

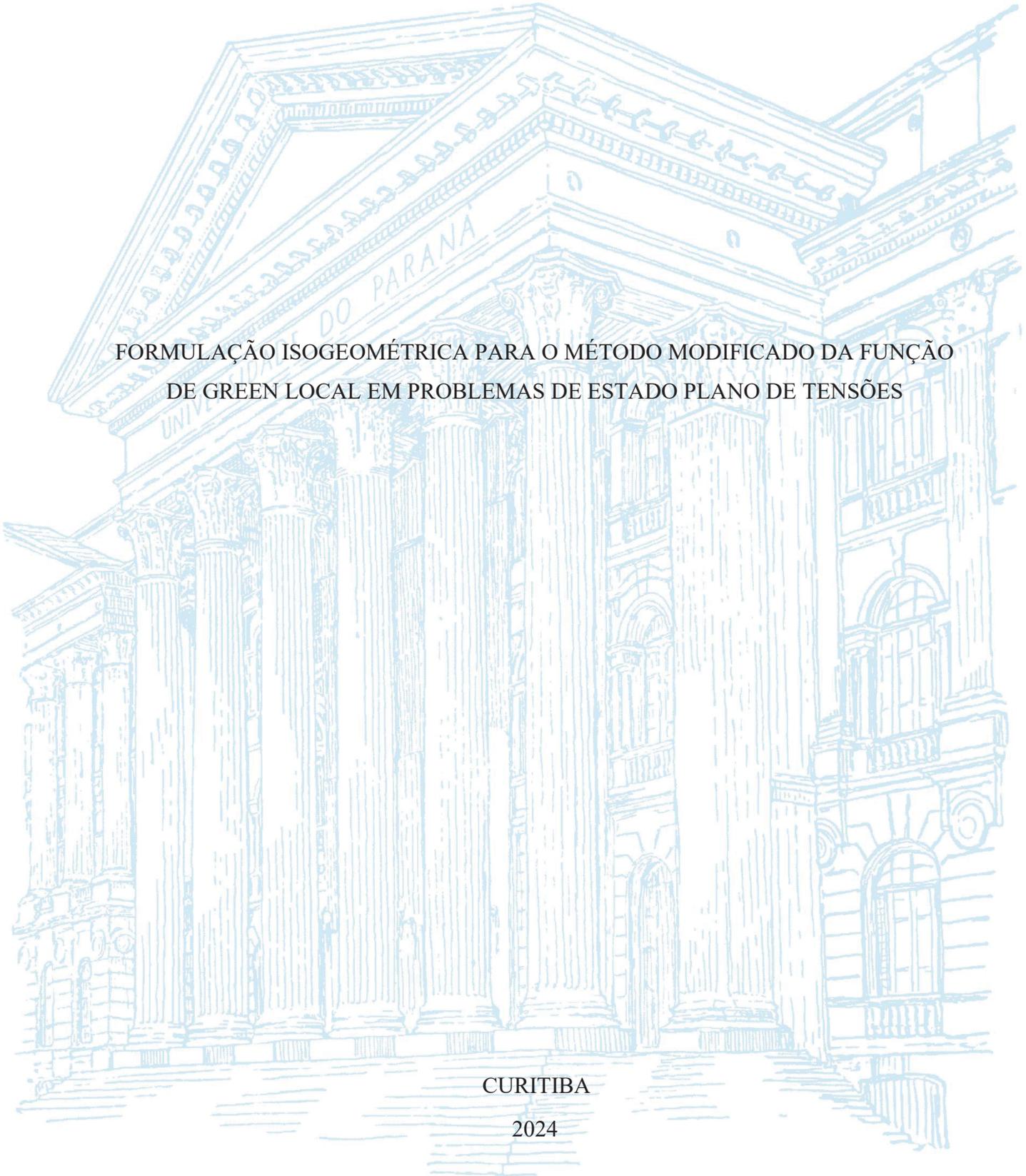
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BEATRIZ CORCHAK VEIGA

FORMULAÇÃO ISOGEOMÉTRICA PARA O MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO  
DE GREEN LOCAL EM PROBLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSÕES

CURITIBA

2024



BEATRIZ CORCHAK VEIGA

FORMULAÇÃO ISOGOMÉTRICA PARA O MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO  
DE GREEN LOCAL EM PROBLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSÕES

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Veiga, Beatriz Corchak

Formulação isogeométrica para o método modificado da função de Green local em problemas de estado plano de tensões. / Beatriz Corchak Veiga . – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado.

1. Green, Funções de. 2. Análise Isogeométrica. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Machado, Roberto Dalledone. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **BEATRIZ CORCHAK VEIGA** intitulada: **FORMULAÇÃO ISOGOMÉTRICA PARA O MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL EM PROBLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSÕES**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO DALLEONE MACHADO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 19 de Agosto de 2024.

Assinatura Eletrônica

20/08/2024 22:14:36.0

ROBERTO DALLEONE MACHADO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

21/08/2024 10:34:07.0

MARCELO PINTO DA SILVA

Avaliador Externo (VOLVO DO BRASIL)

Assinatura Eletrônica

20/08/2024 18:34:12.0

MATEUS RAUEN

Avaliador Externo (PROJEVIX ENGENHARIA E CONSULTORIA)

Assinatura Eletrônica

21/08/2024 12:45:19.0

HSU YANG SHANG

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

21/08/2024 09:52:15.0

MARCOS ARNDT

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. **Roberto Dalledone Machado**, pelo valioso auxílio, paciência e transmissão de vasto conhecimento ao longo desta jornada.

À minha família, especialmente meu pai, **Roberto Veiga**, pelo incentivo e apoio desde o início.

Ao meu namorado, **Paulo de Jesus**, pelo apoio emocional incondicional.

À minha amiga e colega de mestrado, **Elórah Diniz**, por compartilhar esta jornada, dividindo conquistas, desafios e descobertas.

Aos Prof. **Marcos Arndt** e colega **Ramon Macedo Corrêa**, pela contribuição essencial ao trabalho e esclarecimento de dúvidas que foram fundamentais para alcançar o objetivo proposto.

Ao colega **Mateus Rauen** pelo auxílio na compreensão da Análise Isogeométrica.

*“A mente que se abre a uma nova ideia  
jamais voltará ao seu tamanho original”*

(Albert Einstein)

## RESUMO

A combinação da análise numérica com a modelagem computacional, por meio de métodos numéricos, desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento de projetos em diversos campos da engenharia. O Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL) é uma técnica numérica híbrida que utiliza das projeções de Green para obter junto ao Método dos Elementos Finitos (MEF) uma solução fundamental para o Problema de Valor de Contorno (PVC). Isso recai em um sistema que pode ser resolvido pela maneira de resolução do Método dos Elementos de Contorno (MEC). No entanto, devido às suas operações computacionais extensivas, pode-se exigir recursos computacionais adicionais. Para solucionar esse problema, uma nova formulação que elimina a necessidade de obtenção das Projeções de Green, reduzindo o número de operações e abre novas oportunidades para a mecânica computacional foi introduzida. Essa aproximação pode ser estendida para algum outro método que utilize Galerkin e essa dissertação explora isso. Partindo das vantagens da Análise Isogeométrica (AIG), que se destaca pela integração geométrica do ambiente CAD (*Computer Aided Design*) e exatidão numérica por meio das análises de engenharia CAE (*Computer Aided Engineering*) através da utilização de funções NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*), a nova formulação do MMFGL é explorada através do conceito isogeométrico. Com isso, esse estudo investiga a implementação da AIG com a nova formulação do MMFGL substituindo-se a aproximação de domínio, tradicionalmente feita por elementos finitos, pela aproximação usando AIG. São explorados os refinamentos  $h$  e  $k$ , aspectos de discretização e implementação da integração entre AIG e MMGFL. São realizadas comparações com resultados obtidos por Análise Isogeométrica tradicional, Método dos Elementos Finitos e solução analítica. Os resultados demonstram o potencial da nova abordagem e são apresentadas suas vantagens e desvantagens na conclusão.

**Palavras-chave:** Análise Isogeométrica. Método Modificado da Função de Green Local. Estado Plano de Tensões.

## ABSTRACT

The combination of numerical analysis with computational modeling, through numerical methods, has played a fundamental role in the development of projects in multiple engineering disciplines. The Modified Local Green's Function Method (MLGFM) is a hybrid numerical technique that employs Green's projections to obtain, in conjunction with the Finite Element Method (FEM), a fundamental solution for the Boundary Value Problem (BVP). This leads to a system that can be solved using the Boundary Element Method (BEM) approach. However, due to its extensive computational operations, it may require additional computational resources. To address this issue, a new formulation that eliminates the need for Green's Projections, reducing the number of operations and opening new opportunities for computational mechanics, has been introduced. This approach can be extended to other methods that utilize Galerkin, and this dissertation explores this extension. Building on the advantages of Isogeometric Analysis (IGA), which is distinguished by the geometric integration of the CAD (Computer-Aided Design) environment and numerical accuracy through CAE (Computer-Aided Engineering) analyses using NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), the new formulation of MLGFM is explored through the isogeometric concept. Thus, this study investigates the implementation of IGA with the new formulation of MLGFM, replacing the domain approximation traditionally performed by finite elements with an approximation using IGA. Refinements of  $h$  and  $k$ , aspects of discretization, and the implementation of the integration between IGA and MLGFM are explored. Comparisons are made with results obtained from traditional Isogeometric Analysis, the Finite Element Method, and analytical solutions. The results demonstrate the potential of the new approach, and its advantages and disadvantages are discussed in the conclusion.

**Keywords:** Isogeometric Analysis. Modified Local Green's Function Method. Plane Stress.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- Discretização por (a) MEF e (b) AIG em contato deslizante entre corpos .....	20
FIGURA 2 - Discretização de um círculo por MEF e AIG.....	20
FIGURA 3- Funções de base B-Spline para o vetor de nós não uniforme e aberto: (a) $\Xi = \{0,0.25,0.5,0.75,1\}$ para grau $p = 0$ ; (b) $\Xi = \{0,0,0.25,0.5,0.75,1,1\}$ para grau $p = 1$ ; $\Xi = \{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$ para grau $p = 2$ .....	31
FIGURA 4- Continuidade para o vetor de nós não uniforme e aberto $\Xi = \{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$	32
FIGURA 5- Derivadas B-Splines de vetor de nós não uniforme e aberto .....	33
FIGURA 6- Curva B-spline cúbica e seu respectivo polígono de controle .....	34
FIGURA 7- Superfície B-Spline quadrática e seu respectivo polígono de controle.....	35
FIGURA 8- Exemplo de refinamento $h$ .....	36
FIGURA 9- Comportamento de polígono de controle de curva B-Spline com refinamento $h$ .....	37
FIGURA 10- Exemplo de refinamento $p$ .....	38
FIGURA 11- Comportamento de polígono de controle de curva B-Spline com refinamento $p$ .....	38
FIGURA 12 - Diferença entre refinamento $k$ e $p$ .....	39
FIGURA 13- Comportamento de polígono de controle de curva B-Spline com refinamento $k$ .....	40
FIGURA 14- Curvas NURBS cúbicas com mudança de peso e vetor de nós $\Xi = \{0,0,0,0,1/3,2/3,1,1,1,1\}$ .....	42
FIGURA 15- Patch único ilustrado por malha física e de controle e sua respectiva representação no espaço paramétrico.....	45
FIGURA 16- Espaço indicial das funções: $N1, 1$ e $N2, 2$ .....	46
FIGURA 17- Representação da numeração global das funções dos elementos $\Omega1$ e $\Omega2$ .....	47
FIGURA 18- Esquema de numeração global e local das funções NURBS .....	48
FIGURA 19- Representação da numeração local dos elementos $\Omega1$ e $\Omega2$ junto com a numeração global .....	49
FIGURA 20- Domínio de integração .....	49
FIGURA 21- Mapeamento.....	50
FIGURA 22 - Possibilidades de discretização do domínio em MMFGL .....	56
FIGURA 23- Aplicação do carregamento delta de Dirac no domínio (a) e no contorno (b) .....	57
FIGURA 24- Interpretação física do problema modificado auxiliar.....	60
FIGURA 25- Aproximação do domínio real por MEF, AIG e MEC.....	62
FIGURA 26 - Fluxograma de implementação computacional de AIG .....	72
FIGURA 27- Comparação de fluxograma de cálculo entre (a) MMFGL (b) e nova abordagem isogeométrica para o MMFGL.....	73

FIGURA 28 – Problema de placa em formato L.....	75
FIGURA 29 - Malha e condições de contorno de Elementos Finitos de placa L.....	76
FIGURA 30 - Malha isogeométrica inicial de placa L .....	77
FIGURA 31 - Malha isogeométrica de (a) domínio (b) e contorno após refinamento $h$ .....	78
FIGURA 32 - Pontos duplicados na malha de contorno para a placa "L" .....	78
FIGURA 33- Campo de deslocamentos em x (a) MMFGL – AIG (b) AIG (c) MEF.....	79
FIGURA 34- Campo de deslocamentos em y (a) MMFGL – AIG (b) AIG (c) MEF .....	79
FIGURA 35- Deslocamentos de x ao longo do contorno com $x = 1$ .....	80
FIGURA 36- Deslocamentos de y ao longo do contorno com $y = -1$ .....	81
FIGURA 37 - Viga engastada sob carregamento distribuído.....	82
FIGURA 38 - Malha e condições de contorno de Elementos Finitos de viga.....	83
FIGURA 39 - Malha de (a) terceiro grau (b) e sexto grau para a viga engastada.....	84
FIGURA 40 – Malha de domínio e contorno de viga .....	84
FIGURA 41 – Disposição de pontos de controle duplos de problema de viga.....	85
FIGURA 42 - Convergência de erro relativo entre o deslocamento máximo em y da viga.....	85
FIGURA 43 - Campo de deslocamentos $u_y$ para problema de viga através de (a) MMFGL – AIG e AIG pura (b) e MEF.....	86
FIGURA 44- Convergência de erro relativo entre tensões normais ( $\sigma_x$ ) mínimas e máximas da viga	87
FIGURA 45 - Campo de tensões normais ( $\sigma_x$ ) em (a) MMFGL – AIG e AIG pura (b) e MEF .....	87
FIGURA 46- Porção quadrada de placa infinita com furo circular sob tensão horizontal de tração ....	88
FIGURA 47- Dimensões e condições de contorno do modelo numérico de placa com furo.....	88
FIGURA 48 - Configuração da malha inicial da placa com furo.....	90
FIGURA 49 - Problema e geometria definida para a malha de contorno de problema de placa com furo .....	91
FIGURA 50 – (a) Malha de domínio e (b) malha de contorno com refinamento $h$ de problema de placa com furo .....	92
FIGURA 51- Polígono de controle de domínio para emprego do refinamento $k$ (a) NURBS quadráticas (b) NURBS cúbicas (c) NURBS quárticas .....	92
FIGURA 52 - Comparação entre MMFGL – AIG e AIG com o refinamento $h$ na norma de erro $L_2$ .	93
FIGURA 53 - Distribuição de tensão normal $\sigma_x$ (a) MMFGL – AIG; (b) AIG (c) solução analítica ..	94
FIGURA 54- Distribuição de tensão normal $\sigma_y$ (a) MMFGL – AIG (b) AIG (c) solução analítica ....	94
FIGURA 55 - Distribuição de tensão tangencial $\tau_{xy}$ (a) MMFGL – AIG; (b) AIG (c) solução analítica .....	94
FIGURA 56 - Campo de deslocamentos em x da placa com furo (a) MMFGL – AIG (b) AIG.....	95

FIGURA 57- Campo de deslocamentos em  $y$  da placa com furo (a) MMFGL – AIG (b) AIG..... 95

FIGURA 58 - Comparação entre MMFGL – AIG e AIG com o refinamento  $k$  na norma de erro **L2**.. 96

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1- Matriz de conectividade INC .....	46
TABELA 2- Matriz de conectividade IEN.....	49
TABELA 3 - Dados de formato L com continuidade <b>C1</b> .....	77
TABELA 4 – Valores de deslocamento em x ao longo da aresta $x = 1$ para placa “L” .....	80
TABELA 5 - Comparação de erro relativo para o deslocamento em x da placa “L” .....	81
TABELA 6 - Valores de deslocamento em y ao longo da aresta $x = 1$ para placa “L” .....	82
TABELA 7 - Comparação de erro relativo para o deslocamento em y da placa “L” .....	82
TABELA 8 - Pontos de controle da malha inicial da placa com furo.....	89
TABELA 9 - Pesos da malha inicial da placa com furo .....	90

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**AIG** Análise Isogeométrica

**CAD** *Computer Aided Design*

**CAE** *Computer Aided Engineering*

**GDL** Graus de Liberdade

**IGABEM** Isogeometric Analysis of the Boundary Element Method

**MEC** Método dos Elementos de Contorno

**MEF** Método dos Elementos Finitos

**MFG** Método da Função de Green

**MFGL** Método da Função de Green Local

**MMFGL** Método Modificado da Função de Green Local

**MMFGL-AIG** Nova Abordagem Isogeométrica do Método Modificado da Função de Green Local

**NEC** Número de Elementos de Contorno

**NURBS** *Non-Uniform Rational B-Splines*

**PVC** Problema de Valor de Contorno

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\delta$	Deslocamento
$\tilde{\Omega}^e$	Elemento pertencente ao domínio de integração
$\hat{\Omega}^e$	Elemento pertencente ao espaço paramétrico
$\tilde{N}_{i,j}(\xi, \eta)$	Produto tensorial de funções B-Splines
$\bar{t}_i$	Componentes do vetor tensão
$\hat{\mathbf{u}}^e$	Aproximação das funções tentativa elementar
$\bar{u}_i$	Deslocamentos prescritos
$\hat{\mathbf{w}}^e$	Aproximação das funções peso elementar
$\mathcal{L}^*$	Operador adjunto de $\mathcal{L}$
$\mathbb{R}^d$	Espaço dos números reais de ordem $d$
$\mathbb{R}^{d+1}$	Espaço dos números reais de ordem $d + 1$
$\Gamma_{t_i}$	Contorno de Dirichlet
$\Gamma_{u_i}$	Contorno de Neumann
$\tau_{xy}$	Tensor tangencial
$\tilde{\Omega}$	Domínio de integração
$\hat{\Omega}$	Domínio paramétrico
$\Omega_H$	Domínio aproximado
$\Omega^e$	Elemento pertencente ao espaço físico
$\mathbf{x}^{-1}$	Mapeamento entre o espaço físico e o espaço paramétrico
$B_i, B_{i,j}$	Pontos de controle
$C^{p-m}$	Continuidade de função B-Spline
$\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$	Matrizes jacobianas
$K'$	Matriz que envolve os coeficientes de $\mathcal{N}'$
$M_{j,q}(\eta)$	Função B-Spline a partir do vetor de nós $\mathfrak{H}$
$N_{i,p}(\xi)$	Função B-Spline a partir do vetor de nós $\mathfrak{E}$
$\mathbf{R}^e$	Funções NURBS elementar
$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$	Função NURBS racional de variáveis $\xi, \eta$
$R_i^p(\xi)$	Função NURBS racional de variável $\xi$
$\mathbf{f}_q^e$	Vetor de forças elementar de superfície

$f_i$	Força de corpo
$\mathbf{f}_p^e$	Vetor de forças elementar de volume
$k_i$	Constante real não nula
$n_{en}$	Número de funções com suporte no elemento
$\mathbf{u}^e$	Vetor de deslocamentos elementar
$\mathbf{u}_i$	Vetor de deslocamento
$u_x$	Deslocamento na direção normal x
$u_y$	Deslocamento na direção normal y
$w_i$	Função peso
$w_i, w_{i,j}$	Pesos relativos aos pontos de controle
$\mathbf{B}^e$	Matriz contidas as derivadas parciais NURBS elementar
$\mathbf{G}^{CQ}$	Tensor obtido com as projeções de $\mathbf{G}_c(Q)$
$\mathbf{G}^{Cq}$	Tensor obtido com as projeções de $\mathbf{G}_c(q)$
$\mathbf{G}^{DQ}$	Tensor obtido com as projeções de $\mathbf{G}_D(Q)$
$\mathbf{G}^{Dq}$	Tensor obtido com as projeções de $\mathbf{G}_D(q)$
$\mathbf{G}_c(\cdot), \mathbf{G}_d(\cdot)$	Projeções das funções de Green
$\mathbf{u}_C$	Vetor de deslocamentos ou potenciais de contorno
$\mathbf{u}_D$	Vetor de deslocamentos ou potenciais de domínio
$\mathcal{D}^*$	Operador adjunto de $\mathcal{D}$
$\mathcal{N}'$	Operador auxiliar
$\mathcal{N}^*$	Operador adjunto de $\mathcal{N}$
$\Phi^{-1}$	Mapeamento entre o espaço paramétrico e o domínio de integração
$\eta_j$	Nó pertencente ao vetor de nós $\mathfrak{H}$
$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$	Coordenadas paramétricas do domínio de integração
$\xi_i$	Nó pertencente ao vetor de nós $\mathcal{E}$
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões de Cauchy
$\sigma_x$	Tensão na direção normal de x
$\sigma_y$	Tensão na direção normal de y
A	Área total transversal
$\mathbf{b}$	Vetor generalizado de forças de corpo ou fonte no domínio

$\mathbf{G}(\cdot, \cdot)$  Função de Green  
 $\mathfrak{H}$  Vetor de nós na direção  $\eta$   
 INC, IEN Matrizes de conectividade  
 $L$  Comprimento  
 $\mathcal{L}$  Operador diferencial  
 $\varepsilon$  Coeficiente de deformação  
 $\Omega$  Domínio físico  
 $\Gamma$  Contorno de um domínio  $\Omega$   
 $\mathbf{f}$  Vetor de forças de superfícies de contorno  
 $\mathbf{x}$  Mapeamento entre o espaço paramétrico e o espaço físico  
 $A$  Número global das funções  
 $C(\xi)$  Curvas B-Spline/NURBS  
 $E$  Módulo de Young  
 $J$  Jacobiano  
 $K, K^e$  Matriz de rigidez  
 $L$  Matriz de operadores diferenciais  
 $P, Q$  Pontos no domínio  $\Omega$   
 $S(\xi, \eta)$  Superfícies B-Spline/NURBS  
 $W(\xi), W(\xi, \eta)$  Soma ponderada de B-Splines e derivadas B-Splines  
 $a$  Número local das funções  
 $e, \Omega_e$  Elemento  
 $f, f^e$  Vetor de forças  
 $m$  Multiplicidade do vetor de nós  
 $n_j$  Direção normal a um ponto  
 $n, m$  Número de funções para as direções paramétricas  $\xi, \eta$   
 $nel$  Número de elementos  
 $p, q$  Grau das funções B-Splines para as direções paramétricas  $\xi, \eta$   
 $p, q$  Pontos no contorno  $\Gamma$   
 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$  Matrizes do MMFGL  
 $\mathbf{D}$  Matriz constitutiva  
 $\mathbf{I}$  Tensor identidade

$\mathcal{D}$	Operador de Dirichlet
$\mathcal{N}$	Operador de Neumann
$\Phi$	Mapeamento entre o domínio de integração e o espaço paramétrico
$\varepsilon$	Matriz de deformação
$E$	Vetor de nós na direção $\xi$
$\Phi(p)$	Funções de interpolação no contorno
$\Psi(Q)$	Funções de interpolação no domínio
$\delta(.,.)$	Distribuição delta de Dirac
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\xi, \eta$	Coordenadas paramétricas no espaço paramétrico
$v$	Estado auxiliar
$\sigma$	Tensor de Cauchy
$\nabla(.)$	Operador gradiente

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>19</b>
1.1 OBJETIVO.....	21
1.1.1 Objetivos específicos.....	21
1.2 JUSTIFICATIVA.....	22
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	22
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>24</b>
2.1 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA .....	24
2.2 MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL .....	26
<b>3 REVISÃO TEÓRICA</b> .....	<b>30</b>
3.1 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA .....	30
3.1.1 B-Splines .....	30
3.1.2 Refinamentos.....	35
3.1.3 NURBS .....	40
3.1.4 Principais conceitos da AIG .....	43
3.1.5 AIG aplicada à elasticidade linear.....	51
3.1.6 RECUPERAÇÃO DE TENSÕES.....	54
3.2 MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL .....	55
3.2.1 Abordagem .....	56
3.2.2 Aproximação das equações integrais .....	61
3.2.3 Determinação das projeções de Green .....	65
3.2.4 Implementação das matrizes e resolução do sistema de equações .....	67
3.3 NOVA FORMULAÇÃO DO MMFGL.....	69
3.3.1 Formulação.....	69
<b>4 METODOLOGIA – PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS</b> .....	<b>71</b>
4.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E DADOS DE ENTRADA .....	71
4.2 DISCRETIZAÇÃO .....	71
4.3 FLUXO DE CÁLCULO .....	72
<b>5 RESULTADOS</b> .....	<b>75</b>
5.1 PLACA EM FORMATO L.....	75
5.1.1 ASPECTOS DE DISCRETIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO.....	76
5.1.2 RESPOSTAS NUMÉRICAS .....	79
5.2 VIGA SOB FLEXÃO .....	82

5.2.1 ASPECTOS DE DISCRETIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO .....	83
5.2.2 RESPOSTAS NUMÉRICAS .....	85
5.3 PLACA INFINITA COM FURO CIRCULAR.....	88
5.3.1 ASPECTOS DE DISCRETIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO .....	89
5.3.2 RESPOSTAS NUMÉRICAS .....	92
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>97</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>99</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A simulação numérica tem se destacado como uma tecnologia fundamental em aplicações científicas e industriais. O contínuo avanço da tecnologia e dos computadores modernos, assim como novas linguagens de programação, resultaram em um aumento significativo no poder de processamento e na capacidade de memória. Apesar desses avanços, ainda é comum encontrar limitações em termos de memória ou tempo de processamento quando os modelos se tornam mais complexos e abrangentes. (VUONG, 2012).

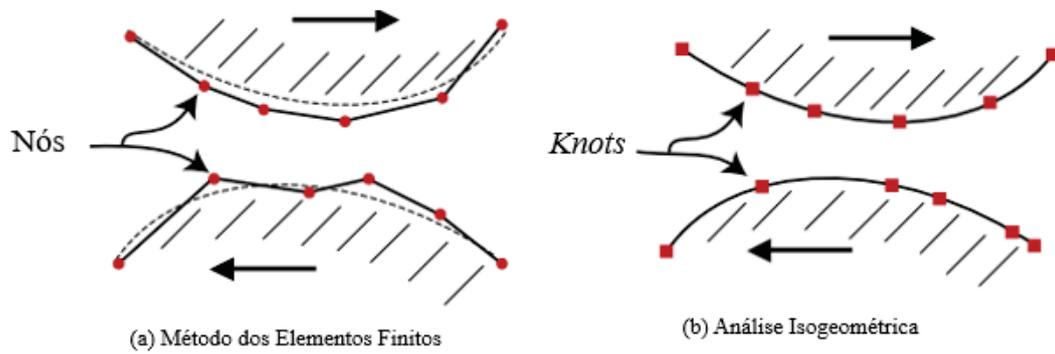
Nesse contexto, a análise numérica desempenha um papel crucial, tanto do ponto de vista teórico quanto prático ao buscar a eficiência na utilização dos recursos durante as simulações. O objetivo é alcançar resultados precisos e confiáveis com o menor consumo possível de recursos computacionais. Assim, aprimorar a eficiência e a viabilidade das simulações numéricas é uma das tarefas-chave da análise numérica para atender às crescentes demandas da sociedade.

O Método dos Elementos Finitos (BATHE, 2006; HUGHES, 2000; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005; REDDY, 2005; AZEVEDO, 2003) é amplamente empregado e difundido entre engenheiros e cientistas. No processo convencional de projeto de estruturas, é comum o uso de *softwares* comerciais para a análise numérica. Por trás destes, o usuário se depara com a análise CAE (*Computer Aided Engineering*) a qual pode ser integrada à sistema CAD (*Computer Aided Design*), permitindo a construção e modelagem dos modelos que serão posteriormente analisados.

A formulação clássica do MEF utiliza funções de interpolação polinomiais para aproximar tanto o fenômeno analisado quanto a geometria. No entanto, essas funções normalmente diferem das utilizadas em ambiente CAD para gerar a geometria original da estrutura, o que pode resultar em uma etapa adicional na compatibilização do modelo. Esse processo pode levar a um consumo significativo de tempo, com cerca de 60% do tempo total sendo utilizado para a criação da geometria adequada para análise, restando apenas 20% do tempo para a análise propriamente dita. Os outros 20% são usados para a construção do modelo sólido e da malha de elementos finitos (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009).

De acordo com Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009), além do consumo significativo de tempo para compatibilização, o MEF pode apresentar problemas de discretização em análises mais sensíveis devido à geração de uma geometria "aproximada" pelos elementos finitos. Essa discrepância pode resultar em erros numéricos em problemas sensivelmente dependentes da geometria, impactando diretamente nas respostas obtidas. Exemplos disso incluem a análise de flambagem de cascas, sensível a imperfeições geométricas, e o contato deslizante entre corpos, como ilustra a Figura 1.

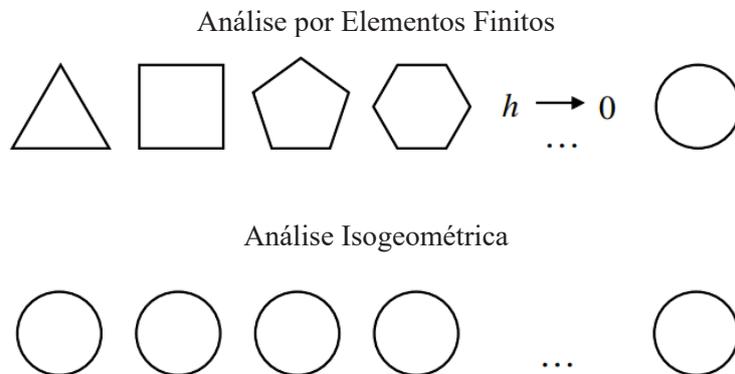
FIGURA 1- Discretização por (a) MEF e (b) AIG em contato deslizante entre corpos



Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs, 2009

Visando buscar uma alternativa e estreitar a relação entre CAD e CAE, Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) propuseram um novo método numérico intitulado Análise Isogeométrica (AIG), o qual permite a discretização de um meio contínuo através de funções de aproximação empregadas tradicionalmente em ambiente CAD, conhecidas como NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*). Essas funções são utilizadas tanto para descrever a geometria exata do problema quanto para aproximar as incógnitas do fenômeno analisado. A integração direta entre modelagem geométrica e análise numérica confere uma eficiência geométrica singular ao método, tornando-o aplicável em contextos e geometrias diversas. Na Figura 2 é comparada a representação de um círculo por Elementos Finitos e pela Análise Isogeométrica. Observa-se que, enquanto no MEF a geometria do círculo é uma aproximação que se torna mais precisa com o refinamento da malha, na AIG a geometria exata é mantida em todas as etapas, independente do refinamento, desde que utilizado um número adequado de pontos de controle.

FIGURA 2 - Discretização de um círculo por MEF e AIG



Fonte: Adaptado de Cottrell et al., 2006

Ao abordar os métodos numéricos mais convencionais, é indispensável mencionar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984; BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992), que possibilita a redução de uma unidade na dimensionalidade do problema e dispensa a necessidade de discretização em todo o domínio. No entanto, essa simplificação completa nem sempre é trivial, pois o método depende da definição da solução fundamental associada. Além disso, o MEC apresenta como vantagem a representação exata das quantidades físicas do problema por meio de suas equações integrais, em contraste com o MEF, por exemplo (FUDOLI, 1999).

Buscando integrar as vantagens de mais de um método numérico, o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL), introduzido por Barcellos e Silva (1987) e Silva (1988) trata-se de uma abordagem híbrida que combina as vantagens do MEF e MEC, utilizando os Elementos Finitos para aproximar, de forma local, as "projeções" da função de Green no espaço gerado pelos elementos finitos e, em seguida, empregar os valores nodais dessas projeções, que são equivalentes a uma "solução fundamental", para resolver um sistema de integrais de contorno através do MEC. O sistema de equações resultante, tanto no domínio quanto no contorno, envolve integrais suficientemente regulares, que podem ser resolvidas por técnicas convencionais de integração numérica. (MACHADO, 1992).

De acordo com Corrêa, Arndt e Machado (2023), embora o MMFGL apresente diversas aplicações e vantagens, sua formulação original pode demandar um alto esforço computacional devido à necessidade de resolver múltiplos sistemas de equações no domínio e no contorno. Nesse sentido, foi proposta uma nova formulação que evita a obtenção explícita das projeções de Green, enquanto preserva as propriedades originais do método.

Este trabalho incorpora a nova abordagem de MMFGL (CORRÊA; ARNDT; MACHADO, 2022) (CORRÊA; ARNDT; MACHADO, 2023) combinada à AIG, explorando aspectos de discretização, implementação, convergência e comparação com Análise Isogeométrica Tradicional em problemas de Estado Plano de Tensões.

## 1.1 OBJETIVO

O objetivo principal deste trabalho é explorar o emprego da Análise Isogeométrica em nova abordagem do Método Modificado da Função de Green Local em problemas de Estado Plano de Tensões da elasticidade linear. Para alcançar o objetivo mencionado, os objetivos específicos são propostos:

### 1.1.1 Objetivos específicos

Estudar a aplicação da Análise Isogeométrica e do Método Modificado da Função de Green Local no contexto da elasticidade linear.

Implementar a AIG através de rotina computacional em linguagem Python.

Implementar a integração da AIG à nova formulação de MMFGL.

Aplicar abordagem isogeométrica no MMFGL em problemas de Estado Plano de Tensões.

Explorar aspectos de implementação.

Avaliar a precisão e taxa de convergência por meio de comparativo entre: MEF, AIG e soluções analíticas.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A Análise Isogeométrica tem emergido como uma abordagem promissora para resolver problemas físicos governados por equações diferenciais em diversas áreas, abrangendo desde a engenharia estrutural, aeronáutica e naval até a engenharia biomédica, arquitetura e animações gráficas. Sua capacidade de utilizar as mesmas funções de base empregadas em ambientes CAD, possibilitando uma representação geométrica exata, torna-a altamente eficiente e versátil.

O uso de abordagens híbridas, como o Método Modificado da Função de Green Local, combina vantagens de métodos já popularmente empregados na comunidade científica e industrial, tornando-se uma ferramenta promissora para superar as dificuldades encontradas por cada um deles de forma isolada.

Dada a crescente busca por soluções que priorizem a performance otimizada dos processos e a economia de materiais no campo da engenharia e ciências aplicadas, o aprimoramento dos métodos numéricos utilizados para a modelagem computacional assume um papel de destaque. Nesse sentido, novas abordagens têm o potencial de apresentar soluções inovadoras e economicamente viáveis.

## 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação de mestrado está estruturada em seis capítulos. O Capítulo 2 tem como propósito realizar uma revisão abrangente de trabalhos acadêmicos e pesquisas científicas relevantes, focando nos métodos numéricos em estudo: Análise Isogeométrica e Método Modificado da Função de Green Local. Essa revisão aborda as principais aplicações e resultados obtidos em trabalhos anteriores, fornecendo uma base sólida para a investigação em questão.

O Capítulo 3 apresenta os fundamentos teóricos necessários para compreensão e utilização dos respectivos métodos. Inicialmente são apresentados os conceitos fundamentais da AIG, fornecendo uma base teórica sólida para a utilização do método. Aspectos como a construção de funções de base, o refinamento de malhas e outras técnicas específicas são abordados para melhor compreensão da sua aplicação em problemas de elasticidade linear. Dentro do contexto da elasticidade linear, o capítulo

explora as técnicas de integração e outros conceitos essenciais para a aplicação da Análise Isogeométrica. Isso inclui a descrição das formulações matemáticas relevantes para a obtenção das soluções numéricas em problemas de elasticidade linear usando a Análise Isogeométrica. Também é descrita a técnica de recuperação de tensões com pontos superconvergentes em técnica específica para o método.

Na sequência, o Capítulo 3 discorre sobre o Método Modificado da Função de Green Local, se debruçando sobre sua formulação abstrata, técnicas de integração, obtenção das projeções de Green e outros principais aspectos do método, abrangendo também conexão do contexto isogeométrico devido a sua semelhança de tratamento em técnicas de integração com o Método dos Elementos Finitos. Em seguida, é apresentada a nova formulação com redução do sistema de equações para o MMFGL com uso do Método dos Elementos Finitos e os detalhes para a nova abordagem no contexto isogeométrico.

O Capítulo 4 detalha a metodologia adotada neste trabalho, enfocando os aspectos relacionados à implementação da Análise Isogeométrica pura, Método Modificado do Função de Green Local e nova abordagem, englobando as duas técnicas em estudo. Já o Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos junto com aspectos de discretização e implementação para cada problema, considerando um Estado Plano de Tensões. As respostas são analisadas com comparativo e/ou solução analítica. Por fim, o Capítulo 6 contempla as considerações finais deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA

Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) propuseram, inicialmente, a concepção de um método computacional que utiliza funções base geradas por NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) para construir um modelo geometricamente exato na análise de problemas governados por equações diferenciais parciais. Esse conceito central compartilha características de formulação para obtenção de equações governantes com o Método dos Elementos Finitos (BATHE, 2006; HUGHES, 2000; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005; REDDY, 2005; AZEVEDO, 2003), e Métodos sem Malha (*meshless*) (BELYTCHKO; LU & GU, 1994) e tem o intuito de melhorar a representação da geometria nas análises computacionais, além de estreitar a ligação entre os sistemas CAD e CAE.

A partir do trabalho inicial de Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), vários estudos subsequentes têm sido publicados, explorando essa abordagem e demonstrando sua aplicabilidade em diferentes contextos. Mais tarde esses conceitos foram agrupados em livro (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009).

Em Cottrell et al. (2006), apresentou-se pela primeira vez a aplicação da AIG em problemas de vibração estrutural, abrangendo barras, vigas de Euler-Bernoulli, membranas, placas e sólidos tridimensionais. Os resultados desse estudo evidenciaram seu comportamento superior em comparação ao uso dos polinômios clássicos de MEF e destacaram a robustez e a precisão do refinamento  $k$ .

Ainda na área de vibração estrutural, Schojaee et al. (2012) abordaram a análise de vibração livre de placas usando a aproximação isogeométrica. Posteriormente, Rauen (2014) realizou um estudo comparativo entre o MEF clássico, Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) e outros métodos enriquecidos junto a AIG tradicional para analisar problemas envolvendo barras, vigas, treliças e chapas. Os resultados obtidos demonstraram que a AIG apresentou uma maior porcentagem de frequências precisas para o problema de barras e vigas, indicando erros mais elevados apenas nas últimas frequências da amostragem. Para as treliças, não se comparou soluções analíticas, mas os resultados se assemelharam ao comportamento de barras e vigas com erros mais elevados apenas nas últimas frequências. Mais recentemente, Rauen (2020) e Rauen, Machado e Arndt (2020) desenvolveram uma técnica adaptativa para a AIG, denominada PU-AIG, a qual apresenta uma formulação enriquecida voltada para a análise dinâmica estrutural de elementos bidimensionais e unidimensionais. De maneira geral, os resultados obtidos elevaram os resultados da AIG pura em termos de acurácia e taxa de convergência, enfatizando ao se tratar do refinamento  $h$  em barra unitária e se aproximando de soluções analíticas ou de referência. Esta técnica se

mostrou competitiva com as formulações do MEEG para a dinâmica estrutural, apresentando resultados melhores em problema de barra, embora apresentasse resultados menos precisos para barras heterogêneas e problema de estado plano de tensões.

As propriedades fundamentais da AIG relacionadas ao refinamento foram exploradas em estudos conduzidos por Cottrell, Hughes e Reali (2007). Estes estudos concentraram-se principalmente no refinamento  $k$ , uso de múltiplos patches para construção de malhas mais complexas e técnica para refinamento local. Além disso, foram analisadas as principais semelhanças e diferenças entre o MEF e a AIG no contexto dessas propriedades de refinamento. Posteriormente, essas propriedades foram investigadas por Beirão da Veiga et al. (2011), utilizando uma abordagem matemática em um estudo teórico. O foco desse estudo foi a aproximação por NURBS mais suaves do que a continuidade  $C^0$ . Por meio desse estudo, foram obtidos resultados sobre estimativas de erro mais precisas.

Com o intuito de otimizar o processo de integração e reduzir o tempo de processamento, Hughes, Reali e Sangalli (2010) iniciaram investigações sobre regras de quadratura eficientes, propondo uma abordagem otimizada como alternativa à quadratura de Gauss convencional, que utiliza  $p + 1$  pontos em cada subdomínio contido no suporte. Segundo os autores, essa abordagem tradicional resulta em um desempenho ineficiente. O estudo introduz a chamada “regra do ponto médio”, que sugere que regras otimizadas devem envolver um número de pontos aproximadamente equivalente à metade do número de graus de liberdade, ou, de forma equivalente, metade do número de funções base do espaço em análise. Os resultados demonstraram uma redução na quantidade de pontos necessários para realizar a integral analítica, além de melhorias em comparação à quadratura convencional. No entanto, o algoritmo ainda requer um significativo esforço computacional, especialmente para polinômios de alta ordem e um grande número de subintervalos, além da necessidade de recomputar os pesos e pontos de controle para cada novo conjunto de subdivisões.

De acordo com Nguyen et al. (2015), estudos também foram conduzidos em relação a problemas de contato. Foi possível constatar que a presença de superfícies facetadas, quando utilizadas discretizações convencionais da geometria, pode resultar em saltos e oscilações nas respostas de tração, especialmente em malhas que não estão suficientemente refinadas. As vantagens e aplicações do uso das funções base NURBS nesses tipos de problemas foram discutidas em (TEMIZER; WRIGGERS; HUGHES, 2011; TEMIZER, 2014; JIA, 2011; MATZEN; CICHOSZ; BISCHOFF, 2013).

Introduziu-se o conceito isogeométrico no contexto do MEC como uma nova abordagem conhecida como IGABEM (Isogeometric Analysis of the Boundary Element Method). Nesse método, as NURBS são empregadas para a discretização do contorno, tendo suas origens em estudos voltados

para a resistência do casco de navios (BELIBASSAKIS et al., 2009) e à análise elastostática (SIMPSON et al., 2012; GU; ZHANG; SHENG, 2011). Posteriormente, em estudos conduzidos por Simpson et al. (2012) e Simpson et al. (2013), foram descritos detalhadamente os aspectos de implementação, enfatizando a naturalidade dessa combinação, uma vez que tanto a representação de fronteira NURBS quanto o MEC lidam exclusivamente com quantidades na fronteira. Os resultados obtidos demonstraram uma melhoria significativa na precisão em relação à implementação padrão do MEC com funções de base quadráticas. Recentes estudos exploram uma formulação isogeométrica de contorno (Teixeira, Cordeiro e Monteiro, 2023a; Teixeira, Cordeiro e Monteiro, 2023b) que utiliza bases B-Spline independentes para campos de contorno desconhecidos, aproveitando a independência entre a geometria e os campos de contorno. Essa abordagem resulta em uma formulação de matriz única, que melhora os requisitos de armazenamento e permite estratégias de refinamento sem alterações na geometria.

Na Universidade Federal do Paraná, além dos trabalhos e publicações de Rauen (2014), Rauen (2020), Rauen, Machado e Arndt (2017) e Rauen, Machado e Arndt (2020) no contexto da Análise Isogeométrica, Almeida (2017) explorou a aplicação da abordagem isogeométrica baseada nas T-Splines em problemas de elasticidade bidimensional, analisando as vantagens e desvantagens dessa abordagem em cada caso específico. No estudo de Zúñiga (2019), os polinômios de Lagrange foram substituídos por NURBS para o cálculo de estruturas tipo casca fina, demonstrando que os resultados obtidos pela AIG apresentaram maior precisão e taxa de convergência em comparação com os resultados por Elementos Finitos. Por fim, Fakhye (2017) incorporou a AIG na análise dinâmica de barragens, utilizando formulação multi-patch. Além disso, o autor apresentou aplicações da AIG em problemas elastostáticos bidimensionais e respostas dinâmicas em vibrações livres e forçadas de barragens, tanto com quanto sem modelagem do subsolo, destacando a capacidade da AIG em solucionar problemas relacionados à análise de vibrações em barragens e outras estruturas.

## 2.2 MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL

O Método da Função de Green (MFG) é uma técnica matemática empregada na resolução de sistemas de equações diferenciais. No entanto, sua aplicação está condicionada à determinação da Função de Green, o que nem sempre é uma tarefa fácil quando se trata de problemas de grande escala. Devido a essa dificuldade, é comum considerar o MFG como um método sofisticado e de acesso limitado a engenheiros e cientistas (GREENBERG, 1971).

A fim de contornar essa limitação, Burns (1975) propôs o Método do Balanço de Corrente Parcial para resolver problemas de difusão de nêutrons, utilizando a Função de Green em um nível local e aplicando a discretização por meio do Método de Resíduos Ponderados. Embora as aplicações tenham sido restritas a geometrias simples, os resultados obtidos foram promissores em comparação

com os Métodos das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos. O método foi aplicado a problemas unidimensionais com soluções analíticas disponíveis para as funções de Green, bem como a problemas multidimensionais em que as funções de Green foram construídas como uma combinação de funções unidimensionais.

Posteriormente, seguindo um tratamento análogo, o método foi aplicado a problemas de condução de calor e fluxo de fluidos, recebendo o nome de Método da Função de Green Local (MFGL) (HORAK; DORNING, 1977; HORAK, 1980). O procedimento de discretização utilizado pelos autores é semelhante ao Método dos Volumes Finitos e apresentou bons resultados para as variáveis primárias (deslocamentos, potenciais, rotações, ...) e secundárias (tensões, deformações, fluxos, ...). Apesar dos bons resultados e do desempenho computacional excepcional apresentados pelo MFGL, sua aplicabilidade era limitada a geometrias simples, além de estar sujeito a uma forte dependência de parâmetros devido à sua formulação compacta e à presença de singularidades fracas. Além disso, a determinação da Função de Green para cada aplicação era uma das principais restrições enfrentadas.

Para superar esses desafios, Barcellos e Silva (1987) e Silva (1988) propuseram modificações na formulação original do MFGL, resultando no desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL). No MMFGL, as matrizes do sistema de equações integrais são determinadas diretamente, eliminando a necessidade do conhecimento explícito da Função de Green. Para isso, o método utiliza o MEF no domínio para gerar projeções discretas da Função de Green, as quais correspondem às soluções fundamentais e serão posteriormente aplicadas no MEC. Ao utilizar técnicas de discretização do MEF e MEC, no domínio e no contorno, respectivamente, o MMFGL mantém a formulação compacta do MFGL e lida com as singularidades fracas. Essa abordagem permite que o MMFGL apresente uma eficiência computacional significativa, combinando as vantagens do MEF e do MEC para resolver problemas de forma mais precisa e efetiva.

Inicialmente, Barcellos e Silva (1987) empregaram o método para a análise de problemas envolvendo membranas elásticas governadas pela equação de Poisson. Posteriormente, a formalização matemática do MMFGL foi apresentada por Silva (1988), o qual aplicou o método não somente a membranas, mas também a problemas de barras e vigas. A abordagem utilizada pelos autores consistia na adoção de uma célula (ou subregião) para cada elemento da malha de MEF, seguindo uma abordagem denominada "multi-celular/uni-elemento". Nessa abordagem, a célula de Green se fundia intrinsecamente com o próprio elemento finito, englobando seu contorno.

Mais tarde, Barbieri e Barcellos (1991a) desenvolveram a ideia de adotar uma única célula composta por vários elementos finitos (uni-celular/multi-elemento) na análise de potencial. Essa abordagem tinha como vantagem a redução do custo computacional do MMFGL. No entanto, a superconvergência das variáveis estava limitada apenas ao contorno da célula.

Após isso, Barbieri e Barcellos aplicaram o MMFGL na análise de placas isotrópicas, utilizando o modelo de Mindlin (BARBIERI, 1992; BARBIERI; BARCELLOS, 1993a). Posteriormente, o MMFGL foi aplicado para resolver problemas de potenciais em campos não homogêneos (BARBIERI, 1992; BARBIERI; BARCELLOS, 1993b). Além disso, o método foi utilizado para tratar problemas de potencial singular (BARBIERI; BARCELLOS, 1991; BARBIERI, 1992) e outros problemas relacionados a potenciais e problemas da elastostática (BARBIERI, 1992). As análises foram realizadas utilizando elementos lineares (4 nós nos elementos de domínio e 2 nós nos elementos de contorno) e elementos quadráticos (9 nós nos elementos de domínio e 3 nós nos elementos de contorno). Os resultados obtidos destacaram a excelente convergência das variáveis primárias em todos os nós da malha auxiliar de MEF, assim como a convergência das variáveis secundárias nos nós da malha de contorno.

Com o intuito também de investigar problemas com materiais compostos pelo MEC, aplicaram o MMFGL em placas ortotrópicas laminadas e trabalhando com elementos quadráticos, comprovando boa precisão do método, mesmo com malhas grosseiras. (MACHADO, 1992; MACHADO; BARCELLOS, 1992; MACHADO et al., 1994).

Barbieri, Muñoz e Machado (1998) estabeleceram os fundamentos matemáticos do Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL). Neste trabalho, que está dividido em duas partes, os autores apresentam em detalhes a formulação matemática do MMFGL (BARBIERI et al., 1998a). Na segunda parte do artigo (BARBIERI; MUÑOZ; MACHADO, 1998b), são apresentados os resultados de aplicações do método em problemas de potencial e placas de Mindlin.

Após um período de menor atividade acadêmica sobre o assunto, houve um ressurgimento no estudo do MMFGL, conforme registrado por Silva (2004). Esse marco deu início a uma série de estudos que exploraram a aplicação do método em placas laminares compostas, considerando especialmente o efeito do dano. Alguns desses estudos incluem as pesquisas de Tassini Junior (2005), Machado et al. (2008), Machado et al. (2012) e Machado et al. (2013).

Estudos também foram direcionados ao uso de enriquecimento do MMFGL, utilizando a combinação desse método com o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) (SILVA; MACHADO; ABDALLA FILHO, 2017; SILVA et al., 2017) e com a combinação do MMFGL com o

Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (WEINHARD; ARNDT; MACHADO, 2017). Silva (2018) também apresentou com mais detalhes o MMFGL enriquecido baseado em ambos MEFH e MEFG.

Em uma pesquisa contínua na área do enriquecimento, na Universidade Federal do Paraná, Corrêa (2021) em projeto de qualificação, aplicou uma combinação do MMFGL com o MEFG para resolver problemas que envolvem singularidades ou concentração de tensões, bem como problemas com trincas, na equação de Poisson e estado plano na elasticidade linear. Os resultados obtidos revelaram um potencial promissor e uma melhoria significativa em comparação com o MMFGL sem o uso do enriquecimento.

Posteriormente, Corrêa, Arndt e Machado (2023) propuseram uma nova abordagem que elimina a necessidade de obter as projeções da função de Green para o MMFGL, resultando na redução do sistema de equações em comparação com o método original. A nova formulação foi comparada com o MEF e o MEC. Demonstrou uma boa convergência para os resultados de potencial e deslocamento em todo o domínio, bem como para as trações e fluxo normal na fronteira. Alguns resultados foram superiores aos do MEC, possivelmente devido à vantagem do MMFGL de ter projeções de Green mais regulares do que as soluções fundamentais analíticas. Em relação ao MEF, a nova abordagem mostrou resultados semelhantes. Destaca-se também a redução significativa no tempo de processamento em comparação com a formulação original do MMFGL.

### 3 REVISÃO TEÓRICA

No presente capítulo, são expostos, primeiramente, os conceitos teóricos fundamentais para a compreensão da Análise Isogeométrica. Em seguida, são abordados os conceitos do Método Modificado da Função de Green Local, contemplando a nova abordagem.

#### 3.1 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

A seguir, são fornecidas informações e detalhes relevantes para a compreensão e uso da técnica de Análise Isogeométrica em problemas de engenharia.

##### 3.1.1 B-Splines

Os conceitos discutidos neste estudo sobre as funções B-Splines (*Basis-Splines*) são derivados do detalhamento apresentado por Piegl e Tiller (1996) e Rogers (2001), que compreendem as formulações, características e usos dessas funções. Além disso, a pesquisa se baseia nos trabalhos de Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009) que simplificam os mesmos conceitos com ênfase na aplicação numérica da Análise Isogeométrica.

##### 3.1.1.1 Vetor de nós (*knot vector*)

Para a compreensão das B-Splines, é preciso inicialmente tratar sobre o vetor de nós neste contexto. Um vetor de nós em uma dimensão é um conjunto de coordenadas não-decrescentes no espaço paramétrico, representado por  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ . Cada  $\xi_i \in \mathbb{R}$  representa o  $i$ -ésimo nó, onde ( $i$ ) é o índice do nó e varia de 1 a  $(n + p + 1)$ . Aqui, ( $p$ ) é a ordem do polinômio e ( $n$ ) é o número de funções de base usadas para construir a representação da geometria B-Spline. Os *knots* dividem o espaço paramétrico em elementos. Para cada transição de coordenadas dentro do vetor de nós, um novo elemento é definido, este é chamado de elemento isogeométrico.

Os vetores de nós podem ser considerados uniformes ou não. Um vetor de nós é considerado uniforme se os *knots* estiverem igualmente espaçados no espaço de paramétrico como o seguinte exemplo de nós:  $\Xi = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ . Caso os nós não sejam igualmente espaçados, o vetor de nós é considerado não uniforme como, por exemplo,  $\Xi = \{0, 0.3, 0.8, 0.9, 1\}$ . Também é possível repetir o *knot*:  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$ , ou seja, aumentar a sua multiplicidade de forma a influenciar na continuidade. Também podem ser considerados abertos ou não. É chamado de vetor de nós aberto o vetor de nós cujas primeiras e últimas coordenadas aparecem  $p + 1$  vezes, ou seja, sua multiplicidade é  $p + 1$ . Esse padrão é comumente empregado na literatura de CAD e apresenta a vantagem de permitir a definição de graus de liberdade nodais nas extremidades de um elemento.

A multiplicidade de um *knot* é definida como o número de vezes que ele aparece no vetor de nós. Essa multiplicidade está diretamente relacionada com a continuidade da curva, superfície ou volume B-Spline, sendo que a continuidade  $C^{p-m}$  é determinada pela ordem do polinômio ( $p$ ) e pelo número de vezes que o nó aparece ( $m$ ).

### 3.1.1.2 Funções base B-Spline

Dado um vetor de nós, a forma mais clássica de se construir as funções base B-Splines são de maneira recursiva conforme a fórmula de Cox-de Boor (Cox, 1971; de Boor, 1972). A fórmula recursiva é iniciada com um grau polinomial  $p = 0$ :

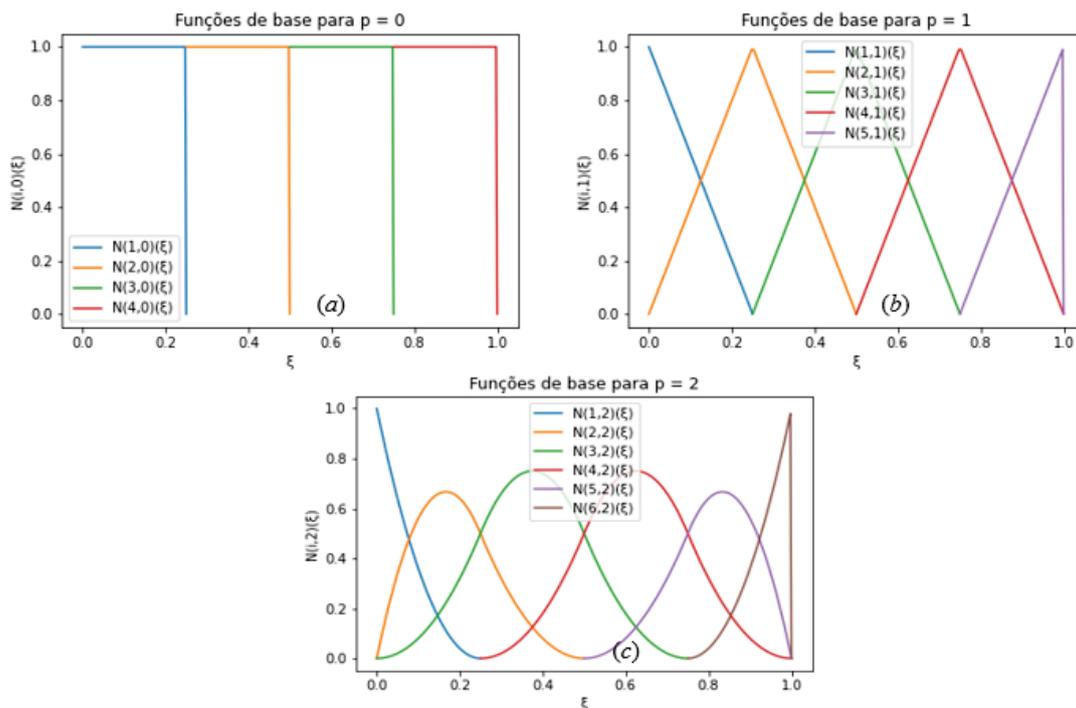
$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

As próximas interações para  $p = 1, 2, 3, \dots$  são dadas por:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

onde  $\xi_i \in \mathbb{R}$  é o  $i$ -ésimo nó, ( $i$ ) o índice do nó que varia de  $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$ , ( $p$ ) é a ordem do polinômio, e ( $n$ ) o número de funções bases. A Figura 3 apresenta um exemplo das B-Splines em ordens polinomiais  $p = 0, 1, 2$ .

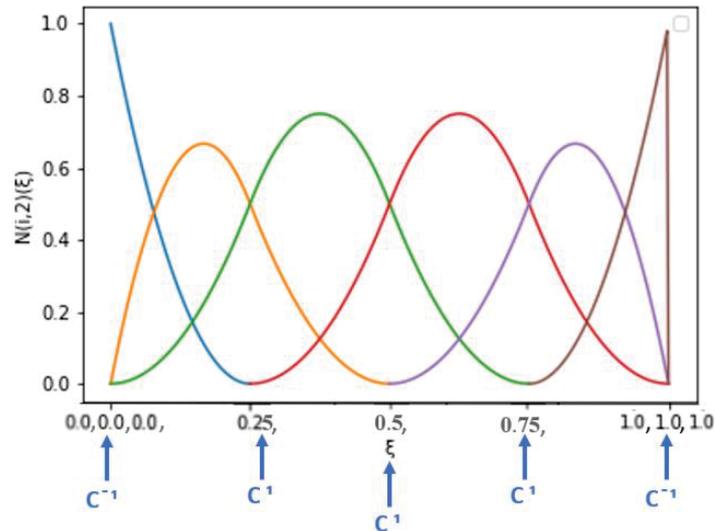
FIGURA 3- Funções de base B-Spline para o vetor de nós não uniforme e aberto: (a)  $\Xi = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$  para grau  $p = 0$ ; (b)  $\Xi = \{0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1\}$  para grau  $p = 1$ ;  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$  para grau  $p = 2$



Fonte: Autora, 2023

No exemplo apresentado, foi realizado um ajuste no vetor de nós com base no grau  $p$  estabelecido, a fim de garantir que fosse uniforme e aberto. Por exemplo, para o grau  $p$  igual a 0, o vetor de nós resultante foi:  $\Xi = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ , enquanto para o grau  $p = 1$ , o vetor de nós resultante foi:  $\Xi = \{0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1\}$ . Na Figura 4 também se apresenta a relação entre este vetor de nós para o grau  $p = 2$  e a sua continuidade em cada *knot*.

FIGURA 4- Continuidade para o vetor de nós não uniforme e aberto  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$



Fonte: Autora, 2023

Destacam-se também propriedades importantes das funções base B-Splines, dentre elas, a propriedade do suporte local, que estabelece que o suporte de cada função base  $N_{i,p}$  é compacto e contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ . Isso significa que  $N_{i,p}(\xi)$  é igual a zero para qualquer valor de  $\xi$  fora desse intervalo.

Ademais, as funções base B-Splines são sempre não negativas, o que implica que  $N_{i,p}(\xi)$  é maior ou igual a zero para qualquer combinação de  $i, p$  e  $\xi$ . Outra propriedade fundamental é a partição da unidade, que garante que a soma de todas as funções base  $N_{i,p}$  definidas em um intervalo de knots  $[\xi_i, \xi_{i+1})$  é igual a 1 para todo  $\xi$  pertencente a esse intervalo. Dessa forma, é possível garantir a preservação da soma, unicidade na solução e estabilidade numérica (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009):

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad (3)$$

### 3.1.1.3 Derivadas B-Splines

Para obter as derivadas das funções base B-Splines também é preciso seguir uma fórmula recursiva. Em particular, a primeira derivada da  $i$ -ésima função B-Spline pode ser obtida utilizando a seguinte expressão:

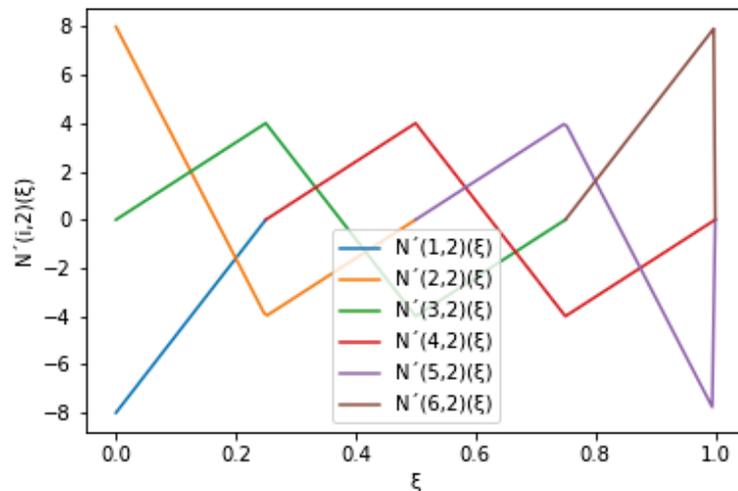
$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (4)$$

É possível definir uma equação que forneça uma expressão generalizada para a  $k$ -ésima derivada da  $i$ -ésima função B-Spline. Essa equação pode ser escrita como (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009):

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (5)$$

Na Figura 5, tem-se a apresentação de gráfico que contém as derivadas das funções B-Spline para o exemplo em questão, o qual considera um vetor de nós  $\Xi = \{0, 0, 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1, 1\}$  e ordem máxima polinomial quadrática:

FIGURA 5- Derivadas B-Splines de vetor de nós não uniforme e aberto



Fonte: Autora, 2023

### 3.1.1.4 Geometrias B-Splines

No processo de construção de uma geometria representativa em CAD, as funções B-Splines são interpoladas com base nos pontos de controle definidos no espaço  $\mathbb{R}^d$ . Para criar uma curva B-Spline, com uma base de  $n$  funções e um número  $n$  de pontos de controle  $B$ , é fundamental combinar

as funções de base B-Splines, ponderadas pelos pontos de controle, de modo a obter uma curva suave. Essa combinação não só interpola os pontos de controle no espaço paramétrico, mas também os mapeia para o espaço físico, realizando assim a transformação do espaço paramétrico para o físico. Sendo assim, dadas  $n$  funções base,  $N_{i,p}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e pontos de controle  $B_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , uma curva B-Spline é dada pela expressão (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009):

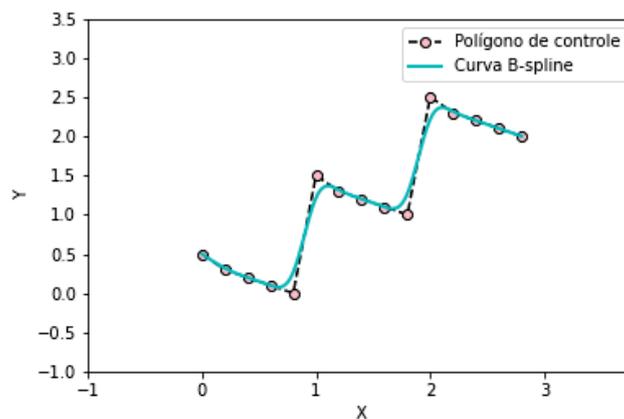
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (6)$$

onde  $B_i$  representa o  $i$ -ésimo ponto de controle relacionado a  $i$ -ésima função B-Spline  $N_{i,p}(\xi)$ . Caso os pontos de controle sejam definidos no espaço bidimensional, é fundamental utilizar um par ordenado de coordenadas  $(X, Y)$ , os quais representam as coordenadas do  $i$ -ésimo ponto de controle. Sob a ótica vetorial, é viável reescrever a expressão 6 como:

$$\begin{bmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) X_i \\ \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) Y_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

A partir de um conjunto de pontos de controle, é possível definir a forma de uma curva B-Spline por meio do conceito chamado polígono de controle. Esse polígono é formado pelos pontos de controle interligados por segmentos de reta, e é utilizado como base para a construção da curva. Em sequência, apresenta-se uma curva B-Spline e seu respectivo polígono de controle (Figura 6):

FIGURA 6- Curva B-spline cúbica e seu respectivo polígono de controle



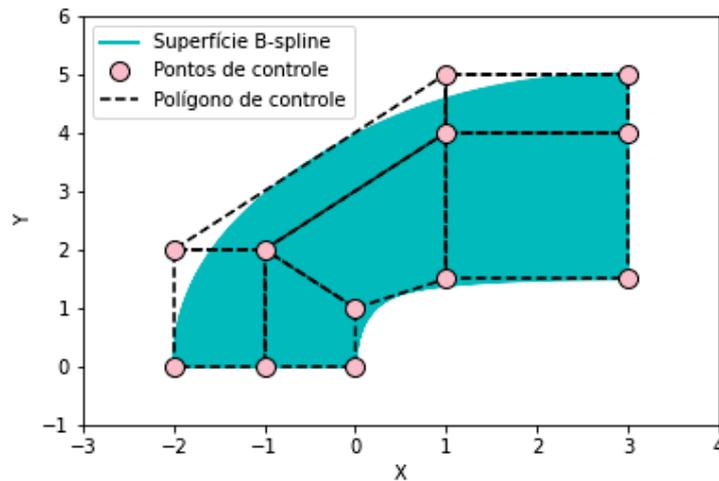
Fonte: Autora, 2023

Por meio da interpolação de superfícies base B-Splines com pontos de controle no espaço, é possível construir uma superfície B-Spline através do produto tensorial. Dada uma malha de controle  $\{B_{i,j}\}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ , ordens polinomiais  $(p)$  e  $(q)$ , vetores de nós  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  e  $\mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$  e funções B-Splines em cada direção  $N_{i,p}(\xi)$  e  $M_{j,q}(\eta)$ , a superfície B-Spline é definida por:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (8)$$

Sendo assim, o suporte local das funções base de superfície é também determinado pelas funções unidimensionais, porém com a seguinte multiplicação:  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ . Dessa forma, o máximo de funções as quais são não nulas é de:  $(p + 1) \times (q + 1)$ . Um exemplo de superfície B-Spline é ilustrado na Figura 7.

FIGURA 7- Superfície B-Spline quadrática e seu respectivo polígono de controle



Fonte: Autora, 2023

### 3.1.2 Refinamentos

Em algumas situações, a interpolação dos pontos de controle e a combinação das funções de base para gerar uma curva B-Spline podem não ser suficientes para alcançar as respostas necessárias em termos numéricos, mesmo que o modelo geométrico desejado seja obtido. Nesses casos, é comum empregar técnicas de refinamento, com o objetivo de ajustar a curva gerada para que ela atenda aos requisitos específicos de precisão, suavidade e continuidade. Essa prática é particularmente útil para capturar geometrias complexas e variações nos campos de solução. Esse procedimento consiste na construção de malhas mais densas ou funções mais suaves, aprimorando a acurácia dos resultados

numéricos e tornando-se particularmente útil para capturar geometrias complexas e variações nos campos de solução.

Neste contexto, são comumente utilizados três tipos de refinamento na Análise Isogeométrica: refinamentos  $h$ ,  $p$  e  $k$ . Tais técnicas apresentam abordagens distintas para aprimorar a curva B-Spline gerada, permitindo uma maior flexibilidade e precisão na modelagem numérica.

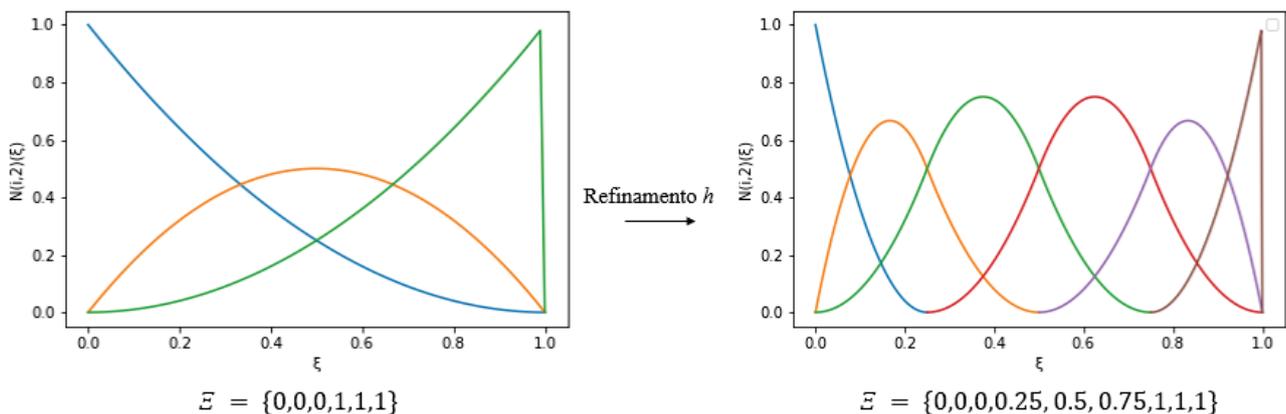
### 3.1.2.1 Inserção de *knot* (refinamento $h$ )

Uma estratégia para aprimorar a base de uma curva B-Spline é mediante a inserção de novos *knots* dentro do vetor de nós, sem alterar significativamente a curva, seja em termos geométricos ou paramétricos. Esse processo envolve a utilização de um vetor de nós:  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , no qual são acrescentados  $r$  novos *knots* através de um vetor de nós estendido,  $\bar{\Xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+r+p+1}\}$ , que mantém a ordem ascendente do vetor  $\Xi$  original.

Essa técnica se assemelha ao refinamento  $h$  do Método dos Elementos Finitos, porém para que haja um refinamento análogo em ambas as técnicas, é preciso que cada *knot* inserido seja com multiplicidade  $m_i = p$  para que haja continuidade  $C^0$  em todas as partes.

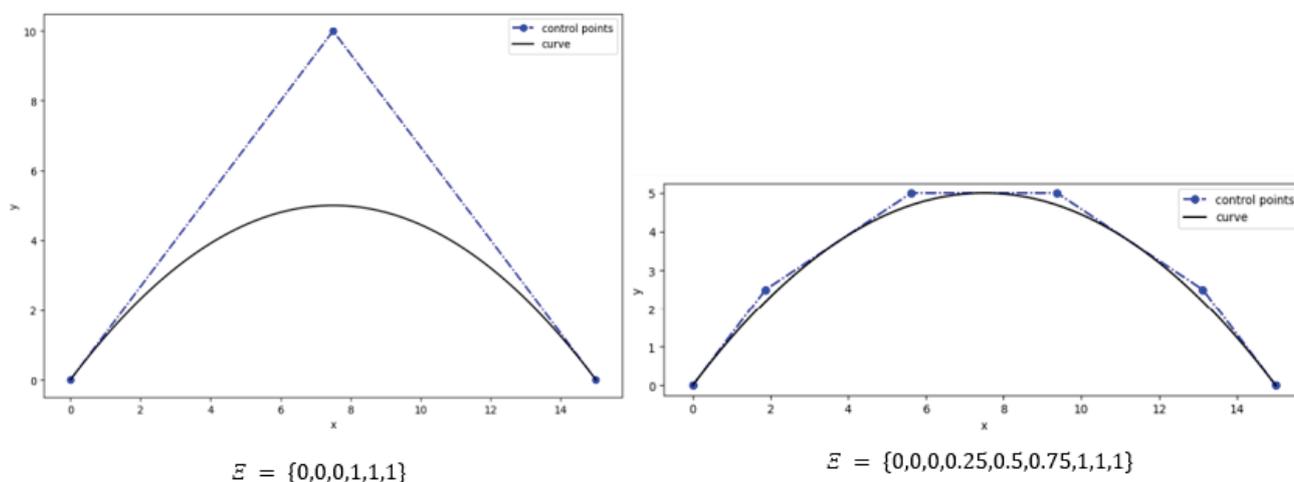
Um exemplo da mudança de funções base para o refinamento  $h$  é indicado na Figura 8, onde novos *knots*  $\bar{\xi} = 0.25$ ,  $\bar{\xi} = 0.5$  e  $\bar{\xi} = 0.75$  com continuidade  $C^1$  são inseridos no vetor de nós inicial  $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$  de forma a mantê-lo uniforme internamente.

FIGURA 8- Exemplo de refinamento  $h$



Fonte: Autora, 2023

A Figura 9 também ilustra o comportamento da curva e seu polígono de controle, ao realizar o refinamento com inserção de *knot*. De forma que, para obter a mesma curva, o polígono de controle se altera.

FIGURA 9- Comportamento de polígono de controle de curva B-Spline com refinamento  $h$ 

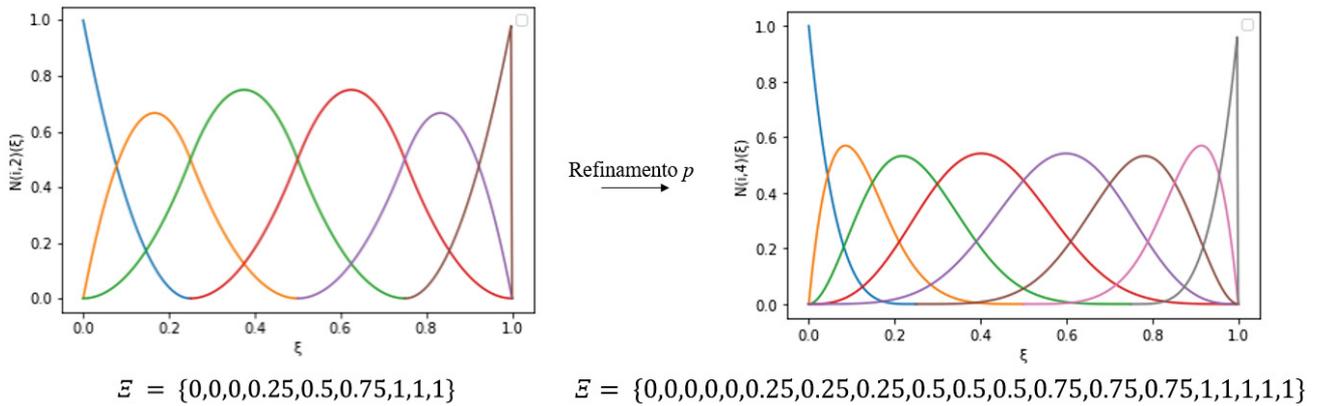
Fonte: Autora, 2023

### 3.1.2.2 Elevação de ordem (refinamento $p$ )

Uma outra estratégia para aprimorar a base é conhecida como elevação de grau ou ordem polinomial. Conforme o próprio nome sugere, esse processo consiste em aumentar o grau polinomial das funções base utilizadas para representar a geometria. Essa técnica geralmente implica em manter a continuidade em pontos específicos da geometria, de modo que a multiplicidade de cada *knot* é aumentada na mesma proporção em que o grau polinomial é aumentado. Por exemplo, ao se elevar o grau polinomial de um refinamento de ordem 2 para ordem 3, a multiplicidade de cada nó é incrementada em 1, mas não são adicionados novos *knots* ao vetor de nós.

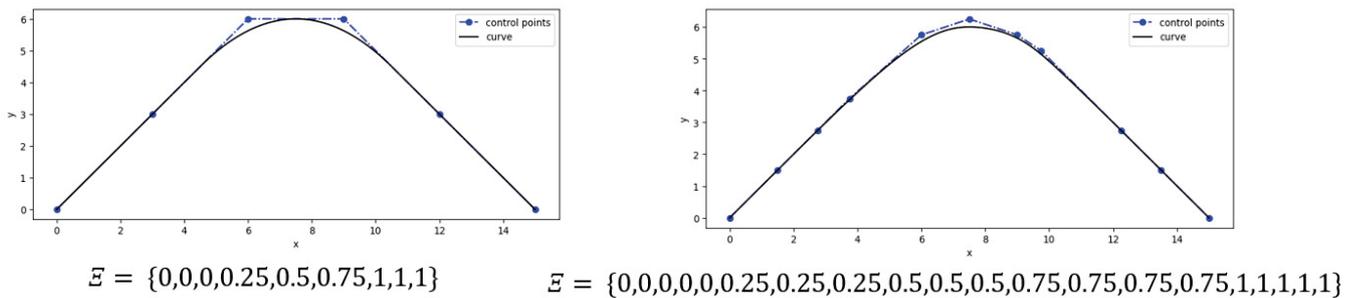
De acordo com Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009), a técnica de refinamento  $p$  em Análise Isogeométrica apresenta diversas semelhanças com a mesma técnica empregada no Método dos Elementos Finitos, uma vez que ambas têm como objetivo aumentar o grau das funções base. Contudo, a principal diferença entre as duas técnicas reside no fato de que o refinamento  $p$  em Elementos Finitos tem início com uma base que apresenta continuidade  $C^0$  em todos os pontos, ao passo que o refinamento  $p$  em Análise Isogeométrica é compatível com qualquer combinação de continuidades presentes na malha B-Spline não refinada. Essa flexibilidade permite o desenvolvimento de uma nova técnica de ordem superior, única na Análise Isogeométrica.

Um exemplo da mudança do comportamento das funções base para o refinamento  $p$  é ilustrado na Figura 10, onde o grau polinomial do vetor de nós  $E = \{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$  que era quadrático é incrementado para quártico.

FIGURA 10- Exemplo de refinamento  $p$ 

Fonte: Autora, 2023

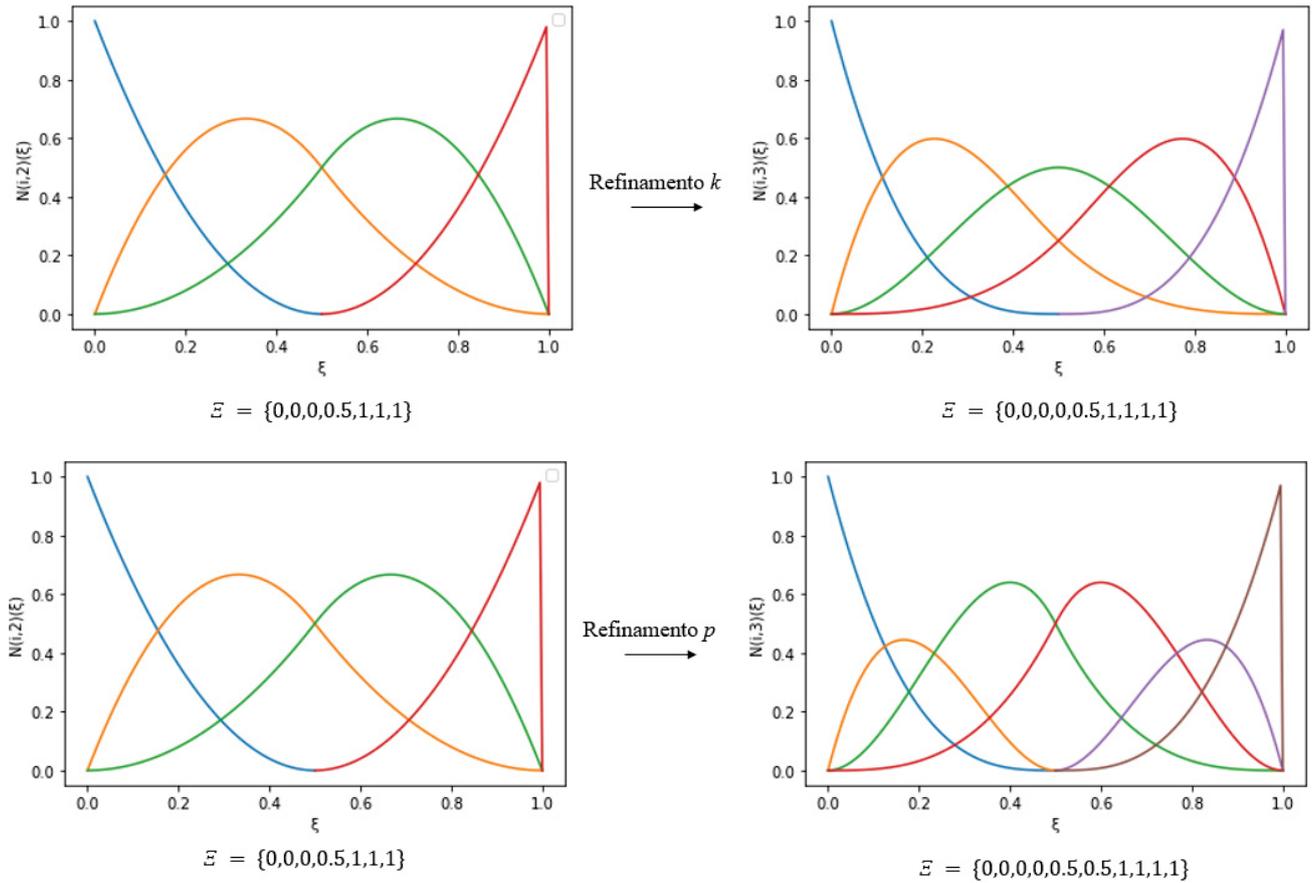
A Figura 11 ilustra o comportamento da curva B-Spline e da mudança de seu polígono de controle diante do refinamento com elevação de ordem mostrado na Figura 10.

FIGURA 11- Comportamento de polígono de controle de curva B-Spline com refinamento  $p$ 

Fonte: Autora, 2023

### 3.1.2.3 Refinamento $k$

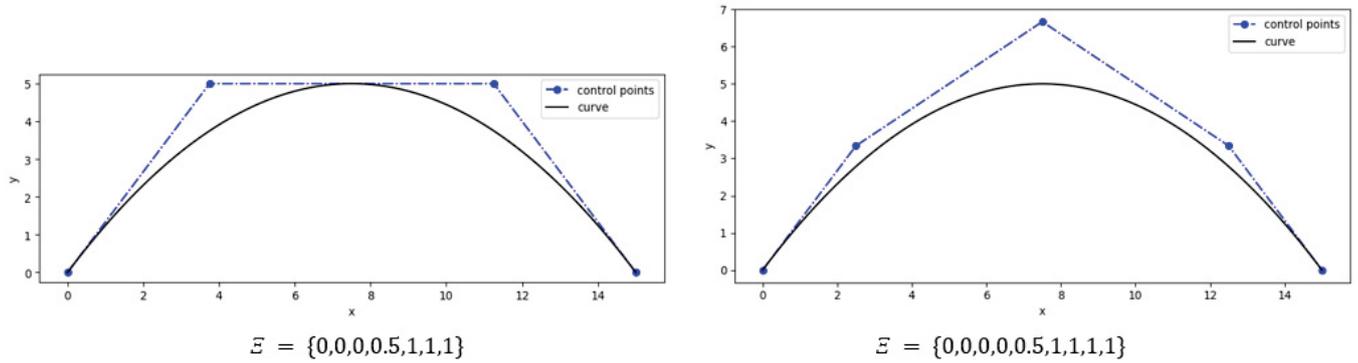
Ao contrário dos refinamentos mencionados anteriormente, o refinamento  $k$  não é encontrado comumente em outros métodos, como no Método dos Elementos Finitos. Isso se deve, em parte, à técnica Isogeométrica, que possibilita trabalhar com *knots* de diferentes multiplicidades dentro do elemento, ao mesmo tempo em que reduz o número de funções base em comparação ao refinamento  $p$ . A FIGURA 12 exemplifica a diferença entre o refinamento  $p$  e  $k$ .

FIGURA 12 - Diferença entre refinamento  $k$  e  $p$ 

Fonte: Autora, 2023

Sendo assim, essa técnica visa aumentar a ordem polinomial  $p$  sem a preocupação de manter a continuidade nos *knots*. Como resultado, a multiplicidade dos elementos pode ser alterada. No entanto, como é preferível utilizar vetor de nós aberto, a continuidade nos *knots* localizados no interior do vetor pode ser aumentada, proporcionando maior suavidade à curva.

Como nos outros refinamentos apresentados até o momento, também se apresenta o comportamento do polígono de controle da curva B-Spline mediante refinamento em questão, com elevação de grau polinomial  $p = 2$  para  $p = 3$ .

FIGURA 13- Comportamento de polígono de controle de curva B-Spline com refinamento  $k$ 

Fonte: Autora, 2023

### 3.1.3 NURBS

Nesta seção são discutidos os conceitos em relação às funções NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) com base na mesma literatura utilizada na seção das B-Splines: Piegl e Tiller (1996), Rogers (2001), Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009).

#### 3.1.3.1 Funções NURBS

As funções NURBS representam uma extensão das B-Splines que permite adicionar um parâmetro de peso  $w_i$ , aumentando a flexibilidade nas construções geométricas. Para obter uma entidade NURBS em  $\mathbb{R}^d$ , é realizada uma transformação projetiva em uma entidade B-Spline em  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Os pontos de controle da curva NURBS são obtidos por meio de uma transformação projetiva similar aplicada aos pontos de controle da curva B-Spline. É importante ressaltar que a curva B-Spline  $C^w(\xi)$  é chamada de "curva projetiva", com seus "pontos de controle projetivos"  $B_i^w$ , enquanto os termos "curva" e "pontos de controle" são utilizados exclusivamente para se referir aos objetos NURBS  $C(\xi)$  e  $B_i$ , respectivamente. Dessa forma, os pontos de controle são obtidos através da seguinte relação:

$$(B_i)_j = \frac{(B_i^w)_j}{w_i}, \quad j = 1, \dots, d \quad (9)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (10)$$

onde:  $(B_i)_j$  é o  $j$ -ésimo componente do vetor  $B_i$  e  $w_i$  é o  $i$ -ésimo componente do peso.

Com isso, é possível gerar uma curva NURBS a partir dos pontos de controle e dos pesos associados a cada ponto.  $N_{i,p}(\xi)$  é a função base B-Spline de ordem  $p$  associada ao ponto de controle

$i$ , representando a função base NURBS unidimensional, e  $W(\xi)$  é a soma ponderada das funções base B-Spline em todos os pontos de controle:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} \quad (11)$$

Sendo a soma ponderada unidimensional:

$$W(\xi) = \sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}} \quad (12)$$

A utilização dos pontos de controle descritos na equação (9), em conjunto com a equação (11), permite a representação da curva NURBS:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) B_i \quad (13)$$

É válido mencionar que a aplicação das funções base NURBS não se restringem somente ao contexto unidimensional, podendo generalizar essa utilização para casos bidimensionais por meio da definição de superfície NURBS:

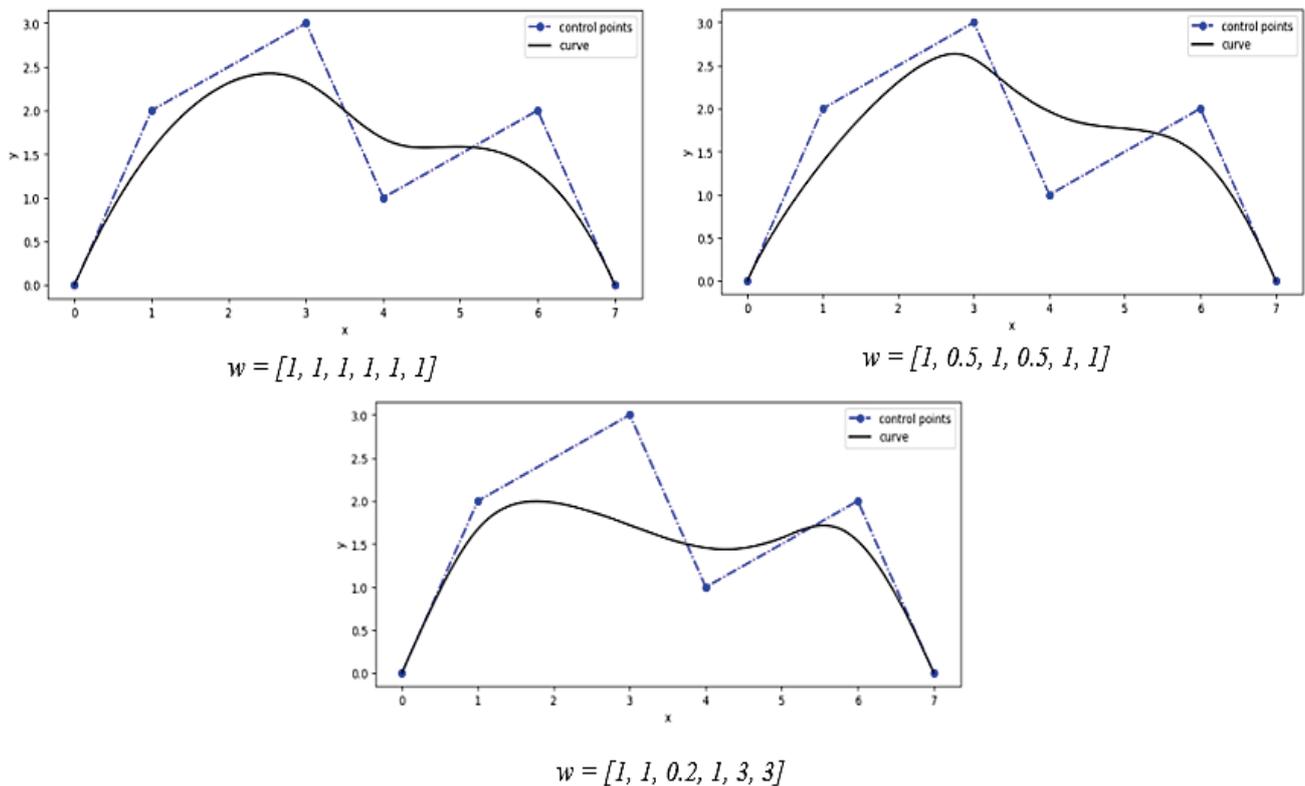
$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{W(\xi, \eta)} \quad (14)$$

sendo a soma ponderada bidimensional:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}} \quad (15)$$

Com a considerável flexibilidade proporcionada pela utilização de curvas NURBS para a modelagem de geometrias, é possível notar, na Figura 14, uma demonstração da variação dessas curvas mediante a utilização do mesmo polígono de controle, isto é, dos mesmos pontos de controle e funções base, porém com ajustes distintos nos valores dos componentes do peso ( $w$ ).

FIGURA 14- Curvas NURBS cúbicas com mudança de peso e vetor de nós  $\Xi = \{0,0,0,0,1/3,2/3,1,1,1,1\}$



Fonte: Autora, 2023

Dessa maneira, pode-se constatar que os pesos exercem um papel relevante na definição da base, ainda que não estejam ligados a uma interpretação geométrica explícita no contexto em questão. Além disso, cabe salientar que os pontos de controle podem ser escolhidos independentemente de seus pesos correspondentes. Destaca-se também que, na hipótese em que todos os pesos são unitários, a curva resultante é uma função B-Spline, ou seja,  $R_i^p(\xi) = N_{i,p}(\xi)$ . Nesse sentido, infere-se que as NURBS se inserem como uma extensão das B-Splines.

### 3.1.3.2 Derivadas NURBS

Assim como as funções NURBS dependem das B-Splines, as suas derivadas também. Sendo assim, tem-se a derivada de primeira ordem definida por:

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (16)$$

O  $N'_{i,p}(\xi)$  é a representação de  $\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$  e  $W'(\xi)$  é dado por:

$$W'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi) w_i \quad (17)$$

Para caso bidimensional de superfícies NURBS, tem-se derivadas parciais definidas em relação a  $\xi$  e a  $\eta$ . Primeiramente define-se para a direção  $\xi$ :

$$\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = w_{i,j} M_{j,q}(\eta) \frac{W(\xi, \eta) N'_{i,p}(\xi) - W(\xi, \eta)_{,\xi} N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (18)$$

Sendo  $N'_{i,p}(\xi)$  a representação de  $\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$  e  $W(\xi, \eta)_{,\xi}$  definido por:

$$W(\xi, \eta)_{,\xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N'_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j} \quad (19)$$

Já a definição para a direção  $\eta$  é:

$$\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = w_{i,j} N_{i,p}(\xi) \frac{W(\xi, \eta) M'_{j,q}(\eta) - W(\xi, \eta)_{,\eta} M_{j,q}(\eta)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (20)$$

Sendo  $M'_{j,q}(\eta)$  a representação de  $\frac{d}{d\eta} M_{j,q}(\eta)$  e  $W(\xi, \eta)_{,\eta}$  definido por:

$$W(\xi, \eta)_{,\eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M'_{j,q}(\eta) w_{i,j} \quad (21)$$

### 3.1.4 Principais conceitos da AIG

Esta seção tem como objetivo discutir os principais conceitos da Análise Isogeométrica baseada em NURBS para aplicação em problemas da mecânica de estruturas. Para iniciar, é fundamental definir os termos de malhas e elementos, que são empregados para a discretização da geometria do problema. Ademais, a AIG trabalha com diferentes espaços, como o espaço físico, o espaço indicial e o espaço paramétrico, que são utilizados para representar a geometria de forma eficiente. Adicionalmente, são apresentadas as matrizes de conectividades INC e IEN, que contêm informações indispensáveis para a análise numérica. O domínio de integração é uma área de interesse crucial para a análise numérica e também é discorrido.

#### 3.1.4.1 Espaço Físico e Espaço Paramétrico

O espaço físico é uma representação virtual de um objeto real em um ambiente computacional. Nele, as coordenadas são definidas no espaço cartesiano e é composto pela malha física e a malha de controle. É através do espaço físico que é possível visualizar e analisar os campos de deslocamento, deformação, tensão e outras informações relevantes.

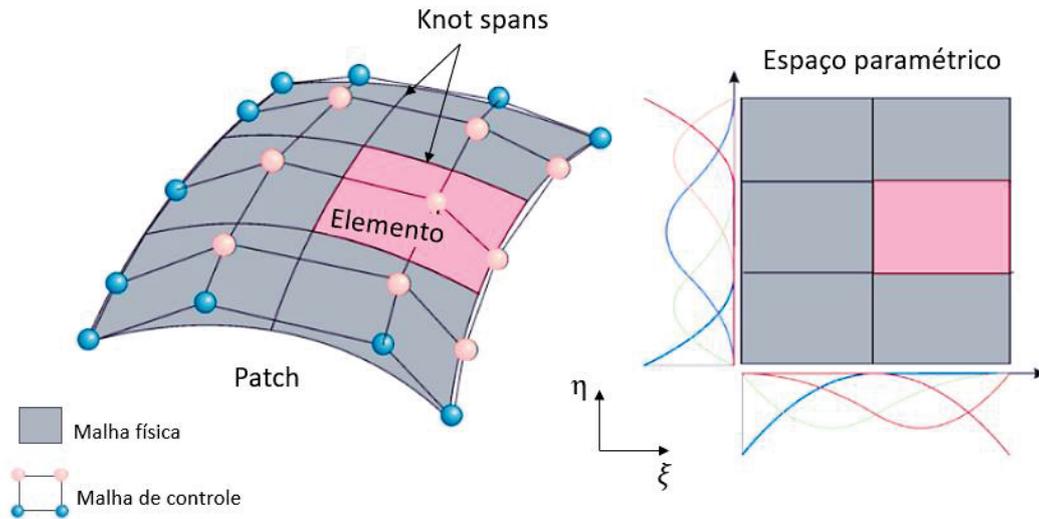
Conforme apontado por Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009), na AIG existem dois conceitos de malha: malha de controle e malha física. A malha de controle é composta por elementos multilíneares que interpolam os pontos de controle, responsáveis por definir a malha. Em duas dimensões, esses elementos são representados por elementos bilineares quadriláteros. Vale ressaltar que a malha não se conforma à geometria real, mas funciona como um andaime que controla a geometria, e assim, é possível ser severamente distorcida. Os graus de liberdade, por sua vez, localizam-se nos pontos de controle.

A malha física é obtida por meio da decomposição da geometria atual no espaço físico, utilizando duas noções elementares: *patch* e *knot span*. O *patch* é considerado um macro elemento ou subdomínio do problema, sendo possível a realização de análises numéricas em geometrias mais simples com apenas um único *patch*.

No âmbito do espaço paramétrico, o *patch* é constituído pela aplicação de funções NURBS, representadas por um retângulo bidimensional, orientado no sistema de coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ . Assim sendo, o espaço paramétrico pode ser compreendido como um espaço indicial compacto, haja vista que apresenta somente os elementos cujas áreas são não nulas e que contribuem, de fato, para a análise numérica.

Cada *patch* pode ser dividido em *knot spans*, os quais são pequenos elementos em que os intervalos entre os *knots* são representados por pontos em um ambiente unidimensional e por linhas em um ambiente bidimensional. Desse modo, a malha física no espaço físico é composta pela união de sucessivos *knot spans*, que são adequadamente mapeados. A Figura 15 ilustra todos os conceitos citados acima.

FIGURA 15- Patch único ilustrado por malha física e de controle e sua respectiva representação no espaço paramétrico



Fonte: Adaptado de Klinkel, 2018

### 3.1.4.2 Espaço Indicial: matriz INC e IEN

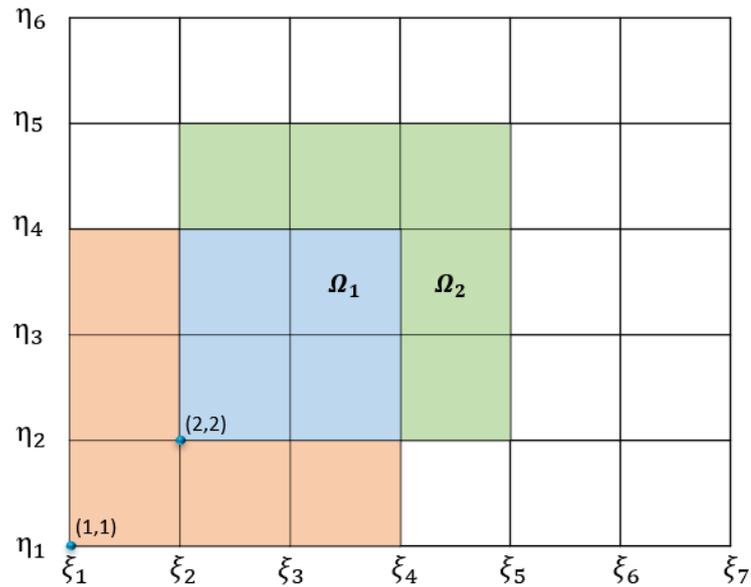
O espaço indicial é uma estrutura matemática construída a partir da intersecção dos *knots* pertencentes aos vetores de nós  $\Xi$  e  $\mathcal{H}$ . Juntos, esses *knots* geram uma grade retangular, na qual os retângulos representam todos os elementos gerados pelos *knot spans*, incluindo aqueles de área nula e não nula. Por meio do espaço indicial, é possível definir as matrizes de conectividade INC e IEN, que são essenciais para a identificação da numeração global e local das funções. A numeração global é usada para identificar a posição das funções em relação a todas as outras funções no espaço indicial, enquanto a numeração local é usada para identificar a posição das funções em relação aos seus vizinhos imediatos.

Para armazenar as coordenadas NURBS, é comum utilizar a matriz INC. Essas coordenadas representam os índices dos *knots* que definem cada vértice na malha. Por exemplo, o vértice localizado na intersecção das linhas de *knots* correspondentes a  $\xi_2$  e  $\eta_2$  possui as coordenadas NURBS (2, 2). Essas coordenadas são frequentemente utilizadas para identificar os *knots* onde o suporte de uma função começa, como no caso desse vértice, que marca o início do suporte da função associada, por exemplo, a função  $\tilde{N}_{2,2}(\xi, \eta)$ , a qual é resultante da multiplicação das funções quadráticas  $N_{2,2}(\xi)$  e  $M_{2,2}(\eta)$ , tem o início de seu suporte iniciado nas coordenadas NURBS (2, 2) e o suporte de sua função  $N_{2,2}(\xi)$  igual a  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ , ou seja,  $[\xi_2, \xi_5]$  e de sua função  $M_{2,2}(\eta)$  igual a  $[\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ , ou seja,  $[\eta_2, \eta_5]$ .

Na Figura 16 é mostrado, no espaço indicial, o suporte de duas funções com grau  $p = 2$  e  $q = 2$ :  $\tilde{N}_{1,1}(\xi, \eta)$  em vermelho e  $\tilde{N}_{2,2}(\xi, \eta)$  em verde. A região de intersecção das duas funções é destacada

em azul. É perceptível que o elemento  $\Omega_2$  não se encontra na região de suporte da função  $\tilde{N}_{1,1}(\xi, \eta)$ . No entanto, outras funções como a  $\tilde{N}_{2,2}(\xi, \eta)$ , com coordenadas NURBS (2,2), alcançam esse elemento.

FIGURA 16- Espaço indicial das funções:  $\tilde{N}_{1,1}$  e  $\tilde{N}_{2,2}$



Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs, 2009

Para facilitar a identificação das funções, elas são numeradas globalmente usando a seguinte equação:

$$A = n(j - 1)i \quad (22)$$

onde as coordenadas NURBS são representadas por  $i$  e  $j$ , e o número de funções relacionadas ao vetor de nós  $\Xi$  é representado por  $n$ . Dessa forma, as funções são identificadas como  $\tilde{N}_A(\xi, \eta)$ , onde, por exemplo, a função  $\tilde{N}_{1,1}(\xi, \eta)$ , conforme a expressão (22), é equivalente a  $\tilde{N}_1(\xi, \eta)$ , e a função  $\tilde{N}_{2,2}(\xi, \eta)$  é equivalente a  $\tilde{N}_6(\xi, \eta)$ . Essas informações são armazenadas na matriz de conectividade (INC), conforme apresentado na Tabela 1.

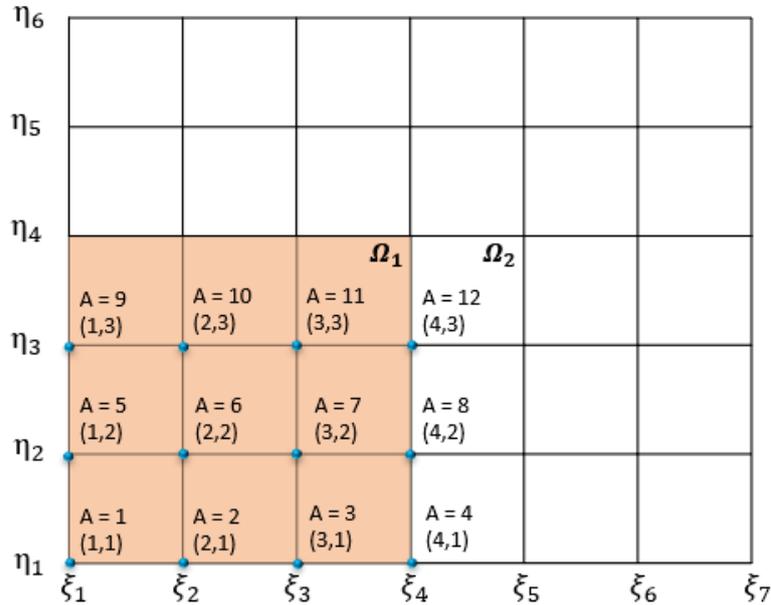
TABELA 1- Matriz de conectividade INC

INC	A (número global da função)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 (coordenada $\xi$ )	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2 (coordenada $\eta$ )	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs, 2009

Na Figura 17 também é possível observar a representação desta tabela no suporte da função  $\tilde{N}_1(\xi, \eta)$ .

FIGURA 17- Representação da numeração global das funções dos elementos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$



Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs, 2009

A partir da matriz INC, torna-se viável criar a matriz de conectividade IEN, que armazena as relações entre as funções locais e as funções globais. Com a ajuda da representação das coordenadas NURBS, torna-se mais fácil determinar quais funções têm suporte em um determinado elemento. Para numeração de um elemento  $\Omega_e = [\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ , onde  $p + 1 \leq i \leq n$  e  $q + 1 \leq j \leq m$ , o seguinte esquema é utilizado:

$$e = (j - q - 1)(n - p) + (i - p) \quad (23)$$

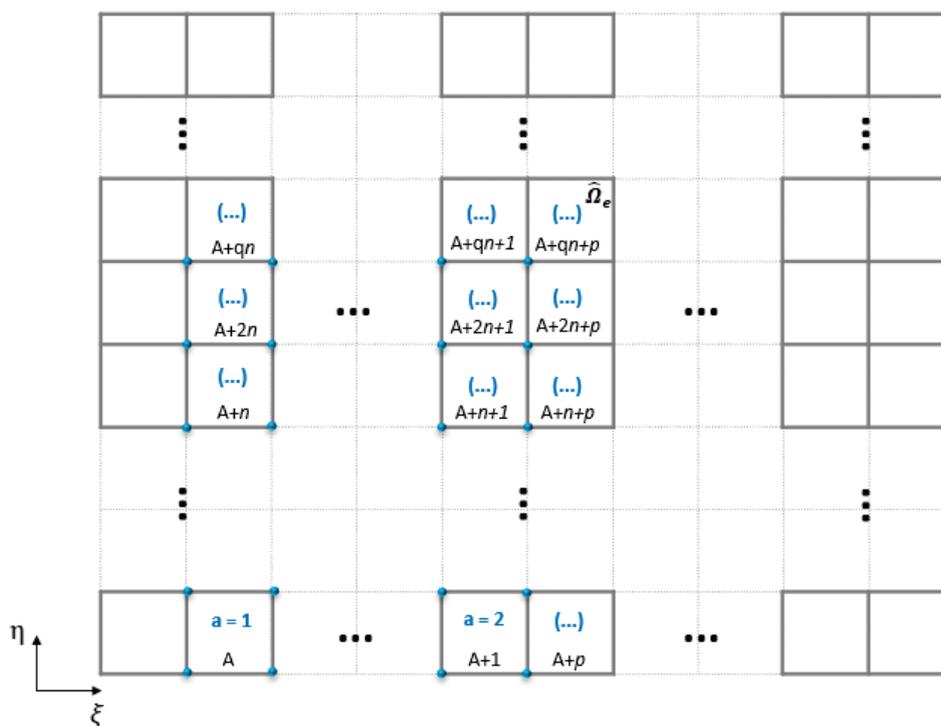
É conhecido que a quantidade de funções locais que têm suporte em um determinado elemento é dada por  $nen = (p + 1) \times (q + 1)$ . Com base neste conhecimento, procede-se à enumeração das funções locais e globais para estabelecer a relação entre elas. Neste trabalho, optou-se por uma lógica de numeração invertida em relação à utilizada por Hughes et al. (2005) e Cottrell et al. (2009), visando aprimorar a legibilidade e clareza da numeração, seguindo a lógica adotada pela autora no Método dos Elementos Finitos, sem comprometer a validade do método.

Inicialmente, para um elemento  $e$  de coordenadas  $(i, j)$  no espaço indicial, é atribuída a primeira função local identificada por  $a = 1$  na posição onde a menor numeração global  $A$  é encontrada. A partir desta função local, as demais funções locais são identificadas seguindo a ordem da esquerda para a

direita na direção  $\xi$  e de baixo para cima na direção  $\eta$ , acompanhando a numeração global até que o número final nen seja alcançado. Com base neste procedimento, os seguintes passos são seguidos:

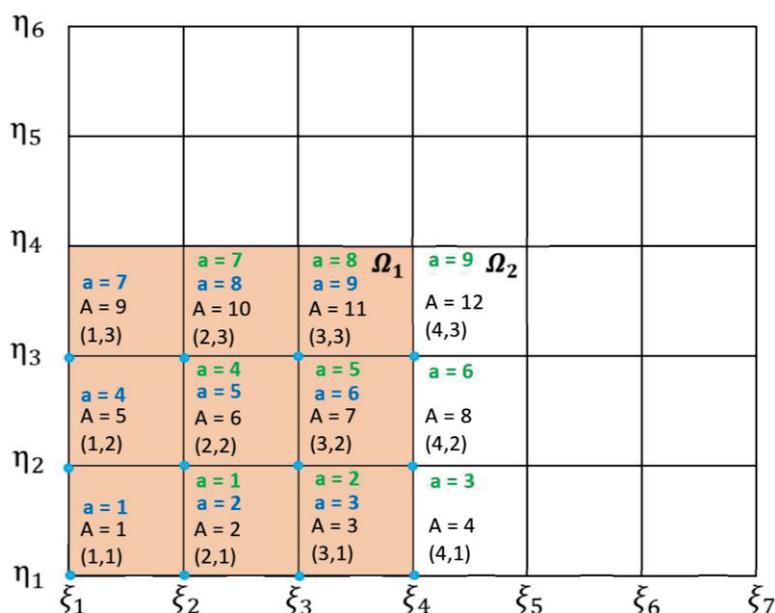
Através da expressão (22), é possível identificar a numeração global  $A$  das coordenadas NURBS  $(i,j)$ . Em seguida, atribui-se a numeração global  $A, A + 1, \dots, A + p$  para as  $p + 1$  funções locais da esquerda para a direita na direção  $\xi$ . Vale lembrar que a função  $N_{A+p+1}$  não possui suporte no elemento em questão. Dessa forma, passa-se para a próxima linha acima na direção  $\eta$  e enumera-se da esquerda para a direita na direção  $\xi$ , com  $A + n, A + n + 1, \dots, A + n + p$ . O processo é repetido até se alcançar o último conjunto de funções, numerando-se com  $A + qn, A + qn + 1, \dots, A + qn + p$  (Figura 18).

FIGURA 18- Esquema de numeração global e local das funções NURBS



Fonte: Adaptado de Almeida, 2017

Com base na lógica apresentada anteriormente e fundamentada na representação ilustrada na Figura 18, procede-se agora à apresentação da numeração local correspondente às funções nos elementos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , conforme indicado na Figura 19. Ademais, a matriz de conectividade IEN é disponibilizada na Tabela 2 subsequente.

FIGURA 19- Representação da numeração local dos elementos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  junto com a numeração global

Fonte: Autora, 2023

TABELA 2- Matriz de conectividade IEN

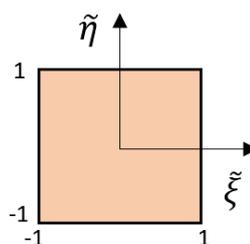
IEN	a (número local da função)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
elemento $\Omega_1$	1	2	3	5	6	7	9	10	11
elemento $\Omega_2$	2	3	4	6	7	8	10	11	12

Fonte: Autora, 2023

### 3.1.4.3 Domínio Primário

O domínio primário, definido no presente trabalho como o intervalo de integração para a quadratura gaussiana, é delimitado pelo sistema de coordenadas  $\xi$  e  $\tilde{\eta}$  e limitado ao intervalo de -1 a 1 em ambas as direções. (Figura 20).

FIGURA 20- Domínio de integração



Fonte: Adaptado de Cottrell; Hughes; Bazilevs, 2009

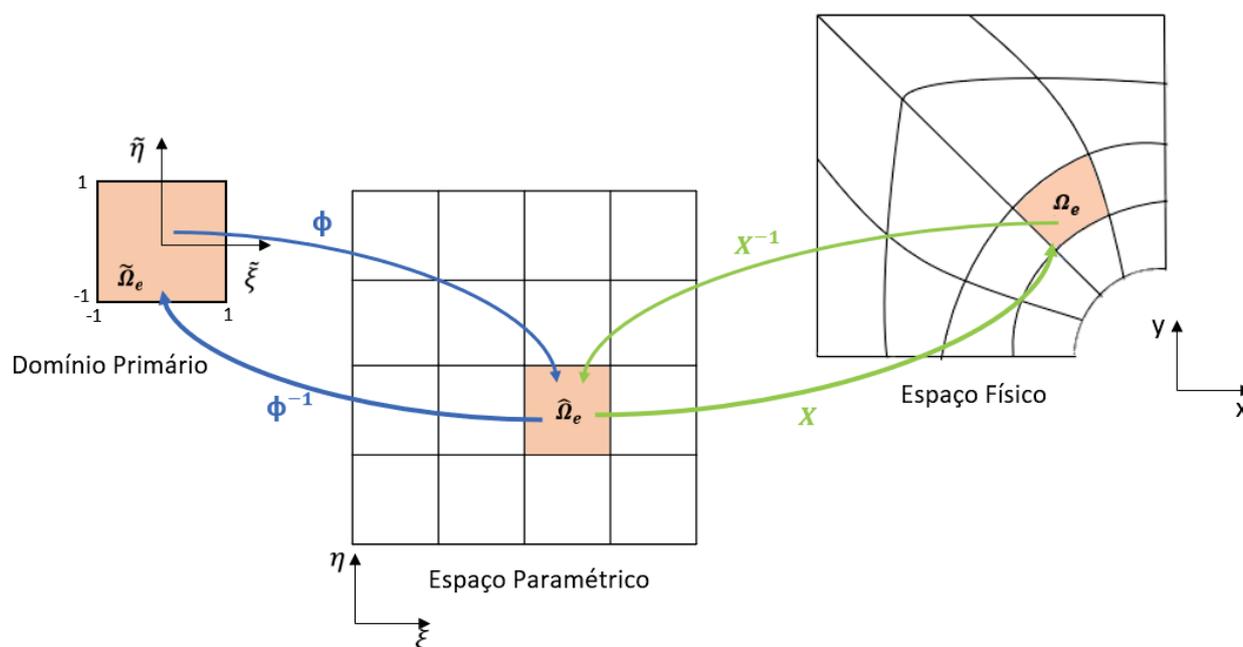
A partir deste domínio, apresentado na figura acima, são selecionadas as posições dos pontos de Gauss para a realização das integrações numéricas pertinentes ao problema em questão.

#### 3.1.4.4 Mapeamento

Para realizar as integrações através da quadratura de Gauss, é preciso realizar dois mapeamentos distintos. Tem-se o mapeamento afim, responsável pelo mapeamento do domínio de integração para o espaço paramétrico, o qual é simbolizado por  $\Phi: \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$ . Este mapeamento é invertido,  $\Phi^{-1}: \hat{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ , a fim de permitir que um elemento do espaço paramétrico  $\hat{\Omega}^e$  seja mapeado para o domínio de integração  $\tilde{\Omega}^e$ .

O mapeamento do espaço paramétrico para o espaço físico, é denominado mapeamento geométrico e é representado pela função  $\mathbf{x}: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ . Este mapeamento é invertido por meio da relação  $\mathbf{x}^{-1}: \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$ , permitindo a realização do mapeamento de um elemento pertencente ao espaço físico  $\Omega^e$  para o espaço paramétrico  $\hat{\Omega}^e$ . Portanto, o mapeamento de um elemento físico  $\Omega^e$  para um elemento no domínio de integração  $\tilde{\Omega}^e$  requer a composição dos mapeamentos invertidos:  $\Phi^{-1}$  e  $\mathbf{x}^{-1}$ . Na prática de implementação das rotinas numéricas, costuma-se efetuar o mapeamento na ordem  $\Phi, \mathbf{x}$ . (Figura 21).

FIGURA 21- Mapeamento



Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs, 2009

### 3.1.5 AIG aplicada à elasticidade linear

Nesta seção são apresentados os aspectos de integração numérica utilizados para os problemas abordados neste estudo. Os fundamentos teóricos, incluindo a formulação do problema de elasticidade linear, foram baseados em referências de mecânica do contínuo e elasticidade linear (LAI; RUBIN; KREMPL, 2010; SADD, 2009), bem como na metodologia do Método dos Elementos Finitos (HUGHES, 2000; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005; REDDY, 2005; AZEVEDO, 2003). A formulação fraca do problema é obtida através do Método dos Resíduos Ponderados e é apresentada no capítulo 3.2, esta fornece o arcabouço necessário para a integração numérica discutida em seguida.

#### 3.1.5.1 Integração numérica

Ao aplicar a discretização dos elementos finitos, o sistema de equações lineares resultante é representado pela expressão:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (24)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz global de rigidez,  $\mathbf{f}$  o vetor de forças global e  $\mathbf{u}$  os deslocamentos resultantes. As matrizes e os vetores locais são acoplados com o auxílio das matrizes de conectividade e incidência, IEN e INC, respectivamente.

A integração numérica por meio do método de quadratura de Gauss é utilizada para obter a matriz de rigidez elementar  $\mathbf{K}^e$  e o vetor de forças elementar  $\mathbf{f}^e$ . Neste processo, o vetor de forças elementares é dividido em componentes correspondentes às forças de volume e às forças de superfície. As equações resultantes para a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^e$ , o vetor de forças elementar de volume  $\mathbf{f}_p^e$  e vetor de forças elementar de superfície  $\mathbf{f}_q^e$  são apresentadas:

$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^{n_{PG\xi}} \sum_{j=1}^{n_{PG\eta}} W_i W_j \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t |J| \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_p^e = \sum_{i=1}^{n_{PG\xi}} \sum_{j=1}^{n_{PG\eta}} W_i W_j \mathbf{R}^T \mathbf{p} t |J| \quad (26)$$

$$\mathbf{f}_q^e = \sum_{i=1}^{n_{PG\xi}} W_i \bar{q} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_\eta^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)_\eta^2} \quad (27)$$

$$\mathbf{f}_q^e = \sum_{j=1}^{n_{PG\eta}} W_j \bar{q} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)_\xi^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)_\xi^2} \quad (28)$$

onde  $n_{pG\xi}$  e  $n_{pG\eta}$  representam os pontos de Gauss utilizados em cada direção paramétrica, enquanto  $W_i$  e  $W_j$  representam os pesos correspondentes. As matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{R}$  representam, respectivamente, as derivadas e funções NURBS, enquanto  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva. O determinante do jacobiano é indicado por  $|\mathbf{J}|$  e  $t$  refere-se à espessura. O valor da força de volume é denotado por  $p$ , enquanto  $\bar{q}$  representa o valor de força de superfície atuante, sendo preciso analisar o eixo paramétrico em que se encontra a força. Ressalta-se que estas equações são válidas para forças de volume e/ou superfície constantes.

A matriz  $\mathbf{D}$ , conhecida como matriz constitutiva para o estado plano de tensão, é composta pelo módulo de Young ( $E$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), definida por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

A matriz  $\mathbf{B}$ , que no contexto da AIG representa as derivadas das funções de base NURBS no elemento em estudo, pode ser representada por:

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{L}\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial R_2^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial R_2^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial R_1^e}{\partial y} & \frac{\partial R_1^e}{\partial x} & \frac{\partial R_2^e}{\partial y} & \frac{\partial R_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial y} & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (30)$$

onde  $L$  representa a matriz contendo os operadores diferenciais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (31)$$

É importante ressaltar que, devido à existência de dois mapeamentos envolvidos no processo  $\Phi: \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$  e  $\mathbf{x}: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$  alguns detalhes a respeito da obtenção das derivadas NURBS e do jacobiano precisam ser considerados. Tais detalhes são abordados na sequência.

Antes de obter as derivadas das funções NURBS em relação ao espaço físico, é preciso obter a matriz jacobiana que relaciona as coordenadas no espaço paramétrico com as coordenadas no espaço físico. Esse processo envolve o mapeamento  $\mathbf{x}: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ :

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Sendo que as componentes  $x$  e  $y$  são representadas por:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) x_{ij} \quad (33)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) y_{ij} \quad (34)$$

E as suas derivadas parciais correspondentes:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi}(\xi, \eta) x_{ij} \quad (35)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi}(\xi, \eta) y_{ij} \quad (36)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial R_{ij}}{\partial \eta}(\xi, \eta) x_{ij} \quad (37)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial R_{ij}}{\partial \eta}(\xi, \eta) y_{ij} \quad (38)$$

Sendo assim, a inversa da matriz jacobiana  $J_1$  é dada por:

$$J_1^{-1} = \frac{1}{|J_1|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (39)$$

De forma que, para a obtenção das derivadas as quais compõem a matriz  $\mathbf{B}^e$ , é preciso utilizar a matriz inversa da jacobiana  $J_1$ . Essa relação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{ij}}{\partial y} \end{Bmatrix} = J_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_{ij}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Devido à presença do mapeamento do domínio primário para o espaço paramétrico:  $\Phi: \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$ , é preciso utilizar a regra da cadeia para obter a matriz jacobiana que representa o mapeamento direto do domínio primário para o espaço físico. Essa matriz jacobiana é dada por:

$$J = J_1^T J_2 \quad (41)$$

A expressão (41) é equivalente a:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$J = |J| \quad (43)$$

Logo, é possível obter o jacobiano necessário para a construção da matriz de rigidez  $K^e$  e do vetor de forças de volume  $f_p^e$  a partir do determinante do jacobiano  $J$  obtido na equação (43).

### 3.1.6 RECUPERAÇÃO DE TENSÕES

É proposta uma metodologia de recuperação de tensões por Hassani, Ganjali, e Tavakkoli (2011) através de uma perspectiva alternativa à Análise Isogeométrica, onde os componentes do campo de tensões recuperado são considerados uma superfície imaginária. Esta superfície é construída utilizando as mesmas funções base B-Splines e NURBS empregadas para a aproximação dos componentes do vetor de deslocamento desconhecido.

Em problemas da elasticidade bidimensional, as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos de controle são mantidas, enquanto as coordenadas  $z$  são calculadas com base em critérios derivados da noção de pontos superconvergentes, onde possuem soluções aproximadas com maior precisão, descritos em (ZENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005).

Denotando os componentes do tensor de tensões recuperado por  $\sigma_\alpha^*$ , a superfície que indica as variações desses componentes de tensão pode ser construída usando as funções base NURBS e coordenadas dos pontos de controle de forma:

$$\sigma_\alpha^* = \mathbf{R}^T \mathbf{P}_\alpha \quad (44)$$

Nos problemas de estado plano de tensões, o subscrito  $\alpha$  representa  $xx$ ,  $yy$  e  $xy$ . Para problemas bidimensionais, apenas a componente  $z$  dos pontos de controle, ou seja, o vetor  $\mathbf{P}_\alpha$ , é desconhecida e precisa ser determinada. Isso é feito minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre tensões obtidas pela AIG e as tensões recuperadas nos pontos de Gauss. Definindo a função  $F(\mathbf{P}_\alpha)$  como:

$$F(\mathbf{P}_\alpha) = \sum_{l=1}^K (\sigma_\alpha^* - \bar{\sigma}_{\alpha l})^2 \quad (45)$$

A qual pode ser reescrita como:

$$F(\mathbf{P}_\alpha) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_\alpha - \bar{\sigma}_{\alpha l})^2 \quad (46)$$

onde  $K$  é o número de pontos de Gauss,  $\bar{\sigma}_{\alpha l}$  são as resultantes de tensão por AIG em cada ponto de Gauss. A partir das condições estacionárias de  $F(\mathbf{P}_\alpha)$ , as coordenadas  $z$  da superfície de tensões melhoradas são obtidas, recaindo em um sistema:

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (47)$$

de forma que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são definidas por:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \quad (48)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \bar{\sigma}_{\alpha i} \quad (49)$$

### 3.2 MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL

A seguir, são fornecidas informações detalhadas e relevantes para a compreensão e uso da técnica do MMFGL em problemas de engenharia. É relevante destacar que o conceito isogeométrico é abordado em conjunto com a técnica do MMFGL em algumas seções, visto que a Análise Isogeométrica tem tratamento análogo ao Método dos Elementos Finitos em técnicas de integração.

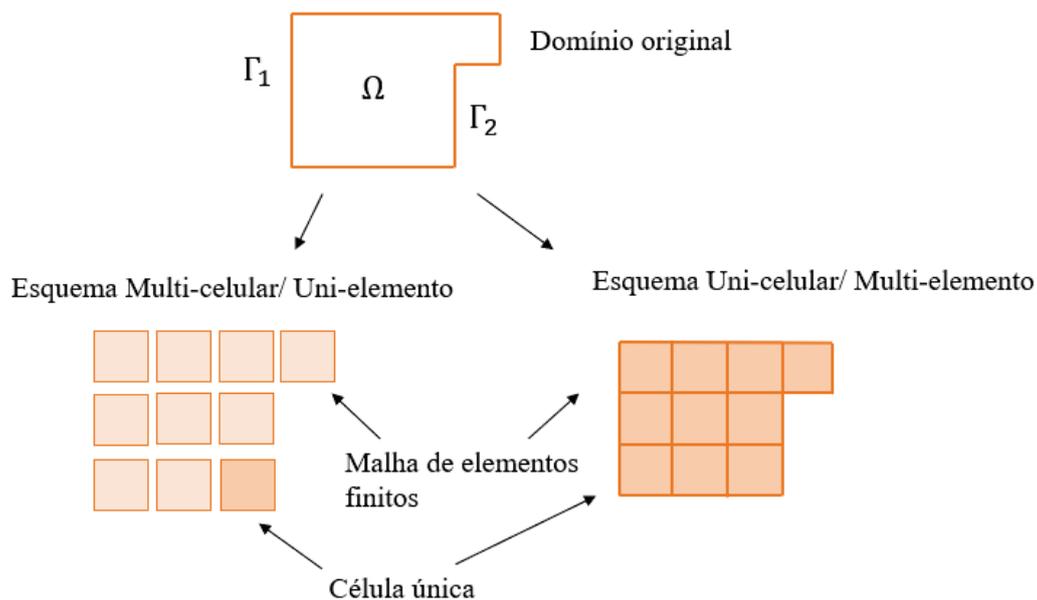
São apresentados os conceitos matemáticos e os procedimentos necessários para a implementação numérica do MMFGL. Essas informações são baseadas em trabalhos anteriores de referência,

como Barcellos e Silva (1987), Silva (1988), Machado (1992), Barbieri (1992) e Barbieri, Munõz e Machado (1998).

### 3.2.1 Abordagem

O MMFGL pode ser aplicado utilizando a abordagem uni-celular multi-elemento, a abordagem multi-celular uni-elemento ou uma combinação dos dois. Isso é realizado através da subdivisão do domínio em várias células ou sub-regiões, sendo que cada uma delas é composta por múltiplos elementos finitos (ou elementos isogeométricos, conforme empregado neste estudo). A Figura 22 ilustra um esquema com o intuito de demonstrar as diferenças entre essas abordagens no contexto do MMFGL.

FIGURA 22 - Possibilidades de discretização do domínio em MMFGL



Fonte: Adaptado de Barbieri, Munõz e Machado, 1998

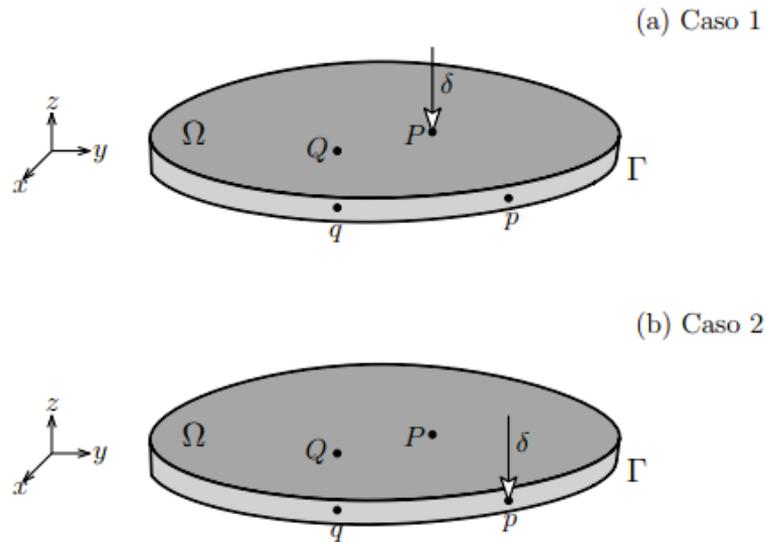
Neste trabalho, é apresentada a formulação uni-celular multi-elemento, embora a ideia possa ser adaptada facilmente para a abordagem multi-celular uni-elemento.

#### 3.2.1.1 Formulação abstrata

Dado um problema de valor de contorno qualquer, governado pelo operador diferencial  $\mathcal{L}$  no domínio e pelos operadores  $\mathcal{D}$  de Dirichlet e  $\mathcal{N}$  de Neumann associados às condições de contorno, este é resolvido em duas fases distintas e interdependentes no MMFGL. A primeira etapa é dedicada à solução do PVC (Problema de Valor de Contorno) no domínio, e a segunda etapa, no contorno, podendo ser invertida essa ordem por vantagens computacionais (MACHADO, 1992).

Durante ambas as etapas, aplica-se um carregamento delta de Dirac ( $\delta(P, Q)$ ) como fonte de excitação do sistema. Esse carregamento é aplicado como um “ponto fonte” ( $P$ ), enquanto a solução do problema é desejada em um “ponto campo” ( $Q$ ), ambos pertencentes ao domínio  $\Omega$ . O estado auxiliar do sistema é representado por  $v = v(P, Q)$ . Quando os pontos especificados estão localizados no contorno  $\Gamma$ , eles são identificados como  $p$  e  $q$  minúsculos (Figura 23).

FIGURA 23- Aplicação do carregamento delta de Dirac no domínio (a) e no contorno (b)



Fonte: Adaptado de Machado, 1998

Através da notação indicial, é expressa a “Forma de Green Generalizada”:

$$(\mathcal{L}^*v, u)_U = (v, Lu)_V + \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}^*v \rangle_{\partial K} - \langle \mathcal{N}^*v, Du \rangle_{\partial H} \quad (50)$$

Dessa forma, a partir da expressão acima, o MMFGL se baseia nas duas etapas distintas de solução:

1º Caso – Determinação da solução no domínio  $\Omega$ : Um estado auxiliar da expressão (50) é obtido a partir da aplicação do delta de Dirac no domínio:

$$\mathcal{L}^*v(P, Q) = \delta(P, Q), \quad \text{onde } P, Q \in \Omega \quad (51)$$

$$\mathcal{N}^*v(p, Q) = 0, \quad \text{onde } p \in \Gamma \quad (52)$$

Ao substituir as expressões (51) e (52) em (50), obtém-se a solução no interior do domínio  $\Omega$ :

$$u(Q) = (v(P, Q), Lu)_V + \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}^*v(P, Q) \rangle_{\delta K} \quad (53)$$

2º Caso – Determinação da solução no contorno  $\Gamma$ : Um segundo estado auxiliar da expressão (50) é obtido a partir da aplicação do delta de Dirac no contorno:

$$\mathcal{L}^*v(P, q) = 0, \quad \text{onde } P \in \Omega \text{ e } q \in \Gamma \quad (54)$$

$$\mathcal{N}^*v(p, q) = \delta(p, q), \quad \text{onde } p, q \in \Gamma \quad (55)$$

Ao substituir as expressões (54) e (55) em (50), obtém-se a solução no contorno  $\Gamma$ :

$$\mathcal{D}u(q) = (v(p, q), \mathcal{L}u)_V + \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}^*v(p, q) \rangle_{\partial K} \quad (56)$$

Sendo assim, o problema fica completamente definido pelo sistema de equações apresentados em (53) e (56).

### 3.2.1.2 Equações integrais

É pertinente ressaltar que nesta seção do trabalho utiliza-se notação indicial e formulação variacional para tratar das equações pertinentes MMFGL. Contudo, é fundamental salientar que a análise indicial em si e os conceitos mais avançados associados não são abordados neste estudo. Para uma compreensão mais aprofundada desses conceitos no âmbito do MMFGL, sugere-se a leitura de Barberi (1992), Machado (1992) e Silva (1998).

O MMFGL é um método integral capaz de resolver problemas descritos por sistemas de equações diferenciais do tipo:

$$\mathcal{L}u = b, \text{ em } \Omega \quad (57)$$

$$\mathcal{D}u = r, \text{ em } \Gamma_D \quad (58)$$

$$\mathcal{N}u = s, \text{ em } \Gamma_N \quad (59)$$

Neste contexto, os operadores  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{N}$  são, respectivamente, os operadores diferenciais do problema, operadores de Dirichlet e operadores de Neumann;  $\Omega$ ,  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  são, respectivamente, o domínio de análise e partições de contorno onde são especificadas as condições de Dirichlet e Neumann;  $b$ ,  $r$  e  $s$  são, respectivamente, a excitação do domínio e as funções que definem as condições de contorno em  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$ .

Para obter a solução fundamental para o problema em (57), é preciso resolver o problema adjunto, considerando um estado auxiliar. Esse estado é representado pelo tensor de Green ( $\mathbf{G}(P, Q)$ ),

denominado por  $v(P, Q)$  e uma carga de distribuição delta de Dirac  $\delta(P, Q)$ , aplicada no domínio, como fonte de excitação. O problema adjunto é expresso como:

$$\mathcal{L}^* \mathbf{G}(P, Q) = \delta(P, Q) \mathbf{I} \quad (60)$$

onde  $\mathcal{L}^*$  é o adjunto formal de  $\mathcal{L}$  e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade.

O tensor de Green  $\mathbf{G}(P, Q)$  pode ser interpretado como um deslocamento generalizado na direção  $i$  de um ponto qualquer  $Q$  devido a uma força generalizada unitária aplicada na direção  $j$  sobre um ponto  $P$ , onde  $P$  e  $Q \in \Omega$ . (MACHADO, 1992).

Aplicando a técnica de Resíduos Ponderados em (57), integrando no domínio  $\Omega$  com sistema de coordenadas localizadas no ponto  $P$  e igualando o resíduo a zero, juntamente com o uso do tensor de Green como função de ponderação:

$$\int_{\Omega} Lu \mathbf{G}(P, Q) d\Omega = \int_{\Omega} b \mathbf{G}(P, Q) d\Omega \quad (61)$$

Aplicando o Teorema de Green até que toda a exigência da equação diferencial recaia sobre a função de ponderação  $\mathbf{G}(P, Q)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(P) \mathcal{L}^* \mathbf{G}(P, Q) d\Omega &= \int_{\Omega} b(P) \mathbf{G}(P, Q) d\Omega - \int_{\Gamma} [\mathcal{N}^* \mathbf{G}(p, Q)]^T u(p) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, Q)^T \mathcal{N} u(p) d\Gamma \end{aligned} \quad (62)$$

onde  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{N}^*$  representam os operadores de Neumann associados a  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^*$ , respectivamente.

Por considerar o tensor de Green  $\mathbf{G}(P, Q)$  como solução fundamental do problema, a equação (62) recai em:

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_{\Omega} b(P) \mathbf{G}(P, Q)^T d\Omega - \int_{\Gamma} [\mathcal{N}^* \mathbf{G}(p, Q)]^T u(p) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, Q)^T \mathcal{N} u(p) d\Gamma \end{aligned} \quad (63)$$

Considerando o exposto, a equação acima representa a formulação "Direta do Método de Elementos de Contorno" (DMEC), onde  $\mathbf{G}(P, Q)$  é uma solução fundamental da equação (60).

Admitindo que a expressão matemática do tensor de Green  $\mathbf{G}(P, Q)$  é conhecida na sua forma explícita, o cálculo numérico das integrais que aparecem na formulação DMEC é bastante dificultado

devido à singularidade desse tensor. A singularidade dessas integrais é ainda maior na presença do operador de Neumann  $\mathcal{N}$  (BARBIERI, 1992).

Entretanto, somando e subtraindo à quantidade:

$$\mathbf{G}(p, Q)^T [\mathcal{N}' u(p)] \equiv [\mathcal{N}' \mathbf{G}(p, Q)]^T u(p) \quad (64)$$

na equação (63), tem-se a expressão básica para o desenvolvimento do MMFGL:

$$u(Q) = \int_{\Omega} b(P) \mathbf{G}(P, Q)^T d\Omega - \int_{\Gamma} [(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \mathbf{G}(p, Q)]^T u(p) d\Gamma \quad (65)$$

$$+ \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, Q)^T [(\mathcal{N} + \mathcal{N}') u(p)] d\Gamma$$

sendo o operador  $\mathcal{N}'$  igual a:

$$\mathcal{N}' = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (66)$$

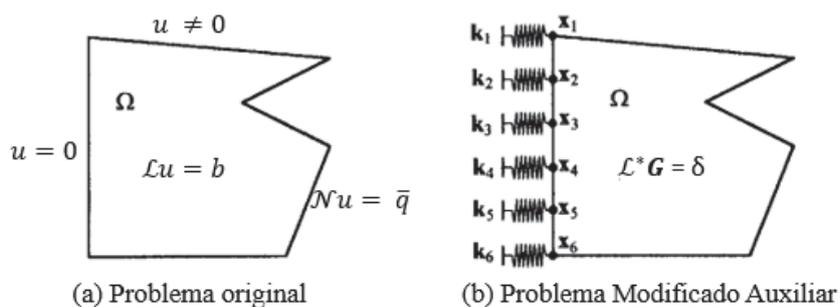
onde  $n$  corresponde ao número de graus de liberdade em cada nó, e  $k_i$  são constantes reais não nulas,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

De acordo com Barbieri, Munõz e Machado (1998), uma escolha apropriada para o operador auxiliar  $\mathcal{N}'$  é da forma:

$$\mathcal{N}' = k_i(x - x_i) \quad (67)$$

onde  $x_i$  são os pontos que correspondem aos nós da malha de elementos (Elementos Finitos) ou pontos de controle (Análise Isogeométrica), pertencentes ao contorno onde as condições homogêneas de Dirichlet são impostas. A Figura 24 ilustra a interpretação do problema modificado auxiliar associando os coeficientes  $k_i$ 's a constantes de mola.

FIGURA 24- Interpretação física do problema modificado auxiliar



Fonte: Adaptado de Barbieri, Munõz e Machado, 1998

A introdução do operador  $\mathcal{N}'$  implica que seja satisfeita a condição de contorno apresentada na expressão (68), e que neste momento, a solução fundamental  $\mathbf{G}(P, Q)$  passe a corresponder, realmente, a uma Função de Green.

$$[(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \mathbf{G}(p, Q)]^T = 0 \quad (68)$$

Segundo Machado (1992), a equação (65) ainda não é aconselhável sob o ponto de vista numérico. Sendo assim, é definida uma nova variável:

$$f(p) = (\mathcal{N}^* + \mathcal{N}')u(p) \quad (69)$$

Substituindo a condição de contorno (68) e a nova variável (69) na expressão básica para o desenvolvimento do MMFGL em (65), resulta na expressão dos deslocamentos generalizados no domínio  $\Omega$ :

$$u(Q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^T b(P) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, Q)^T f(p) d\Gamma \quad (70)$$

Essas alterações foram propostas inicialmente por Silva (1988) e Barcellos e Silva (1987) para serem trabalhadas mais “confortavelmente” do ponto de vista numérico. Para a determinação da solução no contorno  $\Gamma$ , poderia se realizar um tratamento análogo, porém, como as variáveis envolvidas, por hipótese, pertencem a espaços de Hilbert que apresentam a propriedade do traço, pode-se simplesmente aplicar o operador traço diretamente a (71) e obter:

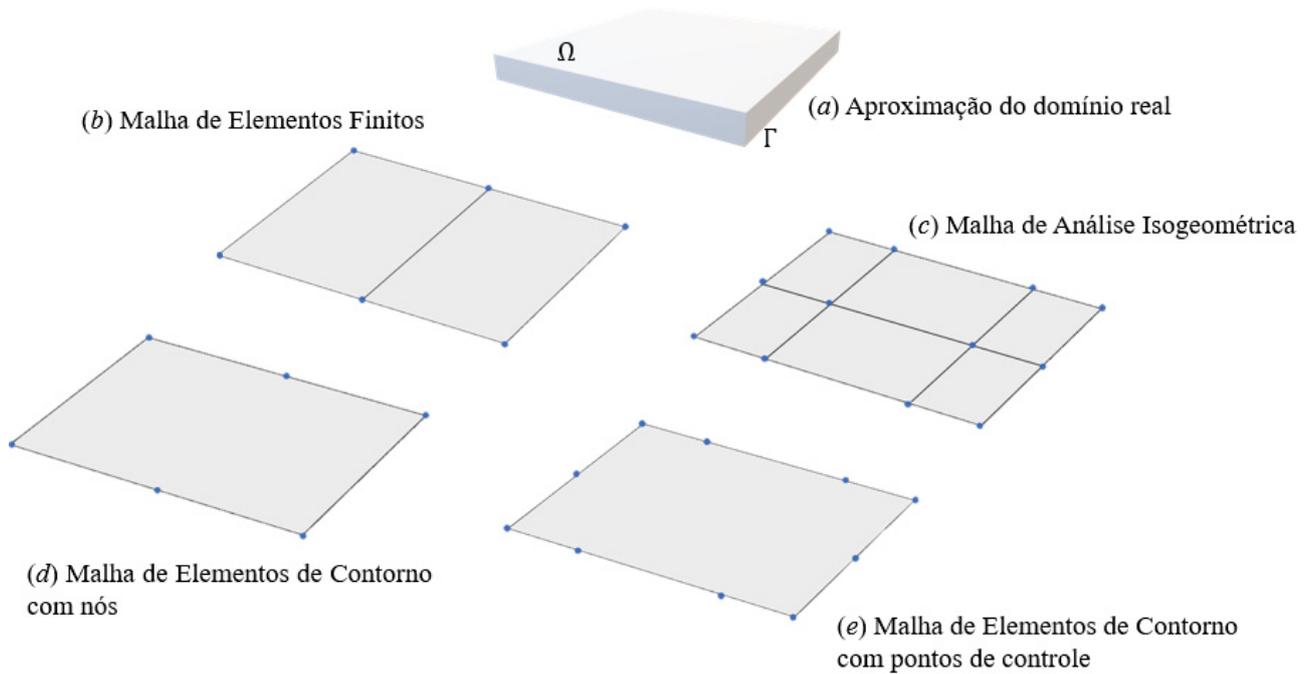
$$u(q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, q)^T b(P) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, q)^T f(p) d\Gamma \quad (71)$$

### 3.2.2 Aproximação das equações integrais

Nesta seção, os sistemas de equações de deslocamentos generalizados no domínio  $\Omega$  (70) e no contorno  $\Gamma$  (71) são aproximados utilizando as técnicas do Método dos Elementos Finitos e/ou a nova abordagem por Análise Isogeométrica, em conjunto com o Método de Elementos de Contorno. Essas técnicas permitem transformar os sistemas de equações diferenciais em sistemas de equações lineares, facilitando a resolução numérica.

Na Figura 25, são exibidas as malhas em suas configurações iniciais, compostas por dois elementos cada. No MEF, é adotado um grau mínimo das funções de forma igual a  $p = 1$ , o que significa que as funções de forma são lineares. Por outro lado, na abordagem isogeométrica, o grau mínimo das funções de forma é estabelecido como  $p = 2$ , devido à natureza das NURBS, que descrevem curvas. Essa característica é considerada na disposição dos nós ou pontos de controle.

FIGURA 25- Aproximação do domínio real por MEF, AIG e MEC



Fonte: Autora, 2023

A implementação numérica é realizada através da sequência a seguir:

a) Discretização do domínio:

De forma análoga ao MEF ou a AIG, o domínio real do problema  $\Omega_R$  é idealizado por  $\Omega_H$  que busca se aproximar o máximo possível do domínio original. Em seguida, este é dividido em "nef" subdomínios, que são elementos finitos ou elementos isogeométricos ( $\bar{\Omega}^k$ ), os quais utilizam de funções base polinomiais, como polinômios de Lagrange, ou isogeométricas, como as NURBS, em cada método respectivamente. Sendo assim, isso é exposto a seguir:

$$\Omega_R \cong \Omega_H = \bigcup_{k=1}^{nef} \bar{\Omega}^k \quad (72)$$

b) Discretização do contorno:

O contorno  $\Gamma$  é aproximado através da utilização de uma discretização  $\Gamma_H$ , que por sua vez é subdividida em NEC partes, representando os elementos de contorno  $\Gamma_K$ . Analogamente ao caso anterior, têm-se:

$$\Gamma_H = \bigcup_{k=1}^{NEC} \bar{\Gamma}^k \quad (73)$$

Para realizar aproximações tanto no domínio quanto no contorno, é possível empregar funções de interpolação  $\psi_i$  e  $\varphi_j$ , respectivamente. Essas funções, definidas localmente em cada elemento, geram subespaços de dimensões finitas  $V^h$  de  $V$ ,  $H^h$  de  $H$  e  $\partial H^h$  de  $\partial H$ , onde são geradas as projeções do tensor de Green. Vale ressaltar que as funções  $\psi_i$  abrangem tanto as funções tradicionais de Elementos Finitos quanto as funções B-Splines no contexto da Análise Isogeométrica (AIG).

c) Aproximações no domínio:

As variáveis envolvidas nas expressões dos deslocamentos generalizados (70) e (71) podem ser aproximadas utilizando as mesmas funções de interpolação  $\psi_i$  e  $\varphi_j$ , ou seja:

$$\begin{aligned} u(Q) &= \mathbf{\Psi}(Q)\mathbf{u}_D & u(q) &= \mathbf{\Phi}(q)\mathbf{u}_C \\ b(Q) &= \mathbf{\Psi}(P)\mathbf{b} & f(q) &= \mathbf{\Phi}(p)\mathbf{f} \end{aligned} \quad (74)$$

onde  $\mathbf{u}_D$ ,  $\mathbf{u}_C$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{f}$  representam os vetores “generalizados” dos deslocamentos nodais no domínio e no contorno, das forças de corpo e das ações nodais, respectivamente.  $[\mathbf{\Psi}(\cdot)]$  e  $[\mathbf{\Phi}(\cdot)]$  são as matrizes das funções de interpolação em uma célula de Green.

Por  $[\mathbf{\Phi}(q)]$  ser o traço de  $[\mathbf{\Psi}(Q)]$ , assim como  $u(q)$  é o traço de  $u(Q)$ , os valores de  $\mathbf{u}_D$  correspondentes aos nós (ou pontos de controle) que estão sobre o contorno, coincidem com os valores associados de  $\mathbf{u}_C$  na malha de Elementos de Contorno.

Ao realizar a substituição das aproximações no domínio, conforme exposto em (74), na expressão dos deslocamentos generalizados no domínio  $\Omega$  exposta na expressão (70) e aplicando o Método de Galerkin, ou seja, tomando a projeção de  $u(Q)$  ortogonal a  $[\mathbf{\Psi}(Q)]$ , obtém-se um sistema de equações no domínio:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_D = \mathbf{B} \mathbf{f} + \mathbf{C} \mathbf{b} \quad (75)$$

De maneira que:

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{\Psi}(Q)^T \mathbf{\Psi}(Q) d\Omega; \quad (76)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \mathbf{\Psi}(Q)^T \mathbf{G}_c(Q) d\Omega; \quad (77)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{\Psi}(Q)^T \mathbf{G}_d(Q) d\Omega; \quad (78)$$

$$\mathbf{G}_c(Q) = \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, Q)^T \mathbf{\Phi}(q) d\Gamma; \quad (79)$$

$$\mathbf{G}_d(Q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^T \mathbf{\Psi}(P) d\Omega, \quad (80)$$

onde  $\mathbf{G}_c(Q)$  e  $\mathbf{G}_d(Q)$  são as projeções, num ponto  $Q$  de domínio, do tensor de Green  $\mathbf{G}(\cdot, Q)$ , no espaço gerado pelas funções de interpolação  $\psi_i$  e  $\varphi_j$ , na ordem mencionada.

Da mesma forma que se substituem as aproximações no domínio, determina-se o sistema de equações no contorno através da substituição das aproximações no domínio (74) na solução no contorno em (71) e aplicando o Método de Galerkin, de tal maneira que se tome a projeção de  $u(q)$  ortogonal a  $[\mathbf{\Phi}(q)]$ :

$$\mathbf{D} \mathbf{u}_c = \mathbf{E} \mathbf{f} + \mathbf{F} \mathbf{b} \quad (81)$$

onde:

$$\mathbf{D} = \int_{\Gamma} \mathbf{\Phi}(q)^T \mathbf{\Phi}(q) d\Gamma; \quad (82)$$

$$\mathbf{E} = \int_{\Gamma} \mathbf{\Phi}(q)^T \mathbf{G}_c(q) d\Gamma; \quad (83)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \mathbf{\Phi}(q)^T \mathbf{G}_d(q) d\Gamma; \quad (84)$$

$$\mathbf{G}_c(q) = \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, q)^T \mathbf{\Phi}(q) d\Gamma; \quad (85)$$

$$\mathbf{G}_d(q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, q)^T \mathbf{\Psi}(P) d\Omega, \quad (86)$$

onde  $\mathbf{G}_c(q)$  e  $\mathbf{G}_d(q)$  são as projeções, num ponto  $q$  de contorno, do tensor de Green  $\mathbf{G}(\cdot, q)$ , no espaço gerado pelas funções de interpolação  $\psi_i$  e  $\varphi_j$ , na ordem mencionada.

Os sistemas de equações (75) e (81) solucionam integralmente tanto o problema de domínio quanto o de contorno. É importante observar que as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$  podem ser facilmente determinadas, pois envolvem apenas o produto interno entre as funções de interpolação do domínio e do contorno. Por outro lado, as matrizes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dependem do conhecimento das projeções da função de Green.

### 3.2.3 Determinação das projeções de Green

Pelas matrizes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dependerem das projeções de Green  $\mathbf{G}_C(Q)$ ,  $\mathbf{G}_D(Q)$ ,  $\mathbf{G}_C(q)$  e  $\mathbf{G}_D(q)$ , utiliza-se do método proposto por Barcellos e Silva (1987) e Silva (1988) que consiste em obter tais projeções em duas etapas distintas através do MEF. As duas etapas são abordadas em sequência:

1ª etapa: Determinação das projeções de Green  $\mathbf{G}_d(Q)$  e  $\mathbf{G}_c(Q)$  correspondentes aos tensores  $G(P, Q)$  e  $G(p, Q)$ .

Nesta etapa, com a aplicação de carregamento delta de Dirac  $\delta(\cdot, \cdot)$  no domínio  $\Omega$ , resolve-se os sistemas situados em (54) e (55) considerando que o sistema auxiliar  $v = v(\cdot, Q)$  seja definido pelo tensor de Green  $\mathbf{G}(\cdot, Q)$  no domínio, e introduzindo o operador adicional  $\mathcal{N}'$  nas condições de contorno:

$$\mathcal{L}^* \mathbf{G}(P, Q)^T = \delta(P, Q) \mathbf{I} \quad \text{onde } P, Q \in \Omega \quad (87)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \mathbf{G}(p, Q)^T = 0 \quad \text{onde } p \in \Gamma \text{ e } Q \in \Omega \quad (88)$$

Multiplicando a expressão (87) pela função de interpolação  $\Psi(P)$ , e integrando no domínio, tem-se:

$$\mathcal{L}^* \left( \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^T \Psi(P) d\Omega \right) = \int_{\Omega} \delta(P, Q) \Psi(P) d\Omega \quad (89)$$

O termo de  $\mathbf{G}_d(Q)$ , situado na expressão (80), é reconhecido na primeira integral acima, resultando em:

$$\mathcal{L}^* \mathbf{G}_d(Q) = \Psi(Q) \quad (90)$$

De modo análogo, adotando o mesmo procedimento, porém agora para obtenção da projeção  $\mathbf{G}_c(Q)$ , ou seja, multiplicando a expressão (88) pela função de interpolação  $\Phi(p)$  e integrando em relação ao contorno:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, Q)^T \Phi(p) d\Gamma = 0 \quad (91)$$

O que equivale a:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \mathbf{G}_c(Q) = 0 \quad (92)$$

2ª etapa: Determinação das projeções  $\mathbf{G}_c(q)$  e  $\mathbf{G}_d(q)$  correspondentes aos tensores de Green  $\mathbf{G}(p, q)$  e  $\mathbf{G}(P, q)$ , respectivamente.

Aplicando o delta de Dirac, agora no contorno  $\Gamma$ , resolve-se o sistema situado nas expressões (73) e (74), considerando que o estado auxiliar  $v = v(\cdot, q)$  seja definido pelo tensor de Green  $\mathbf{G}(\cdot, q)$ , e incluindo o operador adicional  $\mathcal{N}'$  nas condições de contorno:

$$\mathcal{L}^* \mathbf{G}(P, q)^T = 0 \quad \text{onde } P \in \Omega \text{ e } q \in \Gamma \quad (93)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \mathbf{G}(p, q)^T = \delta(p, q) \mathbf{I} \quad \text{onde } p, q \in \Gamma \quad (94)$$

Multiplicando a expressão (93) pela função de interpolação  $\Psi(P)$ , e integrando em relação ao domínio:

$$\mathcal{L}^* \left( \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, q)^T \Psi(P) d\Omega \right) = 0 \quad \text{onde } P \in \Omega \text{ e } q \in \Gamma \quad (95)$$

Encontra-se o termo de  $\mathbf{G}_d(q)$  na primeira integral acima, resultando em:

$$\mathcal{L}^* \mathbf{G}_d(q) = 0 \quad (96)$$

Analogamente, porém em relação à expressão (94), para obtenção da projeção  $\mathbf{G}_c(q)$  é multiplicada a função de interpolação  $\Phi(p)$  e integra-se ao longo do contorno:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, q)^T \Phi(p) d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta(p, q) \Phi(p) d\Gamma \quad (97)$$

o que equivale a:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \mathbf{G}_c(q) = \Phi(q) \quad (98)$$

De acordo com Machado (1992), adotando funções de forma convencionais de Elementos Finitos, os termos da direita nas expressões (90) e (98) tem continuidade do tipo  $C^0(\Omega)$ . Como a excitação adotada nas duas etapas é a do tipo delta de Dirac  $\delta$ , sendo, portanto, muito mais singular, conclui-se que as projeções de Green têm um comportamento muito mais suave e regular que o próprio tensor de Green  $\mathbf{G}(P, Q)$ , simplificando o tratamento numérico, e sendo um dos motivos mais importantes para o excelente desempenho do MMFGL.

Para a Análise Isogeométrica é relevante destacar que, portanto, os termos da direita nas expressões (90) e (98) teriam continuidade do tipo  $C^0(\Omega)$  ou maior, trazendo maior suavidade ainda para o tensor de Green.

Sendo assim, as projeções de Green também podem ser expandidas pelas funções de interpolação  $\psi_i$  e  $\varphi_j$ , usadas anteriormente, considerando que estas são suaves e contínuas:

$$\mathbf{G}_d(Q) = [\Psi(Q)] \mathbf{G}^{DQ} \quad \mathbf{G}_d(q) = [\Phi(q)] \mathbf{G}^{Dq} \quad (99)$$

$$\mathbf{G}_c(Q) = [\Psi(Q)]\mathbf{G}^{CQ} \quad \mathbf{G}_c(q) = [\Phi(q)]\mathbf{G}^{Cq}$$

onde  $\mathbf{G}^{DQ}$ ,  $\mathbf{G}^{Dq}$ ,  $\mathbf{G}^{CQ}$  e  $\mathbf{G}^{Cq}$  são as projeções de  $\mathbf{G}_d(Q)$ ,  $\mathbf{G}_d(q)$ ,  $\mathbf{G}_c(Q)$  e  $\mathbf{G}_c(q)$ , respectivamente, nos espaços formados pelas funções de interpolação  $\psi_i$  e  $\varphi_j$ .

Barcellos e Silva (1987) propuseram a obtenção das projeções de  $\mathbf{G}_d(Q)$ ,  $\mathbf{G}_d(q)$ ,  $\mathbf{G}_c(Q)$  e  $\mathbf{G}_c(q)$  de forma análoga ao MEF, através da minimização dos funcionais  $\mathcal{F}(\mathbf{G}_d)$  e  $\mathcal{F}(\mathbf{G}_c)$ , os quais dependem do tipo de problema que se está analisando. Os respectivos funcionais são descritos em Barbieri (1992), portanto, não são detalhados neste trabalho.

Essa minimização descrita acima, resulta no seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}[\mathbf{G}^{DQ}|\mathbf{G}^{CQ}] = [\mathbf{A}|\mathbf{D}], \quad (100)$$

de forma que:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{MEF ou AIG}} + \mathbf{K}'; \quad (101)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez de MEF e/ou AIG,  $\mathbf{K}'$  é a matriz do operador adicional  $\mathcal{N}'$  nas condições de contorno, a qual pode ser considerada como a expressão (64):

$$\mathbf{K}' = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (102)$$

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$  estão relacionadas ao processo de minimização dos funcionais  $\mathcal{F}(\mathbf{G}_d)$  e  $\mathcal{F}(\mathbf{G}_c)$ , de forma correspondente. Essas matrizes representam as equações (76) e (82).

Os coeficientes  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são constantes reais não nulas, onde  $n$  corresponde ao número de graus de liberdade, e com valores que não comprometam o condicionamento do sistema de equações final. Devem ser especificados apenas onde existam condições homogêneas de Dirichlet ( $\bar{u} = 0$ ). (MACHADO, 1992).

### 3.2.4 Implementação das matrizes e resolução do sistema de equações

Nesta seção, aborda-se como são obtidas as projeções  $\mathbf{G}^{Dq}$  e  $\mathbf{G}^{Cp}$  junto com a reconsideração dos sistemas expostos em (75) e (81), os quais necessitam das matrizes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$ .

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$ , situadas nas expressões (75) e (82), respectivamente, são facilmente determinadas, de forma análoga à matriz de massa presente na análise dinâmica, pois envolvem apenas das funções de interpolação de domínio e contorno. A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  também é facilmente obtida pois segue o procedimento de cálculo de MEF ou AIG somada de uma matriz diagonal correspondente ao operador adicional  $\mathcal{N}'$  nas condições de contorno. Dessa forma, tendo definido  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{K}$ , obtém-se  $\mathbf{G}^{DQ}$  e  $\mathbf{G}^{CQ}$  através da resolução do sistema apresentado na equação (100).

Uma vez conhecidos os valores de  $\mathbf{G}^{DQ}$  e  $\mathbf{G}^{CQ}$ , consegue-se obter automaticamente, pela propriedade do traço, os valores de  $\mathbf{G}^{Dq}$  e  $\mathbf{G}^{Cq}$ , ou seja, estes são submatrizes de  $\mathbf{G}^{DQ}$  e  $\mathbf{G}^{CQ}$  correspondentes às colunas que estão vinculadas aos nós de controle.

Com todas as projeções dos tensores de Green obtidas, as matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , em (77) e (78), respectivamente, podem ser reescritas como:

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^T [\Psi(Q)] d\Omega \mathbf{G}^{CQ} \quad (103)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^T [\Psi(Q)] d\Omega \mathbf{G}^{DQ} \quad (104)$$

Reconhecendo a matriz  $\mathbf{A}$  expressa em (76) nas expressões acima, têm-se:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{G}^{CQ} \quad (105)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{G}^{DQ} \quad (106)$$

De maneira análoga, a matriz  $\mathbf{E}$  expressa em (83) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{E} = \int_{\Gamma} [\Phi(q)]^T [\Phi(q)] d\Omega \mathbf{G}^{Cq} \quad (107)$$

Agora, reconhecendo a matriz  $\mathbf{D}$  expressa em (82), tem-se:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} \mathbf{G}^{Cq} \quad (108)$$

Considerando que as funções de interpolação de contorno  $\Phi(\cdot)$  correspondem aos traços das funções de interpolação no domínio  $\Psi(\cdot)$ , observa-se em (77) e (84) que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \quad (109)$$

De posse de todas as matrizes, do vetor de forças  $\mathbf{b}$ , dos fluxos no contorno prescritos  $\bar{\mathbf{f}}$  e potenciais prescritos  $\bar{\mathbf{u}}_c$ , o sistema representado na expressão (81) é resolvido de maneira similar ao MEC, ou seja, reordenando o sistema com condições de contorno prescritas à direita e variáveis à esquerda:

$$[-\mathbf{E} \mid \mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_c \end{Bmatrix} = [-\bar{\mathbf{D}} \mid \bar{\mathbf{E}}] \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_c \\ \bar{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} + \mathbf{F}\mathbf{b} \quad (110)$$

Para obtenção do vetor de potenciais ou deslocamentos de domínio  $\mathbf{u}_D$ , o sistema, no domínio, representado na equação (75) pode ser simplificado notando que todos os termos são multiplicados

pela matriz  $\mathbf{A}$ . Sendo assim, o sistema pode ser reescrito de modo que não seja preciso a inversão da matriz  $\mathbf{A}$ .

$$u_D = \mathbf{G}^{CQ} \mathbf{f} + \mathbf{G}^{DQ} \mathbf{b} \quad (111)$$

Caso adotado o procedimento exposto em (110), a matriz  $\mathbf{C}$  não precisa ser calculada, bastando, para tanto, o conhecimento de  $\mathbf{G}^{CQ}$  e  $\mathbf{G}^{DQ}$ . Sendo assim, tornam-se necessárias apenas as matrizes  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T$ ) e  $\mathbf{E}$ .

### 3.3 NOVA FORMULAÇÃO DO MMFGL

Neste capítulo é apresentada uma formulação alternativa para o Método Modificado da Função de Green Local proposto em Corrêa, Arndt e Machado (2022) e Corrêa, Arndt e Machado (2023). Esta nova abordagem elimina a necessidade de resolver certos sistemas de equações presentes na formulação original do método, como é detalhado a seguir.

#### 3.3.1 Formulação

Dado um Problema de Valor de Contorno, ao aplicar o Método dos Resíduos Ponderados sob o domínio através de uma função peso na equação (57), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}uw \, d\Omega = \int_{\Omega} bw \, d\Omega \quad (112)$$

Aplicando o Teorema de Green na expressão (112), ela se transforma em:

$$B(u, w) - \int_{\Gamma} \mathcal{N}uw \, d\Gamma = \int_{\Omega} bw \, d\Omega \quad (113)$$

onde  $B(\cdot, \cdot)$  é a forma bilinear que mede a interação entre  $u$  e  $w$  dentro do domínio  $\Omega$ .

De acordo com Corrêa, Arndt e Machado (2023), para Estado Plano de Tensões e Deformações, a forma bilinear é definida por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w}^T \mathbf{D} \nabla^s \mathbf{u} \, d\Omega \quad (114)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva e  $\nabla^s(\cdot)$  é a parte simétrica do operador gradiente  $\nabla(\cdot)$  definida como:

$$\nabla^s(\cdot) = \frac{1}{2}(\nabla(\cdot) + \nabla(\cdot)^T) \quad (115)$$

A expressão (113) representa essencialmente a forma fraca de Galerkin. Definindo agora a variável de fluxo na fronteira como:

$$f(p) = \mathcal{N}u(p) \quad (116)$$

A principal distinção em relação à formulação de Elementos Finitos reside no fato de que as funções de ponderação não são assumidas como nulas na fronteira de Dirichlet, conseqüentemente é preciso assumir uma aproximação dos fluxos normais ou trações na fronteira, além do potencial e dos deslocamentos. Adotando a mesma aproximação para as variáveis da equação (74) e usando as funções de base do domínio como funções de ponderação  $w$ , a equação (113) se torna:

$$B(\Psi(P), \Psi(P)) \mathbf{u}_D = \int_{\Gamma} \Psi^T(p) \Phi(q) d\Gamma \mathbf{f} + \int_{\Omega} \Psi^T(p) \Psi(P) d\Omega \mathbf{b} \quad (117)$$

Aqui, a forma bilinear  $B(.,.)$  é a mesma relacionada com a matriz de rigidez de Elementos Finitos. Reconhecendo que as integrais são, respectivamente as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$ , onde as funções no contorno  $\Phi$  são o traço das funções no domínio  $\Psi$ , a equação (117) é reduzida ao seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}_{AIG} \mathbf{u}_D = \mathbf{Df} + \mathbf{Ab} \quad (118)$$

Esse sistema pode ser resolvido reorganizando as colunas da matriz  $\mathbf{K}_{MEF}$  e  $\mathbf{D}$ , similarmente ao Método dos Elementos de Contorno. Ou seja:

$$[-\mathbf{D} | \mathbf{K}_{MEF}] \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_D \end{Bmatrix} = [-\bar{\mathbf{K}}_{MEF} | \bar{\mathbf{D}}] \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_D \\ \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{Ab} \end{Bmatrix} \quad (119)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}_D$  e  $\bar{\mathbf{f}}$  são as condições de contorno prescritas no contorno do problema. Ao desconsiderar os efeitos do operador adicional  $\mathcal{N}'$ , é possível escrever:

$$\mathbf{K}_{MEF} \mathbf{G}^{DQ} = \mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{G}^{DQ} = \mathbf{K}_{MEF}^{-1} \mathbf{A} \quad (120)$$

$$\mathbf{K}_{MEF} \mathbf{G}^{BQ} = \mathbf{D} \text{ ou } \mathbf{G}^{BQ} = \mathbf{K}_{MEF}^{-1} \mathbf{D} \quad (121)$$

Pode-se notar que as projeções dos tensores de Green estão presentes na nova formulação apresentada nas equações (120) e (121). Observa-se também que ao multiplicar todos os termos da nova formulação por  $\mathbf{K}_{MEF}^{-1}$ , recai-se na expressão (117), típica do sistema tradicional de MMFGL.

Assim, é possível reduzir um extenso sistema de equações, visto que as matrizes  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{A}$  são matrizes e não vetores. Em outras palavras, a nova formulação requer a solução de apenas um único sistema de equações, mantendo as mesmas propriedades da aproximação original. Essa aproximação pode ser estendida para algum outro método que utilize Galerkin.

## 4 METODOLOGIA – PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção é apresentada a metodologia adotada neste estudo, detalhando os procedimentos computacionais para a implementação do conceito isogeométrico à abordagem alternativa do Método Modificado da Função de Green Local.

### 4.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E DADOS DE ENTRADA

Os problemas selecionados nesta pesquisa foram definidos com o intuito de aplicar o conceito da elasticidade linear a situações já abordadas na literatura pela Análise Isogeométrica tradicional. A partir da definição da geometria do problema, os dados de entrada essenciais para a obtenção do campo de respostas se dão através dos vetores de *knots*, grau das funções base NURBS, número de pontos de integração, pontos de controle e pesos, parâmetros de elasticidade e condições de contorno.

### 4.2 DISCRETIZAÇÃO

A partir dos dados de entrada, é estabelecida a lógica de numeração das funções NURBS locais e globais por meio das matrizes de conectividade INC e IEN e a discretização é realizada através de um único *patch* devido às características dos problemas, embora casos em que a geometria e as propriedades variam significativamente dentro do domínio, pode ser necessário utilizar múltiplos *patches* para representar com precisão a heterogeneidade do problema.

Aderindo à propriedade do traço, a discretização do contorno é realizada através de NURBS unidimensionais definidas pelo vetor de *knots* do elemento em que se está analisando, respeitando o grau da função e pontos de integração. Com isso, a lógica de criação das matrizes de conectividade se mantém, porém com a redução de uma dimensão do problema. Por exemplo, para um problema de estado plano, a discretização da malha é realizada similarmente a de um problema de barra.

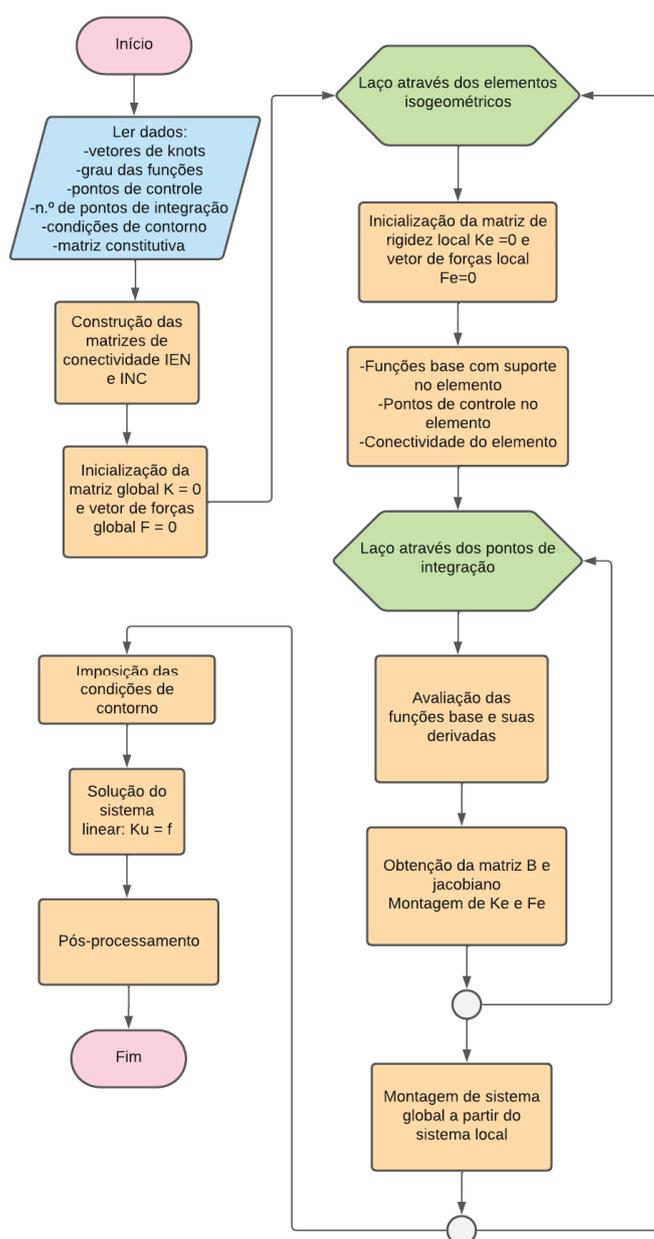
Destaca-se a importância da definição dos pontos de controle na malha, uma vez que estes podem afetar significativamente o campo de respostas. Como demonstrado por Veiga e Machado (2023), a disposição de pontos de controle igualmente espaçados em uma viga engastada em estado plano de tensões, de forma análoga ao procedimento adotado em Elementos Finitos lineares, resulta em uma diminuição da precisão das respostas. Essa análise foi realizada por meio da avaliação da convergência do deslocamento máximo na direção  $y$  da viga, comparando o desempenho entre o refinamento  $k$ , o refinamento  $hp$  e o refinamento  $k$  com uma disposição linear dos pontos de controle. Observou-se que o refinamento  $k$  original apresentou os melhores resultados, seguido pelo refinamento  $hp$ . Em contrapartida, o refinamento  $k$  com disposição linear dos pontos de controle revelou-se o menos eficiente, apresentando erros que chegaram a ser até o dobro maiores em comparação às outras abordagens.

Portanto é recomendado utilizar os pontos de controle provenientes de ambiente CAD para otimizar o desempenho do Isogeométrico. Para isso, utilizou-se malhas iniciais pré-estabelecidas e com o auxílio da biblioteca *NURBS-Python (geomdl)* (BINGOL & KRISHNAMURTHY, 2019) prosseguiu-se ao refino das malhas com vetores de *knots* e pesos atualizados conforme discretização.

#### 4.3 FLUXO DE CÁLCULO

O fluxo de cálculo utilizado para a aplicação da Análise Isogeométrica em problemas de único *patch* é ilustrado através do fluxograma presente na Figura 26. Este foi implementado através de código computacional de própria autoria em linguagem computacional *Python* versão 5.3.1.

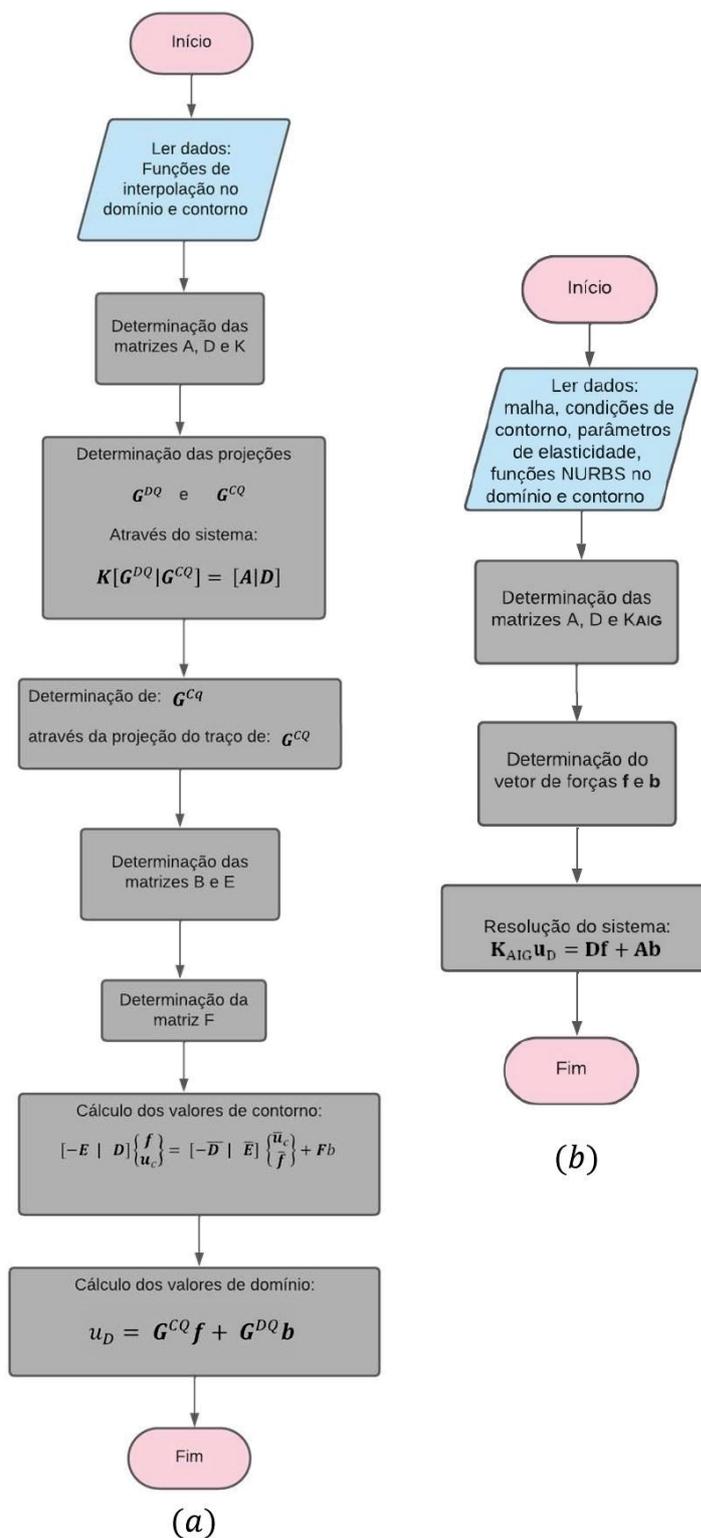
FIGURA 26 - Fluxograma de implementação computacional de AIG



Fonte: Autora, 2023

O segundo fluxograma ilustra o cálculo do MMFGL em comparação com o procedimento de cálculo para a nova abordagem isogeométrica (Figura 27).

FIGURA 27- Comparação de fluxograma de cálculo entre (a) MMFGL (b) e nova abordagem isogeométrica para o MMFGL



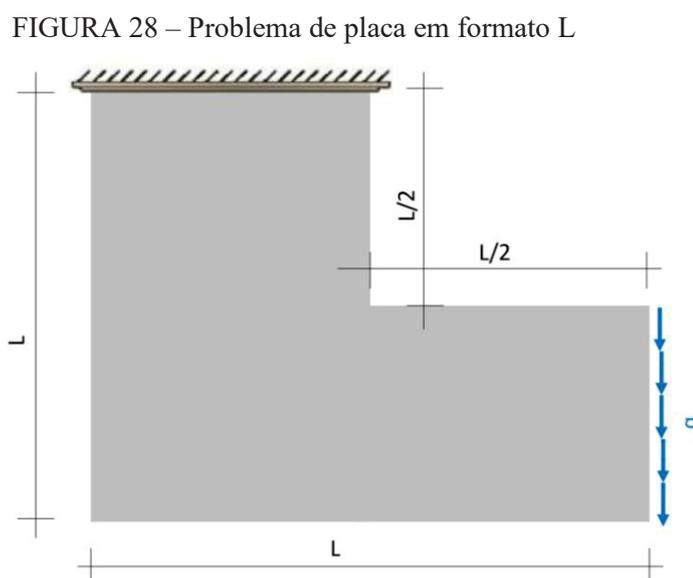
Para a implementação da Análise Isogeométrica no contexto do Método Modificado da Função de Green Local adaptou-se o código computacional desenvolvido por Corrêa, Arndt e Machado (2023) em linguagem *Python* também, utilizando os conceitos já descritos anteriormente para o procedimento de cálculo apresentado na Figura 26. Para fins de comparação de respostas, o problema também foi modelado no contexto do Método dos Elementos Finitos através do *software* de versão estudantil FEMAP 2021.2.

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados da pesquisa obtidos em aplicações numéricas para problemas de estado plano de tensões. Detalhes de implementação e discretização são discutidos, destacando-se que, para integração de todos os casos, utilizou-se  $p + 1$  pontos de integração. Em seguida, são apresentadas as respostas numéricas. A comparação é feita entre o Método dos Elementos Finitos, a Análise Isogeométrica Tradicional e a Nova Abordagem Isogeométrica para o Método Modificado da Função de Green Local, além de uma comparação com a solução analítica disponível na literatura. São analisados aspectos de precisão, convergência e refinamentos:  $h$  e  $k$ .

### 5.1 PLACA EM FORMATO L

Neste exemplo é abordado a solução do problema apresentado com as condições de contorno indicadas na Figura 28 para uma placa em formato da letra L e engastada. Os parâmetros de elasticidade empregados são: módulo de elasticidade  $E = 10^5$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . A força distribuída aplicada é  $q = 30$ , comprimento  $L = 2$  e espessura unitária  $t = 1$ . É considerado um Estado Plano de Tensões.



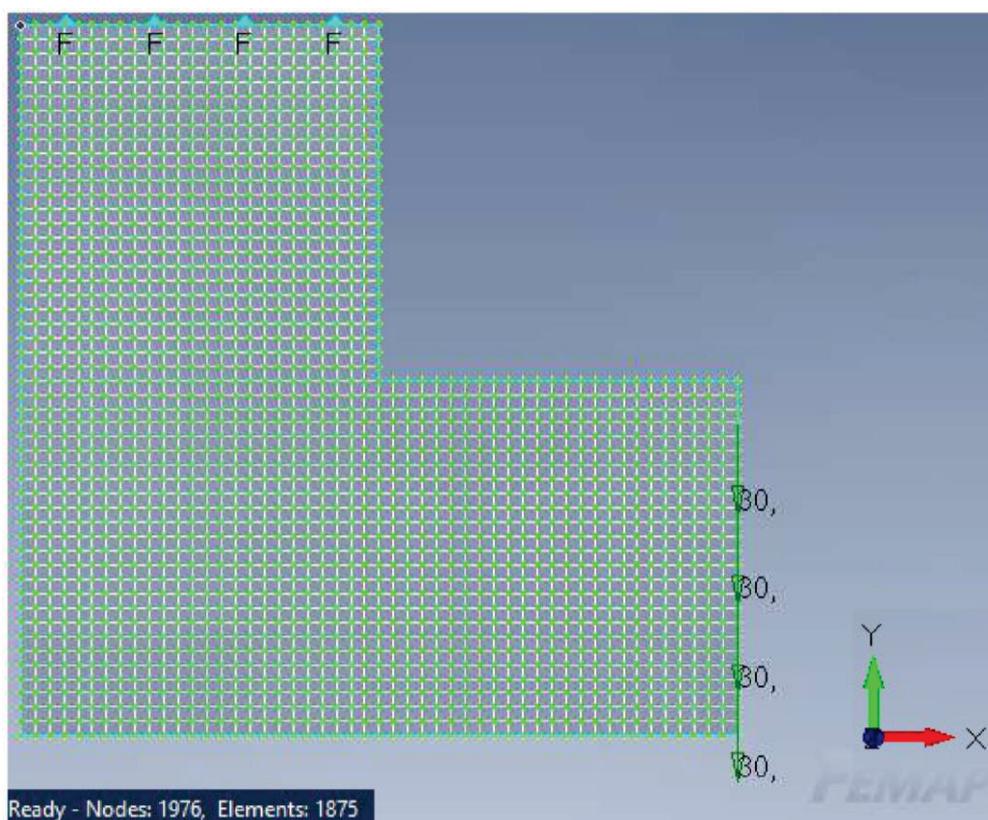
Fonte: Autora, 2024

Os campos de deslocamentos nas direções de  $x$  e  $y$  são apresentados através da nova abordagem Isogeométrica para o Método Modificado da Função de Green Local, Análise Isogeométrica pura e Método dos Elementos Finitos. Os detalhes são apresentados em seguida.

### 5.1.1 ASPECTOS DE DISCRETIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO

Inicialmente, no contexto dos Elementos Finitos, a Figura 29 ilustra a malha e condições de contorno impostas na simulação do problema pelo software FEMAP. Foram empregadas funções polinomiais lineares, pois, devido às limitações da versão estudantil do software não houve possibilidade realizar refinamentos de elevação de ordem polinomial, e a malha é composta por 1976 nós. As malhas utilizadas em Análise Isogeométrica pura e nova abordagem por MMFGL são apresentadas a seguir.

FIGURA 29 - Malha e condições de contorno de Elementos Finitos de placa L



Fonte: Autora, 2024

Para a geração dos pontos de controle, vetor de *knots* e pesos da malha inicial isogeométrica, utilizou-se os dados apresentados em Vuong (2012) em uma análise da equação de Laplace aplicada a um domínio  $\Omega = [-1,1]^2 \setminus [0,1]^2$  com formato de “L”:

TABELA 3 - Dados de formato L com continuidade  $C^1$ 

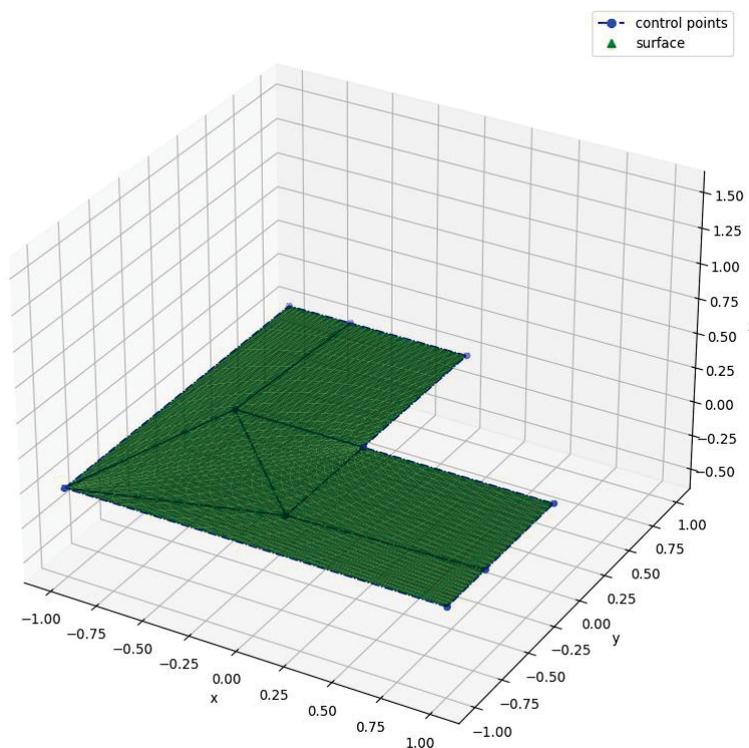
$$p = 2, q = 2, \Xi = \{0,0,0,0.5,1,1,1\} \text{ e } \mathcal{H} = \{0,0,0,1,1,1\}$$

n.º	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	-1	-1	-1	1	-0,65	-0,7	0	1	0	0	0	1
y	1	-1	-1	-1	1	0	-0,7	-0,65	1	0	0	0
w	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Vuong, 2012

A partir dos dados impostos na Tabela 3, a malha inicial isogeométrica é plotada na Figura 30, com o auxílio da biblioteca *NURBS-Python (geomdl)* 5.3.1 (BINGOL & KRISHNAMURTHY, 2019).

FIGURA 30 - Malha isogeométrica inicial de placa L

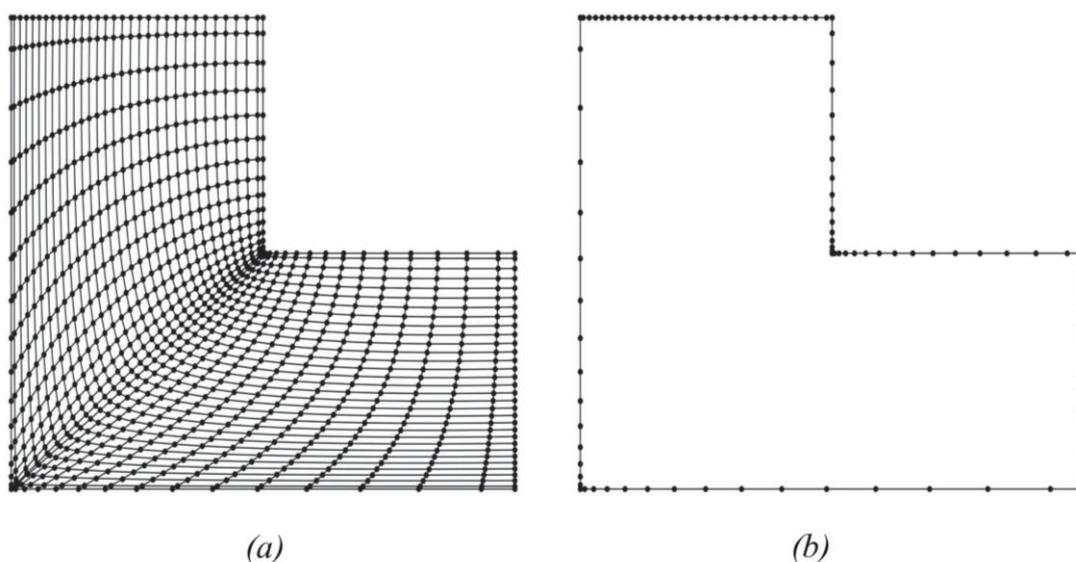


Fonte: Autora, 2024

Após o refinamento  $h$ , as malhas empregadas na análise dos resultados de deslocamentos ao longo do domínio e contorno são ilustradas na Figura 31. A Figura 31(a) apresenta a malha utilizada tanto para a AIG tradicional quanto para a nova abordagem isogeométrica do MMFGL. Para essa análise, utilizaram-se NURBS quadráticas, 1024 pontos de controle e vetor de knots uniformes e abertos. A Fig 31(b) mostra a malha de contorno, extraída a partir da malha de domínio, também com NURBS quadráticas e composta por 128 pontos de controle. Esta malha inclui os pontos de controle

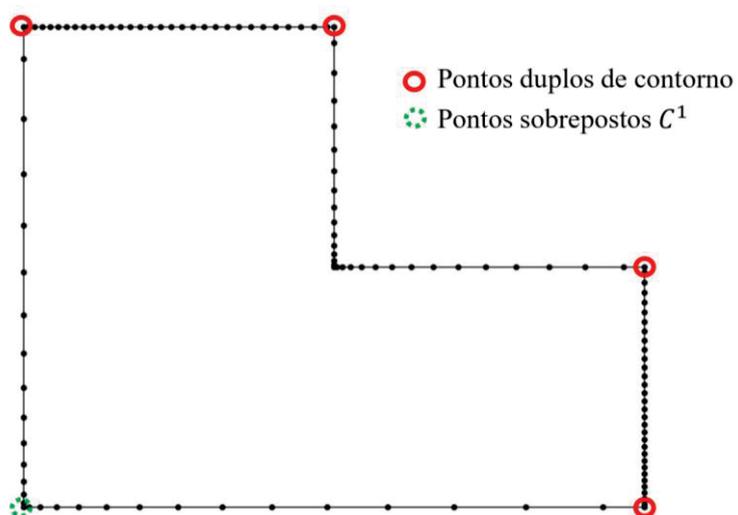
sobrepostos referentes à geometria inicial do problema (VUONG, 2012) e os pontos de controles duplos associados ao conceito de elementos de contorno (fluxo normal). De acordo com Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009), a superposição de pontos de controle pode ser uma forma de modelar a geometria, permitindo a continuidade  $C^1$  em todas as bordas internas do elemento. Embora exista uma singularidade inversa no mapeamento geométrico no canto onde os pontos de controle estão repetidos, essa singularidade não representa um problema na análise pois nunca há a necessidade de posicionar um ponto de quadratura nesta localização. A Figura 32 ilustra a disposição destes conceitos na malha da Figura 1(b).

FIGURA 31 - Malha isogeométrica de (a) domínio (b) e contorno após refinamento  $h$



Fonte: Autora, 2024

FIGURA 32 - Pontos duplicados na malha de contorno para a placa "L"



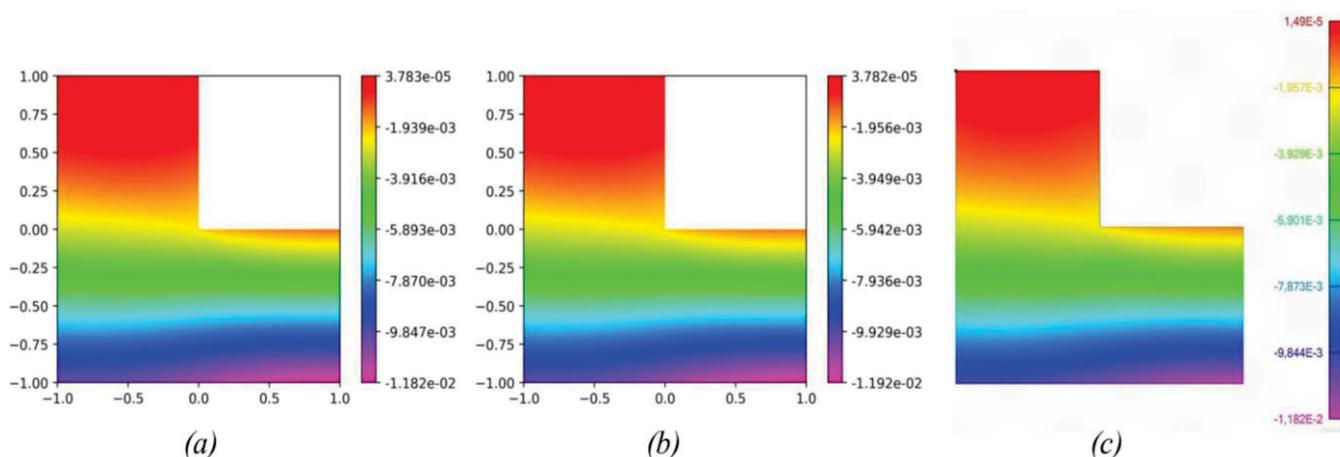
Fonte: Autora, 2024

### 5.1.2 RESPOSTAS NUMÉRICAS

Como não se tem uma solução analítica disponível em literatura para este problema, as respostas foram comparadas entre métodos numéricos, são eles: Método dos Elementos Finitos, Análise Isogeométrica e nova abordagem isogeométrica para o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL – AIG). A partir daqui o termo MMFGL – AIG é usado para identificar a nova abordagem.

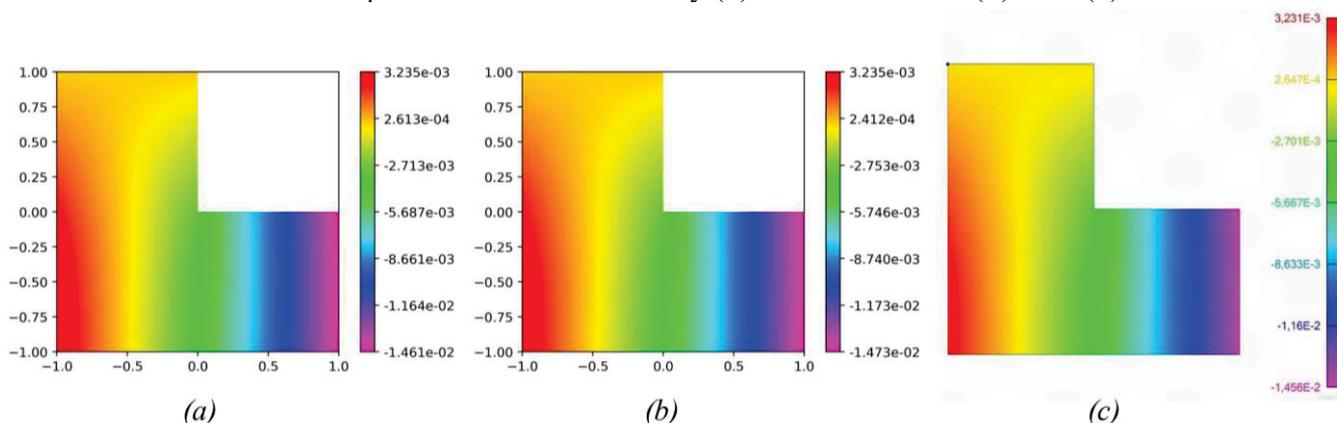
Foram comparados os deslocamentos em x (Figura 33) e em y (Figura 34) entre os três métodos, utilizando, respectivamente, 3900 graus de liberdade para MEF e 1984 graus de liberdade para AIG e MMFGL – AIG. Além disso, foram adotados 192 graus de liberdade de contorno para a malha de contorno.

FIGURA 33- Campo de deslocamentos em x (a) MMFGL – AIG (b) AIG (c) MEF



Fonte: Autora, 2024

FIGURA 34- Campo de deslocamentos em y (a) MMFGL – AIG (b) AIG (c) MEF

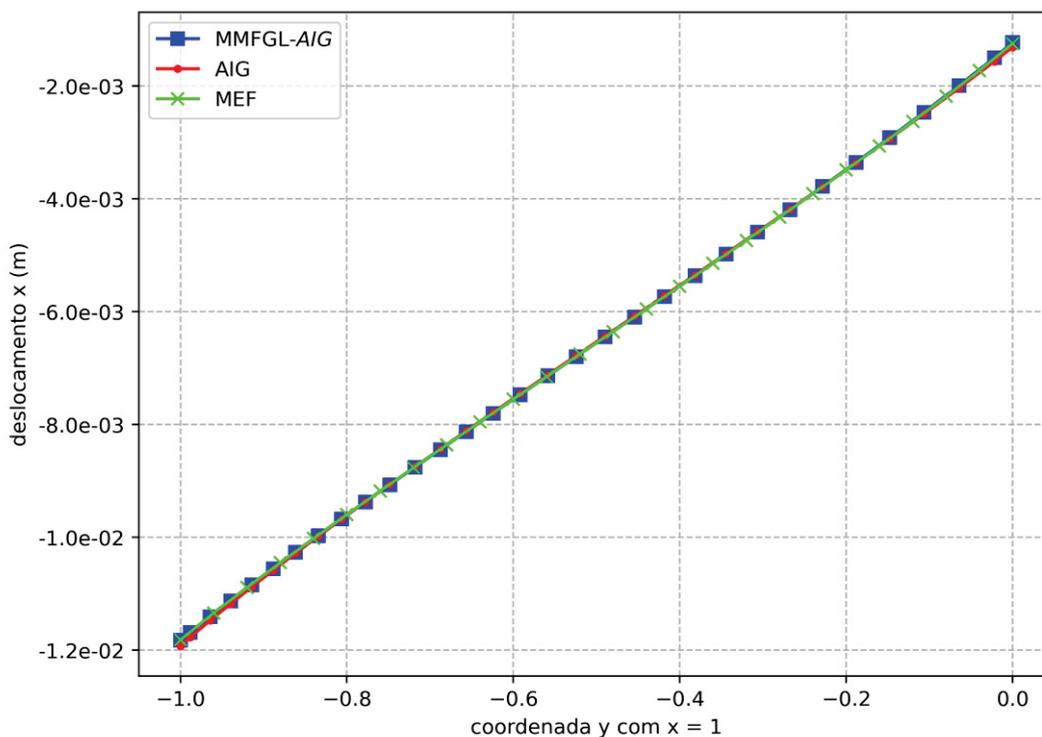


Fonte: Autora, 2024

Pode-se observar que a distribuição dos deslocamentos é bastante semelhante entre todos os métodos, tanto em x quanto em y. Ao comparar com os campos de respostas do Método dos Elementos

Finitos, verifica-se que o MMFGL – AIG apresenta resultados que mais se aproximam que a AIG tradicional. A Figura 35 permite visualizar de forma mais ampla as diferenças nas respostas em relação ao deslocamento  $x$  na aresta onde o carregamento é aplicado, cujos detalhes estão apresentados nas Tabelas 4 e 5.

FIGURA 35- Deslocamentos de  $x$  ao longo do contorno com  $x = 1$



Fonte: Autora, 2024

A Tabela 4 evidencia que as respostas de deslocamento em  $x$  da nova abordagem se aproximam mais das obtidas pelo MEF. Esse fato é reforçado na Tabela 5, que considera o MEF como valor exato para o cálculo do erro, utilizando a equação de erro relativo:

$$\text{Erro} = \frac{|\text{valor aproximado} - \text{valor exato}|}{\text{valor exato}} \quad (122)$$

TABELA 4 – Valores de deslocamento em  $x$  ao longo da aresta  $x = 1$  para placa “L”

Coordenada	MEF	MMFGL - AIG	AIG
(1,-1)	-1,1816E-02	-1,1824E-02	-1,1922E-02
(1,-0.8067)	-9,6613E-03	-9,6714E-03	-9,6760E-03
(1,-0.5917)	-7,4685E-03	-7,4709E-03	-7,4529E-03
(1,-0.4183)	-5,7318E-03	-5,7296E-03	-5,7140E-03
(1,-0,1883)	-3,3616E-03	-3,3531E-03	-3,3627E-03
(-1, 0)	-1,2433E-03	-1,2257E-03	-1,3090E-03

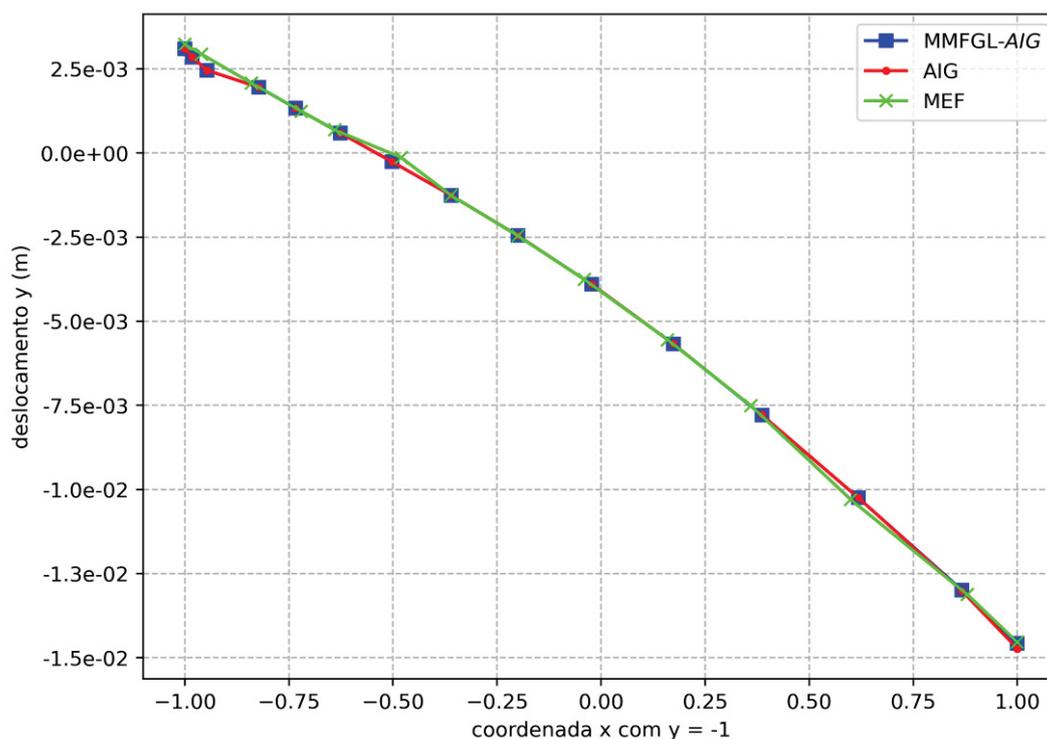
Fonte: Autora, 2024

TABELA 5 - Comparação de erro relativo para o deslocamento em x da placa “L”

Coordenada	Erro - MMFGL-AIG	Erro - AIG
(1,-1)	6,5588E-04	8,9877E-03
(1,-0.8067)	1,0506E-03	1,5247E-03
(1, -0.5917)	3,2319E-04	2,0869E-03
(1, -0.4183)	3,9450E-04	3,1057E-03
(1, -0,1883)	2,5118E-03	3,3505E-04
(-1, 0)	1,4148E-02	5,2837E-02

Fonte: Autora, 2024

No campo de deslocamentos em y, as respostas de ambos os métodos apresentam uma maior oscilação em comparação com o MEF em alguns pontos de controle em específico. Esse comportamento é demonstrado, primeiramente de forma geral, na Figura 36, na aresta onde são impostas as condições de contorno ( $y = -1$ ).

FIGURA 36- Deslocamentos de y ao longo do contorno com  $y = -1$ 

Fonte: Autora, 2024

Embora haja algumas pequenas alterações, é possível observar, por meio das Tabelas 6 e 7, que a nova abordagem isogeométrica também obteve, de maneira geral, respostas mais próximas das obtidas pelo MEF, que foram utilizadas como parâmetro.

TABELA 6 - Valores de deslocamento em y ao longo da aresta  $x = 1$  para placa “L”

Coordenada	MEF	MMFGL - AIG	AIG
(1, -1)	-1,1816E-02	-1,1824E-02	-1,1922E-02
(0.6177, -1)	-1,0478E-02	-1,0244E-02	-1,0241E-02
(0.1733, -1)	-5,6803E-03	-5,6707E-03	-5,6655E-03
(-0.2, -1)	-2,4593E-03	-2,4518E-03	-2,4501E-03
(-0.7333, -1)	1,3337E-03	1,3321E-03	1,3321E-03
(-1, -1)	3,2293E-03	3,1049E-03	3,1045E-03

Fonte: Autora, 2024

TABELA 7 - Comparação de erro relativo para o deslocamento em y da placa “L”

Coordenada	Erro - MMFGL-AIG	Erro - AIG
(1,-1)	6,5588E-04	8,9877E-03
(1,-0.8067)	2,2327E-02	2,2593E-02
(1, -0.5917)	1,6876E-03	2,6013E-03
(1, - 0.4183)	3,0334E-03	3,7409E-03
(1, -0,1883)	1,2005E-03	1,1855E-03
(-1, 0)	3,8510E-02	3,8656E-02

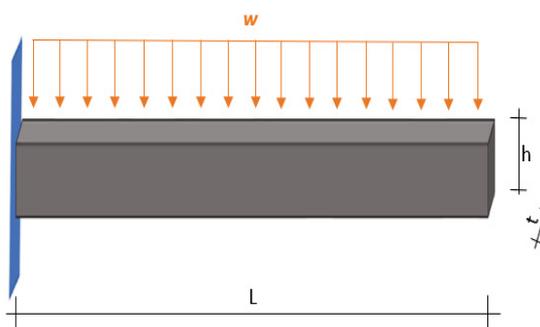
Fonte: Autora, 2024.

Portanto, este caso sugere que, para a placa em formato L, a nova abordagem MMFGL – AIG possui maior precisão que a Análise Isogeométrica Tradicional com refinamento  $h$ , enfatizando a resposta de Elementos Finitos como referência.

## 5.2 VIGA SOB FLEXÃO

A análise bidimensional via estado plano de tensões permite obter o campo de soluções para uma viga. Neste exemplo, aborda-se a solução do problema com as condições de contorno apresentadas na Figura 37, referentes a uma viga sob flexão e engastada. As propriedades do material utilizadas são: módulo de elasticidade  $E = 2 \times 10^7$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ . A força distribuída aplicada perpendicularmente à sua direção longitudinal é  $q = 150$ , com comprimento  $L = 4.7$ , altura  $h = 1.1$  e espessura  $t = 0.2$ .

FIGURA 37 - Viga engastada sob carregamento distribuído



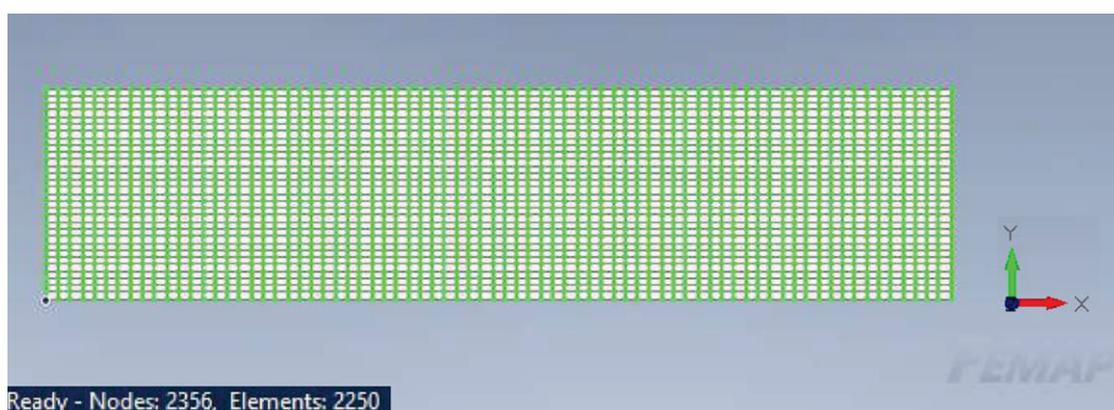
Fonte: Veiga e Machado, 2023

As análises dos campos de deslocamentos e tensões normais são realizadas considerando as situações em que os valores são mais significativos, ou seja, deslocamentos na direção  $y$  e tensões normais na direção  $x$ . Esta análise é conduzida através de nova abordagem isogeométrica para o Método Modificado da Função de Green Local, além da Análise Isogeométrica pura e o Método dos Elementos Finitos.

### 5.2.1 ASPECTOS DE DISCRETIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO

Mediante a utilização do FEMAP para a simulação de Elementos Finitos, e igualando-se às condições de funções polinomiais do software, expostas na seção 5.1.1 de placa em formato “L”, ou seja, com a utilização de elementos bilineares, a Figura 38 ilustra a malha utilizada para a discretização deste problema. Para isso, utilizaram-se funções polinomiais lineares e 2356 nós.

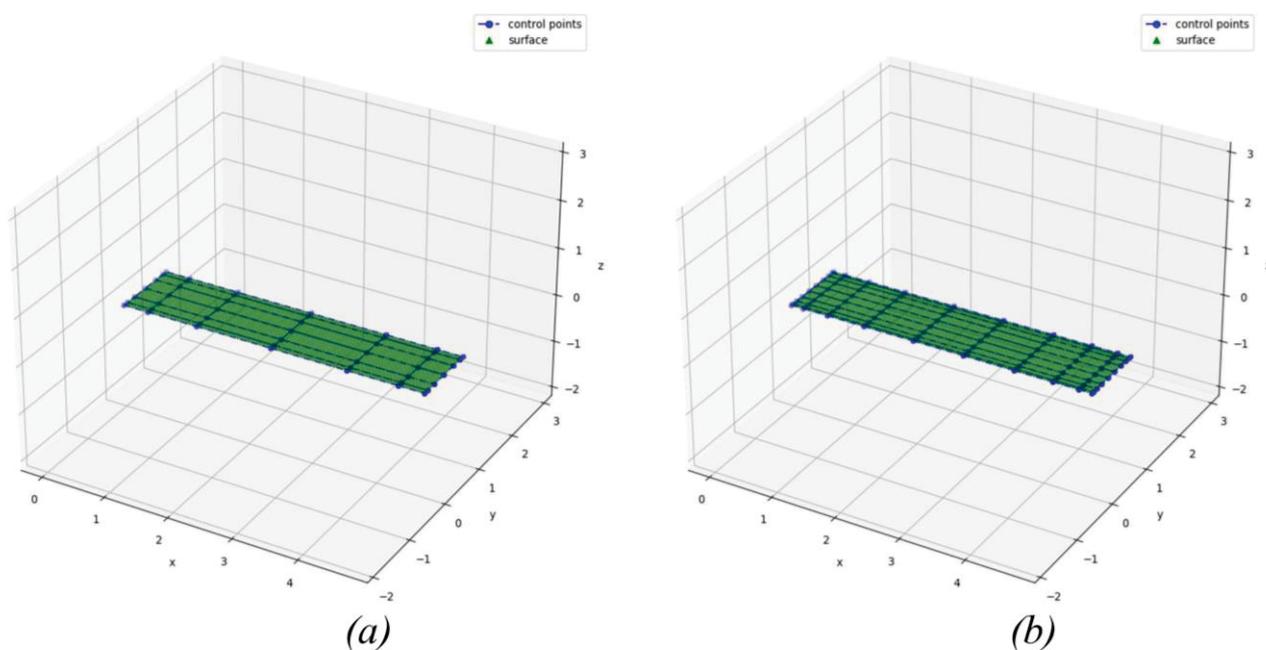
FIGURA 38 - Malha e condições de contorno de Elementos Finitos de viga



Fonte: Autora, 2024

Para a geração do polígono de controle e do vetor de *knots*, utilizou-se inicialmente a função “*linspace*” da biblioteca *NumPy* para a distribuição uniforme da malha de um único elemento. Em seguida, a biblioteca *geomdl* foi empregada para refino de malha, utilizando pesos unitários devido à geometria do problema. O processo abrangeu desde elementos isogeométricos quadráticos até elementos sextáticos (grau 6). A Figura ilustra a malha de funções cúbicas (a) e sextáticas (b) utilizadas na solução do problema através do refinamento  $k$ .

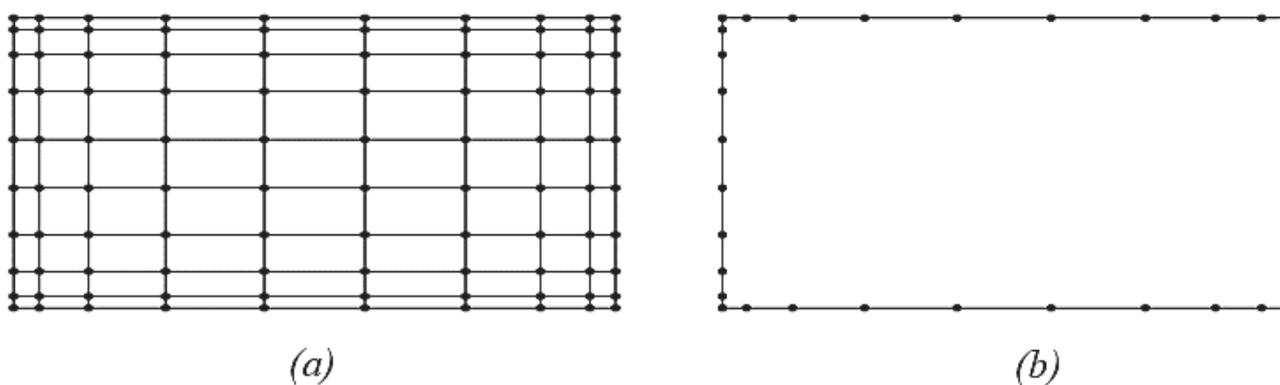
FIGURA 39 - Malha de (a) terceiro grau (b) e sexto grau para a viga engastada



Fonte: Autora, 2024

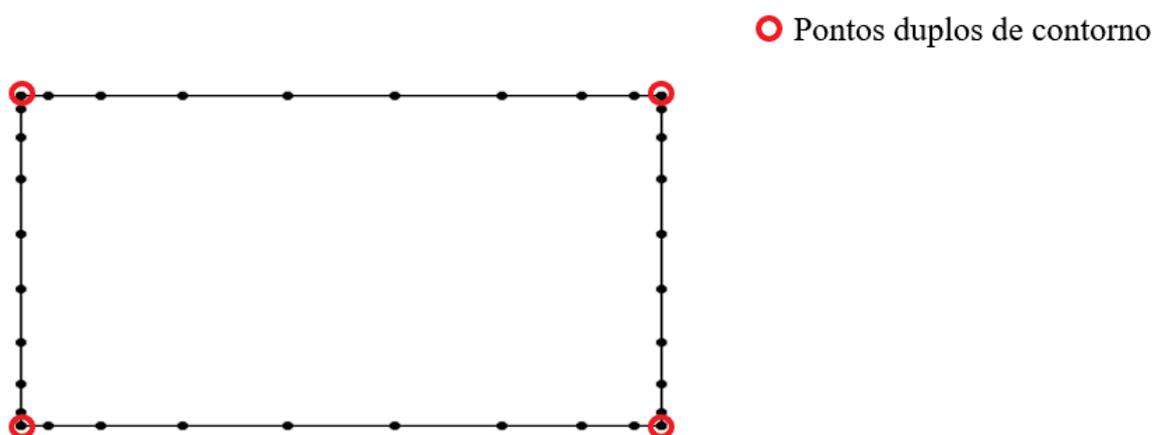
Sendo assim, o processo de refinamento  $k$  partiu de NURBS de grau 2 e avançou até NURBS de grau 6. Todas as malhas iniciaram com uma configuração de 16 elementos isogeométricos. Na malha mais refinada, foram utilizados 100 pontos de controle, com vetores uniformes e abertos em todas as etapas. A Fig 40 (b) indica a malha de contorno, extraída da malha de domínio na Fig 40 (a), que é composta por 36 pontos de controle. Também destaca-se a disposição dos pontos duplos de controle adotada para este problema (Figura 41).

FIGURA 40 – Malha de domínio e contorno de viga



Fonte: Autora, 2024

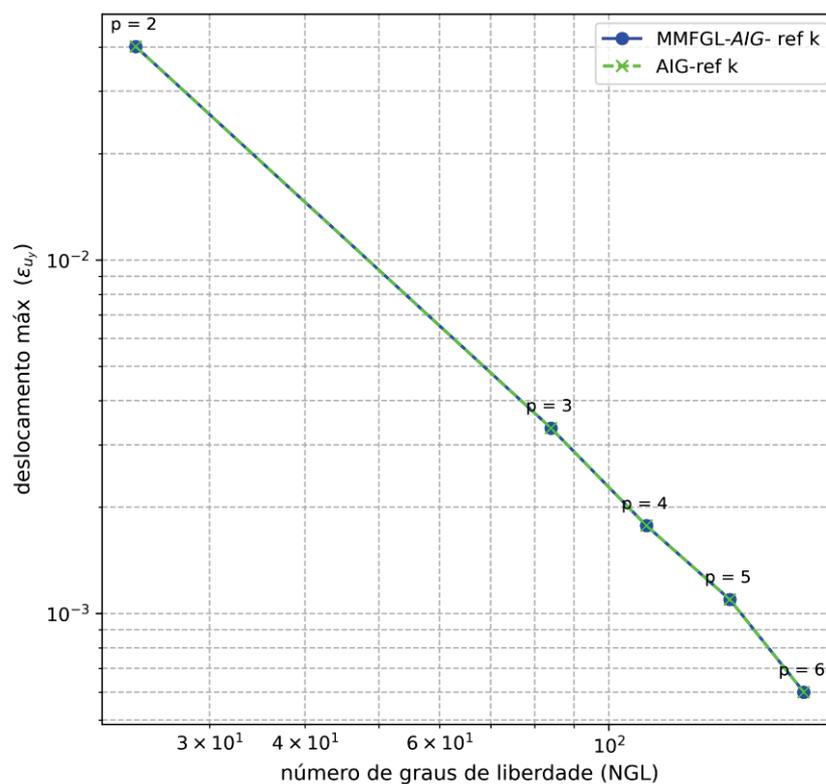
FIGURA 41 – Disposição de pontos de controle duplos de problema de viga



Fonte: Autora, 2024

### 5.2.2 RESPOSTAS NUMÉRICAS

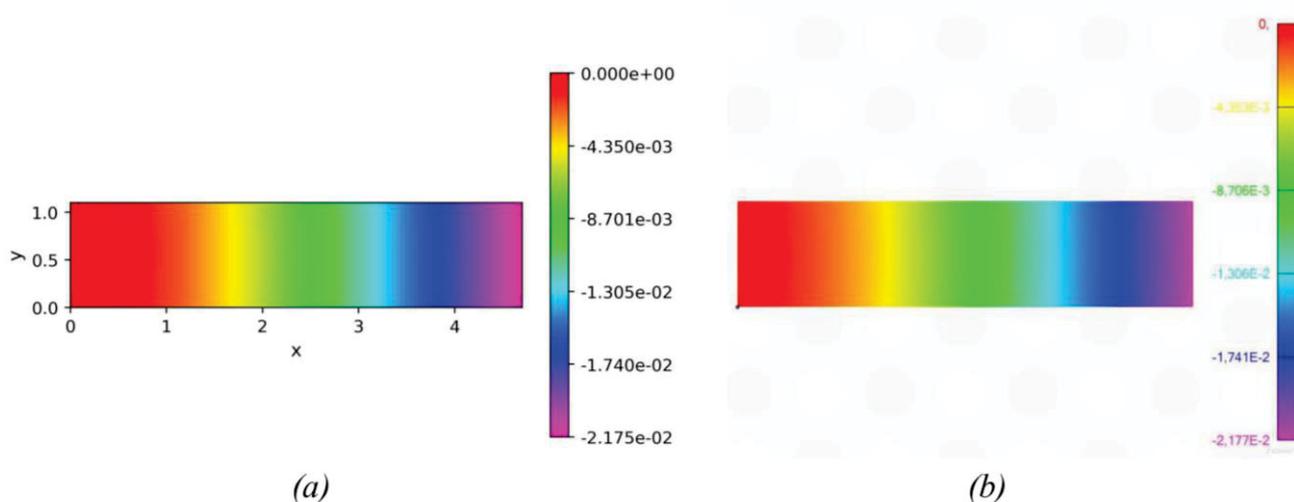
Tomando as respostas de Elementos Finitos como referência, analisou-se o erro relativo (eq. 122) de deslocamento máximo na direção  $y$  para a nova abordagem isogeométrica MMFGL –  $AIG$  e Análise Isogeométrica Tradicional através do refinamento  $k$  (Figura 42). Esse processo foi realizado até que a malha mais refinada contivesse 180 graus de liberdade para  $AIG$  e MMFGL –  $AIG$ , e 60 graus de liberdade de contorno para a malha de contorno com funções base NURBS de grau 6.

FIGURA 42 - Convergência de erro relativo entre o deslocamento máximo em  $y$  da viga

Fonte: Autora, 2024

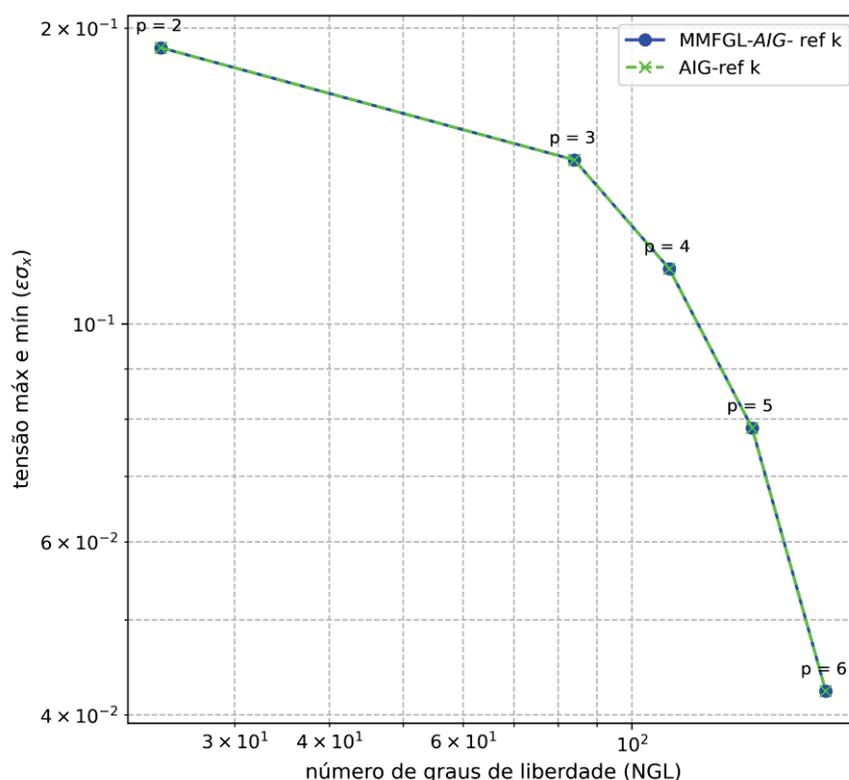
Observou-se que a taxa de convergência e a precisão de ambas as técnicas foram idênticas. Mesmo com uma malha relativamente pobre e poucos graus de liberdade, quando comparada à quantidade de graus de liberdade utilizados na simulação de Elementos Finitos, foi possível alcançar erros relativamente pequenos. A Figura 43 ilustra a disposição do campo de deslocamentos em  $y$  ( $u_y$ ) obtidos através de (a) MMFGL – AIG e AIG e (b) MEF.

FIGURA 43 - Campo de deslocamentos  $u_y$  para problema de viga através de (a) MMFGL – AIG e AIG pura (b) e MEF



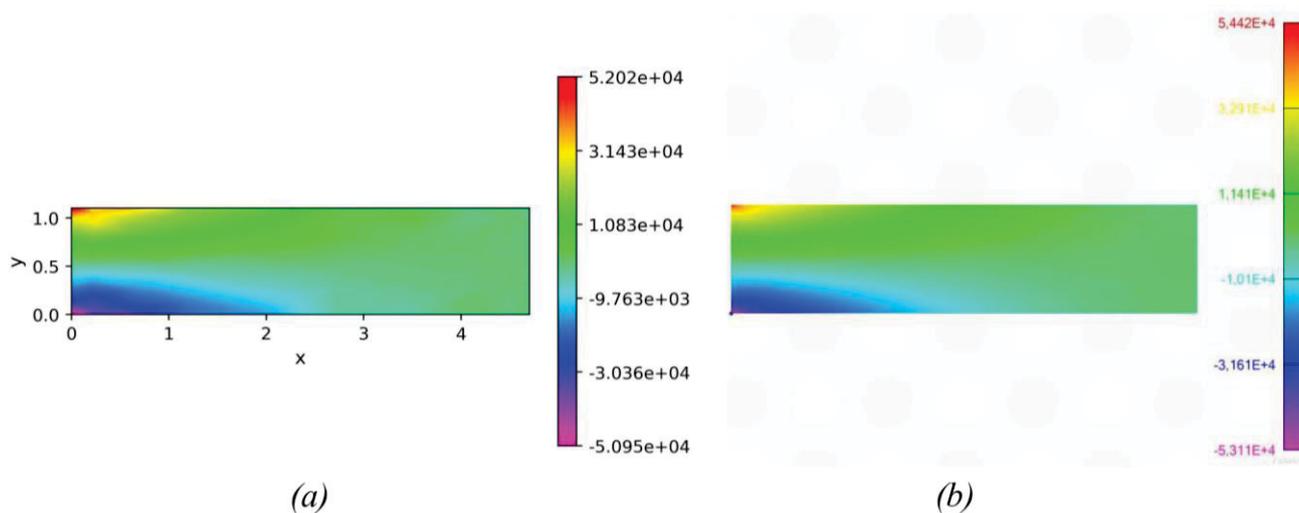
Fonte: Autora, 2024

Utilizando a técnica de recuperação de tensões e com os deslocamentos obtidos, realizou-se uma análise de convergência do erro médio entre as tensões normais máximas e mínimas na direção  $x$ , conforme ilustrado na Figura 44, considerando o mesmo nível de refinamento utilizado para análise dos deslocamentos em  $y$ . Para essa análise, calculou-se o erro relativo entre as tensões mínimas e máximas, seguido pela obtenção da média aritmética desses valores. Assim, foi possível determinar o erro médio entre as tensões máximas e mínimas.

FIGURA 44- Convergência de erro relativo entre tensões normais ( $\sigma_x$ ) mínimas e máximas da viga

Fonte: Autora, 2024

Observou-se que a taxa de convergência e a precisão entre ambas as técnicas também foram idênticas em todas as simulações. Esse comportamento já havia sido registrado em problemas anteriores simulados pela nova abordagem de Corrêa, Arndt e Machado (2023) e se repete neste problema em questão. A Figura 45 exibe a distribuição do campo de tensões normais em x por (a) MMFGL – AIG e AIG pura e (b) MEF.

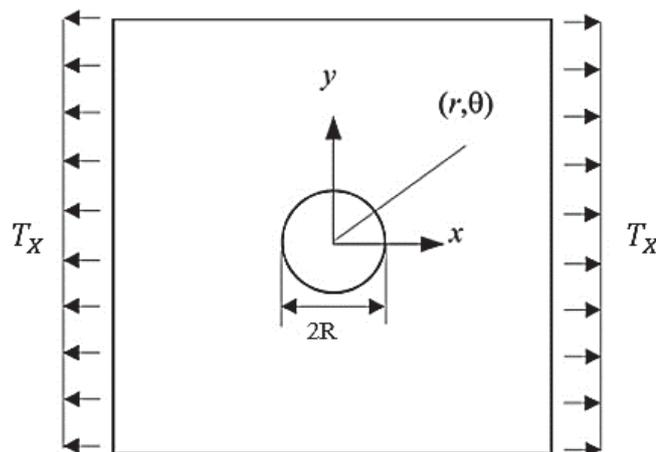
FIGURA 45 - Campo de tensões normais ( $\sigma_x$ ) em (a) MMFGL – AIG e AIG pura (b) e MEF

Fonte: Autora, 2024

### 5.3 PLACA INFINITA COM FURO CIRCULAR

A fim de comparar a nova abordagem deste estudo com uma solução exata, prosseguiu-se à implementação do problema de concentração de tensões em uma placa infinita com furo circular. A Figura 46 ilustra o problema em questão.

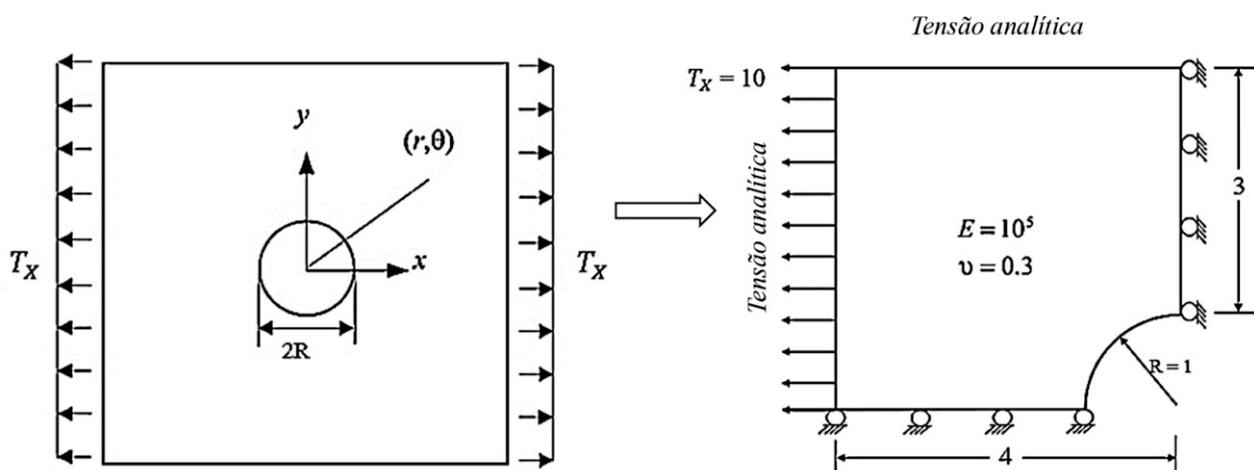
FIGURA 46- Porção quadrada de placa infinita com furo circular sob tensão horizontal de tração



Fonte: Adaptado de Hassani, Ganjali e Tavakkoli, 2011

Em virtude da simetria do problema, apenas um quarto da placa pode ser considerada para obtenção de variáveis primárias e secundárias. Essa particularidade é ilustrada na Figura 47, juntamente aos dados do problema analisado: módulo de elasticidade  $E = 10^5$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , dimensões da placa e condições de contorno naturais e essenciais.

FIGURA 47- Dimensões e condições de contorno do modelo numérico de placa com furo



Fonte: Adaptado de Hassani et al., 2011

Segundo Chen et al. (2022), os valores exatos de tensões normais  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  e tangencial  $\tau_{xy}$ , obtidos a partir de coordenadas polares e transformados em coordenadas cartesianas, são expressos pelas equações:

$$\sigma_{xx} = T_x \left[ 1 - \frac{3R^2(x^2 - y^2)}{2(x^2 + y^2)^2} - \frac{R^2}{(x^2 + y^2)^3} (x^4 + y^4 - 6x^2y^2) \left( 1 - \frac{3R^2}{2x^2 + y^2} \right) \right] \quad (123)$$

$$\sigma_{yy} = T_x \left[ -\frac{R^2(x^2 - y^2)}{2(x^2 + y^2)^2} + \frac{R^2}{(x^2 + y^2)^3} (x^4 + y^4 - 6x^2y^2) \left( 1 - \frac{3R^2}{2x^2 + y^2} \right) \right] \quad (124)$$

$$\tau_{xy} = -T_x \left[ \frac{R^2xy}{(x^2 + y^2)^2} + 4R^2xy \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \left( 1 - \frac{3R^2}{2x^2 + y^2} \right) \right] \quad (125)$$

onde  $T_x$  representa o valor da tensão horizontal distribuída,  $R$  é o raio do problema e  $x, y$  são as respectivas coordenadas de ponto de controle.

Sendo assim, o campo de tensões normais e tangencial são obtidos e comparados através de: nova abordagem MMFGL – AIG, Análise Isogeométrica pura e solução analítica (CHEN ET AL., 2022). Seus aspectos de implementação e análise dos resultados serão detalhadamente expressos a seguir.

### 5.3.1 ASPECTOS DE DISCRETIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO

A partir de malha inicial (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) que contém 12 pontos de controle, 2 elementos isogeométricos e NURBS quadráticas, a geometria do problema é definida pelo polígono de controle (Figura 48), vetor de *knots* e pesos, com o auxílio do pacote *NURBS-Python geomdl* para a geração e refinamento do problema. Para a obtenção desta geometria, o ponto de controle correspondente ao canto superior esquerdo é duplicado, e essa duplicação é mantida nos refinamentos  $h$  e  $k$ , que serão apresentados em sequência. Os pontos de controle e pesos utilizados na simulação inicial podem ser visualizados nas Tabelas 8 e 9, respectivamente.

TABELA 8 - Pontos de controle da malha inicial da placa com furo

$$p = 2, q = 2, \Xi = \{0,0,0,0.5,1,1,1\} \text{ e } \mathfrak{H} = \{0,0,0,1,1,1\}$$

i	$B_{i,1}$	$B_{i,2}$	$B_{i,3}$
1	(-1,0)	(-2.5,0)	(-4,0)
2	$(-1, \sqrt{2} - 1)$	(-2.5,0.75)	(-4,4)
3	$(1 - \sqrt{2}, 1)$	(-0.75,2.5)	(-4,4)
4	(0,1)	(0,2.5)	(0,4)

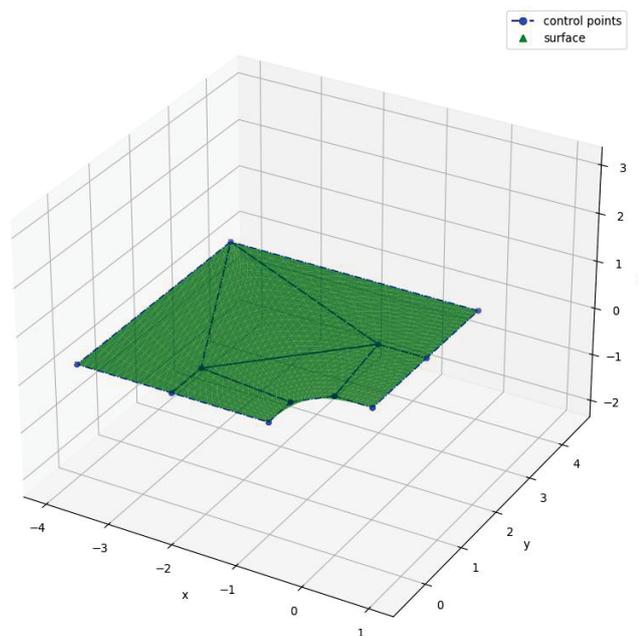
Fonte: Hughes, Cottrell e Bazilevs, 2005

TABELA 9 - Pesos da malha inicial da placa com furo

$i$	$w_{i,1}$	$w_{i,2}$	$w_{i,3}$
1	1	1	1
2	$(1+1/\sqrt{2})/2$	1	1
3	$(1+1/\sqrt{2})/2$	1	1
4	1	1	1

Fonte: Hughes, Cottrell e Bazilevs, 2005

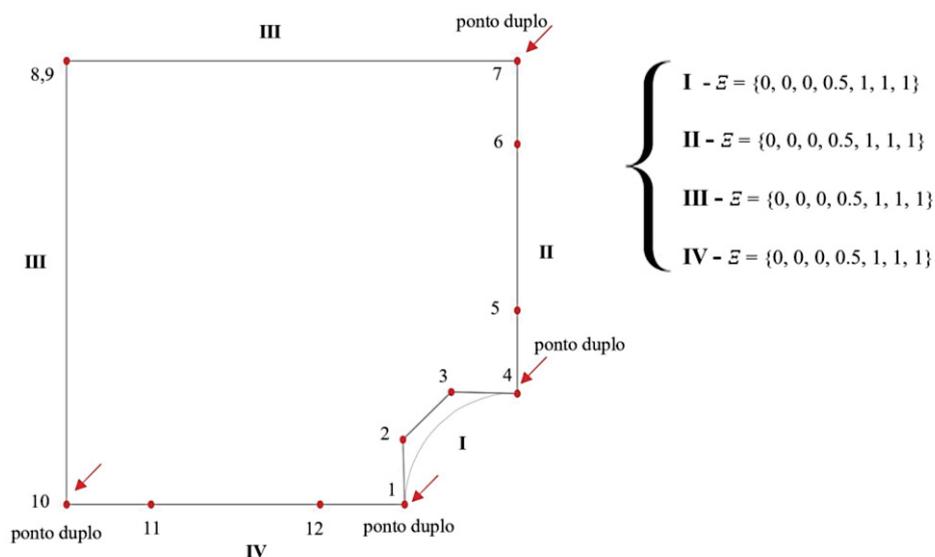
FIGURA 48 - Configuração da malha inicial da placa com furo



Fonte: Autora, 2024

Na Figura 49 é apresentada uma malha composta por 4 elementos isogeométricos e 12 pontos de controle de contorno. Neste contexto, são empregadas NURBS unidimensionais geradas de acordo com o vetor de *knots* da direção em questão e o mesmo grau polinomial da malha de domínio, para a montagem da matriz D, conforme descrito na Equação (82). Também se inclui a definição da lógica de numeração dos elementos, que é organizada no sentido anti-horário, bem como a consideração dos pontos de controle duplicados, necessários para a construção da malha de contorno.

FIGURA 49 - Problema e geometria definida para a malha de contorno de problema de placa com furo

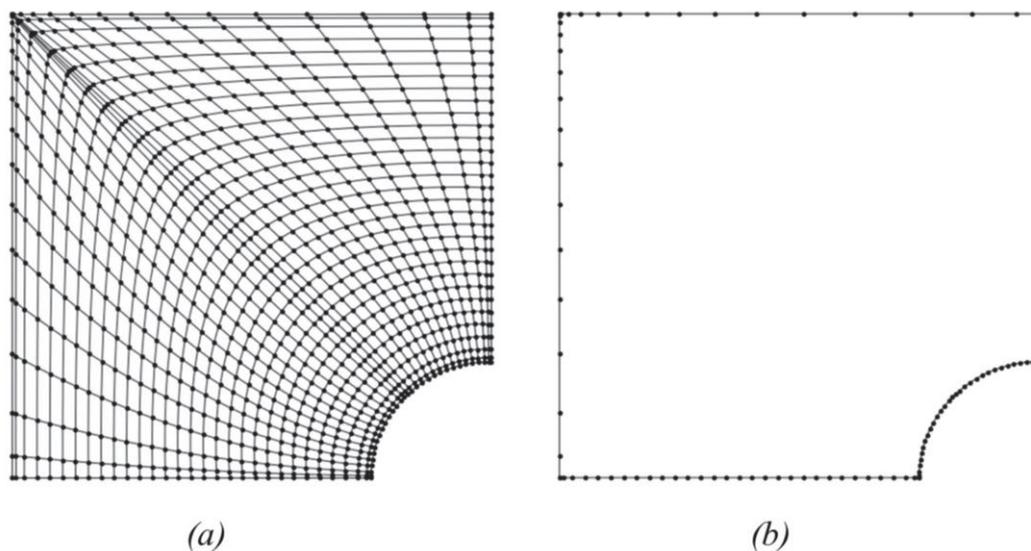


Fonte: Autora, 2024

Para melhorar o campo de respostas a partir da configuração inicial do modelo, uma alternativa simples seria a adição de novos *knots* (refinamento  $h$ ). No entanto, optou-se por uma abordagem mais sofisticada que envolve o aumento do grau das funções NURBS (refinamento  $p$ ) como ponto de partida. Assim, esta escolha foi seguida pela inserção de novos *knots* a partir de NURBS cúbicas com o intuito de uma solução mais aprimorada.

No entanto, é possível notar que apesar da utilização do refinamento  $p$  e  $h$ , não se pode considerar um refinamento  $hp$  pois o grau da função é elevado apenas uma vez para estabelecer a malha inicial, ou seja, não se aplicam ambos os refinamentos a cada iteração. As malhas de domínio e contorno mais refinadas, respectivamente, são apresentadas na Figura 50.

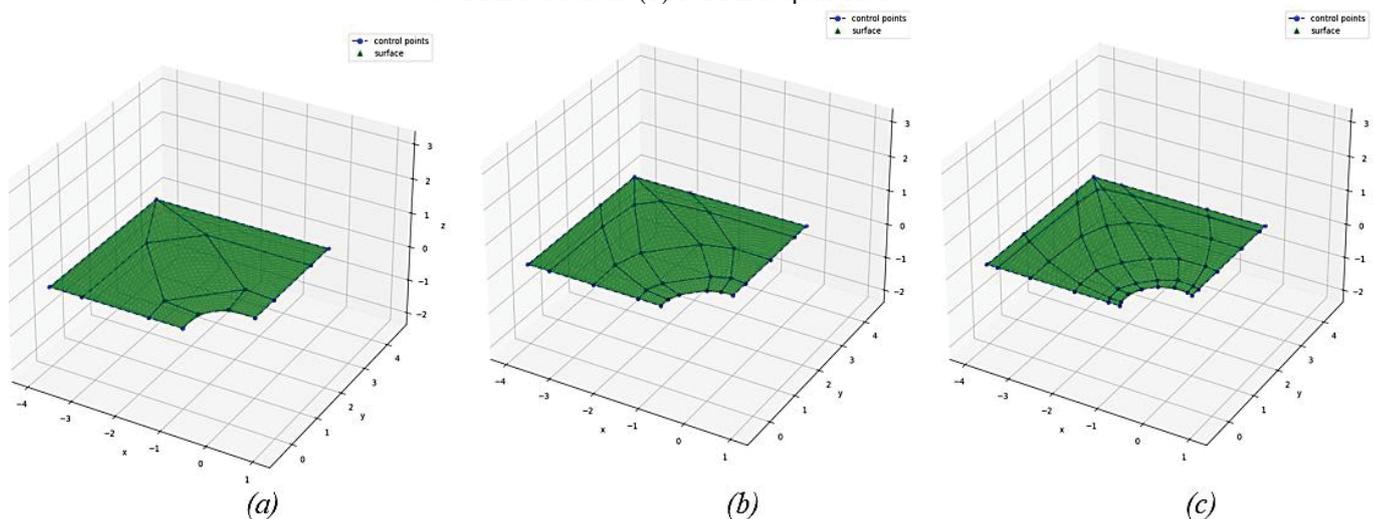
FIGURA 50 – (a) Malha de domínio e (b) malha de contorno com refinamento  $h$  de problema de placa com furo



Fonte: Autora, 2024

Para explorar as vantagens do refinamento  $k$ , realizou-se a aplicação deste refinamento utilizando NURBS quadráticas, cúbicas e quárticas (Figura 51). Como ponto de partida se utilizou a malha inicial composta por 4 elementos, conforme ilustrado na Figura 48.

FIGURA 51- Polígono de controle de domínio para emprego do refinamento  $k$  (a) NURBS quadráticas (b) NURBS cúbicas (c) NURBS quárticas



Fonte: Autora, 2024

### 5.3.2 RESPOSTAS NUMÉRICAS

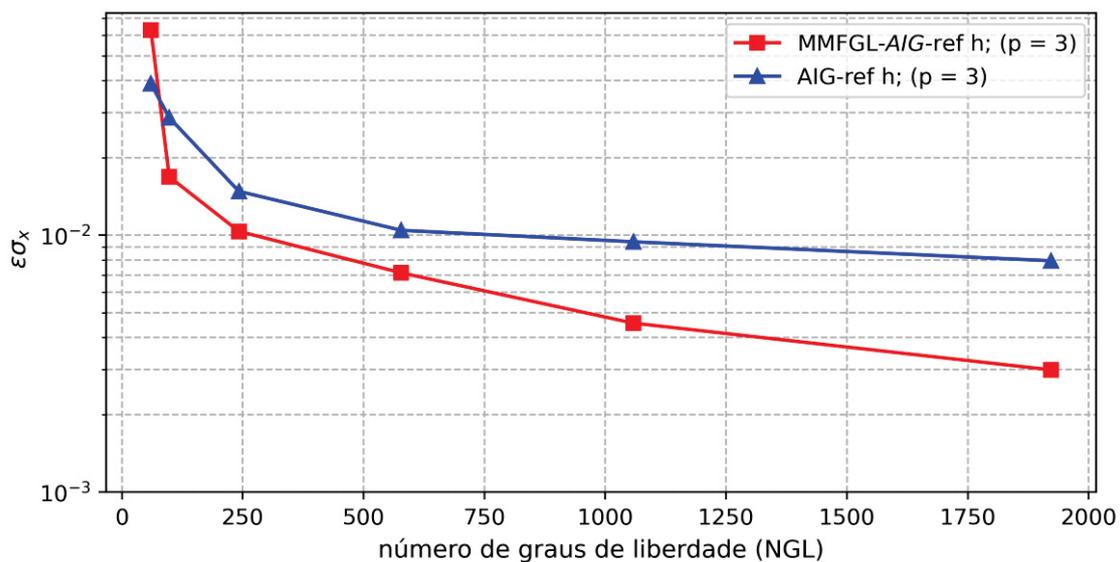
Para a análise dos resultados de refinamento  $h$  e  $k$ , empregou-se como medida de erro uma aproximação da norma do  $L_2$  adaptada ao conceito isogeométrico e normalizada por  $|u|_{max}$ , definida como (KHAN et al., 2021):

$$\varepsilon_{er} = \frac{1}{|u|_{max}} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (u_i^{(e)} - u_i^{(n)})^2} \quad (126)$$

onde  $M$  é o número de pontos de controle,  $|u|_{max}$  é o maior valor no conjunto de  $M$  pontos de controle,  $u_i^{(e)}$  é o valor analítico do ponto de controle e  $u_i^{(n)}$  é o valor aproximado no ponto de controle  $i$ . Juntamente ao erro relativo é aplicado, em todos os resultados deste problema, a recuperação de tensões (HASSANI, GANJALI, e TAVAKKOLI, 2011).

Os erros relativos através do refinamento  $h$  na nova abordagem MMFGL – AIG e AIG tradicional são avaliados em toda a malha para a tensão normal de  $x$  ( $\sigma_x$ ) na Figura 52. Como pode-se notar, neste caso, as respostas pela nova abordagem são mais precisas e a taxa de convergência é maior que a Análise Isogeométrica.

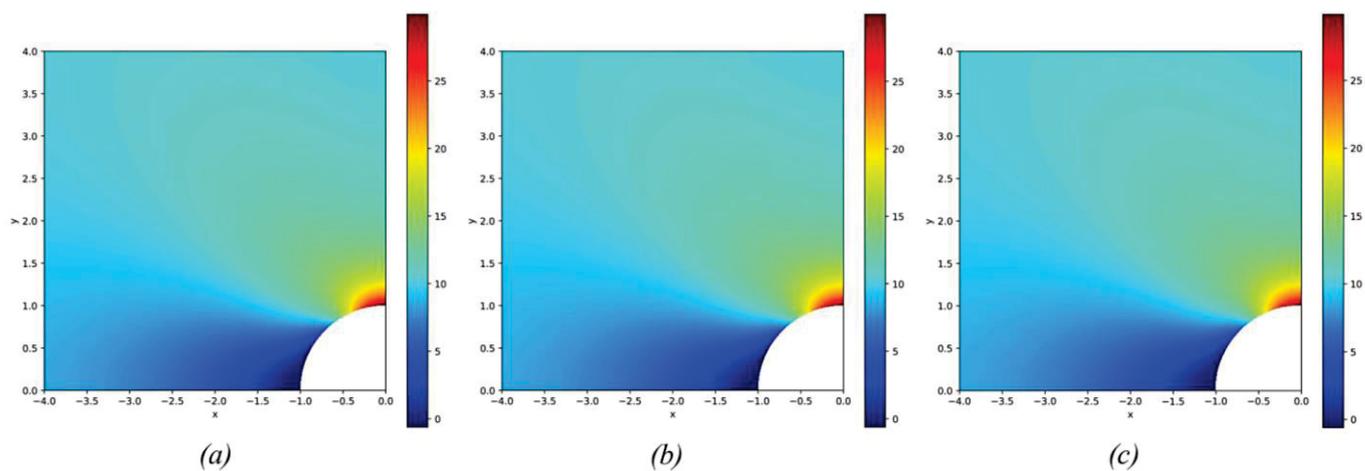
FIGURA 52 - Comparação entre MMFGL – AIG e AIG com o refinamento  $h$  na norma de erro  $L_2$



Fonte: Autora, 2024

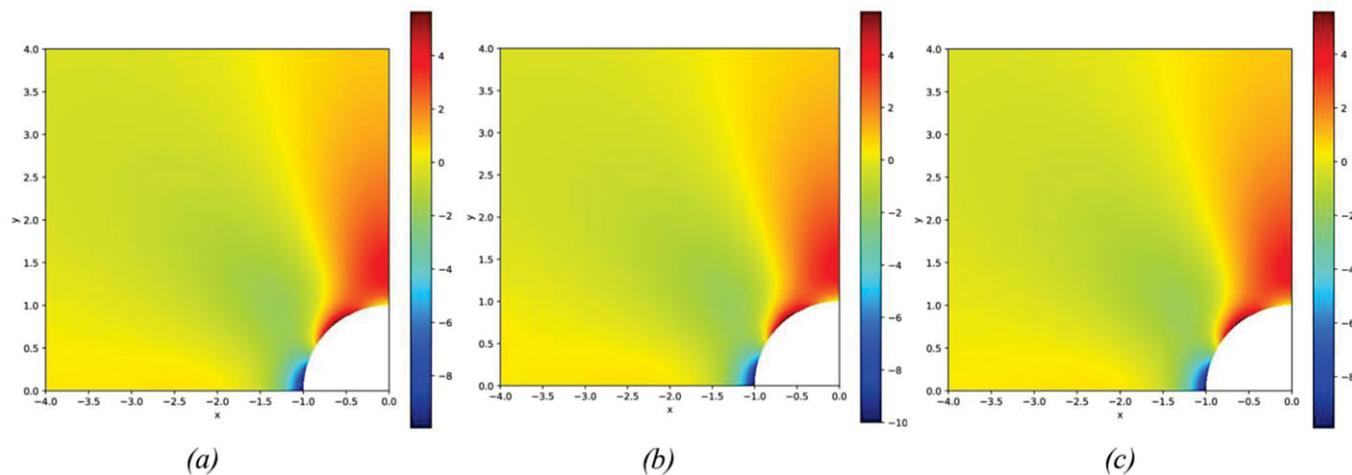
Nas Figuras 53, 54 e 55 é possível conferir a distribuição das tensões normais e tangencial da MMFGL – AIG e AIG tradicional obtidas, comparadas às tensões analíticas.

FIGURA 53 - Distribuição de tensão normal  $\sigma_x$  (a) MMFGL – AIG; (b) AIG (c) solução analítica



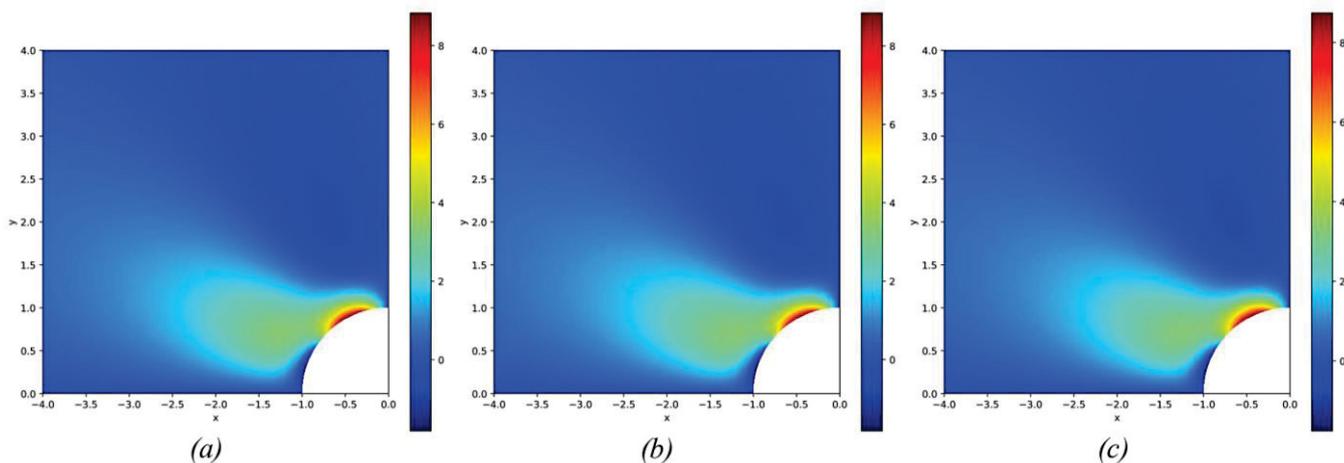
Fonte: Autora, 2024

FIGURA 54- Distribuição de tensão normal  $\sigma_y$  (a) MMFGL – AIG (b) AIG (c) solução analítica



Fonte: Autora, 2024

FIGURA 55 - Distribuição de tensão tangencial  $\tau_{xy}$  (a) MMFGL – AIG; (b) AIG (c) solução analítica



Fonte: Autora, 2024

Adicionalmente, são expostos o campo de deslocamentos na direção de  $x$  e  $y$  em MMFGL – AIG e AIG nas Figuras 56 e 57.

FIGURA 56 - Campo de deslocamentos em  $x$  da placa com furo (a) MMFGL – AIG (b) AIG

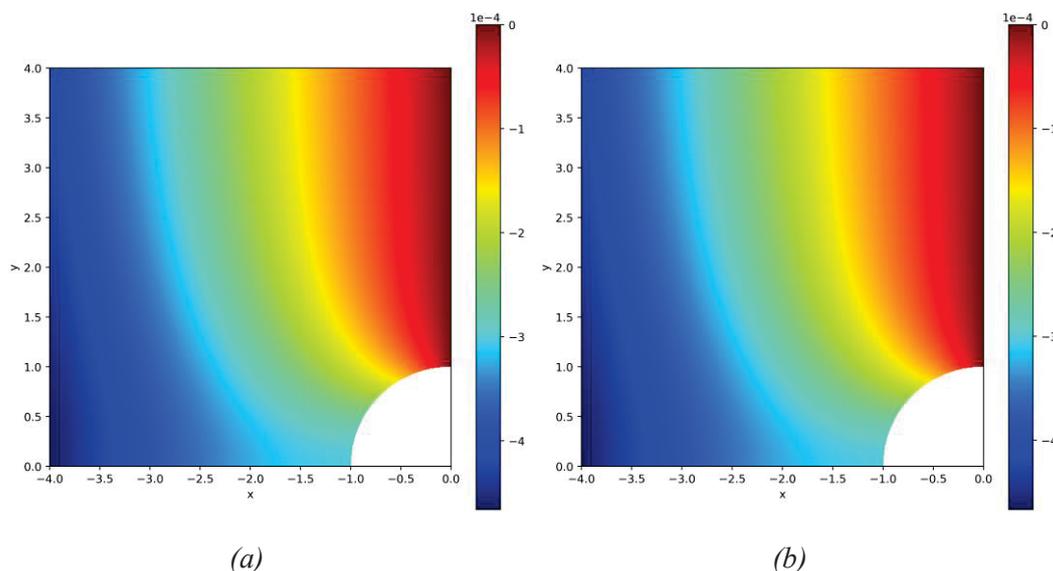
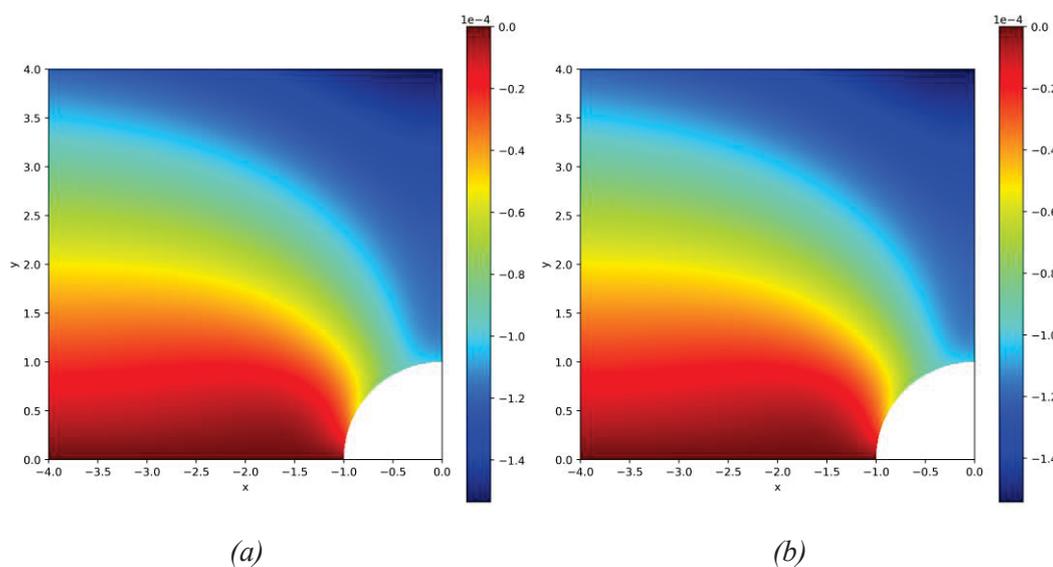
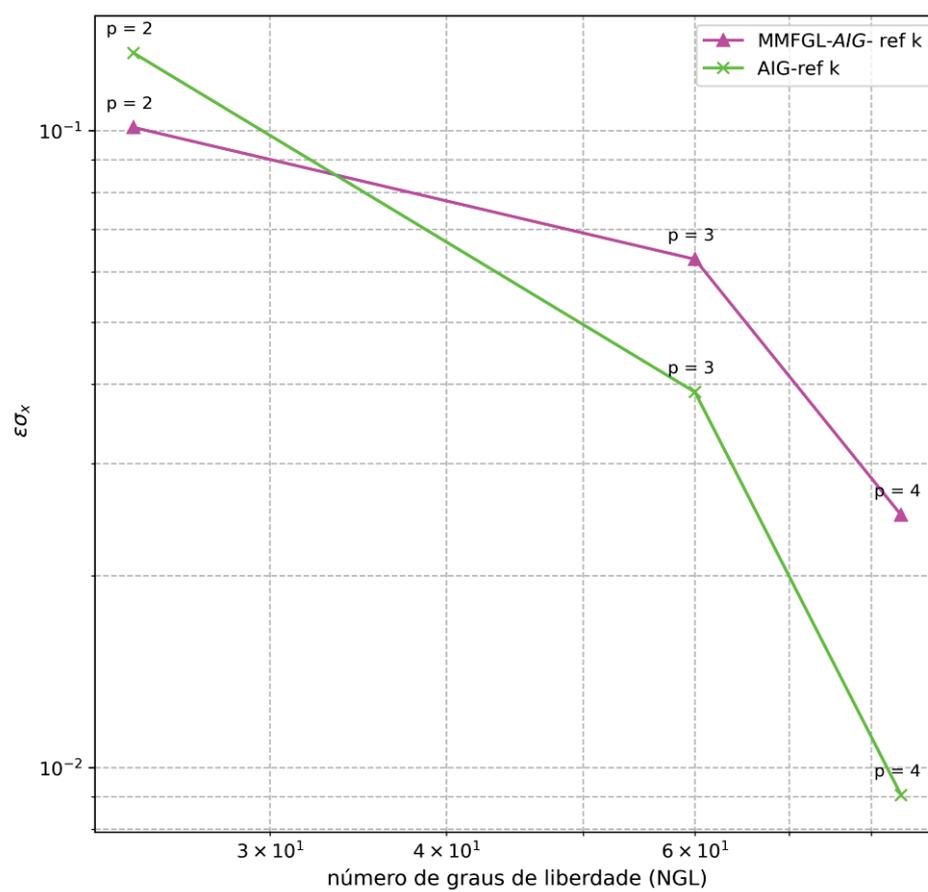


FIGURA 57- Campo de deslocamentos em  $y$  da placa com furo (a) MMFGL – AIG (b) AIG



Fonte: Autora, 2024

Pode-se observar que, como era esperado, devido ao pequeno erro em ambas as malhas para a distribuição de tensões, as distribuições de deslocamentos são bastante semelhantes entre si também. Na Figura 58 são descritos os erros avaliados em toda a malha, decorrentes do refinamento  $k$  através das NURBS quadráticas, cúbicas e quárticas para a tensão  $\sigma_x$ . Nesta situação, a AIG tradicional resultou em uma melhor taxa de convergência e maior precisão.

FIGURA 58 - Comparação entre MMFGL – AIG e AIG com o refinamento  $k$  na norma de erro  $L_2$ 

Fonte: Autora, 2024

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, aplicou-se a nova abordagem de Corrêa, Arndt e Machado (2022) e Corrêa, Arndt e Machado (2023) do Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL) no contexto da Análise Isogeométrica em três problemas de geometrias diferentes em estado plano de tensões, atingindo os objetivos propostos neste estudo.

Primeiramente, os aspectos de implementação destacaram o potencial significativo da nova técnica ao aproveitar as vantagens da geometria exata e da integração entre modelagem e análise numérica, características inerentes à Análise Isogeométrica tradicional. A técnica também demonstrou similaridade com conceitos já empregados no IGABEM (Simpson et al., 2012; Simpson et al., 2013), permitindo a geração de uma malha de contorno conectada à malha de domínio para a resolução do sistema de MMFGL.

Na comparação dos resultados da malha mais refinada para a placa em formato de "L" utilizando refinamento  $h$ , observou-se que a nova abordagem é promissora, apresentando resultados mais precisos em relação a AIG ao levar como parâmetro as respostas obtidas por uma malha altamente refinada de MEF. Já na simulação da viga engastada sob flexão, apesar de se esperar um desempenho superior semelhante ao da placa em "L", observou-se um comportamento idêntico entre os campos de deslocamento e tensão.

Ao verificar os resultados obtidos para a placa infinita com furo circular sob tensão constante, notou-se que nem todos os refinamentos apresentaram ganhos significativos em comparação com as tensões analíticas. O refinamento  $h$  demonstrou uma taxa de convergência e precisão superiores pela norma de erro  $L_2$  se comparada a AIG. No entanto, para o refinamento  $k$ , a AIG destacou-se para os graus 2, 3 e 4. Isso estabelece um ponto de partida para estudos mais aprofundados sobre essa técnica de refinamento no contexto do MMFGL-AIG.

Destaca-se também a aplicação favorável da técnica de Recuperação de Tensões, adaptada ao contexto isogeométrico a partir de pontos superconvergentes (Hassani, Ganjali, e Tavakkoli, 2011), ao MMFGL-AIG. Essa adaptação demonstrou-se eficiente e contribuiu significativamente para a precisão dos resultados obtidos, superando os resultados obtidos sem recuperação.

Com base nos resultados alcançados, a nova técnica mostra-se promissora, especialmente em refinamentos com inserção de *knots*, aproveitando a redução do sistema de equações de forma eficiente. Recomenda-se, para trabalhos futuros, a aplicação da abordagem MMFGL-AIG em problemas com geometrias mais complexas, propagação de trincas e contexto de vibração estrutural. Além disso,

sugere-se uma investigação mais aprofundada em outros problemas presentes na literatura, comparando seus resultados com os da Análise Isométrica pura, tanto em termos de precisão quanto de convergência.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, D.C. **Análise Isogeométrica baseada no uso das T-Splines aplicada a problemas da elasticidade linear bidimensional**. Orientador: Roberto Dalledone Machado. Coorientador: Marcos Arndt. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Mecânica Computacional, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2017. Disponível em < <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/52841/R%20-%20D%20-%20DIEGO%20CADENA%20DE%20ALMEIDA.pdf?sequence=1&isAllowed=y> >.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**, 1ª Edição, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Abril 2003. Disponível em < [http://www.alvaroazevedo.com/publications/books/Livro\\_MEF\\_AA\\_1ed](http://www.alvaroazevedo.com/publications/books/Livro_MEF_AA_1ed) >.
- BARBIERI, C; BARCELLOS, C.S; Solution of Singular Potential Problems by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM). 13th BEM Conf., (Ed Brebbia, C.A), 1991.
- BARBIERI, R; BARCELLOS, C.S. Solução do Problema Potencial pelo Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM). Proc. XI COBEM (Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo, 1991a.
- BARBIERI, R; BARCELLOS, C.S. A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Model. I. In: BREBBIA, C. A. a. (Ed.). **Boundary Elements XIII**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1991. 551–565.
- BARBIERI, R. **Desenvolvimento e aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) para problemas do meio contínuo**. Tese de doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Santa Catarina, 1992.
- BARBIERI, R.; BARCELLOS, C. S. Mindlin's plate solutions by the MLGFM. In: BREBBIA, C. A.; RENCIS, J. J. (Ed.). **Boundary Elements XV**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1993a. v. 2. 149–164.
- BARBIERI, R.; BARCELLOS, C. S. Non-homogeneous field potential problems solution by the modified local Green's function method (MLGFM). **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier BV, 1993b, v. 11, n. 1, 9–15.
- BARBIERI, R.; MUÑOZ, P. A. R. Modified local green's function method (MLGFM) part II. application for accurate flux and traction evaluation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier BV, 1998a, v. 22, n. 2, 153–159.
- BARBIERI, R.; MUÑOZ, P. A. R.; MACHADO, R. D. Modified local green's function method (MLGFM) part I. mathematical background and formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier BV, 1998b, v. 22, n. 2, 141–151.
- BARCELLOS, C.S; SILVA, L.H.M. Elastic Membrane Solution by a Modified Local Greens Function Method. In: BREBBIA, C.A; VENTURINE, C.S. (Ed.) Proceedings of International conference on boundary element technology. Southampton: Computacional Mechanics Publications, 1987.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 2006.
- BEER, G. WATSON, J.O. **Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers**. Wiley, England, 1994.
- BEIRÃO DA VEIGA, L.; BUFFA, A.; RIVAS, J.; SANGALLI, G. Some estimates for h–p–k-refinement in Isogeometric Analysis. **Numerische Mathematik**, v. 118, p. 271–305, 2011.

BELIBASSAKIS K.A.; GEROSTATHIS T.P., POLITIS C.G.; KAKLIS, P.D.; GINNIS A.I.; MOURKOIANNIS D.N. A novel BEM-ISOGOMETRIC method with application to the wavemaking resistance problem of bodies at constant speed. Proceedings of 13th International Congress of the International Maritime Association of the Mediterranean, IMAM , 2009.

BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y., & GU, L. (1994). Element-free Galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 37(2), 229-256. Disponível em < <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205> >.

BINGOL, O.R; KRISHNAMURTHV, A. (2019). *NURBS-Python*: An open-source object-oriented NURBS modeling framework in Python. **SoftwareX**, 9, 85–94. Elsevier. Disponível em <<https://doi.org/10.1016/j.softx.2018:12.005>>.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary Elements: an introductory course. [S.l.]: **WIT Press/Computational Mechanics Publications**, 1992.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984. ISBN 978-3-642-48862-7,978-3-642-48860-3.

BURNS, T. J. **The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems**. 1975. Tese PhD – University of Illinois at Urbana-Champaign.

CHEN, Y.T; LI, C; YAO, L.Q; CAO, Y. A Hybrid RBF Collocation Method and Its Application in the Elastostatic Symmetric Problems. **Symmetry** **2022**, 14, 1476.

CORRÊA, R.M. **Método Modificado da Função de Green Local Enriquecido para Problemas com Descontinuidades e/ou Singularidades**. Projeto de Qualificação. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021.

CORRÊA, R. M.; ARNDT, M.; & MACHADO, R. D. (2022). A new approach for the Modified Local Green's Function Method applied to Poisson equation. In Proceedings of the XLIII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC. Foz do Iguaçu, Brazil, 2022.

CORRÊA, R. M.; ARNDT, M.; & MACHADO, R. D. (2023). A new approach for the Modified Local Green's Function Method applied to solid mechanics problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.07.009>>.

COTTRELL, J. A; REALI, A; BAZILEVS, Y; HUGHES, T.J.R. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 41-43, p. 5257–5296, 2006. ISSN 00457825.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 41–44, p. 4160–4183, 2007.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T.J.R; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. 1st Edition. ed. USA: John Wiley & Sons, 2009.

COX, M.G. **The numerical evaluation of B-splines**. Technical report, National Physics Laboratory DNAC 4, 1971.

DE-BOOR, C. On Calculation of B-Splines. **Journal of Approximation Theory**, v. 6, p. 50-62, 1972.

FAKHYE, R. J. M. **Aplicação da análise isogeométrica no estudo de problemas dinâmicos em seções de barragens de gravidade de concreto usando formulação multi-patch**. Curitiba, 2017. Tese (Doutorado em Ciências, Área de Concentração: Mecânica Computacional) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná. Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado.

FUDOLI, C.A. **Formulação do método dos elementos de contorno e plasticidade com gradiente**. São Carlos, 1999. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Orientador: Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini.

GREENBERG, M. D. **Application Of Green's Functions In Science And Engineering**. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1971.

GU J; ZHANG J; SHENG, X; LI, G. B-spline approximation in boundary face method for three-dimensional linear elasticity. **Eng Anal Bound Elem** 2011;35(11):1159–67

HASSANI, B. GANJALI, A. & TAVAKKOLI, M. (2011). An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. **European Journal of Mechanics A/Solids**, 21, 101-109.

HORAK, W. C.; DORNING, J. J. A Local Green's Function Method for the Numerical Solution of Heat Conduction and Fluid Flow Problems. **Nuclear Science and Engineering**, Informa UK Limited, v. 64, n. 1, p. 192–207, 1977.

HORAK, W. C. **Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems**. 1980. Tese PhD – University of Illinois at Urbana-Champaign.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**, Dover Publications, 2000.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135-4195, 2005.

HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SANGALLI, G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5–8, p. 301–313, 2010.

JIA, L. Isogeometric contact analysis: geometric basis and formulation for frictionless contact. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 200 (5-8), 2011. 726- 741.

KHAN, S; KHAN, F; KHAN, M.R; ARSHAD, M; SHAH, H. H. On the evaluation of Poisson equation with dual interpolation boundary face method. **European Journal of Mechanics / A Solids**, Elsevier BV, v. 88, p.104248, 2021.

KLINKEL, S. **Shell formulation for Isogeometric Analysis**. RWTH Aachen University, 2018. Disponível em < <https://www.lbb.rwth-aachen.de/cms/LBB/Forschung/Forschungsthemen/Numerische-Strukturanalyse/~ewrf/Solid-shell-finite-element-formulations/?lidx=1> >.

LAI, W. M.; RUBIN, D. H.; KREMPL, E. **Introduction to continuum mechanics**. Butterworth-Heinemann, 2010.

MACHADO, R. D. **Desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local para a solução de placas ortotrópicas laminadas**. Tese de doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Santa Catarina, 1992.

MACHADO, R. D.; BARCELLOS, C. S. A First Modified Local Green's Function Method Approach to Orthotropic Laminated Plates. In: ADVANI, S. G.; BLAIN, W. R.; GILLESPIE JÚNIOR, J. W.; GRIFFIN JÚNIOR, O. H. (Ed.). **Computer Aided Design in Composite Material Technology III**. Southampton: Springer Netherlands, 1992. 405–417.

MACHADO, R. D.; BARBIERI, R.; FILIPPIN, C. G.; BARCELLOS, C. S. Comparative analysis of the finite element method with the modified local Green's function method for application to the solution of composite laminated plates. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, 1992, v. 16, n. 1, 27–34.

MACHADO, R. D.; BARBIERI, R.; FILIPPIN, C. G.; BARCELLOS, C.S. Comparative analysis of the finite element method with the modified local Green's function method for application to the solution of composite laminated plates. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v.16, n.1 p. 27-34, 1994.

MACHADO, R. D.; ABDALLA FILHO, J. E.; SILVA, M. P. Stiffness loss of laminated composite plates with distributed damage by the modified local Green's function method. **Composite Structures**, Elsevier BV, 2008, v. 84, n. 3, 220–227.

MACHADO, R. D.; SILVA, M. P.; TASSINI JR, A.; BARBIERI, R. Progressive Stiffness Loss Analysis of Symmetric Laminated Plates Due to Transverse Cracks Using the MLGFM. In: GAN, Y. X. (Ed.). **Continuum Mechanics: Progress in Fundamentals and Engineering Applications**. Rijeka: InTech, 2012. P. 123–142.

MACHADO, R. D.; BARBIERI, R.; SILVA, M. P.; TASSINI, A.; DELLA'GIUSTINA, E. The MLGFM applied to laminated composite plates. In: DEL PRADO, Z. J. G. N. (Ed.). **Anais do XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Pirenópolis, GO: [s.n.], 2013. ABMEC.

MATZEN, M.E; CICHOSZ, T; BISCHOFF, M. A point to segment contact formulation for isogeometric analysis, NURBS based finite elements. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 255, 2013. 27-39.

NGUYEN, V. P; ANITESCU, C; BORDAS, S.P.A; RABZUK, T. Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 117, p. 89–116, nov 2015. ISSN 03784754. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378475415001214>>.

PIEGL, Les; TILLER, Wayne. **The NURBS Book**. Springer Science & Business Media, 14 de novembro de 1996.

RAUEN, M. **Análise Isogeométrica aplicada aos problemas de vibração livre na mecânica das estruturas**. Orientador: Roberto Dalledone Machado. 2014. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2014. Disponível em < <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/36442/R%20-%20D%20-%20MA-TEUS%20RAUEN.pdf?sequence=1&isAllowed=y> >.

RAUEN, M; MACHADO, R.D; ARNDT, M. **Isogeometric analysis of free vibration of framed structures: comparative problems**. **ENGINEERING COMPUTATIONS**, v. 34, p. 377-402, 2017.

RAUEN, M. **Uma formulação enriquecida para a análise isogeométrica aplicada aos problemas da dinâmica de estruturas**. Orientador: Roberto Dalledone Machado. 2020. Tese (Doutorado em Ciências) – Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2020.

Disponível em < <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/69409/R%20-%20T%20-%20MATEUS%20RAUEN.pdf?sequence=1&isAllowed=y> >.

RAUEN, M; MACHADO, R.D; ARNDT, M. An enriched formulation of isogeometric analysis applied to the dynamical response of bars and trusses. **Engineering Computations**, v. 37, p. 2439-2466, 2020.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 3rd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education (ISE Editions), 2005. 784 p. ISBN 007124473-5.

ROGERS, D. F. **An introduction to NURBS: with historical perspective**. [S.l.: s.n.], 2001. 344 p. ISSN 1098-6596. ISBN 1558606696.

SADD, M.H. **Elasticity: Theory, Applications and Numerics**. Academic Press, 2 ed., 2009.

SCHOJAE, S.; IZADPANAH, E.; VALIZADEH, N.; KIENDL, J. Free vibration analysis of thin plates by using a NURBS-based isogeometric approach. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 61, p. 23-34, 2012.

SILVA, L. H. M. **Novas formulações integrais para problemas da mecânica**. Tese de doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Santa Catarina, 1988.

SILVA, M. P. **Análise do dano em laminados compostos pelo MMFGL**. 2004. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

SILVA, M. P.; ABDALLA FILHO, J. E.; HSU, Y. S.; MACHADO, R. D. Enriched modified local green's function method applied to elasto static problems. In: **PROCEEDINGS of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering**. [S.l.]: ABCM, 2017.

SILVA, M. P.; MACHADO, R. D.; ABDALLA FILHO, J. E. Enriched methods allied to modified local green's function method for elasto static problems. In: **PROCEEDINGS of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. [S.l.]: ABMEC Brazilian Association of Computational Methods in Engineering, 2017.

SILVA, M. P. **Enriched modified local green's function method applied to elasto static problems**. 2018. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

SIMPSON, R.N; BORDAS, S.P.A; TREVELYAN, J; RABCZUK, T. A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. **Comput Methods Appl Mech Eng** 2012;209-212: 87-100.

SIMPSON, R.N; BORDAS, S.P.A; LIAN, H; TREVELYAN, J. An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2d implementation aspects. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 118, p. 2–12, 2013.

TASSINI JUNIOR, A. **Análise de perda de rigidez em laminados devido a trincas transversais na matriz**. 2005. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

TEIXEIRA, G.H; MONTEIRO, F.A.C; CORDEIRO, S.G.F. **An Independent Basis Isogeometric Boundary Element Formulation**. 2023a. Master's Thesis, Aeronautics Institute of Technology. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34558.97609>

TEIXEIRA, G.H; MONTEIRO, F.A.C; CORDEIRO, S.G.F. Convergence studies in elasticity with na independent basis isogeometric boundary element formulation. In **Proceedings of the 27th International Congress of Mechanical Engineering, ABMC**. Florianópolis, Brazil, 2023b.

- TEMIZER, I; WRIGGERS, P; HUGHES, T.J.R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 200 (9-12), 2011. 1100-1112.
- TEMIZER, I, Multiscale thermomechanical contact: Computacional homogenization with isogeometric analysis. **Internal. J. Numer. Methods Engrg.** 97 (8), 2014. 582-607.
- VEIGA, B.C; MACHADO, R.D. Isogeometric Analysis in Solid Mechanics: Exploring precision and versatility. In Proceedings of the 27th International Congress of Mechanical Engineering, ABMC. Florianópolis, Brazil, 2023.
- VUONG, Anh-Vu. **Adaptive Hierarchical Isogeometric Finite Element Methods.** Springer Spektrum, 2012.
- WEINHARDT, P. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. Enriched techniques applied to modified local green's function method in dynamic modal analysis. In: PROCEEDINGS of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. [S.l.]: ABMEC Brazilian Association of Computational Methods in Engineering, 2017.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.** 6. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 0750663200,9780750663205.
- ZÚÑIGA, J.L.G. **Análise Isogeométrica de cascas finas baseada na teoria de kirchhoff-love.** Orientador: Roberto Dalledone Machado. 2019. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Mecânica Computacional, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2019. Disponível em < <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/69434/R%20-%20D%20-%20JORGE%20LUIS%20GARCIA%20ZUNIGA.pdf?sequence=1&isAllowed=y> >.