

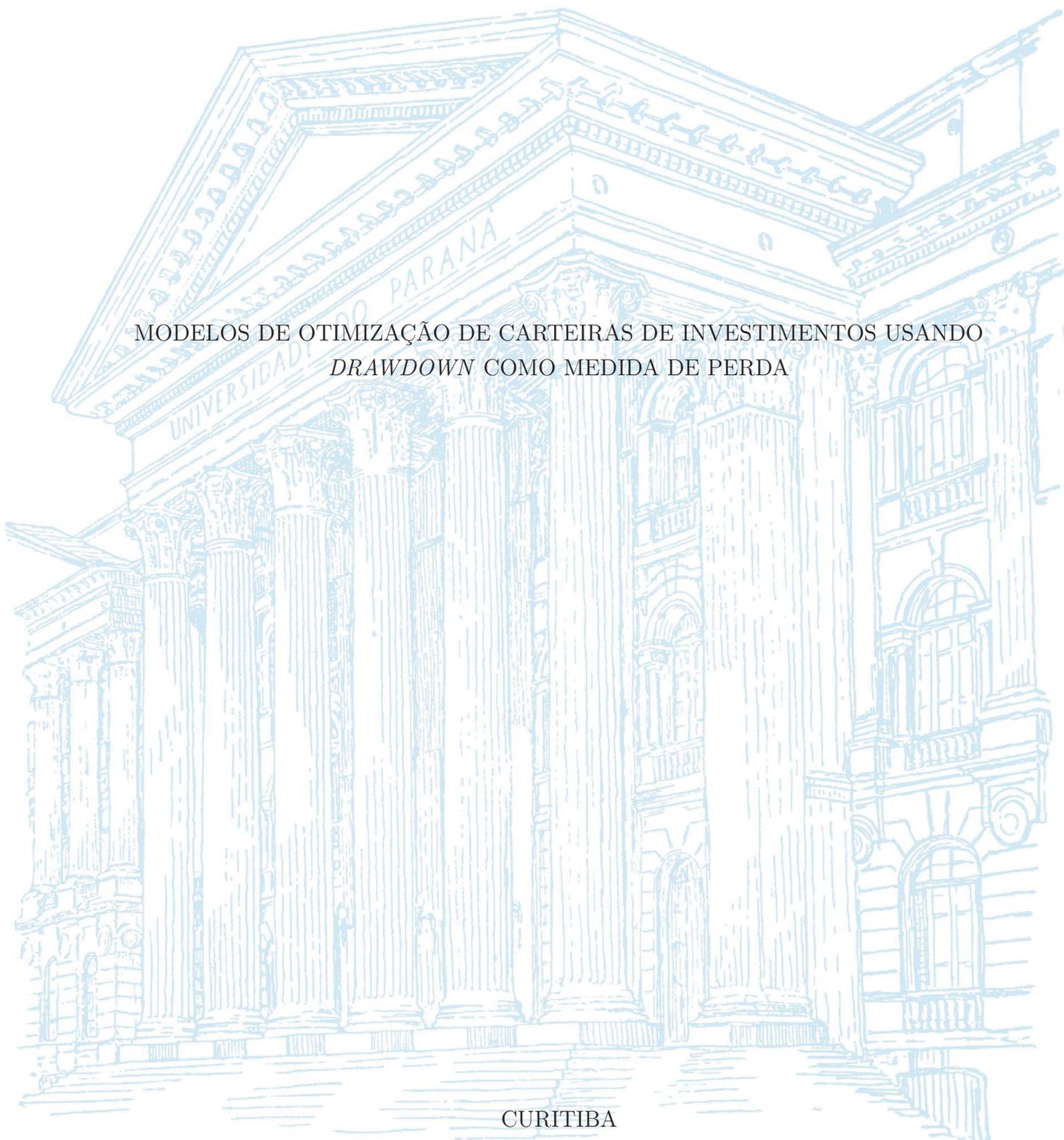
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RAFAELA PEREIRA

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS USANDO
DRAWDOWN COMO MEDIDA DE PERDA

CURITIBA

2024



RAFAELA PEREIRA

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS USANDO
DRAWDOWN COMO MEDIDA DE PERDA

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, Setor de Ciências Exatas e Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Pedroso
Coorientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Pereira, Rafaela

Modelos de otimização de carteiras de investimentos usando drawdown como medida de perda / Rafaela Pereira. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Lucas Pedroso

Coorientador: Luiz Carlos Matioli

1. Carteiras (Finanças) - Administração. 2. Administração de risco financeiro. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. III. Pedroso, Lucas. IV. Matioli, Luiz Carlos. V. Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **RAFAELA PEREIRA** intitulada: **Modelos de otimização de carteiras de investimentos usando drawdown como medida de perda**, sob orientação do Prof. Dr. LUCAS GARCIA PEDROSO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutora está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 22 de Março de 2024.

Assinatura Eletrônica

25/04/2024 08:59:48.0

LUCAS GARCIA PEDROSO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

25/04/2024 12:14:52.0

ELÍAS ALFREDO GUDIÑO ROJAS

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

25/04/2024 16:48:42.0

SOLANGE REGINA DOS SANTOS

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

25/04/2024 21:49:38.0

MAEL SACHINE

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

24/04/2024 20:28:31.0

PAULO JUSTINIANO RIBEIRO JUNIOR

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que tornaram possível a realização desta tese, da qual tenho muito orgulho. Este trabalho representa a concretização de um esforço conjunto, marcado por dedicação, paciência e apoio incondicional.

Primeiramente, agradeço aos meus queridos orientadores, professor Lucas Pedroso e professor Luiz Carlos Matioli, cuja as suas valiosas orientações, sabedoria e incentivo foram fundamentais para a elaboração desta tese. Agradeço, principalmente, por acreditarem no meu potencial e na relevância desta pesquisa.

À minha família, expresso minha eterna gratidão pelo amor e pelo apoio, seus afetos e carinhos foram essenciais para que eu não desistisse nos momentos de maior dificuldade.

Aos meus amigos da vida, amigos do trabalho e amigos dos estudos, agradeço por compartilharem conhecimento e por me oferecerem palavras de conforto e motivação ao longo do percurso.

Este trabalho não seria possível sem vocês. Muito obrigada!

Risco vem de você não saber o que está fazendo. Controle o seu dinheiro.

Warren Buffett.

RESUMO

O cenário econômico atual provém de muitas incertezas geradas pelo período de pandemia e pelas questões políticas e sociais mundiais, compor melhores carteiras de investimento se torna um importante desafio para os investidores. Modelos de otimização de carteira são ferramentas essenciais neste contexto. Um problema de otimização de carteira geralmente considera maximizar o retorno e/ou minimizar os riscos de perda de capital. Nesta tese é descrito um modelo de otimização que minimiza o risco de uma carteira de investimentos, em que o risco é o *conditional value-at-risk* da série de *drawdowns*, sujeito a uma restrição de retorno mínimo aceitável pelo investidor. Este modelo é equivalente a um modelo conhecido na literatura que será chamado de modelo original. O objetivo principal desta tese é aprimorar o modelo original apresentando novas versões deste, as quais chamaremos daqui em diante de novos modelos. Os novos modelos introduzidos, assim como o modelo original, foram implementados computacionalmente em JULIA com o otimizador *Interior Point Optimizer* (Ipopt). Os resultados dos experimentos numéricos foram analisados e evidenciaram que, computacionalmente, são mais eficientes e, dessa forma, os habilitam como alternativas ao modelo original, principalmente para problemas que envolvem grande volume de dados. Outro fato importante a destacar é que os novos modelos abordados produziram maior eficiência financeira, ou seja, maior quantidade de retorno por unidade de risco quando comparados ao índice Ibovespa, e, adicionalmente, é apresentado uma forma de uso do modelo como uma ferramenta para controle de risco de investimentos financeiros no mercado brasileiro.

Palavras-chaves: Otimização de carteira. VaR. CVaR. *Drawdown*.

ABSTRACT

The current economic scenario stems from many uncertainties generated by the pandemic period and global political and social issues, making it an important challenge for investors to compose better investment portfolios. Portfolio optimization models are essential tools in this context. A portfolio optimization problem typically aims to maximize return and/or minimize capital loss risks. This thesis describes an optimization model that minimizes the risk of an investment portfolio, where risk is the conditional value-at-risk of the drawdown series, subject to a constraint of minimum acceptable return set by the investor. This model is equivalent to a model known in the literature, which we will refer to as the original model. The main goal of this thesis is to enhance the original model by presenting new versions of it, referred to hereafter as new models. The new models introduced, as well as the original model, were computationally implemented in JULIA using the Interior Point Optimizer (Ipopt). The results of numerical experiments were analyzed and showed that computationally, they are more efficient, thus enabling them as alternatives to the original model, especially for problems involving a large volume of data. Another important point to highlight is that the new models produced greater financial efficiency, meaning a higher return per unit of risk compared to the Ibovespa index, and additionally, a way to use the model as a tool for financial risk control in the Brazilian market is presented.

Key-words: Portfolio optimization. VaR. CVaR. Drawdown.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| FIGURA 1 – Representação da série de <i>drawdowns</i> | 15 |
| FIGURA 2 – Representação do VaR na distribuição de ξ | 15 |
| FIGURA 3 – Representação do CVaR na distribuição de ξ | 16 |
| FIGURA 4 – Gráficos da primeira e segunda derivada da função $f_1(x)$ para $\eta = 2^{-14}$ | 28 |
| FIGURA 5 – Série temporal dos <i>drawdowns</i> | 29 |
| FIGURA 6 – Distribuição dos <i>drawdowns</i> | 30 |
| FIGURA 7 – Série temporal do risco/retorno da carteira e Ibovespa. | 30 |
| FIGURA 8 – CVaR misto | 31 |
| FIGURA 9 – Fronteira eficiente em período de crise e não crise | 32 |
| FIGURA 10 – Série de máximo <i>drawdown</i> da carteira com rebalanceamento. | 33 |
| FIGURA 11 – Série de máximo <i>drawdown</i> do Ibovespa. | 33 |
| FIGURA 12 – Série de máximo <i>drawdown</i> da carteira com pesos iguais. | 34 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|----|
| TABELA 1 – Funções que aproximam a função g e seus gráficos. | 23 |
| TABELA 2 – Primeira derivada da função f_p | 24 |
| TABELA 3 – Segunda derivada da função f_p | 24 |
| TABELA 4 – Desempenho computacional dos novos modelos. | 26 |
| TABELA 5 – Resultado da otimização dos novos modelos. | 27 |
| TABELA 6 – Sensibilidade do parâmetro η da versão 1 do modelo (3.1). | 40 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1.1 | ESTRUTURA DO TRABALHO | 13 |
| 2 | CONCEITOS DE FINANÇAS | 14 |
| 2.1 | DEFINIÇÕES | 14 |
| 2.2 | OTIMIZAÇÃO DO CVAR | 16 |
| 2.3 | MODELO DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA | 18 |
| 3 | UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA | 20 |
| 3.1 | MINIMIZAÇÃO DO RISCO | 20 |
| 3.2 | APROXIMAÇÕES DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA TORNAR O PROBLEMA DIFERENCIÁVEL | 22 |
| 4 | EXPERIMENTOS NUMÉRICOS | 25 |
| 4.1 | ANÁLISE DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL DOS MODELOS | 26 |
| 4.2 | ANÁLISE FINANCEIRA | 29 |
| 4.3 | O CVAR MISTO PARA CONTROLE DE RISCO | 32 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 35 |
| | REFERÊNCIAS | 37 |
| | APÊNDICES | 39 |
| | APÊNDICE A | 40 |
| A.1 | SENSIBILIDADE DO PARÂMETRO η | 40 |

1 INTRODUÇÃO

Compor uma carteira ótima de um investimento é um problema relevante nos dias atuais tanto para pequenos investidores quanto para grandes corporações financeiras, devido às incertezas econômicas geradas pelo período de pandemia e pelas questões políticas e sociais. Nesse cenário instável, o bom planejamento da carteira de investimentos é essencial para trazer aos investidores uma maior segurança de suas finanças no futuro.

O problema da composição da carteira ótima, geralmente, envolve dois objetivos principais: maximizar o retorno e/ou minimizar os riscos de perda de capital.

O retorno é a rentabilidade da carteira, comumente calculado como uma média ponderada dos retornos dos ativos individuais que a compõem. Espera-se que a rentabilidade seja positiva, ou seja, gere ganhos e não perdas, e que apresente vantagens em relação ao risco exposto. Há alguns tipos de risco aos quais um investimento está sujeito, chama-se risco de mercado o risco da variação dos preços dos ativos. O gestor da carteira quantifica o risco de mercado pelas medidas de risco, sendo as mais comuns na literatura o desvio-padrão, a variância, o *Value-at-Risk* (VaR) e o *Conditional Value at Risk* (CVaR) (SEGAL, 2022). Considera-se uma carteira de investimentos como a mais eficiente aquela que fornece o maior quociente do retorno pelo risco.

O tipo de investimento a ser realizado é que define a modelagem da carteira de investimentos com a escolha apropriada da medida de risco, além da incorporação de diversas outras características do problema. Levando em conta esses elementos, um bom método para a resolução pode ser determinante.

Alguns modelos de otimização de carteira são bem conhecidos na literatura, como é o caso do modelo de Markowitz (MARKOWITZ, 1952). Sendo o modelo pioneiro na área, em sua forma mais simples maximiza o retorno sujeito a uma restrição de risco, ou vice-versa, onde a medida de risco é a variância, pois esta reflete a diversificação de uma carteira, e uma carteira diversificada fornece menores riscos. Markowitz mostrou que é possível escolher a carteira mais eficiente dentro de um conjunto de carteiras compostas pelos mesmos ativos.

Outras modelagens surgiram após o modelo de Markowitz, que modelam aspectos de diferentes investimentos utilizando outras medidas de retorno e risco. O VaR surgiu como uma medida de risco que fornece a informação da maior perda de valor de mercado da carteira em um horizonte de tempo com certo grau de confiabilidade (DUFFIE; PAN, 1997). Relacionado ao VaR surgiu a medida de risco CVaR, que representa a perda média esperada quando ocorrer uma perda maior que o VaR. O CVaR tem melhores propriedades como medida de risco que o VaR (ROCKAFELLAR; URYASEV et al., 2000). Estas e

outras definições serão devidamente detalhadas no Capítulo 2.

As medidas de riscos citadas são medidas estatísticas normalmente aplicadas sobre o retorno, contudo podem ser utilizadas sobre outras variáveis aleatórias ou em outros contextos. No artigo de Chekhlov, Uryasev e M. Zabarankin (2004), os autores constroem uma modelagem de carteira com uma nova medida de risco que chamam de *conditional drawdown value-at-risk* (CDaR), que é o CVaR aplicado na função de perda *drawdown*. O *drawdown* de uma carteira é a variação do maior valor histórico atingido pela carteira pelo valor atual da carteira no período de tempo analisado. Por consequência, o máximo *drawdown* é interpretado como a maior perda de capital de um pico a vale, de um certo período de tempo, de um investimento (GOLDBERG; MAHMOUD, 2017). O uso do CDaR como medida de risco pode ser conveniente em carteiras compostas por ativos de grande volatilidade.

Além do risco e do retorno definidos em um modelo de otimização de carteira, os parâmetros são fundamentais para incluir as informações do cenário financeiro. Desta maneira, o método de resolução de um problema de otimização de carteira requer rapidez, pois geralmente faz uso de um grande volume de dados, englobando muitos ativos, histórico de valores e indicadores financeiros ou outras informações que descrevem o dinamismo do mercado financeiro, ademais, se o investidor é focado em operações de curto prazo na bolsa de valores, é imprescindível a aplicação de métodos mais velozes. Portanto, é conveniente que um processo que envolva algoritmos matemáticos seja rápido.

No modelo CDaR em sua primeira versão, o problema resultante é não diferenciável, o que acaba sendo um complicador pois não é qualquer método que pode ser utilizado em sua solução. Para contornar o problema da não diferenciabilidade e tornar a modelagem do problema mais simples, os autores introduzem novas variáveis e restrições de forma que o problema fique linear. No entanto, as novas variáveis e restrições introduzidas aumentam consideravelmente o tamanho do problema. Nosso foco é trabalhar novos modelos CDaR fazendo com que o problema seja diferenciável mas sem aumentar o número de variáveis e restrições.

Posto isto, o objetivo desta tese é apresentar novos modelos de otimização do CDaR que apontam maior eficiência computacional quando comparados ao modelo da literatura, apresentar a modelagem dos novos modelos e a aplicação a um problema de montagem de uma carteira ótima no cenário brasileiro em diferentes períodos de crise e não crise, comparando com o principal índice da bolsa brasileira, o Ibovespa, com a análise do comportamento do modelo, e além disso, apontar uma estratégia de uso do modelo como ferramenta de controle de risco.

1.1 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado de forma a familiarizar o leitor com os conceitos de finanças envolvidos e, posteriormente, apresentar o problema da área sobre o qual se pretende dissertar e mostrar os resultados.

No Capítulo 2 descreve-se as definições de finanças e modelagem de otimização de carteira que são a base do estudo; no Capítulo 3 apresenta-se os novos modelos que compõem a proposta; no Capítulo 4 desenvolve-se a aplicação do problema real e os resultados; no Capítulo 5 seguem as considerações finais.

2 CONCEITOS DE FINANÇAS

Este capítulo propõe-se a apresentar os conceitos centrais para o entendimento do método e aplicação do estudo proposto. As referências deste capítulo são os artigos de Chekhlov, Uryasev e Mi. Zabarankin (2005) e Rockafellar, Uryasev et al. (2000).

2.1 DEFINIÇÕES

Ativos financeiros são bens ou direitos que representam um valor específico em um determinado tempo e que podem gerar rendimentos ao investidor. Exemplo: ações, títulos públicos, *commodities*, moedas etc.

Uma carteira é um conjunto de M ativos, $M \geq 1$. Considere que o valor de cada ativo i no tempo t na carteira é V_{it} , $i = 1, \dots, M$; $t = 0, 1, 2, \dots, N$, então definem-se:

Definição 2.1. (Taxa de retorno do ativo) A taxa de retorno do ativo i no tempo $t > 0$ é definida como

$$r_{it} = \frac{V_{it}}{V_{i(t-1)}} - 1.$$

Para $t = 0$ define-se $r_{i0} = 0$.

Definição 2.2. (Taxa de retorno da carteira) A taxa de retorno da carteira composta por M ativos no tempo t é dada por

$$r_t^{(c)} = \sum_{i=1}^M r_{it} x_{it}.$$

onde x_{it} é a porcentagem do capital investido no ativo i no tempo t .

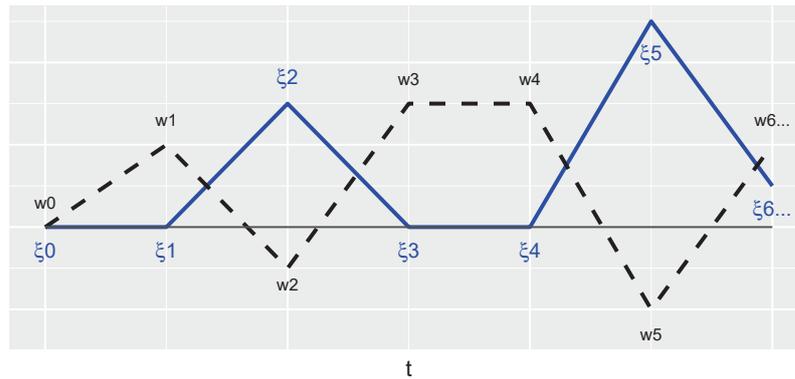
Definição 2.3. (Taxa de retorno acumulada da carteira). Se $r^{(c)} = (r_0^{(c)}, \dots, r_N^{(c)})$ determina a série temporal da taxa de retorno da carteira, por definição, a taxa de retorno acumulada da carteira no tempo t é

$$w_t = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sum_{l=1}^t r_l^{(c)}, & t = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Definição 2.4. (*Drawdown*) O *drawdown* no tempo t é definido como

$$\xi_t = \max_{0 \leq s \leq t} \{w_s\} - w_t.$$

Denotaremos por ξ a série de *drawdowns*, ou seja, $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_N)$. A Figura 1 exemplifica a série de *drawdowns* para uma série de retornos acumulados w .

FIGURA 1 – Representação da série de *drawdowns*.

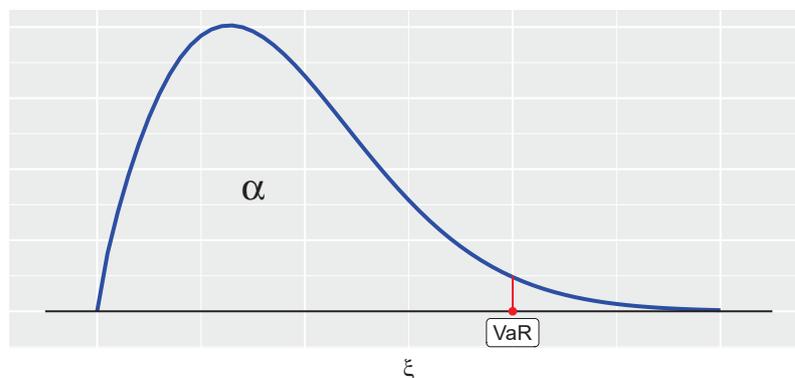
Fonte: Autoria própria.

É importante interpretar a medida *drawdown* em w_t . Ela é uma função de perda que mede a distância entre a maior taxa de retorno acumulada até o momento e o valor da taxa de retorno acumulada atual. Dessa forma, o *drawdown* nunca é negativo e será zero se w_t se mantiver constante ao longo do tempo ou se o maior valor de retorno for o valor atual da série.

Definição 2.5. (VaR:) Considerando F_ξ a função de distribuição acumulada de ξ , o $\text{VaR}_\alpha(\xi)$ é o quantil de ordem α de ξ , $0 < \alpha < 1$, onde α é o nível de confiança dado. Matematicamente, define-se

$$\text{VaR}_\alpha(\xi) = \min\{y \in \mathbb{R}; F_\xi(y) \geq \alpha\}.$$

Em outras palavras, a probabilidade de se ter um *drawdown* maior que o $\text{VaR}_\alpha(\xi)$ é menor que $(1 - \alpha)\%$. A sigla VaR vem do inglês *Value at Risk*, a Figura 2 esboça o conceito do $\text{VaR}_\alpha(\xi)$.

FIGURA 2 – Representação do VaR na distribuição de ξ .

Fonte: Autoria própria.

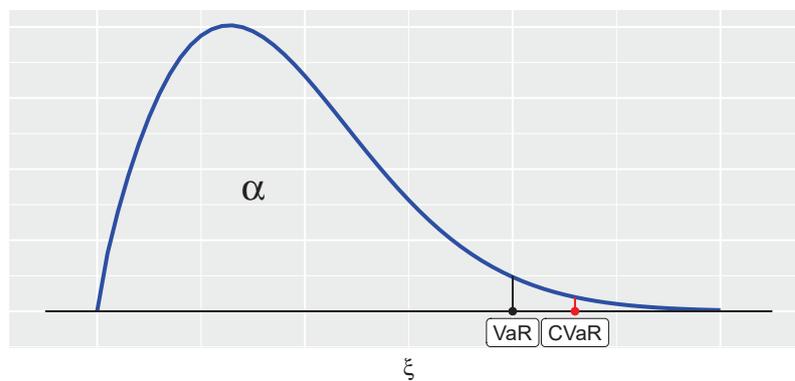
Definição 2.6. (CVaR) A sigla CVaR vem do inglês de *Conditional Value at Risk*, e como o nome diz é um valor esperado condicional. O $CVaR_\alpha(\xi)$ é o valor esperado da série de *drawdowns* uma vez que a perda ocorrida é maior que o $VaR_\alpha(\xi)$. Define-se então

$$CVaR_\alpha(\xi) = E(\xi | \xi \geq VaR_\alpha(\xi))$$

para um nível de confiança α dado.

A Figura 3 representa o conceito do $CVaR_\alpha(\xi)$.

FIGURA 3 – Representação do CVaR na distribuição de ξ .



Fonte: Autoria própria.

Definição 2.7. (CVaR misto) O CVaR misto da série ξ , denotado por $CVaR_\chi(\xi)$, é a combinação convexa de CVaR's com diferentes níveis de confiança, ou seja

$$CVaR_\chi(\xi) = \sum_{j=1}^L \chi_j CVaR_{\alpha_j}(\xi),$$

em que $\sum_{j=1}^L \chi_j = 1$ e $\chi_j \geq 0$. Os valores χ_j , $j = 1, \dots, L$, são chamados perfil de risco.

O perfil de risco escolhido pode ser uma estratégia na avaliação de investimentos e influenciam a tomada de decisão. O emprego do CVaR misto como medida de risco permite adicionar ao modelo a informação sobre o perfil do investidor, que refere-se ao seu nível de disposição para lidar com as incertezas do mercado financeiro, assumindo maiores riscos (pesos maiores para α 's maiores) com possibilidade de maiores retornos.

2.2 OTIMIZAÇÃO DO CVAR

Outra forma de calcular o CVaR foi abordada por Chekhlov, Uryasev e Mi. Zabaranin (2005), e permite maior presteza ao cálculo do CVaR através de um modelo de otimização.

Considere a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$h(y) = y + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{t=1}^N [\xi_t - y]^+$$

em que $[\xi_t - y]^+ = \max\{\xi_t - y, 0\}$.

Nos artigos citados neste capítulo, os autores provam a relação

$$CVaR_\alpha(\xi) = \min_y h(y). \quad (2.1)$$

A função $h(y)$ é convexa e linear por partes em y , mas não é diferenciável, assim (2.1) é um problema de otimização não suave.

Como forma de evitar a não suavidade do problema, os autores demonstram que o CVaR também pode ser definido por um problema de otimização linear diferenciável, como segue.

Teorema 2.8. *Dada uma série temporal de drawdowns $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ correspondente aos períodos $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$, o $CVaR_\alpha(\xi)$ pode ser obtido pelo problema de programação linear*

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(\xi) = \underset{y, z}{\text{minimizar}} \quad & y + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{t=1}^N z_t \\ \text{sujeito a} \quad & z_t \geq \xi_t - y \\ & z_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, N \end{aligned}$$

em que $z_t, t = 1, \dots, N$ são variáveis auxiliares.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no Teorema 4.1 do artigo de Chekhlov, Uryasev e Mi. Zabarankin (2005). ■

A solução y do problema apresentado no Teorema 2.8 pode resultar em um único valor ótimo y^* igual ao $VaR_\alpha(\xi)$ ou, se resultar em um intervalo fechado ótimo, y^* , o ponto limite à esquerda será o $VaR_\alpha(\xi)$.

De forma análoga, a função $H : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ para o CVaR misto é definida como

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^L \chi_j \left(y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)N} \sum_{t=1}^N [\xi_t - y_j]^+ \right)$$

em que $[\xi_t - y_j]^+ = \max\{\xi_t - y_j, 0\}$. É estabelecida a seguinte relação:

$$CVaR_\chi(\xi) = \min_y H(x, y). \quad (2.2)$$

O problema (2.2) é equivalente ao problema de otimização linear a seguir.

Proposição 2.9. Dada uma série temporal de retornos $r^{(c)} = (r_1, \dots, r_N)$ e perfil de risco $\chi_j, j = 1, \dots, L$, o $CVaR_\chi$ é calculado como

$$\begin{aligned} CVaR_\chi = \underset{u, y, z}{\text{minimizar}} \quad & \sum_{j=1}^L \chi_j \left(y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)N} \sum_{t=1}^N z_t \right) \\ \text{sujeito a} \quad & z_{jt} \geq u_t - y_j \\ & u_k \geq u_{t-1} - r_t^{(c)} \\ & u_0 = 0 \\ & z_t \geq 0, \quad u_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, L \end{aligned}$$

em que $u_t, t = 1, \dots, N$ são variáveis auxiliares e seus valores ótimos são a série de *drawdowns*, ξ .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na Proposição 4.2 do artigo de Chekhlov, Uryasev e Mi. Zabarankin (2005). ■

2.3 MODELO DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA

Um modelo tradicional de otimização de carteira com M ativos busca obter o maior retorno esperado da carteira sujeito a uma medida de risco, ou vice-versa, mais as restrições relativas ao problema. Descreve-se o modelo geral como

$$\begin{aligned} \underset{x \in X}{\text{maximizar}} \quad & E(r^{(c)}) \\ \text{sujeito a} \quad & \text{Risco}(r^{(c)}) \leq \gamma \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

em que X é o conjunto de restrições, x é um vetor em \mathbb{R}^M que representa a carteira de investimentos e em que cada componente i é o percentual a ser investido no ativo i para $i = 1, 2, \dots, M$ e $\gamma \in [0, 1]$ é a proporção do capital permitido para a perda.

Exemplos de medidas de risco são o desvio padrão, a variância, o VaR, o CVaR, entre outras.

Neste trabalho, considera-se o CVaR misto aplicado a uma série ξ como medida de risco com a maximização do valor esperado da taxa de retorno acumulada simples no período final $t = N$

$$\begin{aligned} \underset{x \in X}{\text{maximizar}} \quad & E(w) = w_N \\ \text{sujeito a} \quad & CVaR_\chi \leq \gamma \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, M \end{aligned}$$

ou, reescrevendo, tem-se

$$\begin{aligned}
& \underset{u,x,y,z}{\text{maximizar}} && w_N(x) \\
& \text{sujeito a} && \sum_{j=1}^L \chi_j \left(y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)N} \sum_{t=1}^N \max\{u_t - y_j, 0\} \right) \leq \gamma \\
& && u_t \geq u_{(t-1)} - r_t^{(p)}(x), \\
& && u_t \geq 0, \quad u_0 = 0 \\
& && j = 1, \dots, L; \quad t = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

O problema (2.3) também é um problema de otimização não suave e seu correspondente problema de otimização linear é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.10. *O problema (2.3) reduz-se ao problema de programação linear*

$$\begin{aligned}
& \underset{u,x,y,z}{\text{maximizar}} && w_N(x) \\
& \text{sujeito a} && \sum_{j=1}^L \chi_j \left(y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)N} \sum_{t=1}^N z_{jt} \right) \leq \gamma \\
& && z_{jt} \geq u_t - y_j \\
& && u_t \geq u_{(t-1)} - r_t^{(p)}(x), \\
& && u_t \geq 0, \quad u_0 = 0, \quad z_{jt} \geq 0 \\
& && j = 1, \dots, L; \quad t = 1, \dots, N,
\end{aligned}$$

em que u_t, y_j e z_{jt} para $j = 1, \dots, L$ e $t = 1, \dots, N$ são variáveis auxiliares.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no Teorema 6.1 do artigo de Chekhlov, Uryasev e Mi. Zabrankin (2005) para um único cenário amostral. ■

3 UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA

O presente capítulo dedica-se a apresentar e discutir uma proposta de modelos equivalentes ao modelo (2.3) que minimizam o risco de uma carteira de investimentos (Seção 3.1) e descreve uma maneira de aprimorar ele, tornando-o um modelo diferenciável (Seção 3.2).

Este capítulo representa a principal contribuição da tese.

3.1 MINIMIZAÇÃO DO RISCO

Um modelo de otimização de carteira pode também ser escrito de forma a minimizar o risco (CVaR) sujeito à restrição de retorno.

Denotando por δ o retorno mínimo da carteira aceitável pelo investidor, pode-se reformular o modelo (2.3) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 & \underset{u,x,y}{\text{minimizar}} && \sum_{j=1}^L \chi_j \left(y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)N} \sum_{t=1}^N \max\{u_t - y_j, 0\} \right) \\
 & \text{sujeito a} && w_N(x) \geq \delta \\
 & && u_t \geq u_{(t-1)} - r_t^{(e)}(x), \\
 & && u_t \geq 0, \quad u_0 = 0 \\
 & && j = 1, \dots, L; \quad t = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que u_t e y_j para $j = 1, \dots, L$ e $t = 1, \dots, N$ são variáveis auxiliares.

A equivalência dos modelos (3.1) e (2.3) é demonstrada no final desta seção.

De forma análoga como foi abordado no capítulo anterior, o modelo (3.1) acima pode ser escrito em sua forma linear adicionando uma variável auxiliar z

$$\begin{aligned}
 & \underset{u,x,y,z}{\text{minimizar}} && \sum_{j=1}^L \chi_j \left(y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)N} \sum_{t=1}^N z_{jt} \right) \\
 & \text{sujeito a} && w_N(x) \geq \delta \\
 & && z_{jt} \geq u_t - y_j \\
 & && u_t \geq u_{(t-1)} - r_t^{(p)}(x), \\
 & && u_t \geq 0, \quad u_0 = 0 \\
 & && z_{jt} \geq 0 \\
 & && j = 1, \dots, L; \quad t = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que u_t, y_j e z_{jt} para $j = 1, \dots, L$ e $t = 1, \dots, N$ são variáveis auxiliares. O modelo (3.2) será chamado de modelo original em nosso estudo como referência ao modelo equivalente encontrado na literatura (CHEKHLOV; URYASEV; ZABARANKIN, Mi., 2005) e será utilizado no Capítulo 4 como modelo base para comparação.

Os resultados subsequentes são relevantes para demonstrar a validade da remodelagem proposta nesta tese.

Lema 3.1. Considere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \max\{0, x\}$. Então, g é uma função convexa para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Considere a e $b \in \mathbb{R}$ vamos mostrar que dado $\lambda \in [0, 1]$

$$g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b)$$

ou, reescrevendo

$$\max\{0, \lambda a + (1 - \lambda)b\} \leq \lambda \max\{0, a\} + (1 - \lambda) \max\{0, b\}. \quad (3.3)$$

1. Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$ ou $a > 0$ e $b > 0$ então (3.3) é imediata.

2. Se $a \leq 0$ e $b > 0$ e $\lambda a + (1 - \lambda)b \leq 0$ tem-se

$$\max\{0, \lambda a + (1 - \lambda)b\} = 0 \leq \lambda \max\{0, a\} + (1 - \lambda) \max\{0, b\}$$

3. Se $a \leq 0$ e $b > 0$ e $\lambda a + (1 - \lambda)b > 0$ então

$$\max\{0, \lambda a + (1 - \lambda)b\} = \lambda a + (1 - \lambda)b \leq 0 + (1 - \lambda)b \leq \lambda \max\{0, a\} + (1 - \lambda) \max\{0, b\}$$

O raciocínio é análogo para o caso em que $a > 0$ e $b \leq 0$. ■

Lema 3.2. A função objetivo do modelo (3.1) é convexa.

Demonstração. Decorre do Lema 3.1 que a função $g(u_t, y_j) = \max\{u_t - y_j, 0\}$, $t = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, L$ é convexa e que a função objetivo (3.1) é uma combinação linear de funções convexas com coeficientes positivos, logo é convexa. ■

Teorema 3.3. Os modelos (3.1) e (2.3) são equivalentes.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no Lema 3.2 e no Teorema 3 do artigo de Krokhmal, Palmquist e Uryasev (2002). ■

3.2 APROXIMAÇÕES DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA TORNAR O PROBLEMA DIFERENCIÁVEL

O que torna o modelo (3.1) não suave é o fato de que a função objetivo contém a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \max\{x, 0\}$. O modelo (3.2) contorna este contratempo substituindo a função g pela variável auxiliar z e adicionando as restrições $z_{jt} \geq u_t - y_j$ e $z_{jt} \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, L$ e $t = 1, \dots, N$.

A proposta deste trabalho é apresentar funções para substituir a função g , criando novos modelos que são versões do modelo (3.1). Esses novos modelos apresentam duas vantagens: tornam o modelo (3.1) suave e possuem uma menor quantidade de restrições quando comparadas ao modelo (3.2); tem-se $2(L \times N)$ restrições a menos, ou seja, a redução é de mais de 40% no número de restrições. Por outro lado, os novos modelos tratam de modelos não lineares, enquanto o modelo (3.2) é linear.

Assim os novos modelos (3.1) são definidos como

$$\begin{aligned} \underset{u,x,y}{\text{minimizar}} \quad & \sum_{j=1}^L \chi_j \left(y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)^N} \sum_{t=1}^N f_p(u_t - y_j) \right) \\ \text{sujeito à} \quad & w_N(x) \geq \delta \\ & u_t \geq u_{(t-1)} - r_t^{(p)}(x), \\ & u_t \geq 0, \quad u_0 = 0 \\ & j = 1, \dots, L; \quad t = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $f_p(x)$, $p = 1, \dots, 5$, representam uma aproximação para a função $g(x) = \max\{x, 0\}$.

As funções utilizadas nos novos modelos para suavização e que aproximam a função g seguem na Tabela 1 com seus respectivos gráficos.

As funções f_1, f_2, f_3 e f_4 se aproximam da função g conforme o parâmetro η se aproxima de zero, e a função f_5 se aproxima de g quanto maior for o parâmetro ρ .

Os gráficos da Tabela 1 exibem a função f_p , $p = 1, \dots, 5$ e a função g (em vermelho) no intervalo do domínio entre $-0,1$ e $0,1$. Observe que para as funções f_1, f_2, f_3 e f_4 as maiores diferenças de aproximação ocorrem em $x = 0$ onde g é não diferenciável.

TABELA 1 – Funções que aproximam a função g e seus gráficos.

| Função | Gráfico |
|---|---------|
| $f_1(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + \eta} + x)}{2}$ | |
| $f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\eta \\ \frac{x^2}{4\eta} + \frac{x}{2} + \frac{\eta}{4}, & -\eta < x \leq \eta \\ x, & x > \eta \end{cases}$ | |
| $f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\eta \\ \frac{-x^4}{16\eta^3} + \frac{3x^2}{8\eta} + \frac{x}{2} + \frac{3\eta}{16}, & -\eta < x \leq \eta \\ x, & x > \eta \end{cases}$ | |
| $f_4(x) = \frac{1}{2}(x + (x^\beta + \eta)^{1/\beta})$ | |
| $f_5(x) = \frac{-\ln(\rho^2 x^2 + 1) + \pi \rho x + 2\rho x \tan^{-1}(\rho x)}{2\pi \rho}$ | |

Fonte: Autoria própria.

A função f_2 encontra-se no trabalho de Nasri et al. (2016) e as outras funções da Tabela 1 foram criadas adaptando funções e realizando experimentações. A função f_5 por possuir no denominador o parâmetro ρ , que precisa ser numericamente grande, pode apresentar uma dificuldade maior de aproximação e de convergência computacional do modelo.

As derivadas primeira e segunda das funções f_p , $p = 1, \dots, 5$ seguem nas Tabelas 2 e 3, respectivamente.

TABELA 2 – Primeira derivada da função f_p .

| Função | 1ª derivada |
|--------|---|
| f_1 | $f'_1(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\eta}} + 1 \right)$ |
| f_2 | $f'_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -\eta \\ \frac{x}{2\eta} + \frac{1}{2}, & \text{se } -\eta < x \leq \eta \\ 1, & \text{se } x > \eta \end{cases}$ |
| f_3 | $f'_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -\eta \\ \frac{-x^3}{4\eta^3} + \frac{3x}{4\eta} + \frac{1}{2}, & \text{se } -\eta < x \leq \eta \\ 1, & \text{se } x > \eta \end{cases}$ |
| f_4 | $f'_4(x) = \frac{1}{2} (x^{\beta-1} (x^\beta + \eta)^{1/\beta-1} + 1)$ |
| f_5 | $f'_5(x) = \frac{\tan^{-1}(\rho x)}{\pi} + \frac{1}{2}$ |

Fonte: Autoria própria.

Todas as segundas derivadas da função f_p , $p = 1, 2, \dots, 5$ se aproximam da função nula para parâmetros adequados.

TABELA 3 – Segunda derivada da função f_p

| Função | 2ª derivada |
|--------|--|
| f_1 | $f''_1(x) = \frac{\eta}{2(\eta + x^2)^{3/2}}$ |
| f_2 | $f''_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -\eta \\ \frac{1}{2\eta}, & \text{se } -\eta < x \leq \eta \\ 0, & \text{se } x > \eta \end{cases}$ |
| f_3 | $f''_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -\eta \\ \frac{-3x^2}{4\eta^3} + \frac{3}{4\eta}, & \text{se } -\eta < x \leq \eta \\ 0, & \text{se } x > \eta \end{cases}$ |
| f_4 | $f''_4(x) = \frac{1}{2} ((\beta - 1)\eta x^{\beta-2} (x^\beta + \eta)^{1/\beta-2})$ |
| f_5 | $f''_5(x) = \frac{\rho/(1 + \rho^2 x^2)}{\pi}$ |

Fonte: Autoria própria.

4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresenta-se experimentos numéricos aplicando os novos modelos a dados reais da bolsa brasileira. Vários cenários serão simulados e submetidos aos modelos. Os resultados são analisados e conclusões são apresentadas.

Os testes foram executados em um processador Intel(R)®Core(TM) i5-5200U CPU, 2.20GHz, 8.0 GB de memória RAM e implementação em JULIA 1.6.3 (BEZANSON et al., 2017). Os novos modelos foram implementadas conforme descrito no modelo (3.4) e nas Tabelas 2 e 3.

Os ativos escolhidos para compor a carteira são os ativos que compunham o índice da bolsa brasileira, o Ibovespa, na data 08/08/2022 e que possuíam histórico de valores de negociação desde o ano de 2007. Assim, os retornos históricos de $M = 39$ ações foram utilizados nas análises como parâmetros da modelagem. Os ativos selecionados possuem os seguintes códigos na bolsa de valores:

| | | |
|-----------|----------|-----------|
| 1. ABEV3 | 14.ELET3 | 27. PETR4 |
| 2. AMER3 | 15.EMBR3 | 28. POSI3 |
| 3. BBDC3 | 16.ENBR3 | 29. RADL3 |
| 4. BRAP4 | 17.EGIE3 | 30. SBSP3 |
| 5. BBAS3 | 18.GGBR4 | 31. CSNA3 |
| 6. BRKM5 | 19.GOAU4 | 32. VIVT3 |
| 7. BRFS3 | 20.GOLL4 | 33. TIMS3 |
| 8. CCRO3 | 21.ITSA4 | 34. TOTS3 |
| 9. CMIG4 | 22.ITUB4 | 35. UGPA3 |
| 10. CPLE6 | 23.RENT3 | 36. USIM5 |
| 11. CSAN3 | 24.LREN3 | 37. VALE3 |
| 12. CPFE3 | 25.PCAR3 | 38. VIIA3 |
| 13. CYRE3 | 26.PETR3 | 39. WEGE3 |

Foram obtidos os valores de fechamento desses ativos no período de 2007 até 2021, totalizando $N = 3717$ dias de pregão (YAHOO, 2022).

Foram utilizados $L = 3$ com pesos iguais a $\chi_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, para o perfil de risco e os respectivos níveis de confiança $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,75$ e $\alpha_3 = 0,9$. O retorno mínimo fixado foi de $\delta = 0,1$. As restrições comumente utilizadas $\sum_{i=1}^M x_i = 1$ e $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, M$ foram adicionadas nos modelos para gerar os resultados, pois no contexto dos dados apresentados não é considerada a alavancagem (ou seja, $\sum_{i=1}^M x_i > 1$) como uma estratégia de investimento, diferentemente da aplicação no estudo dos autores citados.

4.1 ANÁLISE DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL DOS MODELOS

A metodologia desenvolvida na implementação computacional foi utilizar as primeiras e segundas derivadas das funções que aproximam a função g e utilizar a própria função g na avaliação da função objetivo, como uma forma de melhorar a velocidade e a aproximação do resultado. Isto não interfere nos resultados teóricos e computacionais uma vez que as funções objetivos são contínuas.

O otimizador utilizado no JULIA foi o *Interior Point Optimizer* (Ipopt) dentro do pacote JuMP (DUNNING; HUCHETTE; LUBIN, 2017) que resolve problemas de otimização não linear por pontos interiores (IPOPT, 2022). Os códigos e modelagem podem ser encontrados em <https://github.com/Rafaela-Pereira/Portfolio-optimization>.

O resultado dos testes dos novos modelos e do modelo (3.1) estão apresentados na Tabela 4 junto com os parâmetros utilizados. O parâmetro η para as funções foi escolhido de forma a ser o menor quanto possível e ρ o maior quanto possível para a convergência do modelo no sentido computacional. Os testes realizados para definir o parâmetro η do modelo 1 podem ser consultados na Seção A.1 do apêndice. É possível observar que os novos modelos apresentaram tempos de execução menores, alguns deles com menos da metade do tempo em relação ao modelo original.

TABELA 4 – Desempenho computacional dos novos modelos.

| Modelo | Tempo | iterações | CVaR | Parâmetros |
|---------------|-------|-----------|-------|---|
| Original | 14,64 | 87 | 0,127 | - |
| Modelo 1 (M1) | 6,58 | 78 | 0,127 | $\eta = 2^{-14}$ |
| Modelo 2 (M2) | 7,23 | 66 | 0,128 | $\eta = 0,03$ |
| Modelo 3 (M3) | 5,50 | 68 | 0,127 | $\eta = 0,021$ |
| Modelo 4 (M4) | 9,02 | 69 | 0,128 | $\beta = 4$ e $\eta = 2,7 \times 10^{-7}$ |
| Modelo 5 (M5) | 8,20 | 70 | 0,129 | $\rho = 400$ |

Fonte: Autoria própria.

Os resultados sugerem um melhor desempenho computacional dos novos modelos, tornando-os competitivos em relação ao modelo original.

A Tabela 5 exhibe os resultados ótimos para cada versão do modelo, onde x_i , $i = 1, 2, \dots, 39$ representam os pesos de cada ativo na carteira e o vetor $y = (y_1, y_2, y_3)$ representam o VaR para os níveis de confiança adotados de 60%, 75% e 90% respectivamente, sendo estes, as últimas três linhas da Tabela 5.

TABELA 5 – Resultado da otimização dos novos modelos.

| Modelo | Original | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 |
|------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| CVaR misto | 0,127 | 0,127 | 0,128 | 0,127 | 0,128 | 0,129 |
| x_1 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_2 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_3 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_4 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_5 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_6 | 0,022 | 0,022 | 0,022 | 0,022 | 0,022 | 0,022 |
| x_7 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_8 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_9 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{10} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{11} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{12} | 0,071 | 0,070 | 0,069 | 0,070 | 0,068 | 0,071 |
| x_{13} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{14} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{15} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{16} | 0,222 | 0,220 | 0,220 | 0,220 | 0,219 | 0,215 |
| x_{17} | 0,157 | 0,162 | 0,165 | 0,161 | 0,170 | 0,178 |
| x_{18} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{19} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{20} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{21} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{22} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{23} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{24} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{25} | 0,025 | 0,024 | 0,024 | 0,024 | 0,024 | 0,023 |
| x_{26} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{27} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{28} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{29} | 0,078 | 0,082 | 0,084 | 0,082 | 0,086 | 0,093 |
| x_{30} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{31} | 0,035 | 0,035 | 0,035 | 0,035 | 0,034 | 0,034 |
| x_{32} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{33} | 0,217 | 0,215 | 0,214 | 0,215 | 0,212 | 0,206 |
| x_{34} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{35} | 0,066 | 0,063 | 0,062 | 0,064 | 0,061 | 0,056 |
| x_{36} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{37} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{38} | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| x_{39} | 0,108 | 0,106 | 0,106 | 0,106 | 0,104 | 0,103 |
| y_1 | 0,053 | 0,053 | 0,054 | 0,053 | 0,056 | 0,055 |
| y_2 | 0,074 | 0,075 | 0,076 | 0,075 | 0,079 | 0,081 |
| y_3 | 0,111 | 0,114 | 0,116 | 0,113 | 0,121 | 0,134 |

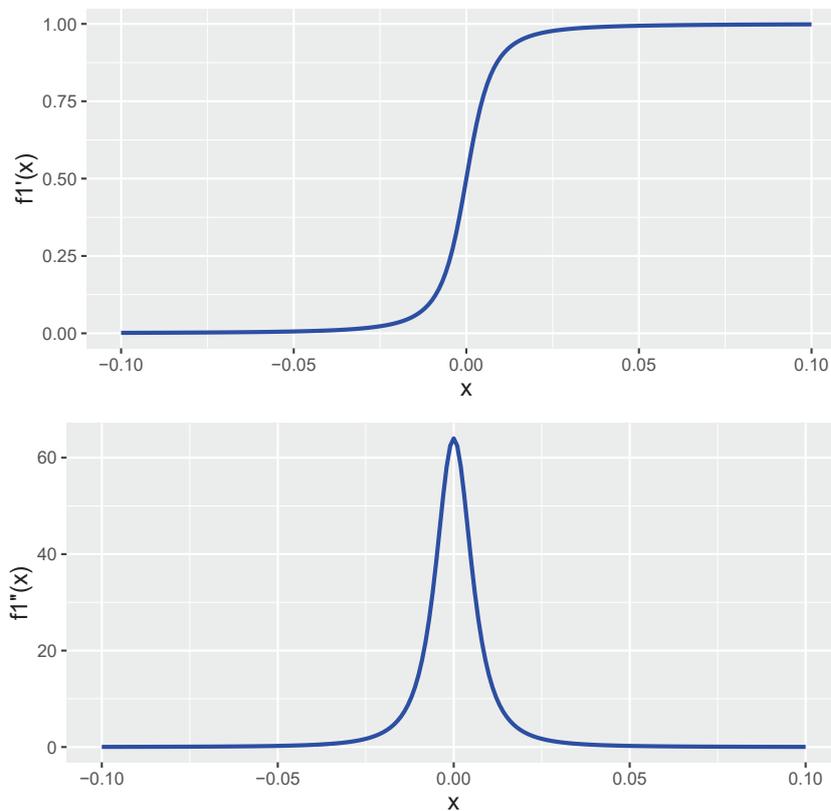
Fonte: Autoria própria.

Analisando os resultados, observa-se que a maioria dos ativos tiveram peso nulo, pois são ativos que pouco oferecem na relação risco e retorno da carteira. Tanto os valores dos pesos quanto os valores do VaR na Tabela 5 para os novos modelos foram bem próximos ao modelo original, abaixo, na Figura 6 segue a visualização e interpretação destes resultados.

Dentre os novos modelos analisados na Tabela 4, o Modelo 1 apresentou um dos menores tempos, baixa sensibilidade ao parâmetro η e boa aproximação do modelo original, apontando ganhos em sua utilização.

A Figura 4 apresenta um esboço do gráfico das derivadas da função $f_1(x)$ em um intervalo do domínio contendo o ponto $x = 0$, nota-se a suavidade dessas funções neste intervalo que, por conseguinte, facilitam a resolução do problema de otimização.

FIGURA 4 – Gráficos da primeira e segunda derivada da função $f_1(x)$ para $\eta = 2^{-14}$.



Fonte: Autoria própria.

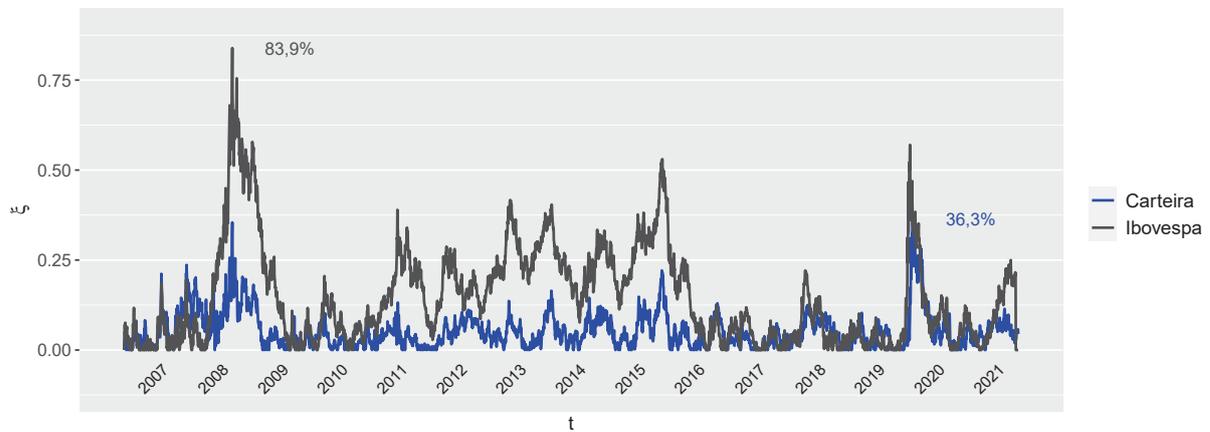
Posto isto, optou-se pelo Modelo 1 para desenvolver a interpretação dos resultados das análises financeiras, contudo qualquer um dos novos modelos apresentados é qualificado para a análise que se segue.

4.2 ANÁLISE FINANCEIRA

A Figura 5 apresenta o gráfico comparativo da série diária de *drawdowns* para a carteira ótima com o Modelo 1 e o Ibovespa ao longo do tempo. O *drawdown* máximo da carteira foi de 36,3% em março de 2020, início da pandemia de coronavírus, enquanto que o *drawdown* máximo para o índice Ibovespa foi de 83,9 % na crise de 2008. Cerca de 6,5% dos *drawdowns* da série do índice Ibovespa ficaram acima do *drawdown* máximo da carteira, apontando maior volatilidade deste índice.

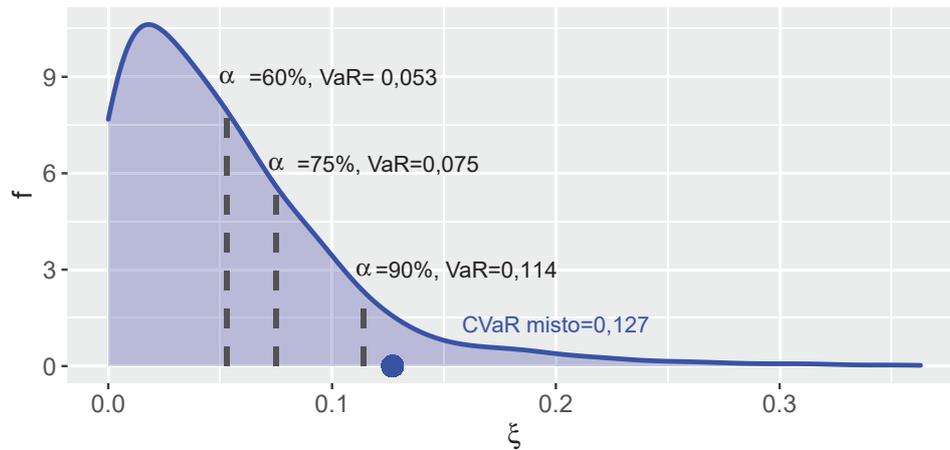
Os valores diários dos *drawdowns* para a carteira foram obtidos pelos valores ótimos u_1, u_2, \dots, u_N do modelo 3.4 com a f_1 .

FIGURA 5 – Série temporal dos *drawdowns*.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 6 tem-se a distribuição suavizada dos *drawdowns* da carteira ótima do Modelo 1 com a marcação do VaR, y , para cada nível de confiança adotado, assim observa-se que 90% dos valores dos drawdowns da série histórica ficaram abaixo de 0,114 e que o CVaR misto foi de 0,127 para esta carteira.

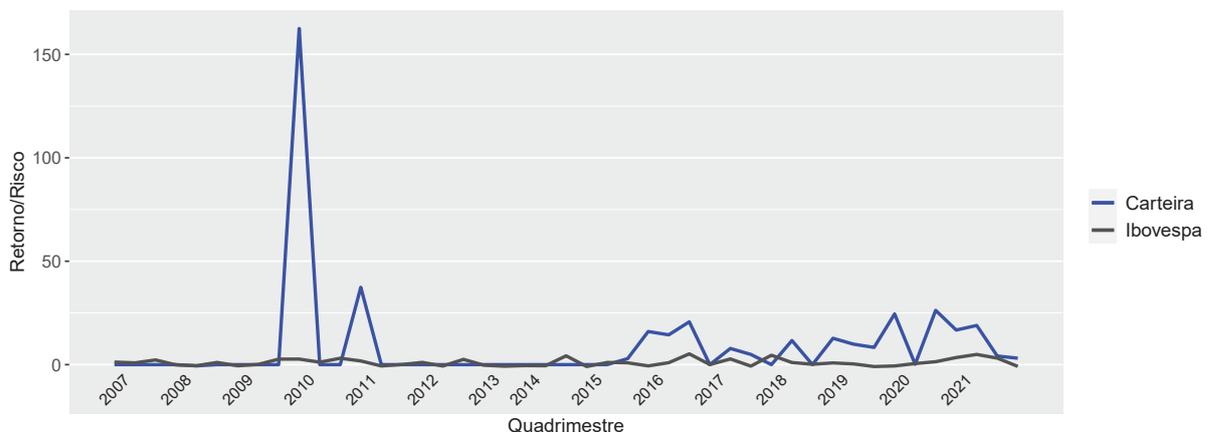
FIGURA 6 – Distribuição dos *drawdowns*.

Fonte: Autoria própria.

Nas análises seguintes considerou-se uma janela de tempo de 4 meses durante os anos de 2007 até 2021, isto é, em cada quadrimestre o Modelo 1 foi otimizado resultando novas distribuições dos pesos dos ativos na carteira, novos riscos e retornos e foi retirada a restrição de retorno mínimo, para que seus resultados fossem comparáveis ao índice Ibovespa.

Na Figura 7, observa-se a relação entre retorno e risco da carteira ótima e do Ibovespa ao longo da série histórica. Nos primeiros anos os ativos que compunham a carteira ótima não possuíam valor expressivo na bolsa de valores e assim a carteira ótima apresentou baixo risco e baixo retorno, já nos anos finais da série a carteira ótima com o Modelo 1 foi a que apresentou melhor desempenho.

FIGURA 7 – Série temporal do risco/retorno da carteira e Ibovespa.

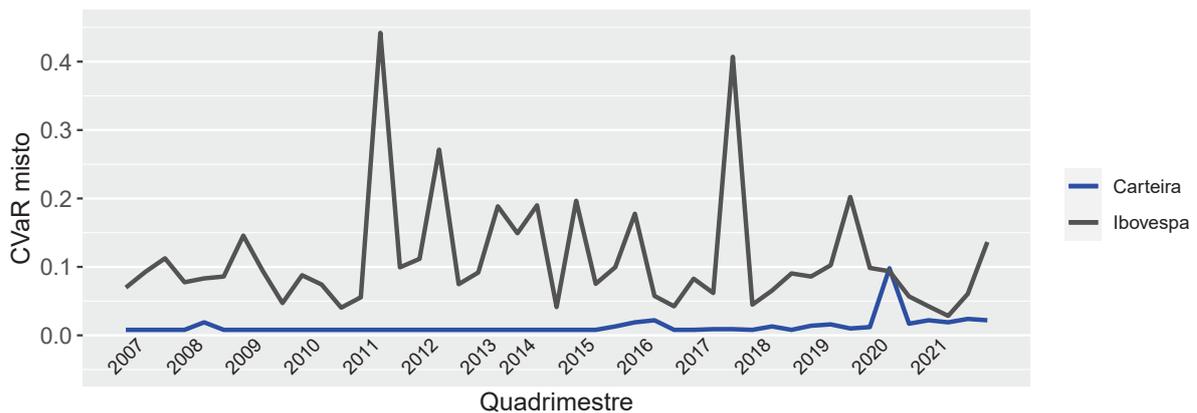


Fonte: Autoria própria.

A Figura 8 exibe o CVaR misto para a carteira ótima e para o Ibovespa, são esperados menores valores de risco para a carteira ótima, o CVaR misto é quase nulo ao

longo dos anos. As maiores oscilações observáveis no gráfico do CVaR misto para a carteira ótima ocorreram exatamente nos períodos de maior volatilidade, que foram o segundo quadrimestre de 2008 com a crise financeira da bolha imobiliária americana, o ano de 2015 com o início do impeachment da presidente Dilma Rousseff e o início de 2020 com a crise econômica causada pela pandemia.

FIGURA 8 – CVaR misto

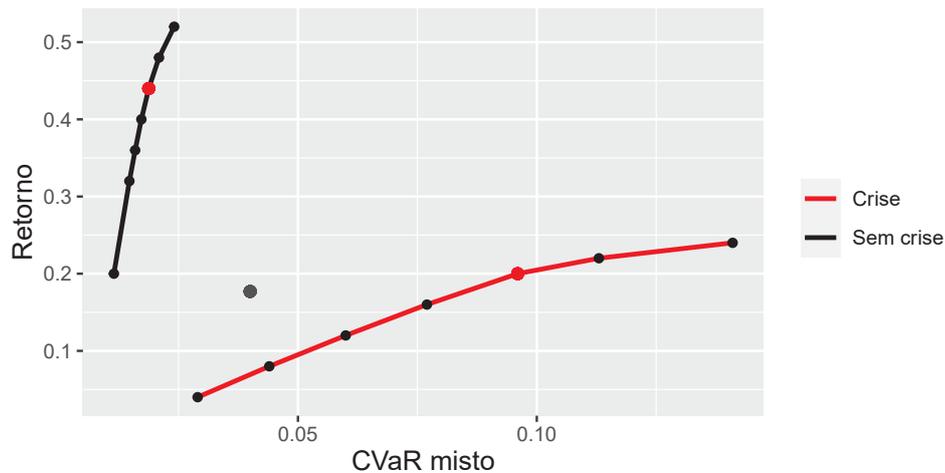


Fonte: Autoria própria.

Na Figura 9, são apresentadas a fronteira eficiente para o segundo quadrimestre de 2008 (período de crise financeira) e a fronteira eficiente para o segundo quadrimestre de 2013 (período sem crise financeira), dois períodos de diferentes volatilidade no cenário econômico brasileiro. A fronteira eficiente do modelo (3.4) com a função f_1 descreve a relação entre retorno acumulado e risco (CVaR misto), o gráfico da fronteira eficiente é uma curva côncava dada pelos pontos $(\sum_{j=1}^L \chi_j (y_j + \frac{1}{(1-\alpha_j)N} \sum_{t=1}^N [(u_t - y_j) + \sqrt{(u_t - y_j)^2 + \eta}]/2), \delta)$, para $\eta = 2^{-14}$. Observa-se que o retorno não cresce na mesma velocidade do risco, para o cenário de crise a taxa de retorno por unidade de risco é baixa atingindo a maior velocidade para um retorno de 0,2 e um risco de 0,096, enquanto que para cenário sem crise e para o mesmo retorno de 0,2 o risco é de apenas 0,01. No cenário sem crise a maior taxa é obtida com um retorno de 0,44 e um risco de 0,02.

O ponto de maior taxa de retorno/risco na fronteira eficiente descreve a carteira mais eficiente dentre um conjunto de carteiras. Na Figura 9 para cada cenário a carteira eficiente é destacada em vermelho.

FIGURA 9 – Fronteira eficiente em período de crise e não crise



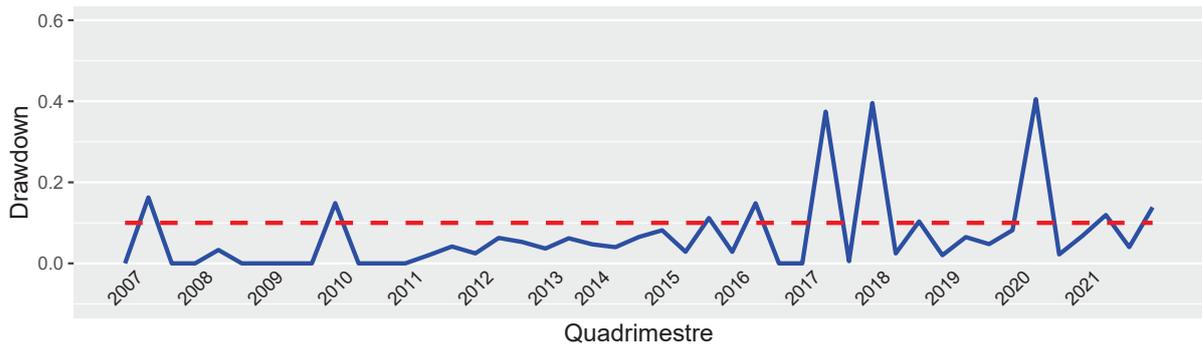
Fonte: Autoria própria.

O Ibovespa no período de não crise obteve um retorno de 0,177 para o risco de 0,04 (ponto cinza na Figura 9), enquanto a carteira obteve um retorno de 0,2 para um risco de apenas 0,01, a carteira se mostrou cerca de 5 vezes mais eficiente que o Ibovespa. No quadrimestre de crise o Ibovespa obteve um retorno negativo de -0,0425 para o risco de 0,083, apontando perdas para os investidores desse índice neste período.

4.3 O CVAR MISTO PARA CONTROLE DE RISCO

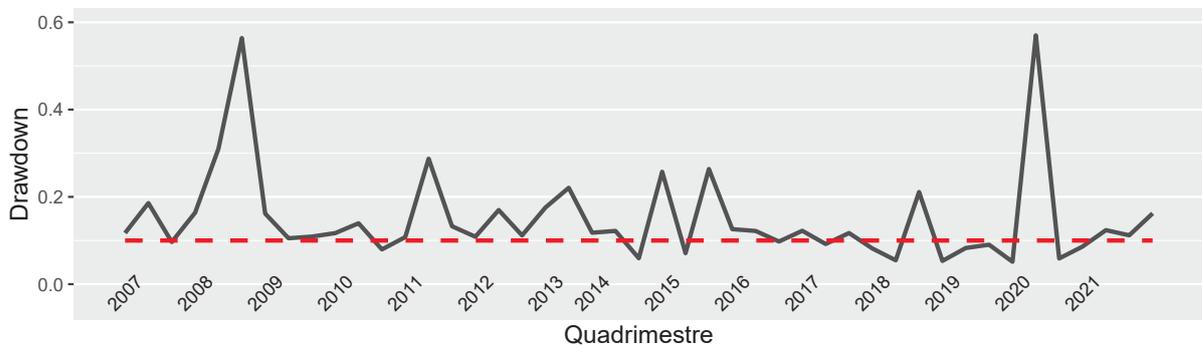
O modelo (3.4) pode ser utilizado como uma ferramenta para o controle de risco. Uma estratégia é realizar o rebalanceamento da carteira a cada quadrimestre se o *drawdown* máximo exceder um certo valor escolhido pelo investidor. Considere como exemplo, um valor definido de 10% como limite para o *drawdown* máximo. A Figura 10 exhibe o comportamento do *drawdown* da carteira para esse caso. Observe que todo período que o *drawdown* atinge ou ultrapassa o limite estabelecido, o *drawdown* com o rebalanceamento pelo modelo (3.4) volta a ser baixo.

Nota-se novamente que os períodos finais da série histórica são os períodos de maior volatilidade para esta carteira.

FIGURA 10 – Série de máximo *drawdown* da carteira com rebalanceamento.

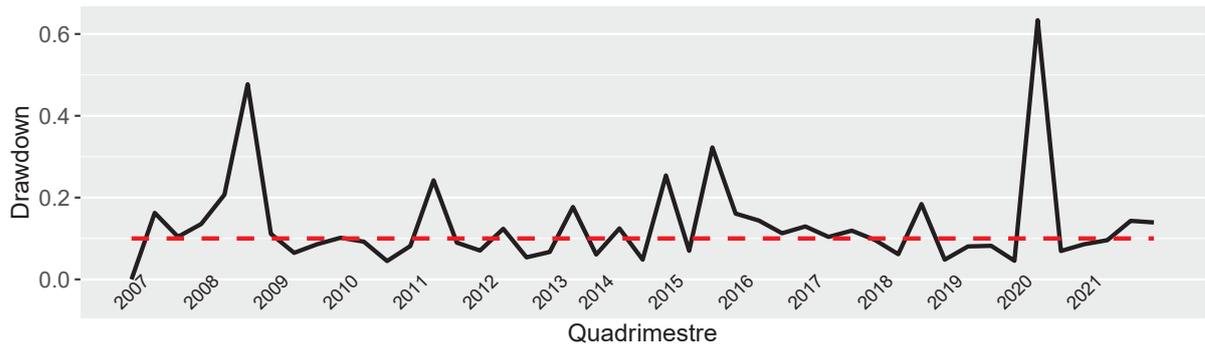
Fonte: Autoria própria.

A figura 11 exibe a cada quadrimestre a série de máximos *drawdowns* do Ibovespa. Observa-se que a maior parte dos *drawdowns* da série se apresentam acima do limite de 10% e que os dois maiores picos são referente as crises já citadas. O terceiro maior pico, no 1º quadrimestre de 2011, ocorreu devido ao anúncio do governo de corte de 5 bilhões no programa minha casa, minha vida, fazendo com que os principais papéis do setor imobiliário tivessem uma queda de 2% a 5% (GLOBO, 2011).

FIGURA 11 – Série de máximo *drawdown* do Ibovespa.

Fonte: Autoria própria.

Na figura 12 nota-se a série de máximo *drawdowns* quadrimestrais para uma carteira com capital investido igualmente em cada ativo que a compõem, ou seja, $x_i = 1/39$, $i = 1, 2, \dots, 39$, ao longo dos anos.

FIGURA 12 – Série de máximo *drawdown* da carteira com pesos iguais.

Fonte: Autoria própria.

O retorno acumulado no período de 15 anos com rebalanceamento quadrimestral para a carteira foi de 2,08 e o drawdown máximo de 40,51%, o Ibovespa teve um retorno de 1,42 com *drawdown* máximo de 57,01% e considerando uma carteira em que cada ativo possui o mesmo peso, obteve-se um retorno de 2,02 e *drawdown* máximo de 63,37% no mesmo período.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese, foi abordada a modelagem de otimização de carteira com minimização da medida de risco CVaR misto aplicado a série histórica de *drawdowns*. O CVaR misto mede a perda média esperada da carteira quando ocorre uma perda maior que o VaR para um conjunto de perfil de risco definido. Já o *drawdown* é uma função de perda que calcula a variação do maior pico a vale do retorno da carteira, sendo uma função coerente para análise de risco que fornece informação da volatilidade dos dados, apropriado para períodos de crises financeiras.

Modelos de otimização de carteira, em sua maioria, envolvem grandes volumes de dados e uma grande quantidade de parâmetros financeiros, além de necessitar de agilidade na tomada de decisão por se tratarem de um contexto dinâmico, e por isso precisam de uma maior velocidade de processamento, sendo assim, modelos de otimização de carteira mais eficientes são sempre desejados.

Isso posto, neste trabalho, foram apresentados modelos mais ágeis computacionalmente da modelagem de um problema de otimização de carteira com a medida de risco CVaR aplicada a função de perda *drawdown* com base no modelo apresentado no estudo de estudo de Chekhlov, Uryasev e Mi. Zabarankin (2005), e analisou-se o comportamento do modelo em períodos de crise e não crise no cenário brasileiro comparando-o com o índice Ibovespa.

É importante salientar que o estudo de Chekhlov, Uryasev e Mi. Zabarankin (2005) apresenta um modelo linear e o resultado é aplicado a um conjunto de ativos de um fundo de investimento, enquanto que os novos modelos apresentados nesta tese são suaves e não lineares aplicados a uma carteira de ativos brasileiros, além disso, os novos modelos apresentam uma menor quantidade de restrições.

Durante o trabalho foi visto que alguns dos novos modelos mostraram-se aceitáveis como alternativas ao modelo original (3.1) e todos apontaram eficiência computacional quando comparadas a este. Em questões de risco, observa-se na Figura 5 que a carteira produz menores *drawdowns* que o índice Ibovespa. Para a rentabilidade da carteira, é possível determinar o tamanho do retorno acumulado no modelo adicionando uma restrição de retorno ao problema.

Referente à relação retorno/risco (Figura 7), a carteira mostra-se mais eficiente em períodos de crise e cerca de 5 vezes mais eficiente em períodos de não crise quando comparada ao principal indicador de desempenho das ações negociadas na bolsa brasileira. Torna-se de interesse estudos de otimização de carteiras de investimentos aplicados ao cenário brasileiro; o Brasil é um dos principais países com número considerável de

publicações sobre o tema (MILHOMEM; DANTAS, 2020).

Os resultados obtidos mostram que a importância do uso do modelo de otimização de carteira com o CVaR misto na série de *drawdowns* se deve à sensibilidade deste à variabilidade do mercado e é possível montar um portfólio segundo o perfil do investidor, de acordo com a sua tolerância ao risco. Ainda, utilizar os novos modelos apresentados produz um ganho considerável quando há uma grande quantidade de ativos em um período maior de dias avaliados, como é o caso de corporações financeiras que trabalham com grande volume de dados. Salieta-se a necessidade de estudar modelos de otimização de carteira que consideram a medida de risco CVaR com *drawdown*, pois o mesmo é utilizado como um indicador de risco em gestão de investimentos de empresas, principalmente em condições de crise econômica.

A limitação deste estudo é a falta de dados públicos disponíveis para o período desejado para alguns ativos e que, por isso, não foram inclusos nas análises. As propostas de pesquisas futuras incluem acrescentar outras variáveis financeiras, aplicar e avaliar o modelo em outras composições de carteiras, incluindo carteiras globais, comparando-o com outros índices e/ou taxas do mercado financeiro, além de análises em cenários projetados e variações no perfil de risco.

REFERÊNCIAS

- BEZANSON, Jeff et al. Julia: A fresh approach to numerical computing. **SIAM Review**, SIAM, v. 59, n. 1, p. 65–98, 2017. DOI: 10.1137/141000671. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/10.1137/141000671>>.
- CHEKHLOV, A.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. Portfolio optimization with drawdown constraints. **Supply chain and finance**, World Scientific, p. 209–228, 2004.
- CHEKHLOV, A.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, Mi. Drawdown measure in portfolio optimization. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, World Scientific, v. 8, n. 01, p. 13–58, 2005.
- DUFFIE, D.; PAN, J. An overview of value at risk. **Journal of derivatives**, v. 4, n. 3, p. 7–49, 1997.
- DUNNING, Iain; HUCHETTE, Joey; LUBIN, Miles. JuMP: A Modeling Language for Mathematical Optimization. **SIAM Review**, SIAM, v. 59, n. 2, p. 295–320, 2017.
- GLOBO, O. **Bovespa defende alta em fevereiro, mas segue negativa em 2011**. Acessado em 08/10/2023. 2011. Disponível em: <<https://oglobo.globo.com/economia/bovespa-defende-alta-em-fevereiro-mas-segue-negativa-em-2011-2816877>>.
- GOLDBERG, L. R; MAHMOUD, O. Drawdown: from practice to theory and back again. **Mathematics and Financial Economics**, Springer, v. 11, n. 3, p. 275–297, 2017.
- IPOPT. **Ipopt Documentation**. Acessado em 01/04/2022. 2022. Disponível em: <<https://coin-or.github.io/Ipopt/>>.
- KROKHMAL, P.; PALMQUIST, J.; URYASEV, S. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. **Journal of risk**, Citeseer, v. 4, p. 43–68, 2002.
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MILHOMEM, D. A.; DANTAS, M. J. P. Analysis of new approaches used in portfolio optimization: a systematic literature review. **Production**, SciELO Brasil, v. 30, 2020.
- NASRI, Mostafa et al. Implementation of augmented Lagrangian methods for equilibrium problems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, Springer, v. 168, p. 971–991, 2016.
- ROCKAFELLAR, R Tyrrell; URYASEV, S. et al. Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of risk**, v. 2, p. 21–42, 2000.

SEGAL, Troy. **Common Methods of Measurement for Investment Risk Management**. Mai. 2022. Disponível em:

<<https://www.investopedia.com/ask/answers/041415/what-are-some-common-measures-risk-used-risk-management.asp>>.

YAHOO. **Yahoo finance**. Acessado em 08/08/2022. 2022. Disponível em:

<<https://finance.yahoo.com>>.

APÊNDICES

APÊNDICE A –

A.1 SENSIBILIDADE DO PARÂMETRO η

A Tabela 6 exibe os testes de valores realizados para a versão 1 do modelo (3.1), o tempo computacional e a diferença entre o CVaR misto obtido na versão 1 do modelo (3.1) e o CVaR misto do modelo original.

A função $f_1(x) = (x + \sqrt{x^2 + \eta})/2$ se aproxima de $f(x) = \max\{x, 0\}$ conforme η se aproxima de zero. Devido às limitações computacionais, o menor valor η para a carteira do nosso estudo foi de 2^{-14} , para valores menores o método diverge.

TABELA 6 – Sensibilidade do parâmetro η da versão 1 do modelo (3.1).

| η | CVaR misto | Tempo | Diferença |
|-----------|-----------------|-------|-----------|
| 2^{-15} | Método divergiu | - | - |
| 2^{-14} | 0,127 | 6,58 | 0,000 |
| 2^{-13} | 0,128 | 8,50 | 0,001 |
| 2^{-12} | 0,128 | 5,86 | 0,001 |
| 2^{-11} | 0,128 | 6,46 | 0,001 |
| 2^{-10} | 0,129 | 4,72 | 0,002 |
| 2^{-5} | 0,194 | 4,82 | 0,067 |