^{-3}
Parâmetros armaduras longitudinais	Área de aço (m ²)	$1,57 \times 10^{-4}$
	f_y (MPa)	544,4
	f_u (MPa)	631,4
	ϵ_{um}	0,091
	E_s (MPa)	272200
Parâmetros do CRFA	f_c (MPa)	79,47
	E_c (MPa)	44298,75
	$f_{ct,fl}$ (MPa)	6,15
Número de elementos		5/15/52/92
Número de camadas discretizadas na seção		30/35/45
Tolerância		1×10^{-4}

Fonte: Autora (2024).

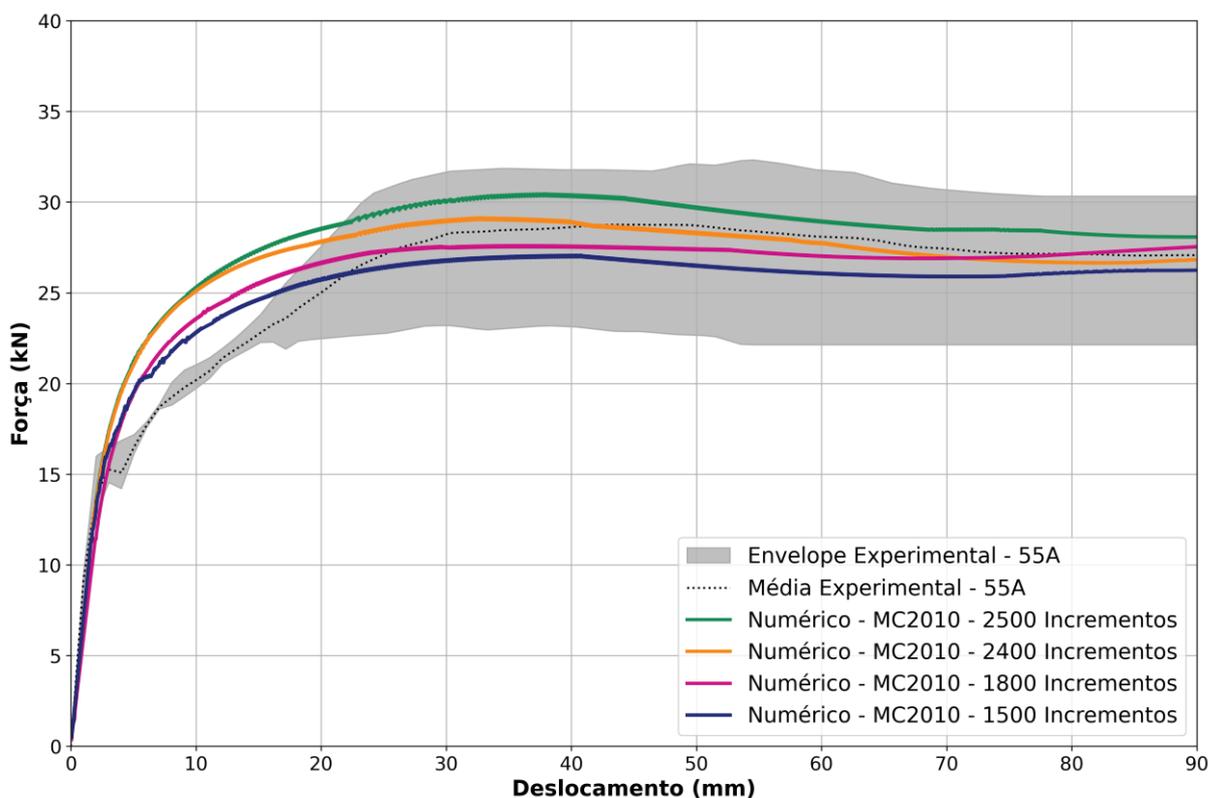
5.2.1 Influência do Tamanho do Incremento de Deslocamento

Conforme abordado no item 4.2, foi adotado um procedimento iterativo e incremental, como forma de obtenção das respostas de deslocamentos não-lineares. Desta forma, foi adotado o método de *Newton-Raphson* com incrementos de deslocamentos. Os incrementos referem-se às divisões do carregamento, neste caso em forma de deslocamento prescrito, onde cada incremento representa um pequeno passo na aplicação de deslocamento na estrutura.

Assim, foi conduzida uma análise focando na relação entre força e deslocamento ($F-\delta$) para o modelo da viga 55A+R. Nesta análise, foram verificados diferentes tamanhos de incrementos, o objetivo desta alteração foi avaliar como a redução do número de incrementos afeta a precisão dos resultados e verificar a eficiência do modelo em capturar o comportamento do material com uma quantidade menor de incrementos.

A Figura 47 apresenta a comparação das respostas não lineares de deslocamentos observadas no meio do vão da viga, para uma seção com 2500, 2400, 1800 e 1500 incrementos, todas utilizando 92 elementos com 45 camadas, variando apenas a quantidade de incrementos.

Figura 47 – Força *versus* deslocamento considerando diferentes incrementos – 55A+R



Fonte: Autora (2024).

A análise gráfica apresentada na Figura 47 mostra que, durante a fase de carregamento inicial, todos os modelos numéricos exibiram um comportamento semelhante entre si e em relação à média experimental. Contudo, é possível observar que as curvas divergem do envelope experimental na fase pré-pico, no início da fase não linear. Essa diferença ocorre antes do alcance da força máxima entre aproximadamente 3 e 20 mm de deslocamento. Durante essa fase, os valores de força numéricos são ligeiramente superiores aos valores experimentais, superestimando o comportamento estrutural. Essas discrepâncias podem ser explicadas pelo modelo constitutivo adotado na análise numérica. O modelo MC2010 apresenta uma queda mais acentuada logo após atingir a força de pico, indicando uma transição abrupta para a fase de amolecimento. Essa transição rápida leva a uma estabilização mais precoce das forças em comparação com os dados experimentais, que mostram uma fase não linear mais gradual antes de alcançar a estabilidade.

Em relação a análise no número de incrementos quanto ao pico de força, conforme são realizadas as reduções no número de incremento, são apresentadas divergências e redução da força de pico, embora todos os modelos ainda permaneçam dentro do intervalo experimental. O efeito dessa redução é mais visível após o pico de força, onde as curvas com menos incrementos (1500 e 1800) começam a se desviar mais da média experimental.

Os modelos numéricos com 2500 e 2400 incrementos aproximam-se da média experimental, com maiores aproximações em deslocamentos maiores. Já as curvas com 1800 e 1500 apresentaram maiores desvios em relação à média experimental, especialmente após o pico de força.

As diferenças observadas entre os modelos numéricos com diferentes incrementos, quando comparados aos resultados experimentais, podem ser atribuídas principalmente à resolução e precisão dos cálculos. A utilização de incrementos menores resulta em uma menor resolução no processo de cálculo, o que pode levar a uma representação menos precisa das variações sutis no comportamento da amostra sob carga. Detalhes pequenos e transições suaves observadas na resposta experimental podem não ser capturados de maneira adequada, resultando em uma maior divergência dos resultados experimentais. Em contraste, um número maior de incrementos permite uma aplicação mais gradual da carga e oferece uma resolução mais refinada, o que pode melhorar a captura dos comportamentos não-lineares da estrutura. Além disso, um maior número de incrementos pode facilitar a convergência do modelo, uma vez que passos menores podem ajudar a obter soluções mais estáveis e reduzir a probabilidade de problemas de convergência.

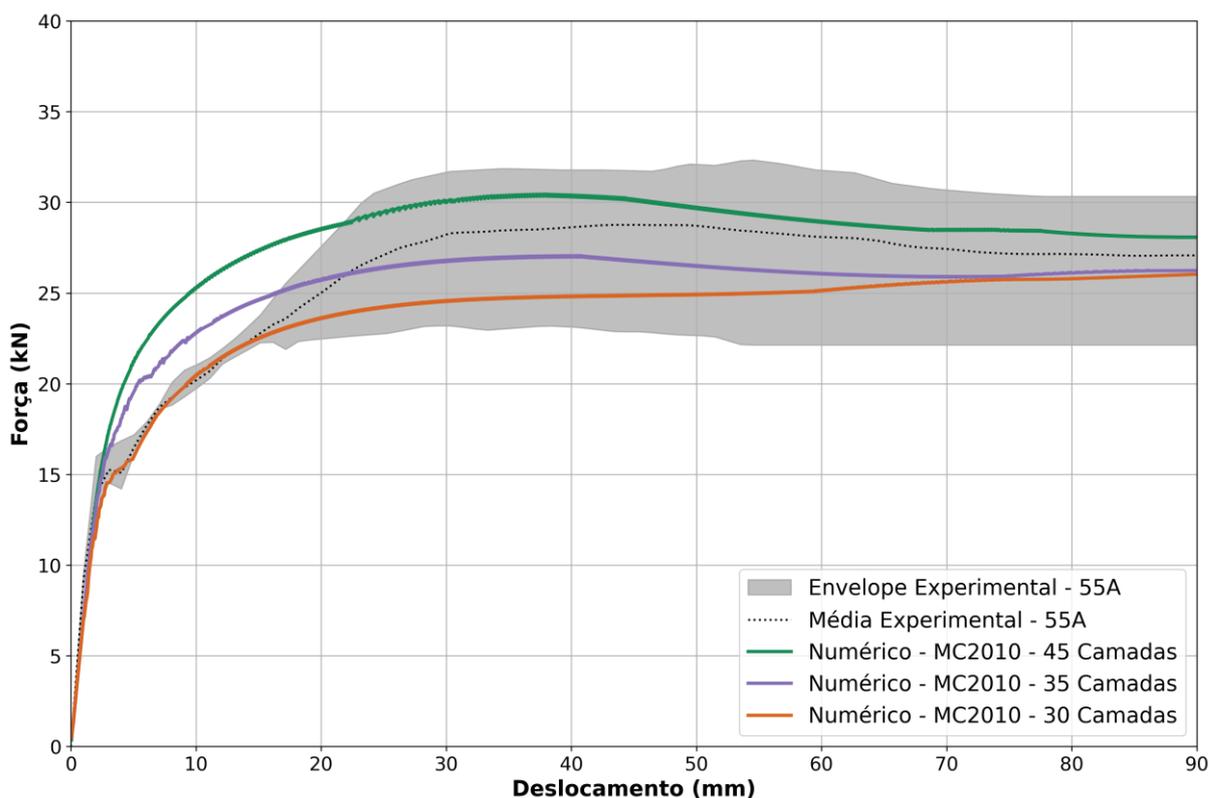
Entretanto, é crucial equilibrar o número de incrementos com o custo computacional, pois um aumento no número de incrementos resulta em um maior tempo de processamento. Portanto, é necessário considerar o aumento no custo computacional e balancear a necessidade de precisão com a viabilidade prática da simulação.

5.2.2 Influência da Quantidade de Camadas

Conforme detalhado no item 4.2, para considerar a não linearidade física do CRFA na simulação computacional, foi adotado o modelo de rigidez equivalente. Este modelo envolve a divisão da seção transversal em várias camadas, segmentando-a em áreas menores para uma melhor representação do comportamento do material. A quantidade de camadas deve ser adequada para reproduzir a realidade da peça, garantindo que cada camada reflita seu próprio estado de tensão e sofra danos de maneira distinta, o que permite uma análise mais detalhada e precisa do modelo.

Com isso, foi realizada uma análise similar àquela previamente descrita, no que diz respeito à relação entre força e deslocamento ($F-\delta$), para o modelo da viga 55A+R. No entanto, nesta análise, o número de camadas da seção transversal foi reduzido de 45 para 35 e 30 camadas, utilizando em todos os modelos 2500 incrementos e 92 elementos. Essa alteração visa verificar o impacto da redução na precisão dos resultados e avaliar a eficiência do modelo em representar o comportamento do material com um número menor de camadas.

A Figura 48 apresenta a comparação das respostas não lineares de deslocamentos observadas no meio do vão da viga, para uma seção dividida em 45, 35 e 30 camadas.

Figura 48 – Força *versus* deslocamento considerando diferentes camadas – 55A+R

Fonte: Autora (2024).

A análise da Figura 48 revela que, na fase inicial de comportamento linear do material, todos os modelos numéricos demonstram um desempenho semelhante à média experimental. O modelo com um menor número de camadas consegue até representar um comportamento próximo ao observado experimentalmente até um deslocamento de aproximadamente 15 mm, onde os modelos com maiores números de camadas apresentam uma divergência, conforme mencionado, em virtude do modelo constitutivo utilizado.

No entanto, após o pico de força, os modelos com menores números de camadas apresentam uma tendência de estabilização distinta, enquanto o modelo com maior número de camadas mantém uma curva mais próxima à experimental, tanto em termos de força máxima quanto no comportamento pós-pico.

O modelo com maior discretização de camadas mostra um ajuste superior aos resultados experimentais, especialmente no que tange ao comportamento pós-pico e à força residual. Esse comportamento sugere que uma maior discretização é mais eficaz na captura dos fenômenos que ocorrem após o pico de carga, como a redistribuição de tensões e deformações ao longo da estrutura. O aumento no número de camadas permite registrar variações locais que

podem ser negligenciadas em modelos com menor discretização, resultando em uma representação mais precisa do comportamento da estrutura.

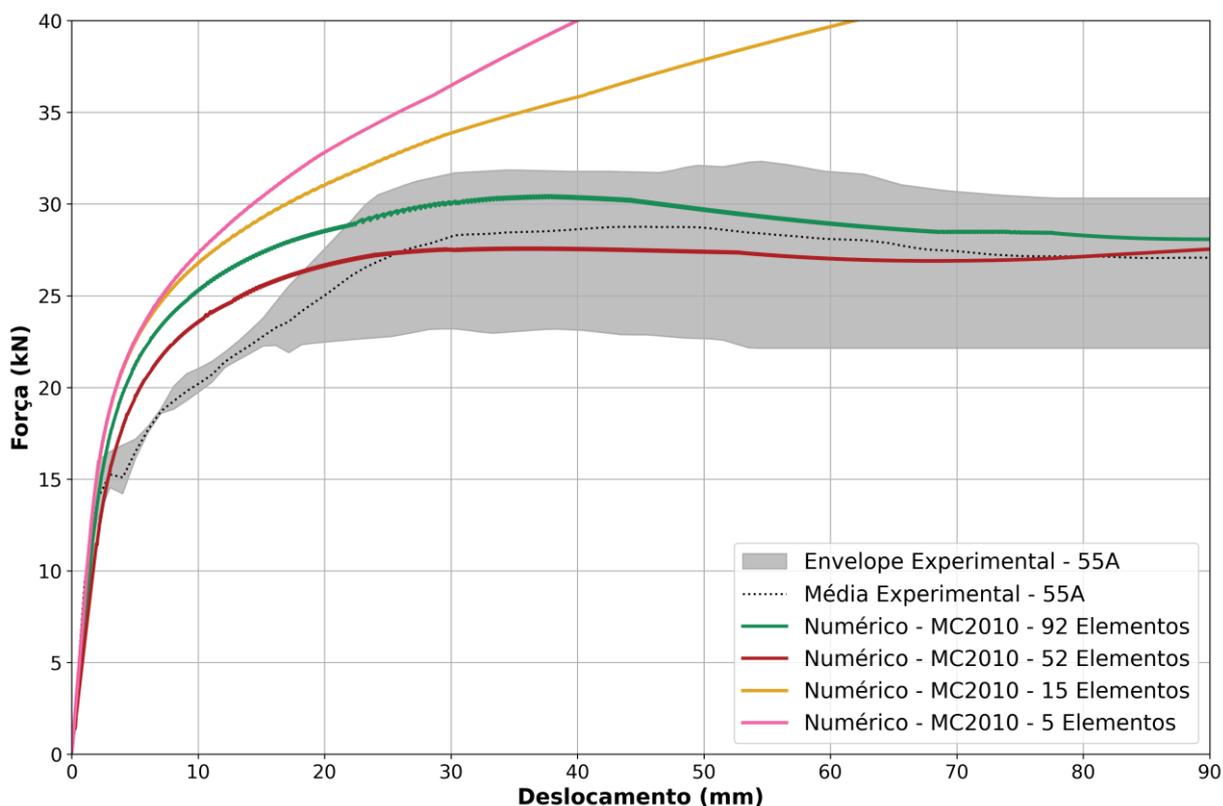
5.2.3 Influência da Quantidade de Elementos

Conforme mencionado no item 4.1, o modelo numérico desenvolvido neste trabalho foi realizado utilizando o método dos elementos finitos, sendo utilizada a viga de *Euler-Bernoulli*, a qual foi dividida em vários elementos.

Com isso, foi realizada uma análise similar àquela previamente descrita, no que diz respeito à relação entre força e deslocamento ($F-\delta$), para o modelo da viga 55A+R. Nesta análise, foi verificada a quantidade do número de elementos e a quantidade de camadas dentro de cada elemento, com o objetivo de avaliar a influência dessas variáveis na precisão dos resultados numéricos em comparação com dados experimentais

A Figura 49 apresenta a comparação das respostas não lineares de deslocamentos observadas no meio do vão da viga, para os modelos com 5 elementos e 450 camadas; 15 elementos e 250 camadas; 52 elementos e 100 camadas; e 92 elementos e 45 camadas, sendo utilizados em todos os modelos 2500 incrementos.

Figura 49 – Força versus deslocamento considerando diferentes elementos – 55A+R



Fonte: Autora (2024).

Nesta análise foi necessário realizar a verificação da influência da quantidade de elementos em conjunto com a quantidade de camadas, visto que ao reduzir a quantidade de elementos foi necessário aumentar o número de camadas para compensar a baixa resolução em relação ao baixo número de elementos.

No método dos elementos finitos com elementos de viga de *Euler-Bernoulli*, as camadas dentro de cada elemento permitem modelar a variação de tensões ao longo da seção transversal, principalmente quando há não-linearidade. A quantidade de camadas é utilizada para capturar o gradiente de deformações dentro de cada elemento, sendo que um maior número de camadas pode melhorar a precisão da modelagem da distribuição de tensões internas.

Ao analisar graficamente os resultados obtidos na Figura 49, assim como nas análises anteriores, na fase inicial de comportamento linear do material, todos os modelos numéricos demonstraram um desempenho semelhante à média experimental. No entanto, no início da não-linearidade do material, os modelos com menores quantidades de elementos apresentaram uma resposta significativamente divergente aos resultados experimentais.

Além disso, para os modelos com menores quantidade de elementos (5 e 15), foi necessário utilizar um maior número de camadas (450 e 250, respectivamente) para compensar a baixa resolução espacial. Esse aumento no número de camadas permite capturar melhor a distribuição de tensões ao longo da seção transversal, especialmente em regiões onde ocorrem concentrações de tensões devido à não-linearidade material. No entanto, mesmo utilizando um alto número de camadas, os modelos com poucos elementos apresentaram uma resposta menos precisa em relação à média experimental, particularmente para deslocamentos maiores. Indicando que, apesar de uma modelagem detalhada da seção transversal, a falta de elementos ao longo do comprimento limita a capacidade de capturar variações de comportamento ao longo da estrutura.

Observou-se que, os modelos com maior número de elementos (52 e 92), apresentaram um comportamento mais semelhante aos dados experimentais, mostrando-se dentro do envelope experimental. O modelo com 52 elementos e 100 camadas apresentou um bom equilíbrio entre a resolução e o detalhamento da seção, capturando de forma satisfatória tanto o comportamento inicial quanto a fase de plastificação do material. Já o modelo com 92 elementos e 45 camadas apresentou o ajuste mais próximo da curva experimental, demonstrando que, com uma discretização mais densa, é possível reduzir o número de camadas sem comprometer a precisão.

Contudo, assim como na análise da quantidade de incrementos, é importante equilibrar o número de elementos com o custo computacional, pois um aumento no número de elementos

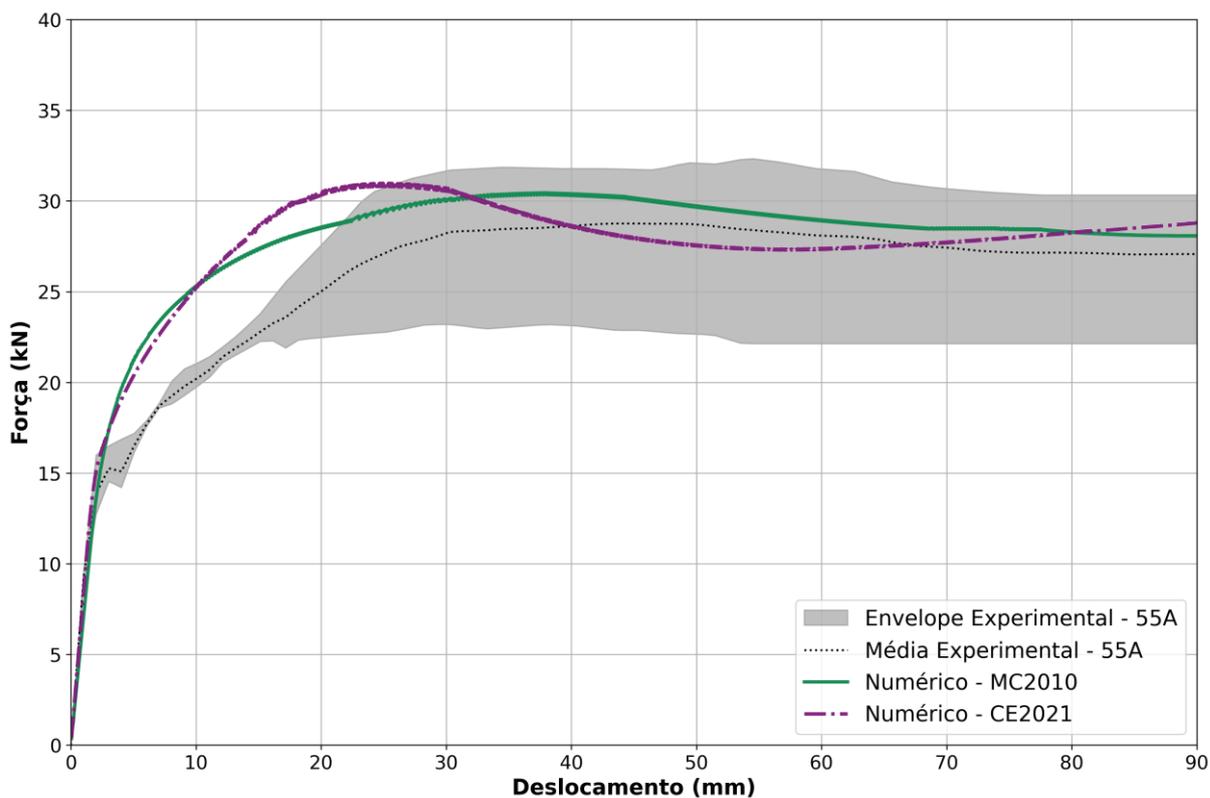
resulta em um maior tempo de processamento. Portanto, é necessário considerar o aumento no custo computacional e balancear a necessidade de precisão com a viabilidade prática da simulação.

5.2.4 Resultados em termos de $F - \delta$

Após a análise da influência do tamanho do incremento de deslocamento e da quantidade de camadas, foram determinadas as respostas não lineares de deslocamento no meio do vão da viga. Para essa avaliação, foram considerados 92 elementos, 2500 incrementos e 45 camadas nos modelos propostos pelo MC2010 e pelo CE2021, conforme ilustrado na Figura 50.

As respostas obtidas foram geradas por meio da simulação computacional realizada com o código desenvolvido neste estudo e, posteriormente, comparadas com os resultados experimentais correspondentes da viga 55A+R. Essa comparação tem como objetivo avaliar a precisão dos modelos numéricos em replicar o comportamento observado experimentalmente, proporcionando uma validação das metodologias empregadas.

Figura 50 – Força versus deslocamento – 55A+R

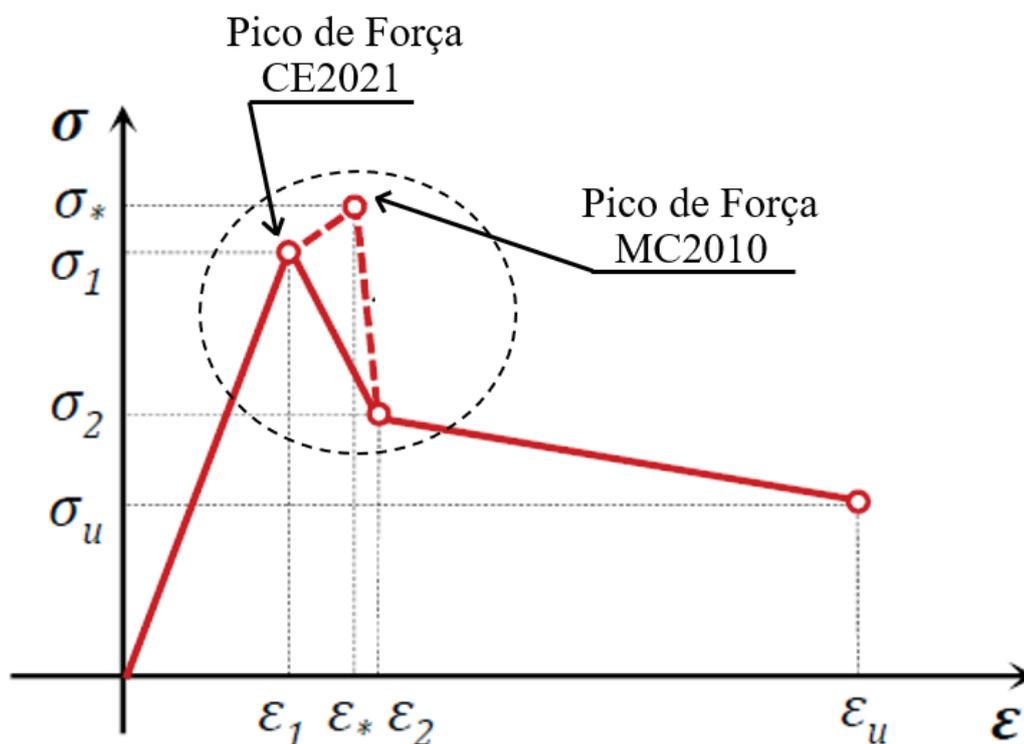


Fonte: Autora (2024).

Ao analisar graficamente os resultados obtidos a partir da simulação numérica e compará-los com os dados dos ensaios experimentais, observa-se que os modelos numéricos, tanto para o MC2010 quanto para o CE2021, apresentaram um comportamento inicial, representado pela parte linear do gráfico, similar à média dos resultados experimentais. Neste trecho, os modelos numéricos demonstram um aumento na força com pequenos deslocamentos, o que indica que eles estão ajustados na fase inicial do carregamento.

No entanto, conforme mencionado na análise do número de incrementos, as maiores divergências encontram-se na fase pré-pico entre aproximadamente 3 e 20 mm de deslocamento, no início da fase não linear de ambos os modelos. Conforme mencionado, tal divergência é explicada pelos modelos constitutivos utilizados. Neste caso os modelos MC2010 e CE2021, ambos apresentam uma queda acentuada logo após a força de pico, conforme indicado na Figura 51, com uma transição mais abrupta para a fase de amolecimento. Essa transição rápida leva a uma estabilização mais precoce das forças em comparação com os dados experimentais, que mostram uma fase não linear mais suave e gradual antes de alcançar a estabilidade.

Figura 51 – Indicação força de pico modelos MC2010 e CE2021



Fonte: Autora (2024).

Em relação ao pico de força, o modelo numérico MC2010 alcançou um valor em torno de 30 kN, e o modelo CE2021 apresentou um valor em torno de 32kN enquanto as curvas experimentais mostraram picos de força variando entre 23 e 32 kN, com a média em torno de 28kN. Esses valores indicam que ambos os modelos numéricos preveem uma força de pico um pouco maior que a média experimental, com o modelo MC2010 sendo o mais conservador dos dois. Embora os dois modelos ainda permaneçam dentro do intervalo experimental.

Na fase pós-pico, após 30 mm de deslocamento, o modelo MC2010 se ajusta melhor à média experimental, ao passo que o modelo CE2021 prevê uma queda de força mais acentuada. O modelo MC2010 se mostra mais conservador, mantendo uma força maior por um período mais longo, enquanto o CE2021 prevê uma redução mais rápida na força após o pico.

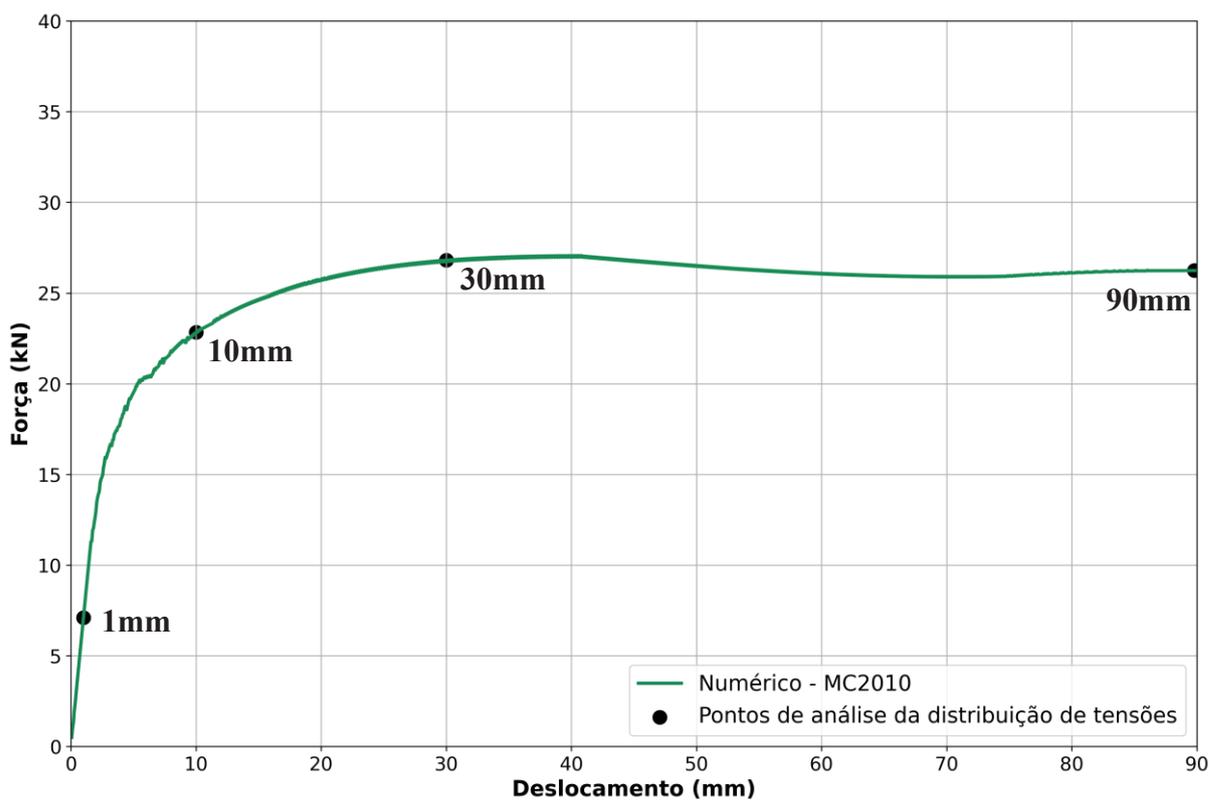
Após o pico de força, as curvas experimentais revelam um comportamento de *softening*, com uma queda gradual na força. Em contraste, a curva numérica MC2010 apresenta uma queda mais suave e uma tendência de estabilização, enquanto a curva CE2021 uma queda mais acentuada com uma tendência de aumento da força em deslocamentos maiores. Este comportamento sugere que os modelos numéricos podem não estar capturando de maneira completa os mecanismos de dano e degradação do material. Essa limitação é justificável pela adoção de modelos simplificados elástico-linear tanto para o aço quanto para o concreto sob compressão, que podem não refletir adequadamente os processos de degradação e comportamento pós-fissuração observados experimentalmente, como também conforme explicado, pela transição mais abrupta para a fase de amolecimento nos modelos MC2010 e CE2021 apresentados na Figura 51.

Em conclusão, o modelo MC2010 parece ser mais preciso em replicar a força máxima e mantê-la por um deslocamento maior, o que pode ser importante para simulações que buscam maior conservadorismo. Já o modelo CE2021 pode subestimar a força após o pico, mas ainda fornece uma previsão dentro da faixa experimental observada.

5.2.5 Distribuição de Tensões

Foi realizada uma análise da distribuição de tensões na viga, utilizando o modelo constitutivo proposto pelo MC2010. A análise foi realizada em diferentes etapas de carregamento: fase linear com 1 mm, fase de transição com 10 mm, ponto de força máxima com 30 mm e na fase pós-pico com 90 mm, conforme indicado na Figura 52.

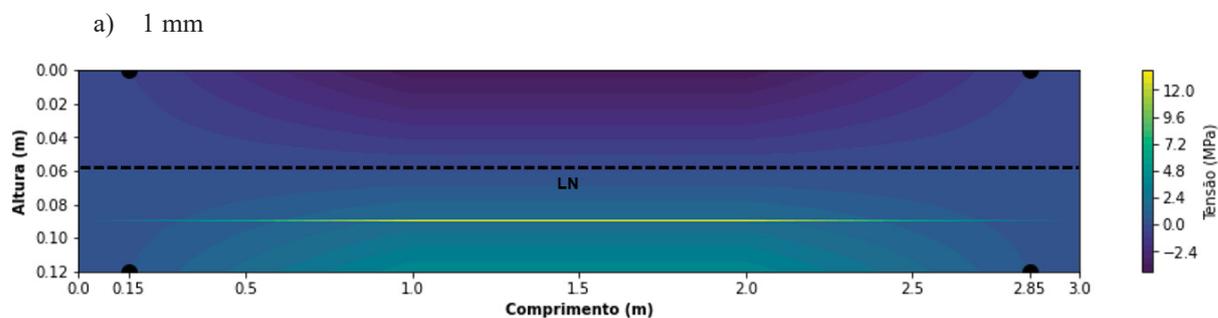
Figura 52 – Pontos de análise da distribuição de tensões viga 55A+R

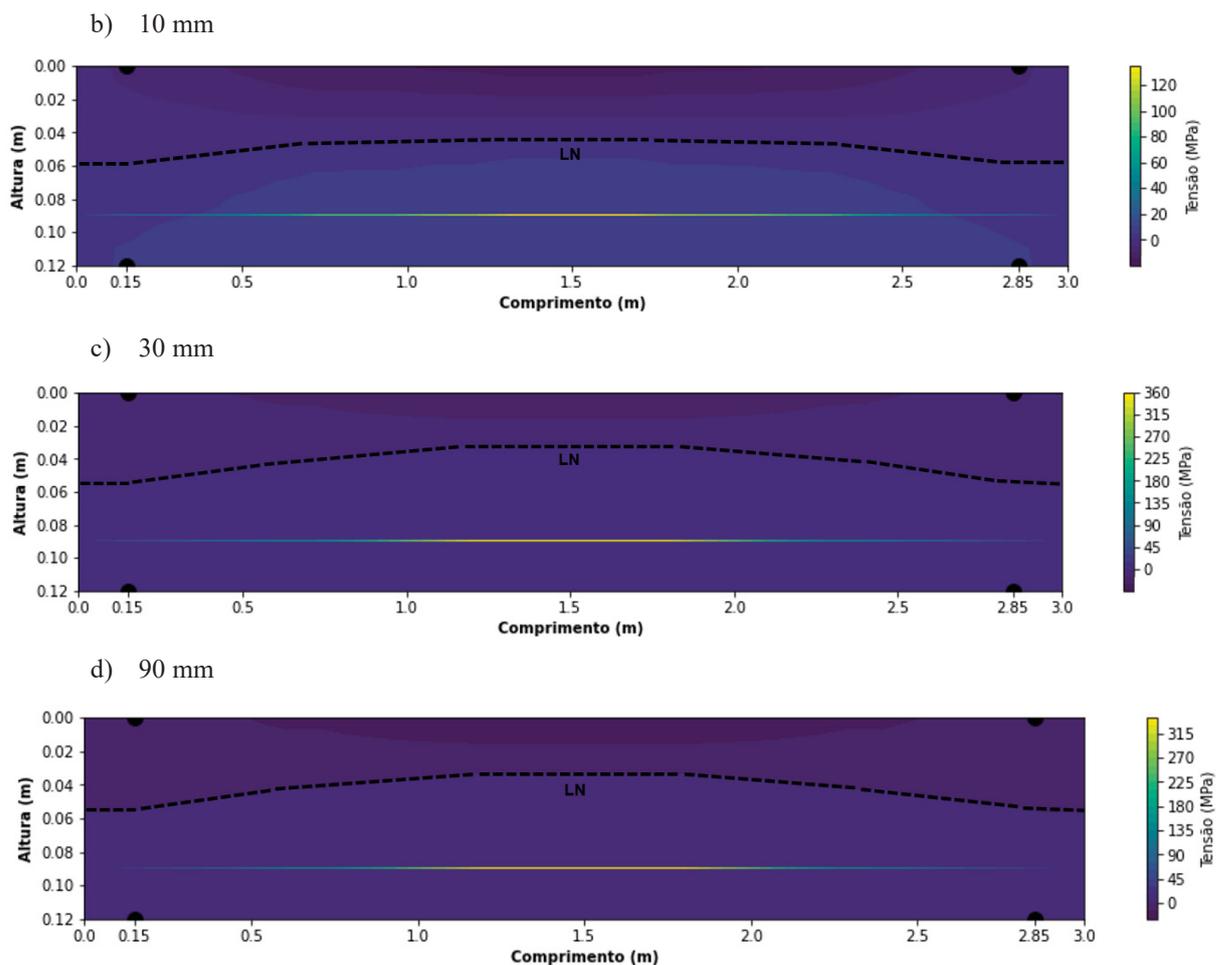


Fonte: Autora (2024).

Essa análise permitiu observar a evolução da distribuição de tensões ao longo do carregamento e como as tensões se distribuem ao longo da seção transversal da viga, por meio da utilização da discretização em camadas. A Figura 53 ilustra o digrama de tensões horizontais da viga 55A+R como um todo, sendo indicado cada etapa de carregamento. É possível observar que a região de maior tensão de tração está na região das armaduras longitudinais.

Figura 53 – Distribuição de tensões – 55A+R

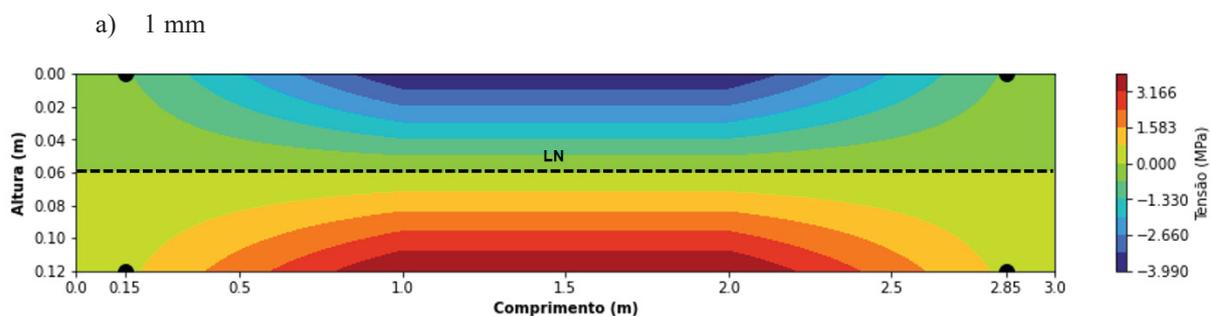


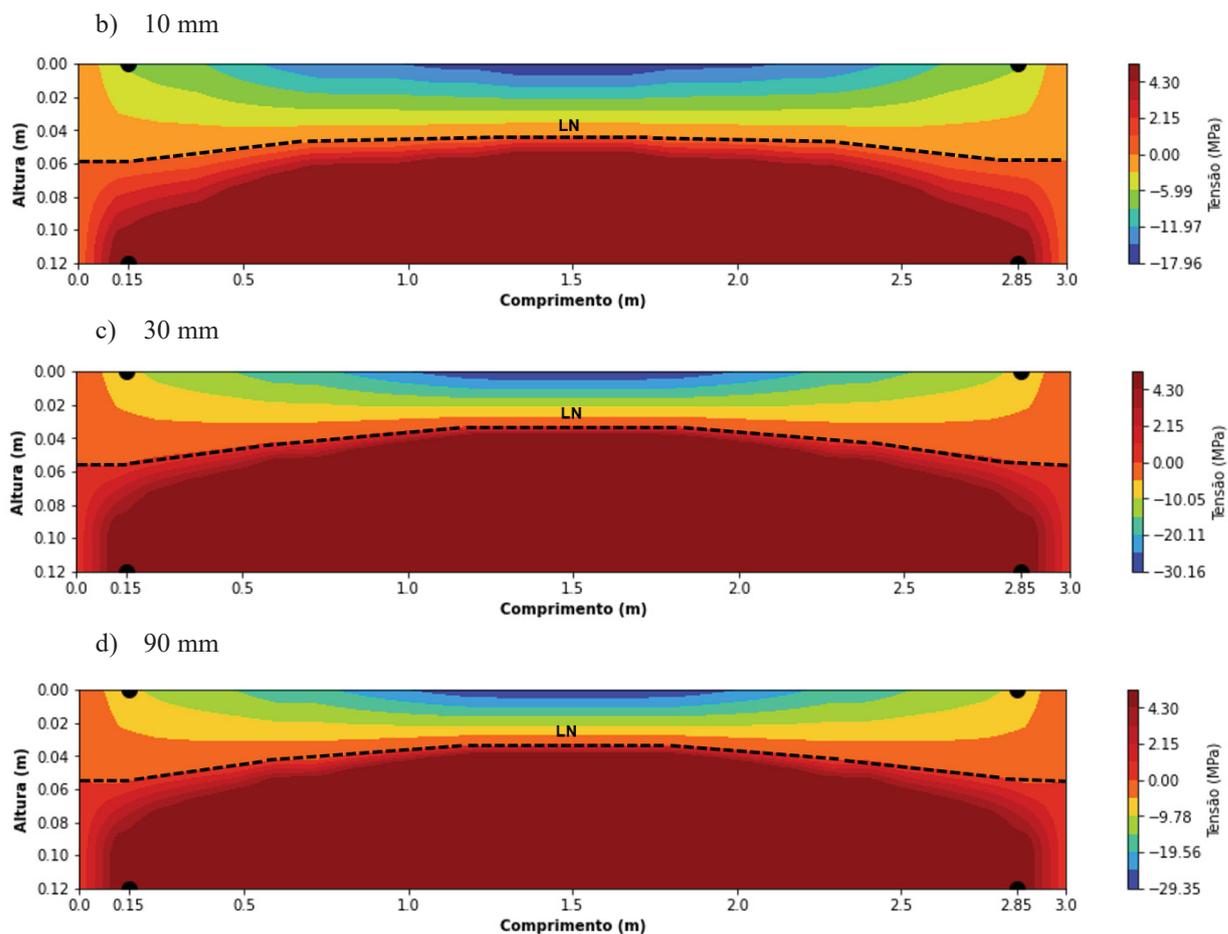


Fonte: Autora (2024).

As imagens da distribuição de tensões foram geradas separadamente para o CRFA e para as armaduras longitudinais, visando facilitar a compreensão do comportamento específico de cada componente. Na Figura 54, é apresentada a distribuição de tensões no CRFA, em cada uma das fases descritas anteriormente, demonstrando a evolução da distribuição de tensões sob as condições de carregamento aplicadas.

Figura 54 – Distribuição de tensões do CRFA – 55A+R





Fonte: Autora (2024).

Ao analisar as tensões do CRFA apresentadas na Figura 54, percebe-se que na fase inicial de deslocamento, as tensões são menores e distribuem-se de maneira mais uniforme, indicando um estágio inicial de deformação. Com o aumento do deslocamento, as tensões compressão se intensificam, especialmente na parte superior da viga, sinalizando que a viga está sendo submetida a esforços mais intensos e se aproximando de sua capacidade máxima de carga. Esse comportamento sugere que, nas condições mais extremas de deslocamento, a viga está prestes a alcançar um ponto crítico, possivelmente próximo da fase de ruptura. A análise confirma que, à medida que o deslocamento aumenta, a viga experimenta uma progressão típica de tensões em flexão, evoluindo de um estado inicial de deformação para um estágio em que as tensões se tornam críticas.

Na fase inicial, correspondente a um deslocamento de 1 mm, a viga se encontra em um regime elástico linear. As distribuições de tensões mostram um comportamento simétrico em relação à linha neutra (LN), com valores moderados de compressão e tração, variando entre aproximadamente -3,99 MPa a 3,17 MPa. A viga, neste estágio, não apresenta nenhum sinal de

plastificação ou concentração significativa de tensões, indicando que todo o material está respondendo de forma linear ao carregamento. À medida que os carregamentos se intensificam, é possível visualizar o aumento das tensões como também a mudança na posição da linha neutra.

Quando o deslocamento atinge 10 mm, a viga começa a sair do regime elástico puro, entrando em uma fase em que algumas regiões estão se aproximando da plastificação. A distribuição de tensões se intensifica, com valores máximos de compressão atingindo aproximadamente -17,96 MPa.

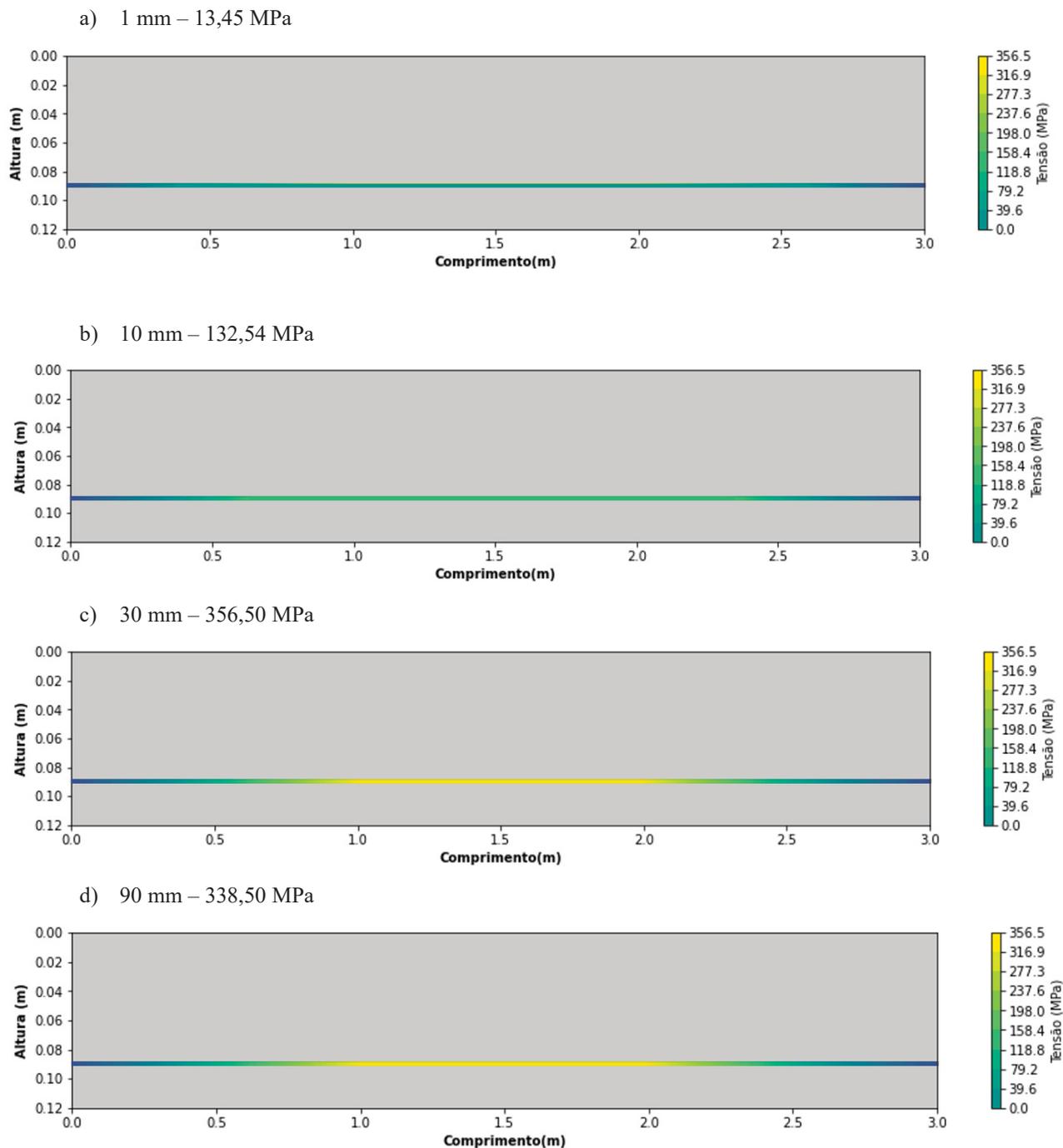
À medida que se atinge a fase de força máxima, com 30 mm de deslocamento, ocorre um crescimento das tensões de compressão na região superior da viga e um aumento das tensões de tração na região inferior da viga, atingindo valores de -30,16 MPa e 4,30 MPa. Na fase pós-pico observa-se uma queda suave no carregamento e por consequência uma redução das tensões nesta fase com uma tensão de compressão de 29,35 MPa, atingindo os maiores níveis de tensão com a carga de ruptura aos 30mm de deslocamento.

Vale ressaltar que no presente estudo, como forma de simplificação, foi utilizado um modelo linear para representar o comportamento do concreto sob compressão. No entanto, o concreto, em sua forma real, apresenta um comportamento não linear quando submetido a esforços de compressão. Em situações reais, o concreto inicialmente exibe um comportamento linear-elástico, seguido por uma fase não linear à medida que se aproxima do pico de resistência, até atingir o escoamento e, eventualmente, a ruptura. Essa resposta não linear inclui uma redistribuição de tensões que não é bem capturada por um modelo linear.

Ao adotar um modelo linear, há uma tendência a superestimar as tensões de compressão, pois o concreto é considerado como se permanecesse em um estado elástico linear até o ponto de falha. Essa simplificação pode resultar em tensões de compressão um pouco maiores do que as realmente esperadas, acentuando a disparidade natural entre as tensões de compressão e tração.

Na Figura 55 é exibida a distribuição de tensões na armadura longitudinal, evidenciando a contribuição das armaduras no reforço estrutural ao longo das fases de carregamento indicadas.

Figura 55 – Distribuição de tensões da Armadura Longitudinal – 55A+R



Fonte: Autora (2024).

Ao analisar as tensões da armadura longitudinal apresentadas na Figura 55, percebe-se que os valores de maior tração estão concentrados na região de aplicação do carregamento e que aumentam à medida que os deslocamentos são aplicados. Iniciando com um valor de 13,45 MPa em sua fase linear e atingindo um valor de 356,50 MPa em sua carga de ruptura aos 30mm de deslocamento.

A tensão observada de 356,50 MPa é menor que a tensão de escoamento de 544,4 MPa, obtida através dos ensaios experimentais realizados por Colombo et al.. Isso significa que o aço não atingiu a fase de escoamento e está na faixa de deformação elástica. Além disso a tensão observada também é menor que a tensão de ruptura de 631,4 MPa, indicando que o aço não atingiu a condição de falha.

5.3 ELEMENTO 55B + R

Neste capítulo, são apresentados os resultados da análise da viga 55B+R. Assim como no capítulo anterior, são exibidos os dados de entrada e os parâmetros do material, os quais estão detalhados na Tabela 6.

Tabela 6 – Dados de entrada e parâmetros do material – 55B + R

Informações do deslocamento	Número de incrementos	2500
	Flecha Final (m)	90×10^{-3}
Parâmetros armaduras longitudinais	Área de aço (m ²)	$1,57 \times 10^{-4}$
	f_y (MPa)	544,4
	f_u (MPa)	631,4
	ϵ_{um}	0,091
	E_s (MPa)	272200
Parâmetros do CRFA	f_c (MPa)	76,35
	E_c (MPa)	43765,66
	$f_{ct,fl}$ (MPa)	5,48
Número de elementos		92
Número de camadas discretizadas na seção		45
Tolerância		1×10^{-4}

Fonte: Autora (2024).

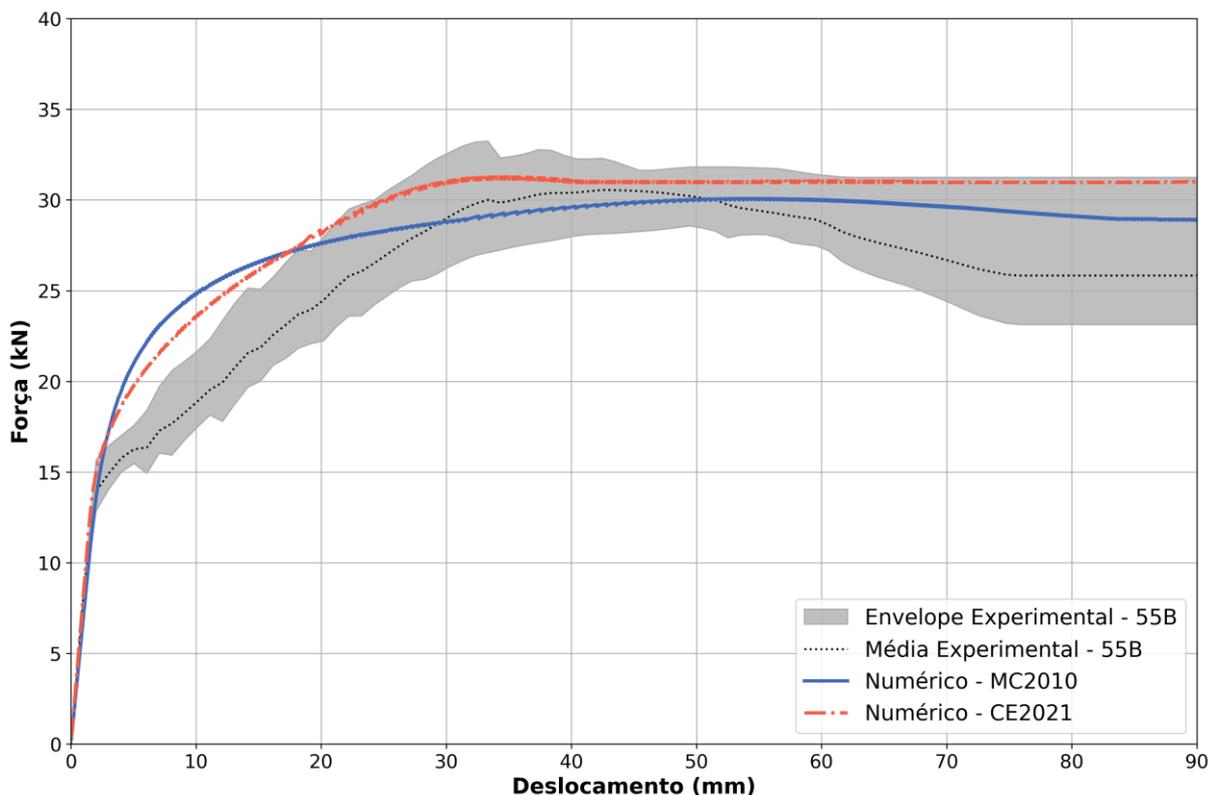
A viga 55B+R apresentou maior variabilidade nos resultados experimentais e um comportamento pós-pico mais acentuado em comparação com a viga 55A+R. Esses resultados sugerem uma maior complexidade nos mecanismos de falha, como fissuração e redistribuição de tensões, possivelmente indicando diferenças nas propriedades mecânicas dos materiais utilizados.

5.3.1 Resultados em termos de $F - \delta$

A Figura 56 ilustra as respostas não lineares de deslocamento observadas no meio do vão da viga analisada. Assim como na viga anterior essas respostas foram obtidas por meio da simulação realizada com o código desenvolvido neste trabalho e comparadas com as respostas

experimentais correspondentes da viga 55B+R. A comparação tem como objetivo avaliar a precisão do modelo computacional para as diferentes leis constitutivas.

Figura 56 – Força versus deslocamento – 55B+R



Fonte: Autora (2024).

Ao analisar graficamente os resultados obtidos a partir da simulação numérica e compará-los com os dados dos ensaios experimentais, observa-se na Figura 56 que, assim como na viga 55A+R, os modelos numéricos, tanto para o MC2010 quanto para o CE2021, apresentaram um comportamento inicial, similar à média dos resultados experimentais. Indicando que eles estão ajustados na fase inicial do carregamento.

Além disso, assim como na viga anterior, a viga 55B+R também apresentou as mesmas divergências na fase pré-pico com as curvas fora da faixa experimental, em virtude dos modelos constitutivos utilizados, conforme mencionado anteriormente.

Em relação ao pico de força, o modelo numérico MC2010 alcançou um valor em torno de 29 kN, e o modelo CE2021 apresentou um valor em torno de 31kN enquanto as curvas experimentais mostraram picos de força variando entre 28 e 32 kN, com a média em torno de 30kN. Esses valores indicam que o modelo MC2010 apresentou um comportamento mais próximo do experimental, sendo o mais conservador dos dois, subestimando o valor da força

de pico em comparação ao modelo CE2021. Embora os dois modelos ainda permaneçam dentro do intervalo experimental.

Na fase pós-pico, após 30 mm de deslocamento, a média experimental mostra uma queda gradual na resistência com o aumento do deslocamento. Em contraste, ambos os modelos numéricos exibem um comportamento mais estável, com o modelo MC2010 apresentando um declínio suave da curva e o modelo CE2021 tende a ter um pequeno aumento da força não constatado nos resultados experimentais, superestimando a capacidade de carga em deslocamentos maiores, o que pode ser considerado uma abordagem menos conservadora. Isso pode indicar que os modelos não capturam de maneira adequada os mecanismos de degradação do material em deslocamentos maiores, justificável, assim como no modelo anterior, pelas simplificações adotadas no modelo computacional.

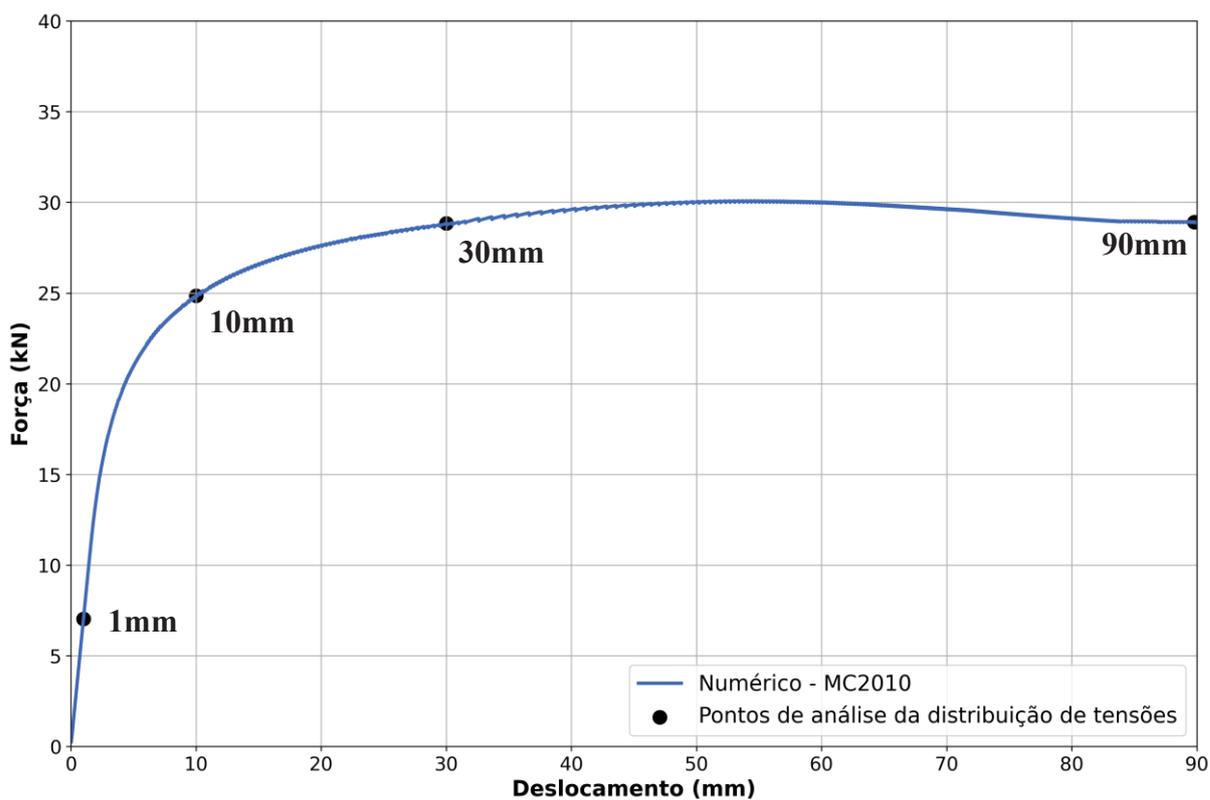
No entanto, o envelope experimental para a viga 55B+R mostrou uma variação, indicando incertezas significativas nos resultados experimentais pós-pico. Isso foi verificado nos ensaios realizados por Colombo et al. (2023), onde uma das vigas do conjunto 55B+R apresentou um colapso súbito durante a fase pós-pico.

Em conclusão, o modelo MC2010 parece ser mais preciso em replicar a força máxima e mantê-la por um deslocamento maior, o que pode ser importante para simulações que buscam maior conservadorismo. Já o modelo CE2021 pode subestimar a força após o pico, mas ainda fornece uma previsão dentro da faixa experimental observada.

5.3.2 Distribuição de Tensões

Assim como na viga 55A+R, foi realizado para a viga 55B+R uma análise da distribuição de tensões na viga, utilizando o modelo constitutivos proposto pelo MC2010, com uma análise em diferentes etapas de carregamento: fase linear com 1 mm, fase de transição com 10 mm, ponto de força máxima com 30 mm e na fase pós-pico com 90 mm, conforme indicado na Figura 57.

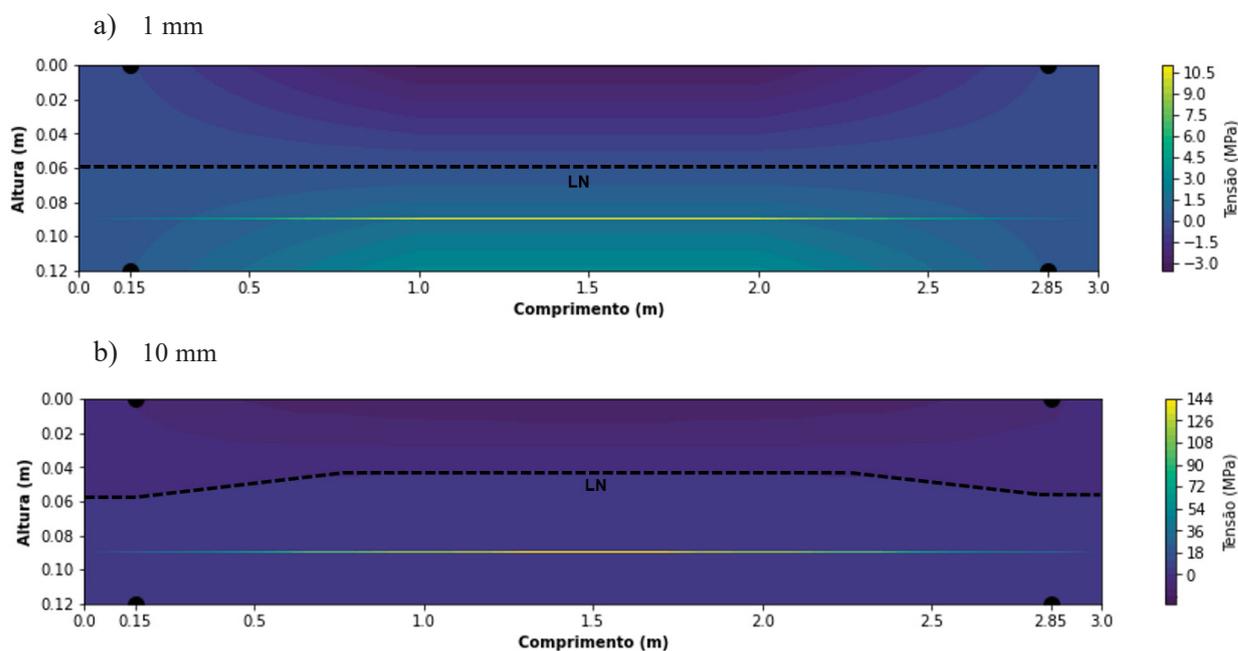
Figura 57 – Pontos de análise da distribuição de tensões viga 55B+R

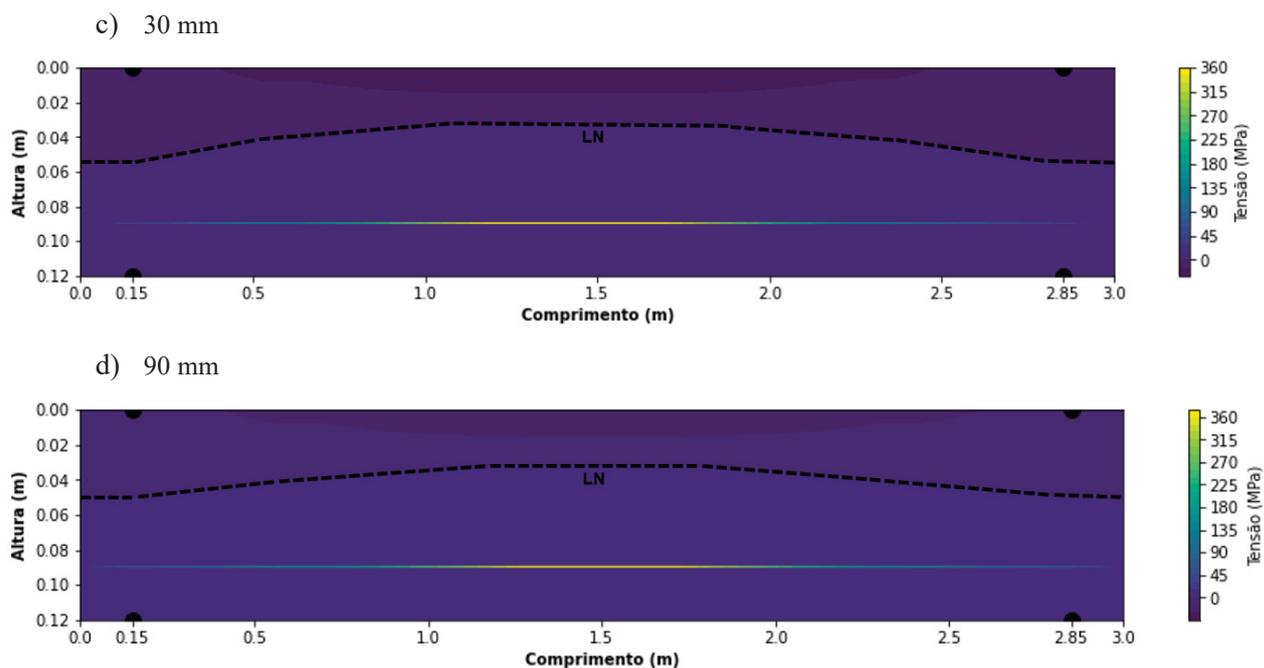


Fonte: Autora (2024).

A Figura 58 ilustra o digrama de tensões da viga 55B+R como um todo, sendo possível observar, assim como na viga anterior, que a região de maior tensão de tração está na região das armaduras longitudinais.

Figura 58 – Distribuição de tensões – 55B+R

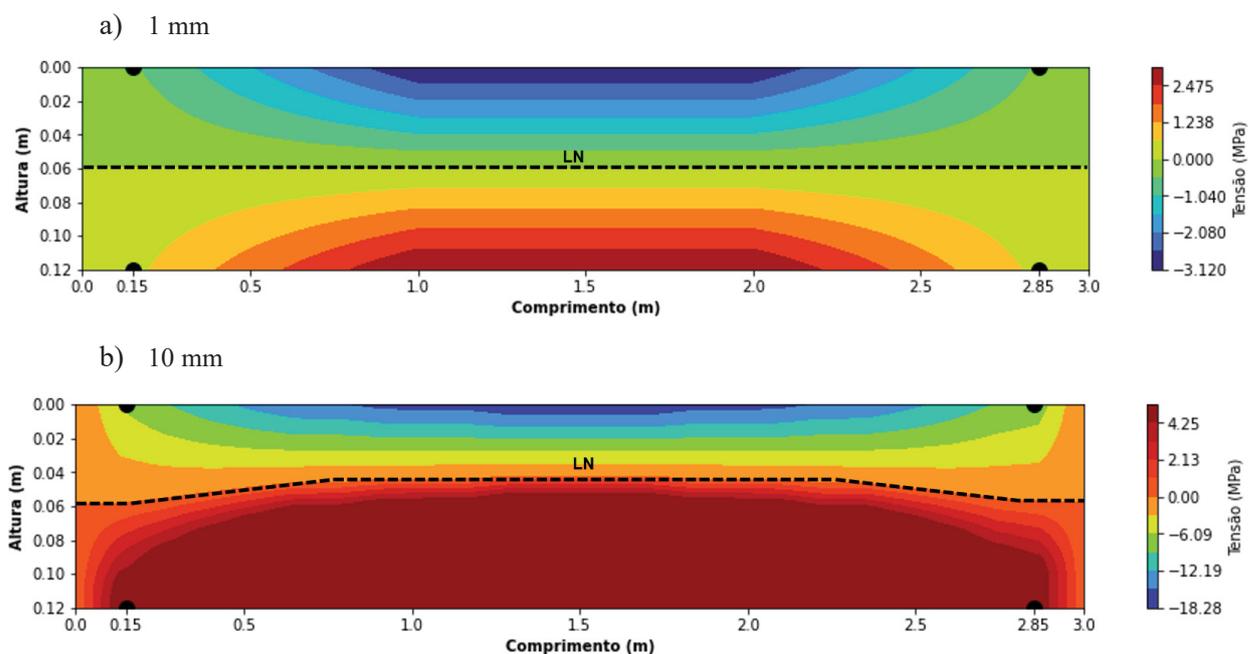


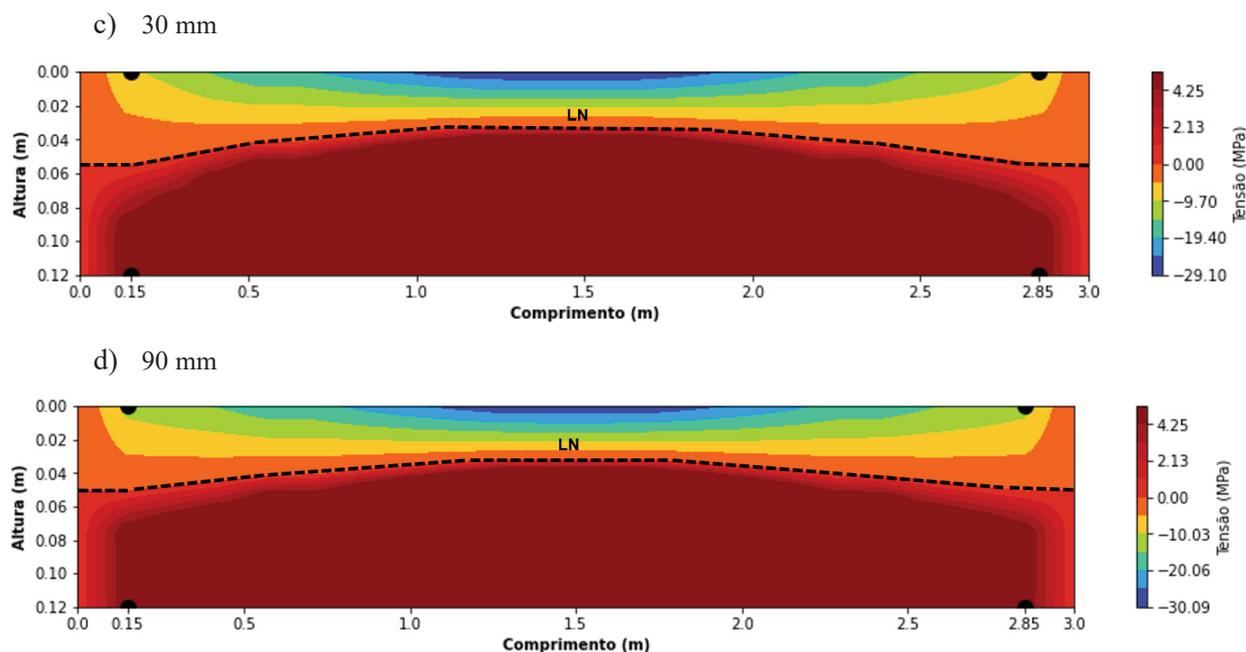


Fonte: Autora (2024).

Assim como na viga anterior, as imagens da distribuição de tensões foram geradas separadamente para o CRFA e para as armaduras longitudinais, visando facilitar a compreensão do comportamento específico de cada componente. Na Figura 59, é apresentada a distribuição de tensões no CRFA, em cada uma das fases descritas anteriormente, demonstrando a evolução da distribuição de tensões sob as condições de carregamento aplicadas.

Figura 59 – Distribuição de tensões do CRFA – 55B+R



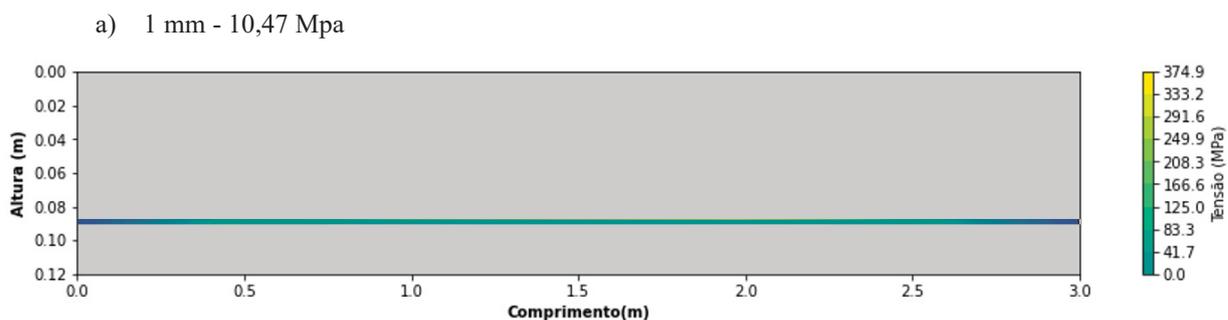


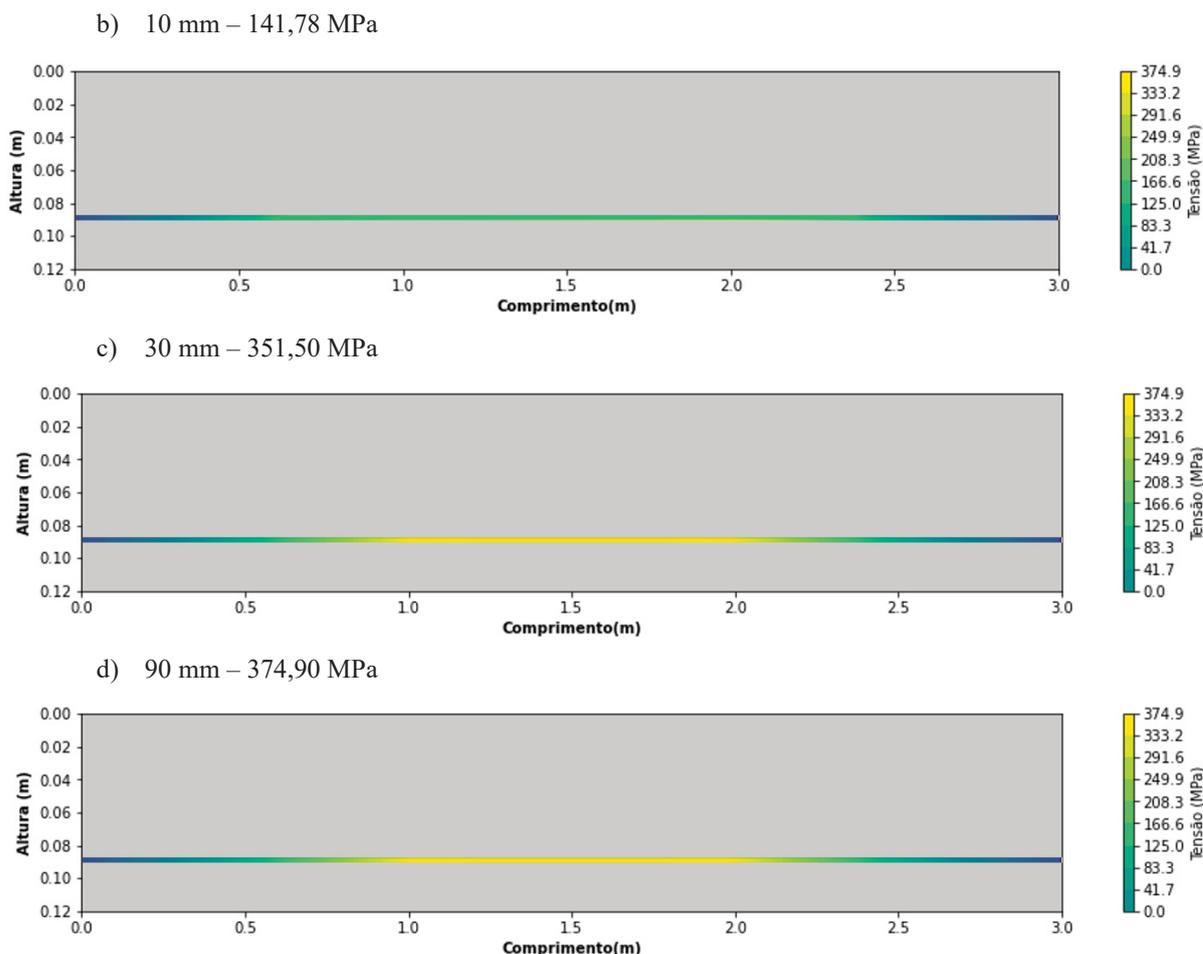
Fonte: Autora (2024).

Ao analisar as distribuições de tensão do CRFA da viga 55B+R, apresentadas na Figura 59, percebe-se que, assim como na viga anterior, com o aumento do deslocamento, as tensões compressão se intensificam na região superior da viga e as tensões de tração se intensificam na região inferior e entre os carregamentos da viga, como também a mudança da linha neutra, iniciando em sua fase linear na região central da viga e sendo alterada à medida que se intensificam os carregamentos.

Na Figura 60 é exibida a distribuição de tensões na armadura longitudinal, evidenciando a contribuição das armaduras no reforço estrutural ao longo das fases de carregamento indicadas.

Figura 60 – Distribuição de tensões da Armadura Longitudinal – 55B+R





Fonte: Autora (2024).

Assim como na viga anterior, ao analisar as tensões da armadura longitudinal apresentadas na Figura 60, percebe-se que os valores de maior tração estão concentrados na região de aplicação do carregamento e que aumentam à medida que os deslocamentos são aplicados.

No entanto, a viga 55B+R apresentou valores de tensão de tração nas armaduras na fase do pico de forma, aos 90 mm de deslocamento, de 374,90 MPa, superior ao valor encontrado na viga 55A+R de 338,50.

A fibra utilizada na viga 55A+R, possui um fator de forma mais alto, o que resulta em uma melhor interação com a matriz de concreto, e conseqüentemente, uma melhor distribuição de tensões no CRFA. Essa interação eficiente permite que as fibras absorvam mais energia e contribuam mais significativamente para a resistência à tração do concreto, o que pode aliviar parcialmente a carga que seria transferida para as armaduras convencionais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões gerais sobre os resultados obtidos ao longo deste estudo. Além disso, serão apresentadas as sugestões para trabalhos futuros, indicando áreas onde a pesquisa pode ser ampliada e possíveis melhorias no modelo numérico proposto.

6.1 CONCLUSÕES GERAIS

- a) A análise dos resultados numéricos obtidos para as vigas 55A+R e 55B+R demonstra que a abordagem adotada, sem a necessidade de uma análise inversa, foi eficaz e suficiente para modelar o comportamento do CRFA. Os modelos numéricos mostraram um bom alinhamento com os dados experimentais na fase linear dos carregamentos, na previsão de capacidade máxima de carga e na fase pós-pico, mostrando-se dentro do envelope experimental. Embora houvesse algumas divergências nos resultados na fase pré-pico, justificadas pelos modelos constitutivos adotados, tais divergências não comprometem a eficácia geral do modelo. A metodologia utilizada neste estudo possibilitou a obtenção de resultados próximos aos experimentais sem a necessidade de ajustes contínuos e complexos associados à análise inversa;
- b) A análise da influência do tamanho do incremento de deslocamento revelou que, durante a fase inicial de carregamento, todos os modelos exibiram um comportamento semelhante e próximo à média experimental. No entanto, ao iniciar o comportamento não linear, os modelos com menores incrementos apresentaram maiores divergências em relação aos dados experimentais, indicando uma menor resolução e precisão nos cálculos. Apesar de permanecer dentro do intervalo experimental, a redução dos incrementos compromete a captura das variações sutis no comportamento do material;
- c) A análise da influência da discretização em camadas mostrou que, na fase inicial de comportamento linear, todos os modelos numéricos (com maior e menor número de camadas) apresentaram desempenho semelhante à média experimental. No entanto, após o pico de força, o modelo com maior discretização de camadas demonstrou um ajuste superior aos resultados experimentais, especialmente no comportamento pós-pico e na força residual. Isso sugere que uma maior discretização é mais eficaz na captura

- dos fenômenos de redistribuição de tensões e deformações que ocorrem após o pico de carga, proporcionando uma representação mais precisa do comportamento da estrutura;
- d) Na análise da influência da quantidade de elementos, observou-se que modelos com menos elementos (5 e 15) apresentaram maiores divergências em relação aos dados experimentais, mesmo utilizando um grande número de camadas (450 e 250), o que indica que a distribuição longitudinal de elementos é crucial para capturar adequadamente o comportamento não linear da viga. Por outro lado, os modelos com maior número de elementos (52 e 92) demonstraram um melhor alinhamento com os resultados experimentais, capturando tanto a fase inicial linear quanto a fase de plastificação de forma mais precisa;
- e) Tanto para a viga 55A+R quanto para a viga 55B+R, os modelos numéricos desenvolvidos apresentaram um comportamento inicial próximo ao observado experimentalmente na fase linear dos gráficos de $F - \delta$. As curvas numéricas praticamente se sobrepõem aos dados experimentais, indicando que os modelos estão calibrados para as fases iniciais de carregamento;
- f) Quanto aos valores de força máxima, os modelos numéricos para a viga 55A+R atingiram um valor de força máxima em torno de 30 kN no MC2010 e 32 kN no CE2021, enquanto as curvas experimentais apresentaram picos entre 23 kN e 32 kN. Já para os modelos numéricos da viga 55B+R foi atingido um valor de força máxima de 29 kN para o modelo MC2010 e 31 kN para o modelo CE2021, enquanto as curvas experimentais apresentaram picos entre 28 e 32 kN. Em ambos os exemplos o modelo MC2010 apresentou valores de força máxima mais próximos aos dados experimentais, além de adotar um comportamento mais conservador quando comparado ao modelo CE2021;
- g) A comparação entre os modelos numéricos e os dados experimentais evidenciou que as maiores divergências ocorreram na fase pré-pico, entre aproximadamente 3 e 20 mm de deslocamento, no início da fase não linear. Essas divergências podem ser atribuídas aos modelos constitutivos adotados (MC2010 e CE2021), que apresentam uma queda acentuada logo após a força de pico, o que não é evidenciado no ensaio experimental;

- h) No comportamento pós-pico, a viga 55A+R apresentou um declínio suave na força nas simulações numéricas, enquanto os experimentos mostraram um comportamento de amolecimento. Já a viga 55B+R teve a capacidade de carga superestimada nos modelos numéricos em deslocamentos maiores. Embora os modelos numéricos não capturem completamente os mecanismos de dano e degradação, ambos permaneceram dentro do envelope experimental;
- i) Em relação a distribuição de tensões do CRFA, a análise realizada nas vigas 55A+R e 55B+R revela que, para ambas as vigas, na fase inicial, as tensões são uniformemente distribuídas e menores, indicativas de um regime elástico linear. Com o aumento do deslocamento, a viga começa a se aproximar de sua capacidade máxima, com tensões de compressão mais intensas na região superior e aumento das tensões de tração na região inferior, chegando a valores críticos antes da ruptura. A simplificação do modelo linear para o comportamento do concreto, apesar de eficaz para a análise, tende a superestimar as tensões de compressão em comparação ao comportamento não linear real do material. Esse estudo confirma que, à medida que o carregamento se intensifica, o comportamento da viga segue uma evolução típica das tensões em flexão, refletindo a transição de um regime elástico para um estágio próximo à falha;
- j) Quanto à distribuição de tensões das armaduras longitudinais, na viga 55A+R as tensões máximas nas armaduras foram de 356,50 MPa, abaixo da tensão de escoamento de 544,4 MPa e da tensão de ruptura de 631,4 MPa, indicando que as armaduras operaram dentro da faixa elástica sem atingir a fase de escoamento ou falha. Na viga 55B+R, as tensões máximas também foram abaixo da tensão de escoamento e de ruptura, no entanto foram um pouco mais altas, chegando a 374,90 MPa.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este item inclui sugestões para futuros trabalhos que possam expandir e aprofundar as investigações aqui realizadas. Serão indicadas áreas específicas onde a pesquisa pode ser ampliada, bem como possíveis melhorias e refinamentos no modelo numérico proposto. Assim, espera-se que este estudo sirva como base para novos desenvolvimentos e contribuições significativas no campo do concreto reforçado com fibras de aço.

- a) Comparar os resultados numéricos com mais ensaios experimentais de elementos unidirecionais de CRFA e armaduras longitudinais, para validar e refinar os modelos numéricos;
- b) Utilizar modelos constitutivos avançados que representem com maior precisão o comportamento não linear do aço e do concreto sob compressão, especialmente em regimes de carregamento complexos e altos níveis de deformação;
- c) Implementar modelos constitutivos que descrevam o comportamento de estruturas de CRFA sob cargas de longa duração, carregamentos dinâmicos, incluindo efeitos de fluência e fadiga;
- d) Acrescentar uma estratégia de incremento automático, que seja capaz de capturar completamente os mecanismos de dano e degradação do material;
- e) Utilizar métodos de integração alternativos que substituam a abordagem por camadas, visando melhorar a precisão e a eficiência computacional na simulação do comportamento estrutural;
- f) Adotar uma abordagem menos conservadora na fase pré-pico do comportamento estrutural, permitindo uma representação mais fiel das características materiais antes de atingir a carga máxima.

REFERÊNCIAS

- ABECHE, Thiago de Oliveira. **Modelagem computacional da interação dinâmica desacoplada entre viga e veículo considerando as irregularidades da via e a mecânica do dano contínuo**. 2015. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2015.
- ABREU, Felipe de Souza. **Concreto reforçado com fibras de carbono submetido a ataque por ácido clorídrico**. 2021. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas, Belo Horizonte, 2021.
- AMMAR, K.; KENNETH, B. FRANZÉN. Design of fibre reinforced concrete beams and slabs. **Chalmers University of Technology**, 2011.
- AL-AHMED, Ali Hussein Ali et al. Mesoscale analysis of Fiber-Reinforced concrete beams. **Engineering Structures**, v. 266, p. 114575, 2022.
- AL-TAAN, S. A.; EZZADEEN, N. A. Flexural analysis of reinforced fibrous concrete members using the finite element method. **Computers & structures**, v. 56, n. 6, p. 1065-1072, 1995.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.4R-98**. Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete. In: Manual of concrete Practice. Detroit, Michigan, v. 85. 1988.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.1R-96**. State-of-the-Art Report on Fiber Reinforced Concrete: Report by ACI Committee 544, 2002.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 15530** – Fibras de aço para concreto – Requisitos e métodos de ensaio. Rio de Janeiro, 2019.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16935** – Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras - Procedimento. Rio de Janeiro, 2021.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16940** – Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais – Método de ensaio. Rio de Janeiro, 2021.
- AZEVEDO, Álvaro FM. Método dos elementos finitos. **Faculdade de Engenharia da universidade do Porto**, v. 1, n. 7, 2003.
- BARROS, Alexandre Rodrigues de. **Avaliação do comportamento de vigas de concreto auto-adensável reforçado com fibras de aço**. 2009. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade de Alagoas, Maceió, 2009.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Cambridge, MA: Klaus-Jürgen Bathe, 2006.
- BENTUR, Arnon; MINDESS, Sidney. **Fibre reinforced cementitious composites**. Crc Press, 2006.

BITENCOURT JR, Luís Antônio Guimarães. **Desenvolvimento de uma plataforma computacional para análise via método dos elementos finitos de estruturas de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço**. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

BITENCOURT JR, Luís Antônio Guimarães, et al. Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. **International Journal of Solids and Structures**, v. 159, p. 171-190, 2019.

BLANCO, Ana Álvarez. **Characterization and modelling of SFRC elements**. Tesi doctoral, UPC, Departament d'Enginyeria de la Construcció, 2013.

BOLANDIM, Emerson Alexandro. **Lajes com forma de aço incorporada e concreto reforçado com fibras de aço em situação de incêndio**. 2021. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (BOE). Código Estructural. Madri, 2021.

BUTTIGNOL, T. E. T. et al. Design of reinforced concrete beams with steel fibers in the ultimate limit state. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, p. 997-1024, 2018.

COLOMBO, Matteo et al. The basis for ductility evaluation in SFRC structures in MC2020: An investigation on slabs and shallow beams. **Structural Concrete**, v. 24, n. 4, p. 4406-4423, 2023.

CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: An introduction to computer methods**. J. Wiley & Sons, New York, 1981

CUCCHIARA, Calogero; LA MENDOLA, Lidia; PAPIA, Maurizio. Effectiveness of stirrups and steel fibres as shear reinforcement. **Cement and concrete composites**, v. 26, n. 7, p. 777-786, 2004.

DANTAS, Lucas Guedes. **Proposta para cálculo de carga de ruptura por punção em lajes de concreto reforçado com fibras de aço**. 2020. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020.

DE ANDRADE, Rodolfo Giacomim Mendes et al. Comparison between methods to determine the fibre orientation factor of an HPFRC bridge box girder. **Construction and Building Materials**, v. 269, p. 121291, 2021.

DEBELLA SANTOS, Leticia Col. **Análise do comportamento à força cortante do concreto reforçado com fibras de aço**. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

DESTRÉE, X.; MANDL, J. Steel fibre only reinforced concrete in free suspended elevated slabs: Case studies, design assisted by testing route, comparison to the latest SFRC standard documents. **Tailor made concrete structures**, p. 437-443, 2008.

DIANA FEA. **Diana User's Manual, Release 10.6**. Delft, The Netherlands, 2022.

DI PRISCO, Marco; PLIZZARI, Giovanni; VANDEWALLE, Lucie. Fibre reinforced concrete: new design perspectives. **Materials and structures**, v. 42, p. 1261-1281, 2009.

DOS SANTOS, Marcos David et al. Análise da proporção de argila expandida na qualidade do concreto leve. **Engenharia no Século XXI Volume 18**, p. 8. 2020.

DOS SANTOS, João de Jesus et al. USO DE FIBRAS DE COCO COMO REFORÇO PARA O CONCRETO. **Projectus**, v. 6, n. 1, p. 33-44, 2021.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **EN 14651**: Test method for metallic fiber reinforced concrete – Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual), CEN, London, 15 p., 2007

FARIA, Thalles Morais. **Estudo numérico em concreto reforçado com fibras de aço utilizando o método dos elementos finitos e modelos constitutivos**. 2017. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

FASOLO, Flávia. **Avaliação de modelos capazes de prever o comportamento à flexão simples de elementos unidirecionais de concreto reforçado com fibras de aço**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

FIGUEIREDO, Antonio Domingues de. **Concreto reforçado com fibras**. 2011. 256 f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

FEDERATION INTERNATIONALE DU BETON (FIB). **Model Code 2010**. Lausana, 2010.

GARCEZ, Estela Oliari. **Análise teórico-experimental do comportamento de concretos reforçados com fibras de aço submetidos a cargas de impacto**. 2005. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

HUGHES, T. J. R. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. **Dover Publications**, 2000.

IMAI, Ana Paula. **Análise do comportamento dinâmico não linear de vigas de pontes de concreto armado com seção e distribuição de armaduras variáveis através da interação entre veículo e ponte e da mecânica do dano**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018

IMAI, Ana Paula; DE OLIVEIRA ABEICHE, Thiago; MACHADO, Roberto Dalledone. Damage and plasticity evolution of reinforced concrete beams using laminated Euler-Bernoulli finite elements. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 16, n. 5, p. e16502, 2023.

ISLAM, M. M. et al. Finite Element modeling and analysis of RC beams made of steel fiber reinforced concrete (SFRC): Critical investigation of the flexural and shear capacity enhancements. In: **Proceedings of the 2nd International Conference on Civil Engineering for Sustainable Development (ICCESD-2014)**. 2014. p. 14-16.

JANSSON, Anette; GYLLTOFT, Kent; LÖFGREN, Ingemar. **Design methods for fibre-reinforced concrete: A state-of-the-art review.** 2008.

KWAK, H.G.; KIM, S. P. **Nonlinear analysis of RC beams based on moment – curvature relation.** Computers & Structures, v. 80, n. 7-8, p.615-628, 2002.

LACERDA, Estéfane George Macedo de. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LARANJEIRA DE OLIVEIRA, Filipe. **Design-oriented constitutive model for steel fiber reinforced concrete.** Universitat Politècnica de Catalunya, 2010.

LARANJEIRA, Filipe de Oliveira. et al. Framework to predict the orientation of fibers in FRC: A novel philosophy. **Cement and Concrete Research**, v. 42, n. 6, p. 752-768, 2012.

MATOS, Caio César Dias. **Análise numérica de vigas em concreto reforçado com fibras de aço via método dos elementos finitos.** 2021. 182 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

MATOS, Luís MP et al. A new inverse analysis approach for predicting the fracture mode I parameters of fibre reinforced concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 246, p. 107613, 2021.

MESKENAS, A. et al. Determination of the stress–crack opening relationship of SFRC by an inverse analysis. **Mechanics of Composite Materials**, v. 49, p. 685-690, 2014.

MELO, Gabriel Figueiredo de. **Análise não linear de vigas de concreto armado com método secante.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

MENEZES, Ilzenete Andrade. **Avaliação de concreto com adição de fibras de PET submetido a altas temperaturas.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Natal, 2011.

MUNIZ, Mara Bruna Silveira. **Análise experimental da durabilidade de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço e sintéticas submetidas a ensaios de corrosão induzida.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2021.

MUTTONI, Aurelio et al. Concrete shells–towards efficient structures: construction of an ellipsoidal concrete shell in Switzerland. **Structural Concrete**, v. 14, n. 1, p. 43-50, 2013.

MUTTONI, Aurelio. **New approaches for conceptual design and construction: Centro Ovale concrete shell at Chiasso and Maisson de l'Écriture at Montricher (Switzerland).** In Nolting, U. and Haist, M., editors, Gestalteter Beton – Konstruieren in Einklang von Form and Funktion: 10. Symposium Baustoffe and Bauwerkserhaltung, Karlsruher Institut fuer Technologie (KIT), volume 4 of 5, pages 67-74. KIT Scientific Publishing, 2014.

NAAMAN, Antoine E. Fiber reinforcements for concrete: looking back, looking ahead. In: Fifth International RILEM Symposium On Fibre-Reinforced Concrete. **Proceedings...** RILEM Publications, 2000, p. 65-86.

NAAMAN, A. E.; REINHARDT, H. W. Report of the RILEM International Workshop on High Performance Fiber Reinforced Cement Composites (HPFRCC-4)-Ann Arbor, Michigan, June 16-18, 2003. **Materials and Structures**, v. 36, n. 264, p. 710, 2003.

NAAMAN, A. E. **High performance fiber reinforced cement composites**. Singapore: World Scientific Publishing, 2008.

NOSSA, Tamires de Souza. **Estudo comparativo das tensões na interface de compósitos de resina epóxi reforçados com fibras de carbono, aramida e vidro**. 2011. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais da Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2011.

NUNES, Nelson Lúcio. **Contribuição para a aplicação do concreto reforçado com fibras de aço em elementos de superfície restringidos**. 2006. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

PASA, Vanessa Fátima. **Análise do comportamento de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço via método dos elementos finitos**. 2007. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

PARASKI, Natalie Von. **Análise estática não linear de pórticos planos via Matlab**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2012.

QASRAWI H.; SHALABI F.; ASI I. Design and Sustainability of Structural Concrete in the Middle East with Emphasis on High-Rise Buildings. In: **ACI-KC SECOND**, 2007.

RAVIKUMAR, C. Selin; RAMASAMY, V.; THANDAVAMOORTHY, T. S. Effect of fibers in concrete composites. **International Journal of Applied Engineering Research**, v. 10, n. 1, p. 419-430, 2015.

Reddy, J. N. An Introduction to the Finite Element Method. **McGraw-Hill**, 2006.

RODRIGUES, Matheus André. **Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado**. 2019. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

SALVADOR, Renan Pícolo. **Análise comparativa de métodos de ensaio para caracterização do comportamento mecânico de concreto reforçado com fibras**. 2013. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

SERNA, P. et al. Structural cast-in-place SFRC: Technology, control criteria and recent applications in Spain. **Materials and Structures**, v. 42, p. 1233-1246, 2009.

SILVA, Phillipe Caetano Gomes da. **Modelo ortotrópico em elementos finitos para análise não linear física de problemas bidimensionais**. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia e Geociência da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

SLOBODA, Victor. **Modelagem computacional de concreto reforçado com fibras de aço**. 2022. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2022.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos – Formulação e Aplicação Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

TELLES, R. C. D.; FIGUEIREDO, A. D. Possibilidades de incorporação de novas tecnologias em anel de concreto pré-fabricado para túneis com tuneladora. **CONCRETO & Construções**, São Paulo, v. 33, n. 41, p. 30-35, 2006.

TRINDADE, Yasmin Teixeira. **Numerical modeling of the post-cracking behavior of SFRC and its application on design of beams according to fib Model Code 2010**. 2018. Dissertation (Mester's Degreeen) – Polytechnie School at the University of São Paulo, São Paulo, 2018.

VAZ, Viviane Visnardi. **Pavimento intertravado de concreto reforçado com fibras de vidro**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Limeira, 2015.

YADAV, Dravesh; PRASHANTH, M. H. Numerical study on the behaviour of steel fiber reinforced concrete beams for different crack lengths. **Materials Today: Proceedings**, v. 65, p. 1459-1466, 2022.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. The finite element method: volume 1 - The basis. 5. ed. Oxford: **Butterworth-Heinemann**, 2000.

ZIRGULIS, Giedrius et al. Influence of reinforcing bar layout on fibre orientation and distribution in slabs cast from fibre-reinforced self-compacting concrete (FRSCC). **Structural Concrete**, v. 17, n. 2, p. 245-256, 2016.