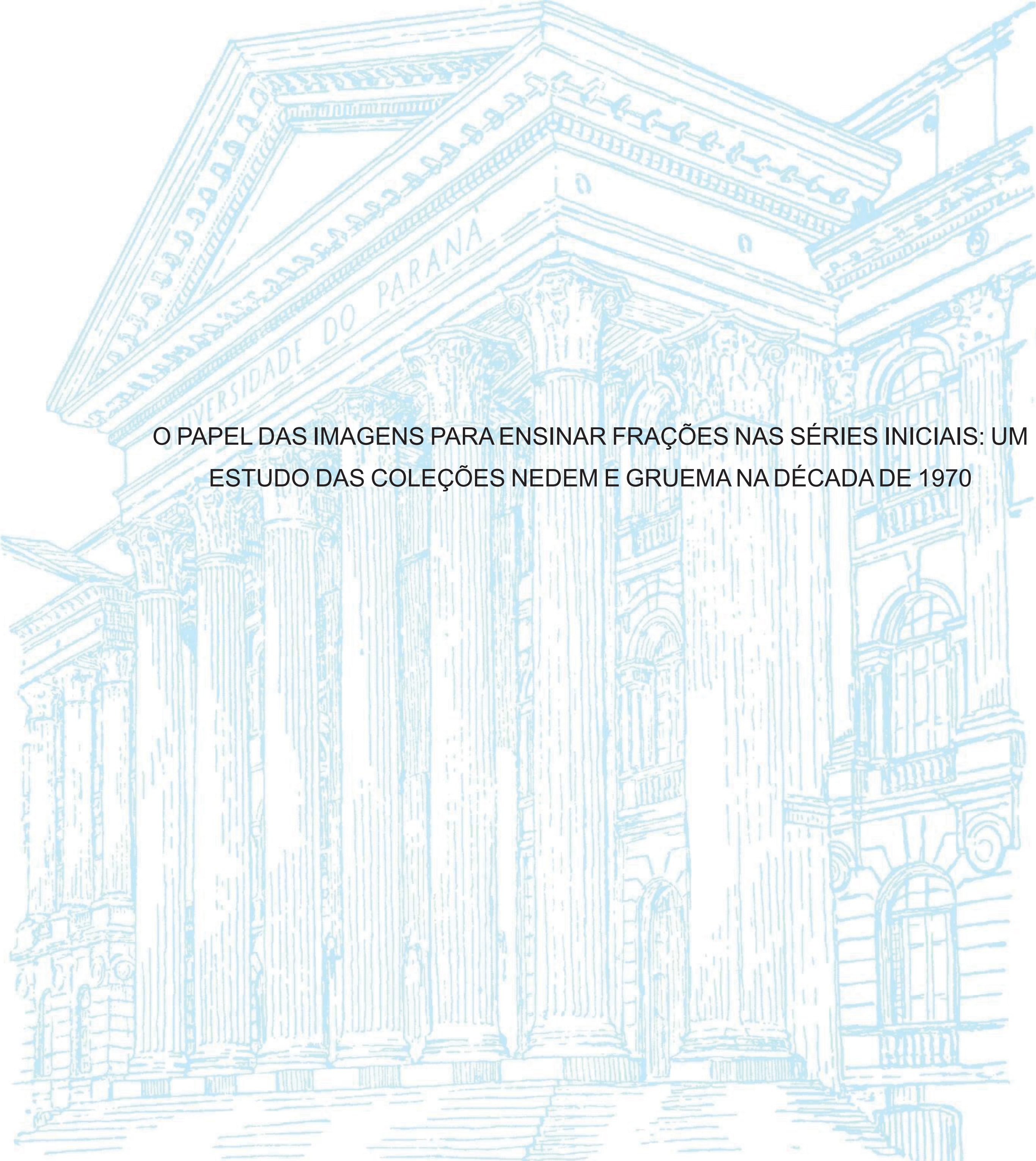
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOÃO PAULO BERTOLDO



O PAPEL DAS IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NAS SÉRIES INICIAIS: UM ESTUDO DAS COLEÇÕES NEDEM E GRUEMA NA DÉCADA DE 1970

PALOTINA

2024

JOÃO PAULO BERTOLDO

O PAPEL DAS IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NAS SÉRIES INICIAIS: UM ESTUDO DAS COLEÇÕES NEDEM E GRUEMA NA DÉCADA DE 1970

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas, Setor Palotina, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado.
Linha de Pesquisa: LP1: Filosofia, História e Sociologia da Educação em Ciências e da Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes

PALOTINA

2024

Universidade Federal do Paraná. Sistemas de Bibliotecas.
Biblioteca UFPR Palotina.

B546 Bertoldo, João Paulo
O papel das imagens para ensinar frações nas séries iniciais: um estudo das coleções NEDEM e GRUEMA na década de 1970 / João Paulo Bertoldo. – Palotina, PR, 2024.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor Palotina, PR, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas.
Orientadora: Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes.

1. Educação matemática – história. 2. Frações.
3. Matemática Moderna. I. Novaes, Barbara Winiarski Diesel.
II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDU 510.2

Bibliotecária: Aparecida Pereira dos Santos – CRB 9/1653

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR PALOTINA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS - 40001016174P1

ATA Nº28

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS

No dia vinte e oito de junho de dois mil e vinte e quatro às 14:00 horas, na sala https://meet.google.com/vfw-ttoi-gey, virtual, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de dissertação do mestrando **JOÃO PAULO BERTOLDO**, intitulada: **O PAPEL DAS IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NAS SÉRIES INICIAIS: UM ESTUDO DAS COLEÇÕES NEDEM E GRUEMA NA DÉCADA DE 1970**, sob orientação da Profa. Dra. BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ), DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), DAVID ANTONIO DA COSTA (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de mestre está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

Palotina, 28 de Junho de 2024.

Assinatura Eletrônica
03/07/2024 19:40:29.0
BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
01/07/2024 14:08:27.0
DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
01/07/2024 14:45:04.0
DAVID ANTONIO DA COSTA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR PALOTINA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS - 40001016174P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JOÃO PAULO BERTOLDO** intitulada: **O PAPEL DAS IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NAS SÉRIES INICIAIS: UM ESTUDO DAS COLEÇÕES NEDEM E GRUEMA NA DÉCADA DE 1970**, sob orientação da Profa. Dra. BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Palotina, 28 de Junho de 2024.

Assinatura Eletrônica
03/07/2024 19:40:29.0
BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
01/07/2024 14:08:27.0
DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
01/07/2024 14:45:04.0
DAVID ANTONIO DA COSTA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Dedico este trabalho a toda minha família, principalmente à minha esposa, Luciana, e às minhas filhas, Lara e Morgana, que são as mulheres da minha vida. Dedico também à minha orientadora, Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, pelo apoio do início ao fim do processo. A todos, o meu muito obrigado.

AGRADECIMENTO

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que colocou em meu caminho tantas pessoas queridas e amadas, por Ele e por mim.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação, aos meus colegas do PPGECEMTE, de modo especial, às outras três “mosqueteiras”, Adriana, Ruth e Juliana, por fazerem valer o “um por todos e todos por um”.

Agradeço à minha orientadora, professora Barbara Winiarski Diesel Novaes, por estar sempre ao meu lado durante todo o processo e muito me representar, enquanto mãe, esposa, professora e pesquisadora, e no meio disso tudo ainda me levar ao Grupo de Estudos do GHEMAT-PR, ao qual também agradeço todos os ensinamentos dados durante a jornada.

Agradeço à professora Danilene Gullich Donin Berticelli e ao professor David Costa, banca da qualificação e defesa, as valiosas contribuições para o resultado final deste trabalho.

Sou grato aos meus pais, João e Vanda, por terem dedicado suas vidas na criação de dois filhos que sempre tiveram a educação posta em primeiro lugar.

Por último, e mais importante, meu agradecimento à minha esposa, Luciana, e às minhas filhas, Lara e Morgana, por estarem ao meu lado nos momentos mais difíceis e por comemorarem, junto comigo, todas as pequenas vitórias do percurso e, agora, celebrarem comigo o doce sabor do sucesso da chegada.

Gratidão a todos!

"Se pude enxergar mais longe, foi porque me apoiei em ombros de gigantes".

(Isaac Newton, 1675)

RESUMO

Quais imagens relacionadas às frações estavam presentes em livros didáticos dos primeiros anos de escolarização ao tempo do Movimento da Matemática Moderna (MMM), na década de 1970? Tendo esta pergunta para direcionar o debate, pretende-se, neste trabalho, discutir acerca do papel que as imagens para ensinar frações assumem em livros didáticos para os primeiros anos de escolarização, no período do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1970. Ao utilizar aportes teóricos metodológicos da História Cultural, foram analisadas duas coleções de livros didáticos representativos da época: Ensino Moderno da Matemática do NEDEM; e, Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau - GRUEMA. As autoras das duas coleções, todas mulheres, se apropriaram de autores estrangeiros como Piaget, Dienes, Papy, mas também, criaram formas de ensinar as frações com o uso das imagens, por meio de experiências em classes experimentais, participação em grupos de estudos (NEDEM e GEEM) e ministrando cursos para professores. No NEDEM, o papel das imagens durante o MMM prevê uma sequência (concreto, semiconcreto, semiabstrato e abstrato) do que inicialmente deveria ser trabalhado com os alunos, utilizando materiais manipulativos/materiais estruturados. Os conceitos de variabilidade perceptiva (abstração) e variabilidade matemática (generalização), de Dienes, fazem com que as imagens seguissem uma graduação, numa articulação visual da página com o texto escrito, desde a primeira série, com a noção de metade/dobro, terço/triplo associadas a questões próximas aos estudantes da época. As imagens assumem um papel didático e são repetidas nas séries seguintes, acrescidas da linguagem matemática da teoria de conjuntos. A partir da terceira série, as frações na reta numérica são um suporte visual de destaque para entender as frações como uma das representações no número racional.

Palavras-chave: História da Educação Matemática; Frações; Imagem; Movimento da Matemática Moderna; Livro Didático.

ABSTRACT

What images related to fractions were present in textbooks for the first years of schooling at the time of the Modern Mathematics Movement (MMM) in the 1970s? With this question as a guide for the debate, this paper aims to discuss the role that images play in teaching fractions in textbooks for the first years of schooling during the Modern Mathematics Movement in the 1970s. Using theoretical and methodological contributions from Cultural History, two collections of textbooks representative of the time were analyzed: Ensino Moderno da Matemática (Modern Mathematics Teaching) from NEDEM; and Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau (Modern Mathematics Course for Elementary School Education) from GRUEMA. The authors of the two collections, all women, borrowed from foreign authors such as Piaget, Dienes, and Papy, but also created ways of teaching fractions using images, through experiments in experimental classes, participation in study groups (NEDEM and GEEM), and teaching courses for teachers. At NEDEM, the role of images during the MMM foresees a sequence (concrete, semi-concrete, semi-abstract, and abstract) of what should initially be worked on with students using manipulative materials/structured materials. Dienes' concepts of perceptual variability (abstraction) and mathematical variability (generalization) mean that the images follow a gradation, in a visual articulation of the page with the written text from the first grade onwards, with the notion of half/double, third/triple associated with issues close to the students of the time. The images play a didactic role and are repeated in the following series, with the addition of the mathematical language of set theory. From the third series onwards, the fractions on the number line are a prominent visual support for understanding fractions as one of the representations of rational numbers.

Keywords: History of Mathematics Education; Fractions; Image; Modern Mathematics Movement; Textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

APOS	Arquivo Pessoal Oswaldo Sangiorgi
CELEPAR	Centro de Treinamento e Aperfeiçoamento de Professores do Estado do Paraná
CEPE	Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão
GEEM	Grupo de Estudos de Ensino da Matemática Moderna
GEEMPA	Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de Porto Alegre
GEPEM	Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática no Rio de Janeiro
GHEMAT	Grupo Associado de Estudos e Pesquisas Sobre História da Educação Matemática
GRUEMA	Grupo de Ensino da Matemática Atualizada
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NEDEM	Núcleo de Estudos e Difusão da Matemática Moderna
OECE	Organização Europeia de Cooperação Econômica
PPGECEMTE	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas
RCD	Repositório de Conteúdo Digital
S/D	Sem data

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Todos os dias e em diferentes instâncias somos bombardeados com inúmeras imagens[1], seja nas mídias ou nos mais diferentes meios de comunicação. Nas escolas[2], as salas possuem cartazes, televisões, projetores multimídia e as crianças têm acesso a jogos e aplicativos em *tablets.* A proliferação de imagens na era contemporânea gerou um impacto profundo na nossa sociedade de várias maneiras e o crescimento dessa cultura visual[3] tem afetado o trabalho de historiadores e do método histórico (Del Pozo Andrés; Braster, 2020).

No contexto escolar da matemática, ao longo da história, há a inserção gradativa de imagens em materiais produzidos para este espaço, como por exemplo[4], livros didáticos de Villela (2009) e Oliveira (2013), jogos de Schneider (2017) e Soares (2014), Cartas de Parker de Portela (2014), entre muitos.

Atualmente, algumas das imagens dos livros didáticos de matemática são icônicas, aparecendo em quase todas as obras didáticas atuais e nas do passado, como a divisão do círculo ou os quadros de equivalência que parecem seguir padrões prototípicos[5], assim como os estudos na área de geometria.

Para este estudo, interessa-nos analisar as imagens utilizadas para ensinar frações em duas coleções[6] de livros didáticos, a do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM) - Paraná e do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA) – São Paulo e Rio de Janeiro, ambas publicadas na década de 1970.

Segundo Choppin (2004, p. 549) "após ter sido negligenciado, tanto pelos historiadores quanto pelos bibliógrafos, os livros didáticos vêm suscitando um vivo interesse entre os pesquisadores", nos últimos cinquenta anos. Mais

---

[1] A definição de imagem será apresentada no capítulo 2.

[2] Acreditamos que várias salas de aula no Brasil já possuem acesso a algum tipo de tecnologia, mas entendemos que o Brasil é uma continente, logo, estamos falando do "lugar" em que estamos situados, a realidade das escolas públicas municipais de Toledo no Estado do Paraná.

[3] Por cultura visual entendemos como sendo o momento, a partir da virada visual (década de 1990), onde se abandona a ênfase no pictórico, ou figurado, para acentuar o visual e a visualização (Knauss, 2006 *apud* Santiago Júnior, 2019).

[4] Há uma produção expressiva no Campo da História da educação matemática e optamos por trazer somente alguns exemplos que ajudam a problematizar nosso objeto de estudo.

[5] Um padrão feito pela primeira vez e, muitas vezes, copiado ou imitado; modelo, padrão, cânone. Disponível em: https://www.dicio.com.br/prototipo. Acesso em: 26 mar. 2024.

[6] A caracterização das duas coleções, assim como os grupos e autoras envolvidas na produção será realizada nos capítulos três e quatro.

especificamente, no campo da História da educação matemática, num viés histórico-cultural, inúmeros trabalhos têm mobilizado os livros didáticos como evidência histórica. Dentre eles, destacamos a tese de David Antônio da Costa (2010), a dissertação de Marcus Aldenisson de Oliveira[7] (2013), os trabalhos de Circe Mary Silva da Silva sobre imagem (2017). Para compreender a Aritmética no curso primário brasileiro (1890 – 1946), em específico as transformações ocorridas com o conceito de número, Costa (2010) mobiliza várias coleções de livros didáticos e conclui que ocorreu uma significativa apropriação da Psicologia na Educação e do Método Intuitivo[8]. Já o trabalho de Oliveira (2013) analisa especificamente as obras de Antônio Bandeira Trajano e o ensino de Aritmética e o Método Intuitivo no período de 1879-1954. Um dos vieses do estudo é a análise das imagens presentes na obra de Trajano em que é possível notar que “as imagens exerciam uma função de ilustrar, com clareza, objetividade e simplicidade as informações, tornando o ensino mais agradável e, talvez, mais estimulante” (Oliveira, 2013, p.124).

No século XIX, as obras dedicadas ao ensino de aritmética raramente recebiam ilustrações (Valente, 1999). Segundo Silva (2000) um dos poucos autores a utilizar imagens com propósitos didáticos foi Antônio Trajano, já em sua *Arithmetica elementar ilustrada*, cuja primeira edição ocorreu em 1879.

O artigo de Silva (2017) investiga sobre imagens para o ensino de aritmética nos livros didáticos de matemática de Georg Augusto Büchler (1919) e Karl Sölter (1932). Os livros seguem os preceitos do método intuitivo e a inserção das imagens nos dois livros examinados teve, segundo a autora, intenção didática, embora não exclusivamente, já que algumas imagens são de cunho ideológico.

No Brasil, encontramos outras pesquisas em História da educação matemática - Dalcin (2021); Flores (2022); Flores, Cassiane (2013); Flores (2010), História da Matemática no Ensino - Cesana, Silva (2022) e em Geometria - Paulo (2006), que utilizam imagens (obras de arte, fotografias, representações de imagens em geometria), mas nenhuma delas analisa imagens em livros didáticos no que tange a um conteúdo específico de Aritmética – frações.

---

[7] O trabalho foi aprofundado na tese de Oliveira (2017) intitulada “A Aritmética Escolar e o Método Intuitivo: Um novo saber para o curso primário (1870 – 1920)”. Optamos por explorar a dissertação por trazer a temática imagens em primeiro plano.

[8] O Método Intuitivo foi introduzido no Brasil na segunda metade do século XIX, e é sintetizado nos conceitos observar e trabalhar (manipulação direta de objetos), onde a observação gera o raciocínio e o trabalho permite a realização de atividades similares àquelas da vida adulta (Valdemarin, 2001).

Atentos a estes aspectos, em uma pesquisa no Repositório de Conteúdo Digital (RCD)[9], do Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (GHEMAT Brasil), não encontramos trabalhos que discorram acerca do uso de imagens para ensinar frações.

Dessa forma, este trabalho procura preencher uma lacuna e contribuir com a escrita da História da educação matemática. O interesse particular pelas frações se deu por se tratar de um dos conteúdos mais difíceis de ensinar para as crianças, isso verificado na nossa experiência em sala de aula e ratificado pela pesquisa de Carraher e Schliemann (1992), quando estas afirmam que dentre os conteúdos matemáticos que os alunos dos primeiros anos de escolarização apresentam maior dificuldade na aprendizagem, estão os conceitos de frações e de frações equivalentes. Sem contar que o conceito de fração serve de base para outros conceitos matemáticos abordados em fases subsequentes do ensino, como aponta Behr *et al.* (1983, p. 91), ao afirmar que "a compreensão dos números racionais[10] fornece a base sobre a qual as operações algébricas elementares podem se basear posteriormente".

A ideia de estudar as imagens para ensinar frações surge de uma questão do presente. "Quer que eu desenhe?" não é uma pergunta ofensiva quando estamos ensinando crianças, mas sim, uma ótima metodologia que pude constatar em minha[11] prática como professor. Essa certeza da importância do uso de imagens para ensinar fração, principalmente para crianças, é oriunda de minha experiência de 25 anos de trabalho, na Rede Municipal de Ensino da Prefeitura de Toledo, no Estado do Paraná, como professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental e, pelos menos dez desses anos, sendo regente de turmas do 5º ano do Ensino Fundamental. Pela minha prática profissional, parece-me que, por meio de imagens, esse conteúdo considerado complexo pode-se tornar mais compreensível.

Como fazer uma criança compreender o que é fração, tanto como operador quanto como parte de um todo em quantidades discretas e contínuas? Como

---

[9] O repositório está sob responsabilidade do Prof. David Antônio da Costa, e possui 6159 documentos, dentre fontes históricas, artigos científicos e teses e dissertação sobre História da educação matemática. Posteriormente iremos expandir nossa busca para o portal de teses e dissertações da Capes. O endereço do repositório é: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769. Acesso em 15 de agosto de 2023.

[10] Número racional é todo número que pode ser escrito na forma de a/b onde "a" e "b" são números naturais e "b" é diferente de "0" (Liberman, Sanchez, Franchi ,1974, p. 41-42).

[11] Nesse momento, falo no singular, por se tratar de uma experiência do João Paulo Bertoldo.

abordar a fração como uma representação do número racional na reta numérica? Desde quando o livro didático traz essas imagens para facilitar a compreensão das crianças? Como historicamente as imagens para ensinar aritmética vão adentrando os livros didáticos de matemática? Por que os livros didáticos de matemática utilizam algumas imagens para representar as frações, em detrimento de outras? Sempre foram utilizadas as mesmas, ou quase as mesmas imagens? Como as imagens auxiliam no entendimento da fração? São perguntas que me inquietam e sempre permearam minha relação com a matemática em sala de aula.

Munidos destas perguntas, mas sem nenhuma resposta, levamos a hipótese de que as imagens, se bem utilizadas, poderiam auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem para a seleção do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGECEMTE). Todas essas reflexões permeiam o “quer que eu desenhe?”, porém, na entrevista de seleção do mestrado, a professora Barbara Winiarski Diesel Novaes, que depois seria minha orientadora, disse que essas eram questões para a vida toda de pesquisa. Surgiu o primeiro grande problema, qual seja, como fazer perguntas para a vida toda “caberem” em dois anos de Mestrado? Precisaríamos de alguns recortes.

O nosso primeiro recorte foi quanto à análise de imagens para ensinar frações, presentes nos livros didáticos em perspectiva histórica, valendo-nos de autores da História Cultural – Certeau (1982), Chartier (1991, 1998), Chervel (1990), Julia (2001); História dos livros didáticos – Choppin (2004); História da educação matemática – Silva (2007), Costa (2010), Valente (2007, 2008a, 2008b, 2008c, 2017) e Matemática do ensino – Morais, Bertini e Valente (2021), para entender como as imagens vêm permeando o ensino de frações ao longo de tempo.

E por que realizar uma pesquisa em História da educação matemática? A resposta é de Novaes e Pinto (2021), quando afirmam que a História da educação matemática é um conhecimento relevante na formação de professores que ensinam matemática. Faz o professor refletir sobre a sua própria trajetória profissional, buscando compreender a constituição da disciplina que ministra no âmbito da cultura escolar, espaço resultante de normas e práticas que geram saberes de referência para docência – *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar*[12] (Hofstetter; Schneuwly,

---

[12] O GHEMAT Brasil tem mobilizado análises sobre a organização dos saberes, estudos esses realizados pela *Equipe de Recherche em Histoire Sociale de l’Éducation* (ERHISE), coordenado por Rita Hofstetter, da Universidade de Genebra. Os saberes a ensinar, saberes para ensinar assim como

2017) que, uma vez articulados e objetivados, constituem os saberes profissionais de referência para a docência. No âmbito da História da educação matemática (Hem), Valente (2017) faz uma interpretação criativa que resulta nos conceitos *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*. Novaes e Pinto (2021), ao analisar estudos sobre frações no campo da História da Educação Matemática, entre 2019 e 2020, destacam estudos que apontaram transformações ocorridas na "matemática do ensino de frações” (Morais, Bertini e Valente, 2021) em diferentes períodos históricos, entre eles, o uso de materiais estruturados, durante o Movimento da Matemática Moderna. Em nossa pesquisa, interessa-nos os saberes que estão relacionados à compreensão da finalidade das imagens para ensinar frações, presentes em livros didáticos de outros tempos.

O período histórico delimitado foi durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), mais especificamente, a década de 1970[13]. As coleções de livros analisadas foram escritas por educadoras matemáticas, integrantes do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA), cuja obra foi intitulada *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau*[14]; e, do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM), *Ensino Moderno da Matemática*[15]; ambos os livros produzidos e difundidos na década de 1970.

As duas coleções a serem analisadas, numa primeira vista, chamam a atenção para o número significativo de imagens, sendo que a coleção do GRUEMA foi impressa em quatro cores (Villela, 2009).

Osvaldo Sangiorgi[16], afirmava que os livros da década de 1970 eram bem diferentes dos da década de 1950 e ele continua, em tom de “autocrítica”, afirmando, em depoimento oral[17], trazido por Burigo (2008, p. 59), que “foi um abuso, livros aí[18] que pareciam uma Disneylândia pedagógica, um negócio, um exagero…”.

---

a matemática a ensinar e matemática para ensinar serão abordados no próximo capítulo.

[13] A lei de Diretrizes e Bases 5692/71 instituiu, entre outros, o ensino de primeiro grau com duração de oito anos, da primeira à oitava série, acabando com a nomenclatura – primário e ginásio.

[14] A Coleção completa engloba oito volumes, mas para esse estudo analisaremos os primeiros quatro volumes dirigidos às primeiras séries do ensino de primeiro grau.

[15] A Coleção era composta por quatro volumes dirigidos para as quatro primeiras séries do primeiro grau.

[16] Osvaldo Sangiorgi (1921 – 2017) foi um professor de matemática e autor de livros didáticos da época do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Seus livros direcionados ao ginásio foram verdadeiros *Best Sellers*, tanto da década de 1950 quanto na década de 1960 (Valente, 2008b).

[17] O depoimento oral foi concedido a Wagner Rodrigues Valente, em setembro de 1988.

[18] Livros das décadas de 1960 e 1970.

Após definidos quais livros didáticos, em qual período histórico e qual conteúdo iríamos analisar, para não corrermos o risco, segundo alerta Chervel (1990, p. 203-204), de que a “prática frequente, de uma amostra totalmente aleatória não pode conduzir, e não conduz efetivamente, a não ser a resultados frágeis, até mesmo caducos”, atento a isso, trabalhamos com a coleção do GRUEMA, por ser um sucesso editorial da época conforme Villela (2009), e ter sido escrita sob forte inspiração do Grupo de Estudos de Ensino da Matemática Moderna (GEEM) que, segundo Silva (2007), era presidido pelo professor Osvaldo Sangiorgi, e foi um dos primeiros grupos a discutir o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. Além dessa, analisamos a coleção do Núcleo de Estudos e Desenvolvimento do Ensino da Matemática (NEDEM), por ser significativo no estado do Paraná (Portela, 2009) e por ser o local em que residimos.

Dentro do MMM, como já enunciado, estudamos mais especificamente a década de 1970, pois foi nesse período que, segundo Villela (2009), abriu-se um rol de publicações de outros volumes, entre elas as coleções objeto de estudo deste trabalho. As professoras/autoras do GRUEMA, alcançaram tiragens que ultrapassaram a casa de quatro milhões de exemplares vendidos, se somados à coleção anterior “Curso de Matemática para a Escola Elementar”, publicado em 1967, dirigida aos alunos do nível primário de ensino, escrito pelas mesmas autoras[19]: Lucília Bechara, Manhucia Perelberg Liberman e Anna Franchi.

Tendo as coleções de livros didáticos como fonte privilegiada, e sendo esta uma pesquisa inserida no campo da História da educação matemática citado por Valente (2007), propomo-nos a formular perguntas aos traços deixados pelo passado, a fim de que as respostas a essas indagações formuladas se constituam em fatos históricos e fonte para outras pesquisas.

A questão que guia este trabalho é: **Quais imagens relacionadas às frações estavam presentes em livros didáticos dos primeiros anos de escolarização ao tempo do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1970?**

Este trabalho se justifica pelo fato de que um olhar para as imagens utilizadas para ensinar frações em livros didáticos do passado pode contribuir para a percepção crítica de que caminhos metodológicos já foram percorridos, ou seja,

---

[19] Os detalhes sobre as autoras das duas coleções serão abordados no capítulo 4, mas podemos adiantar que todas eram integrantes do GEEM.

como se constituem, ao longo do tempo, os saberes profissionais da docência em matemática, saberes esses que estamos constantemente fazendo uso em sala de aula. Esta pesquisa se torna relevante para o professor que ensina matemática, na medida em que ela propõe levá-lo ao entendimento do quão importante é trazer a imagem para o contexto de sala de aula, e que os livros didáticos são, já há bastante tempo, parceiros neste processo de fazer com que a criança visualize aquilo que está aprendendo.

O objetivo geral do trabalho é **discutir acerca do papel que as imagens para ensinar frações assumem em livros didáticos para os primeiros anos de escolarização, no período do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1970.**

Para tanto, foram seguidos os seguintes objetivos específicos:

– Verificar quais são as imagens mobilizadas nos livros didáticos analisados para ensinar frações;

– Identificar aspectos de visualidade e concretude nas imagens utilizadas para ensinar frações;

– Notar se os livros didáticos abordam as imagens sobre fração enquanto quantidade contínua (modelos de áreas e comprimentos) e discreta (elementos de conjunto);

– Apurar em que medida o livro traz imagens de fração prontas ou solicita ao estudante para que o faça.

No capítulo 2, apresentamos o ferramental teórico metodológico adotado para analisar as coleções de livros didáticos que constituem o foco deste estudo. Exploramos as imagens como fonte de pesquisa em História da educação matemática, uma vez que nos parece que elas desempenham um papel central no ensino de frações nos livros didáticos, durante o período do Movimento da Matemática Moderna (MMM).

No capítulo 3, contextualizamos o ambiente educacional da época em que essas obras foram produzidas, examinando como as frações eram abordadas durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, principalmente em São Paulo e no Paraná. Além de apresentar rapidamente os pressupostos de Jean Piaget e Zoltan Paul Dienes, importantes alicerces do MMM.

No capítulo 5, exploramos as imagens para ensinar frações presentes na coleção de livros didáticos do NEDEM, com exemplos para elucidar como foram mobilizadas para ensinar este conteúdo, em específico, durante o MMM e relacionando com fragmentos da legislação paranaense.

No capítulo 6, discutimos as imagens para ensinar frações presentes na coleção de livros didáticos do GRUEMA. Posteriormente, apresentamos os resultados obtidos e as considerações finais deste estudo.

2 O PERCURSO INVESTIGATIVO PELOS REFERENCIAIS TEÓRICOS METODOLÓGICOS

Hoje vivemos na era da informação visual. Estamos em uma sociedade tomada por uma enxurrada de vídeos, fotos, desenhos…, sempre muito carregados de cores e movimentos, o que acaba por superexcitar o cérebro, tendo como porta de entrada o sentido da visão.

Neste cenário, mais ainda, temos que, aprender a “olhar”, já que fomos educados a “olhar”, a perceber certas coisas e não outras (Dalcin, 2021).

Neste capítulo nos propomos, à luz da História Cultural e da História da educação matemática, a discutir acerca da importância do livro didático para a educação brasileira e como as imagens vêm sendo utilizadas ao longo da história para ensinar algo, para “educar o nosso olhar” na aprendizagem das frações. Para Flores (2007), a imagem é a representação de um modo de olhar. Neste capítulo, procuramos demonstrar o “modo de olhar” para o livro didático, no decurso da história, como o que se mostrou de fração direcionou o olhar do professor para o ensino deste conteúdo, ao longo do MMM.

2.1 OPERAÇÃO HISTORIOGRÁFICA E CULTURA ESCOLAR

O olhar que precisamos ter para um livro, aqui neste estudo do livro didático, é que este foi escrito por alguém, em um tempo e lugar. Precisamos voltar a nossa atenção ao fato de que, depois de produzida, essa obra circulou em um espaço com características e peculiaridades próprias.

Interessa-nos, à luz da História Cultural, tudo o que envolve a produção de um livro didático; a saber, o objeto em si, quem o produziu, em que tempo e onde circulou.

Propomos uma análise científica dos conteúdos que se dá, basicamente, de duas maneiras: através da crítica ideológica e cultural dos livros didáticos, ainda privilegiada pelos pesquisadores; ou analisando os conteúdos dos livros didáticos sobre uma perspectiva epistemológica, ou seja, a didática nele empregada (Choppin, 2004).

A segunda maneira utilizamos neste estudo, que é, analisar cientificamente um livro didático, e, segundo este autor, isso se intensificou ao final dos anos de 1970.

> Trata-se então, ou de colocar em evidência as principais características de um livro ou de uma coleção de livros, ou, segundo uma perspectiva diacrônica, de delimitar sua evolução por meio da análise de várias gerações de manuais ou de edições sucessivas e frequentemente bastante numerosas de um mesmo livro (Choppin, 2004, p. 556).

Neste trabalho, ao analisarmos a materialidade do livro, num primeiro momento colocamos em evidência as principais características físicas de duas coleções de livros didáticos, atentando-nos em como a imagem é usada, nessas obras, como ferramenta para a compreensão das frações.

Interessa-nos, nesta análise preliminar, entender o livro dentro de sua materialidade, primeiramente olhamos o livro didático como objeto físico, negligenciando os conteúdos inseridos, voltando-nos ao processo da sua elaboração, a configuração do material impresso como: papel, capa, diagramação, figuras, tiragem etc. a fim de, como afirma o autor:

> (...) o historiador dirige sua atenção diretamente para os livros didáticos, recolocando-os no ambiente em que foram concebidos, produzidos, distribuídos, utilizados e “recebidos”, independentemente, arriscaríamos a dizer, dos conteúdos dos quais eles são portadores (Choppin, 2004, p. 554).

Ainda atentos à materialidade do livro, encontramos em Roger Chartier a importância de se proceder desta maneira, pois não existe texto fora de suporte, assim:

> Não existe texto fora de suporte que o dá a ler e que não há compreensão de um escrito, qualquer que ele seja, que não dependa das formas através das quais ele chega a seu leitor (Chartier, 1998, p. 17).

Feitas essas considerações preliminares, é preciso avançar no que Valente (2008c) propõe, que é tomar o livro didático como objeto cultural, buscando realizar uma análise por meio da compreensão da trajetória histórica, identificando onde atuam seus elementos como: autores, editora, professores, alunos. Não avançamos na análise de quem são os professores e alunos envolvidos no contexto do MMM, dos anos 1970, porém, procuramos entender quem são os autores e as editoras que produziram o material foco de análise deste trabalho.

Partimos da premissa, como assevera, Choppin (2004), de que os autores não são simples espectadores de seu tempo, são agentes, assim como o livro didático, “não é um simples espelho: ele modifica a realidade para educar as novas gerações” (p. 557).

Sendo os autores agentes de seu tempo, realizamos uma entrevista com uma das autoras das obras analisadas, bem como, trouxemos excertos de entrevistas dadas por outras autoras em pesquisas já publicadas.

Uma vez materializada a obra e entendido todo o contexto que envolveu essa materialização, é preciso analisar onde ela circulou e, aqui, faz-se necessário o entendimento de como era a escola daquela época, não no que tange a elementos físicos, mas sim, em seus pressupostos e teorias balizadoras da ação pedagógica, já que, de acordo com Morais, Bertini e Valente (2021), a escola é uma instituição produtora de saberes, saberes esses que são elaborados no seio da cultura escolar.

Quando nos referirmos à cultura escolar a tomaremos sob a ótica de Julia (2001, p. 9), que a compreende como:

> [...] um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos.

Essas normas e práticas devem ser analisadas, levando em consideração a época, pois cada período da história traz uma finalidade que pode ser, por exemplo, religiosa, sociopolítica ou de socialização (Julia, 2001).

Do mesmo modo que não existe texto fora de seu suporte material é fato que esse texto é lido por alguém e este leitor se apropria[20] do mesmo. Essa apropriação está relacionada à liberdade, ao mesmo tempo, criadora e regulada dos leitores, bem como às múltiplas interpretações às quais um pensamento é suscetível (Chartier, 1991).

Como o livro didático vai parar no interior das escolas, os professores são os principais responsáveis em cumprirem, ou não, as normas e práticas que compõem

---

[20] A apropriação, a nosso ver, visa uma história social dos usos e das interpretações, referida a suas determinações fundamentais e escrita nas partes específicas que a produzem. Assim, voltar a atenção para as condições e os processos que, muito concretamente, sustentam as operações de produção do sentido (na relação de leitura, mas em tantos outros também) é reconhecer, contra a antiga história intelectual, que nem as inteligências nem as ideias são desencarnadas, e, contra os pensamentos do universal, que as categorias dadas como invariantes, sejam elas filosóficas ou fenomenológicas, devem ser construídas na descontinuidade das trajetórias históricas (Chartier, 1991, p. 180).

a cultura escolar. Essa ação do professor que retrata a história das práticas escolares é difícil de ser reconstruída, pois, geralmente, ela não deixa traço (Julia, 2001). Cabe ao historiador construir esses traços por meio dos vestígios encontrados nas produções escolares, que são frutos da cultura escolar.

Com todos esses elementos, almejamos que a escrita dessa História não seja fruto apenas de desejos pessoais de um historiador sem uma relação com o lugar social onde estão inseridos, essa escrita seria a ação do: “conteúdo” sobre “a forma” (Certeau, 1982, p. 105).

No cotidiano de uma operação historiográfica se encontram a construção e desconstrução onde o conceitual vem dar um amparo à exposição do conteúdo, que é hegemônico na maioria dos textos.

O texto é o lugar do discurso histórico, da delimitação de um recorte espacial e temporal, para ser analisado. Essa escrita histórica resulta das vivências do profissional da História, suas ideias perpassam o texto e é fruto de suas escolhas e do lugar social no qual está inserido.

Apropriamo-nos das referências da História Cultural, ferramentas com as quais o historiador da História da educação matemática produz seus argumentos a partir de traços, de rastros deixados no presente pelo passado (Valente, 2007, p. 31). Esta história que é dinâmica e propõe reflexões acerca de como o ensino de matemática, em específico aqui neste texto, vem acontecendo ao longo de um determinado tempo, como ele se modificou e foi se transformando e qual é a participação da escola e do professor nessa dinâmica.

Essas fontes serão usadas para formar uma narrativa que contará também com um relato da professora Lucília Bechara Sanchez. Essa entrevista foi pensada como parte da operação historiográfica e compõe esta investigação, que tem na oralidade um dos suportes. Por meio de entrevistas, a oralidade produz narrativas que possibilitam a elaboração de compreensões e atribuição de significados do objeto que se analisa (Garnica, 2010).

O objeto nesta pesquisa analisado é o livro didático que mostrará, com o apoio da entrevista, como as imagens foram usadas para se trabalhar fração no contexto do MMM. É sobre isso que tratamos na próxima seção.

2.2 MATEMÁTICA A ENSINAR, MATEMÁTICA PARA ENSINAR E A MATEMÁTICA DO ENSINO

Do senso comum, já há algum tempo, temos duas frases que são emblemáticas, quando estamos falando da matemática ensinada nas séries iniciais, são elas: “ninguém ensina aquilo que não sabe” e “eu sei para mim, mas não sei ensinar”.

A frase “ninguém ensina aquilo que não sabe” está diretamente ligada aos saberes que um professor que ensina matemática precisa ter, que é o pleno domínio do conteúdo a ser ensinado. No nosso estudo, um pleno domínio do que é fração no contexto de uma matemática escolar, e não, vinda do campo disciplinar da Matemática.

Em tempos longínquos do ensino primário “o currículo de formação dos professores primários prescritos pela Lei n. 10, de 1835, da primeira escola normal[21] brasileira, criada na Província do Rio de Janeiro com duração efêmera de quatro anos de existência” (Tanuri, 2000, p. 64) previa ao professor dominar as 4 operações e proporções sem referências aos procedimentos de ensino.

Esse currículo muda ao longo do tempo e encontra a sua forma mais acabada até finais do século XIX, onde a matemática ensinada no primário se aproxima àquela ensinada no ensino secundário, tendo como referência os ensinos ministrados no Colégio Pedro II, do Rio de Janeiro, fundado em 1837, e modelo para o curso secundário (Valente, 2011).

No final do século XIX, com a emergência dos grupos escolares nos moldes do ensino intuitivo e da escola graduada:

> [...] há uma modificação no panorama acima descrito para a formação matemática de professores para o curso primário. Novas referências são apropriadas por dirigentes da instrução pública paulista que as transformam em leis e decretos para o ensino, produzindo mudanças em obras didáticas em manuais para professores e em toda sorte de orientações didático-pedagógicas. Esse processo irá lapidar saberes para ensinar matemática a estarem presentes na formação inicial dos professores e, ainda, no que hoje denominamos formação continuada do docente (Valente, 2016, p. 469).

---

[21] Por ocasião da instalação das primeiras Escolas Normais, valorizou-se uma formação generalista, pela presença de maior número de disciplinas de cultura geral, sem afinidade com conhecimentos indispensáveis ao exercício da docência nos primeiros anos escolares (Pinto, 2024, p. 55).

A partir deste tempo, o professor precisa dominar a ciência das formas intuitivas, este domínio era o saber necessário para guiar os alunos nos primeiros passos da aritmética, em nosso estudo, da fração, e da geometria. Segundo Valente (2017), isso penetra a cultura escolar de tal forma que até os dias de hoje ouvimos a frase “eu trabalho primeiro no concreto”, o que demonstra que esta ideia perpassa vários outros movimentos e perdura na atualidade.

A partir daqui a *expertise* do professor que ensina matemática passa a ser a posse de um *saber para ensinar* cálculo às crianças, tendo em vista a finalidade da escola para uma dada época.

De um lado, estão os saberes constitutivos do campo profissional, chamados de saberes para ensinar, “[...] os saberes que são as ferramentas do seu trabalho” Hofstetter; Schneuwly (2017, p. 132); e de outro, os saberes emanados dos campos disciplinares, produzidos pelas disciplinas universitárias que se constituem como saberes a ensinar “[...] os saberes que são objetos do seu trabalho” (Hofstetter; Schneuwly, 2017, p. 131-132).

Valente (2017) se apropria do referencial teórico suíço e particulariza para as questões da História da educação matemática, trabalhando com os conceitos de *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*. Sendo que a:

> [...] *matemática a ensinar*, constituindo-se no objeto de trabalho do professor: o que o professor tem que ensinar; de outra parte, a matemática da formação de professores, tida como uma *matemática para ensinar*, ferramenta do trabalho docente, expressa o saber que o professor precisa ter para ensinar (Morais, Bertini e Valente, 2021, p. 76).

Esses saberes elaborados no interior da escola (Chervel, 1990), articulados, resultam na produção das disciplinas escolares, mais especificamente na disciplina escolar de matemática, o que evidencia que a escola não é um local apenas de transmissão passiva do conhecimento produzido nas universidades, antes disso, é local que produz conhecimento.

A articulação entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar constitui a *matemática do ensino* considerada como um saber resultante da produção histórica da cultura escolar (Morais, Bertini e Valente, 2021, p.16). Os autores diferem a *matemática do ensino* do *ensino de matemática*.

O *ensino da matemática* traz a pedagogia como um lubrificante para fazer caber na escola o que é produzido nas universidades. Já a *matemática do ensino* se interessa por questões epistemológicas, preocupa-se em entender aspectos que envolvem formação do professor e o ensino que estes ministravam em uma dada época, para isso mobiliza documentação dirigida aos alunos e, também, textos que orientam o trabalho do professor.

Esses saberes escolares manifestam-se, por exemplo, pelos livros didáticos aos quais os alunos da época tinham acesso, bem como aos manuais pedagógicos que os professores precisavam conhecer para “melhor” ministrarem as suas aulas.

Segundo Morais, Bertini e Valente (2021), o tempo condiciona a produção dos saberes escolares, uma vez que a organização espaço-temporal rege as práticas pedagógicas que se sujeitam aos: níveis de ensino, graus, ano letivo, bimestre, hora atividade, avaliações, provas *etc.*

Esses condicionantes, continuam os autores[22], determinam que para a produção de saberes no âmbito escolar há que serem considerados elementos como: *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas*.

Neste trabalho, analisamos a *sequência,* ou seja, o lugar ocupado pelas frações no conjunto dos temas da aritmética, essa *sequência* acontece em um dado período de tempo e muda conforme a vaga pedagógica.

Outro elemento importante, afirmam os autores, é o *significado* das frações dentro do contexto escolar: como são definidas as frações? Aqui não se trata da definição enquanto campo disciplinar matemático, mas sim, é a ideia inicial que o aluno precisa ter para aprender o que é fração. Avança-se para a *graduação,* que envolve o conceito de ensino e aprendizagem de um dado assunto pelos alunos, ou seja, qual é o passo a passo que deverá ser seguido pelo professor para se ensinar fração.

Finalmente, os *exercícios e problemas,* que remetem às respostas esperadas pelo professor após o ensino da fração ser ministrado, articulando *sequência*, *significado* e *graduação*. Essas são categorias de análise que permitem um estudo epistemológico da *matemática do ensino*, que almeja a junção entre a *matemática para ensinar* e a *matemática a ensinar* nas escolas.

Principalmente em um período histórico, onde os livros didáticos estão repletos de imagem, levantamos a hipótese teórica de que as imagens perpassam todas as categorias de análise, acima citadas. Em assim sendo, parece-nos um

[22] Vale destacar que Morais, Bertini e Valente (2021) utilizam essas categorias para análise de livros didáticos e manuais pedagógicos.

conhecimento necessário ao professor que ensina matemática o entendimento de como essas imagens auxiliam no processo de ensino e aprendizagem, logo, entender a real função da imagem dentro do livro, é um elemento do *saber para* ensinar matemática.

Na próxima seção apresentamos o referencial teórico metodológico para análise do livro didático, também olhamos melhor para a imagem, pois, segundo Joly (2007, p. 26) são elas que fazem “evoluir as formas, observar as suas deformações e investigar as leis que as regem.”

2.3 OS LIVROS DIDÁTICOS COMO FONTES HISTÓRICAS

Os estudos da História das disciplinas escolares, segundo aponta Chervel (1990), são favorecidos pela documentação escolar – manuscritos, cadernos, manuais escolares, revistas pedagógicas etc. Neste rol, o livro didático se configura como fonte privilegiada para compreender *saberes para ensinar* fração com o uso de imagens, nos anos iniciais de escolarização.

Desta forma, analisamos vestígios de como as imagens foram representadas e articuladas com os textos para abordar o conteúdo de fração dentro da coleção do NEDEM e do GRUEMA, ao tempo do MMM, na década de 1970.

A escolha por analisar livros didáticos encontra em Valente (2008c) o respaldo necessário para este estudo, quando ele assevera que a História da matemática escolar brasileira está diretamente ligada ao livro didático o que, portanto, o torna uma fonte privilegiada de pesquisa:

> Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos (Valente, 2008c, p. 151).

Para Choppin (2004), os livros didáticos exercem quatro funções essenciais (função referencial, curricular ou programática; função instrumental; função ideológica e cultural e função documental), “que podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, à época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização” (Choppin, 2004, p. 553).

O livro didático como função referencial abarca e é visto como:

> O suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações (Choppin, 2004, p. 553).

Choppin (2004, p. 559) evidencia que:

> Foi no final dos anos 1980, com os avanços da semiótica, o impulso da história das mentalidades e o interesse pelas questões de vulgarização das ciências, que recorreu a muitos esquemas e gráficos, que o livro didático deixou de ser considerado como um texto subsidiariamente "enfeitado" de ilustrações, e para que a iconografia didática — e a articulação semântica que une o texto e a imagem — tenha sido levada em conta (Choppin, 2004, p. 559).

Na próxima seção abordamos as imagens como fontes históricas, também discutimos sobre a articulação semântica que une a imagem ao texto e como a imagem cumpre o importante papel de fazer "a ponte" que liga o concreto ao abstrato.

2.4 AS IMAGENS COMO FONTES HISTÓRICAS

Em pesquisas históricas do século XIX e XX, as imagens eram usadas como algo decorativo, e não como fonte material, sendo que "a história era sobre a leitura, muito menos sobre a escuta (história oral) ou olhar (imagens visuais)" (Del Pozo Andrés e Braster, 2020, p. 895).

Neste texto, embora de maneira secundária, abordamos a História oral, definida como uma metodologia de pesquisa com características específicas e que para Alberti (2013):

> A História Oral é um método de pesquisa (histórica, antropológica, sociológica, etc.) que privilegia a realização de entrevistas com pessoas que participaram de, ou testemunharam, acontecimentos, conjunturas, visões de mundo, como forma de se aproximar do objeto de estudo (Alberti, 2013, p. 24).

Utilizamos essa história que valoriza a escuta para ouvirmos aquela que "participou de", como a principal autora de uma das coleções analisadas.

Utilizamo-nos do “olhar”, rompendo com a ideia de uma história construída muito mais sobre a leitura, assim como muitos historiadores da História cultural que começaram a examinar mais de perto, entre outras, as imagens como evidência histórica (Burke, 2001), colaborando com o que foi chamado de “virada visual” em pesquisas históricas.

A virada visual, na década de 1990, é inspirada na mudança linguística dos anos 1960, e na guinada cultural no período dos anos de 1970, combinada com uma virada pós-moderna nos anos 1980. Os historiadores começaram a valorizar e incorporar em seus estudos as fontes visuais (fotografias, pinturas, ilustrações, cartazes, filmes e outras formas de imagem) como fontes primárias para produzir uma representação sobre o passado. Essa abordagem mais visual na pesquisa histórica levou os historiadores a desenvolverem novos métodos de análise e interpretação visual, bem como a integrarem técnicas da história da arte, da semiótica e de outras disciplinas relacionadas em seus estudos (Del Pozo Andrés e Braster, 2020).

Em acordo com essa abordagem mais visual que trata a imagem como evidência histórica, e não mais como mera decoração de um texto escrito, utilizamos, neste trabalho, do conceito sobre imagem trazido por Joly (2007, p. 13):

> Compreendemos que ela[23] designa algo que, embora não remetendo sempre ao visível, toma de empréstimo alguns traços ao visual e, em todo o caso, depende da produção de um sujeito: imaginária ou concreta, a imagem passa por alguém, que a produz ou reconhece (Joly, 2007, p. 13).

Essa imagem produzida e reconhecida por alguém é usada pela pedagogia, após plenamente entendida, para:

> [...] distinguir os principais instrumentos desta linguagem[24] e o que significa a sua presença ou a sua ausência; relativizar a sua própria interpretação, embora sempre compreendendo os seus fundamentos - são algumas das muitas provas de liberdade intelectual que a análise pedagógica pode implicar (Joly, 2007, p. 53).

---

[23] Referindo-se à imagem.

[24] A imagem é uma linguagem específica e heterogênea; que a este título se distingue do mundo real e que propõe por meio de signos particulares, uma representação escolhida e forçosamente orientada (Joly, 2007, p. 53).

Joly (2007) ao tratar do caso particular das imagens nas matemáticas afirma que:

> Nas matemáticas, o termo imagem pode ter um sentido específico e um sentido mais geral: uma imagem matemática é uma representação diferente de um mesmo objeto do qual ela é equivalente e não idêntica. É o mesmo objeto visto sob outro ângulo: uma anamorfose ou uma projeção geométrica podem ser exemplos desta teoria das representações. Mas as matemáticas utilizam também imagens como os gráficos, as figuras ou a imagem numérica para representar visualmente as equações ou para fazer evoluir as formas, observar as suas deformações e investigar as leis que as regem. Leis que, por sua vez, podem dizer respeito a fenômenos físicos e ajudar à sua explicação (Joly, 2007, p. 26).

A compreensão dos fundamentos de uma imagem, tanto pedagógicos quanto matemáticos, é um *saber* que pode ser exercido pelo professor dentro da sala de aula, continua a autora, para que se possa fugir do perigo da manipulação[25], uma vez que a imagem é produção de um sujeito, e ela imita, esquematizando visualmente, as pessoas e os objetos do mundo real.

Propomo-nos a uma abordagem analítica da imagem, para tanto, fizemos a opção de não a observarmos sobre o prisma da emoção e do prazer estético; antes disso, abordamo-na enquanto significação, com a pretensão de entender o que ela diz e como diz.

Corroboramos com Joly (2007, p. 49) quando esta afirma que, em se tratando de imagem:

> A mensagem está lá: observemo-la, examinemo-la, compreendamos o que ela suscita em nós, comparemos com outras interpretações; o núcleo residual desta confrontação poderá então ser considerado como uma interpretação razoável e plausível da mensagem, num momento X e nas circunstâncias Y.

“Por a mensagem estar lá”, num primeiro momento, as imagens que observamos vão abarcar ilustrações[26] (maçãs, laranjas, estrelinhas etc.), figuras geométricas (círculos, retângulos, pentágonos etc.) e diagramas (com elementos

---

[25] Para Joly (2007, p. 19), “Platão e Aristóteles, em especial, combateram-na e defenderam-na pelas mesmas razões. Imitadora para um, ela engana, para o outro ela educa. Desvia da verdade ou, pelo contrário, conduz ao conhecimento. Para o primeiro seduz as partes mais fracas da nossa alma, para o segundo, é eficaz pelo próprio prazer que nos proporciona.”

[26] Neste trabalho tratamos imagem e ilustração como sendo sinônimos, pois acreditamos na verossimilhança entre os dois termos “pois ambas são produzidas de forma pensada” (Oliveira, 2013, p. 94) onde “[...] a imagem é precisamente o que não se mexe, fica no lugar, não fala” (Joly, 2007, p. 17).

discretos e contínuos), reta numérica e modelos de comprimento (quadros de fração, barras etc.), máquina de estados etc.

A fim de captarmos o momento e a circunstância, examinamos a forma com que os livros didáticos são organizados, para que, após "uma leitura que fragmenta os textos em unidades separadas, e que reencontra, na articulação visual da página, as conexões intelectuais ou discursivas do raciocínio" (Chartier, 1998, p. 19), possamos entender o todo da obra, o que a imagem/ilustração diz e como ela diz.

Este movimento foi feito por Oliveira (2013) que, ao realizar uma leitura incisiva dos livros didáticos de Antônio Bandeira Trajano[27], detectou uma articulação visual.

> Este cruzamento visório envolve as conexões intelectuais e a potencialidade do raciocínio a partir das ligações entre os textos escritos em códigos silábicos e os códigos ilustrativos – as imagens. Este elo utilizado pelo autor na composição das obras nos mostrou a utilização dos princípios do método intuitivo, pois as diretrizes do método continham a ideia de que as ilustrações auxiliavam numa melhor compreensão da mensagem que se queria passar em forma de texto (Oliveira, 2013, p. 29).

Conforme mencionamos na Introdução, no século XIX, os livros didáticos destinados à aritmética raramente recebiam ilustrações, mas essa situação mudou um pouco quando, no início do século XX, com o fortalecimento do método intuitivo, a visualização passou a ser incentivada (Silva, 2017).

A mesma autora, ao analisar os livros didáticos de matemática escritos por George Augusto Büchler[28] (1919) e Karl Sölter[29] (1932) observou que estas obras estão ancorados no método intuitivo, partindo do concreto para o abstrato:

> [...] ambos os autores usaram as imagens - representação de objetos do cotidiano - para construir a ideia abstrata de número, de operações

---

[27] Nascido no dia 30 de agosto de 1843, na cidade de Vila Pouca de Aguiar em Portugal, Antônio Bandeira Trajano iniciou sua vida escolar aos três anos de idade, numa escola primária local e, posteriormente, aos 12 anos, frequentou uma escola de ensino secundário em Guimarães, Portugal. Em 1857, ano de sua chegada ao Brasil, Antônio Bandeira Trajano, aos 14 anos, tornou-se brasileiro por naturalização e trabalhou em uma casa comercial no centro velho de São Paulo (Oliveira, 2013, p. 35).

[28] Georg August Büchler nasceu em 21 de maio de 1884, em Steinbach (Hessen). Teve 13 irmãos. Em 1905, recebeu convite para trabalhar na Escola Alemã, emigrou para o Brasil e estabeleceu residência em Blumenau, onde começou a lecionar as disciplinas de aritmética e língua inglesa. Dois anos mais tarde, assumiu a disciplina de português. Permaneceu na Escola Alemã até esta ser fechada, em 1917, quando foi afastado de suas funções, por causa da Primeira Guerra Mundial (Silva, 2017, p. 57).

[29] O livro de Karl Sölter foi editado em Ijuí, cidade do interior do Rio Grande do Sul. Pouco sabemos a respeito desse autor, apenas que nasceu na Alemanha e emigrou para o Brasil (Silva, 2017, p. 61).

> aritméticas elementares, como a adição, subtração, multiplicação e divisão. Um dos meios para alcançar seus objetivos é a visualização, como recurso para fazer a passagem do mundo dos objetos, do mundo que a criança conhece, para o mundo abstrato da aritmética escolar (Silva, 2017, p. 64).

Em assim sendo, as imagens estão associadas aos processos de concretude e visualidade[30] que, em nosso trabalho, tratamos como não dicotômicos, mas imbricados e que estão presentes nos processos de ensinar, aprender e produzir matemática(s) ao longo do tempo (Dalcin, 2021).

A concretude em sala de aula se faz presente através dos materiais manipuláveis, que aqui abordamos como sendo sinônimo de material concreto (Vale, 2002).

Concretude, ainda no meio educacional, tem apoio no que Hynes (1986), *apud* Vale (2002), chama de modelos concretos, os quais envolvem conceitos matemáticos, apelam aos vários sentidos, podem ser tocados e movimentados pelos alunos.

No que tange à visualidade, também em sala de aula, encontramos em Sowell (1989), *apud* Vale (2002), quando este afirma que os materiais manipuláveis incluem, quer as representações concretas, quer as pictóricas[31], a certeza de que concretude e visualidade são "duas faces de uma mesma moeda", dois conceitos distintos, bastante presentes também na sala de aula, que se ligam através do sentido da visão.

Para além do conceito de concretude que remete ao manipular, brincar, jogar, interagir, operar com algo que está fora do corpo, pretendemos investigar o que este manipular imbricado com a visualidade – que de imediato é associado à ideia de algo que se deixa ver, algo não palpável, mas que é acessado pelo sentido da visão[32], que pode ser a representação de uma coisa "material", "real", ou ainda, algo imaginado, produzido na mente humana, a partir de conexões cerebrais e experiências sensoriais contribuiu, por ocasião do MMM, para o entendimento do que é fração (Dalcin, 2021, p. 148).

---

[30] Segundo Dalcin (2021), concretude é algo que tem materialidade que podemos tocar, manipular, sentir e visualidade é algo que se deixa ver e que é acessado pelo sentido da visão.

[31] Neste trabalho tratamos as representações pictóricas como sinônimo de imagem/ilustrações, por também elas serem estáticas.

[32] Aqui neste trabalho se este algo não palpável for estático, estamos tratando como sinônimo de imagem/ilustração.

Analisamos o quanto as obras, neste trabalho estudadas, trazem a fração para se manipular, tocar e sentir em toda a sua concretude, mas, mais do que pegar, o quanto os autores proporcionam o ver e o entender, tendo como portas de entrada o tato e a visão, objetivando a abstração do conceito do que é fração. Nos guias para os professores que seguem as coleções de livros analisadas há indicação desses materiais manipuláveis que permitiram que a criança experimentasse essa concretude e visualidade. Na próxima seção discorremos sobre a constituição das fontes de pesquisa.

2.5 A CONSTITUIÇÃO DAS FONTES DE PESQUISA

Com o intuito de interpretar e compreender o uso de imagens para ensinar frações nos livros didáticos, dirigidos para os primeiros anos de escolarização (primeira à quarta série), publicados pelo NEDEM[33], do Paraná, e pelo GRUEMA, de São Paulo e Rio de Janeiro, exemplares estes que estão disponíveis no Repositório de Conteúdo Digital (RCD)[34] do GHEMAT – Brasil, apresentamos uma descrição dos livros do NEDEM no quadro 1.

---

[33] Agradecemos à pesquisadora Mariliza Simonete Portela, integrante do GHEMATPR a doação dos exemplares originais da coleção, o que permitiu substituir as imagens fotocopiadas por outras de melhor qualidade. Inicialmente Mariliza utilizou a coleção na sua pesquisa de mestrado (Portela, 2009).

[34] O repositório está sob responsabilidade do Prof. David Antônio da Costa e possui mais de 700 artigos científicos e 172 teses e dissertação sobre História da educação matemática. Posteriormente iremos expandir nossa busca para o portal de teses e dissertações da Capes. O endereço do repositório é: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769. Acesso em 06 de dezembro de 2022.

QUADRO 1 - LIVROS DIDÁTICOS E GUIAS PARA O PROFESSOR, ANALISADOS - NEDEM

CATEGORIA	TÍTULO	AUTORES	ANO	EDIÇÃO	EDITORA
Livro didático	Ensino Moderno da Matemática - V1	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	S/D	Não consta.	Editora do Brasil S/A
Livro didático	Ensino Moderno da Matemática - V2	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	1974	Não consta.	Editora do Brasil S/A
Livro didático	Ensino Moderno da Matemática - V3	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	1975[35]	Não consta.	Editora do Brasil S/A
Livro didático	Ensino Moderno da Matemática - V4	Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	1979	Não consta.	Editora do Brasil S/A
Manual didático	Livro do Mestre	Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	S/D	Não consta.	Editora do Brasil S/A
Caderno matemático	Ensino Moderno da Matemática	Clélia Tavares Martins, Esther Holzmann, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	1969	Não consta	Gráfica particular
Manual didático	Manual do Professor Primário do Paraná - V1	Centro de Estudos e Pesquisas Educacionais (CEPE).	1963	Não consta	Não consta
Manual didático	Manual do Professor Primário do Paraná - V2	Centro de Estudos e Pesquisas Educacionais (CEPE).	1965	Não consta	Não consta

FONTE: Nossa autoria (2024)

No quadro 2, encontra-se uma breve descrição dos livros do GRUEMA que analisamos neste trabalho.

[35] Não há certeza quanto a essa data.

QUADRO 2 - LIVROS DIDÁTICOS E GUIAS PARA O PROFESSOR, ANALISADOS - GRUEMA

CATEGORIA	TÍTULO	AUTORES	ANO	EDIÇÃO	EDITORA
Livro didático[36]	Curso Moderno de Matemática para o 1º grau. V1.	Manhucia. Perelberg Liberman. Lucilia Bechara Sanchez. Anna Franchi.	1974.	Não consta.	Companhia Editora Nacional.
Livro didático[37]	Curso Moderno de Matemática para o 1º grau. V2.	Manhucia. Perelberg Liberman. Lucilia Bechara Sanchez. Anna Franchi.	1974.	Não consta.	Companhia Editora Nacional.
Livro didático[38]	Curso Moderno de Matemática para o 1º grau. V3.	Lucilia Bechara Sanchez.Manhulcia. Perelberg Liberman.	1974.	Não consta.	Companhia Editora Nacional.
Livro didático[39]	Curso Moderno de Matemática para o 1º grau. V4.	Lucilia Bechara Sanchez. Manhucia. Perelberg Liberman.	1975.	Não consta.	Companhia Editora Nacional.

FONTE: Nossa autoria (2024)

Após uma análise preliminar deste material, observamos em que medida nele se faz uso das imagens para ensinar frações para esse nível de ensino. Os guias para os professores das respectivas coleções, caso existam, também foram utilizados para auxiliar nesta caracterização.

A priori, definimos um roteiro, com questões, para pensar em elementos de caracterização das imagens como: Trabalha fração a partir de que série[40]? Faz uso de imagens para o ensino de fração? Aborda imagens para representar as frações contínuas? Aborda as frações discretas? Faz a associação, através de representações gráficas, com números decimais? Já traz isso pronto no material ou solicita que a criança também faça esse tipo de representação? Os materiais didáticos para ensinar frações são representados por meio de imagens nos livros didáticos?

---

[36] No mesmo material continha o guia do professor (nas 31 primeiras páginas) em seguida, iniciando uma nova numeração (1 até a 120), o livro do aluno.
[37] No mesmo material continha o guia do professor (nas 43 primeiras páginas) em seguida, iniciando uma nova numeração (1 até a 135), o livro do aluno.
[38] No mesmo material continha o guia do professor (nas 40 primeiras páginas) em seguida, iniciando uma nova numeração (1 até a 169), o livro do aluno.
[39] Das páginas 1 a 161 (no começo do livro) era o livro do aluno. Após, inicia-se uma nova numeração (do 1 ao 31) contendo o manual do professor.
[40] Essa era a nomenclatura usada na época.

Tendo essas perguntas como balizadoras, examinamos a coleção de livros didáticos dirigidos aos anos iniciais, do Núcleo de Estudos e Desenvolvimento do Ensino da Matemática (NEDEM), grupo de estudos que produziu os livros didáticos que circularam no Paraná, durante as décadas de 1960 e 1970, difundindo amplamente o Movimento da Matemática Moderna em nosso estado.

O mesmo procedimento foi realizado na coleção do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada, de São Paulo e Rio de Janeiro (GRUEMA), que produziu, na época, muito material destinado ao ensino de primeiro grau de oito anos. Para esse estudo analisamos somente os quatro primeiros volumes.

Olhamos para as duas coleções como um todo, mas nós voltamos, de maneira especial, ao exemplar da 4ª série, pois é nesta série que se aborda mais amplamente o conceito de fração.

Apresentamos a coleção do NEDEM intitulada “Ensino Moderno da Matemática”, abordada neste trabalho, que teve como coordenador geral Osny Antônio Dacol, e as autoras: Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda, Nelly Humphreys, sendo “a professora Henrieta Arruda, principal autora da coleção” (Pinto; Ferreira, 2006, p. 120).

Utilizando a nomenclatura da época, “séries”, abaixo, no quadro 3, apresentamos o que cada volume oferece sobre o conteúdo de fração.

QUADRO 3[41] – A FRAÇÃO AO LONGO DA COLEÇÃO DO NEDEM

NEDEM	AUTORAS	ANO DE PUBL.	DISPONÍVEL EM	CONCEITO DE FRAÇÃO
V1 – 1ª série	Esther Holzmann Clélia Tavares Martins Gliquéria Yaremtchuk Henrieta Dyminsky Arruda Nelly Humphreys	S/D	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219786	Metade e dobro; terços e triplo
V2 – 2ª série	Esther Holzmann Clélia Tavares Martins Gliquéria Yaremtchuk Henrieta Dyminsky Arruda	1974	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219784	Frações unitárias $\frac{1}{2}$ até $\frac{1}{9}$. Frações de região e frações de elementos de conjuntos. Medidas e frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.
V3 – 3ª série	Esther Holzmann Clélia Tavares Martins Gliquéria Yaremtchuk Henrieta Dyminsky Arruda	S/D	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219785	Em duas unidades a qual chama de números fracionários e números decimais.
V4 – 4ª série[42]	Clélia Tavares Martins Gliquéria Yaremtchuk Henrieta Dyminsky Arruda	S/D	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219789	Aprofundamento do que foi visto na terceira série. Também em duas unidades intituladas números fracionários e números decimais.

FONTE: Nossa autoria (2024)

Já a coleção do GRUEMA intitulada “Curso Moderno de Matemática para o 1º grau”, apresentada no quadro 4, foi escrita por Lucília Bechara Sanchez e Manhúcia Perelberg Liberman.

No dia 22 de maio de 2024 realizamos uma entrevista com Lucília Bechara Sanchez que esclareceu alguns aspectos relevantes sobre a coleção, auxiliando na nossa compreensão. O roteiro da entrevista se encontra no Anexo 1 e, a transcrição da mesma, no Anexo 2.

---

[41] Apresentamos aqui as edições disponíveis no repositório, por não constar na materialidade das obras, optamos por colocar S/D nos Volumes 1, 3 e 4. Recentemente, a pesquisadora Mariliza Simonetti Portela fez uma doação de outras edições da mesma coleção, que estão em posse do GHEMATPR. As imagens utilizadas são dessa nossa coleção, pois, conseguimos melhorar a qualidade das imagens.

[42] Apesar de o livro não possuir data, ele é posterior a 1975, pois nas referências há indicação da obra LIBERMAN, M. P.; SANCHEZ, L. B. (GRUEMA) Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau. 4ª série. Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

QUADRO 4 – FRAÇÃO AO LONGO DA COLEÇÃO DO GRUEMA

GRUEMA	AUTORAS	ANO DE PUBL.	DISPONÍVEL EM:	CONCEITO DE FRAÇÃO
Volume 1 – 1ª série	Manhucia Perelberg Liberman; Lucilia Bechara Sanchez; Anna Franchi	1974	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208789	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ de formas geométricas e conjunto de elementos. Noção de metade e dobro Noção de terça parte e triplo
Volume 2 – 2ª série	Manhucia Perelberg Liberman; Lucilia Bechara Sanchez; Anna Franchi	1974	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208798	Frações como parte e todo de figuras geométricas variadas. Frações sem medidas de tempo e sistema monetário associado a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.
Volume 3 – 3ª série	Lucilia Bechara Sanchez; Manhucia Perelberg Liberman	1974	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208807	É apresentada como parte-todo e número racional.
Volume 4 – 4º séire	Lucilia Bechara Sanchez; Manhucia Perelberg Liberman	1975	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851	É apresentada como parte-todo, número racional e traz a relação da fração com porcentagem.

FONTE: Nossa autoria (2024)

Apresentadas as duas coleções e guiados pela cultura escolar, que produz saberes, a análise das imagens da matemática do ensino de frações presentes nas obras do GRUEMA e do NEDEM, partem da premissa de que essas obras e, em consequência, essas imagens, foram produzidas por pessoas com uma história, em uma época e lugar. No próximo capítulo, abordamos sobre o Movimento da Matemática Moderna (MMM), época na qual as coleções, foco deste estudo, foram produzidas.

3 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Com o intuito de situar o ensino de frações dentro do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e caracterizar a época na qual esses livros e, consequentemente, essas imagens foram produzidas, tratamos neste capítulo de como o MMM ocorreu no Brasil, quais eram seus objetivos em relação ao ensino de Matemática, como esse trabalho foi realizado com as crianças e como ele se difundiu pelo país, a partir da formação de grupos de estudo sobre a Matemática Moderna. Esses grupos, como o NEDEM e o GRUEMA, produziram as obras analisadas. Além disso, abordamos como o uso de livros didáticos contribuiu para a implementação da proposta pedagógica trazida por este importante movimento de modernização da Matemática, que chegou ao Brasil no início dos anos 1960.

3.1 O IDEÁRIO DO MMM

Com o fim da 2ª guerra mundial, a sociedade americana começa a perceber que não era suficiente preparar alunos da escola secundária para uma competência funcional, como pressupunha o método intuitivo, assim como não era suficiente a Matemática abordar os conceitos matemáticos, relacionando-os ao dia a dia (Silva, 2007). A autora destaca que a sociedade americana passou a ver a necessidade de se ter uma educação mais moderna, voltada para o desenvolvimento tecnológico e científico, conseguido durante os anos de guerra. Isso envolveu, também, mudar o ensino da Matemática com o intuito de satisfazer a demanda dessa sociedade emergente, demanda essa que era, formar cidadãos capazes de acompanhar o desenvolvimento tecnológico, oriundo do pós-guerra.

Concomitante a isso, estudos e propostas de renovação do ensino de Matemática já vinham sendo elaboradas por variados grupos e instituições, em diferentes países, nos anos 1950, como atestam Oliveira, Silva e Valente (2011).

A modernização tão desejada pelos Estados Unidos se alinha com essa proposta de renovação do ensino de Matemática, no momento em que:

> No plano internacional, vários trabalhos identificam como marco importante o Seminário de Royaumont, realizado ao final de 1950, na França, pela então Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE), com representações dos Estados Unidos e do Canadá (Guimarães, 2007).

Esse movimento, iniciado nos Estados Unidos e na Europa, atingiu o Brasil nos anos de 1950 e 1960. As primeiras menções, embora tímidas aos conceitos da Matemática Moderna, ocorreram, em nosso país, no ano de 1957, no II Congresso Nacional de Ensino da Matemática, que ocorreu em Porto Alegre, no Rio Grande do Sul (Valente, 2008b).

Apresentamos, a seguir, uma citação que contextualiza o Movimento que estava começando a tomar corpo aqui no Brasil.

> Nos anais deste congresso, há evidências de sugestões para introduzir tópicos da matemática moderna no ensino primário e secundário. Em particular, Odila Barros propõe um programa em serviço para professores primários de matemática, no qual inclui: teoria dos conjuntos, correspondência biunívoca, propriedades dos conjuntos, e diferentes sistemas de numeração (Silva, 2007, p. 53).

Um dos objetivos do MMM era aproximar a Matemática ensinada na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Como consequência, as propostas defendidas pelo Movimento enfatizam as estruturas algébricas, a teoria dos conjuntos, a topologia, as transformações geométricas, entre outras. E isso, como destacado acima, começou a tomar corpo entre os educadores matemáticos brasileiros, em meados da década de 1950.

Em consonância com o cenário acima descrito, Portela (2009) destaca:

> Expressos no desejo social de inserção nas oportunidades que emergiam de uma sociedade a caminho da modernização, os ideais do movimento encontram respaldo na Lei 4.024 de 20 de dezembro de 1961. Pela referida Lei (Art. 1º d), a educação inspirava-se nos princípios de liberdade e solidariedade, por meio do "preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que lhes permitiam utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades do meio" (Portela, 2009, p. 16).

Essas ações modernizadoras adotadas pelos Educadores Matemáticos da época e incentivadas por Lei, são justificadas pelo discurso de que era "o momento de reformar o espírito científico, de preparar os alunos para um mundo que avança numa revolução rápida" (Pinto, 2005, p. 17).

Com o objetivo de divulgar essas ações modernizadoras no Brasil surge o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM) de São Paulo, que teve um papel de relevância na apropriação e difusão do MMM no país.

Uma das primeiras ações, realizadas por este grupo com o intuito de divulgar o MMM, foi a oferta de cursos destinados aos professores que ensinavam matemática, como nos aponta Morais, Bertini e Valente (2021):

> O primeiro curso oferecido pelo GEEM específico para professores de escola primária, foi realizado em fevereiro de 1963 pelas professoras Anna Franchi, Lucília Bechara Sanchez e Manhúcia Liberman com o apoio do Departamento de Educação do Estado de São Paulo (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 39-40).

Nesses cursos, a fração era apresentada como uma das representações do número racional. Durante a década de 1960, a coleção "Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar", fruto dessas formações com professores do ensino primário que ensinavam matemática, foi testada em salas experimentais (Villela, 2009).

Após essas duas ações, quais sejam, o curso de formação de professores e o teste em salas experimentais desses livros textos, o MMM avança para o "interior da escola" brasileira, por meio de livros didáticos e manuais pedagógicos. Sempre lembrando o quanto esses materiais são ricos para que o historiador, como destaca Morais, Bertini e Valente (2021), possa analisar, histórica e epistemologicamente, a *Matemática do ensino*.

Esses livros didáticos recém-produzidos, tendo como base o MMM, objetivavam difundir para o interior da escola esses preceitos que tratavam a fração como sendo a representação de um número racional. Na próxima seção, voltamos a nossa atenção para qual é o papel da imagem nestes tempos de modernização do ensino de matemática.

3.2 O PAPEL DAS IMAGENS: DO MÉTODO INTUITIVO AO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

De 1870 a 1920, imperou no Brasil o método intuitivo. A educação, incluindo a educação matemática, era estruturada a partir dos sentidos, da experiência dos alunos e da observação das coisas.

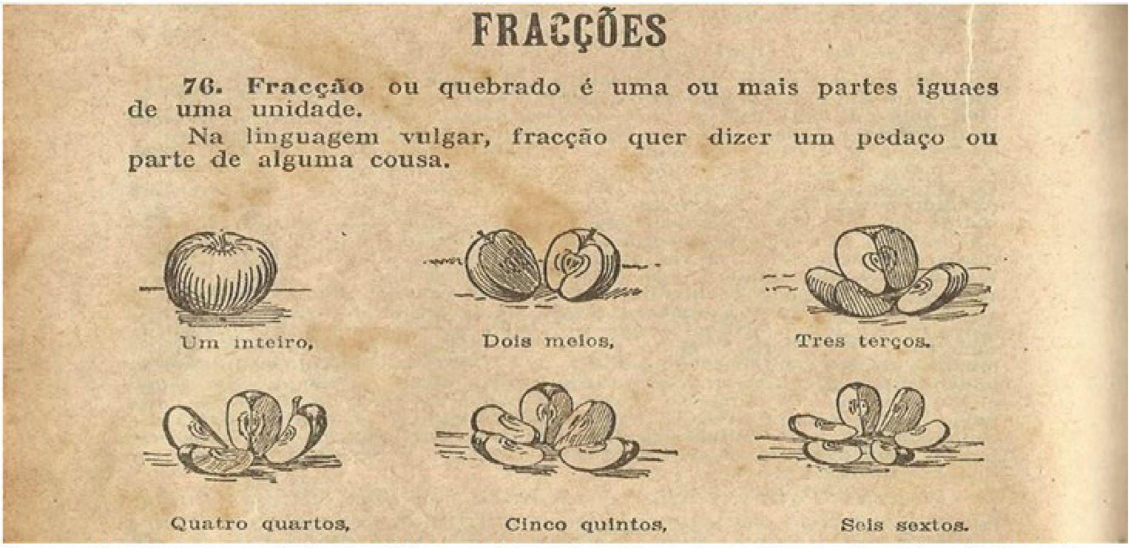
Durante este período alguns autores, como preconiza o método intuitivo, trouxeram a imagem para dentro do livro didático, integrando-a ao texto, a fim de proporcionar uma maior visualização dos objetos do dia a dia das crianças.

Destaca-se o livro *Arithmeticas – Progressiva, Elementar Ilustrada e Primária*, de Antônio Bandeira Trajano, cuja primeira edição data de 1879. Oliveira (2013) pontua que um dos princípios do método intuitivo é usar "coisas" familiares às crianças para, em seguida, levá-las ao conhecimento de fatos mais distantes.

Neste livro as imagens foram distribuídas em pontos diferentes e com dessemelhantes quantidades. A variedade de exposição com que as ilustrações foram incorporadas nas Aritméticas evidencia informações relevantes para o que se quer saber, neste estudo, sobre como a imagem auxiliou no ensino de fração.

Em assim sendo, ao abordar o tema de frações, o autor se utiliza de imagens de objetos do cotidiano das crianças para trabalhar o conceito de fração, como podemos observar na figura 1[43].

FIGURA 1 - A FRAÇÃO A PARTIR DE OBJETOS DO COTIDIANO


FRACÇÕES

76. Fracção ou quebrado é uma ou mais partes iguaes de uma unidade.

Na linguagem vulgar, fracção quer dizer um pedaço ou parte de alguma cousa.

Fonte: TRAJANO, Antônio Bandeira. **Arithmetica Elementar Illustrada**. Livraria Francisco Alves: Rio de Janeiro – 109ª ed., 1936, (p.50).

FONTE: Oliveira (2013, p. 124)

Um pouco posterior ao livro de Trajano, mas ainda dentro do método intuitivo, Silva (2017) analisa duas obras: Aritmética Elementar, de autoria de George Augusto Büchler (1919); e Exercícios de Aritmética para o Primeiro Ano, de Karl Sölter (1932). Após a análise dessas obras Silva conclui:

> Por acreditar que o espírito infantil só é capaz de chegar às noções

---

[43] A figura 1 faz parte da dissertação de Oliveira (2013).

> concretas pela intuição direta ele[44] procurou associar as abstrações matemáticas aos objetos do ambiente da criança. Daí representar em seus textos ‘retratos’ da casa da criança, da escola, de crianças em situações sociais, de objetos e animais do objeto familiar, que remetem à experiência infantil (Silva, 2017, p. 64)

Ao falar do livro de Sölter a autora, no mesmo texto pontua:

> Assim como Buchler, ele[45] traz para o livro didático o cotidiano infantil: a escola, a casa, as brincadeiras infantis, os brinquedos, as peraltices, as frutas e os alimentos, as moedas e, principalmente, as próprias crianças (Silva, 2017, p. 64)

As imagens presentes nos livros didáticos dialogam com essas premissas e a figura 2 visa destacar essa relação das imagens do livro didático de Sölter e o universo infantil da época.

FIGURA 2 - AS IMAGENS CONTEXTUALIZANDO O MUNDO INFANTIL

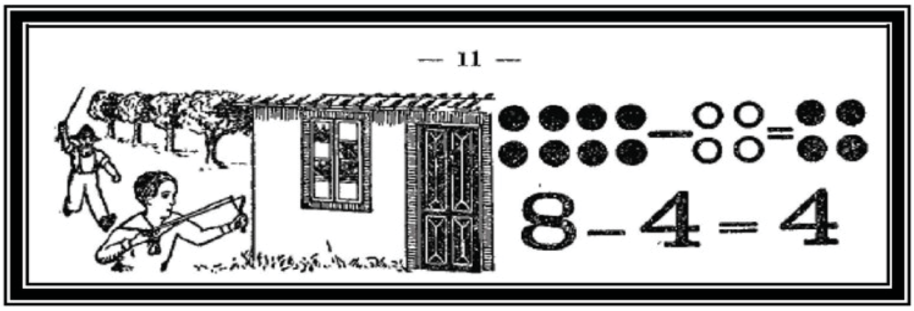


Figura 7. Subtração.
Fonte: Sölter (1932, p. 11).

FONTE: Silva (2017, p. 63)

Na vaga pedagógica seguinte, tempos da Escola Nova, a matemática do ensino:

> [...] anteriormente centrada nas *lições das coisas,* em que a criança observava, percebia e distinguia coisas do mundo adulto, com as ideias escolanovistas volta-se para o mundo real da infância, para conectar-se com suas experiências, interesses e valores, trocando a escola *para* a vida por uma escola *pela* vida. Proposta colocada em ação por meio de atividades que tinham sentido para ela, passa a ser o centro do ensino e da aprendizagem. Atentando para o essencial, os novos programas de matemática intencionavam preparar o aluno para viver em sociedade e participar dela, priorizando noções matemáticas utilizadas no cotidiano, sem a necessidade de quantidade de conteúdos para preparar alunos para graus superiores de ensino (Pinto, 2024, p. 60).

---

[44] Referindo-se a George Augusto Büchler.
[45] Referindo-se a Karl Sölter.

No que diz respeito à fração, em meados da década de 1950, o professor Waldecyr C. de Araújo Pereira[46], pernambucano, começa a se destacar no cenário nacional no que tange à formação de professores do primário. Em 1961, lança o manual pedagógico "Matemática dinâmica com números em cores" que apresenta conteúdos relacionados ao ensino de aritmética com auxílio das barras Cuisenaire. O autor, em sua obra, afirma que o "ensino tradicional"[47] propunha que a criança teria adquirido a noção de fração, quando tivesse "uma imagem mental, depositada como impressão fotográfica em seu espírito" (Pereira, 1961, p.14) e ao professor caberia:

> […] apresentar a classe imagens de círculos divididos em setores, que colocará nas paredes da sala de aula por algum tempo e que fará cópias, colorir, etc. Objetos e frutas serão divididos em variáveis número de partes. Esses elementos sensíveis são observados, descritos, copiados, arrumados visando criar uma impressão duradoura no espírito do aluno (Pereira,1961, p. 14).

Pereira (1961) enfatiza "o fracasso total da classe" (p.14) que esse tipo de aula produz, pois o aluno, não entendendo o conteúdo, usa de artifícios para a memorização de regras, ou seja, a imagem entraria apenas como um recurso para decorar as regras. No que o autor chama de "pedagogia tradicional", a imagem é desassociada da concretude, da ação direta de criança sobre o objeto ou a representação.

Este mesmo autor ressalta o momento histórico no qual o uso de imagens adquire um novo papel, ao afirmar que, na "didática atual[48]", após o evidente fracasso da "forma tradicional" de se abordar a noção de fração, se propõe:

> Para que a criança adquira verdadeiramente a noção de fração, devemos aplicar aos elementos apresentados uma **atividade reflexiva:** é necessário que a criança **conte** o número de setores contidos no círculo, que os **superponha** (real ou mentalmente) para verificar sua igualdade; deve **ordenar** os círculos de acordo com o número de setores que os compõem.

---

[46] Waldecyr de Araújo Pereira foi professor de Didática Especial da Matemática da Universidade Católica de Pernambuco no período de 1957 a 1958. Estagiou em Bruxelas, a convite do Ministério de Instrução Pública da Bélgica, e no *Centre International d'Études Pédagogiques de Sèvres*, França, em 1959. Ainda em 1959, participou do 3.º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, no Rio de Janeiro, quando defendeu o uso do material Cuisenaire no ensino de matemática. Ministrou diversos cursos de Didática da Matemática para professores dos cursos de magistério primário no Brasil (Borges, Duarte, Campos, 2014, p. 83).

[47] Os autores tratam o ensino tradicional ao *status quo*, provavelmente uma crítica ou Método Intuitivo.

[48] Refere-se ao início da década de 1960.

> Imediatamente deve **comparar** entre si as dimensões dos setores nos diversos círculos para descobrir que quanto maior o número de partes, menor o valor de cada parte (Pereira,1961, p. 14, grifos do autor).

Essa ressignificação no uso da imagem associado ao uso de materiais manipulativos faz com que o aluno reflita, enquanto corta, sobrepõe, ordena e compara, para que, por meio de uma variedade de ações, ele possa abstrair verdadeiramente o conceito de fração. Isso caracteriza um novo papel assumido pela imagem, já que agora a concretude (dobrar, recortar, sobrepor) se liga através do sentido da visão, a uma visualidade (ordenar, comparar); concretude e visualidade estão imbricadas para compor os livros didáticos da "didática atual"

Já na década de 1990, este "modo de ver fração" encontra em Kamii e Clark (1995) o respaldo necessário para que tenhamos uma atividade mais reflexiva, como propunha a "didática atual" de Pereira (1961), e menos impressão fotográfica, como preconizava, a "didática tradicional" ao apresentar "tudo pronto" ao aluno. Kamii e Clark (1995), pontuam 3 lacunas do "ensino tradicional[49]" que precisam ser superadas em relação ao ensino de frações equivalentes, mas que servem para entendermos a análise da fração em livros didáticos durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), quais sejam:

> 1- As crianças precisam utilizar materiais físicos para explorar frações equivalentes e comparar frações.
> 2- Ao dizer às crianças que certas frações são equivalentes, as instruções tradicionais privam-nas da possibilidade de pensarem muito, de se esforçarem e de inventarem frações equivalentes.
> 3- O ensino tradicional ensina primeiro as frações próprias e depois as frações impróprias e os números mistos. Todos esses elementos devem estar envolvidos desde o início para que as crianças pensem nas partes e no todo ao mesmo tempo (Kamii; Clark, 1995, p. 374).

Deste modo, as imagens para ensinar frações precisam estar alinhadas com essa nova forma de ensinar frações. Também devem permitir a exploração da criança, não apresentando tudo pronto para que ela apenas memorize, e não devem representar as frações na tradicional sequência de frações próprias, frações impróprias e números mistos.

Na próxima seção, abordamos como o MMM, principalmente através de Jean Piaget e Zoltan Dienes, preconiza o processo de ensino e aprendizagem.

---

[49] O uso do termo "ensino tradicional" não tem o mesmo significado que Pereira (1961), mas denota que, mesmo na década de 1990, há questões sobre o ensino de frações que ainda não foram superadas.

3.3 JEAN PIAGET, ZOLTAN DIENES E O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento que buscou mudar o sistema educacional brasileiro, tendo como base a teoria de conjuntos e estruturas, tratando a fração como sendo uma das representações do número racional (Morais; Bertini; Valente, 2021). Uma grande referência para o movimento foi a psicologia genética de Jean Piaget:

> A pedagogia, os modos de orientar o professor no ensino dos primeiros anos escolares, em tempos da MM, referencia-se em Jean Piaget. A partir das etapas cognitivas sistematizadas por este epistemólogo haverá orientações relativas à marcha que o ensino deverá seguir, a sua *graduação* (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 42)

Mas, quais são essas etapas cognitivas?

Jean Piaget (1999), afirmou que a criança não é um pequeno adulto, e que a aprendizagem precisa respeitar o que ele chamou de etapas de desenvolvimento da inteligência, quais sejam:

> 1º O estágio dos reflexos, ou mecanismos hereditários, assim como também das primeiras tendências instintivas (nutrições) e das primeiras emoções. 2º O estágio dos primeiros hábitos motores e das primeiras percepções organizadas, como também dos primeiros sentimentos diferenciados. 3º O estágio da inteligência sensório-motora ou prática (anterior à linguagem), das regulações afetivas elementares e das primeiras fixações exteriores da afetividade. Estes três primeiros estágios constituem o período da lactância (até por volta de um ano e meio a dois anos, isto é, anterior ao desenvolvimento da linguagem e do pensamento). 4º O estágio da inteligência intuitiva, dos sentimentos interindividuais espontâneos e das relações sociais de submissão ao adulto (de dois a sete anos, ou segunda parte da "primeira infância"). 5º O estágio das operações intelectuais concretas (começo da lógica) e dos sentimentos morais e sociais de cooperação (de sete a onze-doze anos). 6º O estágio das operações intelectuais abstratas, da formação da personalidade e da inserção afetiva e intelectual na sociedade dos adultos (adolescência) (Piaget, 1999, p. 15.)

É preciso lembrar que, segundo preconiza Piaget, nesta mesma obra, cada estágio é caracterizado pela aparição de estruturas originais, cuja construção o distingue dos estágios anteriores, e o essencial de cada estágio permanece como subestrutura do estágio posterior na qual se edificam as novas características.

As duas coleções analisadas neste trabalho são destinadas às crianças que estão na fase das operações concretas, de 7 a 11 anos, portanto, isso significa que a criança necessita manipular materiais concretos para descobrir os conceitos matemáticos que estão sendo ensinados.

No estágio operatório, a criança deve começar, segundo Piaget (1998), manipulando objetos físicos, ou seja, operando[50] no concreto[51], para depois, em um nível semiconcreto[52], representá-los através de figuras[53], cartazes, gravuras, tabelas e diagramas, representação de objetos físicos, que neste texto chamaremos de semiabstrata[54]. Essas imagens objeto podem fazer a ligação entre as manipulações físicas e os conceitos abstratos, tão importante para a aprendizagem. Segundo o próprio Piaget (1999), o fracasso escolar no ensino de matemática é devido à abordagem, e não, ao conteúdo e ocorre principalmente por causa da passagem, rápida demais, do concreto para o abstrato.

Esta ideia é respaldada por Vale (2002), quando a autora afirma:

> Piaget acreditava que os quatro níveis ou estádios desenvolvimento cognitivo da criança são úteis para o educador pois realçam o fato de que os modos de pensar das crianças, linguagem e ações diferem quer em quantidade quer em qualidade das dos adultos. Piaget dizia que as crianças não são pequenos adultos logo não podem ser tratados como tal em situações de aprendizagem. Pode-se concluir do trabalho de Piaget para a sala de aula que as crianças aprendem melhor a partir de atividades concretas (Vale, 2002, p. 13).

Isso se aplica a qualquer conteúdo matemático, desde os mais simples até os mais complexos.

---

[50] Uma conclusão geral impõe-se: o pensamento infantil só se torna lógico por meio da organização de sistemas de operações, que obedecem às leis de conjuntos comuns. 1º Composição: duas operações de conjunto podem-se compor entre si e dar ainda uma operação de conjunto (Exemplo: 1+1=2). 2º Reversibilidade: toda operação pode ser invertida (Exemplo: +1 inverte-se em -1). 3º A operação direta e o seu inverso dão uma operação nula ou idêntica (Exemplo: +1-1=0). 4º As operações podem associar entre si de todas as maneiras (Piaget, 1999, p. 52).

[51] Na Revista Currículo (Paraná, 1977) o termo material concreto faz referência ao uso de objetos como: laranjas, tomates, pães, etc., dando-se preferência a objetos simétricos para conceituar a fração como sendo a divisão em partes iguais.

[52] O termo semiconcreto se refere a materiais confeccionados com flanelógrafo ou papel, como por exemplo, os círculos de frações (Paraná, 1977). Quanto à escrita do termo semiconcreto, com a alteração ortográfica de 2009, palavras com prefixo só terão hífen se as letras forem iguais, mas em casos de citação a grafia original será mantida.

[53] De acordo com Piaget (1983 *apud* Vale, 2002) o aspecto figurativo (baseado em formas que são observáveis), guiado pelas sensações e percepções e submetidos a um processo de compreensão geram as imagens mentais.

[54] Por semiabstrato se refere aos desenhos utilizados para o ensino, em nosso estudo, o ensino de frações como: diagramas, quadros de equivalência, reta numérica, desenhos de figuras geométricas, desenhos de conjuntos, ou seja, toda e qualquer imagem que está parada.
Com relação à grafia do termo semiabstrato, com a alteração ortográfica de 2009, palavras com prefixo só terão hífen se as letras forem iguais, mas em casos de citação direta precisamos manter a grafia original.

Bezuk e Cramer (1989) *apud* Vale (2002, p. 30), encorajam os professores, ao trabalharem fração, a usar um ensino que envolva ativamente os alunos, recorrendo ao uso de manipuláveis antes do trabalho formal com símbolos e operações, ou seja, antes da abstração. A citação, a seguir, visa clarificar como isso aconteceria na prática:

> O uso de manipuláveis é crucial no desenvolvimento do conceito de fração, pois ajuda os alunos a construir referências mentais que lhes permitirão desempenhar tarefas com números fracionários com significado. É importante para os alunos nos anos iniciais cortar e colorir partes de um todo quando são solicitados a identificar ou adicionar números fracionários (Vale, 2002, p. 30).

Nessa linha do “mãos na massa”, outro personagem muito importante para o MMM e para as autoras das duas coleções analisadas foi Zoltan Paul Dienes[55].

Novaes e França (2017) pontuam que, guardadas as devidas cautelas, podemos dizer que as propostas de Dienes surgem para preencher a lacuna de modelos de atividades, operacionalizando a abordagem estruturalista da Matemática, para um “aluno piagetiano”.

Dienes[56], propõe que a criança, sempre respeitando o seu desenvolvimento, seja exposta a situações desafiadoras baseadas em jogos, seguindo seis etapas: 1ª etapa: Jogo Livre - exploração livre, manipulação, percepção de características físicas, aquisição de vocabulário, uso dos sentidos etc.…; 2ª etapa: Jogo com Regras - percepção de restrições, adaptação à nova situação, verbalização; 3ª etapa: Jogo do Isomorfismo - percepção de propriedades comuns entre regras, relações de natureza abstratas existentes entre jogos, comparação; 4ª etapa: Representação - representação da estrutura comum em diferentes registros, de forma mais organizada e inteligível, busca de uma representação gráfica para a estrutura; 5ª etapa: Descrição da representação - descrição de uma representação, exploração das propriedades das representações construídas e das abstrações, busca por tradução da representação simbólica; e, 6ª etapa: Axiomatização - sistema

---

[55] Zoltan Paul Dienes nasceu na Hungria em 1917. Fez os estudos primários na França, aos 15 anos se mudou para o Reino Unido, onde se doutorou em Matemática e Psicologia, em 1939, recebeu seu Ph.D. na Universidade de Londres. Faleceu em 11 de janeiro de 2014, aos 97 anos (Dalcin, Silva, 2019, p. 673).
[56] Baseado em Piaget (França, Santos, 2022).

formal, método, organização de algumas propriedades, axiomas, teoremas e provas (Dienes, 1969).

Aqui, percebe-se uma marcha do concreto ao abstrato onde se parte da realidade da criança, avança-se para o uso de material estruturado até chegar à abstração e/ou generalização.

Segundo Dienes (1969, p. 67), a pedagogia tradicional trabalha exatamente no sentido contrário:

> Introduz-se um sistema formal, por meio de símbolos. Percebe-se que a criança não está apta a compreender tal sistema e por isso se lança mão de meios audiovisuais para fazê-la compreender. Isto quer dizer que, a partir da etapa do simbolismo, passa-se a etapa da representação. Descobre-se que a criança não está apta a aplicar os conceitos, mesmo depois dos recursos audiovisuais; consequentemente torna-se necessário ensinar-lhe as aplicações na realidade. Chega-se finalmente à realidade, de onde deveria ter partido (Dienes, 1969, p. 67)

Na visão de Dienes, na prática, a generalização e os processos de abstração parecem ocorrer simultaneamente, mas que, ainda, há muito a ser descoberto sobre como os dois processos podem ser tecidos para produzir com eficiência a aprendizagem matemática (Soares, 2014).

Na citação abaixo, nas palavras do próprio autor, a relação existente entre abstração e generalização:

> Abstração como uma atividade construtiva, em que a criança isola uma classe de eventos, formando uma classe real, reconhecendo uma propriedade comum para os membros dessa classe. Generalização é considerada como a extensão de uma classe que foi formada pela criança. Generalização, de modo geral corresponde a uma classe mais ampla, com propriedades iguais ou semelhantes (...) A generalização corresponde a uma abstração de ordem elevada, quando a essência comum é extraída de diferentes situações (Dienes, 1966, p. 53 *apud* Soares, 2014, p. 63).

Dienes, ao propor este contato com uma vasta gama de materiais manipuláveis, estruturados, ou não, objetiva que se alcance a abstração, uma vez que esta ocorrerá quando o estudante extrair de diferentes situações a essência do que há em comum em todas elas. Ao passo que a generalização ocorrerá quando o estudante perceber o que há em comum nessas abstrações, ou seja, uma fração pode ser parte-todo contínuo, discreto, um número na reta numerada.

Ainda nessa forma de pensar, a aprendizagem, aqui em nosso trabalho, a aprendizagem de conceitos matemáticos. Dienes (1966) continua:

> A generalização é um processo mais difícil porque faz uso da relação de inclusão entre duas classes sendo assim, portanto, um processo lógico ou analítico para as crianças. Isso nasce das experiências. Abstrações ocorrem com mais facilidade do que as generalizações, sendo que algumas generalizações não foram capazes de ser transferidas para outras situações. No caso das generalizações serem provocadas a partir de uma única representação, resulta no que foi chamado de bloqueio da percepção. Esse é um perigo que pode ocorrer se apenas um tipo de material de matemática for utilizado em situações de aprendizagem. Considera-se que um tipo de material, tal como o material Cuisenaire, ou Katherine Stern, ou Blocos Aritméticos Multibase ou qualquer outro material, não seja tão bom como a utilização de diversos materiais pelos quais uma abstração pode ser encorajada (Dienes, 1966, p. 53 apud Soares, 2014, p. 63).

Segundo Soares (2014): "Dienes dá ênfase na importância de se variar o material, para que a aprendizagem realizada não seja do tipo associativa. Nesse discurso, esboça-se a defesa que mais tarde (nos livros que escreveu) ele anuncia como Princípio da Variabilidade Perceptiva" (p. 52).

No seu livro Aprendizado Moderno da Matemática (Dienes, 1970), publica dois Princípios que devem ser observados no processo de ensino e aprendizagem de matemática, o Princípio da Variabilidade Perceptiva e Princípio da Variabilidade Matemática. Associado a estes, define mais dois princípios, o Dinâmico e o da Construtividade.

> *Princípio Dinâmico* – Devem ser apresentados jogos preliminares, estruturados e de prática como experiências necessárias das quais os conceitos matemáticos poderão, eventualmente, ser construídos, desde que cada tipo de jogo seja introduzido na época apropriada (...) enquanto as crianças foram pequenas, esses jogos devem ser, forçosamente, realizados com material concreto.(...), *Princípio da Construtividade* – Ao estruturar os jogos, a construção deve sempre preceder a análise, que está quase completamente ausente do aprendizado pelas crianças menores de 12 anos. *Princípio da Variabilidade Matemática* – Os conceitos que envolvam variáveis devem ser apreendidos por meio de experiências que incluam o maior número possível de variáveis. *Princípio da Variabilidade Perceptiva* – (...) a mesma estrutura conceitual deve ser apresentada na forma de tantos equivalentes perceptivos, quanto possível (Dienes, 1970, p. 41, grifos do autor)

Para que a criança abstraia é necessário variedade, materiais diferentes que tenham a mesma estrutura matemática essencial, pois "a essência da abstração é retirar propriedades comuns de diferentes tipos de situações" (Dienes, 1970, p. 190).

Lucília Bechara Sanchez (2024), em entrevista, relata a diferença entre abstração e generalização:

> *Nas seis etapas do processo de aprendizagem, ele (Dienes) põe a variabilidade perceptiva. Então, ele trabalha com várias... com várias percepções das frações. A fração na geometria, a fração como conjunto numérico, a fração... Então, esse é um aspecto que fica lá bem evidente, que é da Matemática Moderna.*
> *Ele chamava de variabilidade perceptiva e variabilidade matemática. A variabilidade perceptiva é aquela variabilidade que leva à abstração e a variabilidade matemática é a que leva à generalização.*
> *Mas, nas frações, a variabilidade perceptiva e a variabilidade matemática, é fácil de explicar. A perceptiva é um meio representado de várias maneiras, é a variabilidade perceptiva, perceber que um meio é uma fração, dois terços outra fração, aí próprias, impróprias, a reta numérica, por exemplo, né? Isso tudo são variabilidade perceptível, que ajuda a abstração, como eu disse, e variabilidade matemática, que ajuda uma generalização* (Sanchez, 2024)[57].

Nessa mesma entrevista, Lucília Bechara Sanchez afirma que, ao escrever a coleção de livros do GRUEMA, os princípios de Dienes estavam presentes.

Com isso, o “aluno piagetiano”, cuja forma de ensino foi desenvolvida por Dienes e apropriada pelas autoras de livros didáticos brasileiros, era um indivíduo que deveria sempre entrar em contato com materiais manipuláveis, que também ganharam o nome de materiais estruturados. Nos livros didáticos, as imagens para ensinar frações contribuem para alcançar o princípio da variabilidade perceptiva. Assim, a psicologia genética de Jean Piaget, as teorias de aprendizagem de Dienes e o uso desse tipo de material para o ensino da matemática eram conhecimentos necessários ao professor que ensinava matemática em tempos de MMM. Vejamos, na próxima seção, como isso se deu.

[57] Entrevista concedida a Barbara Winiarski Diesel Novaes, Danilene Gullich Donin Berticelli e João Paulo Bertoldo, em 22 de maio de 2024.

4 A MATEMÁTICA MODERNA NO INÍCIO DA ESCOLARIZAÇÃO

À luz dos, então recentes, estudos piagetianos sobre o desenvolvimento infantil, surge uma preocupação aos defensores do MMM, qual seja, de como ensinar teorias de conjuntos, noções de estruturas matemáticas, novas formas de geometria, dentre tantas outras novidades que marcam o MMM. Como fazer essa mudança estrutural na maneira de ensinar matemática e, isso, voltado para crianças na mais tenra idade? Não à toa, encerrando um discurso, o diretor Azanha[58], reforça o papel da escola primária como base para os outros níveis de ensino, devendo por isso, reformular-se pedagogicamente diante das novas demandas da sociedade brasileira e do desenvolvimento das teorias de aprendizagem infantil.

Em assim sendo, um novo currículo para o ensino de Matemática deveria surgir a partir das discussões de como este novo jeito de ensinar Matemática iria se efetivar, junto às salas de aulas dos menores.

Como nos lembra Candeias (2007):

> O relatório elaborado pela OECE[59], em 1961, decorrente das conclusões do Seminário de Royaumont apresentou sugestões para o ensino primário. Elas propunham a utilização de materiais concretos e familiares aos alunos para a introdução à Teoria dos Conjuntos. A observação e a experiência foram consideradas como fundamentais para o desenvolvimento da abstração matemática. Foram exemplificadas situações para que o professor explorasse o conceito de conjunto a partir dos alunos em sala de aula ou das partes do corpo como o conjunto dos dedos na mão (Candeias, 2007).

Essa recomendação, que estava de acordo com os pressupostos de Jean Piaget, teve que esperar alguns anos para chegar à sala de aula, pois havia a necessidade de isso ser assimilado pelos governos, pelas escolas e pelos professores.

Procurando ressignificar as representações postas sobre a vigência do MMM no ensino primário, Medina (2007) analisou, por meio de documentos oficiais, as alterações curriculares na escola primária paulista, porta de entrada do MMM no Brasil, no período de 1960 a 1980, e a Legislação de ensino que lhes deu origem.

---

[58] Professor José Mário Pires Azanha era o diretor geral do Departamento de Educação de São Paulo, em 1969. Foi ele quem assinou a versão preliminar do Plano de Educação de São Paulo (Medina, 2007, p. 55).

[59] OECE – Organização Europeia de Cooperação Econômica.

Assim, as primeiras reformas educacionais foram as paulistas, e não poderia ser diferente, por se tratar do estado mais industrializado do país e que necessitava do domínio tecnológico dos funcionários de suas indústrias e, por consequência, de uma modernização do ensino da Matemática pela expansão da escola primária. Tendo isso, como já destacado anteriormente, como prioridade da época, em especial, da sociedade paulista. Medina (2007) conclui que:

> (…) os documentos oficiais foram utilizados como estratégia produzida pelo Estado visando a reformulação curricular e a divulgação, a fim de implementar as novas diretrizes para o ensino de Matemática na escola primária paulista (Medina, 2007, p. 94).

Esses documentos, ainda segundo Medina (2007), comprovam a oficialização do ideário do MMM no ensino primário e consolida São Paulo como estado por onde entrou o MMM no Brasil.

Embora São Paulo tenha implantado as primeiras reformas educacionais e formado o primeiro grupo de estudos acerca da Matemática Moderna, outros grupos também foram instituídos e acabaram se destacando no que tange à divulgação do Movimento da Matemática Moderna, à época, cada um em seu estado.

Portela (2009, p. 17) destaca os seguintes:

> I – Grupo de Estudo do Ensino de Matemática (GEEM) – criado em 1961, na Universidade Mackenzie no Estado de São Paulo, sob a coordenação do Professor Osvaldo Sangiorgi;
> II – Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) – criado em 1962 e sediado em Curitiba – PR. Este grupo foi coordenado pelo professor Osny Antonio Dacol, que exerceu o cargo de diretor do Colégio Estadual do Paraná. Iniciando o trabalho com a Matemática Moderna, no Colégio Estadual, o NEDEM estendeu suas ações para outras escolas chegando ao Ensino Primário. O grupo priorizava não somente o ensino dos conteúdos da Matemática Moderna, mas preocupava-se com a orientação didática dos professores para trabalhar esses conteúdos;
> III – Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de Porto Alegre (GEEMPA) – 1970 – Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, coordenado pela professora Esther Pillar Grossi;
> IV – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática no Rio de Janeiro (GEPEM), no ano de 1976 (Portela, 2009, p. 17).

Nos próximos tópicos relatamos um pouco mais sobre como aconteceu este movimento em São Paulo, trazendo um pouco da história do GEEM, e como deste grupo se formou o GRUEMA.

4.1 O MMM EM SÃO PAULO

Como já destacado, anteriormente, a necessidade de uma educação em consonância com os avanços tecnológicos do pós-guerra passava imprescindivelmente por uma renovação pedagógica do ensino da Matemática e pela modernização do ensino tradicional das escolas brasileiras, uma vez que a Matemática Moderna era vista, neste contexto, como a ciência que serviria de apoio para o tão desejado, pela sociedade brasileira da época, avanço tecnológico.

Eram propósitos audaciosos. Um primeiro passo precisava ser dado, assim surgiu o GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática. O grupo era formado por professores universitários e professores do ensino secundário de São Paulo: Professores Benedito Castrucci, Alésio de Caroli, Anna Franchi, Elza Gomide, Irineu Bicudo, Lucília Bechara Sanchez, Luiz Henrique Jacy Monteiro, Manhúcia Perelber Liberman, Martha Maria de Souza Dantas, Omar Catunda, Osvaldo Sangiorgi, Renate Watanabe, Ruy Madsen Barbosa, Scipione de Pierro Neto, Ubiratan D'Ambrósio, o psicólogo Joel Martins, entre outros (Lima, 2006, p.44)

Fundado por Osvaldo Sangiorgi, em 1961, o grupo objetivava incentivar, coordenar, divulgar e atualizar a matemática, bem como o seu ensino no curso primário, secundário e normal, de início para o Estado de São Paulo, mas com a intenção de propagar essas propostas para todo o Brasil. O grupo contava com o apoio direto da então denominada secretaria dos negócios da educação de São Paulo. Essas informações foram extraídas do estatuto do GEEM, que pertence ao Arquivo Pessoal Oswaldo Sangiorgi (APÓS)[60] (Lima, Passos, 2008).

As estratégias do GEEM para difusão do MMM no Brasil eram: a realização de cursos para os professores e acadêmicos da área; publicação de boletins informativos acerca das atividades do grupo; e, informativos periódicos sobre os preceitos da Matemática Moderna. Sem contar com a participação em congressos internacionais na área da matemática para fortalecer o MMM no estado de São Paulo e de congressos nacionais com o intuito de expandir o ideário da Matemática Moderna para todo o país.

---

[60] O APOS, consta com arquivos pessoais e da vida profissional de Osvaldo Sangiorgi, doado pelas filhas dele ao grupo GHEMAT – Brasil, coordenado pelo professor Wagner Rodrigues Valente. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/173403.

O GEEM participou de inúmeros encontros sobre essa temática. Destacamos dois deles: a I Conferência Internacional de Educação Matemática, que ocorreu em Bogotá – na Colômbia, em dezembro de 1961; e, o IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática, realizado no estado do Pará, em julho de 1962 (Silva, 2007).

Com toda essa discussão, em âmbito internacional, em torno da Matemática Moderna e o início deste movimento aqui, no Brasil, os autores dos livros didáticos precisavam adaptar as suas obras para este novo modo de conceber o ensino da Matemática. Com isso, o primeiro a elaborar esses novos livros foi Osvaldo Sangiorgi, fundador do grupo GEEM e já conhecido autor de livros didáticos de Matemática. Desde a década de 1950, Sangiorgi já escrevia livros didáticos, ele pertencia ao quadro da Companhia Editora Nacional e seus livros para o curso ginasial já eram considerados *Best Sellers* (Valente, 2008b).

Contando com a popularidade do escritor Osvaldo Sangiorgi e este ambiente profícuo, no final de 1963 foi lançado o livro Matemática Curso Moderno Para Curso Ginasial – Volume I, que foi agraciado com o prêmio Jabuti[61], na categoria Ciências Exatas, de 1964, pela obra: “Matemática Curso Moderno”. Em junho de 1964, por exemplo, o livro de Sangiorgi, intitulado Terceira Série Ginasial, da coleção anterior ao MMM, já estava na septuagésima edição, com tiragem de 50 429 exemplares (Villela, 2009).

É importante destacar que o MMM encontrou, ao chegar no Brasil, um ambiente muito fecundo para prosperar, uma vez que a comunidade escolar já vinha, há anos, questionando a “velha Matemática” e estava ansiosa por receber a Matemática Moderna (Silva, 2007).

Essa afirmação encontra respaldo em Sanchez (2024), quando afirma:

> As imagens têm muito a ver com o concreto e o abstrato, que era um outro ponto muito valorizado. **Eu até costumo contar que eu estava querendo desistir de ser professora quando apareceu tanto o Vocacional, mas principalmente, a Matemática Moderna, porque eu vi que a Matemática não precisava ser aquela disciplina de regras.** Põe a direita, põe a esquerda. Então, daria para você ensinar matemática de uma maneira construtiva, de uma maneira concreta, lúdica, E foi muito a influência do Dienes. O Dienes trabalha com jogos. Basicamente, ele trabalha com jogos, trabalha com material multibase, no caso (Sanchez, 2024, grifo nosso).

[61] O Prêmio Jabuti é concedido anualmente pela Câmara Brasileira do Livro – CBL, desde 1959 e é considerado o prêmio mais importante da literatura brasileira.

Segundo Villela (2009), Sangiorgi, Manhucia, Lucília, Anna Franchi, Anna Averbuch e Franca Cohen estavam altamente envolvidas nas discussões sobre o ensino da matemática: os quatro primeiros em São Paulo, através do grupo GEEM, e as duas últimas, no Rio de Janeiro, sendo que Manhucia promovia a articulação entre os dois grupos. Todos estes professores eram diplomados pelas faculdades de Filosofia. A autora também informa que todos já estavam envolvidos em centros de estudos, ministrando cursos e/ou palestras por todo o Brasil, sempre com o intuito de divulgar a Matemática Moderna para os demais professores da área.

Em sua autobiografia, escrita em 2018, Lucilia Bechara Sanchez (2018) corrobora com o que traz Villela (2009), quando diz que já conhecia Osvaldo Sangiorgi como grande escritor de livros da década de 1950 e que teve a oportunidade de fazer, em 1960, um curso de 8 semanas, que foi ofertado por ele, que tinha o objetivo de divulgar o MMM no Brasil. Neste mesmo curso ela conheceu também Manhucia Perelberg Libermam, com a qual viria a formar uma parceria que durou anos.

Conforme depoimento de Lucília, foi um período de intenso investimento em cursos de capacitação:

> No segundo semestre estávamos estudando matemática moderna no curso do Mackenzie e também nos Ginásios Vocacionais. Ficamos entusiasmados, respirávamos MM. Nós estávamos estudando a questão do construtivismo, do cognitivismo, líamos muito Piaget [...] Os seis estudos de Piaget. (Bechara, depoimento oral, 2006 *apud* Medina, 2007, p. 70)

Lucilia relembra que Sangiorgi, consagrado autor de livros didáticos para o curso ginasial brasileiro, com o advento do MMM, passou a incluir em suas obras a teoria de conjuntos e as noções de álgebra moderna e de geometria, sabidamente, elementos da Matemática Moderna, em suas obras destinada ao ginásio (Sanchez, 2018).

Mas quem poderia produzir livros didáticos, abordando o MMM para o ensino primário, com o mesmo sucesso editorial alcançado por Sangiorgi no ensino ginasial? Foi aí que:

> […] Octalles Marcondes Ferreira, co-fundador, em 1925, da Companhia Editora Nacional, ao lado de Monteiro Lobato, queria produzir livros para o ensino primário (de 7 a 10 anos) que abordassem o conteúdo matemático já orientado pela Matemática Moderna. Então, em 1965, ele chamou Manhucia, que dava aulas de Matemática Moderna para professores de 1ª a

> 4ª série na TV Cultura, e eu, que trabalhava nos ginásios vocacionais, para sermos autoras (Sanchez, 2018, p. 245).

Convite feito, convite aceito e, segundo Lucília, como nem ela, nem Manhucia tinham experiência com o primário, resolveram convidar Anna Franchi para produzirem o primeiro livro didático da Editora Nacional, sob a lente da Matemática Moderna, voltado para as crianças (Sanchez, 2018).

Anna Franchi, segundo Lucilia, teria muito a contribuir, uma vez que ela possuía experiência no Curso Primário, da então Escola Experimental da Lapa, na qual liderava os estudos e as práticas da Matemática Moderna, tanto nas séries iniciais quanto nos exames de admissão ao ginasial, comuns na época (Sanchez, 2018).

Essa empreitada não foi nada fácil, pois este novo livro didático precisava abordar os novos conteúdos do MMM, na perspectiva da teoria de Piaget e ainda convencer aos professores que este caminho teórico metodológico traria uma aprendizagem mais significativa para as crianças. Desafios superados ficou pronto o livro *Curso Moderno de Matemática para a escola elementar*. Em 1967 foi lançado o primeiro volume da coleção, dirigido ao primeiro ano.

Este livro foi um marco para a época, pois, segundo palavras de Sanchez (2024):

> *Aconteceu uma coisa que me chamou a atenção, porque até então quem escrevia livros de Matemática não eram professores de Matemática (do primário). Quem escrevia os livros do primário eram pedagogos que escreviam os livros do primário. E aí, a Manhúcia e eu fomos convidadas, escaladas, vamos chamar assim, lá no GEEM a dar os cursos para os professores primários, dar a matemática para os professores primários.* (Sanchez ,2024).

Além de Piaget, Sanchez (2024) destaca outros dois autores que tiveram um consumo criativo nos livros do GRUEMA, quais sejam, Zoltan Dienes e George Papy[62], como podemos confirmar:

> *Uma outra coisa que observei também, quando eu estava vendo a nossa*

[62] Em meados do século XX, na Bélgica, o matemático e professor Georges Papy, e sua esposa, Frédérique Lenger, destacavam-se pelas mudanças apresentadas em seu *Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (CBPM)* relativas ao ensino da disciplina. Papy foi um dos professores que participaram consideravelmente do Movimento da Matemática Moderna (MMM) em seu país. Um currículo original era proposto, novas metodologias eram apresentadas, novos materiais didáticos eram elaborados. O *papysmo* atravessou as fronteiras da Bélgica e conheceu certo sucesso em países além da Europa, como Colômbia, Argentina, Bolívia e Brasil (Dassie, Costa, 2016, p. 851)

> *fundamentação, é muito mais, talvez a gente teve mais influência do Piaget, do Dienes, do que do Vergnaud, embora esses outros também trabalharam, mas eu acho que no nosso livro, eu acho que esses é que foram que mais nos influenciaram. Aquele exercício de fração, que você pega o meio, multiplica por dois, multiplica por um terço e depois faz a composição, é como se fosse... A gente chamava isso, o Papy que usava isso, as máquinas de estado[63]. Ele [Papy] fazia as transformações. Ele trabalhava com transformações* (Sanchez, 2024).

Em outro trecho da entrevista ela cita George Papy como um inspirador para a confecção das atividades por ele trabalhar com imagens:

> *Olha, eu acho que a gente... Eu acho que a gente criou bastante. Eu diria que nós criamos bastante. A gente inventou bastante. Eu me lembro que a gente se sentava ali na Maria Antônia, tinha uma... um lugar que a gente ficava lá conversando e vendo que imagens que a gente ia colocar dentro dessa linha da concretização. Agora, o Papy foi um inspirador, George Papy, porque ele trabalhou muito com imagens* (Sanchez, 2024).

Ana Franchi resolveu desfazer a parceria em 1972. Para suprir esta ausência, Manhucia e Lucilia convidaram duas professoras renomadas no Rio de Janeiro, Anna Averbuch e Franca Cohen Goltlieb, ambas as autoras já conheciam Manhucia da faculdade. Lucilia conta que Sanchez (2018), como agora elas eram muitas, resolveram se identificar como Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA), que produziu na época muito material destinado às primeiras séries do recém-criado Ensino Fundamental.

Durante o período da MMM, mais especificamente de 1967 a 1980, as autoras participantes do GEEM elaboraram duas coleções de livros didáticos dirigidas aos primeiros anos de escolarização:

> [...] a Coleção Curso Moderno de Matemática para as Escolas Elementares e a Coleção[64] Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau. A primeira foi editada de fevereiro de 1967 a maio de 1974 e assinada por Anna Franchi, Lucília Bechara e Manhucia Perelberg Liberman, constituindo-se de quatro ou cinco volumes (dependendo da edição) de livros destinados às quatro primeiras séries de escolaridade. Já a segunda coleção foi publicada de março de 1972 a agosto de 1980 e a autoria esteve associada à sigla GRUEMA – Grupo de Ensino de Matemática Atualizada, tendo sido elaborada por Anna Averbuch, Anna Franchi, Franca Cohen Gottlieb, Lucília Bechara Sanchez e Manhucia Perelberg Liberman, com consultoria de Luiz Henrique Jacy Monteiro, compreendendo oito volumes, destinados aos alunos das oito primeiras séries, e, por último, um nono volume destinado a alunos da então pré-escola, cujo título era Grueminha Ensina Você a Pensar, mas que ficou carinhosamente conhecido como

[63] Um exemplo de imagem de máquina de estados para ensinar frações será abordado no capítulo 3.
[64] Analisamos, neste trabalho, os 4 primeiros volumes desta coleção.

> Grueminha, assinado apenas pelas professoras Lucília e Manhucia. (Villela, 2009, p. 29 - 30).

Destacado o GEEM, como dele surgiu o GRUEMA, e entendido o contexto no qual o MMM aportou no Brasil, na próxima seção trazemos um pouco de como esse Movimento aconteceu aqui, no Paraná, e de como o NEDEM se consolidou como o difusor do MMM em nosso estado.

4.2 O MMM NO PARANÁ

A Matemática Moderna aportou aqui, no Paraná, através de um curso, no ano de 1961, desenvolvido na cidade de São Paulo, que contou com a participação do professor Osny Antônio Dacol. Desse curso, ministrado pelo professor Osvaldo Sangiorgi, Osny trouxe para o Paraná um importante documento que se intitulava "Um Programa Moderno de Matemática para o Ensino Secundário", destinado especialmente aos alunos de 11 a 18 anos e objetivava divulgar os conteúdos da Matemática Moderna considerados como ideais para a aguardada reforma do ensino secundário (Pinto, Ferreira, 2006).

Havia um descontentamento do professor Osny e de outros professores que ensinavam a Matemática clássica nas classes ginasiais paranaenses quando, em 1962, Curitiba sediou a XIV Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, onde o GEEM apresentou sugestões de "assuntos mínimos" para um Moderno Programa de Matemática para o ginásio e para o colégio.

Também é importante destacar que esta chegada do MMM, ao Paraná, contou com uma palestra proferida pelo professor Osvaldo Sangiorgi, no dia 10 de julho do ano de 1962, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade Federal do Paraná, no curso intitulado "Introdução à Matemática Moderna no Ensino Secundário".

Somando todos esses elementos, quais sejam – o descontentamento dos professores paranaenses que ensinavam matemática, o curso feito pelo professor Osny, a reunião anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência e a palestra proferida por Osvaldo Sangiorgi – no ano de 1962, foi criado, no Paraná, o NEDEM (Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática) ou, como era carinhosamente chamado por seu fundador, o professor Osny Antônio Dacol, Não é

Difícil Ensinar Matemática. Mas quem foi este brilhante, inquieto e espirituoso professor?

> Filho de um carpinteiro e nascido na cidade de Caçador em Santa Catarina, veio para Curitiba aos 14 anos. No ano de 1950 ingressou no curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e em 1953, aos 23 anos, iniciou sua carreira como professor de Matemática no renomado Colégio Estadual do Paraná, onde mais tarde seria diretor por 14 anos […] Como coordenador do NEDEM deu abertura para os professores participarem de cursos e congressos relacionados ao MMM e também ampliou a biblioteca do referido colégio com publicações importantes sobre a Matemática Moderna […] é possível afirmar que Osny Antonio Dacol, falecido em 18 de fevereiro de 2006, foi um *expert* do Movimento da Matemática Moderna no Paraná (Pinto, Novaes, 2019, p. 328).

O NEDEM era formado por professores do quadro docente do Colégio Estadual do Paraná e de outros Colégios de Curitiba e, é claro, pelo seu fundador, o professor Osny Antônio Dacol, além de professores universitários. Dentro do NEDEM havia um segmento para os anos iniciais, que era composto por: Clélia Tavares Martins, Esther Holzmann, Gliquéria Yarentchuk, Henrieta Diminski Arruda, entre outros.

Segundo Masseli (2017), "o NEDEM teve grande importância na divulgação do MMM, e trabalhava com a linha francesa, a psicologia de Piaget, a Lógica de Bertrand Russel e as ideias de Dienes, estudavam o pensamento da criança, dando à Matemática uma estrutura para ter um 'corpo'" (p. 20).

As reuniões gerais do NEDEM eram semanais e aconteciam na sede do Colégio Estadual do Paraná, em Curitiba, e de Curitiba, foi se propagando pelo interior do Paraná, por meio de cursos ofertados aos professores de todo o estado, nos períodos de férias e recessos escolares. Esses cursos eram ofertados pelo NEDEM em Curitiba ou, a convite, em qualquer outra cidade no Paraná.

Além desses cursos, o NEDEM também produziu livros didáticos para o ensino da Matemática Moderna e, assim como em São Paulo, em nosso estado as primeiras produções foram para o ensino ginasial. Mas o MMM não ficou restrito a esta modalidade de ensino. Em 1973, a coleção foi estendida para a escola primária. Essa coleção para as séries iniciais, foco da análise deste trabalho, "(…) foi produzida depois de ser testada e melhorada por meio dos Cadernos de

Atividades[65], material que antecedeu e proporcionou a elaboração da referida coleção" (Portela, 2009, p. 100).

Os encontros para elaboração dos cadernos de atividades que, após testados, formariam a coleção do NEDEM primário, aconteciam na casa da professora Henrieta, que cedia sua residência para que os estudos e as reuniões acontecessem aos sábados à tarde, durante algumas horas. Segundo Masseli (2017) "nesses encontros, as integrantes do ensino primário estudavam livros que eram trazidos dos EUA e de outros países, bem como os livros do NEDEM de quinta à oitava série e livros de exercícios que não eram de matemática moderna, mas de uma matemática atraente" (p. 24).

Segundo a fala da professora Henrieta, em entrevista concedida a Seara (2005, p. 45) "não tinha muita bibliografia! Mas, tinha muitos livros que eram, assim... Livros de exercícios [...] de Matemática que eram usados noutros países... Não eram bem de Matemática Moderna, mas era de uma Matemática mais interessante de ser dada, sabe?!".

A partir dos estudos, das aplicações nas classes da professora Henrieta, o NEDEM primário percebia vantagens no uso de material concreto no ensino de matemática.

> Tínhamos dificuldades de encontrar material de estudo. Esther trouxe dos Estados Unidos alguns livros que a gente usava no NEDEM. [...] Partíamos do sumário do livro da 5ª série do NEDEM, e começamos a fazer esses estudos organizando páginas de exercícios. Esses exercícios partiam sempre do material concreto e obedeciam as fases do Piaget. Naquele tempo as fichas eram mimeografadas. (Fala da professora Henrieta em entrevista concedida a Masseli, 2015 *apud* Masseli, 2017, p. 24).

Para fechar o ciclo, as professoras Gliquéria e Esther, também atuantes no grupo do NEDEM, levavam os seus alunos de "Didática da Matemática", do Instituto de Educação do Paraná, para observar as aulas do ensino primário da professora Henrieta (Masseli, 2017). Com isso,

> [...] eles viam a aplicação do material que a Gliquéria e a Esther davam, na parte teórica da disciplina". Tudo era feito, assim, graciosamente. Faziam 'por amor à arte', né?! Elas iam treinar os professores para trabalhar os livros. Mas primeiro, com material concreto! Para depois... O livro era assim, quase como uma verificação da aprendizagem, uma fixação! O livro não era

[65] O primeiro caderno, destinado ao primeiro ano, data de 1969 (Portela, 2009).

> de ensinar, o livro fixava a aprendizagem e avaliava o que você ensinou. (Fala da professora Henrieta em entrevista concedida a Seara, 2005, p. 46)

Portela (2009) afirma que os Cadernos de Atividades, que antecipam os livros, foram produzidos de forma artesanal, as folhas eram picotadas possibilitando o destaque, nessas folhas havia uma coluna no lado direito, onde havia uma parte para os alunos utilizarem para a realização de atividades. No lado esquerdo, havia orientações para os professores. Esses cadernos foram impressos em uma gráfica particular, em sendo assim, não havia nenhuma interferência da editora quanto ao formato, número de páginas, diagramação etc.

Após esses Cadernos de Atividades serem trabalhados em salas experimentais, eles foram transformados nos livros didáticos que auxiliaram na difusão do MMM no Paraná. A adoção da coleção pela Rede Municipal de Educação de Curitiba (Krull, 2006) teve um importante papel neste processo.

> Entretanto, a inserção da Matemática Moderna na Rede Municipal de Ensino de Curitiba (RMEC) foi reforçada, em 1970, pela adoção dos livros do Núcleo de estudos e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM); permitindo, assim, a disseminação das ideias do Movimento da Matemática Moderna (MMM) em suas unidades escolares. Em, 1970, ainda foi criada a Coordenação de Matemática da RMEC, cuja finalidade era orientar as práticas pedagógicas da disciplina [...]. As atividades da referida coordenação iniciaram sob os cuidados de Henrieta Dimynski Arruda, professora integrante do Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM); por meio de sua dedicação à formação dos professores da Rede Municipal de Ensino de Curitiba (RMEC) [...] (Krull, 2006, p.123)

Experimentados, editados e difundidos, os livros do NEDEM tiveram uma importância muito grande para a difusão da Matemática Moderna, no Paraná. Na próxima seção analisamos como as imagens contidas na coleção foram utilizadas, como as autoras usaram desse recurso para difundirem o Movimento no Paraná, mas também (procuraremos) entender, por elas não serem meras espectadoras do seu tempo, quem são essas professoras que foram protagonistas da Matemática Moderna paranaense, na década de 1970.

5 O PAPEL DAS IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DE MATEMÁTICA DO NEDEM

No presente capítulo, atentos para a Coleção de Livros Didáticos *Ensino Moderno de Matemática*, escrita por professoras integrantes do NEDEM, apresentamos a obra como um todo e, especificamente, analisamos o papel das imagens para ensinar frações na coleção.

5.1 VISÃO GERAL DA COLEÇÃO

Voltamos, neste momento, a nossa atenção a como se deu o processo de confecção da Coleção *Ensino Moderno da Matemática*, que foi escrita pelo grupo de professoras paranaenses: Henrieta Dyminski Arruda; Gliquéria Yaremtchuk e Clélia Tavares Martins.

A seguir, apresentamos um pouco mais sobre cada uma das autoras que faziam parte do NEDEM e que tiveram a "missão" de escrever para o primário o que estava sendo discutido para o ensino secundário e ginasial, conforme as nomenclaturas usadas na época.

Começamos com aquela que foi, segundo Pinto e Ferreira (2006), a principal autora da coleção, a professora Henrieta Dyminski Arruda. Em uma pesquisa no *site* do GHEMAT-SP[66] pudemos constatar que:

> Henrieta Dyminski Arruda nasceu em Curitiba em 1936 e cursou a Escola Normal no Instituto de Educação do Paraná, formando-se no ano de 1954. Licenciou-se em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná. Atuou como docente do ensino público, onde foi professora de 1ª série no Grupo Escolar Tiradentes. Integrou o Grupo Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática – NEDEM, e com esse grupo produziu uma coleção de livros para o Ensino Primário, usando-os em suas aulas e orientando outros professores quanto ao seu uso (Berticelli, Portela, 2021).

O texto que traz a biografia de Henrieta continua dando ênfase à sua participação em diversas produções, sempre relacionadas ao ensino da Matemática para o primário, tendo como base a produção de livros didáticos e de materiais de

---

[66] Dicionário de Experts: https://www.ghemat.com.br/itens/henrieta-dyminski-arruda.

apoio ao professor, visando à ampla difusão da Matemática Moderna para todo o estado paranaense.

Complementando a biografia, Masseli (2017) afirma que:

> A professora Henrieta além de professora de matemática da Escola Tiradentes no ensino primário, também foi uma das fundadoras da escola ‘Jean Piaget’, tendo assim uma visão ampla sobre educação e não apenas da disciplina, onde usava os livros do NEDEM de primeira à quarta série do primário (atualmente 1º ao 5º ano~~s~~). Um ponto que merece destaque é que a professora inicia a sua participação no grupo por se incomodar com a sua maneira de ensinar a Matemática e com o objetivo de aprender a usar o material concreto no ensino da Matemática (Masseli, 2017, p. 23)

Junto com Henrieta estava Clélia Tavares Martins. Como nos traz Nierri (2024):

> Clélia Tavares Martins, atuou como técnica no CEPE – Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão, na década de 1960, e na década de 1970 foi técnica da CELEPAR – Centro de Treinamento e Aperfeiçoamento de Professores do Estado do Paraná. No início da década de 1960 também integrou o NEDEM juntamente com um grupo de professores produziu materiais didáticos para o ensino de matemática na educação primária (Nierri, 2024, p. 29).

Nierri (2024) continua, nesse mesmo texto, informando que Clélia produziu outros livros didáticos, ao longo da década de 1970 e início da década de 1980, e destaca que a mesma participou da elaboração de materiais para serem utilizados no programa HAPRONT[67].

Completando o trio, temos a professora Gliquéria Yaremtchuk, que segundo Portela (2019):

> Gliquéria Yaremtchuk fez licenciatura em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná, foi professora da Secretaria de Educação do Paraná efetivada em 1961, “ministrou a disciplina de Teoria e Prática de Matemática na formação de Normalistas do Instituto de Educação do Paraná”. Em 1967 compôs a equipe que elaborou as Diretrizes Curriculares da Secretaria de Estado da Educação do Paraná, disciplina de Matemática ensino de 1º grau (Portela, 2019, p. 6).

[67] HAPRONT – Habilitação do Professor Não Titulado, que objetivava a formação de professores leigos para o ensino da Matemática Moderna.

Ainda de acordo com Portella (2019), Gliquéria Yaremtchuk foi membro ativo do NEDEM e participou da elaboração de toda a coleção *Ensino Moderno de Matemática*.

Martins, Yaremtchuk e Arruda são consideradas *experts*[68], e este é um reconhecimento para além de suas produções de materiais didáticos, é reconhecê-las como sistematizadoras e produtoras de saberes.

Porém, um livro didático não depende apenas de seus autores, como nos lembra Bittencourt (2008), existe a interferência de diferentes sujeitos em sua produção, circulação e consumo. Além, é claro, das funções bem diversificadas que pode assumir, dependendo das condições, do lugar e do tempo em que é produzido e utilizado nas diferentes situações escolares.

No que diz respeito à produção do livro didático é preciso ter especial atenção quanto à editora. A editora de toda a coleção do NEDEM é a Editora do Brasil S/A. Com sede na cidade de São Paulo, foi fundada no ano de 1943[69] e teve, em 1973, a inauguração do seu parque gráfico, um dos maiores da América Latina, o que a consolidou como uma das maiores editoras do Brasil.

Ainda corroborando com Bittencourt (2008), a interferência de diferentes sujeitos na produção, circulação e consumo de um livro didático ficou evidenciada no depoimento dado por Gliquéria a Portela (2009):

> Os livros foram editados pela Editora do Brasil. Quando eu levei na editora, eram folhas maiores, desenhadas, … com os exercícios, conforme o Caderno de Atividades[70], com as orientações para o professor, no mesmo livro. Na editora eles mandaram reduzir, disseram que era muito material, sairia muito caro, então diminuímos as folhas e fizemos o livro do professor separado, aquele pequeno, com as sugestões (Gliquéria, 2009, depoimento oral *apud* Portela, 2009).

---

[68] O *expert* em educação – refere-se a um personagem ou grupo de pessoas que recebem atribuições das autoridades de ensino de modo a assessorá-las, com a produção de saberes que embasem uma decisão oficial, na resolução de um problema prático (Valente, 2021, p. 4).

[69] A Editora do Brasil S/A foi fundada quando um grupo de seis funcionários da Editora Nacional, responsáveis pelo programa de livros didáticos, decidiram criar seu próprio negócio. Três desses demissionários: Carlos Costa, Carlos Pasquale (assinavam juntos livros didáticos de ciências, biologia e química) e Manoel Netto (que era editor assistente). Criada como uma sociedade anônima, com 36 membros fundadores, as famílias de Carlos Costa e de Manoel Netto destacavam-se numericamente nessa composição (Braghini, 2012, p. 156).

[70] Como informou a Professora Gliquéria, os Cadernos foram produzidos em gráfica particular, constando de 4 volumes para cada série, excluída a 4ª série. As atividades eram feitas em estêncil, desenhadas à mão para então serem impressas (Portela, 2009, p. 101).

A impressão, a divulgação e a comercialização dos livros não contou com nenhum apoio, como relata o professor Shigueti Suzuki[71] em depoimento oral dado a Claras (2011):

> […] E depois de pronto, aí a gente teve que reembolsar. Foi uma coisa estranha. […] a gente disse escuta, nós queremos agora ver o lucro. Mas a editora disse: nós temos que divulgar o livro, mandar para todos os professores do Brasil, e isso aí não vai sair da editora, alguém vai ter que bancar. Então ninguém estava na parte da comercialização, a gente não estava pensando… mal deu para terminar o negócio […] A gente não tinha espírito comercial, não tinha nada… era uma coisa assim… E a parte financeira pegou a gente também (Shigueti Suzuki, depoimento oral *apud* Claras, 2011, p. 63).

E assim foi que, nesse movimento dos autores à procura de editora, algumas modificações foram feitas com o intuito de tornar o livro mais barato.

Modificações feitas, livro impresso, em depoimento dado por Dacol (à)a Seara (2005), a comprovação da boa vendagem que teve a coleção de livros didáticos do NEDEM primário:

> *A gente não tinha controle, disso, né?! Se a gente tivesse controle disso, da vendagem que aparece neste papel[72], a gente poderia controlar o que vinha[73], mas a gente não tinha conhecimento. Veja se somar tudo quantos mil eles publicaram, ó?! Duzentos e cinco mil exemplares, imagine!*
> *A gente nunca tomou conhecimento disso (Osny Antônio Dacol, depoimento oral apud Seara, 2005, p. 51).*

Sem contar que, nesse mesmo depoimento, Dacol relata que a princípio era para ser a Editora Nacional a editar o livro, mas houve a mudança para a Editora do Brasil:

> *Inicialmente, não era a Editora do Brasil que ia publicar o nosso trabalho. Era a Editora Nacional. A Editora Nacional, aqui no Paraná, tinha um representante chamado Ocyron Cunha, que foi reitor da Federal há muitos anos. Atualmente, ele está trabalhando na FUNPAR (Fundação da Universidade Federal do Paraná). Ele é professor aposentado da Federal... Mas, ele não era professor da Federal naquele tempo. Ele era... Como o Chaim[74] tem hoje, ele tinha uma representação de livros na Praça Santos*

---

[71] O professor Shigueti se referia à Coleção de Livros didáticos do NEDEM dirigidos ao ensino ginasial.
[72] Dacol se referia a uma planilha com a tiragem das publicações dos livros do NEDEM que Seara conseguiu via *e-mail*, da Editora do Brasil (Seara, 2005, p. 50).
[73] Nesta mesma entrevista Dacol disse que o NEDEM recebia um valor por cada exemplar vendido e que este valor era dividido entre os membros do NEDEM, conforme o envolvimento de cada um.
[74] Chaim é proprietário de uma livraria, de mesmo nome, bastante conhecida em Curitiba.

> *Andrade. Ele representava a Editora Melhoramentos e a Editora Nacional. E o acerto era que a Editora Nacional ia publicar o nosso livro. Mas, na hora "agá", depois que estava feito o "boneco" do primeiro volume, deu um entrevero lá, e entrou na jogada o Barreto. O primeiro nome do Barreto eu não lembro. Ele era o representante da Editora do Brasil, aqui no Paraná. E ele era muito ligado, assim, com pessoas, principalmente lá... Com a Igreja Católica, o Bom Jesus (Colégio)... E ele falou que a Editora do Brasil publicaria. Então, inicialmente era a Editora Nacional, mas por eles não acreditarem muito, talvez, no nosso livro, a Editora do Brasil pegou e publicou. Então, em relação à editora, foi assim. Era para ser uma e no fim saiu a Editora do Brasil, que era concorrente da outra (Osny Antônio Dacol, depoimento oral apud Seara, 2005, p. 52).*

Marcada como foi a relação da editora com o NEDEM e como aconteceu a impressão do livro, na próxima seção, abordamos como o livro foi se constituindo até chegar à versão final, o qual analisamos e fizemos uma relação entre o que está prescrito no Manual do Ensino Primário de 1963 e o primeiro volume da coleção.

5.2 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO PRIMEIRO VOLUME DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA

No volume 1, do Manual do Ensino Primário[75] para a primeira série, publicado em 1963, e elaborado pelos Assistentes de Educação do Centro de Estudos e Pesquisas Educacionais (CEPE) da Secretaria de Educação e Cultura do Estado do Paraná: Celeste Pinto Reichman, Zoê Azevedo, Eloina Greca, Davina Marques Marold, Nelly Humphreys e Maria Helena Siqueira, sob supervisão da Assistente de Educação Clélia Tavares Martins, chefe da Secção de Orientação e Aperfeiçoamento do Magistério da Divisão do Ensino Primário do CEPE, há menção à noção objetiva de dobro e metade (Paraná, 1963).

> As noções de dobro e metade serão dadas levando-se a criança a redescobrir, pela objetivação, que:
> o dobro nada mais é do que uma soma de parcelas iguais;
> - a metade ou meio é a quantidade ou unidade repartida em duas partes iguais (Paraná, 1963, p. 95).

Na sequência, é sugerida a apresentação da divisão do tempo, ao conhecer o relógio, "ensinar horas e meias horas" (Paraná, 1963, p. 96) marcando no relógio com perguntas "A que horas você levanta?", "A que horas começa a sua aula?".

---

[75] Um estudo detalhado sobre os Manuais encontra-se na tese de Reginaldo Rodrigues da Costa (2013), intitulada: A capacitação e aperfeiçoamento dos Professores que Ensinavam Matemática no Estado do Paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna – 1961 a 1982.

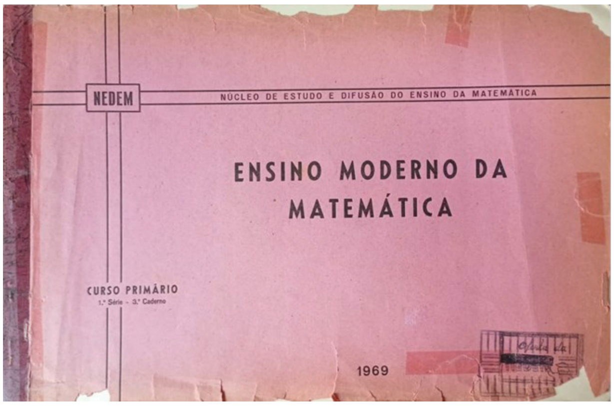
Ao analisar os livros da coleção do NEDEM[76] para os primeiros anos de escolarização, que são resultados dos Cadernos de Atividades, após estes serem testados em classes experimentais, percebemos uma aproximação dos livros às orientações contidas no Manual do Ensino Primário.

Seara (2005), por meio do depoimento de Dacol, esclarece o que eram essas classes experimentais e explica como isso se deu:

> *Nós criamos uma coisa fantástica que a Lei "Cinco Meia Nove Dois" de 1971[77], previa, que era a criação de um "Complexo Escolar". Algumas dessas professoras aqui (apontando no livro do primário) trabalhavam nessas escolas. Essa Clélia Tavares já trabalhava numa escola de Primeiro Grau. A Gliquéria, também. Então, o que nós fizemos, criamos um Complexo, cuja sede era o Colégio Estadual do Paraná. Então, eram sete escolas de Primeiro Grau, das quais nós trazíamos os professores, semanalmente... Todas essas escolas se submetiam às deliberações do NEDEM. As professoras aplicavam com seus alunos as atividades propostas nas reuniões e, em seguida, informavam o resultado ao grupo (Osny Antônio Dacol, depoimento oral apud Seara, 2005, p. 39).*

Os cadernos de atividades, para a primeira série, foram confeccionados em quatro volumes, todos eles na horizontal (FIGURA 3), tinham as folhas de atividades picotadas, como já enunciado neste texto, para que pudessem ser destacadas ao trabalhar com os alunos.

FIGURA 3 – CAPA DO 3º CADERNO DO ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA – 1ª SÉRIE



FONTE: Martins, Holzmann, Yaremtchuk, Arruda (1969a).

Para o primeiro ano, a noção de frações é introduzida pela noção de metade de quantidades em diversas situações, ao lado esquerdo há a orientação ao professor para entregar a folha somente após o aluno ter compreendido o conceito.

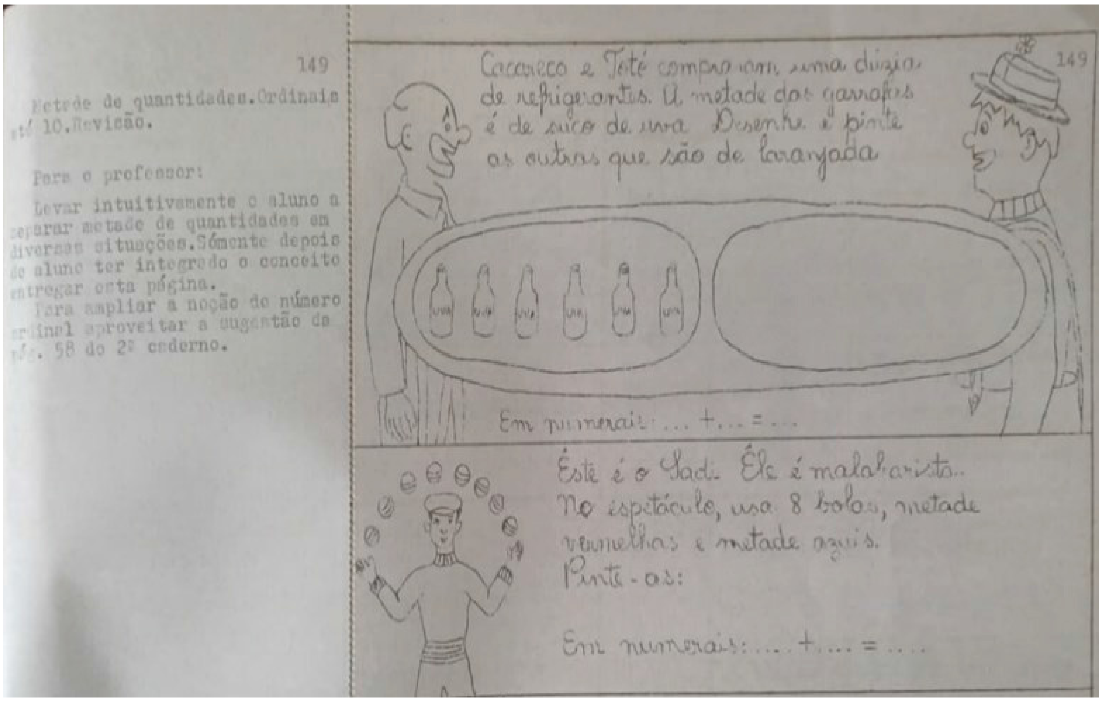
---

[76] O endereço eletrônico para acesso à toda coleção está disponível no QUADRO 3 deste trabalho.
[77] Lei de Diretrizes e Bases 5692/71, de 1971.

O tema do livro do primeiro ano do NEDEM era Circo, por ser um assunto que normalmente é interessante para a criança. No Preâmbulo temos um alerta das autoras "lembramos, novamente, que cada nova noção deve passar por todas as fases (concreta, semiconcreta, semiabstrata e abstrata) e que cada uma deve ser bem dominada antes de se passar à seguinte, para se evitar que surjam dificuldades futuras de aprendizagem" (Martins, Holzmann, Yaremtchuk, Arruda, 1969a).

Na figura 4 temos dois exemplos de problemas, envolvendo a noção de metade integrados a essa temática, "Cacareco e Totó compraram uma dúzia de refrigerantes. A metade das garrafas é de suco de uva. Desenhe e pinte as outras que são laranjada" e "Este é o Sadi. Ele é malabarista. No espetáculo, usa 8 bolas, metade vermelhas e metade azuis. Pinte-as" (Martins, Holzmann, Yaremtchuk, Arruda, 1969a, p. 149).

FIGURA 4 - SIGNIFICADO DAS FRAÇÕES - METADE DE QUANTIDADES

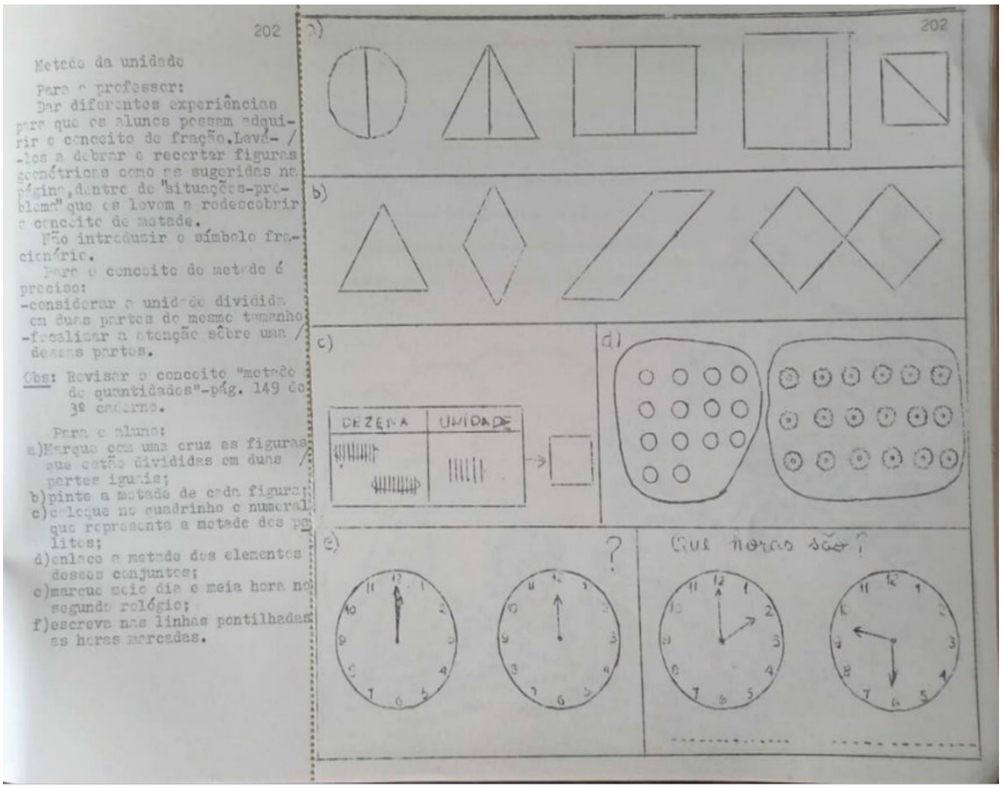


FONTE: Martins, Holzmann, Yaremtchuk, Arruda (1969a, p. 149).

Na página seguinte do Caderno de atividades, seguindo a mesma linha da metade de quantidades, é aplicado o conceito de metade à dúzia. A sugestão é comentar sobre coisas que podem ser compradas em dúzia e meia dúzia. Ao trabalhar com medidas de tempo, trabalhar com a noção de hora e metade da hora.

No 4º Caderno do Ensino Moderno da Matemática – 1ª série, há orientação para o professor proporcionar diferentes experiências para o aluno adquirir o conceito de fração. Levar o aluno a dobrar e recortar figuras geométricas como as indicadas na figura 5. Na primeira série não é recomendado introduzir o símbolo fracionário, mas é necessário considerar a unidade dividida em duas partes iguais. Para o aluno, as atividades nesse ponto versam em: marcar com uma cruz as figuras que estão divididas em duas partes iguais (letra a); pintar a metade de cada figura (letra b), metade dos palitos (letra c); metade dos elementos do conjunto (letra d); meio-dia e meia hora (letra e).

FIGURA 5 - DIFERENTES EXPERIÊNCIAS SOBRE METADE



FONTE: Martins, Holzmann, Yaremtchuk, Arruda (1969b, p. 202).

Somente após os Cadernos serem testados em classes experimentais, dentro do complexo escolar, é que o primeiro volume da Coleção Ensino Moderno de Matemática - Ensino de Primeiro Grau - 1a série, foi lançado, em 1973. As orientações à esquerda foram transformadas em Livro do Mestre e as atividades da direita, no Livro do Aluno.

No quadro 5 temos algumas características físicas da obra, bem como uma observação acerca das primeiras impressões que tivemos ao analisarmos o livro.

QUADRO 5 - PRIMEIRO VOLUME DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DE MATEMÁTICA - 1ª SÉRIE.

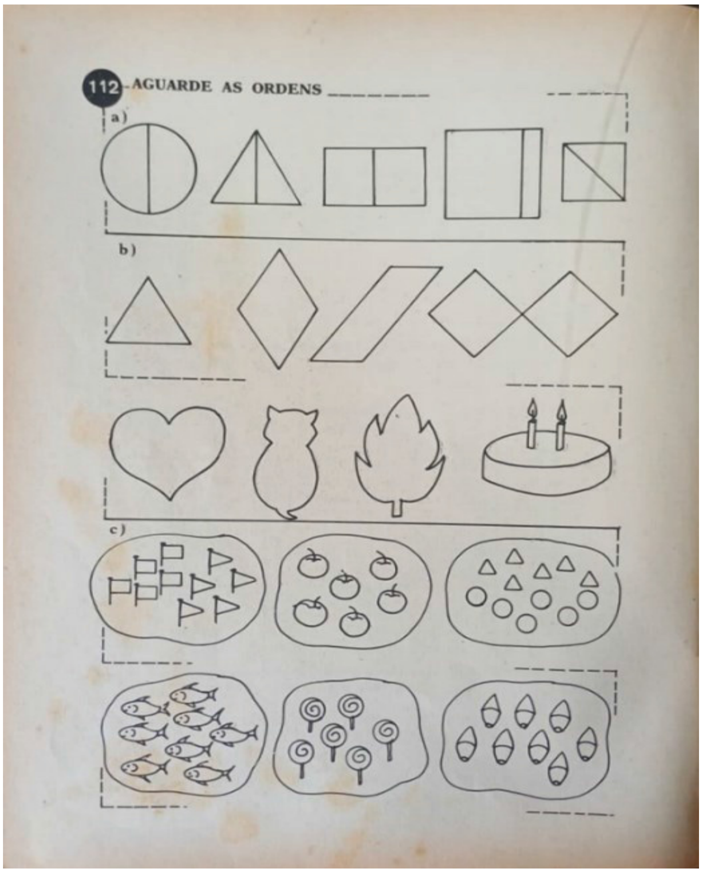
<table>
<tr><th>CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">
</td><td>Quantidade de página</td><td>146</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Editora do Brasil S/A</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>S/D</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>21 cm x 27 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">É um livro que tem a capa e a contracapa coloridas e impressas em sistema offset, e todo o seu interior é impresso em preto e branco.
O livro foi assim materializado para baratear o preço final[78] uma vez que a impressão offset era bem mais cara que a impressão tipográfica (preto e branco).
Neste volume há uma aproximação do livro didático ao universo infantil ao trazer na capa um circo.</td></tr>
</table>

FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuck, Arruda (S/D).

A figura 6 representa o aprimoramento do que foi proposto inicialmente na figura 5.

[78] Isso baseado em depoimentos dados por Gliquéria e Shigueti Suzuki, já neste trabalho abordadas.

FIGURA 6 - METADE DE FIGURAS CONTÍNUAS E ELEMENTOS DISCRETOS



FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda, Humphreys (S/D[79], p. 112)

No Livro do Mestre referente ao livro didático do primeiro ano, as orientações são similares as dos Cadernos, mas ao conceituar a noção de metade, a linguagem muda. Identificamos a linguagem da matemática moderna, por exemplo, no trecho: "Considerar o elemento (objeto) dividido em duas partes congruentes, isto é, do mesmo tamanho e da mesma medida" e "estabelecer a relação entre os subconjuntos equipotentes e o conjunto considerado" (Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda, Humphreys, S/D, p. 59).

No primeiro volume, a noção de metade é apresentada por meio de uma variabilidade de imagens que ocupavam um lugar central para o ensino das noções de metade de um todo contínuo e de um todo discreto. A noção de metade, ora apresentada no Guia do Professor Primário, de 1963, agora é apresentado, respeitando a linguagem matemática moderna.

[79] Muito provavelmente o livro foi publicado em 1973.

5.3 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO SEGUNDO VOLUME DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA

No segundo volume do Manual do Professor Primário do Paraná[80] para a segunda série, cuja segunda edição foi publicada em 1965, no que tange às frações, prevê um estudo objetivo das frações unitárias, $\frac{1}{2}$ até $\frac{1}{9}$ sua representação gráfica e o cálculo de “partes” de uma quantidade. As frações eram orientadas a serem exploradas em associação com as medidas de tempo, capacidade, massa e sistema monetário (Paraná, 1965).

A imagem, portanto, assume a função de contextualização do que é fração. Contextualizar, aqui, é entendido como o meio pelo qual se proporciona ao aluno situações significativas em relação às suas próprias vidas.

Uma recomendação associada ao ensino das frações ordinárias era o uso de material audiovisual variado como “coleções de cortes em forma de quadrados, retângulos, círculos; desenhos de objetos de formas simples e regulares, capazes de ser facilmente divididos em duas, três ou mais partes iguais; frutas, tiras de cartolina, pedaços de sabão, objetos de fácil manuseio, cartazes ilustrativos, que constituirão os recursos para o ensino objetivo, interessante e graduado das frações $\frac{1}{2}$ até $\frac{1}{9}$” (Paraná, 1965, p. 150).

São recorrentes as orientações para a criança dividir frutas, recortar figuras geométricas, repartir grupos de objetos, sempre relacionados com seu dia a dia.

Assim sendo, a imagem usada para contextualizar um conhecimento matemático teve início com o método intuitivo e se estendeu, de maneira ressignificada, durante o MMM.

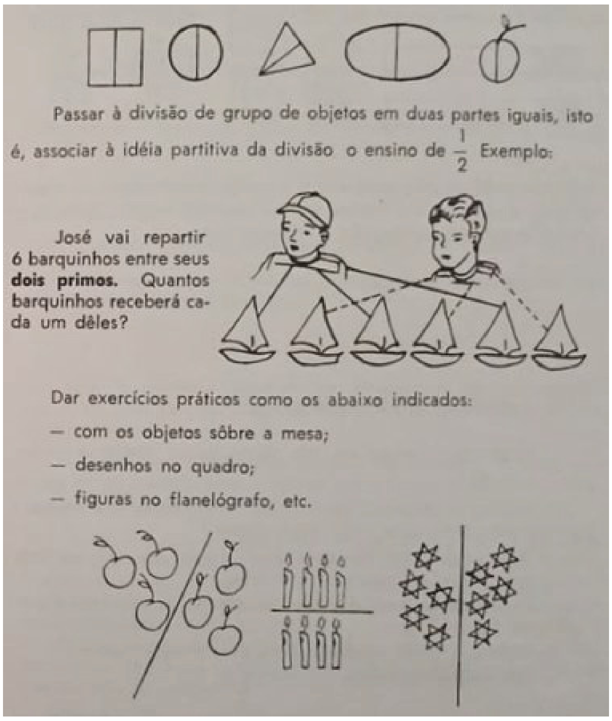
No método intuitivo a imagem se prende à representação do objeto real e isso ainda está muito presente no Manual do Professor Primário do Paraná, só que já podemos perceber algumas imagens que trazem a fração, enquanto parte-todo de elementos contínuos, sem uma relação direta com o cotidiano da criança, o que foi aproveitado pelo MMM.

---

[80] O manual foi elaborado pela mesma equipe, acrescida Glaci Pinto Sampaio.

Na figura 7 trazemos um exemplo das orientações com imagens ilustrativas.

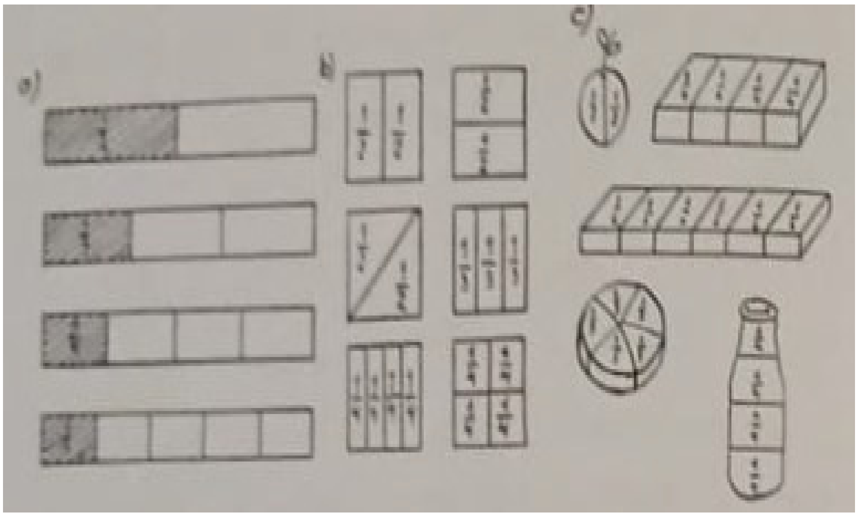
FIGURA 7 – IMAGENS SOBRE DIVISÃO DE GRUPOS DE ÁREAS E GRUPOS DE OBJETOS



FONTE: Paraná (1965, p. 151)

Na sequência, a orientação era passar “aos desenhos interpretativos dessa aprendizagem, utilizando quadros, diagramas, flanelógrafo etc.” (Paraná, 1965, p. 152), conforme figura 8.

FIGURA 8 – IMAGENS DE QUADROS, DIAGRAMAS PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

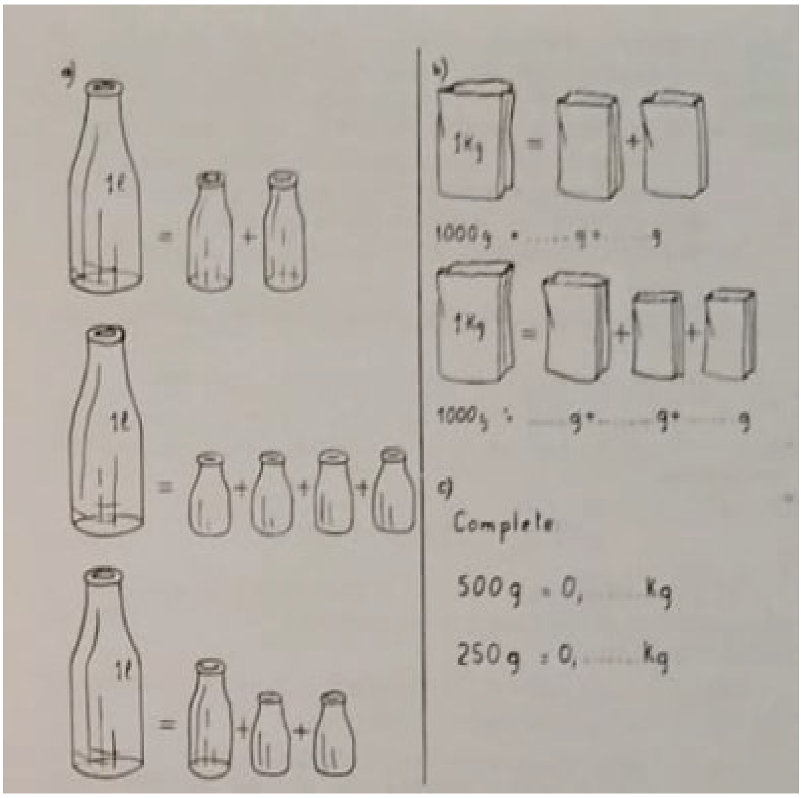


FONTE: Paraná (1965, p. 152)

Por meio dos diagramas, com frações divididas em partes variadas, a orientação era ensinar a comparação de frações unitárias. Com a noção de divisão os alunos seriam apresentados a exercícios variados e sistemáticos de partição de frações unitárias de coleções, como por exemplo, “pinte $\frac{1}{3}$ desses 18 palitos”, “marque $\frac{1}{5}$ dos degraus dessa escada” (Paraná, 1965, p. 153).

O referido manual traz uma imagem (FIGURA 9), associando as frações às medidas de capacidade e massa, mas as orientações eram para trabalhar as frações em todas as unidades de medida. Para o litro temos que “com o litro de leite, medir a capacidade de várias vasilhas (maior ou menor que um litro), meio litro (garrafas de água mineral, vinho, etc.) e um quarto de litro (garrafinha de coalhada, mel, mamadeiras, etc.)” (Paraná, 1965, p. 158), e seguem orientações parecidas para as demais unidades de medida.

FIGURA 9 – IMAGEM 1 LITRO E 1 QUILOGRAMA REPRESENTADOS EM MEIOS E QUARTOS



FONTE: Paraná (1965, p. 159)

O Livro Didático *Ensino Moderno da Matemática* para a segunda série, no que diz respeito às frações, seguindo as recomendações do Manual do Professor

Primário do Paraná, prevê o ensino das frações unitárias de, $\frac{1}{2}$ até $\frac{1}{9}$ seguindo uma mesma sequência de atividades.

No índice do volume 2 da coleção, quadro 6, destacamos essa sequência de frações unitárias acima descrita.

QUADRO 6 - ÍNDICE DO VOLUME 2 DA COLEÇÃO DO NEDEM

Apresentação da 1º subunidade: Conhecendo a Família de Paulo e Sônia; Conjuntos: relação de pertinência e atributos; Conjuntos e Subconjuntos; Relação de igualdade e desigualdade; Propriedade comutativa da adição; Adição com apoio na formação da dezena; Relação entre adição e subtração; Subtração. Problemas; Linha de tempo; Contagem - base cinco; Contagem - base quatro; Contagem - base dez; Propriedade associativa da adição; Relação entre adição e subtração; Adição com reserva; Adição. Tábuas operativas; Problemas; Relação de igualdade. Subtração; Subtração. Problemas; Sistema monetário brasileiro; Problemas; Apresentação da 2ª subunidade: Visita à Exposição de Astronáutica; Produto cartesiano; Robô calculador; Multiplicação ; Relação entre multiplicação e adição; Problemas ; Revisão; Subtração ; Problemas; Subtração com recurso; Problema; Subtração - operação inversa; Problemas - subtração: ideia comparativa; Revisão; Divisão: ideia de repartição; operação inversa; Revisão; Geometria: linha aberta e linha fechada; Linha simples e não simples; Linhas. Revisão; Fronteira e região; Figuras geométricas; Numeração; **Unidade fracionária $\frac{1}{2}$; Metade do número de elementos de conjuntos; Unidade fracionária $\frac{1}{4}$; Um quarto do número de elementos de conjuntos; Unidade fracionária $\frac{1}{3}$; Um terço do número de elementos de conjuntos; Revisão; Unidade fracionária $\frac{1}{5}$; Um quinto do número de elementos de conjuntos; Dobro e triplo;** Revisão; Apresentação da 3ª subunidade: Férias na praia; Números pares e ímpares; Decomposição de números; Uso de parênteses; Numeração: valor posicional dos algarismos; Estudo do milhar; Problemas; Interseção de conjuntos; Produtos até 36; Problemas; Adição; Produtos até 54; Ideia subtrativa da divisão; Estorinhas; Revisão; Relação entre multiplicação e divisão; Multiplicação de dezenas por unidades: 1º caso; Multiplicação de dezenas por unidades: 2º caso; Multiplicação de dezenas por unidades: 3º caso; Produtos até 70; **Unidade fracionária $\frac{1}{6}$;** Adição com reserva na ordem das dezenas; Adição com reserva na ordem das dezenas e centenas; Numeração até 9.000; Multiplicação e divisão como operações inversas; Divisão com resto; Multiplicação na reta numerada; Subtração - minuendo com centenas e subtraendo com dezenas; Problemas e técnica para a operação divisão (processo longo); Divisão: divisor 4 e 5; Divisão: 1º caso; Multiplicação: 4º caso; Divisão: 2º caso; Problemas e divisão na reta numerada; Problemas com divisores 6 e 7; Divisão. Revisão; **Unidade fracionária $\frac{1}{7}$;** Problemas: divisão; Divisão na reta numerada; Produtos até 81; Multiplicação: 5º caso; **Unidade fracionária $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{9}$;** Leitura e escrita de cruzeiros; Problemas focalizando cruzeiros; Multiplicação: 6º caso; Zero na divisão; Divisão: casos particulares do zero; Divisão: 3º caso; Divisão: 4º caso; Divisão. Revisão; Subtração com recurso à centena; Multiplicação por dez; Medidas de tempo; Medidas de massa; Divisão 5º caso; Medida de capacidade; Problemas. Revisão; Divisão: 5º caso; Revisão; Medida de tempo, mês e ano; Problemas. Revisão; Problemas: sistema monetário; Medida de comprimento; Divisão: verificação; Auto-avaliação.

FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1974).

A fração é abordada após o trabalho com geometria, o que evidencia a importância de entender a fração como sendo parte-todo de uma figura geométrica (elemento contínuo). Identificada a *sequência*, destacamos que a criança precisa estar familiarizada com a geometria, ou seja, esse é um domínio, um *significado,* que a criança precisa ter para poder avançar no estudo de fração.

Finalmente a *graduação,* o passo a passo para se ensinar fração, abordamos ao analisar o livro do aluno, bem como os *exercícios e problemas* que as autoras usaram a fim mensurar o que a criança abstraiu do trabalho com fração.

Iniciamos essa análise destacando as características físicas do volume 2 da coleção (QUADRO 7).

QUADRO 7 - SEGUNDO VOLUME DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DE MATEMÁTICA -2ª SÉRIE

<table>
<tr><th rowspan="1">CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">
</td><td>Quantidade de página</td><td>189</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Editora do Brasil S/A</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>1974</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>21 cm x 27 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Assim como o volume 1, também é um livro que tem a capa e a contracapa coloridas e impressas em sistema offset, todo o seu interior é impresso em preto e branco.
Neste volume há uma clara iniciativa de aproximação do universo infantil aos novos tempos onde a Matemática Moderna estava inserida, isso fica evidente na imagem[81] do foguete, do telescópio, do robô e da janela aberta mostrando um céu estrelado.</td></tr>
</table>

FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1974).

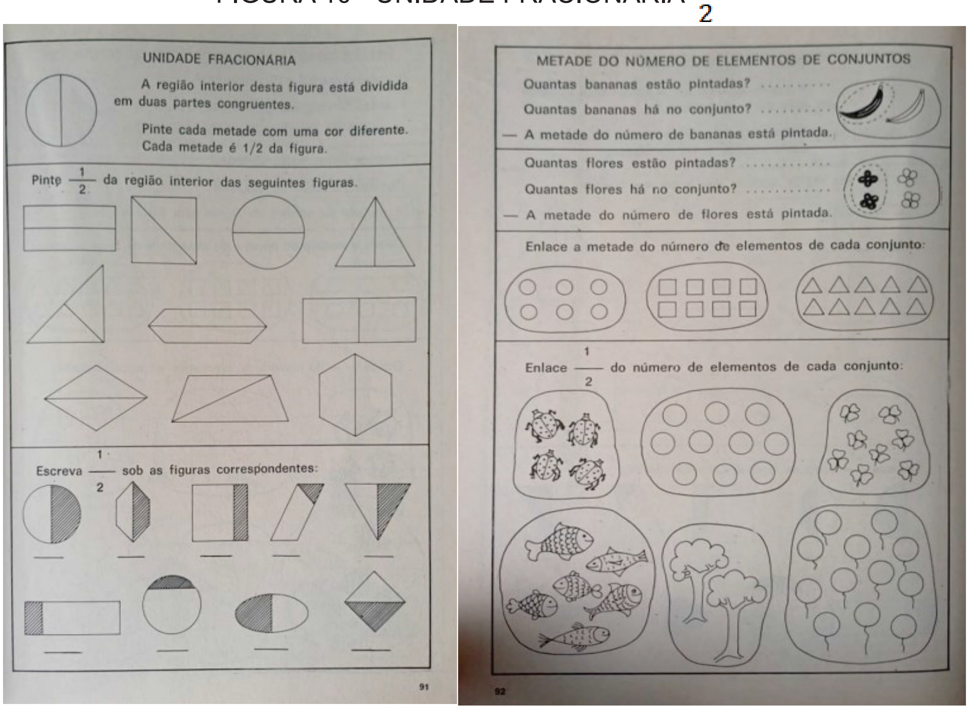
O símbolo da fração é apresentado pela primeira vez ao aluno, retomando o que foi abordado na primeira série e acrescentando mais elementos, seguindo uma *graduação* e uma *sequência* para o ensino de fração.

---

[81] A imagem aqui na capa tem um fundo ideológico, pois remete a uma sociedade do pós-guerra que valoriza sobremaneira os avanços da ciência e da tecnologia.

Na figura 10, elucidamos as atividades correspondentes à fração unitária $\frac{1}{2}$. Primeiramente é solicitado que o aluno pinte a metade de várias figuras geométricas, na sequência para escrever $\frac{1}{2}$ sobre as figuras que estão divididas em duas partes congruentes. Em seguida os alunos resolvem exercícios com a metade de elementos de conjunto, formando dois conjuntos equipotentes (Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda, 1974).

FIGURA 10 - UNIDADE FRACIONÁRIA $\frac{1}{2}$



FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda (1974, p. 91-92).

No volume 2, o trabalho com fração é iniciado, tratando está como sendo parte-todo de um objeto contínuo ou de elementos discretos[82], o que, segundo Van de Walle (2009), é uma boa maneira de se introduzir o trabalho com fração:

> [...] a primeira meta no desenvolvimento de frações deve ser ajudar as crianças a construir a ideia de partes fracionárias do todo – as partes que resultam quando o todo ou unidade é compartilhado em porções de mesmo tamanho ou repartido em partes iguais. As crianças parecem compreender a ideia de repartir uma quantidade em duas ou mais partes a serem compartilhadas igualmente entre amigos. Elas eventualmente estabelecem

[82] No volume 2 do NEDEM, correspondem aos elementos de um conjunto.

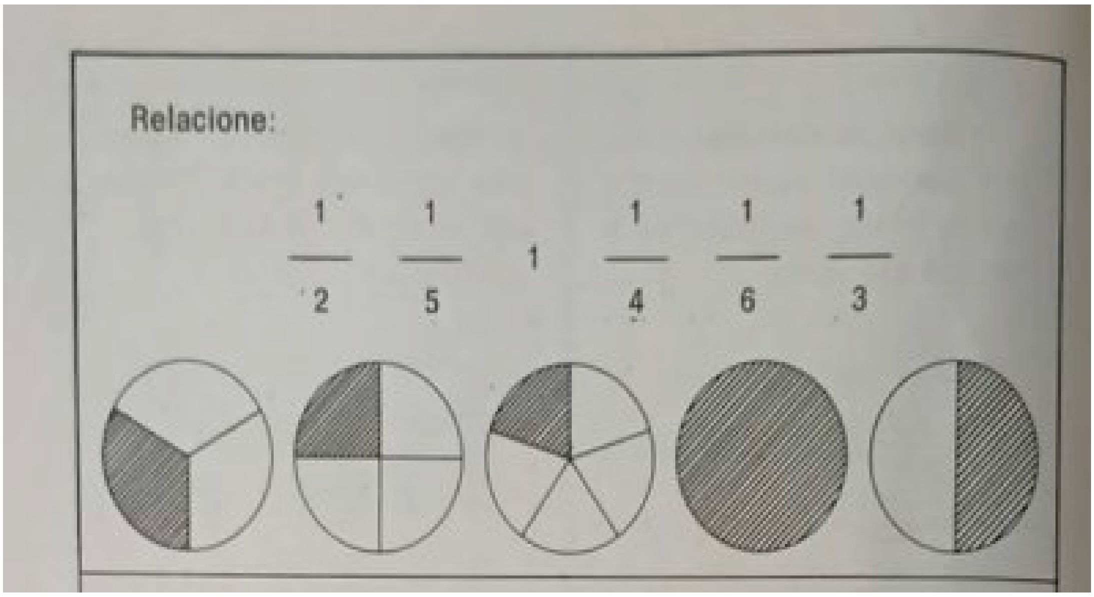
> conexões entre a ideia de repartir em partes iguais e partes fracionárias. As tarefas de compartilhar (repartir igualmente) são, então, bons lugares para começar o desenvolvimento de frações (Van de Walle, 2009, p. 322 – 323).

No Guia do Professor para a segunda série, orienta-se a trabalhar com material diversificado, como por exemplo, barras de chocolate, uma laranja, conduzindo os alunos a determinarem a metade deles. Além de utilizar figuras de cartolina (circulares, triangulares, retangulares, quadrangulares etc.) de diferentes tamanhos para determinar a metade. Atividades orais complementariam o trabalho: “De quantas metades é formada a unidade?”, “Quantas metades preciso para formar duas ou três unidades?” (Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda, 1973b)

Neste movimento introdutório de fração percebemos uma clara referência à psicologia genética de Jean Piaget, em que a aprendizagem será melhorada por experiências ativas ou do tipo “mãos à obra” combinadas com a reflexão consciente, como pudemos ver na figura 10. As autoras se utilizam de muitas imagens, porém, não as apresentam de maneira pronta, pedem que a criança pinte e haja de forma ativa sobre a imagem, apenas depois desta ação de pintar é que as autoras trazem a imagem já pronta para que sirva de apoio visual e se faça a comparação com a que ela pintou.

Seguindo uma *sequência* e uma *graduação*, antes de apresentar as frações unitárias $\frac{1}{7}$ até $\frac{1}{9}$ há uma série de exercícios para relacionar as frações unitárias já estudadas, conforme figura 11.

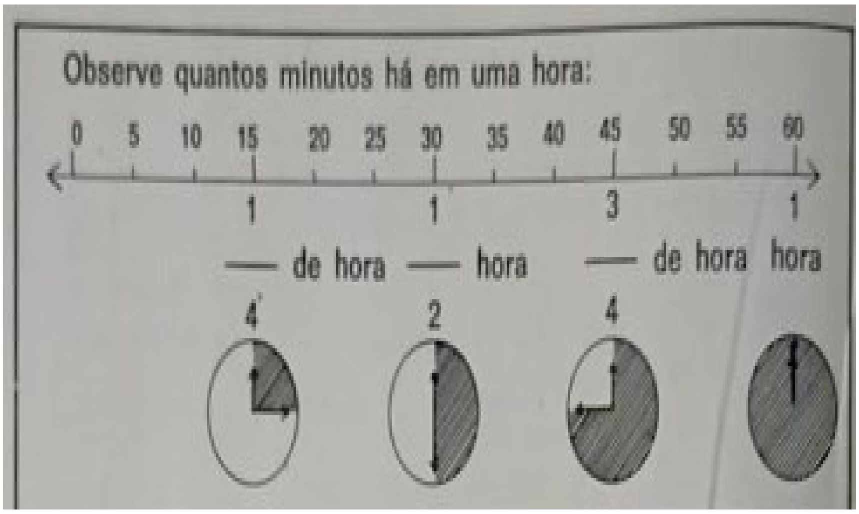
FIGURA 11 - RELACIONAR AS FRAÇÕES UNITÁRIAS E O TODO



FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda (1974, p. 102)

As frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ para que tenham um significado, são associadas às medidas de tempo (FIGURA 12), massa e capacidade.

FIGURA 12 - QUARTOS E MEIOS DE HORA

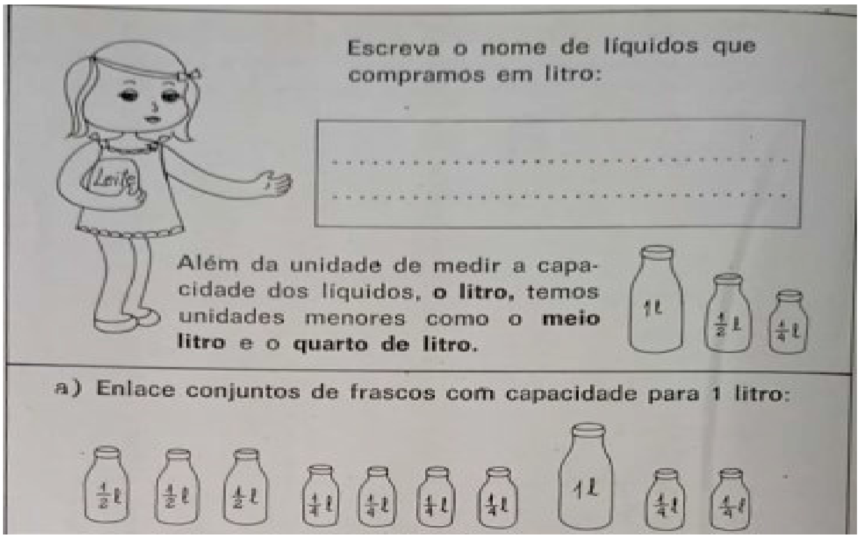


FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda (1974, p. 176)

A sequência e a graduação seguidas pelo livro são muito parecidas com as orientações do Manual do Professor Primário (Paraná, 1965). Em relação à capacidade, ainda, a fim de contextualizar fração, uma primeira atividade (FIGURA

13) apresenta noções de equivalência entre 1 litro, $\frac{1}{2}$ litro e $\frac{1}{4}$ de litro, onde os alunos são instigados a formar um conjunto de frascos cuja quantidade corresponda a 1 livro.

FIGURA 13 - LITRO, MEIO LITRO, UM QUARTO DE LITRO



FONTE: Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda (1974, p. 176).

Na próxima seção avançamos na análise da coleção que aprofunda o estudo de fração nos próximos volumes.

5.4 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO TERCEIRO VOLUME DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA

No livro, volume 3 da coleção, destinado à terceira série, há um aumento considerável das páginas que são dedicadas, de forma direta, ao ensino das frações (Unidade V e VI), conforme podemos observar no sumário do quadro 8. São 66 páginas que discutem a fração, enquanto números fracionários e decimais, sem contar com as relações de fração, enquanto metade, terça parte, inclusive de medidas.

QUADRO 8 - SUMÁRIO DO VOLUME 3 DA COLEÇÃO DO NEDEM

UNIDADE I - **CONJUNTOS -** Noção de conjuntos - representação; subconjuntos; relação de pertinência; operações intersecção e união de conjuntos.
UNIDADE II - **NUMERAÇÃO -** Contagem em bases diferentes de dez; contagem em base 10; sistema de numeração decimal até a 4ª ordem; numeração romana até 100.
UNIDADE III - **OPERAÇÕES -** Operações adição e subtração; multiplicação; propriedades, técnica operatória; multiplicação por 10, 100, 1000; processo da divisão; quociente parcelado e processo longo; relação entre as operações; caso simples de divisão com divisor até 99; média aritmética.
UNIDADE IV - **GEOMETRIA -** Noção de simetria; linhas abertas e fechadas, simples e não simples; representação de pontos em regiões interiores e exteriores de linhas fechadas; noção de reta e segmento de reta - representação; polígonos.
UNIDADE V - **NÚMEROS FRACIONÁRIOS -** Unidade fracionária; fração, representação de números fracionários na reta numerada; relação de igualdade, desigualdade, ordem e equivalência; adição e subtração de frações homogêneas e heterogêneas.
UNIDADE VI - **NÚMEROS DECIMAIS -** Número fracionário decimal e número decimal; relações de igualdade, ordem e equivalência; representação de números decimais na reta numerada.
UNIDADE VII - **SISTEMA DE MEDIDAS -** Medidas de comprimento: múltiplo e submúltiplos mais usados; medidas de massa: múltiplo e submúltiplos mais usados; medidas de capacidade: litro e frações do litro; medidas de tempo.

FONTE: Adaptado de Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975)

A fração, neste volume também, é abordada após o ensino de geometria o que significa que as autoras continuam enfatizando a importância de entendê-la como sendo parte-todo de um elemento contínuo.

Isso é o que analisamos no volume 3 da coleção do NEDEM, além de estarmos atentos, conforme mostra no sumário, de como a imagem é utilizada para, em primeiro lugar, auxiliar na compreensão do que é fração e na transição, se houver, desta para números decimais e sistema de medidas, uma vez que, conforme podemos observar no quadro 8, são conteúdos subsequentes ao trabalho com fração.

No quadro 9 apresentamos a capa do volume 3 da coleção.

QUADRO 9 - TERCEIRO VOLUME[83] DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DE MATEMÁTICA – 3ª SÉRIE.

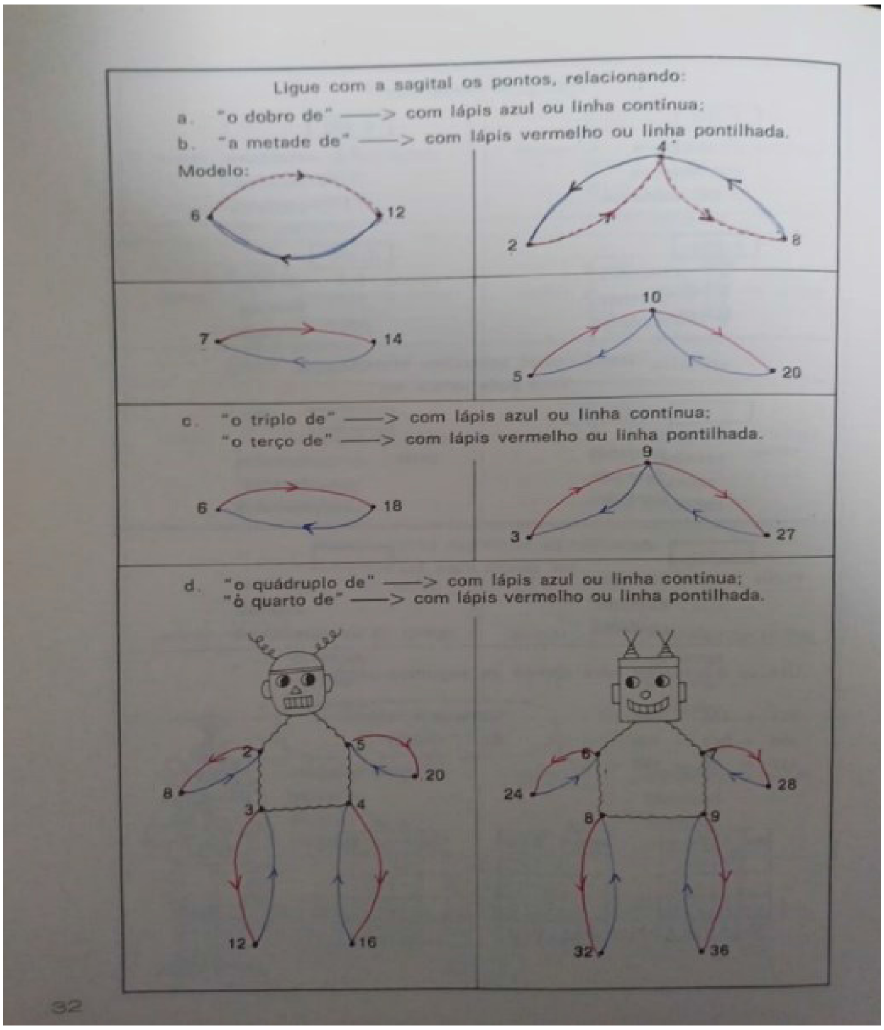
<table>
<tr><th>CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="6">
</td><td>Quantidade de página</td><td>181</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Editora do Brasil S/A</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>1975</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>21 cm x 27 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Apresenta as mesmas características dos anteriores, capa e contracapa coloridas e impressas em sistema offset, e todo o seu interior impresso em preto e branco, isso para baratear o custo final da obra.
Agora a capa se aproxima da teoria de conjuntos que serve como uma das bases da Matemática Moderna, como podemos observar, ela traz elementos do dia a dia das crianças em conjuntos de: frutas, legumes, materiais escolares, móveis, automóveis, brinquedos, figuras geométricas e família.
Na capa está escrito “Gliquéria - com respostas e correções”, o que indica que o livro pertencia a uma das autoras.</td></tr>
</table>

FONTE: Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975).

Logo, na página 32, há uma retomada, utilizando-se de imagens, dos conhecimentos sobre dobro e metade, triplo e terça parte e quádruplo e quarta parte por meio das partes de um Robô (FIGURA 14) unidas por uma representação visual de diagramas sagitais (representação de setas).

[83] Livro pertencente à Profa. Gliquéria, com respostas e anotações da própria autora, não há indicação da data da obra, mas provavelmente é de 1975, ou posterior.

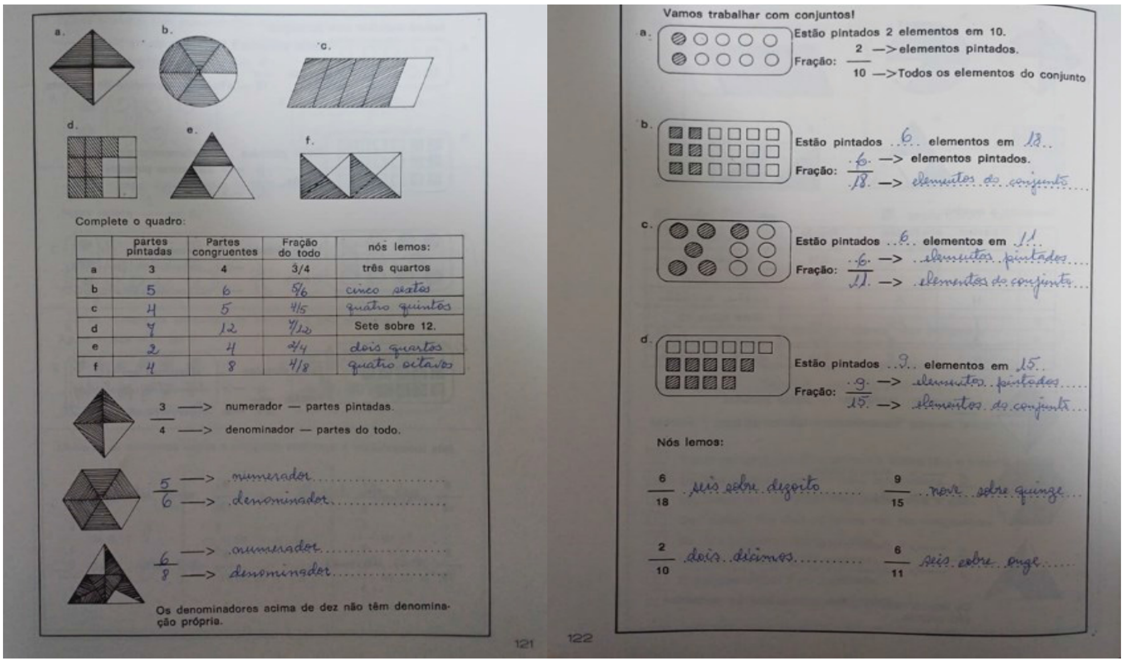
FIGURA 14 - PARTES DE UM ROBÔ



FONTE: Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975, p. 32)

Para o terceiro ano, as frações na representação parte-todo são organizadas em tabelas acrescidas de outras relações com o todo, tanto na representação de áreas quanto de elementos de conjuntos (FIGURA 15).

FIGURA 15 - INTRODUÇÃO DAS FRAÇÕES NO TERCEIRO VOLUME



a. b. c.

d. e. f.

Complete o quadro:

	partes pintadas	Partes congruentes	Fração do todo	nós lemos:
a	3	4	3/4	três quartos
b	5	6	5/6	cinco sextos
c	4	5	4/5	quatro quintos
d	7	12	7/12	Sete sobre 12.
e	2	4	2/4	dois quartos
f	4	8	4/8	quatro oitavos

3 —> numerador — partes pintadas.
4 —> denominador — partes do todo.

5 —> numerador
6 —> denominador

6 —> numerador
8 —> denominador

Os denominadores acima de dez não têm denominação própria.

121

Vamos trabalhar com conjuntos!

a. Estão pintados 2 elementos em 10.
Fração: 2 —> elementos pintados.
10 —> Todos os elementos do conjunto

b. Estão pintados 6 elementos em 18.
Fração: 6 —> elementos pintados.
18 —> elementos do conjunto

c. Estão pintados 6 elementos em 11.
Fração: 6 —> elementos pintados
11 —> elementos do conjunto

d. Estão pintados 9 elementos em 15.
Fração: 9 —> elementos pintados
15 —> elementos do conjunto

Nós lemos:

6/18 seis sobre dezoito
9/15 nove sobre quinze
2/10 dois décimos
6/11 seis sobre onze

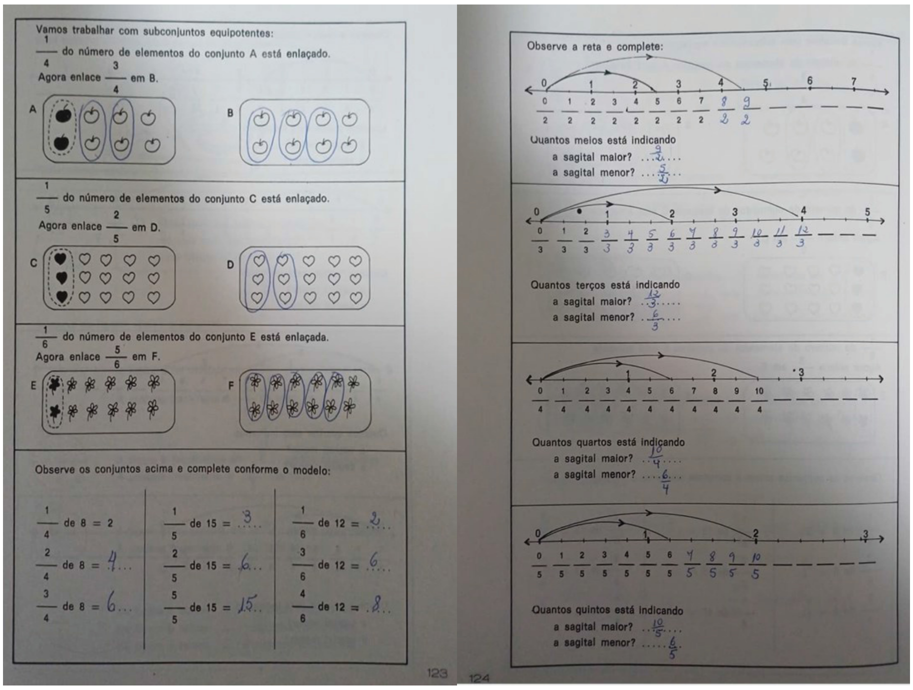
122

FONTE: Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975, p. 121 - 122)

A coleção, no volume 3, avança na exploração do que é fração, em que esse conteúdo é abordado em duas unidades intituladas Números Fracionários e Números Decimais, numa clara referência à Matemática Moderna, a fração como parte-todo, operador e como número na reta numérica (sendo uma das representações dos números racionais). As autoras trabalham com a variabilidade perceptiva e a variabilidade matemática para fixar conteúdos já vistos e para introduzir novos.

Na figura 16 temos frações de subconjuntos equipotentes seguidos de frações na reta numérica equivalentes a números inteiros e posicionadas por meio de sagitais.

FIGURA 16 - FRAÇÕES DE SUBCONJUNTOS EQUIPOTENTES E NA RETA NUMÉRICA

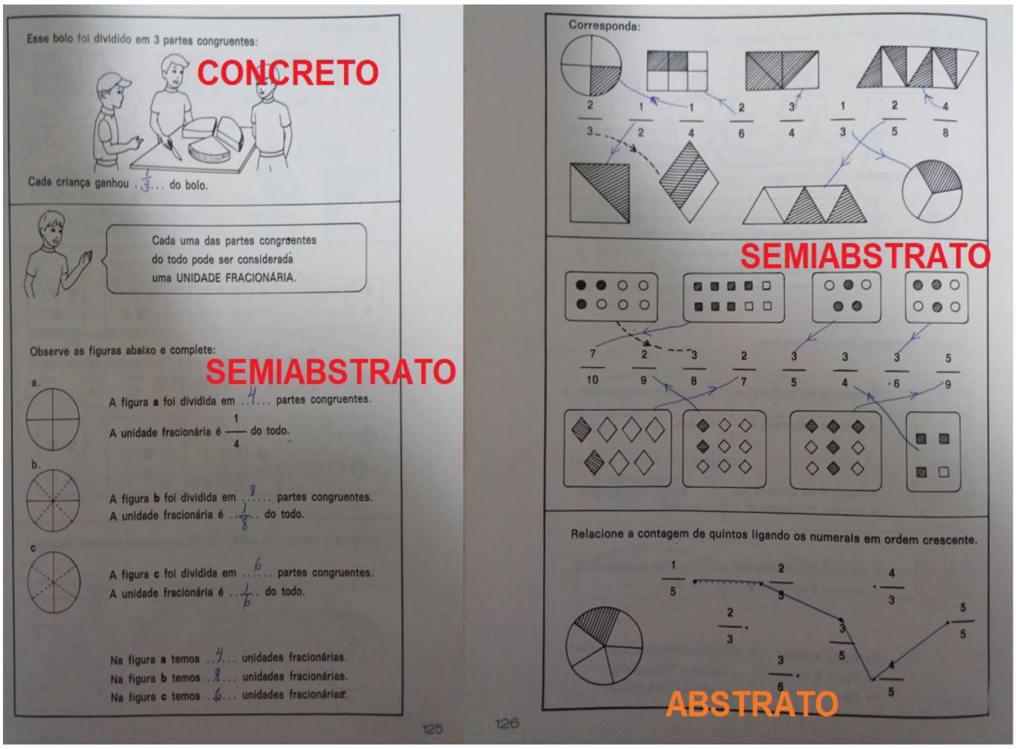


FONTE: Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975, p. 123 - 124)

Na unidade Números Fracionários, aborda-se a unidade fracionária, até para que não haja, segundo palavras das próprias autoras, uma brusca interrupção entre o que se aprendeu no volume 2, com o que será proposto no volume 3; depois fração; representação de números fracionários na reta numerada; relações de igualdade, desigualdade, ordem e equivalência; adição e subtração de frações homogêneas e heterogêneas. Na unidade Números Decimais, elas apresentam o número fracionário decimal e o número decimal; relações de igualdade, desigualdade, ordem e equivalência; representações de números decimais na reta numerada.

Como podemos observar na figura 17, no volume 3, já há um claro movimento do concreto ao abstrato, porém há uma preocupação em trazer várias imagens para que a transição aconteça de maneira suave e contínua, mediada por essas imagens (semiabstratas), o que acaba por corroborar com Piaget quando este afirma que um dos motivos do fracasso da aprendizagem matemática se dá devido à rápida transição do concreto ao abstrato.

FIGURA 17 – MOVIMENTO DO CONCRETO AO ABSTRATO



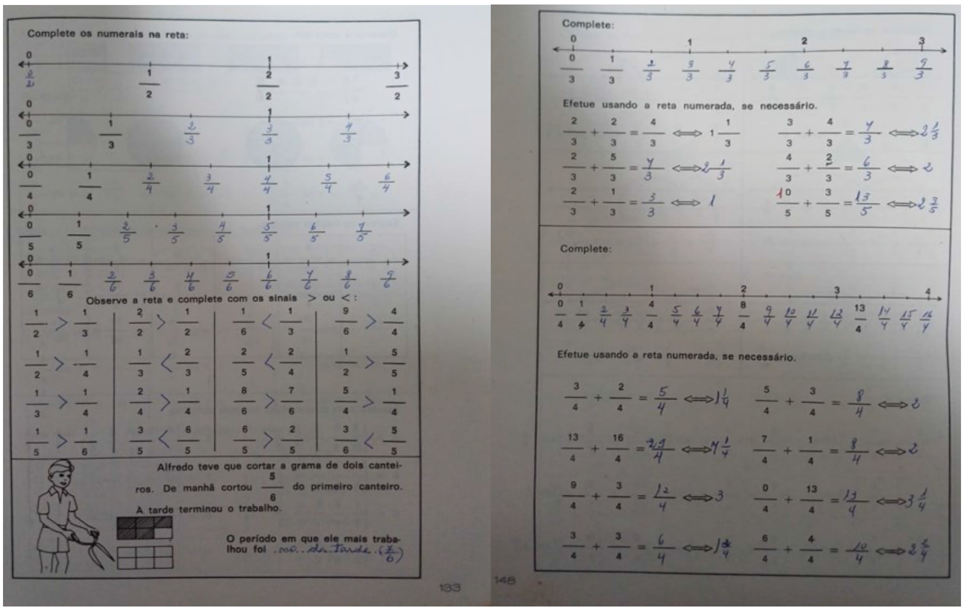
FONTE: Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975, p. 125 - 126).

A visualização das frações na reta numérica é explorada em vários contextos (comparação de frações, operações de soma e subtração de frações com mesmo denominador, número misto, frações decimais e centesimais).

No volume 3, as autoras já iniciam o trabalho pautadas no uso da imagem, assim elas continuam explorando a fração como sendo parte-todo de elementos contínuos, para que não haja interrupções com o que foi ensinado nos volumes anteriores, mas, ainda se valendo de imagens, trazem a reta numerada num claro movimento na direção de conceituar a fração como sendo um número racional.

Na figura 18 temos um exemplo da reta numérica, auxiliando na comparação de frações (esquerda) e na compreensão da soma de frações e número misto (direita).

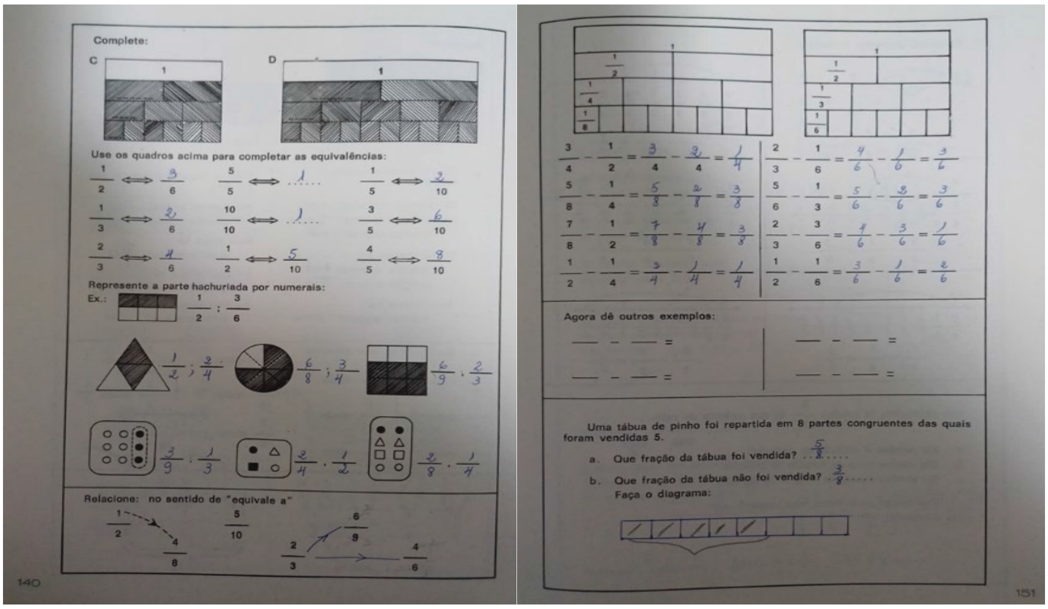
FIGURA 18 - RETA NUMÉRICA, COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES E NÚMERO MISTO



FONTE: Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975, p. 133;148)

Outro suporte visual bastante utilizado foi o quadro de equivalência, inicialmente utilizado para a aprendizagem das frações equivalentes (esquerda) e na sequência a operação de adição de frações com denominadores diferentes (direita), conforme figura 19.

FIGURA 19 - QUADRO DE EQUIVALÊNCIA



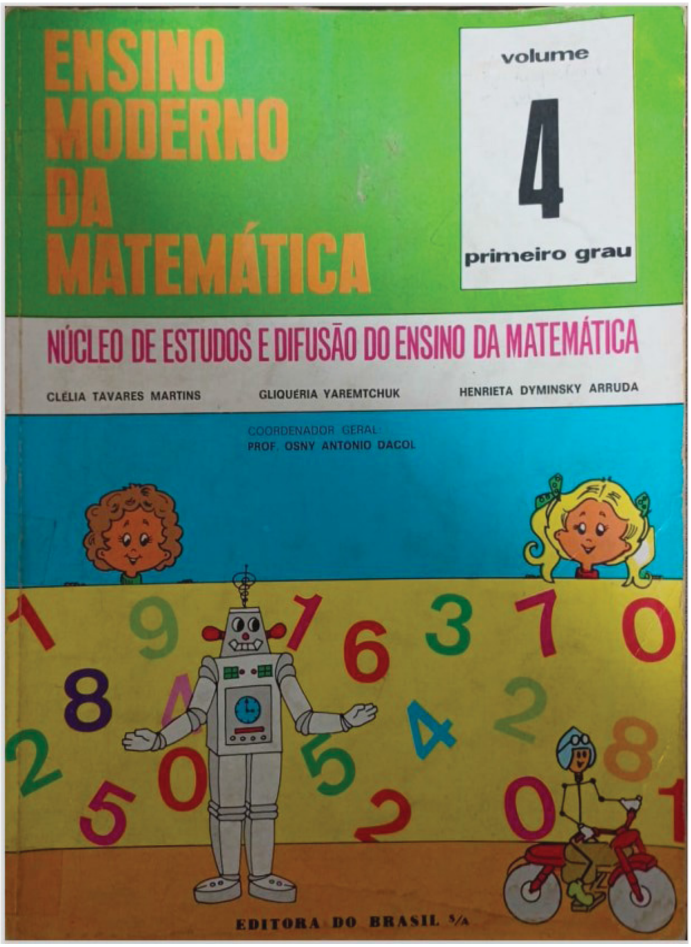
FONTE: Holzman, Martins, Yaremtchuck, Arruda (1975, p. 140;151)

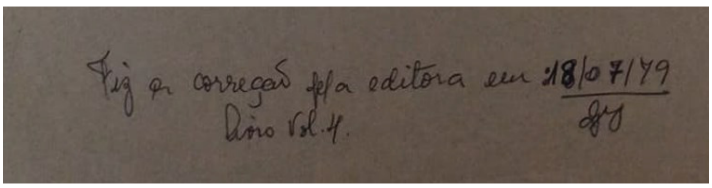
Após situar toda a coleção em seu tempo, iniciamos a análise do volume 4.

5.5 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO QUARTO VOLUME DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA

No quadro 10 temos a capa e algumas características físicas da obra.

QUADRO 10 – QUARTO VOLUME DA COLEÇÃO ENSINO MODERNO DE MATEMÁTICA – 4ª SÉRIE

<table>
<tr><th>CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">


</td><td>Quantidade de página</td><td>177</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Editora do Brasil S/A</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>1979</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>21 cm x 27 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Como todos os outros da coleção, apenas a capa e a contra capa são coloridas e impressas em sistema offset, todo o seu interior é impresso em preto e branco.
Temos frisado neste trabalho que esta é uma clara intervenção da editora na obra uma vez que visa baratear custos.
Mais uma vez aproxima o universo infantil da Matemática Moderna[84] ao trazer a figura do robô, porém no volume 4 é mais marcante a presença de símbolos matemáticos (um muro repleto de algarismos).
Na contra capa há a seguinte observação manuscrita “Fiz a correção pela editora em 18/07/79” com a rubrica, provavelmente de Henriqueta Arruda.</td></tr>
</table>

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979)

---

[84] Essa aproximação é feita através de imagens, o que evidencia este “modo de olhar” das autoras do NEDEM.

Já na capa do volume 4, observamos um elemento que remete ao ideário do Movimento da Matemática Moderna, como podemos ver no quadro 10, onde temos a gravura de um robô junto a elementos infantis e números, para simbolizar o desenvolvimento tecnológico da sociedade daquela época e a Matemática como base para a tão almejada sociedade moderna do pós-guerra.

Para além da gravura do robô, o sumário da obra, quadro 11, enuncia que a Matemática Moderna se faz presente, e esta presença é marcante no estudo dos conjuntos, conteúdo este trabalhado de maneira direta na primeira unidade e depois retomado na unidade 4, ao qual as autoras chamam de relação, sem contar, é claro, com o detalhamento em cada uma das unidades que abordam o trabalho com fração.

QUADRO 11 – SUMÁRIO DO VOLUME 4

UNIDADE I: CONJUNTOS - Noção de conjuntos-representação; subconjunto; conjunto Universo; relação de pertinência e inclusão; operações união e intersecção; conjunção e negação de atributos; conjuntos definidos por enumeração de extensão.
UNIDADE II:NUMERAÇÃO - Contagem em bases diferentes de dez e sistema de numeração decimal até 6ª ordem dos números; numeração romana.
UNIDADE III:OPERAÇÕES - Adição – propriedades estruturais; subtração; multiplicação – propriedades estruturais; multiplicação de dezenas por centenas; divisão com divisor expresso por numeral de dois algarismos.
UNIDADE IV:RELAÇÕES - Representação sagital e cartesiana; propriedade das relações binárias; produto cartesiano.
UNIDADE V:TEORIA DO NÚMERO -Relações “divisor de” e “múltiplo de”; critérios de divisibilidade por 2, 3, 5, 9 e 10; números primos e compostos; fatores e fatores primos.
UNIDADE VI:GEOMETRIA - Noção de simetria; noção de reta e semirreta; representação; retas concorrentes e paralelas; noção de plano; ângulos reto, agudo e obtuso; polígonos: paralelogramo, quadrado, losango e retângulo; sólidos: paralelepípedo, cubo, cilindro e esfera.
UNIDADE VII [85]:NÚMEROS FRACIONÁRIOS - Fração; relações de igualdade, desigualdade, ordem e equivalência; adição e subtração de frações homogêneas e heterogêneas; classes de equivalência de números fracionários.
UNIDADE VIII [86]:NÚMEROS DECIMAIS - Representação, relações de igualdade, desigualdade, ordem e equivalência de números decimais; adição e subtração; relação entre adição e multiplicação de números decimais; divisão de um número decimal por um número natural.
UNIDADE IX: SISTEMA DE MEDIDAS - Medidas de comprimento, massa e capacidade: múltiplos e submúltiplos; relações de igualdade, desigualdade, ordem e equivalência, entre medidas; noção de medida de superfície e volume; medidas de tempo.

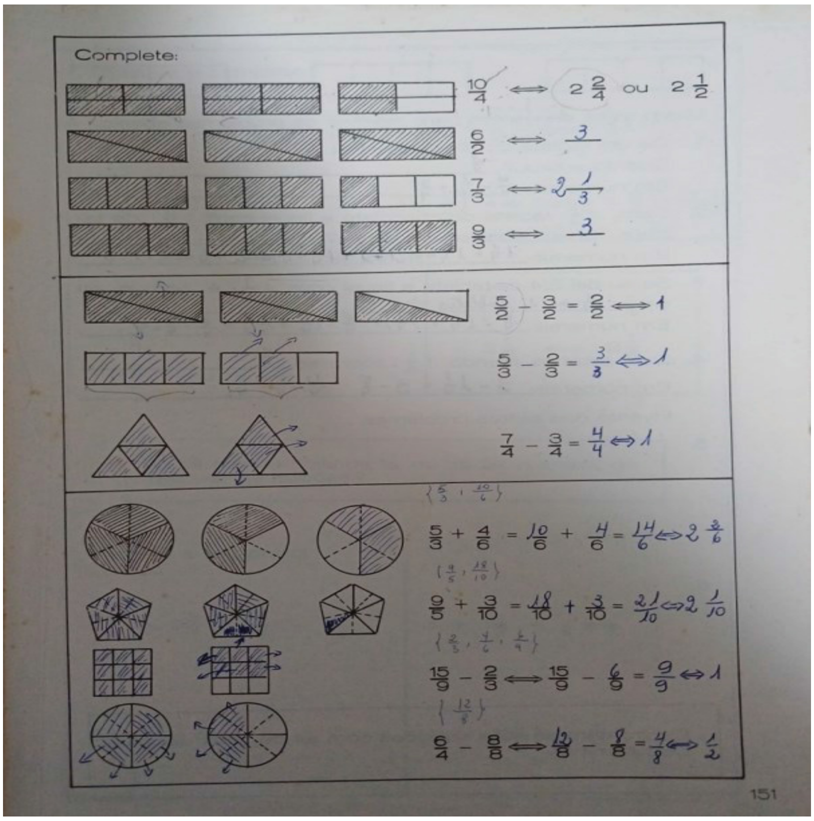
FONTE: Adaptado de Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979)

São 59 páginas destinadas à discussão da fração, enquanto número fracionário e número decimal, sem contar com a relação da fração como sendo a metade, terça, quarta parte, inclusive permeando o estudo dos sistemas de medida.

[85] Pelo índice da obra, a unidade VII começa na página 133 e termina na página 155.
[86] Pelo índice da obra, a unidade VIII começa na página 157 e termina na página 192.

A figura 20 mostra como o livro se apresenta em seu interior, todo impresso em preto e branco, porém, com uma preocupação em trazer a imagem em posição de destaque, quando desejado pelas autoras, para que se siga, conforme neste texto já abordado, a marcha do concreto ao abstrato, passando pelo semiconcreto[87] (recorte, fichas) e semiabstrato (imagem), que cumpre a importante função, dentro do processo de aprendizagem da matemática, de fazer a ponte entre o concreto e o abstrato.

FIGURA 20 – IMAGENS EM PRETO E BRANCO PARA REPRESENTAR FRAÇÃO



Fonte: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 151).

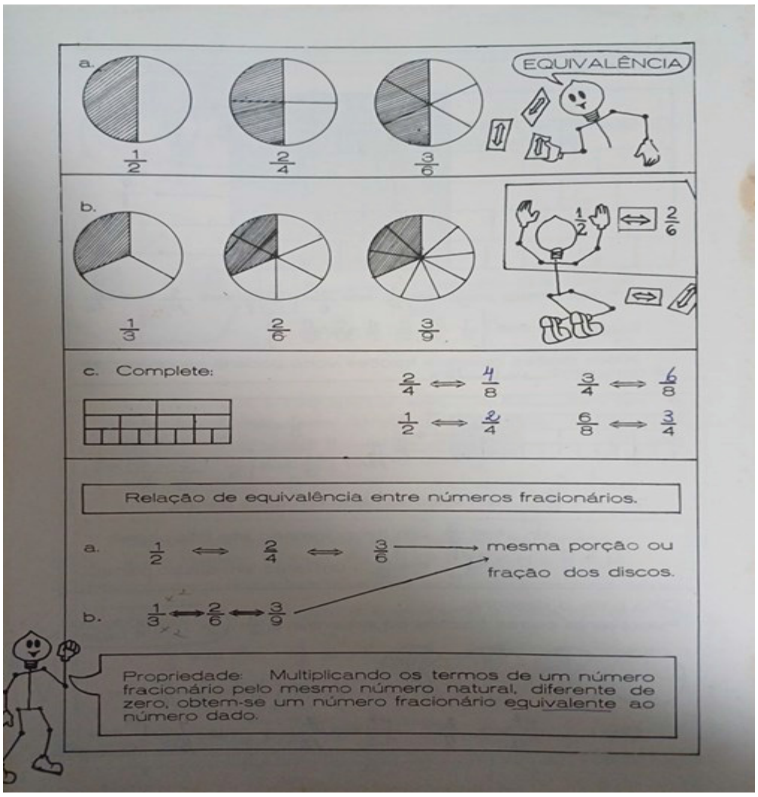
Ao avançarmos na análise da coleção e explorando a abordagem de fração, ainda no início do volume 4, fica claro que o *significado*, a ideia inicial que o aluno precisa ter para aprender o que é fração, é que um todo, seja ele qual for, pode ser dividido em partes iguais.

---

[87] No manual do professor do volume 4, as autoras, na página 50, orientam para que a atividade do aluno (páginas 133 e 134), seja realizada usando recorte, dobraduras e pintura de figuras em cartolina (atividades semiconcretas) numa forte referência ao cuidado que é necessário na transição do concreto ao abstrato. Essas orientações são repetidas muitas vezes para outras atividades, envolvendo o conceito de fração (Martins, Yaremtchuck, Arruda, S/D).

No volume quatro, o tema que permeia a obra é o universo tecnológico, universo esse representado por um robô (FIGURA 21) e evidencia a preocupação em tornar o livro didático mais próximo ao universo infantil e, em consequência, despertar o interesse da criança para a matemática.

FIGURA 21 – ROBÔ COMO ELEMENTO DIRIGIDO ÀS CRIANÇAS



FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 144).

Ainda nessa vertente de aproximar o livro didático ao universo infantil, há uma mascote cuja cabeça é uma lâmpada que abre diálogos com as crianças sobre os conteúdos que estão sendo trabalhados.

Aqui, a imagem cumpre três importantes funções, são elas, aborda diretamente uma das representações de fração, na figura, fração enquanto parte-todo, torna o livro didático mais atrativo ao público infantil ao trazer uma mascote que dialoga com a criança, além de sedimentar a ideologia presente neste período de desenvolvimento tecnológico de ruptura com a matemática voltada exclusivamente para o dia a dia das crianças.

Na figura 22 apresentamos uma montagem com essa mascote, com o cientista e com uma criança estudando, todos elementos retirados do volume 4 da coleção e tem a imagem com a importante função de aproximação da criança com o conteúdo e com os preceitos do MMM.

FIGURA 22[88] – MASCOTE QUE DIALOGA COM AS CRIANÇAS

FONTE: Adaptado de Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979)

As figuras 21 e 22, comprovam que as autoras tinham uma preocupação em utilizar a imagem para aproximar a obra ao público para o qual era escrita, o volume 4, no caso, para crianças de 9 e 10 anos. Destacamos aqui, neste trabalho, que essa aproximação não era só do conteúdo fração, era também de aproximação do ideário da Matemática Moderna do pós-guerra, uma Matemática que contribuía para os avanços da ciência e da tecnologia.

Também enfatizamos que as imagens permeiam todo o volume 4, assim como toda a coleção do NEDEM, desta forma, além contribuir para o trabalho com fração de maneira direta, também auxiliam no *significado,* ao apoiar o professor quanto ao ensino do que o aluno precisa saber para a posterior aprendizagem da fração.

As primeiras imagens para representar uma fração aparecem na página 133, onde começa a Unidade VII: Números Fracionários.

Os excertos representados no quadro 12, foram retirados do livro do mestre, do volume 4. Eles orientam o professor quanto à *graduação* que se deve seguir ao

---

[88] Montagem feita com as figuras da mascote que aparecem, no vol. 4, ao longo do estudo de fração.

trabalhar fração, culminando em *exercícios e problemas* que avaliam a aprendizagem das crianças e articulam *sequência, significado e graduação.*

QUADRO 12 - ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR - LIVRO DO MESTRE - VOLUME 4

UNIDADE VII: Números Fracionários		
Página[89]	**Objetivo da atividade**	**Trabalha a representação de fração...**
133 e 134 (Fração)	São atividades de revisão que servem de pré-requisitos ao avanço no trabalho com fração. Traz a fração enquanto parte-todo contínuo ou discreto, representação essa, que a criança deveria ter aprendido nos volumes anteriores da coleção.	… de forma semiconcreta, em que as autoras solicitam que se faça o uso de recortes, dobraduras, tampinhas, fichas… O trabalho no semiconcreto é permeado por imagens (semiabstratas) sem nenhuma tentativa de abstração.
135 e 136 (Fração)	Já como conteúdo do 4º volume avança para a exploração da fração enquanto parte-todo de um conjunto de elementos discretos e solicita especial atenção às ilustrações (imagens) contidas nessas páginas, num claro movimento no sentido da abstração do que é fração.	… de maneira semiabstrata solicitando para que o aluno realize as atividades, usando as ilustrações contidas no livro.
137 (Relação de equivalência entre número fracionário e número natural)	Essa atividade serve como avaliação dos objetivos propostos nas páginas 133 a 136 e, como avaliação, solicita que a criança realize as atividades, se possível, sem apoio de qualquer material.	… de forma abstrata instigando a criança a fazer a atividade sem o apoio de qualquer material, evidenciando que a aprendizagem só ocorre de maneira efetiva quando a criança abstrai o conteúdo.

FONTE: Nossa autoria baseado em Martins, Yaremtchuck, Arruda (S/D, p. 133 a 137)

Esse movimento volta a se repetir nas páginas subsequentes.

Em suma, a fração é abordada no volume 4, após o estudo de geometria, o que deixa claro que a criança, antes de aprofundar a compreensão da fração precisa entender o *significado* de metade, dobro, terça parte… para depois, mediante a *graduação,* o passo a passo destacado no quadro 12, avançar nos vários significados de fração. Após essa sequência de atividades, finaliza-se com *exercícios e problemas* que objetivam mensurar o que a criança aprendeu (abstraiu) após trabalhar frações em um dado conjunto de atividades.

---

[89] A paginação se refere ao livro do aluno.

O quadro 13, traz todas as orientações contidas no Livro do Mestre do volume 4 e é possível perceber que o movimento sempre se repete em ciclos, do concreto ao abstrato, passando pelo semiconcreto e semiabstrato.

QUADRO 13 – ORIENTAÇÕES CONTIDAS NO LIVRO DO MESTRE

UNIDADE VII: NÚMEROS FRACIONÁRIOS
Como pré-requisitos para esta unidade aluno deverá ter as noções de: Parte congruente de uma figura; unidade fracionária; fração; relação de equivalência entre frações; representação de número fracionário;(p.133-134[90]) **Objetivos:** Revisar o conceito de fração unitária e do número de elementos de um conjunto. Nomear os termos de uma fração. Reconhecer a função dos termos da fração. **Atividades:** Usando recorte, dobradura e pintura de figuras em cartolina (ver sugestões nas páginas do Livro do Aluno) a fim de revisar o conceito de fração e as funções dos termos da fração. Com conjuntos de figuras em cartolina ou outros materiais como fichas, tampinhas, etc. propor situações para que o aluno possa determinar frações do número de elementos de um conjunto. **Avaliação dos Objetivos:** p. 135 – 136
Objetivo: Formar subconjuntos equipotentes num dado conjunto, representando-os por numerais fracionários. **Atividades:** Usando as ilustrações das páginas, conduzir o aluno a completar a formação de subconjuntos equipotentes representando-os por numerais fracionários. **Obs:** Chamar a atenção para o conjunto F, página 121, onde não há formação de terços: 0/3 indica que nenhum terço foi tomado. **Avaliação dos Objetivos:** p. 137
Objetivo: Realizar a contagem de unidades fracionárias. Reconhecer a relação de equivalência entre número fracionário e número natural. **Atividades:** Realizar as apresentadas nas páginas do Livro do Aluno **Avaliação dos Objetivos:** p. 138
Objetivo: Representar os números fracionários na reta numerada **Atividades:** Realizar as sugeridas nas páginas do Livro do Aluno. **Avaliação dos Objetivos:** p. 139
Objetivo: Estabelecer a relação de desigualdade entre números fracionários. **Atividades:** Realizar as sugeridas nas páginas do Livro do Aluno. **Avaliação dos Objetivos:** p. 140-141
Objetivo: Estabelecer a relação de ordem crescente e decrescente entre números fracionários. **Atividades:** Usando o “Quadro de Equivalência”, o aluno reconhecerá quando uma fração é maior ou menor que a outra, colocando as tiras que compõem o quadro (frações) em ordem crescente e decrescente. **Avaliação dos Objetivos:** p. 142
Objetivo: Reconhecer unidades fracionárias. **Atividades:** Sempre com apoio em materiais, tais como: laranjas, maçãs, figuras geométricas de diferentes tamanhos e formas, possibilitar aos alunos o reconhecimento do conjunto formado por unidades simples (laranjas e maçãs, por exemplo) e de conjuntos formados por unidades fracionárias (cortando as laranjas e as maçãs em meios, quartos e oitavos) a fim de que o conceito de unidade fracionária fique formado. A contagem das unidades fracionárias deve ser realizada a fim de que os alunos possam melhor perceber a unidade de contagem adotada ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$).

[90] As páginas referem-se ao livro do aluno do volume 4.

Estabelecer relações de equivalência entre números fracionários e número natural.
Atividades:
Usando as figuras geométricas divididas em meios, quartos, oitavos, *etc*. explorar a relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural representando-a por símbolos.
Por ex.: $\frac{6}{3} \Leftrightarrow 2$.

Avaliação dos Objetivos: p. 143-144

Objetivo: Determinar a classe de equivalência de números fracionários.
Com o auxílio do "Quadro de Equivalência", o aluno poderá determinar a classe de equivalência de um número fracionário qualquer.
No exemplo: a classe de equivalência do $\frac{1}{2}$ é:

$\frac{1}{2} \Leftrightarrow \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12} \ldots\}$

Obtemos assim um conjunto definido por extensão.
Só depois que o aluno tiver concluído a formação de classes de equivalência com uso de material é que o professor o orientará a obtê-la pela multiplicação de ambos os termos da fração por um mesmo número natural[91].

Por ex: $\frac{1}{3} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{<=>}} \frac{2}{6}$ $\frac{1}{3} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{<=>}} \frac{3}{6}$.

Avaliação dos Objetivos: p. 145

Objetivo: Estabelecer a relação de equivalência entre um número fracionário e um número misto.
Atividades:
Com uso de materiais concretos formar conjuntos de laranjas, por exemplo, divididas em meios.
Contar as unidades fracionárias:
* sete meias maçãs = 3 maçãs inteiras e $\frac{1}{2}$ maçã.

* cinco meias maçãs = 2 maçãs inteiras e $\frac{1}{2}$ maçã.

$\frac{7}{2} \Leftrightarrow 3\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\frac{1}{2}$.

Avaliação dos Objetivos: p. 146-147

Objetivo: Comparar frações pela classe de equivalência.
Atividades: Para comparar duas frações heterogêneas forma-se a classe de equivalência de cada uma e procura-se aquelas frações que têm os denominadores iguais para poder comparar.
Por ex.:
$\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$
$\frac{2}{3} \Leftrightarrow \{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9} \ldots\}$
$\frac{5}{6} \Leftrightarrow \{\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18} \ldots\}$
$\frac{4}{6} < \frac{5}{6}$, isto é $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$.

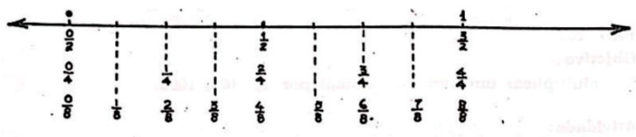
Avaliação dos Objetivos: p. 148-153

---

[91] As autoras trazem algumas informações acerca de uma *matemática a ensinar*, trazem algumas informações teóricas necessárias ao professor que ensina matemática (sendo ele matemático, ou não).

Objetivo: Adicionar e subtrair frações heterogêneas com apoio nas classes de equivalência.
Atividades: Apoiando-se nas ilustrações sugeridas nas páginas do Livro do Aluno, poderá descobrir as frações equivalentes, podendo então operar transformando as frações heterogêneas em homogêneas. Assim vai sentir que adicionar ou subtrair frações é o mesmo que operar com números naturais, apenas mudam os numerais que representam as quantidades. Na resolução de problemas, deve o professor orientar o aluno a compor os diagramas, pois estes lhe darão maior apoio para encontrar a solução.
Orientar o aluno para que possa determinar, com maior rapidez, a fração equivalente entre denominadores diferentes, porém, relacionados. Por ex: em $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$, verificando que os sextos estão contidos nos terços.
Avaliação dos Objetivos: p. 154

Objetivo: Reconhecer que cada ponto da reta representa um conjunto de frações equivalentes, isto é, um NÚMERO RACIONAL.
Atividades: Com o auxílio de reta numerada representar o conjunto de frações cujas unidades fracionárias sejam por exemplo:
$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc, ou $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, etc. para focalizar um ponto na reta verificando as frações que lhes são correspondentes:



Cada conjunto de frações equivalentes representa um NÚMERO RACIONAL.
Avaliação dos Objetivos: p. 155 -156

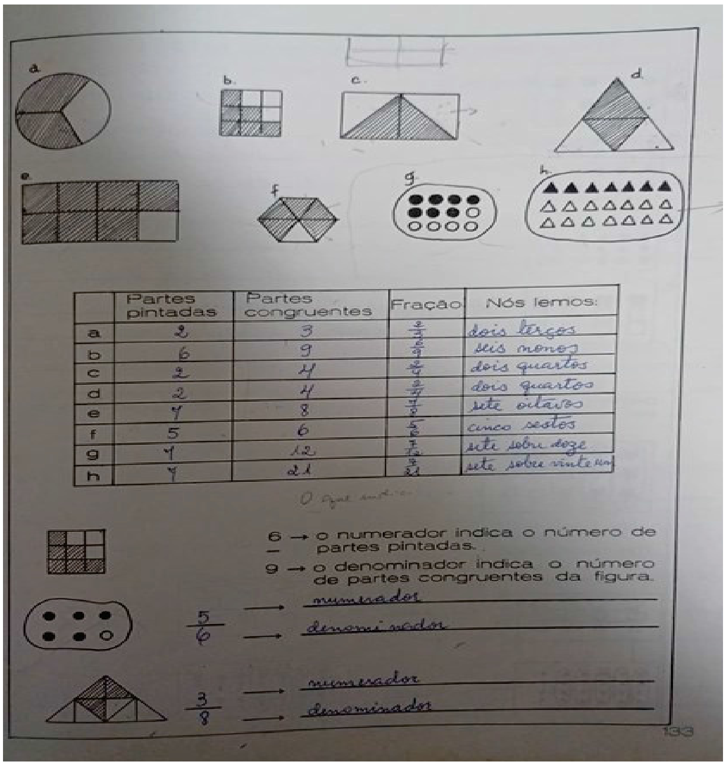
FONTE: Martins; Yaremtchuck,; Arruda (S/D, p. 50 a 54).

Vejamos com detalhes a *graduação*, ao longo do Livro do Aluno.

No volume 4, retoma-se o trabalho com fração, utilizando fração como sendo a representação parte-todo (FIGURA 23), além das figuras geométricas variadas e com diferentes divisões do todo. Temos diagramas com elementos discretos e um quadro para que a criança preencha com valores de numerador (partes pintadas) e denominador (partes congruentes[92]).

[92] As autoras optaram por usar o termo congruentes ao invés de mesma medida, em função da linguagem da Matemática Moderna, conforme elas observam no livro do mestre.

FIGURA 23 – DIFERENTES DIVISÕES DO TODO



	Partes pintadas	Partes congruentes	Fração	Nós lemos:
a	2	3	$\frac{2}{3}$	dois terços
b	6	9	$\frac{6}{9}$	seis nonos
c	2	4	$\frac{2}{4}$	dois quartos
d	2	4	$\frac{2}{4}$	dois quartos
e	7	8	$\frac{7}{8}$	sete oitavos
f	5	6	$\frac{5}{6}$	cinco sestos
g	7	12	$\frac{7}{12}$	sete sobre doze
h	7	21	$\frac{7}{21}$	sete sobre vinte um

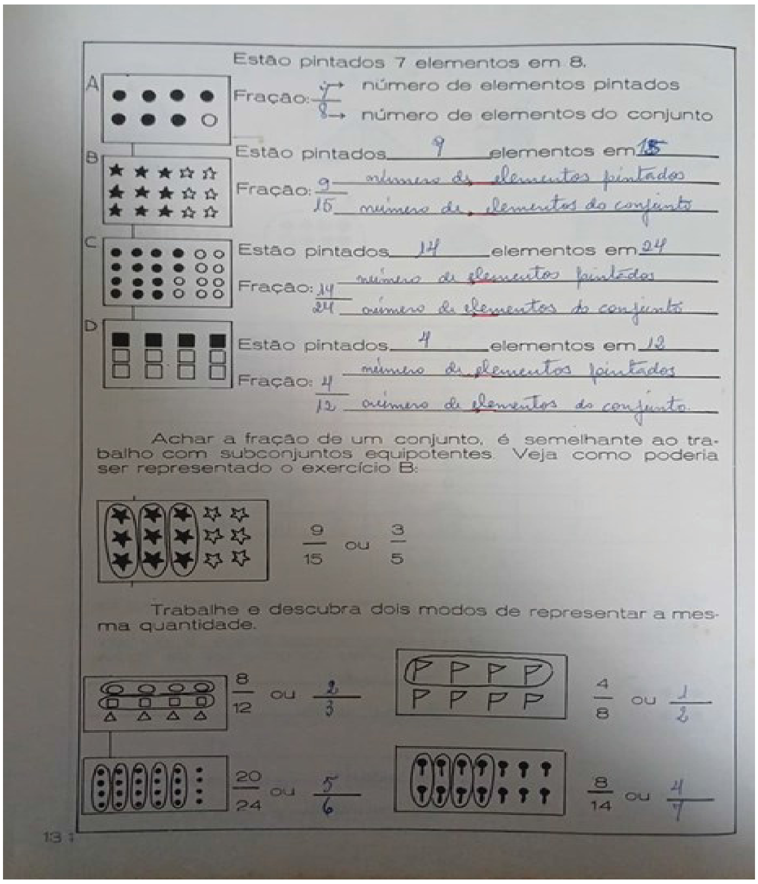
FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 133).

Também é possível encontrar vários exercícios que trazem o conceito parte-todo com elementos discretos[93], o que evidencia a marca do MMM com a relação de conjuntos numéricos (Burigo, 1989, p. 130) e a forte presença de diagramas (Valente, 2008b p. 53) para se ensinar Matemática, aqui, neste trabalho, para se ensinar fração.

Na figura 24, as autoras apresentam a fração de um conjunto, de modo que “achar a fração de um conjunto, é semelhante ao trabalho com subconjuntos equipotentes” (Martins, Yaremtchuck, Arruda, 1979, p. 134). Sem as imagens ficaria muito abstrato mostrar que as estrelinhas no diagrama poderiam ser representadas por $\frac{9}{15}$, quando pensadas por elemento, ou $\frac{3}{5}$, se agrupadas de três em três. Seguem com exercícios para se representar a mesma quantidade e a ênfase ao uso de imagens para facilitar a abstração do conceito.

[93] Nas primeiras atividades de fração do volume 4, há um número mais expressivo desses diagramas do que comparado as representações com figuras geométricas.

FIGURA 24 – FRAÇÃO DE UM CONJUNTO


Estão pintados 7 elementos em 8.

A Fração: 7/8 → número de elementos pintados → número de elementos do conjunto

B Estão pintados 9 elementos em 15

Fração: 9/15 número de elementos pintados / número de elementos do conjunto

C Estão pintados 14 elementos em 24

Fração: 14/24 número de elementos pintados / número de elementos do conjunto

D Estão pintados 4 elementos em 12

Fração: 4/12 número de elementos pintados / número de elementos do conjunto

Achar a fração de um conjunto, é semelhante ao trabalho com subconjuntos equipotentes. Veja como poderia ser representado o exercício B:

$\frac{9}{15}$ ou $\frac{3}{5}$

Trabalhe e descubra dois modos de representar a mesma quantidade.

$\frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$

$\frac{20}{24}$ ou $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{14}$ ou $\frac{4}{7}$

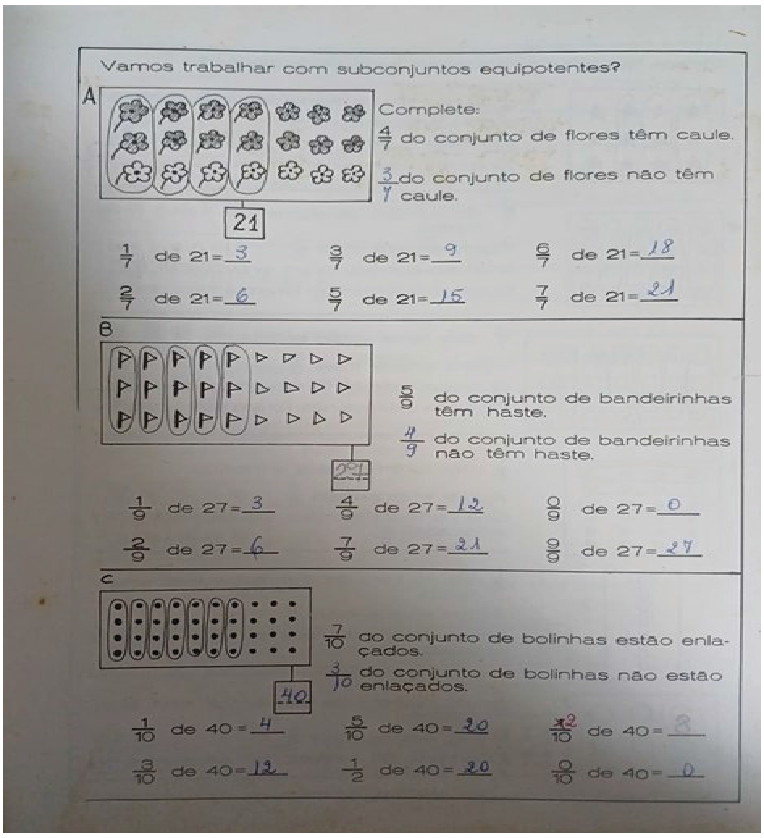
13 1

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 134).

As autoras chamaram as páginas 133 e 134, conforme quadro 12, de atividades (FIGURA 23 e 24) que servem de pré-requisitos para avançar no entendimento do conceito de fração. Esta é uma clara referência aos pressupostos de Jean Piaget, uma vez que para essas atividades, as autoras solicitam o uso de material semiconcreto (recorte, dobradura, conjunto de figuras em cartolina), para que haja a retomada do que foi trabalhado anteriormente e não ocorra uma brusca interrupção. Parte-se do que a criança estudou no volume 3, portanto, já deveria ter aprendido, isso é uma marca muito forte do Construtivismo.

Feito esse trabalho inicial de retomada da fração, enquanto parte-todo de elementos discretos ou contínuos, e enfatizados os subconjuntos equipotentes, a fração é abordada como operador (FIGURA 25).

FIGURA 25 – FRAÇÃO COMO OPERADOR


Vamos trabalhar com subconjuntos equipotentes?

A

Complete:

$\frac{4}{7}$ do conjunto de flores têm caule.

$\frac{3}{7}$ do conjunto de flores não têm caule.

21

$\frac{1}{7}$ de 21 = 3 $\frac{3}{7}$ de 21 = 9 $\frac{6}{7}$ de 21 = 18

$\frac{2}{7}$ de 21 = 6 $\frac{5}{7}$ de 21 = 15 $\frac{7}{7}$ de 21 = 21

B

$\frac{5}{9}$ do conjunto de bandeirinhas têm haste.

$\frac{4}{9}$ do conjunto de bandeirinhas não têm haste.

27

$\frac{1}{9}$ de 27 = 3 $\frac{4}{9}$ de 27 = 12 $\frac{0}{9}$ de 27 = 0

$\frac{2}{9}$ de 27 = 6 $\frac{7}{9}$ de 27 = 21 $\frac{9}{9}$ de 27 = 27

C

$\frac{7}{10}$ do conjunto de bolinhas estão enlaçados.

$\frac{3}{10}$ do conjunto de bolinhas não estão enlaçados.

40

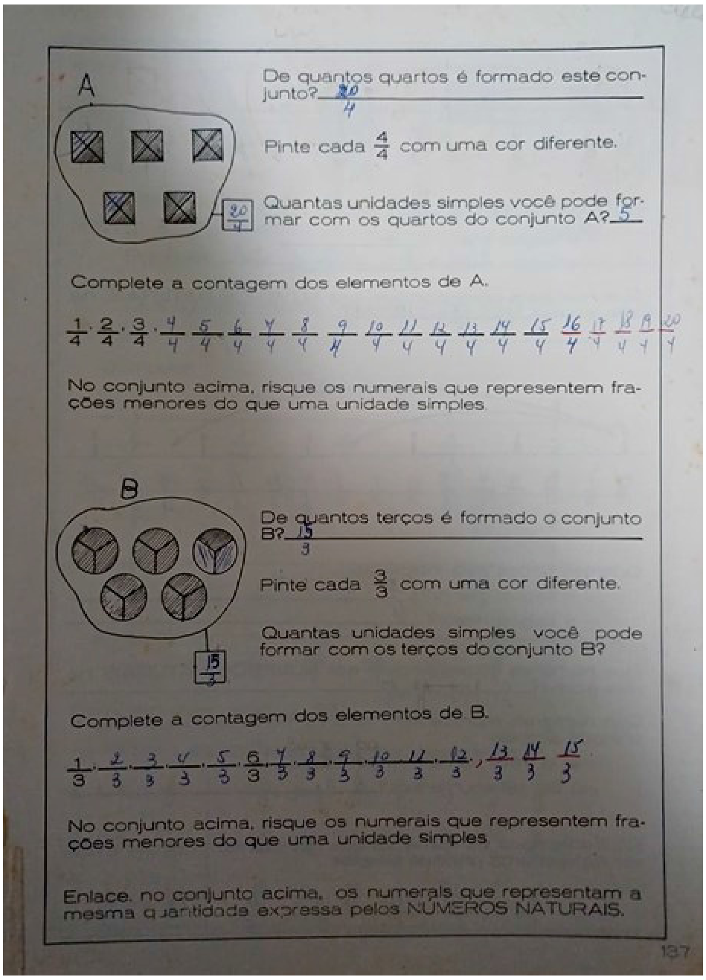
$\frac{1}{10}$ de 40 = 4 $\frac{5}{10}$ de 40 = 20 $\frac{2}{10}$ de 40 = 8

$\frac{3}{10}$ de 40 = 12 $\frac{1}{2}$ de 40 = 20 $\frac{0}{10}$ de 40 = 0

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 136).

Em seguida (FIGURA 26), trabalha-se a questão do todo em uma sequência de frações próprias e impróprias abordadas de forma semiconcreta nas figuras geométricas, e abstrata na reta numérica.

FIGURA 26 – FRAÇÕES PRÓPRIAS E IMPRÓPRIAS


A

De quantos quartos é formado este conjunto? $\frac{20}{4}$

Pinte cada $\frac{4}{4}$ com uma cor diferente.

$\frac{20}{4}$

Quantas unidades simples você pode formar com os quartos do conjunto A? 5

Complete a contagem dos elementos de A.

$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{13}{4}, \frac{14}{4}, \frac{15}{4}, \frac{16}{4}, \frac{17}{4}, \frac{18}{4}, \frac{19}{4}, \frac{20}{4}$

No conjunto acima, risque os numerais que representem frações menores do que uma unidade simples.

B

De quantos terços é formado o conjunto B? $\frac{15}{3}$

Pinte cada $\frac{3}{3}$ com uma cor diferente.

Quantas unidades simples você pode formar com os terços do conjunto B?

$\frac{15}{3}$

Complete a contagem dos elementos de B.

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{12}{3}, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, \frac{15}{3}$

No conjunto acima, risque os numerais que representem frações menores do que uma unidade simples.

Enlace, no conjunto acima, os numerais que representam a mesma quantidade expressa pelos NÚMEROS NATURAIS.

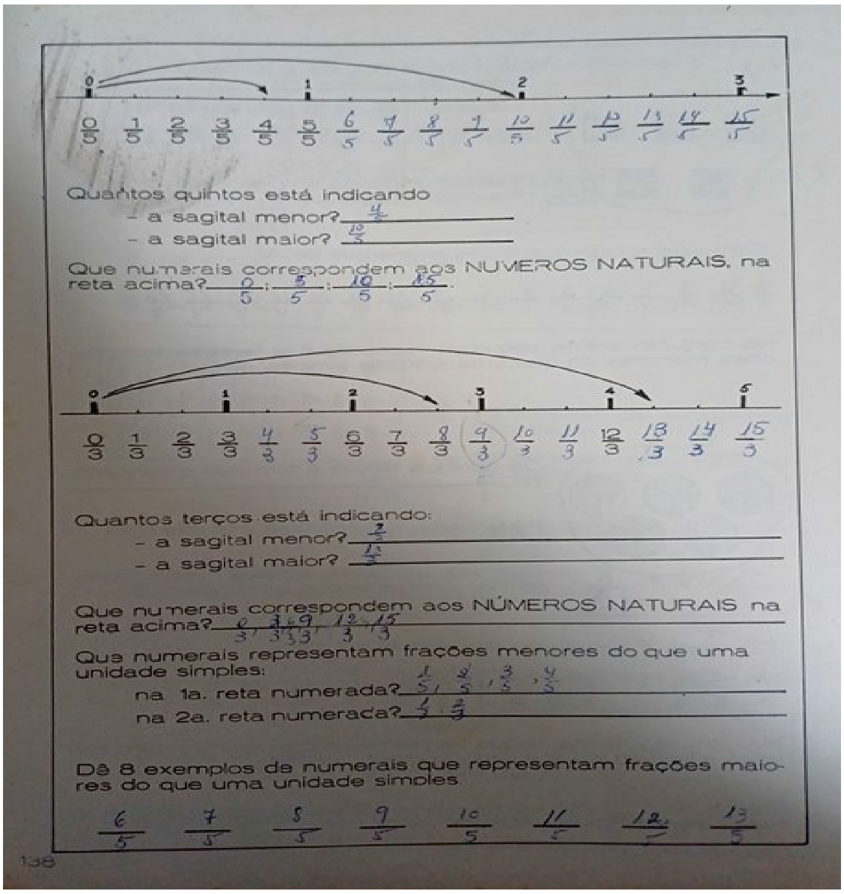
137

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 137)

Fazendo uso de figuras geométricas, as autoras solicitam ao aluno que pinte cada $\frac{3}{3}$ de uma cor diferente. Após colocar os numerais em uma sequência, elas solicitam que circulem aqueles que expressam a mesma quantidade de um número natural, quais são menores que uma unidade simples. Ao se reportarem à página 137, a única da sequência com uma atividade abstrata, como sendo de avaliação, demonstram a evidência de que a aprendizagem ocorre por meio da abstração do conceito a partir do semiconcreto (materiais manipuláveis) e do semiabstrato (imagens). Também cabe destacar que, mesmo trazendo a abstração, mantém a imagem para que, caso a criança precise, a utilize para responder as questões.

Na página seguinte temos a reta numérica, representação semiabstrata, (FIGURA 27) na qual são posicionadas as frações representadas de outra forma, sem contar com a linguagem matemática mais técnica, marca do MMM, ao se referir a distância entre dois pontos na reta como sagital[94].

FIGURA 27 – FRAÇÕES NA RETA NUMÉRICA



FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 138).

Aqui, as autoras se utilizam da imagem para um movimento em direção à abstração, uma vez que na reta numerada não é possível que a criança recorte, pinte, cole, ela precisa abstrair a fração, enquanto número, e localizá-la em alguma posição na reta que normalmente é apresentada com números naturais, desta maneira as autoras se utilizam da imagem para consolidar a fração, enquanto um número racional.

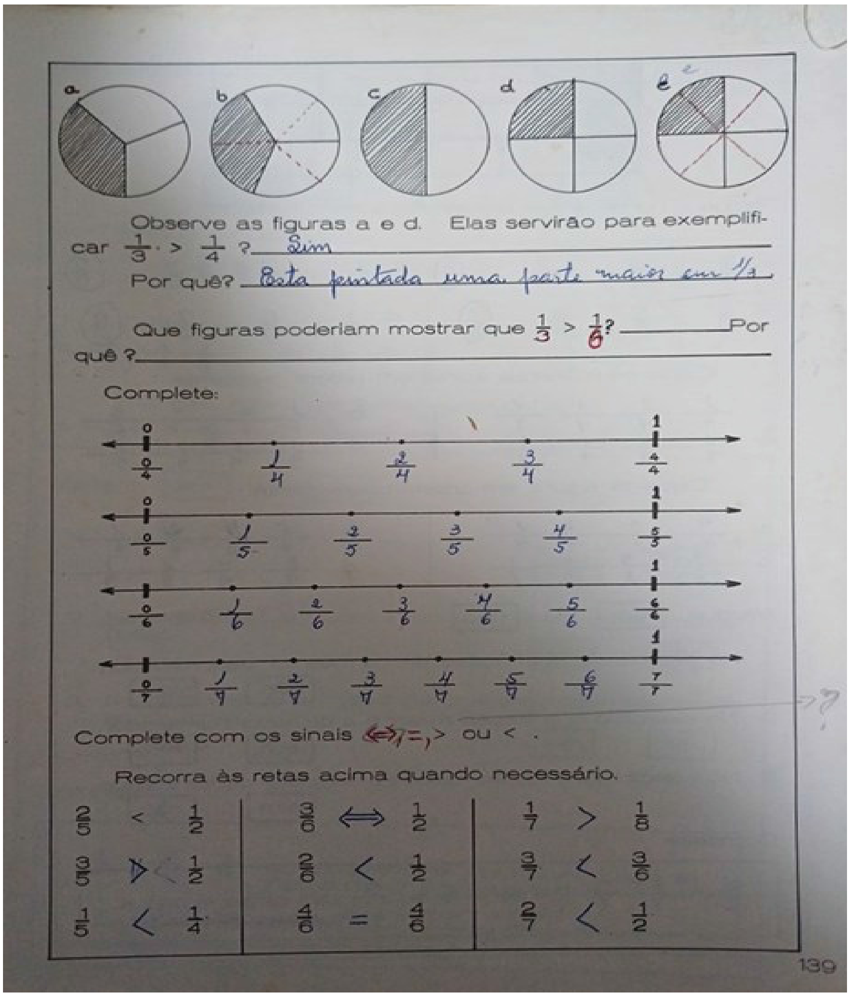
A comparação de frações se inicia com duas frações unitárias associadas à representação de círculos (FIGURA 28) para mostrar que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ [95]. Depois o mesmo

---

[94] A sagital menor e sagital maior evidencia o uso da linguagem matemática já para as crianças nesta faixa etária (entre 9 e 10 anos) - período das Operações Concretas.
[95] Nota-se, novamente como característica da Matemática Moderna, o uso de símbolos matemáticos

conteúdo com o auxílio de várias retas numéricas divididas em quartos, quintos, sextos e sétimos. A sequência é finalizada com exercícios, sem apelo visual, antecedidos da seguinte orientação “recorra às retas acima quando necessário” (Martins, Yaremtchuck, Arruda, 1979, p. 139).

FIGURA 28 – COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

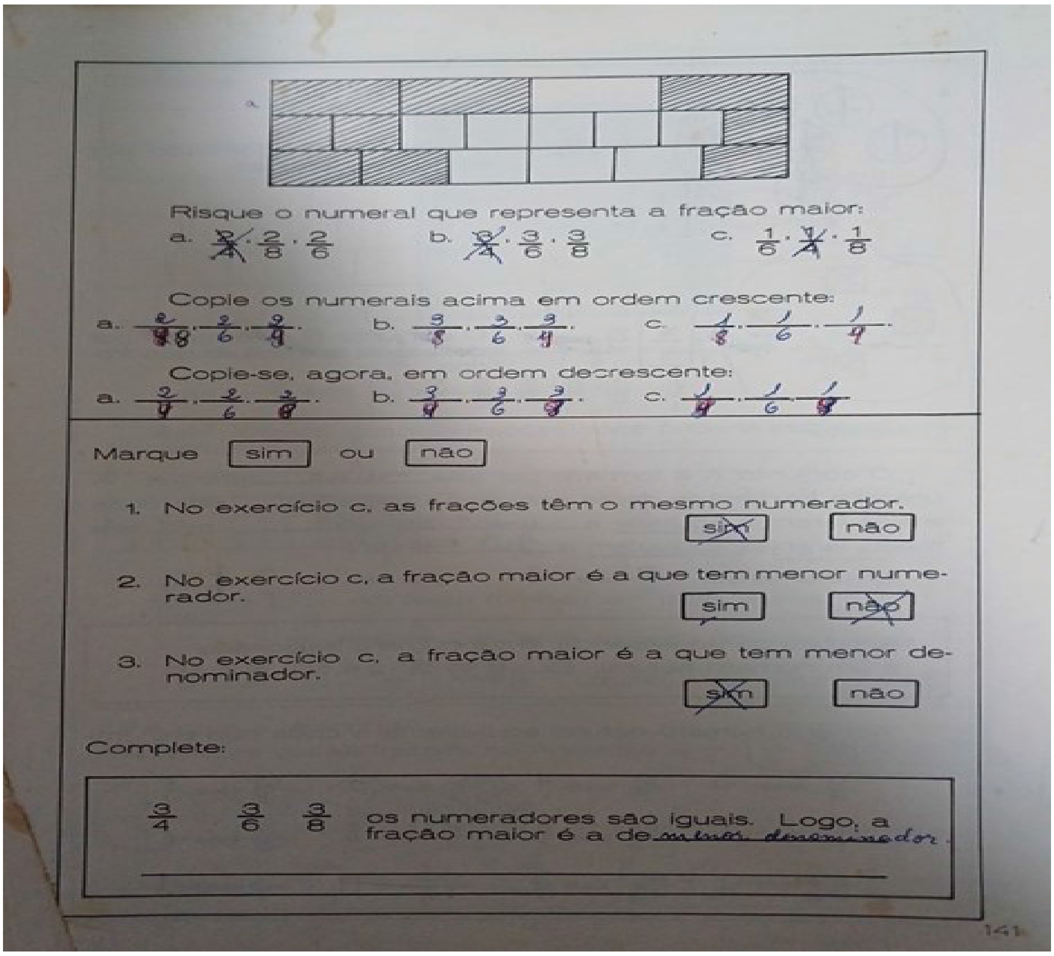


FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 139).

Ainda em relação à comparação de frações são mobilizados modelos de comprimento para comparar as que possuem o mesmo numerador, conforme figura 29. A imagem auxilia a perceber a regra que, se os numeradores são iguais, a maior fração será a de menor denominador.

(> = <) para comparar frações.

FIGURA 29 – MODELOS DE COMPRIMENTO



Risque o numeral que representa a fração maior:

a. $\cancel{\frac{2}{4}} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{6}$ b. $\cancel{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{8}$ c. $\frac{1}{6} \cdot \cancel{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{8}$

Copie os numerais acima em ordem crescente:

a. $\frac{2}{8} . \frac{2}{6} . \frac{2}{4}$. b. $\frac{3}{8} . \frac{3}{6} . \frac{3}{4}$. c. $\frac{1}{8} . \frac{1}{6} . \frac{1}{4}$.

Copie-se, agora, em ordem decrescente:

a. $\frac{2}{4} . \frac{2}{6} . \frac{2}{8}$. b. $\frac{3}{4} . \frac{3}{6} . \frac{3}{8}$. c. $\frac{1}{4} . \frac{1}{6} . \frac{1}{8}$

Marque sim ou não

1. No exercício c. as frações têm o mesmo numerador. ~~sim~~ não
2. No exercício c. a fração maior é a que tem menor numerador. sim ~~não~~
3. No exercício c. a fração maior é a que tem menor denominador. ~~sim~~ não

Complete:

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{8}$ os numeradores são iguais. Logo, a fração maior é a de menor denominador.

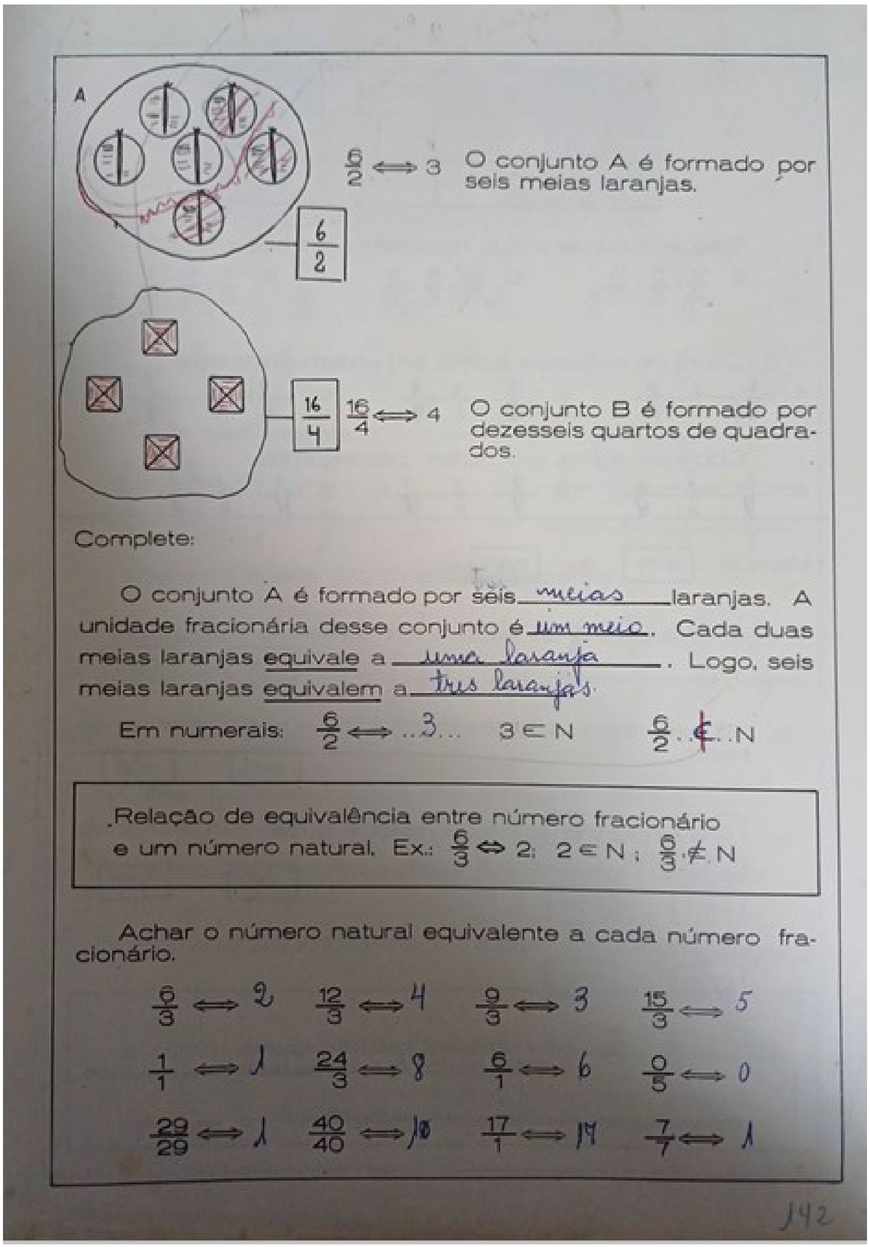
141

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 140).

A apresentação do conteúdo de frações segue uma progressão, valendo-se de exemplos mais próximos dos alunos até culminar em conceitos complexos como a relação de equivalência entre números fracionários e número natural, seguida da linguagem própria do Movimento da Matemática Moderna (equivalência, pertence e não pertence), corroborando com a orientação metodológica presente no livro do mestre, como podemos observar na figura 30[96].

[96] Tendo a imagem a função de comunicar, no conjunto “A”, retratado na FIGURA 30, composto por seis meias laranjas, a imagem posta não dá conta de “comunicar” isso com clareza.

FIGURA 30 – RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE NÚMERO FRACIONÁRIO E NÚMERO NATURAL



A

$\frac{6}{2} \Leftrightarrow 3$ O conjunto A é formado por seis meias laranjas.

$\frac{6}{2}$

$\frac{16}{4}$ $\frac{16}{4} \Leftrightarrow 4$ O conjunto B é formado por dezesseis quartos de quadrados.

Complete:

O conjunto A é formado por seis meias laranjas. A unidade fracionária desse conjunto é um meio. Cada duas meias laranjas equivale a uma laranja. Logo, seis meias laranjas equivalem a tres laranjas.

Em numerais: $\frac{6}{2} \Leftrightarrow$ ...3... $3 \in N$ $\frac{6}{2} \ldots \notin \ldots N$

Relação de equivalência entre número fracionário e um número natural. Ex.: $\frac{6}{3} \Leftrightarrow 2$; $2 \in N$; $\frac{6}{3} \notin N$

Achar o número natural equivalente a cada número fracionário.

$\frac{6}{3} \Leftrightarrow 2$ $\frac{12}{3} \Leftrightarrow 4$ $\frac{9}{3} \Leftrightarrow 3$ $\frac{15}{3} \Leftrightarrow 5$

$\frac{1}{1} \Leftrightarrow 1$ $\frac{24}{3} \Leftrightarrow 8$ $\frac{6}{1} \Leftrightarrow 6$ $\frac{0}{5} \Leftrightarrow 0$

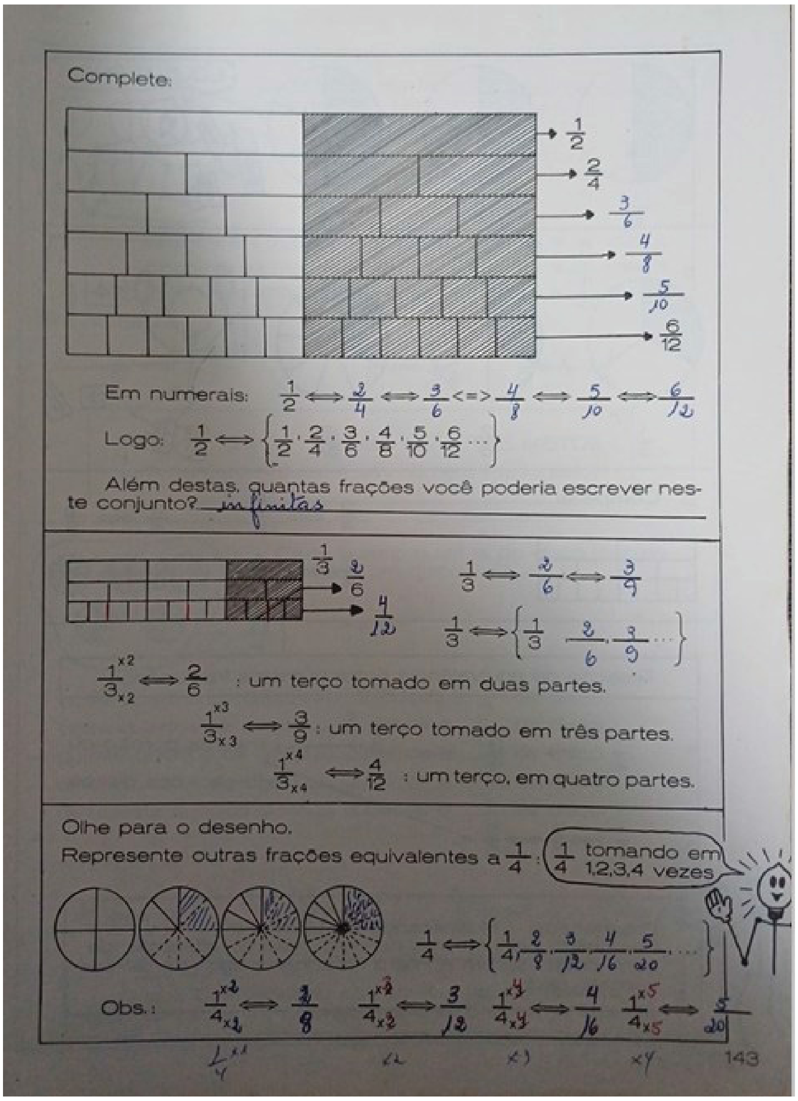
$\frac{29}{29} \Leftrightarrow 1$ $\frac{40}{40} \Leftrightarrow 10$ $\frac{17}{1} \Leftrightarrow 17$ $\frac{7}{7} \Leftrightarrow 1$

142

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 142).

Somente após a construção da noção de equivalência (FIGURA 30), o livro aborda as frações equivalentes (FIGURA 31), representadas em quadros de equivalência, classes de equivalência e círculos divididos em quatro, oito, doze e dezesseis partes, sempre contanto com as orientações do livro do mestre (Martins, Yaremtchuck, Arruda, S/D, p. 51).

FIGURA 31 – FRAÇÕES EQUIVALENTES



FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 143).

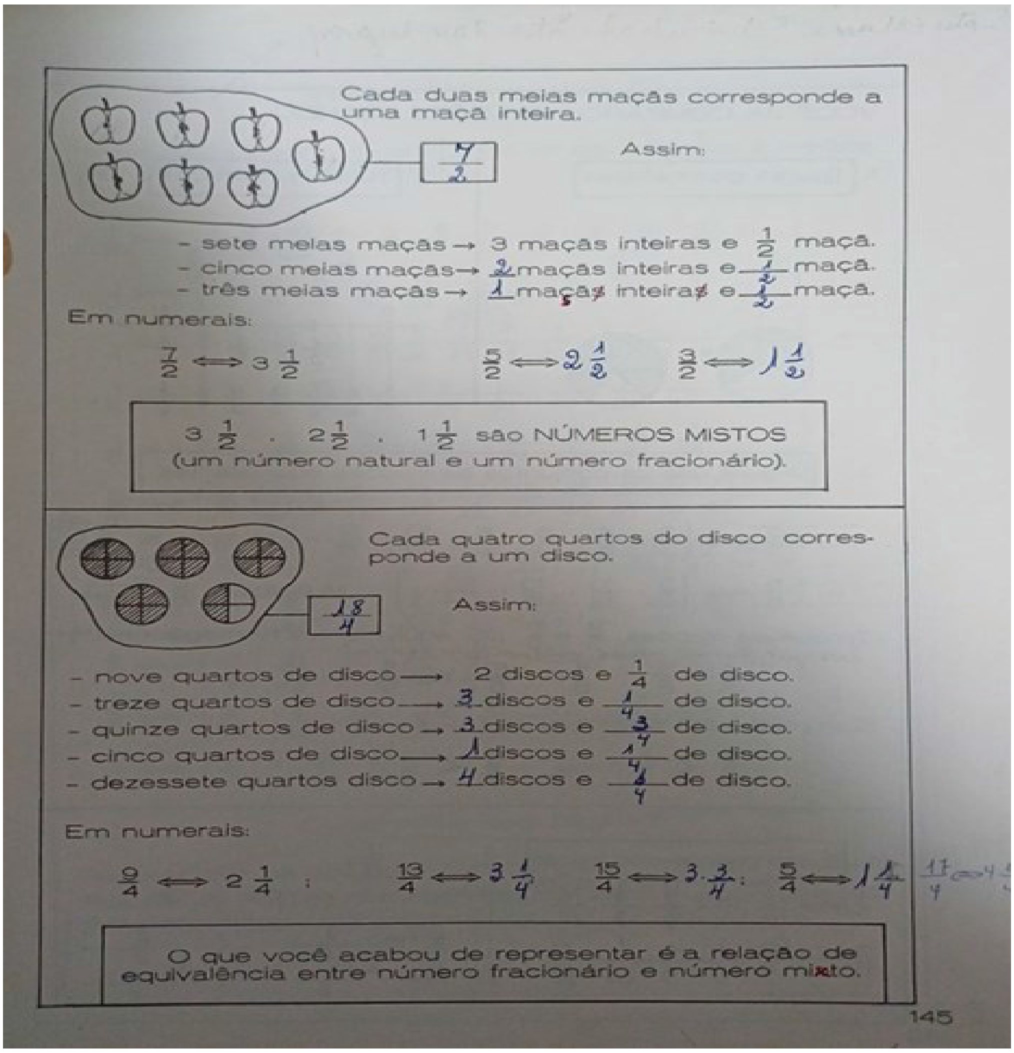
É interessante observar que o conteúdo sempre é introduzido mobilizando mais de uma abordagem e representação e segue a marcha concreto[97], semiconcreto, semiabstrato e abstrato).

As autoras continuam explorando o número misto, tendo o desenho da fração (semiabstrato), a sua relação com algo do cotidiano, no caso a maçã (concreto), e a representação numérica da fração enquanto número (abstrato), conforme podemos observar na figura 32.

---

[97] Quando não é possível partir do concreto, parte-se do semiconcreto.

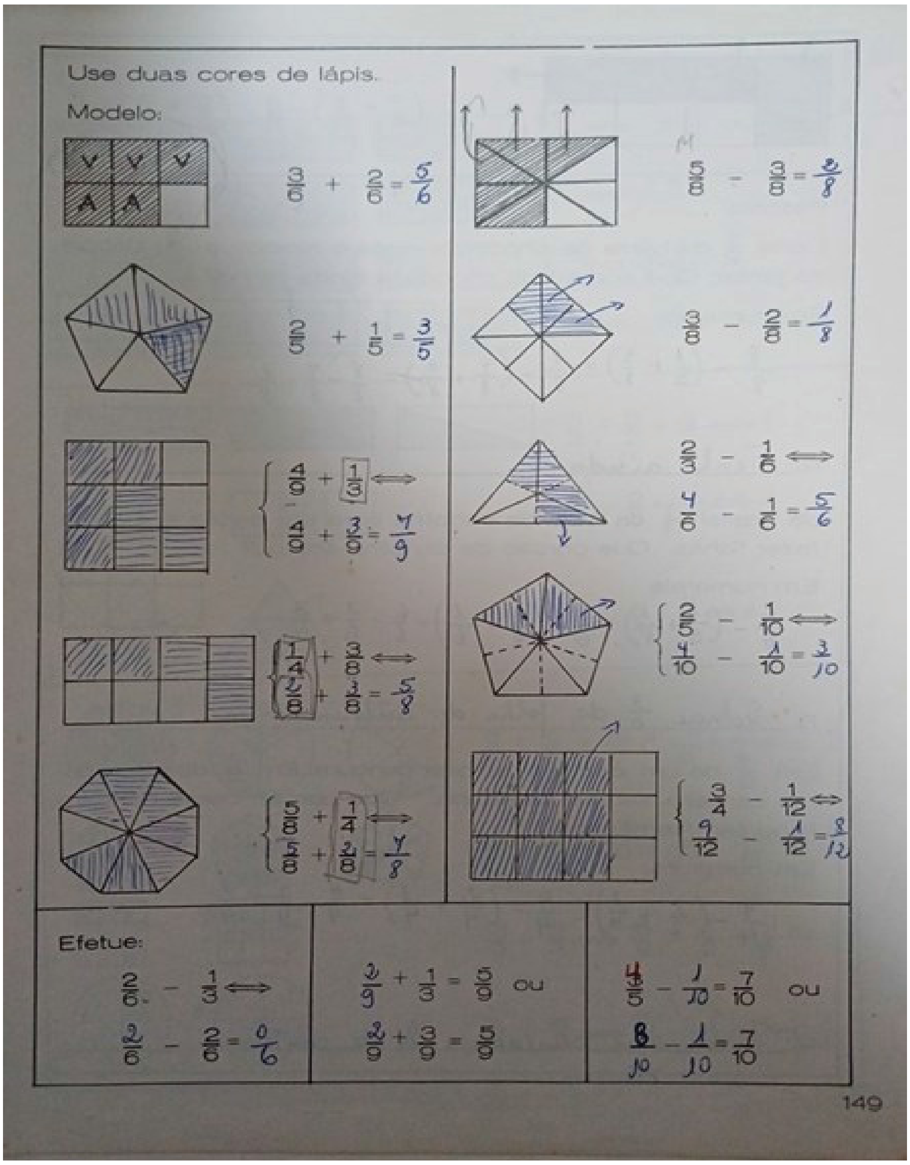
FIGURA 32 – FRAÇÃO ENQUANTO UM NÚMERO MISTO



FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 145).

Na figura 33, segue-se a mesma lógica, as operações com frações se valem de figuras (material semiabstrato) e as autoras “sugerem” (abstração) que a criança use os seus conhecimentos, já anteriormente abordado no livro, de frações equivalentes para a soma e subtração de frações heterogêneas.

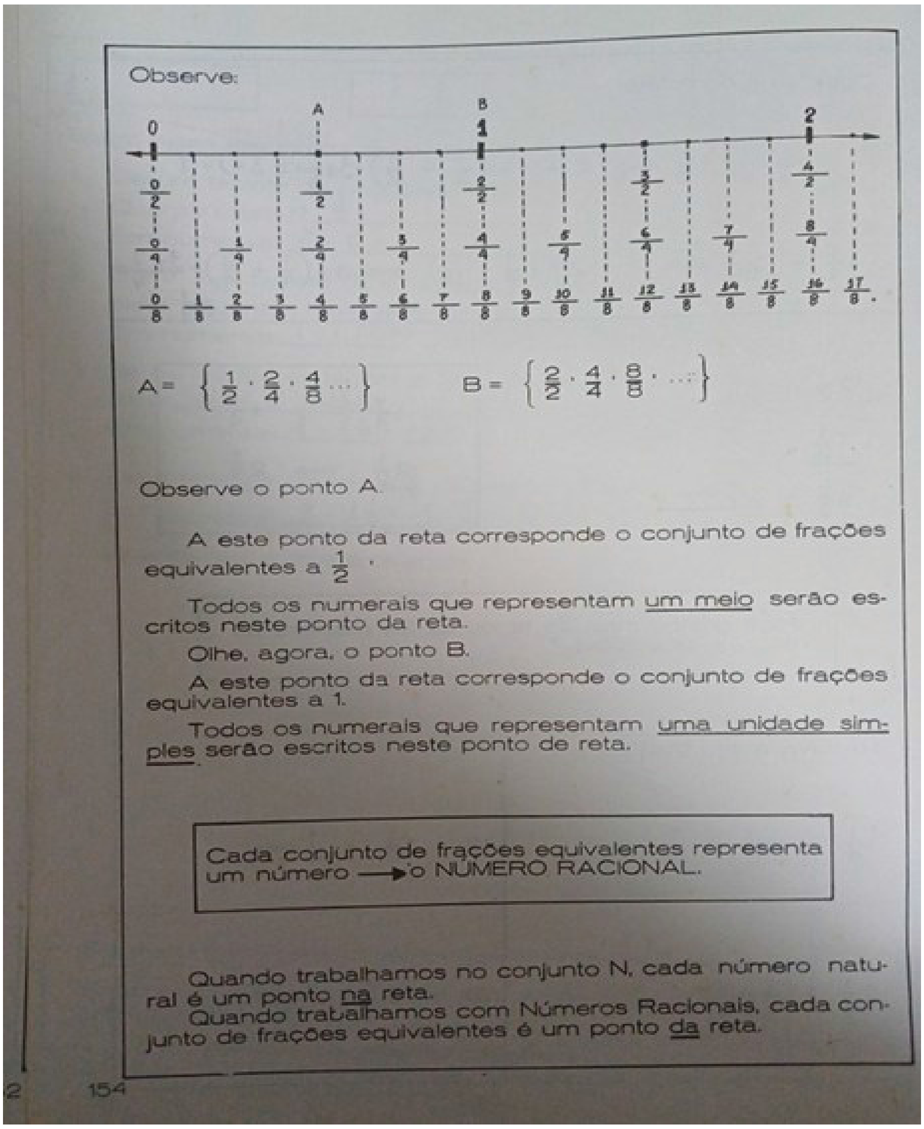
FIGURA 33 – OPERAÇÕES COM FRAÇÕES



FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 149).

Conforme podemos observar na figura 34, é apresentada a reta numérica associada à fração equivalente, retirando o apoio tanto de material concreto, como de semiconcreto e do semiabstrato (imagem) e trabalhando apenas no abstrato, trazendo a fração, como preconiza o MMM, como sendo a representação de um número racional.

FIGURA 34 – RETA NUMÉRICA E FRAÇÕES EQUIVALENTES



Observe:

$A = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{8} \cdots \right\}$ $B = \left\{ \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{8}{8} \cdot \cdots \right\}$

Observe o ponto A.

A este ponto da reta corresponde o conjunto de frações equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Todos os numerais que representam <u>um meio</u> serão escritos neste ponto da reta.

Olhe, agora, o ponto B.

A este ponto da reta corresponde o conjunto de frações equivalentes a 1.

Todos os numerais que representam <u>uma unidade simples</u> serão escritos neste ponto de reta.

Cada conjunto de frações equivalentes representa um número ⟶ o NÚMERO RACIONAL.

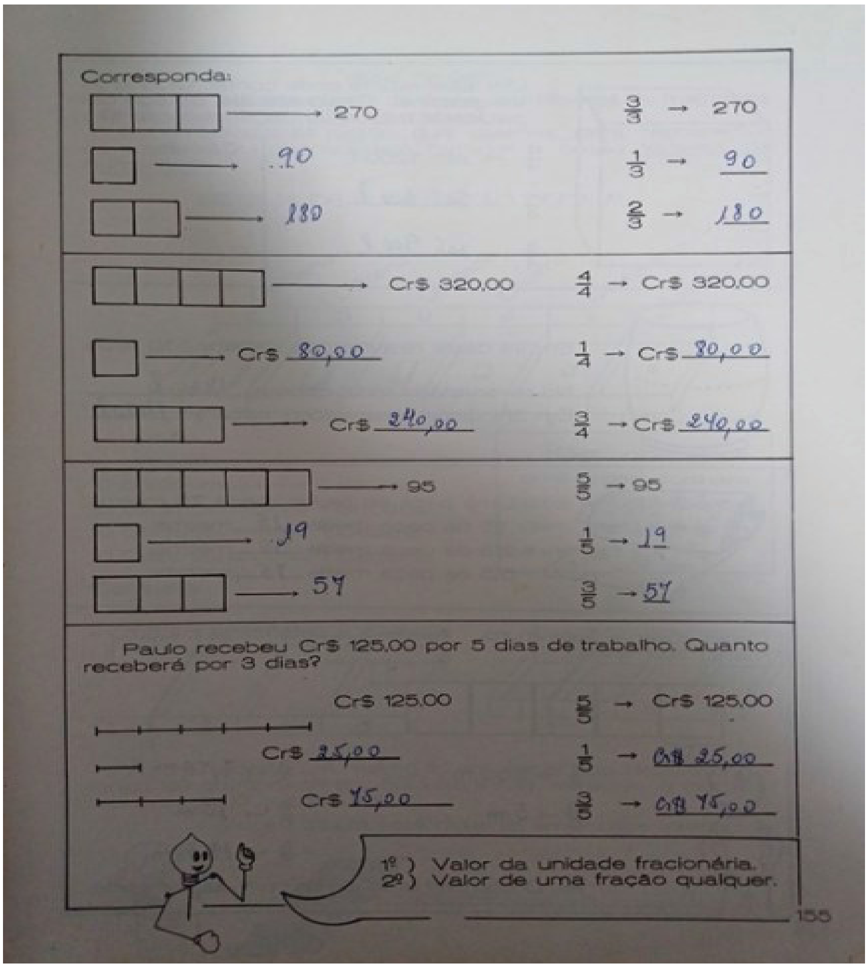
Quando trabalhamos no conjunto N, cada número natural é um ponto <u>na</u> reta.
Quando trabalhamos com Números Racionais, cada conjunto de frações equivalentes é um ponto <u>da</u> reta.

154

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 154).

No quarto volume da coleção há poucos problemas sobre frações, na figura 35, há exemplos em que as imagens de modelos de comprimento e segmentos de reta representam o todo e partes de um todo para auxiliar na resolução de atividades sobre o sistema monetário. O livro traz outros exemplos que abordam o sistema de medidas e frações com situações sobre tempo, comprimento, capacidade e volume.

FIGURA 35 – UNIDADE DE FRAÇÃO E FRAÇÃO QUALQUER

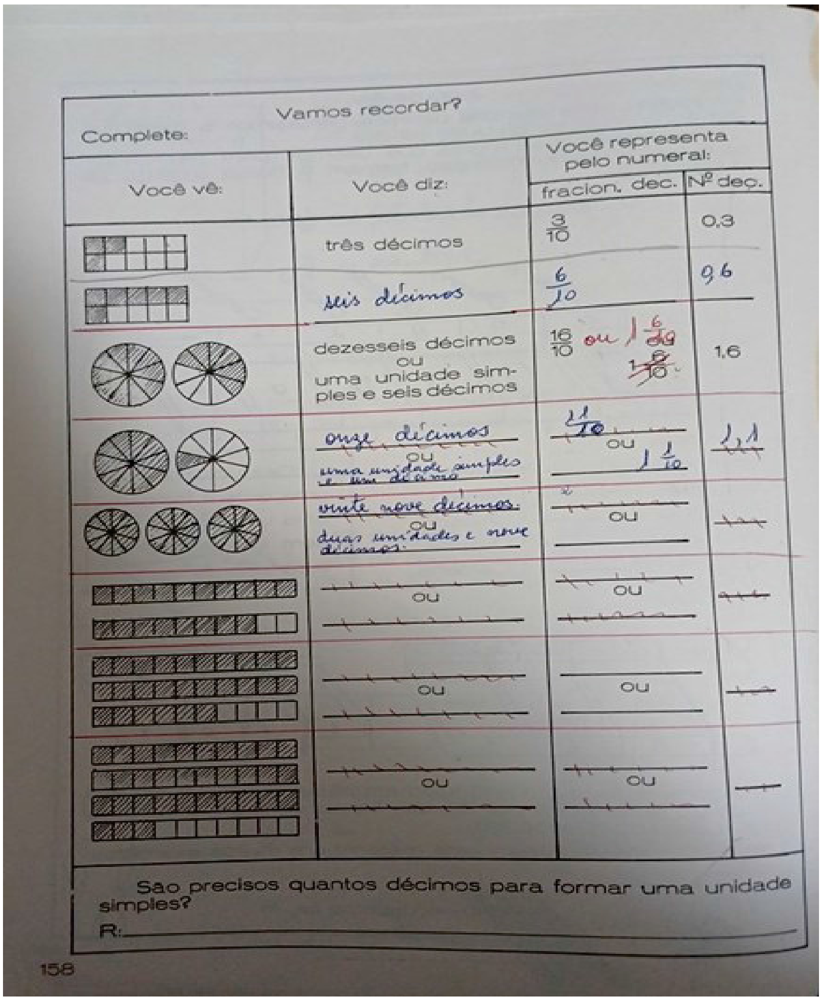


FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 155).

De acordo com a Psicologia Genética que versa sobre a importância dos pré-requisitos e, conforme podemos constatar nas orientações pedagógicas do livro do mestre, “para uma aprendizagem suave e contínua sem bruscas interrupções”, (Martins, Yaremtchuck, Arruda, S/D, p. 9) inicia-se, no capítulo IX, o estudo das frações decimais, números decimais seguida de um aprofundamento dos sistemas de medidas.

A figura 36 começa a detalhar a sequência acima descrita e evidencia a ideia de retomada para avançar, quando coloca o “vamos recordar” como as mesmas imagens já trabalhadas, mas agora, com o propósito de apresentar frações próprias, impróprias e números mistos cujo denominador é 10, fazendo a articulação com uma outra representação de fração - número decimal.

FIGURA 36 – ARTICULAÇÃO ENTRE FRAÇÕES E DECIMAIS

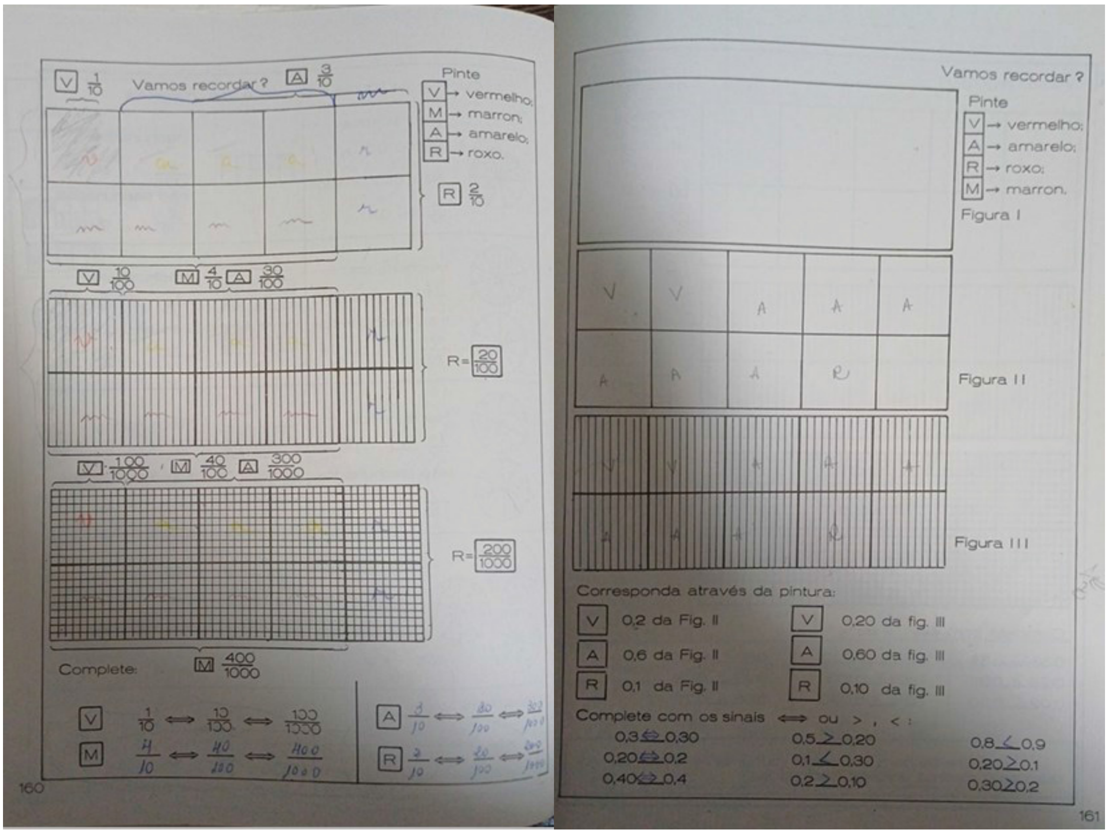


FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 158)

Na sequência (FIGURA 37), três malhas quadriculadas, a primeira dividida em 10 partes, a segunda em 100 partes e a terceira em 1000 partes são postas na mesma página para que o aluno faça a relação entre as três, valendo-se de conceitos sobre equivalência de frações trabalhados na unidade anterior. Para tanto, os estudantes deveriam, por exemplo, pintar de roxo, $\frac{2}{10}$, $\frac{20}{100}$ e $\frac{200}{1000}$ e fazer a comparação.

Ao final desta página, as autoras exploram a notação matemática de equivalência com a simbologia >, < ou ⇔. Na página seguinte, a mesma sequência de imagens é abordada, agora com a notação de números decimais, culminando com exercícios que exploram equivalente, maior ou menor. Por exemplo, 0,3 é equivalente a 0,30 e 0,5 é maior que 0,30.

FIGURA 37 – RELAÇÃO ENTRE DÉCIMOS, CENTÉSIMOS E MILÉSIMOS

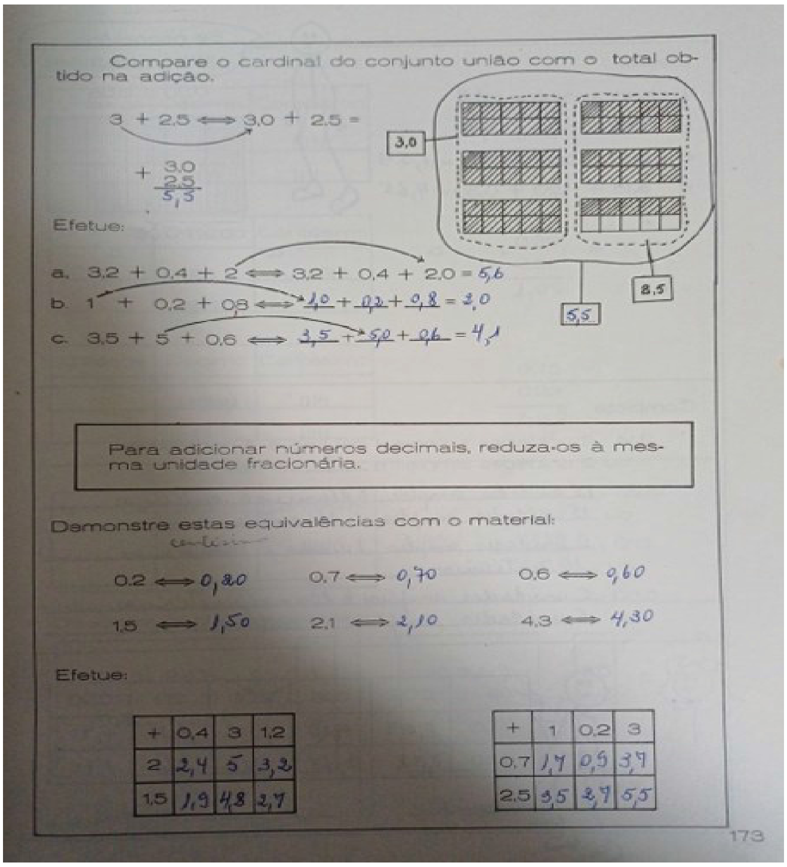


FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 160-161)

Nas páginas seguintes, os números decimais são posicionados na reta numérica em mais de uma atividade.

E como operar com números decimais? A figura 38, ainda associando números decimais (abstrato) com desenhos de frações decimais (semiabstrato), finaliza o trabalho com fração e introduz números decimais.

FIGURA 38 – OPERAÇÕES ENVOLVENDO NÚMEROS DECIMAIS COM REPRESENTAÇÕES FRACIONÁRIAS



Compare o cardinal do conjunto união com o total obtido na adição.

$3 + 2{,}5 \Longleftrightarrow 3{,}0 + 2{,}5 =$

$+\ \begin{array}{r} 3{,}0 \\ 2{,}5 \\ \hline 5{,}5 \end{array}$

3,0

5,5

2,5

Efetue:

a. $3{,}2 + 0{,}4 + 2 \Longleftrightarrow 3{,}2 + 0{,}4 + 2{,}0 = 5{,}6$

b. $1 + 0{,}2 + 0{,}8 \Longleftrightarrow 1{,}0 + 0{,}2 + 0{,}8 = 2{,}0$

c. $3{,}5 + 5 + 0{,}6 \Longleftrightarrow 3{,}5 + 5{,}0 + 0{,}6 = 4{,}1$

Para adicionar números decimais, reduza-os à mesma unidade fracionária.

Demonstre estas equivalências com o material:

$0{,}2 \Longleftrightarrow 0{,}20$ $\quad 0{,}7 \Longleftrightarrow 0{,}70$ $\quad 0{,}6 \Longleftrightarrow 0{,}60$

$1{,}5 \Longleftrightarrow 1{,}50$ $\quad 2{,}1 \Longleftrightarrow 2{,}10$ $\quad 4{,}3 \Longleftrightarrow 4{,}30$

Efetue:

+	0,4	3	1,2
2	2,4	5	3,2
1,5	1,9	4,8	2,7

+	1	0,2	3
0,7	1,7	0,9	3,7
2,5	3,5	2,7	5,5

173

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 173).

A partir da página 173, até o final da unidade VIII: números decimais (p. 193), o livro trata os números decimais sem relacionar com o desenho da fração, numa clara referência a duas características do MMM, quais sejam, a marcha do conhecimento sendo construída, seguindo a teoria de Jean Piaget, do concreto ao abstrato; e, a fração sendo tratada como um número.

E por falar em teoria de Jean Piaget e a sua progressão[98] sem "bruscas interrupções", a análise do livro do NEDEM mostra que Martins, Yaremtchuck e Arruda (1979) se valeram do livro do GRUEMA para a sua produção. Outros autores confirmam a perspectiva teórica já discutida no capítulo, como por exemplo, Hans

[98] Para Piaget (1998), através desta interação o sujeito vai modificando suas estruturas e aprendendo pelos processos de assimilação e acomodação, ou seja, quando o sujeito encontra com algo novo ele inicia o processo de adaptação que inclui estas duas formas: a assimilação e a acomodação. Na assimilação o indivíduo utiliza os conhecimentos que já possui, já na acomodação, se estes conhecimentos não forem suficientes, é preciso construir novas estruturas. Este processo de formação de estruturas, envolvendo assimilação e acomodação, é contínuo na construção do conhecimento durante a vida do indivíduo.

Aebli, que propôs uma didática fundamentada em Jean Piaget, NEDEM ginásio, Zoltan Paul Dienes, Charles D'Augustine e outros autores americanos. Por outro lado, também referenciam autoras como Norma Cunha Osório e Rizza Porto, representantes da vaga pedagógica anterior - uma Escola Nova Renovada, como podemos verificar na figura 39.

FIGURA 39 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO LIVRO DO NEDEM

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICA

Aebli, Hans
Una Didática Fundada en la Psicologia de Jean Piaget
Ed. Kapelusz, B. Aires — 1958

Abbot, Janet S.
Learn do fold-fold to learn
Mirror Magic
Teachers Edition — Franklin Publications, inc — Pasadena — California
1970

Dienes, Zoltan P.
Primerios Passos na Matemática — Vol. 1,2 e 3
Editora Herder — S. P. — 1969

D'Augustine, Charles H.
Métodos Modernos para o Ensino da Matemática
Ao Livro Técnico S/A — Rio — 1970

Duncan, Capps, Dolciani, Quast, Zweng
Modern School Mathematics-Structure and Use
Teacher's Annotated Edition
Houghton Mifflin Company-Boston — 1970

Eicholz, O'Daffer, Brumfiel, Shanks
Elementary School Mathematics-Teachers Edition
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. U.S.A — 1964

Osório, Norma Cunha; Porto, Rizza A.; Lopes, Helena.
Vamos aprender Matemática
Ao Livro Técnico S/A — Rio — 1969

Porto, Rizza Araújo
Frações na Escola Elementar
Editora do Professor — Belo Horizonte — M.G. — 1965

NEDEM — Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática
Ensino Moderno da Matemática — Ensino de 1.º grau — 5.ª a 8.ª séries

Editora do Brasil — S.P. 1967
Sanchez, Lucília Bechara; Libermann, Manhucia P.,
Gruema (Grupo de Ensino de Matemtica Atualizada)
Companhia Editora Nacional — 1975

FONTE: Martins, Yaremtchuck, Arruda (1979, p. 218).

Ao longo deste capítulo pudemos observar que o livro Ensino Moderno da Matemática – V.4, mantém formas e imagens para ensinar frações consolidadas no início da década de 1960, mas avança com aspectos do Movimento da Matemática Moderna.

Traz, em toda obra, pressupostos da psicologia genética de Jean Piaget que versa sobre um ensino que respeita, o que ele chamou de etapas do desenvolvimento infantil, para a idade que o livro abrange, 9 e 10 anos, operações concretas, fase na qual a criança necessita manipular materiais concretos para descobrir, em nosso estudo, o que é fração.

É um livro que “conta uma história”, a partir das imagens, uma vez que em quase todas as páginas que, abordam fração, mostram imagens que não são meramente decorativas, mas, cumprem o importante papel de fazer a ponte entre o concreto e o abstrato.

As autoras procuraram usar a imagem não com o intuito de criar uma impressão fotográfica no espírito da criança do que é fração como fazia, segundo Pereira (1961), a pedagogia tradicional. Essa “pedagogia moderna”, que pudemos ver nos Livros do NEDEM, apresentava a imagem em atividades reflexivas onde, associado a materiais concretos, a criança poderia cortar, sobrepor, ordenar e comparar círculos de fração associados a imagens sobre as quais ela iria dividir, pintar, comparar, sobrepor e ordenar (mentalmente) e, assim, adquirisse a noção de fração.

As autoras propunham o uso de recorte, dobradura, pintura de figuras em cartolina, o uso de materiais como fichas, tampinhas, antes ou concomitante ao uso do livro didático. A criança, em vários momentos da obra, era instigada a dividir e pintar as imagens, desenvolvendo o conceito de fração no melhor sentido de “mãos na massa” até chegar a uma fração como sendo uma representação do número racional, caracterizando mais uma vez o MMM. Porém o fazem, sem bruscas interrupções, valendo-se também da variabilidade perceptiva e a variabilidade matemática para potencializar a aprendizagem ao longo de todo o livro. As frações seguem uma graduação, tendo sido introduzida, ainda que não com esse nome, lá no volume 1.

Analisando a coleção como um todo é possível perceber, um alinhamento com a psicologia genética de Jean Piaget, uma vez que a coleção vai graduando a dificuldade do conteúdo, introduzindo o conceito de fração (sem usar essas palavras) no volume 1, sem avançar, neste momento, para a abstração do conceito, numa clara referência ao conhecimento sendo trabalhado a partir do concreto, respeitando o que preconiza o período pré-operatório.

No volume 2, o trabalho é pautado no uso de material concreto, semiconcreto e semiabstrato (imagem), para depois, no volume 3, intensificar o trabalho com frações e avançar na abstração do que é fração.

No volume 3, o trabalho com fração parte das representações parte-todo, até para não haver uma brusca interrupção de um volume para o outro. Aborda o trabalho com frações, ainda bastante pautado no semiconcreto, sugerindo a manipulação de discos, tiras de cartolinas etc. e, no semiabstrato, solicitando que a criança observe vários desenhos. Ao melhor estilo mãos à obra, motiva a criança a interagir com a imagem, fazendo as suas próprias divisões, e já inicia um movimento no sentido da abstração, ao sugerir que a criança resolva sem olhar uma imagem.

Outro aspecto bastante relevante que aparece ao longo da coleção é a linguagem matemática sendo empregada já nos primeiros volumes, assim sendo, já no volume 2, encontramos expressões como: congruentes, correspondentes, conjuntos, terça, quarta, quinta parte, circulares, retangulares, triangulares, quadrangulares, tábuas operatórias, entre outras. No volume 3, utiliza-se de termos como: sagital, numerador, denominador, sub conjuntos equipotentes, equivalentes, ordem crescente e decrescente, propriedade comutativa, sem contar com a utilização dos símbolos (>) para maior, (=) para igual e (<) para menor.

As autoras trabalham, de maneira mais incisiva, as várias representações de fração no volume 4, pautadas em material concreto, semiconcreto e semiabstrato. Abordam fração com representações gráficas da parte-todo de elementos contínuos e discretos, porém, neste volume, aumentam a abstração ao abordar a fração como sendo um número racional na reta, além de um operador.

Ao final da unidade VII, do volume 4, a fração decimal é abordada e posta como pré-requisito para o trabalho com a unidade seguinte, de números decimais, que depois será relacionada com a última unidade do volume 4, sistema de medidas.

Enfim, os livros escritos pelas pedagogas do NEDEM trazem uma clara orientação dos saberes que um professor, que ensina Matemática, precisa ter para ensinar o que é fração à luz dos preceitos da Matemática Moderna e guiados pela psicologia genética de Jean Piaget.

Ao trazer toda esta gama de imagens, o NEDEM dialoga com a ideia de que a imagem é a representação de um modo de olhar e era assim que o NEDEM olhava para o ensino da fração para crianças paranaenses entre 7 e 10 anos.

E com relação ao GRUEMA, como isso se deu?

6 O PAPEL DAS IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NA COLEÇÃO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU DO GRUEMA

Nesse capítulo, analisamos os quatro primeiros volumes da Coleção de livros didáticos *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*, iniciando com uma visão geral da coleção e seguindo com o papel das imagens em cada um dos volumes.

6.1 VISÃO GERAL DA COLEÇÃO

Agora, voltemos a nossa atenção para a coleção do GRUEMA intitulada *Curso Moderno de Matemática para o 1º grau*. Esta coleção contemplava as oito[99] séries do primeiro grau, mas para este estudo, movemos nosso olhar para os primeiros quatro volumes. Os dois primeiros volumes foram escritos por Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Liberman e Anna Franchi; os volumes três e quatro não tiveram mais a participação da terceira. Mas quem foram essas autoras? As informações abaixo foram extraídas da contracapa do volume 4, da coleção, e visam elucidar que, como agentes de seu tempo e não espectadoras, Choppin (2004), faz-se necessário entender melhor quem elas são:

> Lucilia Bechara Sanchez, licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de Campinas. Supervisora de Matemática dos antigos Ginásios Vocacionais do Estado de São Paulo. Catedrática de Fundamentos e Complementos de Matemática da Faculdade de Filosofia OMEC. Professora efetiva de Matemática por concurso do I.E.E. PS Manuel de Nóbrega de São Paulo (LIBERMAN, SANCHEZ 1975).

E a Manhucia? Sobre esta autora, seguem as informações postas na contracapa do volume 4, da coleção do GRUEMA:

> Manhucia Perelberg Liberman: Licenciada em Matemática pela Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil. Supervisora de Matemática do Ginásio I I Peretz. Responsável pela parte de Matemática junto ao grupo que elaborou o programa para as escolas primárias do Estado de São Paulo. Professora efetiva de Matemática, por concurso, do I. E. E. Alberto Levy de S. Paulo (Liberman; Sanchez, 1975).

---

[99] Os volumes cinco a oito foram escritos por Anna Averbuch, Anna, Franca Cohen Gottlieb, Lucilia Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Liberman.

Anna Franchi era Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Supervisora de Matemática do Grupo Escolar Experimental Dr. Edmundo Carvalho e pós-graduada em Psicologia Educacional pela PUC (Liberman, Sanchez e Franchi, 1974a).

Este volume, bem como toda a coleção do GRUEMA – Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau, encontra-se disponível no *site* do Repositório Institucional da UFSC[100]. O conteúdo de fração é abordado desde o volume 1 da coleção, mas é aprofundado nos volumes 3 e 4.

O volume 3, trabalha fração em três momentos, quais sejam, representação decimal dos números naturais; representação dos números racionais sob a forma de fração; e, representação decimal dos números racionais

Ainda nesta abordagem mais panorâmica dos primeiros quatro volumes da coleção, destacamos que o volume 4 apresenta o trabalho com fração de maneira mais sistemática, trazendo-a em quatro momentos, são eles: números racionais – equivalência e ordem; adição e subtração; multiplicação e divisão dos números racionais; porcentagem, se utilizando muito de imagens, e depois avançando no conceito de fração número racional na reta numerada e a fração enquanto operador.

Aqui é conveniente retomar(que), segundo Sanchez (2018), que não foi nada fácil conciliar os preceitos do MMM com a teoria de Piaget, e ainda, convencer os professores que este caminho teórico traria uma aprendizagem mais significativa para as crianças.

Em entrevista[101] concedida por Lucília Bechara Sanchez a Barbara Winiarski Diesel Novaes, Danilene Donin Berticelli[102] e João Paulo Bertoldo, em 23 de maio de 2024, quando perguntada quais livros que foram basilares para a escrita da Coleção do GRUEMA, Lucília (2024) responde:

> **Prof. Lucília:** [...] a inspiração, como eu disse, nós aqui do GRUEMA, nós os inspiramos bastante os livros franceses. E a gente ia lá, o SMSG [*School Mathematics Study Group*], que era americano, também, o **Biberman, Biberman,** que é uma outra coleção americana que começou com a

---

[100] O endereço eletrônico está disponível no quadro 4 deste trabalho.

[101] Esta entrevista é primordial tendo por base os estudos de Alberti (2013), onde se definiu para o andamento da pesquisa, que se faria necessária a entrevista com uma autora que teve papel primordial na autoria da obra. Mediante um roteiro, a entrevista seria realizada sem interrupções, e, depois, feita a transcrição, como a devida autorização da entrevistada, obtendo-se um relato que constitui o objeto de análise.

[102] Esta mesma entrevista será utilizada em outro trabalho orientado pela professora Danilene Donin Berticelli.

> temática moderna lá nos Estados Unidos. Também nós olhávamos. Olhávamos realmente muitos livros franceses, muitos livros belgas.
> **Barbara:** [...] também livros didáticos?
> **Prof. Lucília:** Também livros didáticos. Somente os novos dessas coleções, como falei, SMSG, liamos muito. Então, a inspiração partiu muito de livros de outros países.
> **Barbara:** Acho que, na tese da Lucinha, ela coloca alguma coisa do livro do SMSG, *Mathematics for Elementary School* [...]
> **Prof. Lucília:** Exatamente. Se tiverem oportunidade, não sei se ainda existe algum exemplar, mas deve ter em Sebo.
> **Barbara:** Deve ter no Centro de Documentação do Ghemat-Brasil.
> **Prof. Lucília:** Além de eu ter mais simpatia pelos franceses, eu também tinha mais facilidade na língua francesa. Então, eu me apegava mais. Gostava mais, achava que tinha um espírito mais brasileiro do que os americanos.
> **Barbara:** Com certeza. E os manuais pedagógicos que estavam circulando na época, que estavam naquela transição, por exemplo, a Irene De Albuquerque, a Rizza Porto, Norma Cunha Osório, esses manuais pedagógicos que eram direcionados à formação de professores, vocês chegaram a ter algum contato?
> [...]
> **Prof. Lucília:** Não, eu, pelo menos, não me lembro de ter tido contato com elas, não, com esse tipo de livro. E a gente, tanto assim, que às vezes era até criticado na época, que ia procurar livros de outros países, a gente realmente saía atrás de livros (Sanchez, 2024).

Diferente das autoras do livro do NEDEM, que eram pedagogas e normalistas, as autoras do GRUEMA, por serem formadas em Matemática, não tiveram contato com Manuais Pedagógicos emblemáticos, na década de 1960, com os de Irene de Albuquerque, Rizza Porto e Norma Cunha Osório. Pela fala da Lucília, as maiores inspirações foram dos livros franceses e belgas, além de alguns americanos.

Na análise dos livros do GRUEMA não utilizamos a nomenclatura semiconcreta, ao nos referir à materiais recortados[103], ou semiabstrata, quando falamos de imagem, pois são nomenclaturas desconhecidas pelo GRUEMA, como afirmou Sanchez (2024) em entrevista oral:

> **Barbara:** [...]. Eu não sei se vocês chegaram a usar os termos, aqui, no Paraná, as professoras da coleção do NEDEM utilizaram, semiconcreto, semiabstrato e abstrato. Concreto, semiconcreto, semiabstrato e abstrato. Vocês utilizaram esses conceitos de semiconcreto e semiabstrato?
> **Prof. Lucília:** Não, não sabia disso.
> **Barbara:** É, aqui, eles chamaram de semiconcreto os materiais estruturados. Por exemplo, se você tem um círculo de frações em que você não tem mais representado maçãs ou laranjas, daí, o semiconcreto seria essa representação ou de áreas ou de contadores discretos ou um

---

[103] Círculos fracionados, tiras para sobrepor umas nas outras… que eram recortados em cartolina a fim da criança manipular, sobrepondo e comparando umas às outras e do professor fazer uso das mesmas no flanelógrafo.

> comprimento [...]
> **Prof. Lucília:** É interessante, mas isso nunca chamou a atenção, é verdade, porque uma coisa é você trabalhar a metade de uma banana, outra coisa é trabalhar a metade de um círculo. Está certo? É um material concreto, mas ele está já estruturado, vamos chamar assim (Sanchez, 2024).

Contudo Sanchez afirma na mesma entrevista que a imagem tinha um papel muito importante na coleção:

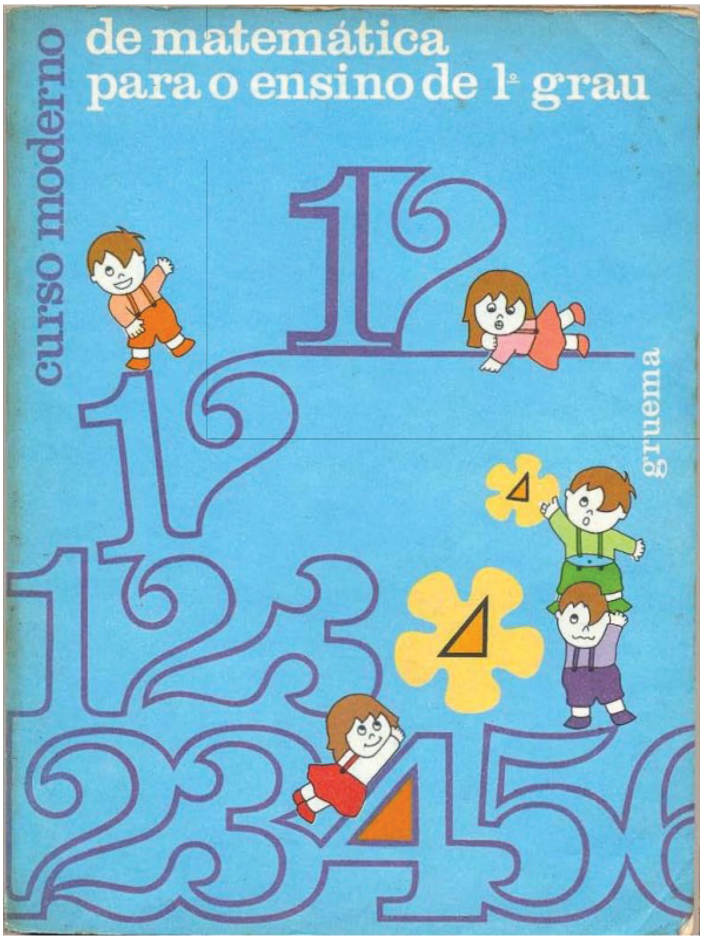
> **Barbara:** [...] As imagens parecem que vão se repetindo no volume 1, no volume 2, no volume 3, sempre acrescentando alguma coisa mais complexa.
> **Prof. Lucília:** As imagens.
> **Barbara:** Isso. O Piaget foi nesse sentido, esse pano de fundo em relação à aprendizagem das crianças?
> **Prof. Lucília:** As imagens têm muito a ver com o concreto e o abstrato, que era um outro ponto muito valorizado. Eu até costumo contar que eu estava querendo desistir de ser professora quando apareceu tanto o Vocacional mas, principalmente, a Matemática Moderna, porque eu vi que a matemática não precisava ser aquela disciplina de regras [...](Sanchez, 2024).

Vejamos como as imagens foram usadas para o ensino da fração nos quatro primeiros volumes da coleção do GRUEMA.

6.2 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO PRIMEIRO VOLUME DA COLEÇÃO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU DO GRUEMA

O quadro 14 mostra a capa do volume 1, bem como algumas observações sobre a materialidade da obra a ser analisada.

QUADRO 14 - OBSERVAÇÕES GERAIS DA MATERIALIDADE DO LIVRO

<table>
<tr><th>CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">
</td><td>Quantidade de página</td><td>150[104]</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Companhia Editora Nacional</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>1975</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>19 cm x 26 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">É um livro que se destaca em sua época, também por ser todo ele impresso a cores (offset), num período[105] onde essa técnica era cara.
As cores da impressão[106] foram cuidadosamente escolhidas pelas autoras da obra e o livro possui muito pouco texto, o que enfatiza a imagem como sendo importante elemento de informação.</td></tr>
</table>

FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1975 – capa).

O quadro 15 visa mostrar, através da análise do sumário que, embora ainda não se use a palavra fração, desde o volume 1, destinado à primeira série, as autoras já iniciam o trabalho com metade, dobro, terça parte e triplo, relacionando-a como sendo a divisão em partes iguais de um objeto (parte-todo de objeto contínuo) ou de um conjunto de objetos (parte-todo de elementos discretos). Nas orientações no início do livro, temos: “novamente será feito um trabalho inicial dos conceitos com material concreto, especialmente neste capítulo, porque não trataremos aqui de

[104] O livro é composto pelo manual do professor, as 30 primeiras páginas. Na sequência, reiniciando a numeração, o livro do aluno vai da página 1 a 120.
[105] Foi impresso em técnica até mais avançada do que se tinha no mercado editorial neste período.
[106] Tanto que Villela (2009) traz uma carta de reclamação da autora para a editora, pois as cores teriam sido, no momento da edição, alteradas.

formação dos conceitos, mas, sim, do seu uso em situações concretas" (Liberman, Sanchez, Franchi, 1975, p. 30).

QUADRO 15 - SUMÁRIO DO VOLUME 1

CONTEÚDO	**Página do guia**[107]	**Página do aluno**[108]
Atividades preliminares	7	1 - 4
Conceito de número	8	4 - 18
Relações	10	9 - 10
Preparo para a adição	13	19 - 23
Adição	14	24 - 38
Subtração	17	39 - 44
Sistema de numeração decimal: Processo de agrupamento. Números até 20	19	45 - 57
Sistema de numeração decimal para representar números naturais de 20 a 99. Adição com 3 parcelas	21	58 - 70
Adição e subtração - Técnica operatória	24	71 - 83
Multiplicação: conceito, fatos fundamentais	26	84 - 106
Divisão	29	107 - 113
Metade, dobro, terça parte, triplo	**30**	**114 - 117**
Cubo, cilindro, esfera	30	118 - 120

FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi, 1975 (p. 30).

No guia do professor, apresenta-se qual é a graduação, o passo a passo, que o professor deve seguir ao trabalhar com as frações.

> O professor solicitará, por exemplo, aos alunos que dividam uma folha ao meio (tomando cuidado para que a folha fique *realmente* dividida ao meio), novamente dividam a folha ao meio, e mostrará então que a folha ficou dividida em quatro partes, dizendo que cada uma das partes se chama *um quarto* (também, neste caso, são todas do mesmo tamanho).
> O aluno encontrará alguma dificuldade se lhe for pedido para dividir a folha em três partes do mesmo tamanho. Deverá ser ajudado, mostrando o professor que também para ele não é fácil (Liberman, Sanchez, Franchi, 1975, p. 30).

Apenas depois de "feito um modelo" é que o professor relaciona com objetos do cotidiano da criança, como continuam nas orientações.

> Depois o professor procurará na própria sala de aula, alguma coisa (uma janela, por exemplo) que lembre metade, terça parte e quarta parte. E dirá:
> - Se uma janela tem quatro vidros, cada vidro é um quarto dos vidros da

---

[107] Guia do professor ou manual do professor.
[108] Livro do aluno que vem em seguida ao guia ou manual do professor.

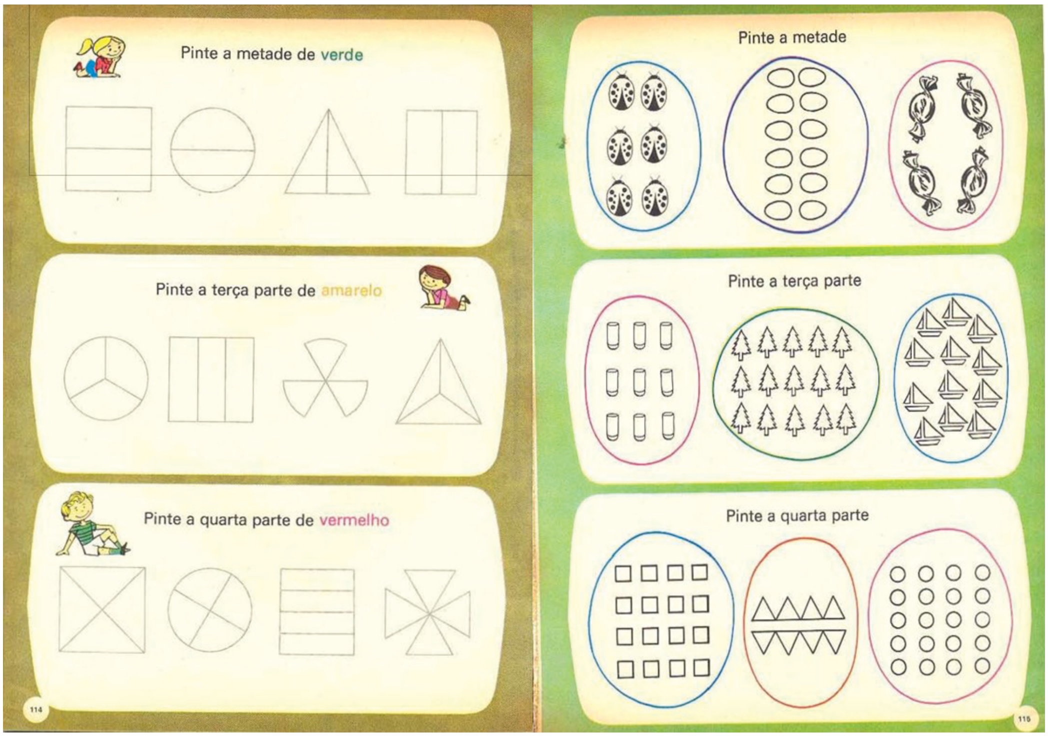
> janela.
> Ou se a sala tiver duas folhas de portas exatamente do mesmo tamanho, dirá:
> - Cada uma é a metade, etc.
> Se não for encontrado nenhum exemplo de terça parte, será preciso criá-lo.
> Finalmente, o professor levará para a classe cartazes análogos aos da página 114 e mostrará que cada figura[109] está dividida em partes, da mesma forma e do mesmo tamanho, portanto em *metade, terças partes e quartas partes.*
> Sugerimos que o professor realize outras atividades análogas aos da página 114 e mostrará que cada figura está dividida em partes, da mesma forma e do mesmo tamanho em metades, terças partes e quartas partes.
> Sugerimos que o professor realize outras atividades análogas, como por exemplo:
> - Vamos colocar seis flores em dois vasos.
> - Coloquemos uma flor em cada vaso até terminarem as flores.
> - Em cada vaso colocamos a metade das flores.
> O mesmo se fará com a terça parte e quarta parte.
> Depois de os alunos compreenderem essas situações, poderá ser apresentada a página 115.
> Com atividades semelhantes às descritas, o professor criará condições para a compreensão de dobro, triplo, mas terá sempre o cuidado de relacionar *metade* com *dobro* (Liberman, Sanchez, Franchi, 1975, p. 30).

Somente após todo esse trabalho no concreto as crianças estariam preparadas para resolver as atividades propostas no livro didático, conforme a figura 40, em situações de figuras divididas e conjuntos de elementos divididos em partes.

---

[109] As quais as professoras do NEDEM se referem como atividade semiabstrata.

FIGURA 40 - INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES DE FIGURAS E CONJUNTO DE ELEMENTOS



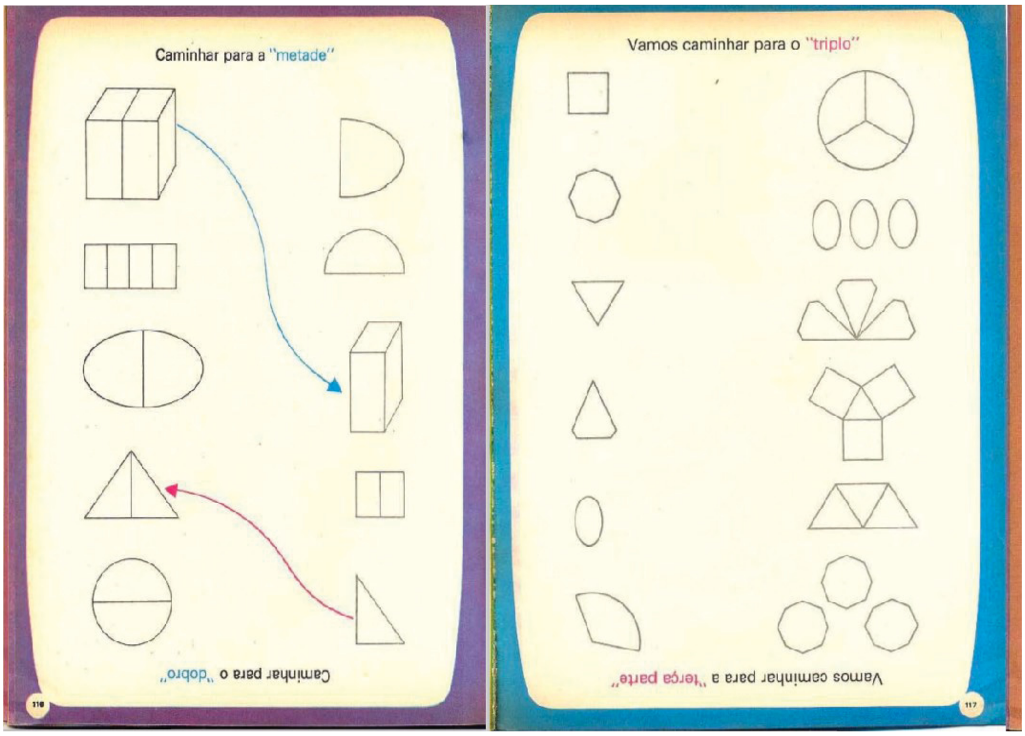
FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1975, p. 114 - 115).

Este cuidado em relacionar metade com dobro é aferido com os exercícios e problemas, trabalhados nas páginas 116 e 117, aqui entendidos como as respostas esperadas pelo professor e que articula sequência, significado e graduação:

> Nas páginas 116 e 117 os alunos observarão as figuras da direita e as da esquerda e os *títulos* no alto e no pé da página. O professor explicará que os alunos devem cumprir a primeira ordem para depois virarem a página e executar a outra ordem. Observarão também que as flechas, azul e vermelha, seguem o mesmo caminho, porém em sentidos opostos (isto é, relacionam os mesmos objetos) e que, portanto, estamos enfatizando o relacionamento dobro, metade etc. (Liberman, Sanchez, Franchi, 1975, p. 30).

A figura 41 visa ilustrar o que as autoras chamaram, nas orientações ao professor, de “relacionamento dobro, metade e triplo, terça parte”, esta relação pode ser observada mediante a rotação da página, proposta pelas autoras, assim, na posição que é apresentada neste trabalho, observamos a relação existente entre uma figura e a sua metade e uma figura ao seu triplo. Rotacionando a página em 180°, a relação se torna uma figura ao seu dobro e uma figura à sua terça parte.

FIGURA 41 - DOBRO E METADE, TRIPLO E TERÇA PARTE



FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1975, p. 116 - 117).

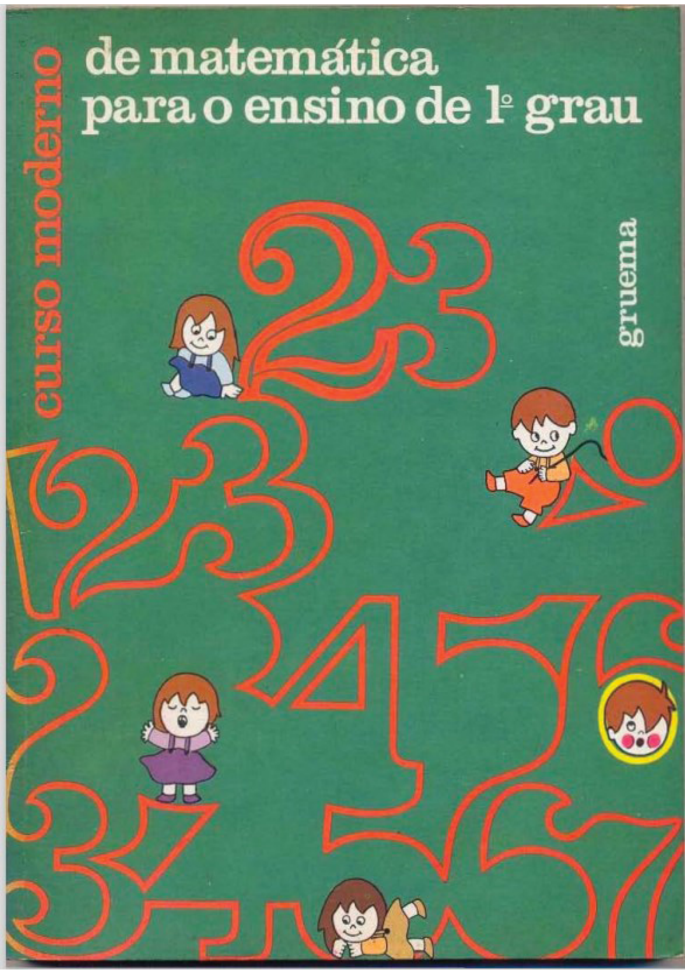
Cabe enfatizar (que)o que as autoras colocaram no início das orientações ao professor, qual seja, “Novamente será feito um trabalho inicial com material concreto, especialmente neste capítulo, não trataremos aqui de formação dos conceitos, mas, sim, do seu uso em situações concretas”. Isto deixa claro o respeito ao desenvolvimento infantil da criança que está no início da etapa pré-operatória (7 anos).

Entendido o que é dobro, metade, quarta parte e triplo, terça parte, encerra-se o trabalho com “fração” no primeiro ano.

6.3 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO SEGUNDO VOLUME DA COLEÇÃO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU DO GRUEMA

O volume 2 está destacado no quadro 16, bem como algumas informações quanto às suas características físicas, enfatizando que esta coleção, quando estamos falando em materialidade da obra, era muito diferenciada das que circulavam na época, em termos de livros didáticos, uma vez que era toda ela impressa a cores.

QUADRO 16 - CAPA DO VOLUME 2 - 2ª SÉRIE

<table>
<tr><th>CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">
</td><td>Quantidade de página</td><td>178[110]</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Companhia Editora Nacional</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>1974</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>19 cm x 26 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ainda destacando a materialidade da coleção, as ilustradoras[111], Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina Barata Tracanella, duas jovens alunas da turma de 1967 do Instituto de Arte e Decoração (IADÊ), foram muito importantes para, além de tornarem o livro atraente ao público infantil, ajudar a informar, de maneira eficiente, através das imagens (Villela, 2009).</td></tr>
</table>

FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1974 – capa).

No volume 2, o sumário também está localizado no guia do professor e apresenta uma organização como a apresentada no quadro 17.

110 O livro todo era composto por: Guia do Professor, das páginas 1 a 43, no início do livro e do Livro do Aluno que vem, após o Guia do Professor, enumerado da página 1 a 135.
111 Ao final dessa seção detalharemos melhor o trabalho das ilustradoras.

QUADRO 17 - SUMÁRIO DO VOLUME 2 - 2ª SÉRIE DO ENSINO PRIMÁRIO

CONTEÚDO	PG DO ALUNO	PG DO GUIA
Fatos fundamentais da adição: fatos fundamentais da subtração; soma de três parcelas	1	5
Fatos fundamentais da multiplicação e da divisão de resultados menores ou iguais a 20	12	11
Adição e subtração com números menores que 100	19	12
Sistema de numeração: introdução da centena	43	17
Adição e subtração com números menores que 1.000	57	21
Geometria: curvas e regiões	72	24
Multiplicação: fatos fundamentais de produto maior que 20	79	30
Multiplicação com um dos fatores menor que 10 e o outro menor que 100	103	35
Divisão: quociente, resto	111	36
Segmento de reta: medida	123	39
Frações	**129**	**41**

FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1974, p.4).

O quadro 18 objetiva mostrar como a fração é trabalhada dentro desse volume.

QUADRO 18 - DETALHAMENTO DO TRABALHO COM FRAÇÕES

PÁGINA DO LIVRO	O QUE ABORDA?	CONCEITO DE FRAÇÃO:	AÇÃO DA CRIANÇA
129	Dobro e metade: triplo e terça parte	Parte-todo (elemento contínuo)	Ligar.
130	Pares ordenados[112]	Parte-todo (elemento contínuo)	Completar tabela e pintar.
131	Pares ordenados	Parte-todo (elemento contínuo)	Pintar e escrever pares ordenados[113].
132	Pares ordenados	Parte-todo (elemento contínuo)	Pintar e escrever pares ordenados.
133	Pares ordenados	Parte-todo (elemento contínuo)	Pintar e escrever pares ordenados.
134	Pares ordenados e situações problemas	Parte-todo (elemento contínuo e discreto)	Completar situações problemas e escrever pares ordenados.
135	Pares ordenados e situações problemas	Parte-todo (elemento contínuo e discreto)	Completar figuras ou situações problemas.

FONTE: Baseado em Liberman, Sanchez, Franchi (1974, p.129 a 135).

[112] As autoras abordam os pares ordenados, associando-os à fração, isso após fazerem uma retomada do que foi trabalhado no primeiro ano (dobro, metade, quarta parte, triplo e terça parte).
[113] Mediante a representação de uma figura, parte-todo, de uma fração, colocar o par ordenado correspondente. Ora a figura já está pronta, ora a criança precisa pintar.

Toda essa ênfase ao trabalho com pares ordenados associados às frações encontra justificativa nas próprias palavras das autoras, postas no manual do professor do volume 2:

> Para o professor, o objetivo geral destas páginas deverá ser o de preparar o aluno à compreensão do conceito[114] de fração (número racional) que será dado na 3ª série.
> Introduzimos os pares ordenados de números associados a figuras planas divididas em partes equivalentes, pretendendo que o aluno comece a perceber a existência de figuras, assim como de pares equivalentes.
> Utilizamos para isto as noções de metade (página 131), terça parte (página 132) e quarta parte, que são fundamentais para a compreensão de números racionais (Liberman, Sanchez, Franchi (1974, p. 42).

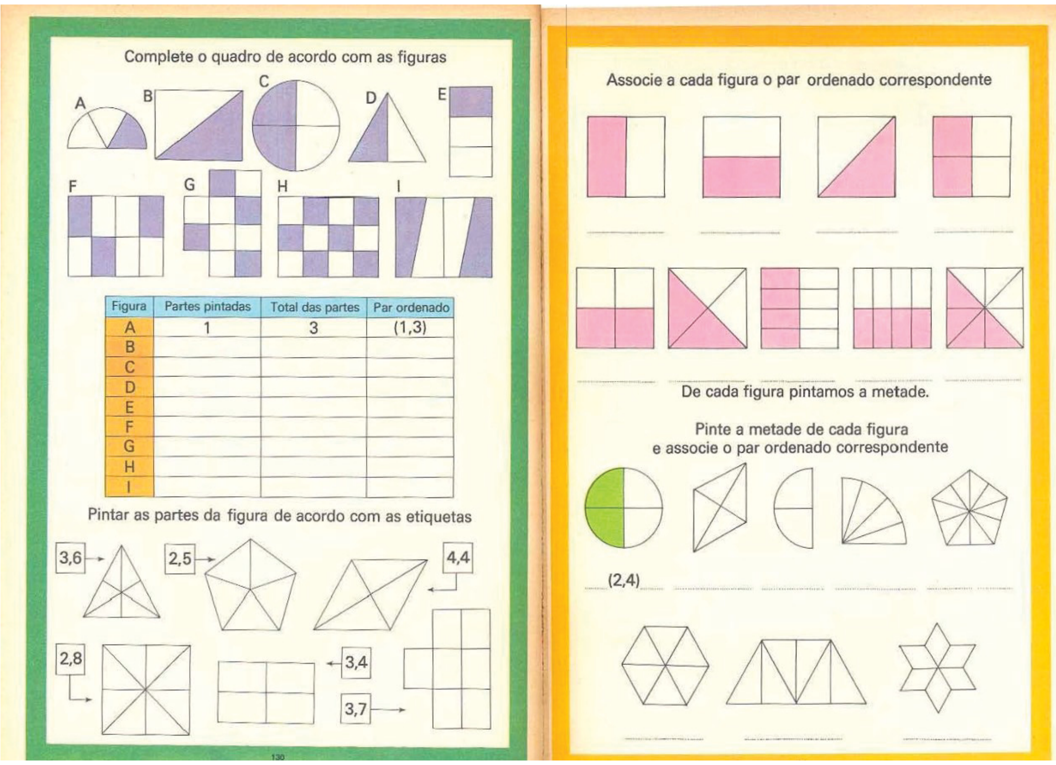
Percebe-se, pela disposição das atividades e por as autoras reforçarem isso no guia do professor, a sequência para o melhor entendimento do que é fração, qual seja, metade, terça parte e quarta parte, para depois conceituar fração.

Na figura 42 e na coleção como um todo percebemos o Princípio da Variabilidade Perceptiva. Por exemplo, no canto superior direito temos a noção de metade relacionada a diferentes divisões do mesmo todo. Dessa forma a criança poderia abstrair o conceito de metade, pois seria o mesmo para variadas situações.

---

[114] Lembrando, aqui, que o objetivo no primeiro volume era o uso da "fração" em situações concretas, e não, de conceituar o que é fração.

FIGURA 42 - PRINCÍPIO DA VARIABILIDADE PERCEPTIVA



FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1974, p. 30 - 31).

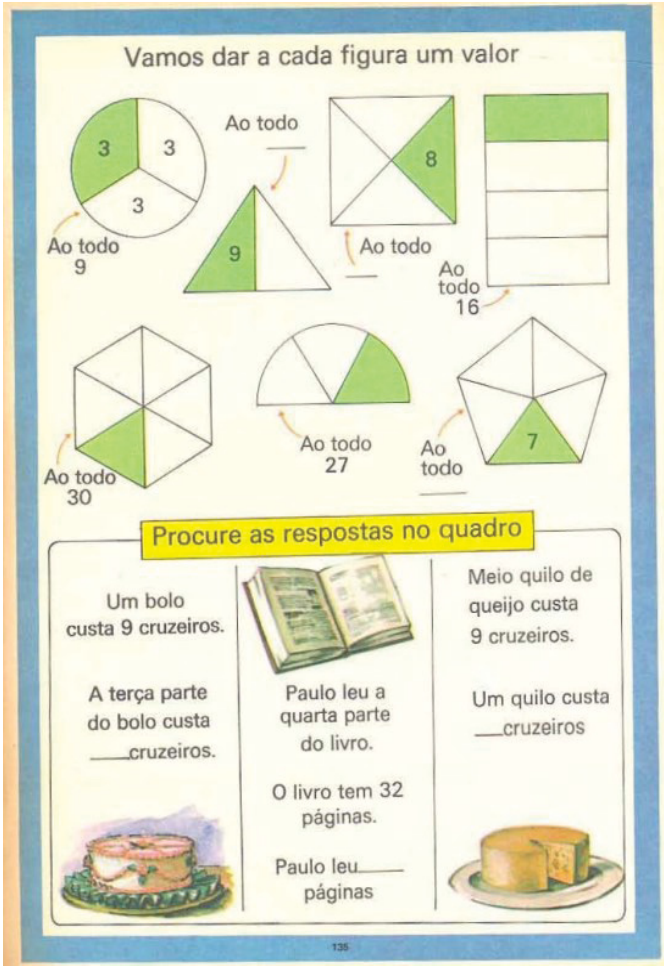
Com isso fica claro, também, o significado, o que a criança precisa saber para aprender fração, segundo o que o livro aborda: o conceito de metade, terça parte, quarta parte, em assim sendo, a divisão em partes iguais.

Destacamos a graduação, o passo a passo, presentes no guia do professor:

> Recursos:
> 1) utilizar, como material individual, um conjunto de círculos de mesmo tamanho, recortados em metades, terças e quartas partes;
> 2) este mesmo material poderá ser usado em flanelógrafo.
> 3) recortar em cartolina outras formas de figuras que os alunos poderão dividir em metade, terça parte, etc. e recortar em partes equivalentes.
> Atividades anteriores:
> Comparar, por superposição, figuras de mesma forma.
> Recortar círculos de mesmo tamanho em metades, terças partes e quartas partes. Recompor o círculo.
> Comparar um terço, dois terços, três terços; um quarto, dois quartos etc.
> Recompor a metade usando quartas partes, sextas partes, oitavas partes etc.
> Recompor a quarta parte usando quartas partes, oitavas partes etc.
> Utilizando figuras, como por exemplo o retângulo, recortá-las em metades de diferentes maneiras.
> Verificar que em todos os casos obtêm-se figuras do mesmo tamanho.
> Utilizar as noções aprendidas em situações simples da vida da criança, como propomos na página 135 (Liberman, Sanchez, Franchi (1974, p. 43).

A articulação entre sequência, significado e graduação é feita por meio de exercícios e problemas do livro, que destacamos na figura 43.

FIGURA 43 - A FRAÇÃO NO COTIDIANO



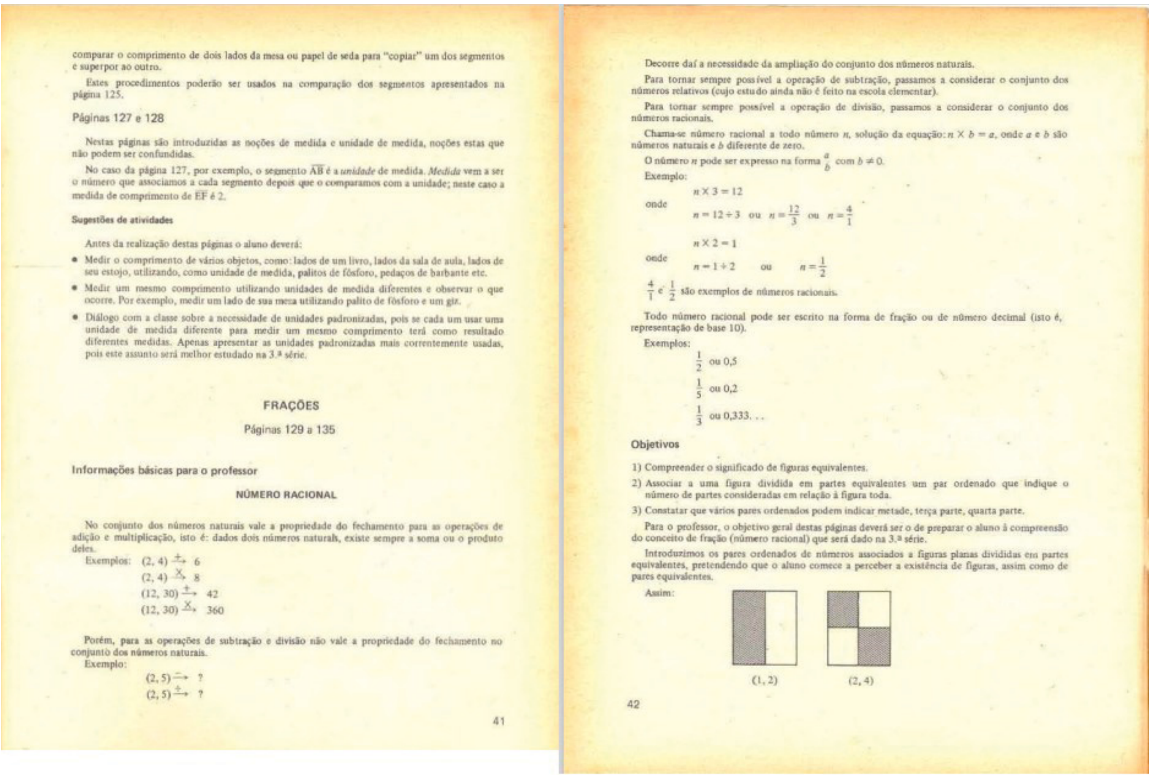
FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1974, p. 135)

Na figura 43, observa-se uma clara tentativa de verificar se a criança compreendeu o que é fração quando as autoras propõem que se responda às situações problemas do cotidiano, tendo como apoio a imagem de fração enquanto parte-todo de, aqui, no exemplo, elementos discretos.

Todos esses são *saberes para ensinar* matemática, porém as autoras trazem no guia do professor o conceito de número racional, um *saber a ensinar,* por se tratar de um conteúdo complexo já que a fração, dentro do Movimento da Matemática Moderna, é tratada como a porta de entrada para os números racionais.

Vejamos isso no guia do professor do 2º volume na figura 44:

FIGURA 44 - *SABER A ENSINAR*: NÚMEROS RACIONAIS



comparar o comprimento de dois lados da mesa ou papel de seda para "copiar" um dos segmentos e superpor ao outro.

Estes procedimentos poderão ser usados na comparação dos segmentos apresentados na página 125.

Páginas 127 e 128

Nestas páginas são introduzidas as noções de medida e unidade de medida, noções estas que não podem ser confundidas.

No caso da página 127, por exemplo, o segmento $\overline{AB}$ é a *unidade* de medida. *Medida* vem a ser o número que associamos a cada segmento depois que o comparamos com a unidade; neste caso a medida de comprimento de $\overline{EF}$ é 2.

Sugestões de atividades

Antes da realização destas páginas o aluno deverá:

- Medir o comprimento de vários objetos, como: lados de um livro, lados da sala de aula, lados de seu estojo, utilizando, como unidade de medida, palitos de fósforo, pedaços de barbante etc.
- Medir um mesmo comprimento utilizando unidades de medida diferentes e observar o que ocorre. Por exemplo, medir um lado de sua mesa utilizando palito de fósforo e um giz.
- Diálogo com a classe sobre a necessidade de unidades padronizadas, pois se cada um usar uma unidade de medida diferente para medir um mesmo comprimento terá como resultado diferentes medidas. Apenas apresentar as unidades padronizadas mais correntemente usadas, pois este assunto será melhor estudado na 3.ª série.

FRAÇÕES

Páginas 129 a 135

Informações básicas para o professor

NÚMERO RACIONAL

No conjunto dos números naturais vale a propriedade do fechamento para as operações de adição e multiplicação, isto é: dados dois números naturais, existe sempre a soma ou o produto deles.

Exemplos: $(2, 4) \xrightarrow{+} 6$

$(2, 4) \xrightarrow{\times} 8$

$(12, 30) \xrightarrow{+} 42$

$(12, 30) \xrightarrow{\times} 360$

Porém, para as operações de subtração e divisão não vale a propriedade do fechamento no conjunto dos números naturais.

Exemplo:

$(2, 5) \xrightarrow{-} ?$

$(2, 5) \xrightarrow{\div} ?$

41

Decorre daí a necessidade da ampliação do conjunto dos números naturais.

Para tornar sempre possível a operação de subtração, passamos a considerar o conjunto dos números relativos (cujo estudo ainda não é feito na escola elementar).

Para tornar sempre possível a operação de divisão, passamos a considerar o conjunto dos números racionais.

Chama-se número racional a todo número n, solução da equação: $n \times b = a$, onde a e b são números naturais e b diferente de zero.

O número n pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$.

Exemplo:

$n \times 3 = 12$

onde

$n = 12 \div 3$ ou $n = \frac{12}{3}$ ou $n = \frac{4}{1}$

$n \times 2 = 1$

onde

$n = 1 \div 2$ ou $n = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{1}$ e $\frac{1}{2}$ são exemplos de números racionais.

Todo número racional pode ser escrito na forma de fração ou de número decimal (isto é, representação de base 10).

Exemplos:

$\frac{1}{2}$ ou 0,5

$\frac{1}{5}$ ou 0,2

$\frac{1}{3}$ ou 0,333. . .

Objetivos

1) Compreender o significado de figuras equivalentes.
2) Associar a uma figura dividida em partes equivalentes um par ordenado que indique o número de partes consideradas em relação à figura toda.
3) Constatar que vários pares ordenados podem indicar metade, terça parte, quarta parte.

Para o professor, o objetivo geral destas páginas deverá ser o de preparar o aluno à compreensão do conceito de fração (número racional) que será dado na 3.ª série.

Introduzimos os pares ordenados de números associados a figuras planas divididas em partes equivalentes, pretendendo que o aluno comece a perceber a existência de figuras, assim como de pares equivalentes.

Assim:

(1, 2) (2, 4)

42

FONTE: Liberman, Sanchez, Franchi (1974, p. 41-42)

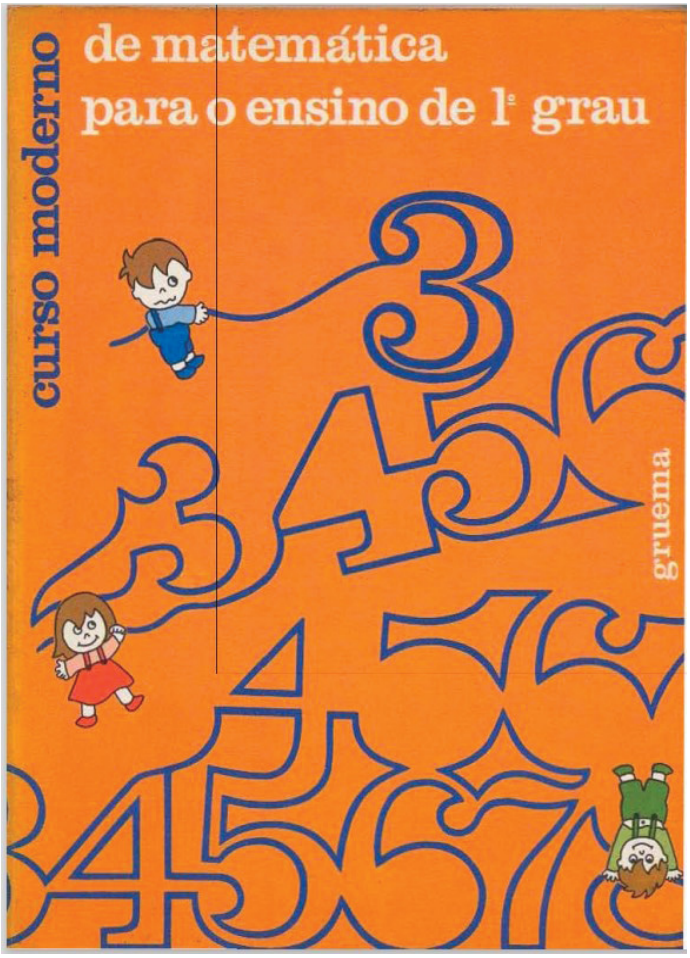
No volume 2, as autoras retomam e aprofundam a fração como sendo parte-todo e introduzem a relação com os pares ordenados. Utilizaram para isso muitas imagens e pouco texto, o que demonstra a ligação com a teoria de Jean Piaget, que preconiza primeiro a operação no concreto para que depois se avance, mediado por elementos figurativos, para o abstrato.

Como as próprias autoras colocaram, o objetivo do trabalho com fração na segunda série era preparar os alunos para o conceito de fração, que seria abordado na terceira série, como veremos a seguir.

6.4 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO TERCEIRO VOLUME DA COLEÇÃO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU DO GRUEMA

No quadro 19 podemos observar a capa do volume 3 e as primeiras impressões acerca deste livro.

QUADRO 19 - LIVRO VOLUME 3 - 3ª SÉRIE

<table>
<tr><th>CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="6">
</td><td>Quantidade de página</td><td>209[115]</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Companhia Editora Nacional</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>1974</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>19 cm x 26 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Na capa, com o mesmo acabamento gráfico dos outros volumes, há uma clara evidência de que o livro tem ligação com a teoria piagetiana, uma vez que as crianças “interagem” com a matemática (algarismos) de forma lúdica (na capa um cabo de guerra, brincadeira tipicamente infantil).
Em assim sendo, as ilustradoras tornam o livro didático mais atraente para as crianças.</td></tr>
</table>

FONTE: Liberman, Sanchez (1974 – capa).

O sumário do livro, posto, como em toda a coleção, junto ao manual do professor (QUADRO 20), mostra que as autoras, como já enunciado no manual do professor do volume 2, abordam o conceito de fração, não só como parte-todo mas como sendo uma das representações do número racional.

---

[115] Como em toda a coleção, o Manual do Professor e o Livro do Aluno estão na mesma obra, no volume 3, o Manual do Professor está no início do livro e vai da página 1 a 40, em seguida vem o Livro do Aluno, que reinicia a numeração, vai da página 1 a 169.

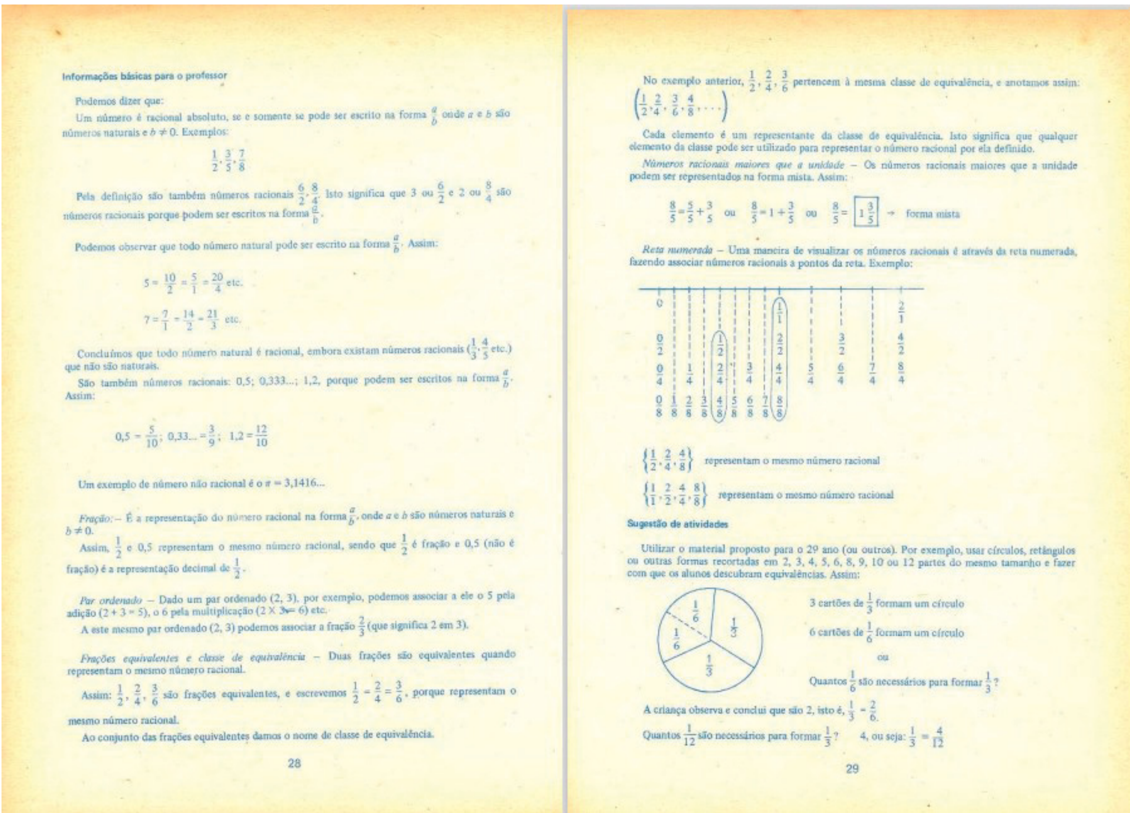
QUADRO 20 - SUMÁRIO DO VOLUME 3

CONTEÚDO	Livro do aluno	Guia do professor
Representação decimal dos números naturais	1	1
Adição e subtração de números naturais	18	6
Multiplicação com números naturais	35	6
Divisão com números naturais	50	8
Geometria: Ponto. Segmento de reta. Polígonos. Reta. Retas paralelas e concorrentes. Classificação dos quadriláteros	63	10
Relações: Ser múltiplo, ser fator, ser divisor, ser igual, ser menor, ser maior. Gráfico cartesiano	79	18
Representação dos números racionais em forma de fração: Comparação. Adição. Subtração	**102**	**27**
Representação decimal dos números racionais: Comparação. Adição. Subtração	**129**	**33**
Medidas de comprimento, massa e capacidade. Escala	**146**	**37**

FONTE: Liberman, Sanchez (1974, sem numeração).

No volume 3, figura 45, abordam, como já o fizeram no volume 2 no manual do professor, algumas informações acerca da definição de número racional, ou seja, elas trazem um *saber a ensinar,* o que evidencia a clareza das autoras com relação ao conhecimento da área da matemática e quais saberes para ensinar frações se esperava dos professores que ensinavam matemática para o primário para atender às transformações ocorridas por conta do MMM.

FIGURA 45 - *SABER A ENSINAR* SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS



Informações básicas para o professor

Podemos dizer que:

Um número é racional absoluto, se e somente se pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ onde a e b são números naturais e $b \neq 0$. Exemplos:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}$$

Pela definição são também números racionais $\frac{6}{2}, \frac{8}{4}$. Isto significa que 3 ou $\frac{6}{2}$ e 2 ou $\frac{8}{4}$ são números racionais porque podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$.

Podemos observar que todo número natural pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$. Assim:

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = \frac{20}{4} \text{ etc.}$$

$$7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{21}{3} \text{ etc.}$$

Concluímos que todo número natural é racional, embora existam números racionais ($\frac{1}{3}, \frac{4}{5}$ etc.) que não são naturais.

São também números racionais: 0,5; 0,333...; 1,2, porque podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$. Assim:

$$0{,}5 = \frac{5}{10};\ 0{,}33... = \frac{3}{9};\ 1{,}2 = \frac{12}{10}$$

Um exemplo de número não racional é o $\pi = 3{,}1416...$

Fração: – É a representação do número racional na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais e $b \neq 0$.

Assim, $\frac{1}{2}$ e 0,5 representam o mesmo número racional, sendo que $\frac{1}{2}$ é fração e 0,5 (não é fração) é a representação decimal de $\frac{1}{2}$.

Par ordenado – Dado um par ordenado (2, 3), por exemplo, podemos associar a ele o 5 pela adição (2 + 3 = 5), o 6 pela multiplicação (2 × 3 = 6) etc.

A este mesmo par ordenado (2, 3) podemos associar a fração $\frac{2}{3}$ (que significa 2 em 3).

Frações equivalentes e classe de equivalência – Duas frações são equivalentes quando representam o mesmo número racional.

Assim: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ são frações equivalentes, e escrevemos $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, porque representam o mesmo número racional.

Ao conjunto das frações equivalentes damos o nome de classe de equivalência.

28

No exemplo anterior, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ pertencem à mesma classe de equivalência, e anotamos assim: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right)$

Cada elemento é um representante da classe de equivalência. Isto significa que qualquer elemento da classe pode ser utilizado para representar o número racional por ela definido.

Números racionais maiores que a unidade – Os números racionais maiores que a unidade podem ser representados na forma mista. Assim:

$$\frac{8}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{8}{5} = \boxed{1\frac{3}{5}} \rightarrow \text{forma mista}$$

Reta numerada – Uma maneira de visualizar os números racionais é através da reta numerada, fazendo associar números racionais a pontos da reta. Exemplo:

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}\right\}$ representam o mesmo número racional

$\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}\right\}$ representam o mesmo número racional

Sugestão de atividades

Utilizar o material proposto para o 2º ano (ou outros). Por exemplo, usar círculos, retângulos ou outras formas recortadas em 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ou 12 partes do mesmo tamanho e fazer com que os alunos descubram equivalências. Assim:

3 cartões de $\frac{1}{3}$ formam um círculo

6 cartões de $\frac{1}{6}$ formam um círculo

ou

Quantos $\frac{1}{6}$ são necessários para formar $\frac{1}{3}$?

A criança observa e conclui que são 2, isto é, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Quantos $\frac{1}{12}$ são necessários para formar $\frac{1}{3}$? 4, ou seja: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

29

FONTE: (Liberman; Sanchez, 1974, p. 28-29).

Na sequência usada pelas autoras, a fração é trabalhada após o estudo das relações, em sendo assim, significa que a criança primeiro precisa entender que, na matemática, muitas coisas estão relacionadas umas com as outras para depois entender o que a fração, que até agora na coleção vem sendo tratada como uma área de uma figura parte-todo, também pode ser um número (racional), e como é um número, pode ser localizado na reta numerada. Abaixo o passo a passo (graduação) de como o professor deve proceder com o trabalho de fração no volume 3 da coleção.

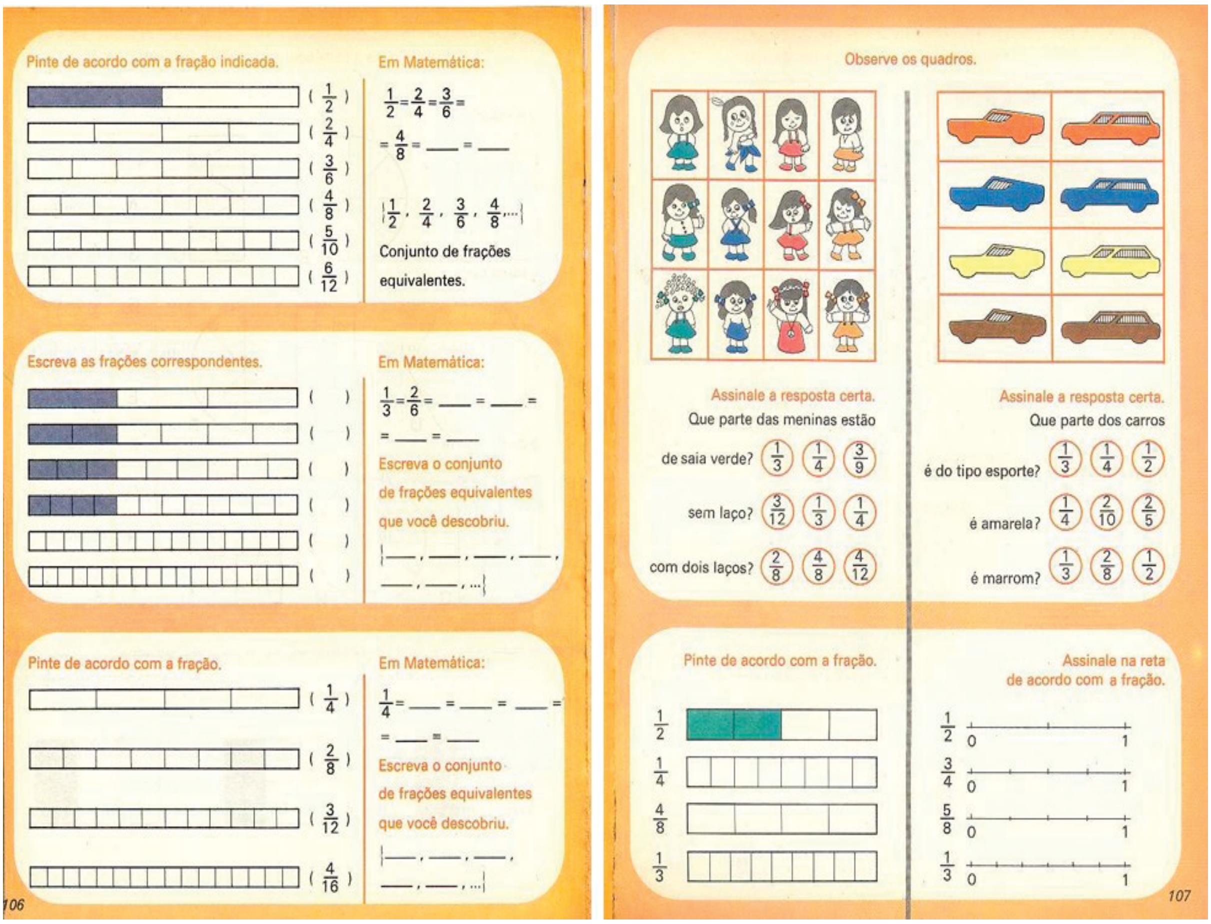
> **Página 102:** os exercícios desta página revêem a relação entre o número de partes pintadas e o todo e a sua representação sob forma de fração (ver exercícios análogos no Gruema 2).
> **Páginas 103 a 105:** Os exercícios destas páginas visam levar o aluno a perceber que a mesma parte do todo pode ser representada por meio de diferentes frações (também aqui o uso do papel quadriculado facilitará o trabalho dos alunos) e que figuras de formas diferentes (mas de mesma área) podem representar uma mesma fração.
> É importante (como se fez com os números naturais) estudar alguns números racionais na forma de fração: metade, terça parte etc.

> **Páginas 106 a 108:** Estas páginas apresentam quadros do tipo que permitem representar frações e compará-las visualmente (as faixas e as partes não congruentes).
> O aluno começa pintando a parte correspondente à fração e vice-versa.
> Estes exercícios também devem ser feitos inicialmente em papel quadriculado.
> Além destes esquemas para visualização da equivalência de frações, são dados outros como, por exemplo, os da página 107, que associam as frações a uma situação mais concreta e a sua representação na reta numerada.
> *Observações:* convém rever os exercícios de representação dos números naturais na reta numerada (Gruema 2)
> As conclusões de equivalência de frações a que os alunos devem chegar decorrem dos exercícios e só depois de percebidas pela maioria é que o professor poderá ressaltá-las. (Deste modo ajudará aqueles que não as tenham percebido).
> Retomando o material concreto usado para descobrir as equivalências, os alunos irão descobrir que: se o círculo está dividido em 8 partes, então o inteiro pode ser representado por 8/8, ou se está dividido em 4, por 4/4, e assim por diante.
> **Páginas 109 e 110:** Como nas páginas anteriores, os alunos, sozinhos, compreenderão que um número natural pode ser representado na forma de fração, isto é: 1 = 8/8 ou 2 = 16/8 etc.
> **Páginas 111 e 112:** Assim como a ideia de equivalência foi apresentada através de uma superposição de figuras que representavam parte do inteiro, também será apresentada a ideia de "maior que" e, em seguida, será proposta em problemas que correspondam a situações práticas.
> **Páginas 113 a 118:** O conceito de adição e subtração com números racionais segue um trabalho análogo àquele do 1º ano (Gruema 1) em que o aluno responde:
> quantos azuis?
> quantos vermelhos?
> quantos ao todo?
> antes mesmo de saber que está fazendo uma soma (ou diferença, dependendo da ordem das perguntas). Claro está que a passagem das perguntas à representação matemática é imediata.
> Nesta etapa (pág. 114) também trabalhamos com a adição de parcelas iguais, que nos levarão à multiplicação onde um dos fatores é um número natural e o outro um número racional (fração). Este tópico é aqui tratado, dada a sua necessidade quando da introdução da representação decimal dos números racionais (página 131).
> Em seguida propomos situações que levam à descoberta dos números racionais maiores que a unidade.
> Sugestões de atividades (páginas 119 a 128) (Liberman; Sanchez, 1974, p. 30-31).

O trecho (e vários outros ao longo da coleção) de orientações aos professores em relação ao ensino de frações, é um exemplo da articulação entre os saberes a ensinar e para ensinar, ou seja, uma matemática produzida pela cultura escolar à matemática do ensino. Cabe destacar que as autoras propõem, no manual do professor, outras atividades para se trabalhar com a criança para além das que o livro do aluno já traz.

Na figura 46, elucidamos os quadros de frações em que é possível comparar as classes de frações visualmente para que o aluno perceba o "conjunto de frações equivalentes” (p. 106). Na página seguinte, há uma variabilidade matemática e perceptiva quando perguntam “Que parte das meninas estão com saia verde?” e a resposta é $\frac{1}{4}$. Depois perguntam “Que parte das meninas estão sem laço?” e a resposta é $\frac{3}{2}$. Ou seja, uma outra maneira de trabalhar a equivalência entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{12}$. No canto inferior direito da figura, é a primeira vez na coleção que se trabalha com frações e reta numérica.

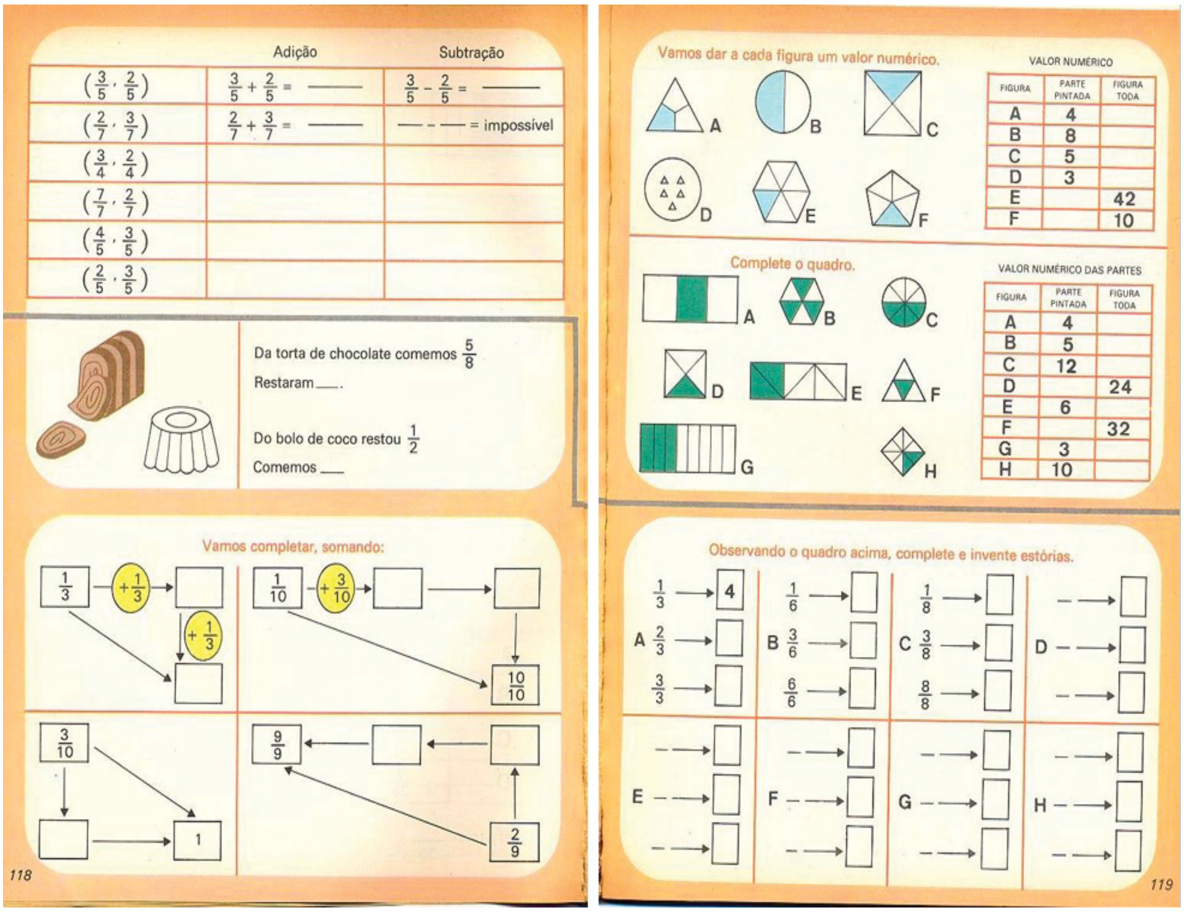
FIGURA 46 - VISUALIZAÇÃO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES



FONTE: Liberman, Sanchez (1974, p. 106 - 107).

Na figura 47, a “máquina de calcular” (canto inferior esquerdo), associada a um contexto de frações, aparece pela primeira vez no terceiro volume da coleção, associada à soma de frações homogêneas que resultam em um todo representado, seja por números inteiros - “1”, seja por frações “$\frac{9}{9}$” ou “$\frac{10}{10}$”. As transformações de estados[116], Sanchez (2024) atribui a George Papy. A página da direita traz uma nova ideia sobre o que pode representar as partes de uma imagem. Por exemplo, se temos um triângulo dividido em três partes iguais e cada parte vale quatro, logo a figura toda valeria doze. No canto interior direito temos a mesma atividade, mas agora sem as imagens para a auxiliar.

FIGURA 47 - MÁQUINAS DE CALCULAR EM CONTEXTO DE FRAÇÕES



FONTE: Liberman, Sanchez (1974, p. 118 - 119).

Um primeiro problema com temática culinária ocorre na figura 48, e, nas páginas seguintes, há vários exemplos que contemplam contextos de medidas de tempo, comprimento, sistema monetário etc.

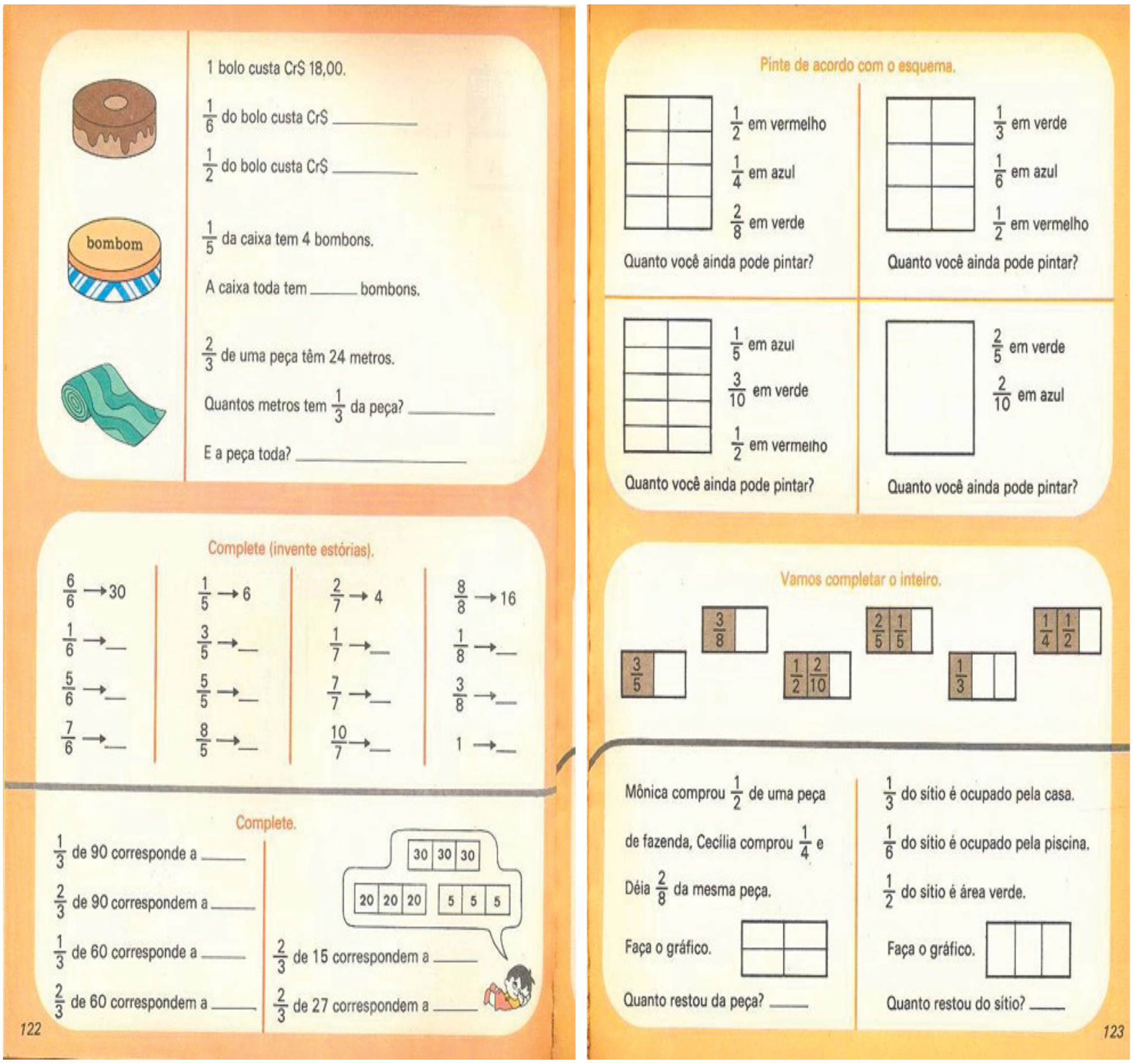
Os problemas são intercalados com atividades de retomada dos conteúdos como podemos observar na figura 48. No canto inferior direito temos, por exemplo “$\frac{1}{3}$

---

[116] Uma máquina de estados é qualquer dispositivo que armazena o *status* de um objeto em determinado momento que pode mudar ou causar outras ações, baseadas na entrada do que recebe.

de 90 corresponde a ___” e ao lado, temos um retângulo, dividido em três partes e dentro de cada parte o número 30.

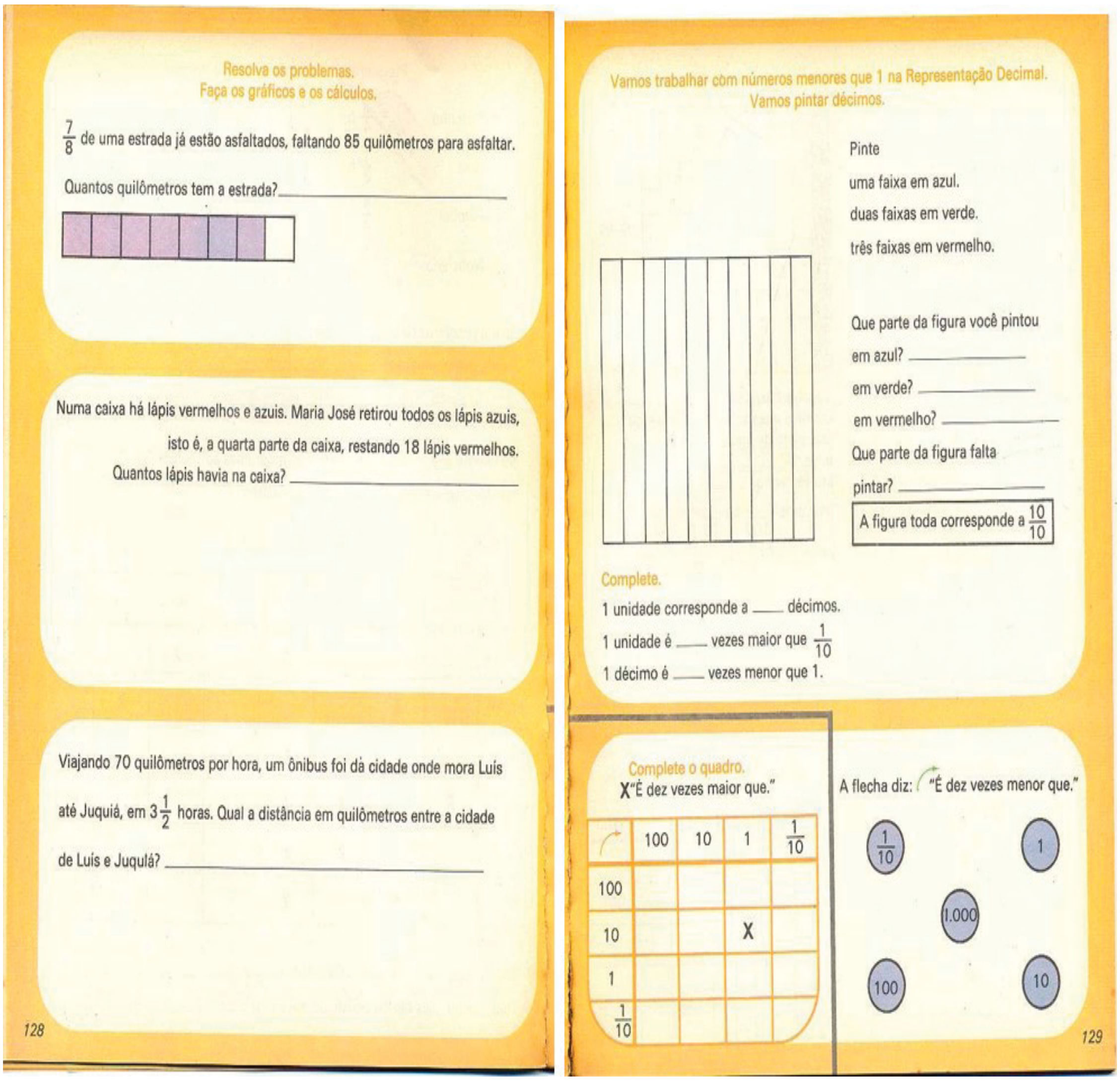
FIGURA 48 - PROBLEMAS E FRAÇÕES



FONTE: Liberman, Sanchez (1974, p. 122-123).

Nos últimos problemas da série (FIGURA 49) é solicitado que os alunos façam a representação gráfica dos problemas. Na sequência, é introduzida a ideia de frações decimais, centesimais e milesimais, sem utilizar a notação com a “vírgula”.

FIGURA 49 - INTRODUÇÃO A REPRESENTAÇÃO DECIMAL



Resolva os problemas.
Faça os gráficos e os cálculos.

$\frac{7}{8}$ de uma estrada já estão asfaltados, faltando 85 quilômetros para asfaltar.

Quantos quilômetros tem a estrada? ____

Numa caixa há lápis vermelhos e azuis. Maria José retirou todos os lápis azuis, isto é, a quarta parte da caixa, restando 18 lápis vermelhos.

Quantos lápis havia na caixa? ____

Viajando 70 quilômetros por hora, um ônibus foi da cidade onde mora Luís até Juquiá, em $3\frac{1}{2}$ horas. Qual a distância em quilômetros entre a cidade de Luís e Juquiá? ____

128

Vamos trabalhar com números menores que 1 na Representação Decimal.
Vamos pintar décimos.

Pinte
uma faixa em azul.
duas faixas em verde.
três faixas em vermelho.

Que parte da figura você pintou
em azul? ____
em verde? ____
em vermelho? ____
Que parte da figura falta pintar? ____

A figura toda corresponde a $\frac{10}{10}$

Complete.
1 unidade corresponde a ____ décimos.
1 unidade é ____ vezes maior que $\frac{1}{10}$
1 décimo é ____ vezes menor que 1.

Complete o quadro.
X "É dez vezes maior que."

	100	10	1	$\frac{1}{10}$
100				
10			X	
1				
$\frac{1}{10}$				

A flecha diz: "É dez vezes menor que."

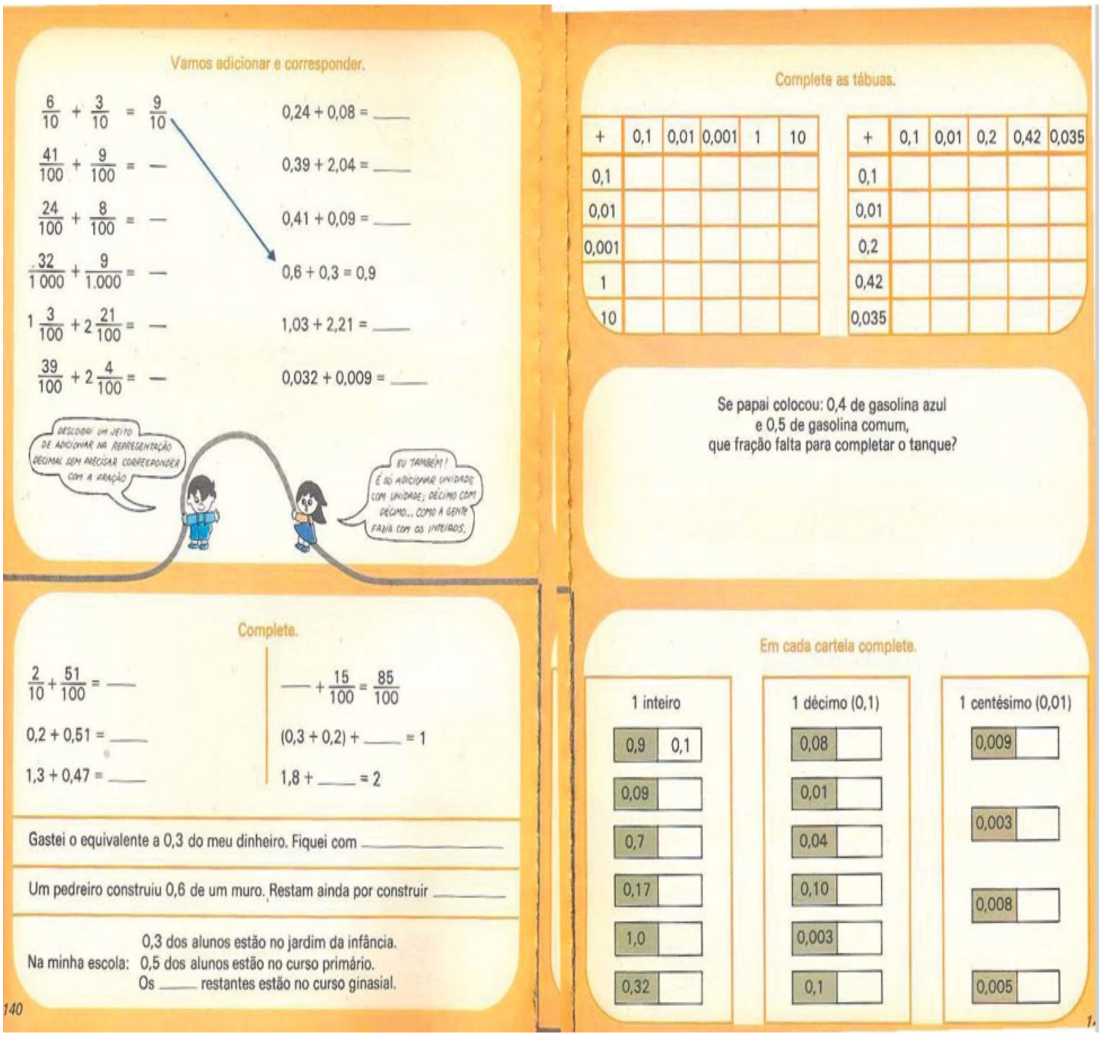
$\frac{1}{10}$ 1 1.000 100 10

129

FONTE: Liberman, Sanchez (1974, p. 128-129).

Somente após uma vasta experiência com estas frações ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$) de forma gradual é que o livro apresenta a articulação entre as frações e os decimais. No campo superior esquerdo da figura 50, temos uma atividade que solicita ao aluno "adicionar e corresponder" por meio do exemplo "$\frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$" que associa com "0,6 + 0,3 = 0,9", aqui, um número racional é representado também em forma de fração.

FIGURA 50 - ARTICULAÇÃO ENTRE FRAÇÕES E DECIMAIS



FONTE: Liberman, Sanchez (1974, p. 140 - 141).

Ao final desse tema, ao trabalhar com unidades de medida de comprimento, são explorados metro, decímetro, centímetro, milímetro e quilômetro; as medidas de massa, quilograma e grama, e as medidas de capacidade, litro e partes do litro. As situações problema são intercaladas com representação fracionária e a representação decimal.

O conteúdo de frações que, no primeiro e segundo volumes era apresentado envolvendo somente noções, é aprofundado[117] no terceiro volume com uma grande variedade de imagens e situações matemáticas com o intuito de que o aluno

[117] Se considerarmos os conteúdos de frações, decimais e medidas, são 66 páginas destinadas ao trabalho com essas três temáticas.

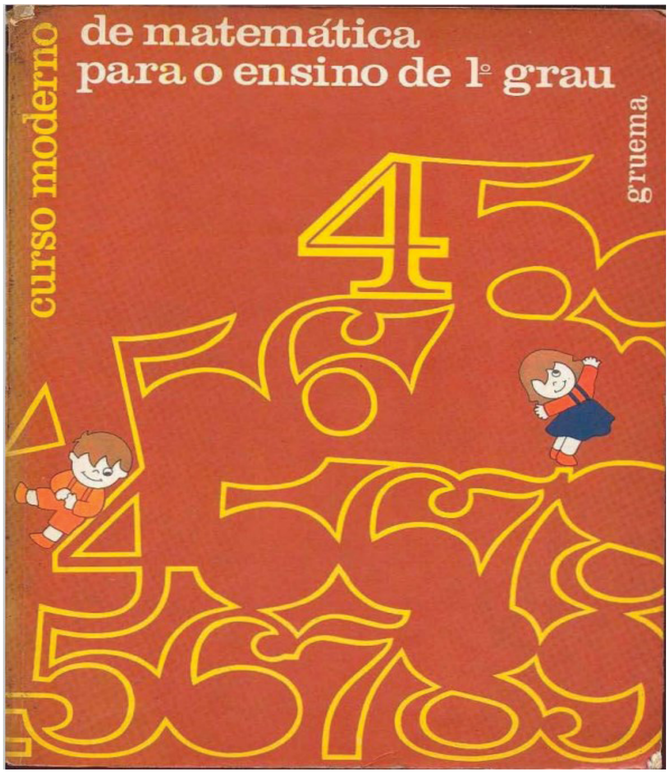
abstraia o conceito de frações e generalize. A transição da representação fracionária para a decimal é feita de forma natural, articulando as duas.

No volume 4, o trabalho com a fração como sendo um número racional é consolidado, conforme apresentamos a seguir.

6.5 IMAGENS PARA ENSINAR FRAÇÕES NO QUARTO VOLUME DA COLEÇÃO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU DO GRUEMA

No quadro 21, assim como nos volumes anteriores, trazemos as informações que caracterizam o material do livro didático.

QUADRO 21 - VOLUME 4 DA COLEÇÃO

<table>
<tr><th>CAPA</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="6">
</td><td>Quantidade de página</td><td>191[118]</td></tr>
<tr><td>Editora</td><td>Companhia Editora Nacional</td></tr>
<tr><td>Ano de edição</td><td>1975</td></tr>
<tr><td>Dimensões</td><td>19 cm x 26 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBSERVAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">As cores da impressão foram cuidadosamente escolhidas pelas autoras da obra e elas também passam uma informação.
O colorido das imagens presentes no interior da obra teve inspiração nas “máquinas de calcular” de George Papy[119].</td></tr>
</table>

FONTE: Liberman, Sanchez (1975 – capa).

[118] No volume 4, o Manual do Professor é posto no final do livro, assim, no início do livro está o Livro do Aluno, numerado da página 1 a 160, seguido do Manual do Professor, numerado da página 1 a 31.
[119] “Agora, o Papy foi um inspirador, George Papy, porque ele trabalhou muito com imagens”, (Sanchez, 2024) em depoimento oral.

Destacadas a materialidade do livro, segue agora uma análise da abordagem no conteúdo e as aproximações com a Matemática Moderna. No quadro 22, destacamos o sumário que consta no guia do professor do volume 4.

QUADRO 22 – SUMÁRIO DO VOLUME 4 DO GRUEMA

CONTEÚDO[120]	**Guia do professor**	**Livro do aluno**
Representação decimal dos números naturais	1	1
Operações com números naturais	3	13
Conjuntos: Fatores e divisores	6	29
Geometria: Ângulos e perpendiculares	9	46
Números racionais: Equivalência e ordem. Adição e subtração	**13**	**62**
Multiplicação e divisão de números racionais	**15**	**89**
Operações na representação decimal de números racionais.	**20**	**102**
Porcentagem.	**23**	**122**
Medida. Sistema legal de Unidades de Medida	**24**	**128**
Medida de tempo	**25**	**128**
Medida de superfície	**25**	**132**

FONTE: Liberman, Sanchez (1975, sem numeração).

O que podemos denotar, já pelo sumário, é que, se considerarmos as representações dos números racionais (frações, decimais, porcentagem) e a aplicação em contexto de medidas, conforme grifo do quadro 22, as autoras dedicam 70 páginas deste volume para o estudo desses conteúdos. Além disso, fração, é abordado logo após o estudo de ângulos e perpendiculares na geometria[121].

O passo a passo, ou seja, a graduação é dada pelo manual do professor que possui as seguintes orientações.

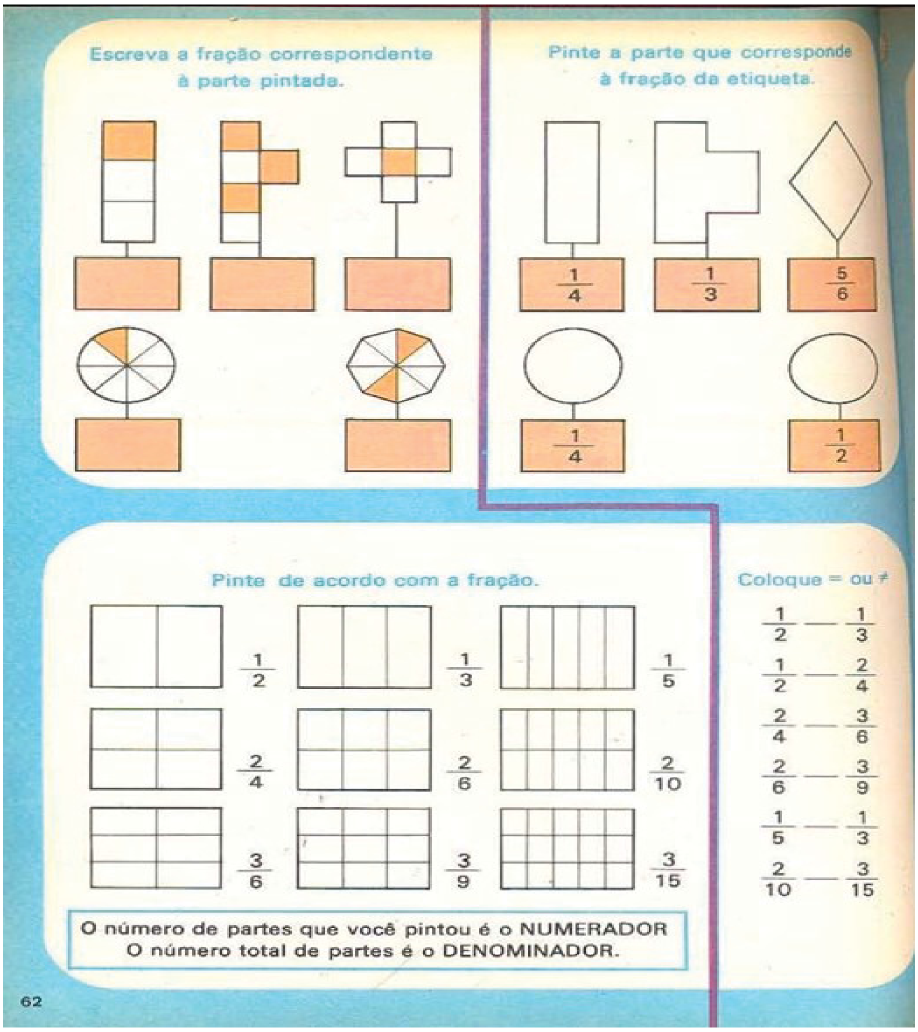
[120] No sumário do volume 4 não aparece a palavra fração, as autoras retomam o conceito (fração) usando a relação parte-todo e já avançam no estudo da fração enquanto número racional.
[121] Sanchez (2024) ao ser perguntada se houve uma intencionalidade ao colocar a fração logo após geometria, respondeu: “[...] isso foi bastante intencional. Porque o que acontecia é que era pouca geometria. Na Matemática Moderna, a geometria foi muito valorizada. Mesmo que estivesse trabalhando com medidas, e a gente falava, poxa vida, a geometria fica sempre nas últimas páginas. O professor, se der tempo, ele faz. Não, temos que colocar a geometria antes, temos que aplicar.

> **Páginas 62 a 69 -** Recordam o conceito de fração como sendo parte do todo e utilizam diferentes formas gráficas para os alunos descobrirem a equivalência.
> Na 3ª série ocorreram a descoberta da equivalência e a compreensão de que as frações equivalentes representam o mesmo número racional. Nesta série estas ideias voltam a fim de que as crianças descubram regras para encontrar ou identificar frações equivalentes.
> A equivalência leva ao conceito de número racional que está explicado nas páginas 68 e 69.
> O uso da reta numerada na página 69 visa também levar a criança a perceber que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ … são representadas pelo mesmo ponto na reta numerada.
> Para compreensão de números racionais na forma de fração são utilizados os mesmos recursos gráficos que para equivalência.
> Para a realização da página 67 (1º exemplo), o professor utiliza material concreto: 1 faixa branca, 2 verdes, 4 azuis, 8 vermelhas, 16 amarelas, todas equivalentes à branca em comprimento.
> O mesmo pode ser feito nos demais casos se o aluno precisar.
> **Páginas 70 a 76 -** Visam recortar a adição e subtração com números racionais na forma de fração de mesmo denominador.
> Através da adição de frações, o aluno deve descobrir as frações que representam ou números maiores que 1 = $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ …
> Aqui também é introduzida a forma mista 1 $\frac{1}{3}$para expressar 1 + $\frac{1}{3}$. São feitos muitos exercícios para comparar números maiores que a unidade e determinar a soma de frações maiores que a unidade.
> **Página 77 -** Propõe o desdobramento da unidade de diferentes maneiras, porém relacionadas entre si, através da representação gráfica e trabalhando com material concreto [...]
> **Páginas 78 a 85 -** Estas páginas propõem um trabalho sistemático de determinar soma e diferença com frações de denominadores diferentes. [...]
> As propriedades comutativa e associativa da adição com números racionais são apresentadas nas páginas 84 e 85 apenas em situações práticas.
> **Páginas 86 a 88 -** *Sugestão de atividades:* Rever os problemas apresentados nas séries anteriores que associavam um valor a uma parte do todo e se pedia o valor do todo (ou vice-versa).
> Os problemas propostos são de aplicação e devem ser lidos, analisados, interpretados e esquematizados, para evitar que sejam resolvidos por adivinhação ou pela repetição (Liberman; Sanchez, 1975, p. 30-31).

Nas orientações aos professores, percebemos que os conteúdos iniciados no terceiro volume, como as frações equivalentes, são retomados, provavelmente visando uma consolidação na aprendizagem por parte dos alunos. Novamente, em meio às orientações de como o professor deverá conduzir o trabalho, que se caracteriza como saberes para ensinar fração, as autoras trouxeram algumas informações acerca dos números racionais, o que caracteriza um saber a ensinar, no caso, a fração como sendo uma representação do número racional.

Analisando melhor a obra, observamos que a primeira imagem de fração ocorre na página 62, conforme figura 51, e trabalha-a em seu conceito parte-todo. Na parte inferior da página, temos uma atividade em que se mantém fixo o numerador e varia-se o denominador para que a criança visualize o que está ocorrendo.

FIGURA 51 – FRAÇÃO ENQUANTO PARTE-TODO

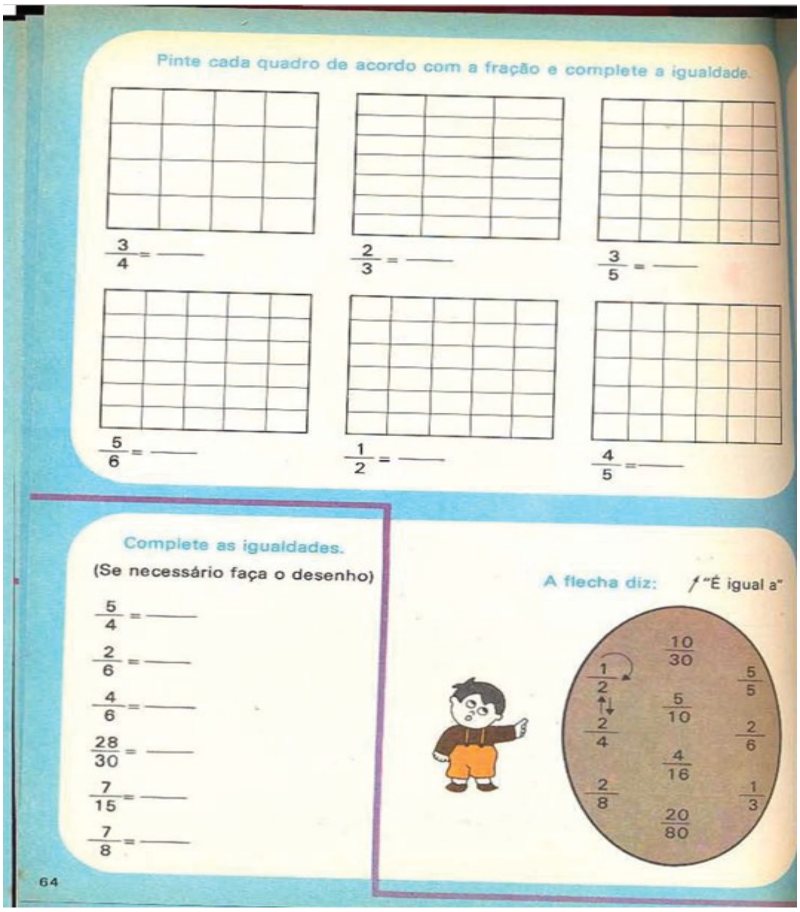


FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 62).

Cabe aqui destacar que as autoras apresentam figuras já divididas, mas, na mesma página, há outras para que a criança faça a sua divisão e compare, usando as ilustrações, se necessário for, o tamanho das frações.

Na sequência, são seis páginas dedicadas às frações equivalentes. Têm-se, novamente, a comparação entre frações, porém, já avançando para que a criança perceba a equivalência entre duas frações, conforme podemos constatar na figura 52.

FIGURA 52 – EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

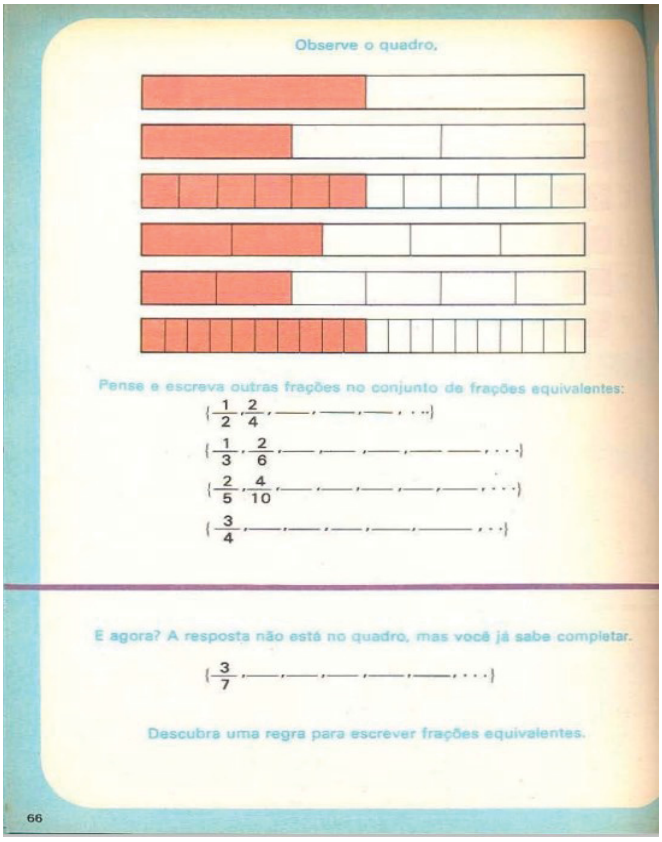


FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 64).

É feito um movimento, bem ao estilo Piaget, como mostra a mascote (menino), na direção da abstração do conceito, aqui podemos perceber, novamente, que a criança pode, se houver necessidade, voltar à imagem na mesma página.

Em seguida, temos quadros de equivalência e classes de equivalência na mesma página, mostrando uma articulação entre a linguagem matemática e as imagens. Na figura 53, é possível notar que está presente a linguagem da Matemática Moderna, mediante o conjunto das frações equivalentes. As autoras avançam para a equivalência de fração de maneira totalmente abstrata ao chamar a atenção (no último exercício da página) para "a resposta não está no quadro, mas você já sabe completar" (Liberman, Sanchez, 1974, p. 66). Em assim sendo, a criança precisa ter abstraído o conceito de fração equivalente para que acerte o exercício, uma vez que não conta com o apoio da imagem para resolvê-lo.

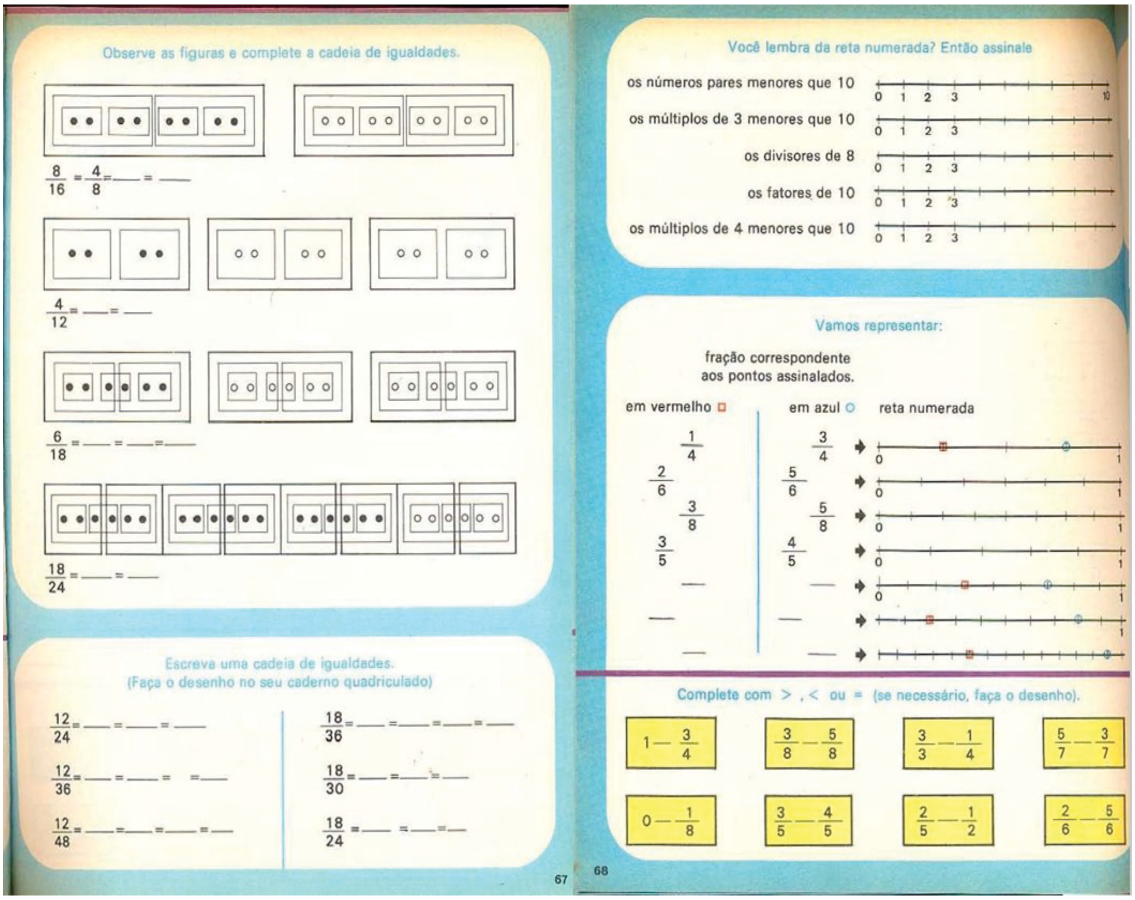
FIGURA 53 – EQUIVALÊNCIA COM E SEM O APOIO VISUAL



FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 66).

Na página seguinte (FIGURA 54), repete-se o mesmo encaminhamento, só que agora a fração equivalente é comparada com fração parte-todo de um todo de elementos discretos numa cadeia de igualdades. No canto superior direito é feito uma retomada da reta numérica com números inteiros para depois avançar para a representação das frações nesse suporte gráfico, e só assim comparar estas sem suporte ao visual.

FIGURA 54 – EQUIVALÊNCIA DE UM TODO COMPOSTO POR ELEMENTOS DISCRETOS

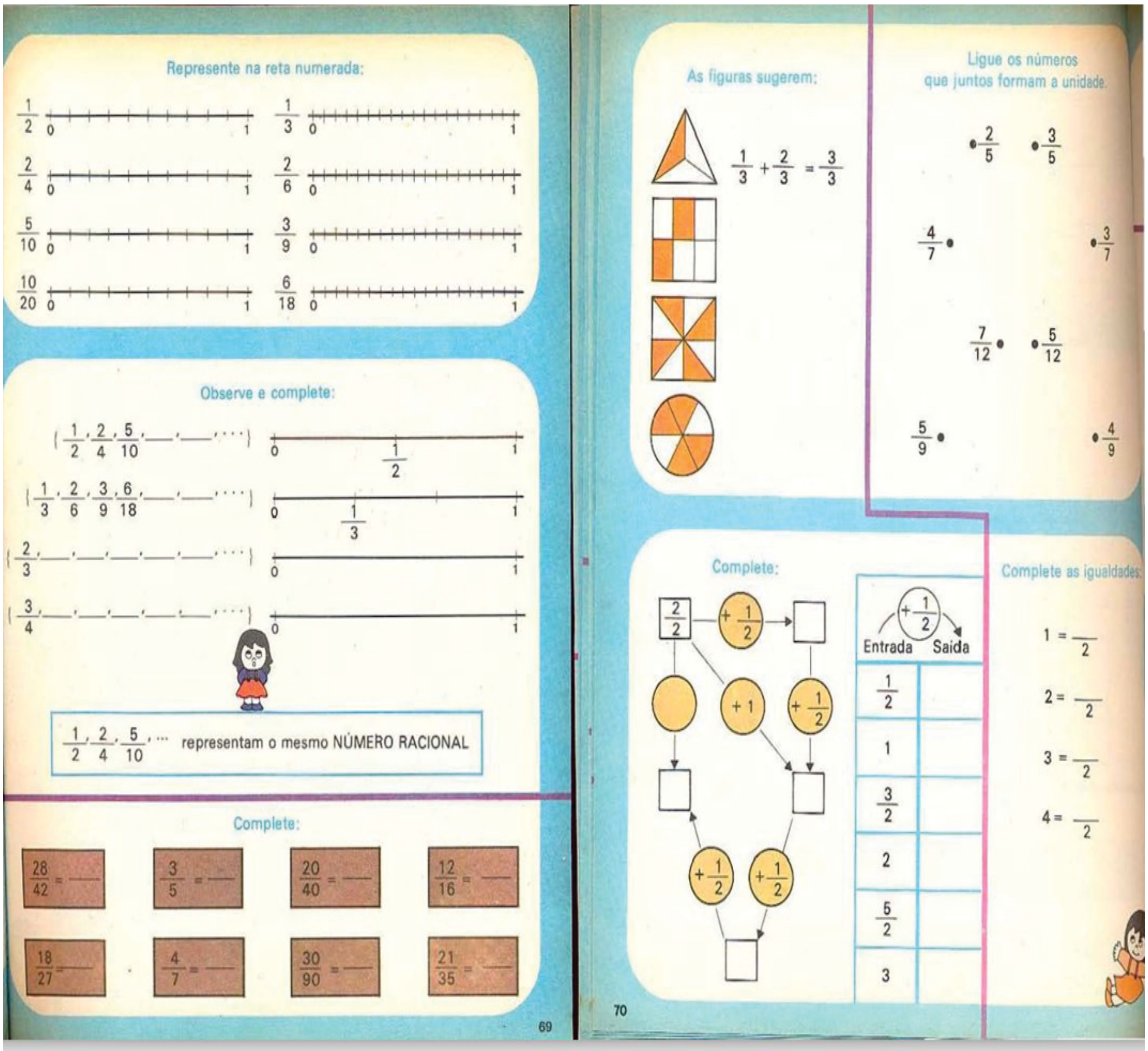


FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 67 - 68)

A reta numerada é associada às classes de equivalência e que culmina a importante descoberta que "$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$… representam o mesmo número racional. Na progressão de conteúdo, que encontra suporte na teoria de Jean Piaget, sem que haja uma ruptura entre um conteúdo e outro, a noção do todo é abordada juntamente com as frações próprias e a equivalência entre essas frações próprias e números inteiros (FIGURA 55). Nessa mesma imagem há uma disposição gráfica diferente para somar frações com mesmo denominador que recorre a uma espécie de máquina de estados[122] numa atividade de completar.

[122] Segundo Sanchez (2024), inspirada em George Papy.

FIGURA 55 – A NOÇÃO DO TODO E AS FRAÇÕES IMPRÓPRIAS


Represente na reta numerada:

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{18}$

Observe e complete:

$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \_\_, \_\_, \ldots\}$

$\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{6}{18}, \_\_, \_\_, \ldots\}$

$\{\frac{2}{3}, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \ldots\}$

$\{\frac{3}{4}, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \ldots\}$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \ldots$ representam o mesmo NÚMERO RACIONAL

Complete:

$\frac{28}{42} = \_\_$ $\frac{3}{5} = \_\_$ $\frac{20}{40} = \_\_$ $\frac{12}{16} = \_\_$

$\frac{18}{27} = \_\_$ $\frac{4}{7} = \_\_$ $\frac{30}{90} = \_\_$ $\frac{21}{35} = \_\_$

69

As figuras sugerem:

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$

Ligue os números que juntos formam a unidade.

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$

Complete:

$\frac{2}{2}$ $+\frac{1}{2}$ $+1$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$

$+\frac{1}{2}$ Entrada	Saída
$\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{3}{2}$	
2	
$\frac{5}{2}$	
3	

Complete as igualdades:

$1 = \frac{\_\_}{2}$

$2 = \frac{\_\_}{2}$

$3 = \frac{\_\_}{2}$

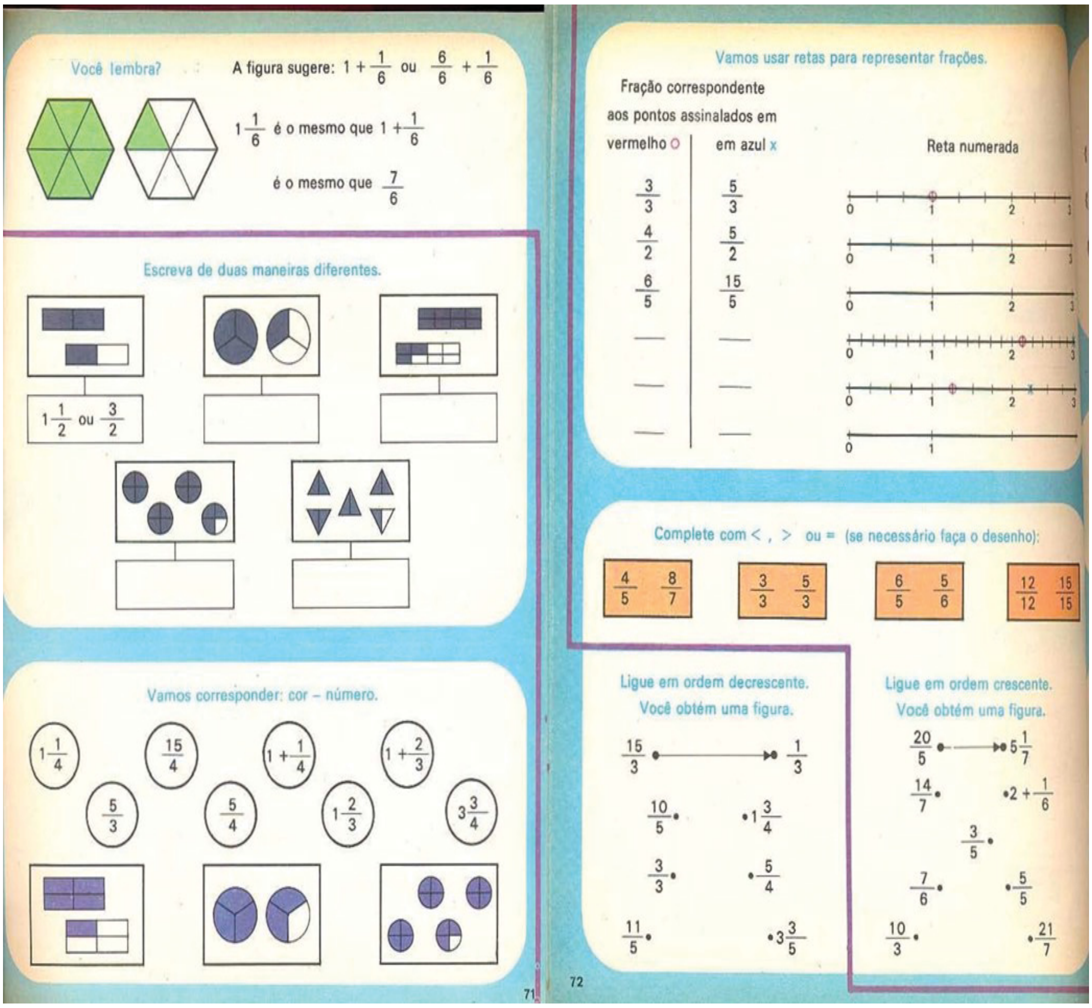
$4 = \frac{\_\_}{2}$

70

FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 69-70).

O mesmo ocorre com a apresentação das frações impróprias e número misto com o auxílio de modelos e as duas representações na mesma página (FIGURA 56). As frações impróprias são posicionadas na reta numérica e casos particulares, como “ $\frac{15}{5}$ ” que equivale a 3, provocam o aluno a pensar sobre a relação entre as frações e os números inteiros.

FIGURA 56 – NÚMERO MISTO COM APOIO DE MODELOS

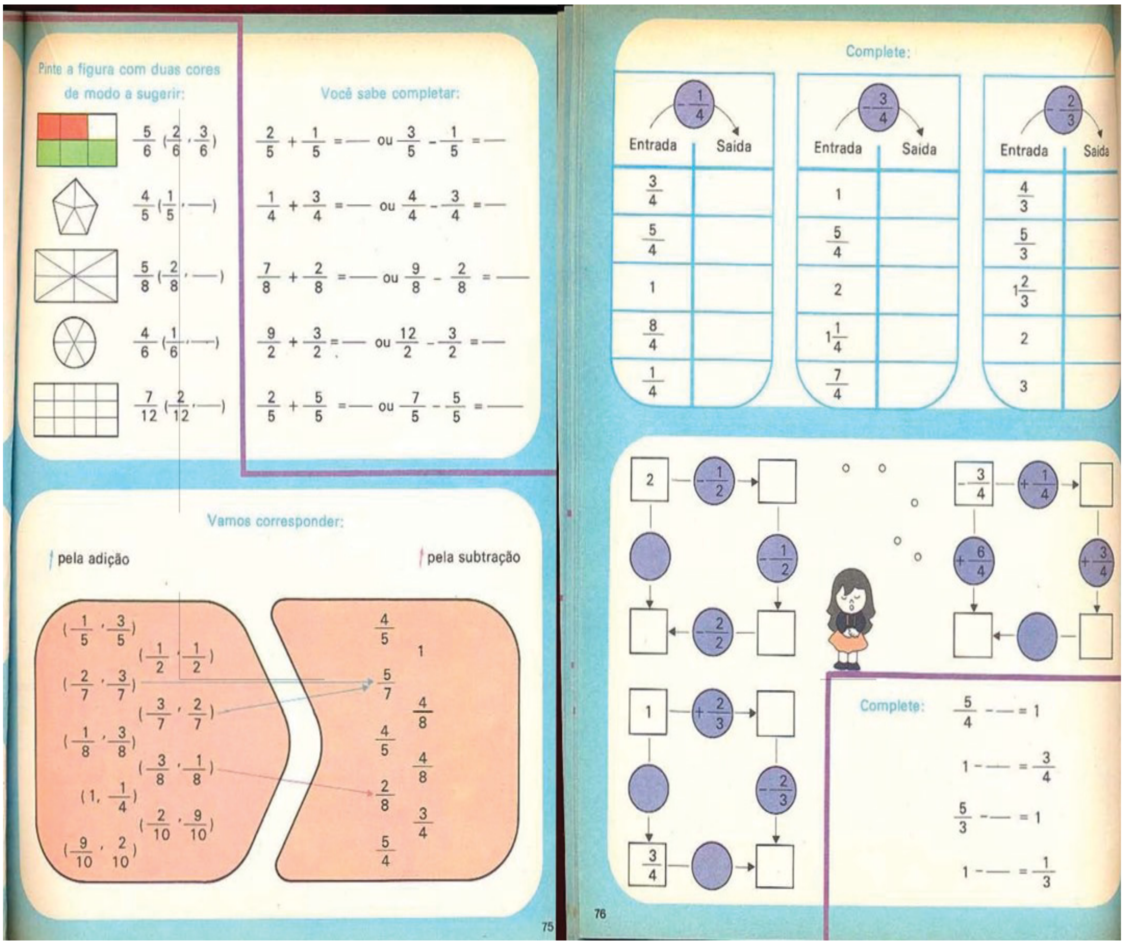


FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 71 - 72).

Após toda essa construção, nas páginas seguintes são apresentadas duas conclusões: “Os números naturais também são números racionais” (p. 73) e “Os números racionais podem ser menores ou maiores que a unidade” (p. 73).

Depois da retomada da soma de frações com mesmo denominador, são introduzidas a subtração e a soma de entre frações, número misto e número inteiro por meio de uma espécie de máquina de estados (FIGURA 57).

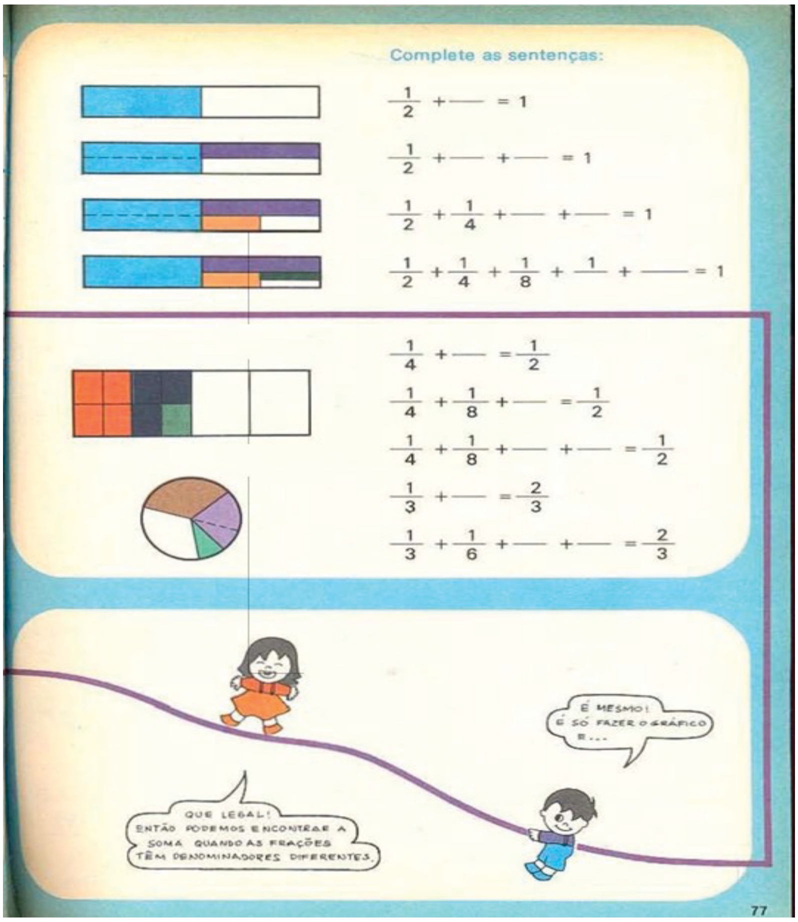
FIGURA 57 – OPERAÇÃO COM FRAÇÕES



FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 75 - 76).

Isso vale, conforme nos lembra as mascotes do livro na página 77, para as frações heterogêneas. Como suporte às somas, as autoras trazem modelos de áreas para mostrar a que parte do todo equivalem cada uma das somas sugeridas (FIGURA 58).

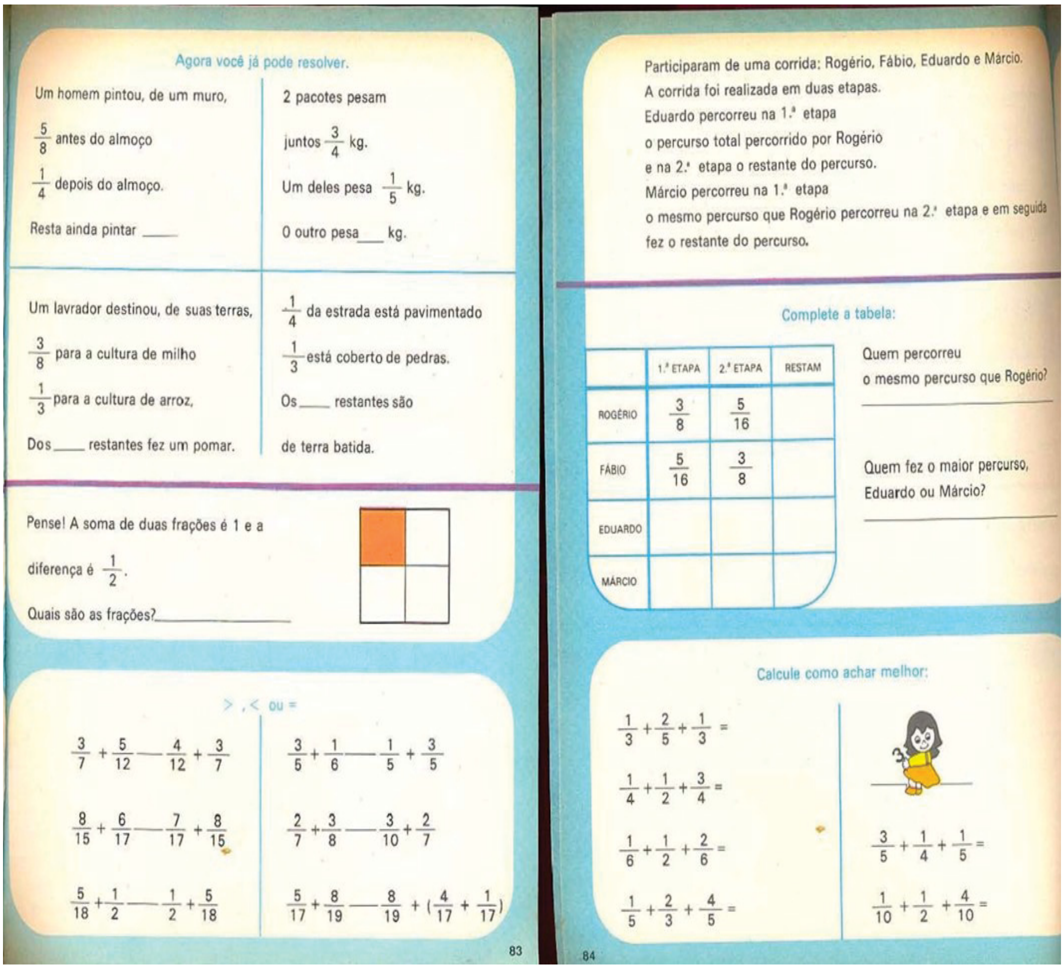
FIGURA 58 – SOMA DE FRAÇÕES HETEROGÊNEAS



FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 77).

Para finalizar essa gama de conteúdos, as autoras trazem alguns problemas de aplicação, como consta na figura 59. Há poucas imagens para auxiliar os estudantes na resolução dos problemas, num claro movimento que articula sequência, significado e graduação, e afere a aprendizagem da criança, mediante as respostas dadas. Ao final da quarta série, a criança vai desenvolvendo um pensamento autônomo em relação às questões propostas. Por exemplo, as autoras solicitam que a criança “calcule como achar melhor” em um dos exercícios, rumo à fase das operações lógicas abstratas.

FIGURA 59 – PROBLEMAS DE APLICAÇÃO


Agora você já pode resolver.

Um homem pintou, de um muro,
$\frac{5}{8}$ antes do almoço
$\frac{1}{4}$ depois do almoço.
Resta ainda pintar ____

2 pacotes pesam
juntos $\frac{3}{4}$ kg.
Um deles pesa $\frac{1}{5}$ kg.
O outro pesa ___ kg.

Um lavrador destinou, de suas terras,
$\frac{3}{8}$ para a cultura de milho
$\frac{1}{3}$ para a cultura de arroz,
Dos ___ restantes fez um pomar.

$\frac{1}{4}$ da estrada está pavimentado
$\frac{1}{3}$ está coberto de pedras.
Os ___ restantes são
de terra batida.

Pense! A soma de duas frações é 1 e a
diferença é $\frac{1}{2}$.
Quais são as frações? ____

>, < ou =

$\frac{3}{7}+\frac{5}{12}$ ___ $\frac{4}{12}+\frac{3}{7}$

$\frac{8}{15}+\frac{6}{17}$ ___ $\frac{7}{17}+\frac{8}{15}$

$\frac{5}{18}+\frac{1}{2}$ ___ $\frac{1}{2}+\frac{5}{18}$

$\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$ ___ $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$

$\frac{2}{7}+\frac{3}{8}$ ___ $\frac{3}{10}+\frac{2}{7}$

$\frac{5}{17}+\frac{8}{19}$ ___ $\frac{8}{19}+(\frac{4}{17}+\frac{1}{17})$

83

Participaram de uma corrida: Rogério, Fábio, Eduardo e Márcio.
A corrida foi realizada em duas etapas.
Eduardo percorreu na 1.ª etapa
o percurso total percorrido por Rogério
e na 2.ª etapa o restante do percurso.
Márcio percorreu na 1.ª etapa
o mesmo percurso que Rogério percorreu na 2.ª etapa e em seguida
fez o restante do percurso.

Complete a tabela:

	1.ª ETAPA	2.ª ETAPA	RESTAM
ROGÉRIO	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	
FÁBIO	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	
EDUARDO			
MÁRCIO			

Quem percorreu
o mesmo percurso que Rogério?
____

Quem fez o maior percurso,
Eduardo ou Márcio?
____

Calcule como achar melhor:

$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=$

$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=$

$\frac{3}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$

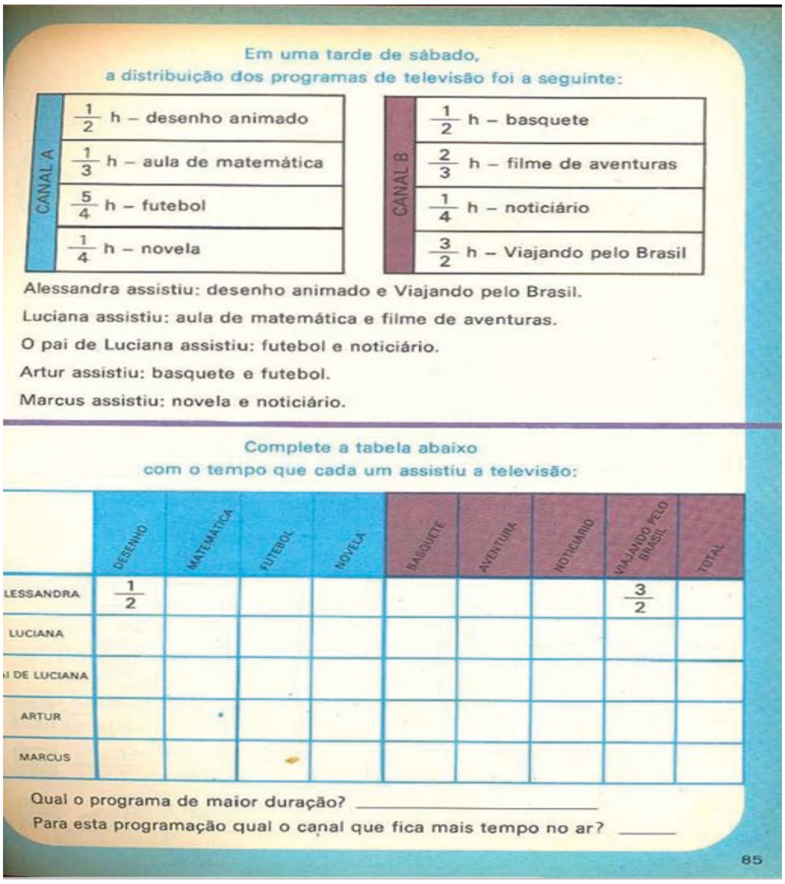
$\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+\frac{4}{10}=$

84

FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 83 - 84).

A entrada no conteúdo de medidas é feita de forma similar ao realizado no volume 3, mas, neste, incluem-se questões mais complexas, apresentadas no volume 4. Por exemplo, ao se trabalhar com as horas (FIGURA 60) traz um exemplo do tempo de cada programa de televisão. Alguns deles têm duração de $\frac{5}{4}$ de horas ou $\frac{3}{2}$ de horas, ou seja, frações impróprias.

FIGURA 60 – ESTUDO DE MEDIDAS



Em uma tarde de sábado,
a distribuição dos programas de televisão foi a seguinte:

CANAL A	
	$\frac{1}{2}$ h – desenho animado
	$\frac{1}{3}$ h – aula de matemática
	$\frac{5}{4}$ h – futebol
	$\frac{1}{4}$ h – novela

CANAL B	
	$\frac{1}{2}$ h – basquete
	$\frac{2}{3}$ h – filme de aventuras
	$\frac{1}{4}$ h – noticiário
	$\frac{3}{2}$ h – Viajando pelo Brasil

Alessandra assistiu: desenho animado e Viajando pelo Brasil.
Luciana assistiu: aula de matemática e filme de aventuras.
O pai de Luciana assistiu: futebol e noticiário.
Artur assistiu: basquete e futebol.
Marcus assistiu: novela e noticiário.

Complete a tabela abaixo
com o tempo que cada um assistiu a televisão:

	DESENHO	MATEMÁTICA	FUTEBOL	NOVELA	BASQUETE	AVENTURA	NOTICIÁRIO	VIAJANDO PELO BRASIL	TOTAL
LESSANDRA	$\frac{1}{2}$							$\frac{3}{2}$	
LUCIANA									
I DE LUCIANA									
ARTUR									
MARCUS									

Qual o programa de maior duração? ____________

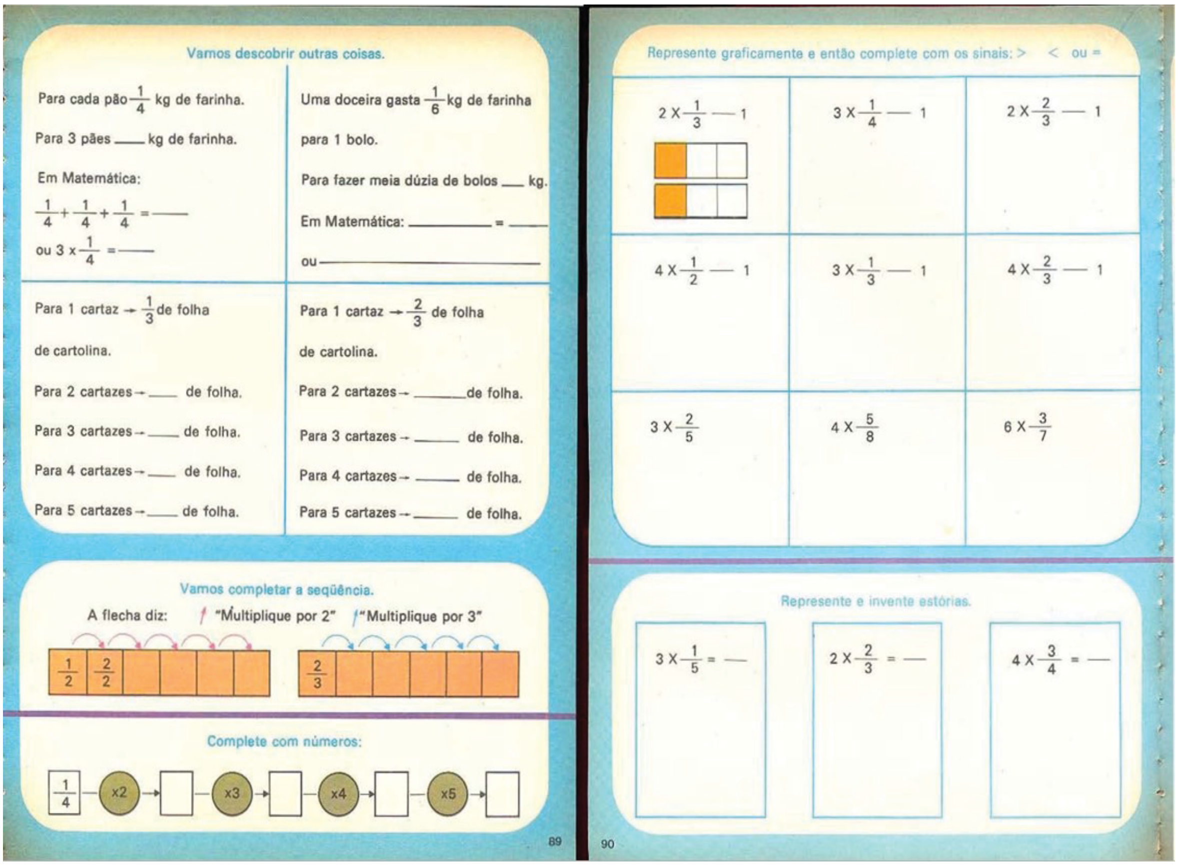
Para esta programação qual o canal que fica mais tempo no ar? ______

85

FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 85).

Ao trabalhar com medidas, as autoras introduzem as operações de multiplicação e divisão de frações, conteúdo que não foi trabalhado nos volumes anteriores. Primeiramente, são exploradas várias situações de uma fração multiplicada por um número inteiro, conforme figura 61. No canto inferior esquerdo, há uma espécie de máquina de estados com operadores que vão dando a sequência das operações.

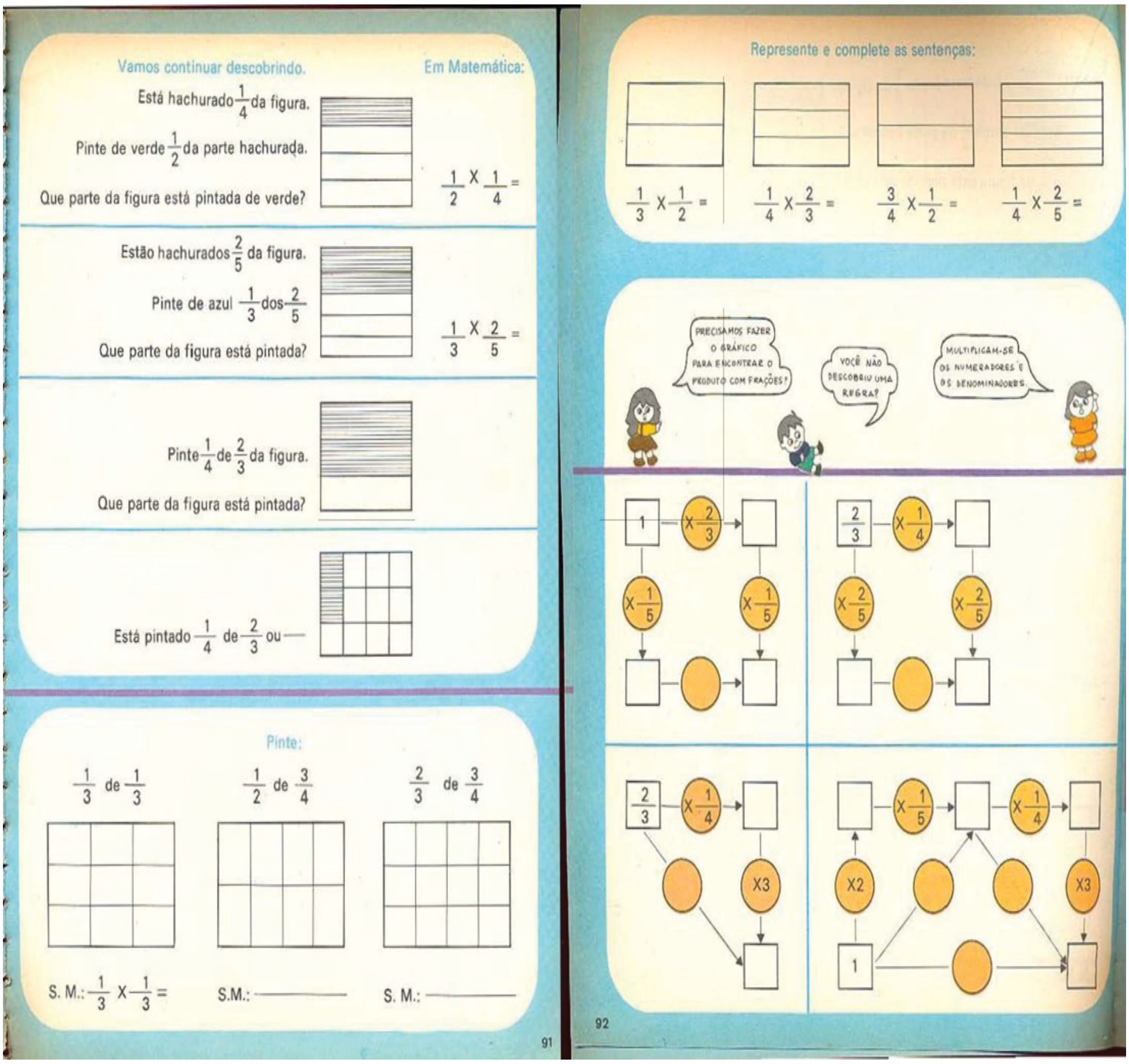
FIGURA 61 – MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES



FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 89 - p. 90).

Nas páginas seguintes há o mesmo movimento visto ao longo da obra, qual seja, o conteúdo sendo trabalhado do concreto ao abstrato, só que agora para a multiplicação entre duas frações (FIGURA 62). Inicialmente se trabalha o operador "de", após, com o símbolo de multiplicação, ambos com os modelos de áreas. As máquinas de calcular são utilizadas, então, com operações de multiplicação.

FIGURA 62 – ABSTRAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

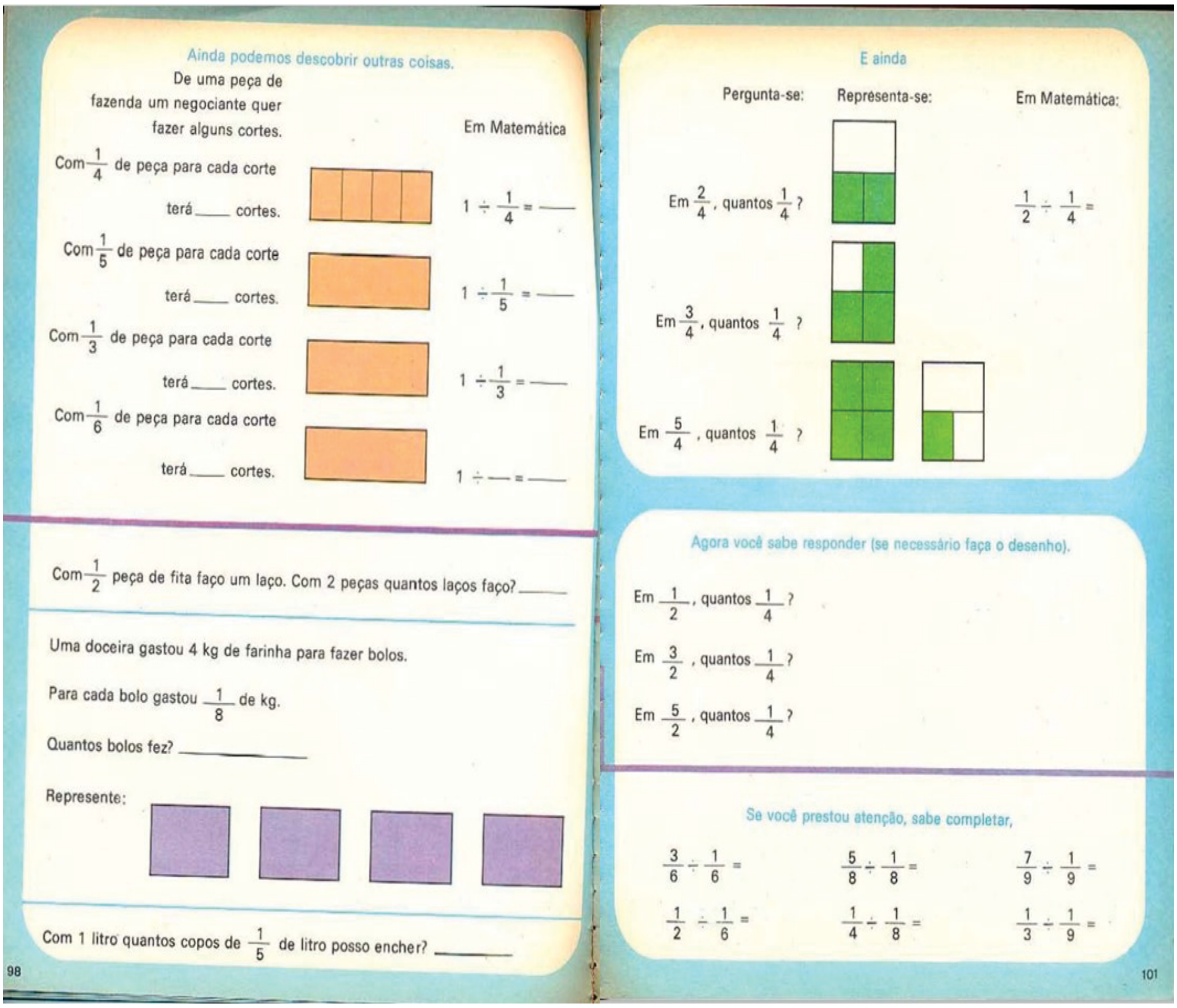


FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 91 - 92).

O chamado ("Precisamos fazer o gráfico para encontrar o produto das frações?", "Você não descobriu uma regra?") para a abstração, como podemos ver na figura acima, é feito pelos personagens que acompanham toda a coleção do GRUEMA.

Para a divisão de frações, inicia-se novamente com um inteiro dividido por uma fração e, somente após explorar bastante essa ideia, é feita a divisão de uma fração pela outra, com a ajuda de representações gráficas (FIGURA 63).

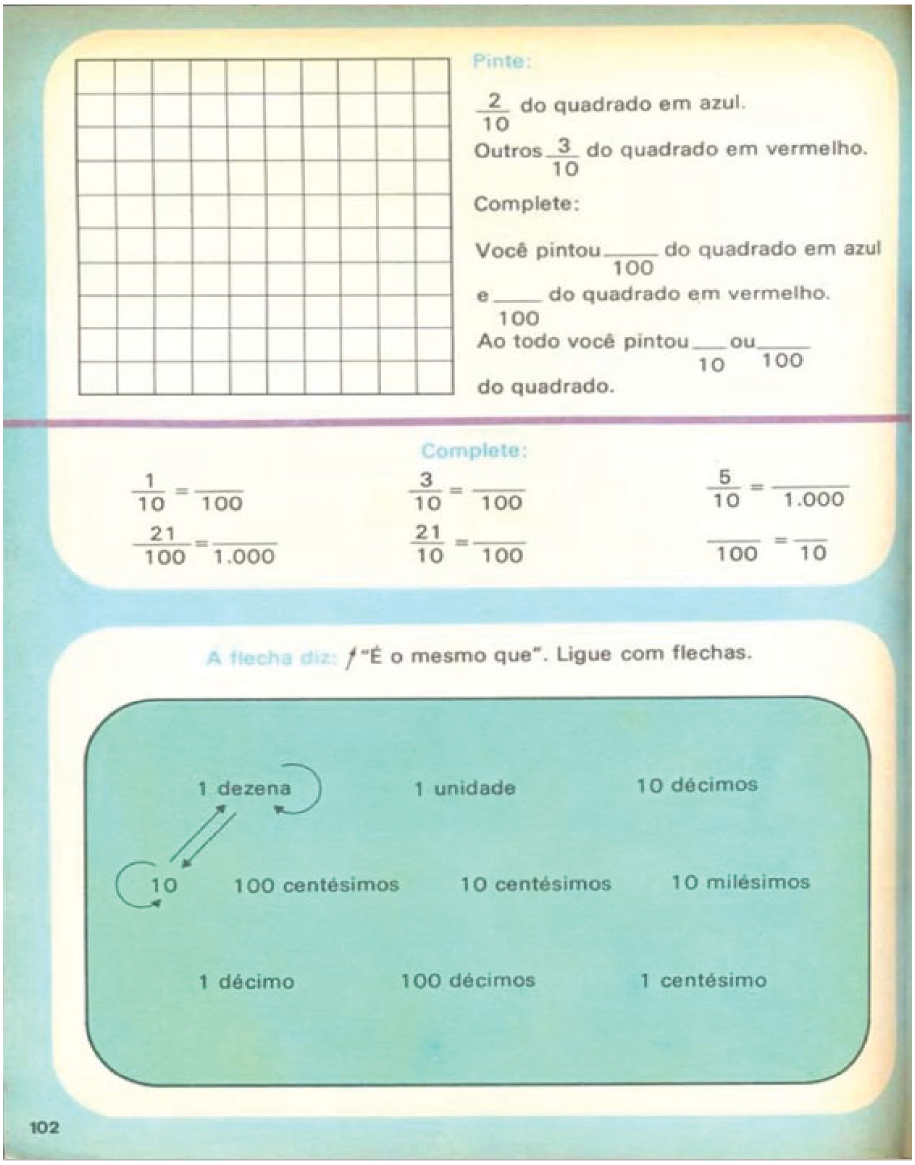
FIGURA 63 - DIVISÃO DE FRAÇÕES



FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 98;101).

Na sequência, a representação decimal, apresentada pela primeira vez no terceiro volume, é retomada com o uso de uma malha quadriculada e com a equivalência entre décimos, centésimos e milésimos. Os exercícios intercalam entre a representação fracionária e a representação decimal, inclusive em tabelas do Sistema de Numeração Decimal, por exemplo, 45,03 pode ser representado por 40 + 5 + $\frac{3}{100}$. As operações de multiplicação e divisão com números decimais também são intercaladas com as mesmas operações apresentadas em forma de fração (FIGURA 64). As máquinas de calcular continuam sendo utilizadas para esses conteúdos.

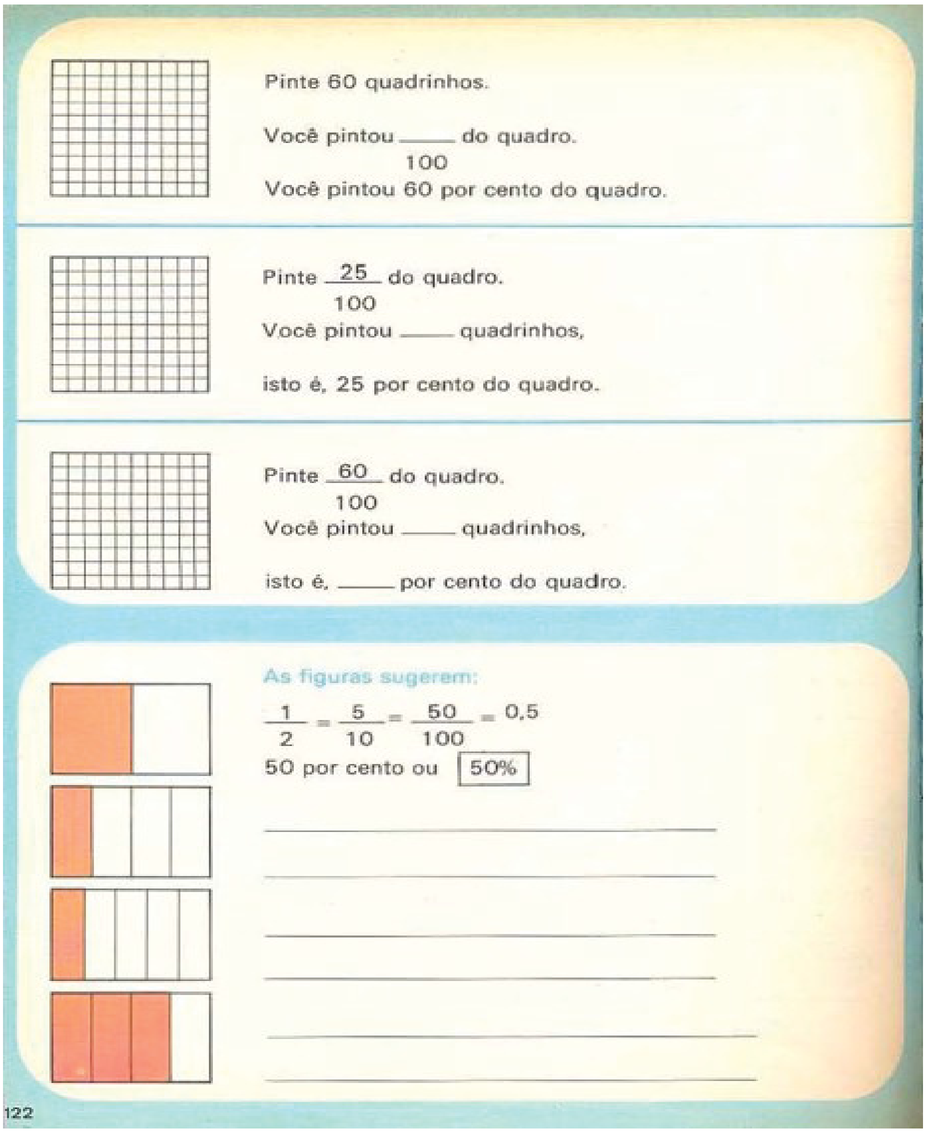
FIGURA 64 - RETOMADA DAS FRAÇÕES DECIMAIS



FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 102).

As autoras, ao avançarem para o conteúdo de porcentagem, não rompem com o conceito de fração e repetem o movimento do concreto ao abstrato articulando as frações, frações equivalentes, decimais e porcentagem como representação dos números racionais (FIGURA 65).

FIGURA 65 – PORCENTAGEM RELACIONADA COM FRAÇÕES DECIMAIS



Pinte 60 quadrinhos.

Você pintou $\frac{\_\_\_}{100}$ do quadro.

Você pintou 60 por cento do quadro.

Pinte $\frac{25}{100}$ do quadro.

Você pintou ____ quadrinhos,

isto é, 25 por cento do quadro.

Pinte $\frac{60}{100}$ do quadro.

Você pintou ____ quadrinhos,

isto é, ____ por cento do quadro.

As figuras sugerem:

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 0,5$

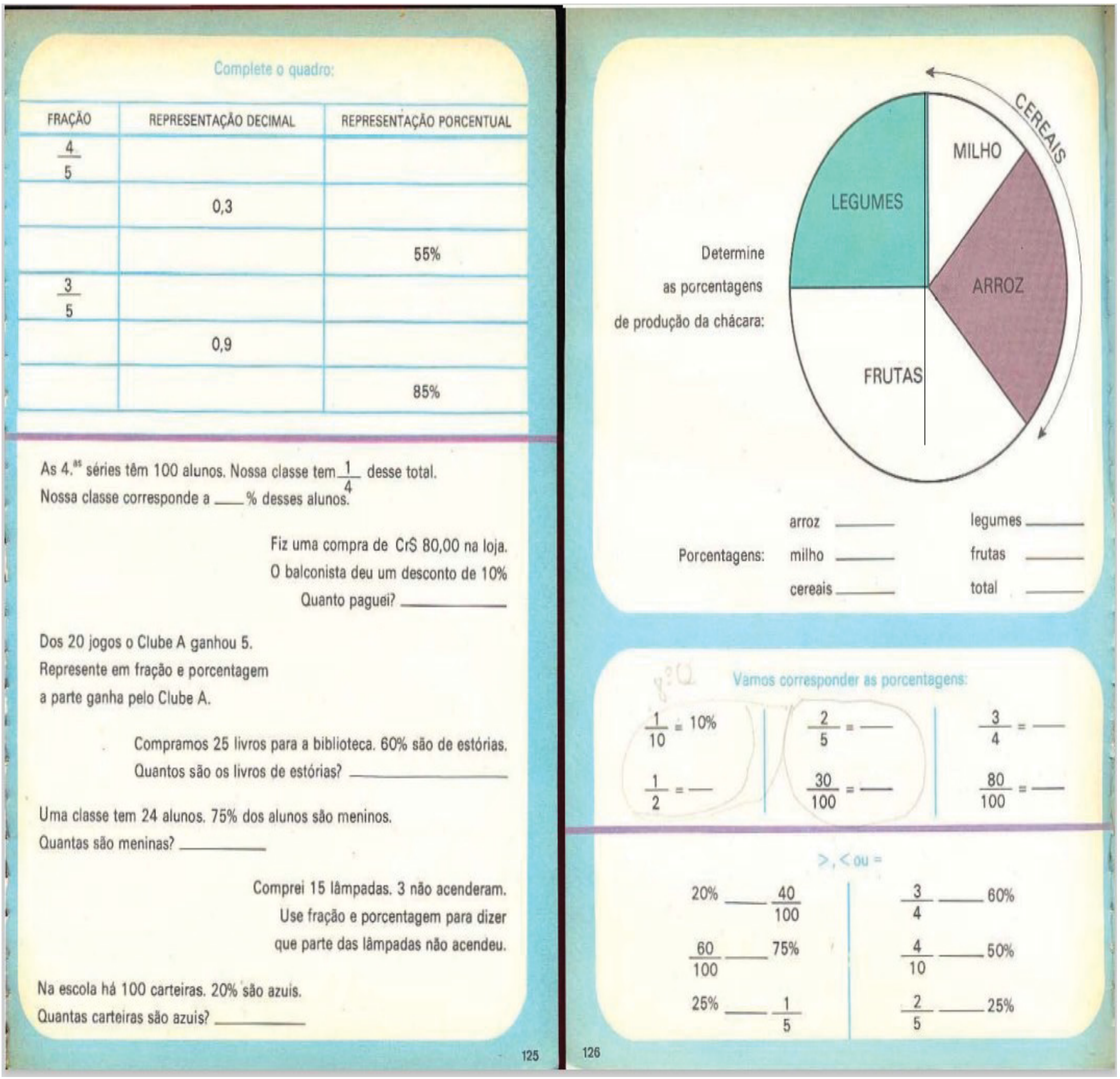
50 por cento ou $\boxed{50\%}$

122

FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 122).

Na figura 66 temos um quadro para completar com as três representações, seguidos de outros problemas que exploram formas distintas para abordar a porcentagem.

FIGURA 66 – PORCENTAGEM RELACIONADA COM FRAÇÕES DECIMAIS



Complete o quadro:

FRAÇÃO	REPRESENTAÇÃO DECIMAL	REPRESENTAÇÃO PORCENTUAL
$\frac{4}{5}$		
	0,3	
		55%
$\frac{3}{5}$		
	0,9	
		85%

As 4.as séries têm 100 alunos. Nossa classe tem $\frac{1}{4}$ desse total.
Nossa classe corresponde a ____% desses alunos.

Fiz uma compra de Cr$ 80,00 na loja.
O balconista deu um desconto de 10%
Quanto paguei? ________

Dos 20 jogos o Clube A ganhou 5.
Represente em fração e porcentagem
a parte ganha pelo Clube A.

Compramos 25 livros para a biblioteca. 60% são de estórias.
Quantos são os livros de estórias? ________

Uma classe tem 24 alunos. 75% dos alunos são meninos.
Quantas são meninas? ________

Comprei 15 lâmpadas. 3 não acenderam.
Use fração e porcentagem para dizer
que parte das lâmpadas não acendeu.

Na escola há 100 carteiras. 20% são azuis.
Quantas carteiras são azuis? ________

125

Determine
as porcentagens
de produção da chácara:

Porcentagens: arroz ____ milho ____ cereais ____ legumes ____ frutas ____ total ____

Vamos corresponder as porcentagens:

$\frac{1}{10}$ = 10% $\frac{1}{2}$ = ____

$\frac{2}{5}$ = ____ $\frac{30}{100}$ = ____

$\frac{3}{4}$ = ____ $\frac{80}{100}$ = ____

>, < ou =

20% ____ $\frac{40}{100}$

$\frac{60}{100}$ ____ 75%

25% ____ $\frac{1}{5}$

$\frac{3}{4}$ ____ 60%

$\frac{4}{10}$ ____ 50%

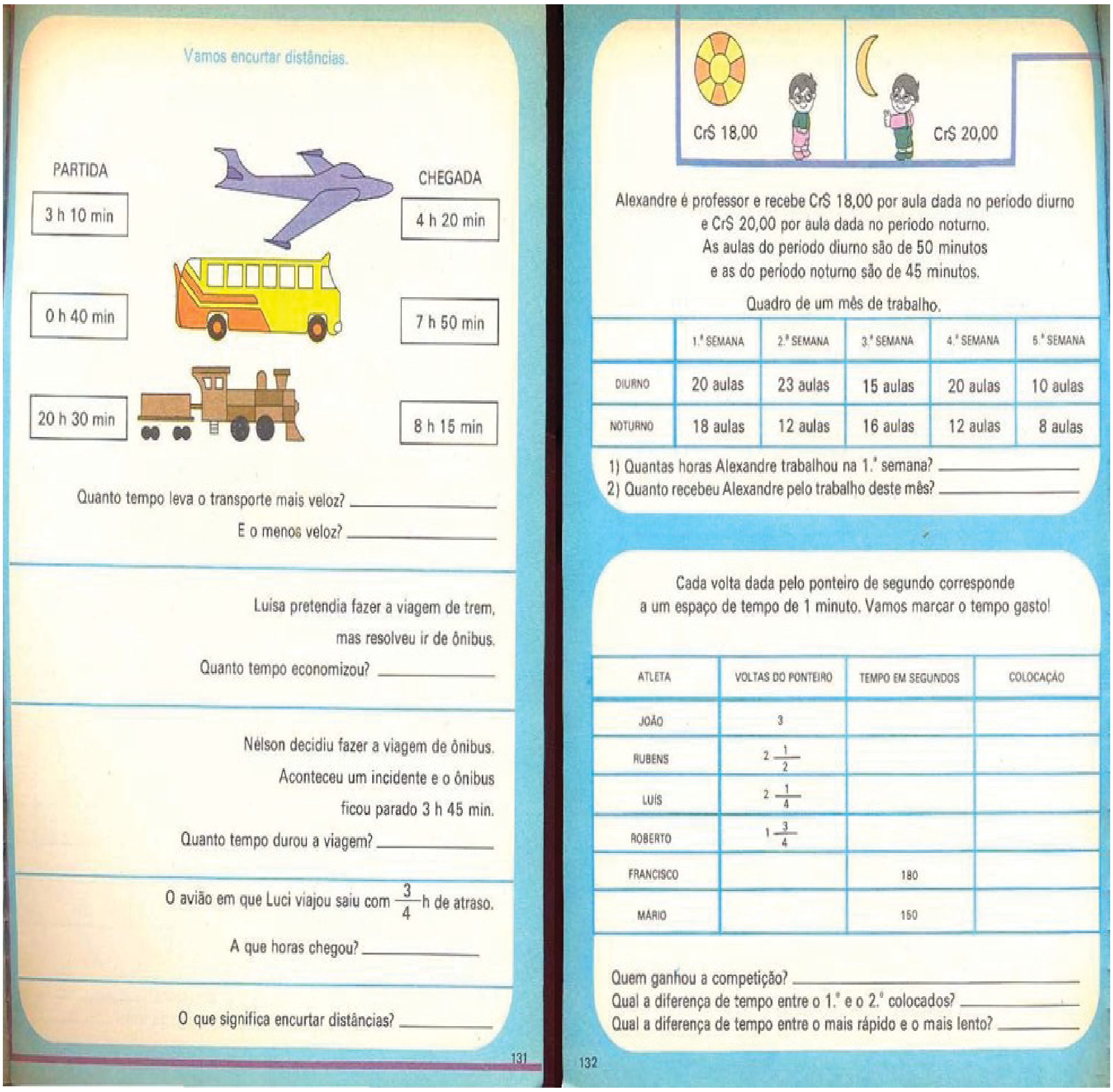
$\frac{2}{5}$ ____ 25%

126

FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 125 - 126).

O último registro de fração ocorre na página 132 da obra, quando as autoras, ao relacionar fração com medida, fazem a transição para o estudo de medida de área e perímetro, conteúdos esses que elas não relacionam com fração. Portanto, a partir dessa página, não aparece mais nada ligado à representação numérica que foi foco neste estudo – a fração (FIGURA 67).

FIGURA 67 – MEDIDAS E FRAÇÃO


Vamos encurtar distâncias.

PARTIDA	CHEGADA
3 h 10 min	4 h 20 min
0 h 40 min	7 h 50 min
20 h 30 min	8 h 15 min

Quanto tempo leva o transporte mais veloz? ____________

E o menos veloz? ____________

Luísa pretendia fazer a viagem de trem, mas resolveu ir de ônibus. Quanto tempo economizou? ____________

Nélson decidiu fazer a viagem de ônibus. Aconteceu um incidente e o ônibus ficou parado 3 h 45 min. Quanto tempo durou a viagem? ____________

O avião em que Luci viajou saiu com $\frac{3}{4}$ h de atraso. A que horas chegou? ____________

O que significa encurtar distâncias? ____________

131

Cr$ 18,00 Cr$ 20,00

Alexandre é professor e recebe Cr$ 18,00 por aula dada no período diurno e Cr$ 20,00 por aula dada no período noturno. As aulas do período diurno são de 50 minutos e as do período noturno são de 45 minutos.

Quadro de um mês de trabalho.

	1.ª SEMANA	2.ª SEMANA	3.ª SEMANA	4.ª SEMANA	5.ª SEMANA
DIURNO	20 aulas	23 aulas	15 aulas	20 aulas	10 aulas
NOTURNO	18 aulas	12 aulas	16 aulas	12 aulas	8 aulas

1) Quantas horas Alexandre trabalhou na 1.ª semana? ____________
2) Quanto recebeu Alexandre pelo trabalho deste mês? ____________

Cada volta dada pelo ponteiro de segundo corresponde a um espaço de tempo de 1 minuto. Vamos marcar o tempo gasto!

ATLETA	VOLTAS DO PONTEIRO	TEMPO EM SEGUNDOS	COLOCAÇÃO
JOÃO	3		
RUBENS	$2\frac{1}{2}$		
LUÍS	$2\frac{1}{4}$		
ROBERTO	$1\frac{3}{4}$		
FRANCISCO		180	
MÁRIO		150	

Quem ganhou a competição? ____________
Qual a diferença de tempo entre o 1.º e o 2.º colocados? ____________
Qual a diferença de tempo entre o mais rápido e o mais lento? ____________

132

FONTE: Liberman, Sanchez (1975, p. 131, 132).

É importante destacar que as autoras fazem neste livro, sempre, o mesmo movimento proposto nos escritos de Jean Piaget, que é o conhecimento partindo do concreto ao abstrato sendo mediado por imagens, o que caracteriza o Movimento da Matemática Moderna.

Essa mediação por imagens é muito bem feita pelo excelente trabalho gráfico presente em toda coleção, trabalho este que, como destacado por Villela (2009, p. 170), trouxe uma inovação na materialidade do livro (forma, impressão a quatro cores, dimensões), assim como nos conteúdos (voltados às concepções da Matemática Moderna) e na proposta metodológica (pautada no uso de materiais manipuláveis e nos pressupostos de Jean Piaget e Dienes).

Essa inovação nas ilustrações contou com, ainda segundo Villela (2009), um árduo trabalho da Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina Barata Tracanella.

> Regina e Tereza tinham cerca de dezoito anos e eram alunas da turma de 1967 do Instituto de Arte e Decoração (IADÊ) e, como trabalho do final do curso, o professor Haron Cohen propôs que, em grupos os alunos fizessem um projeto gráfico para uns livros de matemática. Haron afirmava que se tratava de uma nova coleção da Editora Nacional e que o grupo vencedor seria contratado pela editora para fazer o projeto gráfico de toda a coleção (Villela, 2009, p. 161).

Dito e feito, elas venceram o concurso, foram contratadas pela Editora Nacional e, fizeram todo projeto gráfico da coleção se utilizando da técnica de colagem e pintura em nanquim, que, após, fotografado, ia para a impressão.

Analisamos os quatro primeiros numa coleção de oito volumes, haja vista nosso interesse naqueles destinados ao Ensino Primário.)

Ao falarmos da imagem, dentro desses quatro primeiros volumes da coleção do GRUEMA, se faz necessário nos reportarmos a Platão e Aristóteles. Esses dois filósofos gregos a combateram ou a defenderam pelas mesmas razões (Joly, 2007, p. 19). Para Platão a imagem é imitadora, por isso ela engana, desvia da verdade. Já para Aristóteles, por ser imitadora, ela educa, conduz ao conhecimento.

Ainda, segundo Joly (2007), para Platão a imagem seduz as partes mais fracas da nossa alma, para Aristóteles, é eficaz pelo próprio prazer que nos proporciona.

Certamente as imagens foram usadas pelo GRUEMA para educar, conduzir ao conhecimento e, por ser feita por sujeitos, não é neutra, e essa não neutralidade foi observada desde o volume 1 até o volume 4 da coleção.

Por entender essa não neutralidade é que Lucilia, matemática, convidou Anna Franchi, professora do primário, para fazer parte deste projeto, junto com Manhucia, também matemática. Essa união permitiu a aproximação entre a *matemática do ensino*, ao trazer saberes da docência, um saber para ensinar matemática, para dentro da obra, com o ensino da matemática, e proporcionar para os professores que ensinavam matemática conhecimentos específicos do matemático, ou seja, um saber a ensinar. Com isso os livros do GRUEMA tentaram cumprir um dos objetivos do MMM, que era o de aproximar a matemática do ensino ao ensino da matemática.

Este movimento acima descrito foi materializado por meio do manual do professor, que vinha anexo ao livro do aluno. Nesses manuais, as autoras, também se utilizaram de imagem, como mostrado nas figuras 44 e 45 desse estudo.

Embora, neste trabalho, não nos propomos a avaliar as imagens pelo prisma da emoção e do prazer estético, devemos destacar, nos livros do GRUEMA, o cuidado com as imagens. As mesmas são coloridas e ajudam as autoras na construção do conhecimento, ora elas são usadas para aproximar fração ao dia a dia das crianças (FIGURA 43), ora são usadas para representar o que é fração (FIGURA 53). Em alguns momentos essas imagens assumem o protagonismo da informação (FIGURA 63), fazendo a importante "ponte" entre o concreto e o abstrato, mas, em outros momentos (FIGURA 60), ficam em "segundo plano" para que o professor possa perceber se o aluno aprendeu, ou não, o que foi ensinado – no nosso caso, o que é fração.

Como a editora é um importante aspecto a ser considerado, quando da confecção de um livro, cabe um destaque à Editora Nacional que usou uma tecnologia, segundo Villela (2009), até mais avançada da que normalmente se empregava nos livros didáticos da época. Por isso o resultado foi uma coleção multicolorida, atrativa para a criança, mas, para além disso, que auxiliava sobremaneira o trabalho do professor em sala de aula e a compreensão do conceito do que é fração.

Ao melhor estilo piagetiano, as imagens solicitavam a interação das crianças, pois as convidava a refletir enquanto recortavam, sobrepunham, pintavam, ligavam, comparavam, conforme constatamos nas figuras 43, 51, 54.

As imagens foram usadas sem nunca perder o direcionamento dos pressupostos do MMM que trata a fração como um número racional, conforme figuras 55 e 56, por exemplo.

Em suma, encerramos essa seção destacando novamente um trecho da entrevista de Sanchez (2024), onde, corroborando com Dienes, ela relatou que a coleção trazia uma variabilidade perceptível, onde o mesmo conceito de fração, como por exemplo parte-todo, era abordado de diferentes maneiras, conforme figuras 46, 51, 52 e 53, para que a criança pudesse abstrair o que era fração. Também variava nas suas definições, ou seja, parte-todo de elemento contínuo e discreto, operador, número racional na reta numerada, como podemos ver na figuras 47, 50, 54 e 55, visando a generalização do que é fração e conceituando-a como um número racional. Isso servirá de base para outros conteúdos que serão estudados a posterior.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término deste estudo, fica a certeza de que as imagens, tanto nos livros do NEDEM como nos do GRUEMA falam.

Elas falam sobre o Movimento da Matemática Moderna quando são mobilizadas nos livros didáticos, da época, para aproximar a Matemática ensinada na escola básica, da Matemática produzida pelos pesquisadores da área. De certa forma, ajudam a mudar o sistema educacional brasileiro, tornando mais acessível à criança o entendimento da fração como sendo um número racional.

Para que as imagens “pudessem falar”, elas seguiram a seguinte graduação: Partiam da ideia da fração enquanto parte-todo, tanto de elementos contínuos como de elementos discretos, para conceituá-la enquanto número racional, sempre com a ação direta da criança.

Essa marcha em direção ao número racional é percebida nas duas coleções, tanto a do NEDEM quanto a do GRUEMA, pois, ambas as coleções partem, sem dizerem se tratar de fração, de meios, quartas partes, terças partes, vão graduando esse entendimento, passando pelas unidades fracionárias até chegar à fração como sendo um número que pode ser escrito na forma de a/b, onde “a” e “b” são números naturais e “b” é diferente de “0”.

Esse movimento da parte-todo até chegar ao número racional é feito com a presença constante da imagem para que o aluno vá, como preconiza o Construtivismo, descobrindo essas relações.

A imagem não é dada, nestes livros, para ser uma cópia fotográfica na alma da criança, mas é, em oposição a isso, ao melhor estilo mãos na massa”, dada para que a criança interaja com o material, seja recortando, sobrepondo, colando, pintando, ligando, para que o conceito de fração vá emergindo dessas ações concretas, intermediadas por imagens.

Tanto que, no volume 4 da coleção do NEDEM, na unidade VII, que versa diretamente sobre números fracionários, encontramos nos enunciados das atividades os verbos: pintar, contar, completar, exemplificar, recorrer, copiar, representar, relacionar, comparar, trocar, reunir, efetuar e resolver, todas estas ações postas no livro do aluno serão executadas, tendo em mãos, círculos de fração, alguns elementos discretos como feijões, tampinhas, tiras de cartolina e outros materiais que as autoras pedem para serem confeccionados pelas crianças com o auxílio do professor.

Na coleção do GRUEMA, ao fazermos este mesmo movimento, com a unidade intitulada: Números Racionais - Equivalência e Ordem, do volume 4, encontraremos os seguintes verbos: escrever, pintar, colocar, observar, completar, pensar, ligar, assinalar, representar, corresponder, escolher, calcular, efetuar, descobrir, continuar e determinar. Essas ações, no GRUEMA também, serão feitas tendo em mão recortes de círculos fracionários, tiras, alguns elementos discretos, e sempre com o apoio de imagem.

Tanto em uma coleção quanto em outra os alunos são, “encorajados” a realizarem o que se pede, sem o auxílio de material manipulável ou de imagem, numa clara intenção de verificar o que foi abstraído pela criança de tudo o que foi trabalhado.

Concretude e visualidade se relacionam através do sentido da visão, ao longo de todo o estudo de fração, uma vez que, colar, recortar, sobrepor, pintar, ligar são ações mais concretas de algo que se deixa tocar, ao passo que, efetuar, resolver, observar, continuar são ações que envolvem mais o visual, de algo que se deixa ver.

Não é o livro, como assevera Valente (2008), um objeto cultural? Para que ele o seja, é preciso entender onde atuam os seus elementos. Em nossa análise, detemo-nos em trazer como atuaram as autoras e as editoras das obras.

As autoras eram:

- Do NEDEM, todas pedagogas com vasta experiência no ensino primário e coordenadas por um professor matemático.
- Do GRUEMA, eram todas formadas em matemática, dando ou não aula para o ensino primário, mas com formação em matemática.

Com isso as autoras do NEDEM tinham uma vasta formação no saber para ensinar matemática e fizeram uma aproximação, através do manual do professor, com o saber a ensinar. Já as autoras do GRUEMA fizeram um movimento oposto, qual seja, a partir de um saber a ensinar, através do manual do professor, fizeram uma aproximação em direção ao saber para ensinar matemática, tanto que, no livro do GRUEMA, segundo a própria autora, em entrevista oral, houve forte apropriação ao autor Dienes.

As autoras desses livros não eram apenas espectadoras do seu tempo, eram, sim, protagonistas que se envolveram de maneira direta com o MMM, mas que também, como protagonistas que eram, admitiram certos exageros cometidos pelo Movimento. Lucilia falou sobre isso também neste depoimento oral:

> [...] Porque, olha, como tudo, toda transformação, ela não nasce pronta. Ela não nasce pronta. Ela vem e ela comete seus exageros, sim, o entusiasmo da Matemática Moderna, um dos pontos que eu acho que a Matemática Moderna se chamaria falhou, que foram, se queria chamar de fracasso, não é bem fracasso, é esse excesso de formalização, de formalismo, que eu chamo. Esse, para mim, é um ponto, era tanta vontade de aplicar a Matemática Moderna que se colocava parênteses com a formalização. O GRUEMA, por exemplo, acho que pecou um pouco com esse excesso de formalização. Mas eu acho que a Matemática Moderna foi um passo importante. [...] (Sanchez (2014)

Após falar sobre o excesso de formalismo, pontuou sobre a falta de situações problemas:

> Por exemplo, uma coisa que o Ubiratan criticava é quando ele falava sobre a resolução de problemas. Então, teve uma crítica da Matemática Moderna que ela não trabalhava com problemas, ela trabalhava só com fórmulas. Também acho que esse, para mim, foi um dos excessos, acho que ela trouxe tantos, não só benefícios, ela atualizou. Então, eu sou suspeita. Embora... é difícil, naquele momento, você querer uma renovação... (Sanchez (2014))

Este Movimento, que se utilizou da imagem para comunicar, contou com as editoras para fazerem chegar à escola essas obras, porém, cabe aqui destacar que a Editora do Brasil foi procurada pelo NEDEM para a impressão da coleção. Com a coleção do GRUEMA, isso aconteceu ao contrário, foi a Editora Nacional quem convidou as autoras para fazerem o livro.

Como resultado disso, a Editora do Brasil procurou economizar ao editarem os livros do NEDEM, para que o valor do exemplar não custasse caro, fizeram a impressão do interior todo em preto e branco e somente a capa em cores, mas isso não impediu que as imagens, mesmo em preto e branco, cumprissem o papel de, segundo Joly (2007), representar a fração vista sob outro ângulo, de maneira equivalente ao conceito que as autoras queriam transmitir. Essa “transmissão” aconteceu a partir do conceito de parte-todo até chegar à fração como número racional.

As capas da coleção do NEDEM contam um pouco do Movimento da Matemática Moderna, já que, fora a capa do primeiro volume (circo), o Movimento apareceu na capa do 2º volume – foguete, robô, telescópio, a janela aberta em noite de Lua cheia; na capa do 3º volume – conjuntos de elementos do universo infantil;

encerrando com a capa do 4º volume, que traz as crianças interagindo com a tecnologia (robô) e a matemática (muro repleto de algarismos), contando, à sua maneira, um pouco do que foi o Movimento da Matemática Moderna, uma busca por desenvolvimento tecnológico que contava também com o apoio da Matemática.

Já os livros do GRUEMA, sem a preocupação de serem baratos, era todo multicolorido, impresso em quatro cores, também comunicava, por essas imagens, que faziam evoluir as formas, clarificando as leis que regem o conceito de fração, colaborando sobremaneira com a marcha para um número racional que, para ser entendido enquanto tal, partia, também na coleção do GRUEMA, da ideia de parte-todo.

Essa era a materialidade das obras analisadas, por que, conforme Chartier (1998), não existe texto fora do seu suporte que o dá a ler e que não há compreensão de um escrito, qualquer que ele seja, que não dependa das formas através das quais ele chega a seu leitor.

Apresentadas as autoras dos livros que, segundo Choppin (2004), não eram meras espectadoras do seu tempo, eram agentes. Destacadas quais eram as editoras, pois, para Bittencourt (2008), existe a interferência de diferentes sujeitos na produção, circulação e consumo de um livro didático.

Caracterizado que isso aconteceu em um tempo no qual era o momento de reformar o espírito científico, de preparar os alunos para um mundo que avançava numa revolução rápida, reforça Pinto (2005).

Fica a certeza de que todos se utilizaram da imagem, que segundo Joly (2007), por ser produzida por sujeitos históricos, sua presença ou ausência; a interpretação delas, a compreensão do que as fundamentam, são algumas das muitas provas de liberdade intelectual que a análise pedagógica pode implicar, e isso é um saber que nós, professores que ensinamos matemática, precisamos ter.

Concluo afirmando que essas autoras, em tempo de Matemática Moderna, com maior ou menor apoio das editoras, trouxeram para os livros as imagens, que longe de serem neutras, colaboraram para que tudo acontecesse como aconteceu e que, segundo Chartier (1998), os textos do GRUEMA e do NEDEM, fragmentados em unidades separadas, reencontraram na articulação visual (imagem) da página as conexões intelectuais ou discursivas do raciocínio, construindo uma fração enquanto número racional.

Entenderam? Ou querem que eu desenhe?

REFERÊNCIAS

ALBERTI, V. **Manual de história oral**. Rio de Janeiro: FG, 2013.

BERTICELLI, D. G. D.; PORTELA, M. S. **Dicionário dos Experts**: matemática para o ensino e formação de professores. São Paulo, ed.1, 2021. Disponível em: https://www.ghemat.com.br/itens/henrieta-dyminski-arruda. Acesso em: 18 mar. 2024.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. "Rational number concepts". *In:* LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.), **Acquisition of mathematical concepts and processes**. New York: Academic, 1983, p. 91-126.

BRAGHINI, K. M. Z. A Editora do Brasil S/A nos anos 1960-1970: a consolidação de uma editora brasileira no mercado didático e o ensino de educação moral e cívica. **Revista Brasileira de História de Educação**, v. 12, n. 3, p. 153-178, 2012.

BITTENCOURT, C. M. F. **Livro didático e saber escolar 1810 – 1910**. Belo Horizonte: Autêntica, 2018

BORGES, R.; DUARTE, A.; CAMPOS, T. M. Manuais Pedagógicos do Brasil e de Portugal: um estudo da Matemática Moderna nas séries iniciais. **Quadrante**, v. 23, n. 1, p. 79–98, 2014. DOI: 10.48489/quadrante.22898. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22898. Acesso em: 25 jul. 2023.

BURKE, P. **Eyewitnessing**: The uses of images as historical evidence. London: Reaktion books; 2001.

BURIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** Da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**.** 1989. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 1989.

BURIGO, E. Z. A modernização possível e necessária da matemática escolar segundo Osvaldo Sangiorgi. *In:* VALENTE, W. R. **Osvaldo Sangiorgi - um professor moderno**. 1. ed. São Paulo: Annablume, 2008, v. 1, p. 43-67.

CARRAHER, D. W.; SCHILIEMANN, A. D. A compreensão de frações como magnitudes relativas. **Revista Psicologia:** Teoria e Pesquisa, Brasília, v. 8, p. 67-78, 1992. Disponível em https://periodicos.unb.br/index.php/revistaptp/article/view/17124/15610. Acesso em: 17 set. 2023.

CANDEIAS, R. P. C. B. B. **Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário:** João Antônio Nabais e o Ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama**.** Dissertação (Mestrado) – Universidade de Lisboa, 2007.

CERTEAU, M. de. **A Escrita da História.** Tradução de Maria de Lourdes Menezes. Revisão técnica de Arno Vogel. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

CESANA, A.; SILVA, C. M. S. Uma análise de imagens contidas no Tratado L`Vale della Squadra di Ottavio Fabri. **Alexandria:** R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, v. 15, n. 2, p. 33 – 53, nov. 2022. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2022.e82048. Acesso em: 10 maio 2023.

CHARTIER, R. **A ordem dos livros:** leitores, autores e bibliotecas na Europa entre os séculos XIV e XVIII. Tradução de Mary Del Priore. 2. ed. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1998.

CHARTIER, R. **O mundo como representação.** Estudos Avançados 1991, p.173-191. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0103-40141991000100010. Acesso em: 2 de jun. 2024.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação,** v. 2, 1990, p. 177-229.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**. São Paulo, v. 30, n. 3, 2004, p. 549-566.

CLARAS, A. F. **A Teoria de Conjuntos proposta pelo NEDEM:** do ideário do MMM às práticas escolares. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Paraná, 2011.

COSTA, D. A. da. **A Aritmética Escolar no ensino primário brasileiro:** 1890-1946. 2010. 278 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

COSTA, R. R. da. **A capacitação e aperfeiçoamento dos professores que ensinavam matemática no Estado do Paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna – 1961 a 1982.** 2013. 212f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2013.

DALCIN, A. Visualidade, concretude: do desenho na areia à realidade aumentada. **Educação matemática em revista**, v. 2, n 22, p. 147 – 159, 2021.

DALCIN, A.; SILVA, S. R. da. Zoltan Dienes e a Formação de Professores em Porto Alegre em Tempos de Matemática Moderna. **Educação: Teoria e Prática**, v. 29, n. 62, p. 669–690, 2019. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/view/14141. Acesso em: 4 jun. 2024.

DASSIE, B. A.; COSTA, L. M. F. da. O Minicomputador de Papy: vestígios de uma circulação no Brasil. **Anais do ENAPHEM -** Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, n. 3, 11.

DEL POZO ANDRÉS, M. D.; BRASTER, S. The Visual Turn in the History of Education. Origins, Methodologies, and Examples. *In:* FITZGERALD, T. **Handbook of Historical Studies in Education**. Springer International. Hanbook of Education. pp. 894 – 907, 2020.

DIENES, Z. P.; **On some problems concerning the learning of mathematics:** Discussion Guide no. 1. Department of Psychology of University of Adelaide, Austrália. Paris: UNESCO. 30 April 1962. 29 p. Disponível em: http://unesco.unesco.org/images/0014/001447/144785eb.pdf. Acesso em: 2 jun. 2024.

DIENES, Z. P. **Mathematics in primary education:** Learning of mathematics by young children**.** Relatório do Study Group for Mathematics Learning para UNESCO: Institute for Education. Hamburg, Califórnia: Palo Alto, 1966. 156 p. Disponível em: http://unesco.unesco.org/images/0001/000184/018427eo.pdf. Acesso em: 18 maio 2024.

DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática.** São Paulo: Herder, 1969.

DIENES, Z. P. **Aprendizado moderno da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

FLORES, C. **Olhar, saber, representar:** sobre representações em perspectiva. São Paulo: Musa editora, 2007.

FLORES, C. R. Cultura visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares. **Zetetike**, São Paulo, v. 18, p. 271-294, 2010.

FLORES, C. R. **Ensinar e pesquisar entre a matemática, a história, a arte e a visualidade.** *In:* MENDES, I.; CHAQUIAM, M.; ROCHA, M. L. Itinerários intelectuais entre o ser e o estar. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2022, p. 341 – 380.

FLORES, C. R.; CASSIANE S. **Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica:** sobre linguagens e práticas culturais. Campinas: Mercado das Letras, 2013.

FRANÇA, D. M.; SANTOS, E. S. C. dos. **DIENES:** saberes “pré-matemáticos” em tempos do movimento da matemática moderna (1960-1980). Seminário Temático Internacional, v. 1, n. 1, p. 1–17, 2022. Disponível em: https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/92. Acesso em: 4 jun. 2024.

GARNICA, A. V. M. Registar oralidades, analisar narrativas: sobre pressupostos da História Oral em Educação Matemática. **Ci. Huma. e Soc. em Rev. Seropédica**, v. 32, n. 2, Julho/Dezembro, 2010.

GUIMARÃES, H. M. **Por uma Matemática nova nas escolas secundárias – perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna**. *In:* MATOS, José Manuel; VALENTE, Wagner Rodrigues (orgs). A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: Primeiros Estudos. São Paulo: Editora Da Vinci, 2007. p. 21- 45.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para a profissão do ensino e da formação. *In:* HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (org.). **Saberes em**

(trans)formação: tema central da formação de professores. São Paulo: LF Editorial, 2017.

HOLZMANN, E. *et al*. **Ensino Moderno da Matemática**. Curso primário, 1ª série, 1º caderno. São Paulo: Editora do Brasil,1969. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219740. Acesso em: 28 maio 2024.

HOLZMANN, E.; MARTINS, C. T.; YREMTCHUCK, G.; ARRUDA, H. D.; DACOL A. (coord.). **Ensino Moderno da Matemática:** ensino de Primeiro Grau – Volume 4**.** Guarulhos, SP: Editora do Brasil, 1977.

HOLZMANN, E.; MARTINS, C. T.; YREMTCHUCK, G.; ARRUDA, H. D.; DACOL A. (coord.). **Ensino Moderno da Matemática:** ensino de Primeiro Grau – Volume 3. Guarulhos, SP: Editora do Brasil, 1977.

HOLZMANN, E.; MARTINS, C. T.; YREMTCHUCK, G.; ARRUDA, H. D.; DACOL A. (coord.). **Ensino Moderno da Matemática:** ensino de Primeiro Grau – Volume 2. Guarulhos, SP: Editora do Brasil, 1977.

HOLZMANN, E.; MARTINS, C. T.; YREMTCHUCK, G.; ARRUDA, H. D.; DACOL A. (coord.). **Ensino Moderno da Matemática:** ensino de Primeiro Grau – Volume 1**.** Guarulhos, SP: Editora do Brasil, 1977.

HYNES, M. **Manipuláveis Selection Criteria, Arithmetic Teacher**, v. 33, n. 6, p. 11 – 13, 1986.

JOLY, M. **Introdução a Análise da Imagem.** Tradução: José Eduardo Rodil. 2007.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico**. Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, n. 1, p. 9-43, 2001. Disponível em: https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/39195. Acesso em: 15 ago. 2023.

KAMII, C.; CLARK, F. B. Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. **Journal of Mathematical**, v. 14, n. 4, p. 365-378. 1995.

KRUL, L. **Memórias da Educação Matemática:** introdução de ‘Matemática Moderna’ na rede municipal de ensino de Curitiba**.** 2006. 189f. Dissertação (Mestrado em educação) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

LIBERMAN, M. P.; FRANCHI, A.; SANCHEZ, L. B. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1° grau**, **vol. II**. Guia do Professor. São Paulo: Editora Nacional, 1975. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851. Acesso em: 02 fev. 2024.

LIBERMAN, M. P.; SANCHES, L. B. (GRUEMA) **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau. 4ª série.** Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1974.

LIBERMAN, M. P.; SANCHES, L. B. (GRUEMA) **Curso moderno de matemática**

para o ensino de 1º grau. 3ª série. Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1976.

LIBERMAN, M. P.; SANCHES, L. B. (GRUEMA) **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau. 2ª série.** Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1976.

LIBERMAN, M. P.; SANCHES, L. B. (GRUEMA) **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau. 1ª série.** Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1976.

LIBERMAN, M. P.; SANCHES, L. B. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1° grau, vol. IV**. Guia do Professor. São Paulo: Editora Nacional, 1978. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851. Acesso em: 02 fev. 2024.

LIBERMAN, M. P.; SANCHEZ, L. B. (GRUEMA) **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau. 4ª série**. Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

LIMA, F. R. de. **GEEM - Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** 2006. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LIMA, F. R. de; PASSOS, Lurizete Ferragut. G.E.E.E. - Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. *In*: VALENTE, W. R. **Osvaldo Sangiorgi - um professor moderno.** 1. ed. São Paulo: Annablume Editora, 2008. v. 1. p. 95 - 118.

MASSELI, M. R. V. P. **Uma personagem e um acervo:** rastros do discurso do MMM no Paraná. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

MEDINA, D. A. F.; **A produção oficial do movimento da matemática moderna para o ensino primário do estado de São Paulo.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de São Paulo – 2007.

MEDINA, D. História. O movimento da matemática moderna nas séries iniciais e o primeiro livro didático**. UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 4, n. 14, 25 jun. 2008.

MORAIS, R. dos S.; BERTINI, L. de F.; VALENTE, W. R. **A Matemática do ensino de frações:** do século XIX à BNCC. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

NIERRI, A. M. **Uma Matemática Moderna do Ensino de frações equivalentes, Paraná (1970-1980).** 2022. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas) - Universidade Federal do Paraná, 2024.

NOVAES, B. W. D.; PINTO, N. B. Estudos recentes sobre frações no campo da História da educação matemática: avanços e desafios. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. V.12, n. 5, p. 1-20. 2021. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/234424. Acesso em: 17 set. 2023.

OLIVEIRA, M. A. **A Aritmética Escolar e o Método Intuitivo:** um novo saber para o curso primário, 1870-1920. Tese (Doutorado em Ciências). Programa de Pós Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência. Universidade Federal de São Paulo, 2017.

OLIVEIRA, M. A. **Antônio Bandeira Trajano e o método intuitivo para o ensino de Arithmetica (1879-1954).** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Tiradentes, Aracaju, 2013.

OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. (Org.). **O Movimento da matemática moderna:** história de uma revolução curricular. Juiz de Fora: UFJF, 2011.

PARANÁ. **Revista Currículo n° 24** – Currículo do Estado do Paraná, 1977.

PARANÁ. Secretaria de Educação e Cultura. **Manual do professor primário do Paraná, v.1**, Curitiba, 1963.

PARANÁ. Secretaria de Educação e Cultura. **Manual do professor primário do Paraná, v.2,** 2 ed., Curitiba, 1965.

PAULO, R. M. **O significado epistemológico dos diagramas na construção do conhecimento matemático e no ensino de matemática.** 2006. xi, 192 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/102144. Acesso em: 15 jan. 2024.

PEREIRA, W. C. A. **Matemática dinâmica com número em cores**. Recife: Jornal do Commercio, 1961.

PIAGET, J. **A psicologia da criança.** Rio de Janeiro: Bertrand, 1998.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia.** Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1999.

PINTO, N. B. A modernização da matemática do ensino: contribuições de Jean Piaget em tempos de ofício e profissão docente**.** *In:* MORAIS, R. S., PINTO, N. B. (ORG). **Matemática do ensino**: por uma história do saber profissional 1960-2000. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo, 2024. -- (Coleção educação e saúde; v. 15), 2024, p. 51-74.

PINTO, N. B. **A modernização da matemática do ensino:** contribuições de Jean Piaget em tempos de ofício e profissão docente. *In*: MORAIS, R. M.;

PINTO, N. B. (Org.). **Matemática do ensino:** por uma história do saber profissional

1960-2000. -- São Paulo: Universidade Federal de São Paulo, 2024. p. 51-73.

PINTO, N. B. Marcas históricas da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, v. 5. n. 16, p. 25-38, 2005.

PINTO, N. B.; FERREIRA, A. C. O movimento paranaense de matemática moderna: o papel do NEDEM. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 18, p. 113–122, 2006. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/3328. Acesso em: 3 jun. 2024.

PINTO, N. B.; NOVAES, B. W. D. **“Não é Difícil Ensinar Matemática”:** o protagonismo do NEDEM na difusão da Matemática Moderna no Paraná. Acta Scientiae, Canoas, v. 21, n. especial, p.109-122, maio/Jun. 2019. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/. Acesso em: 27 ago. 2023.

PORTELA, M. S. A expertise de professores paranaenses e os saberes que geram a produção de materiais didáticos para o ensino de matemática. **Anais Do ENAPHEM** - Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/6510. Acesso em: 15 jan. 2024.

PORTELA, M. S. **As cartas de Parker na matemática da escola primária paranaense na primeira metade do século XX:** circulação e apropriação de um dispositivo didático**.** 2014. 189 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014.

PORTELA, M. S. **Práticas de ensino de matemática moderna na formação de normalistas no Instituto de Educação do Paraná na década de 1970.** Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná – 2009.
Revisão da tradução: Ruy Oliveira, Lisboa: Editora 70, 2007

ROSA NETO, E. **Didática da matemática.** 4. ed. São Paulo: Ática, 1992.

SANCHEZ, L. B. Autoria de livros didáticos: uma experiência e uma vida. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 4, n. 2, 2018. Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/225. Acesso em: 4 jun. 2024.

SANCHEZ, L. B. **Entrevista concedida a João Paulo Bertoldo, Winiarski Diesel Novaes e Danilene Donin Berticelli**, 22 de maio de 2024.

SANTIAGO JUNIOR, F.C.F. A virada e a imagem: história teórica do pictorial/iconic/visual turn e suas implicações para as humanidades. **Estudos de Cultura Material,** v. 27, 2019, p. 1-51.

SCHNEIDER, C. **Jogos para o ensino de aritmética em manuais pedagógicos de 1930-1960 no Brasil.** 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

SEARA, H. F. **Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática – NEDEM:**

“Não É Difícil Ensinar Matemática”. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, 2005. 552p.

SILVA, C. M. S. da. Imagens nos livros didáticos de matemática: Georg Augusto Büchler e Karl Sölter. **Acta Scientiarum. Education**, v. 39, n. 1, p. 55-65, 1 jan. 2017.

SILVA, C. M. S. O livro didático de matemática no Brasil no século XIX. *In*: FOSSA, J. (Org.). **Facetas do diamante**: ensaio sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro: SBHMat. 2000, p. 109-162.

SILVA, V. **Osvaldo Sangiorgi e o “fracasso da matemática moderna” no Brasil.** 2007. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SOARES, E. T. P. **Zoultan Paul Dienes e o Sistema de Numeração Decimal na cultura escolar paranaense (1960-1989).** 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba. 2014.

SOWELL, E. Effects of manipulatives materials in mathematics instruction, **Journal for Research in Mathematics education**, p. 498 – 505, 1989,

TANURI, L. M. História da formação de professores. **Revista Brasileira de Educação**, n. 14, p. 61- 88, maio/ago. 2000.

VALDEMARIN, V. T. Ensino da leitura no método intuitivo: as palavras como unidade de compreensão e sentido. **Educar em Revista**, n. 18, p. 157-182, 2001.

VALE, I. **Materiais Manipuláveis.** Edição do Laboratório de Educação Matemática (LEM), 1. Ed. 2002.

VALENTE, W. R. A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para o educador matemático. *In:* HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Org.). **Saberes em (trans)formação:** tema central da formação de professores. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 201-226.

VALENTE, W. R. A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares? **Revista Diálogo Educacional** (PUCPR. Impresso), v. 11, p. 645-662, 2011.

VALENTE, W. R. História da educação matemática: interrogações metodológicas. **Revista Eletrônica da Educação Matemática**. v. 2, n. 2, p .28 – 49, 2007.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **ZETETIKÉ**. v.16, n. 30, p.139-161, jul./dez., 2008c. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160373. Acesso em: 11 set. 2023.

VALENTE, W. R. O Saber: uma questão crucial para a institucionalização da educação matemática e profissionalização do educador matemático. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 20, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2882. Acesso em: 12 jan. 2024.

VALENTE, W. R. Os *experts* e os currículos de matemática. **Revista REAMEC**, v. 9, p. e21090-12, 2021.

VALENTE, W. R. Osvaldo Sangiorgi, um Best Seller. *In:* VALENTE, W. R. **Osvaldo Sangiorgi - um professor moderno**. 1. ed. São Paulo: Annablume, 2008b. v. 1. p. 13-42.

VALENTE, W. R. Quem somos nós, professores de matemática? **Cad. Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 11-23, jan./abr. 2008a.

VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática escolar no Brasil (1730-1930**). São Paulo: Annablume, 1999.

VAN de WALLE, J. A. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores em sala de aula. 6 ed. Porto Alegre: Ed. Artmed, 2009.

VILLELA, L. M. A. **GRUEMA**: uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil. 2009. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante, São Paulo, 2009. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161992. Acesso em: 12 jan. 2024.

ANEXO 1 – ROTEIRO PARA A ENTREVISTA

Querida Profa. Lucilia Bechara Sanchez,

Muito obrigada pela disponibilidade em nos atender. Danilene e eu somos ex-orientandas da Profa. Neuza Bertoni Pinto e nossos orientandos estão investigando sobre Cálculo Mental e Frações na Coleção do Gruema (primeiros quatro volumes).

Dividimos as questões em dois blocos. Elas não somente um roteiro semiestruturado para que a senhora tenha uma ideia de quais são os focos das nossas pesquisas.

Gostaríamos de ressaltar que após a transcrição de suas falas, entraremos em contato para a senhora aprovar o que está escrito (complementar) e se julgar necessário, retirar trechos.

Grata,
Barbara e Danilene

Bloco de perguntas em relação ao Cálculo Mental

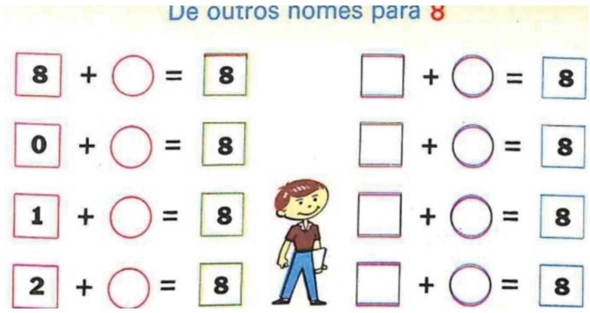
Título da dissertação: A matemática do ensino de cálculo mental: permanências e transformações nas atividades (1970 e 2021)

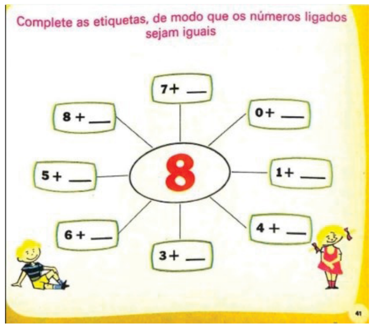
Objetivo: Entender as mudanças, permanências e transformações em atividades de matemática, que trabalham os conhecimentos do cálculo mental, em duas coleções de livros didáticos de 1970 e 2021

Problema de pesquisa: Observando atividades que trabalham os conhecimentos básicos do cálculo mental, buscamos permanências e transformações em duas coleções de livros didáticos de tempos distintos (1070 e 2021).

Orientanda: Juliana Salla
Orientadora: Danilene Berticelli

1) Em nossa análise inicial na coleção do Gruema, notamos atividades ricas em conhecimentos de cálculo mental. Você teve contato com materiais de outros países para a elaboração das atividades que compõem a coleção?
2) Como se deu o trabalho de elaboração das atividades no manual, considerando que havia outras docentes que participaram desta elaboração?
3) Durante nossos estudos sobre o cálculo mental, percebemos que alguns pesquisadores utilizam referenciais teóricos Piagetianos, outros utilizam as teorias dos campos conceituais de Vergnaud, teoria da transposição didática de Chevallard, outros a teoria de situações didáticas de Brousseau. Pergunto, qual o referencial teórico que você utilizou para a construção das atividades, envolvendo os conhecimentos de cálculo mental/aritmética?
4) Embora as atividades da coleção não mencionam o cálculo mental de forma direta, observa-se que envolvem conhecimentos específicos de cálculo mental. Nesse sentido, gostaríamos de saber qual a sua concepção de cálculo mental para a época em que o manual foi elaborado?
5) Na mesma direção da pergunta anterior, qual seria a finalidade do cálculo mental naquele momento?
6) Observamos que as atividades possuem muita representação. Imagens para ilustrar as operações. O que nos leva aos conceitos de concreto e abstrato. Qual a importância de trabalhar o concreto e o abstrato no ensino de cálculo mental?
7) Estamos colocando ênfase nas nossas observações e estudos, nas atividades que se assemelham às apresentadas abaixo. Notamos que elas evidenciam um único número e proporcionam ao aluno distintas possibilidades de respostas, o que sai do comum das listas de exercícios, onde normalmente temos exercícios do tipo 8+2=___, proporcionando apenas uma possibilidade de resposta. Vemos também que atividades como essa, ampliam um senso numérico de quem é o número apresentado, proporcionando uma rede de relações. Qual era/é a intenção com atividades desse formato? Vocês tiveram alguma inspiração em outro material na elaboração desta atividade?





Bloco de perguntas em relação as Frações

Título da dissertação: O papel das imagens para ensinar frações nas séries iniciais: um estudo das coleções NEDEM e GRUEMA na década de 1970

Objetivo: Discutir acerca do papel que as imagens para ensinar frações assumem em livros didáticos para os primeiros anos de escolarização, no período do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1970.

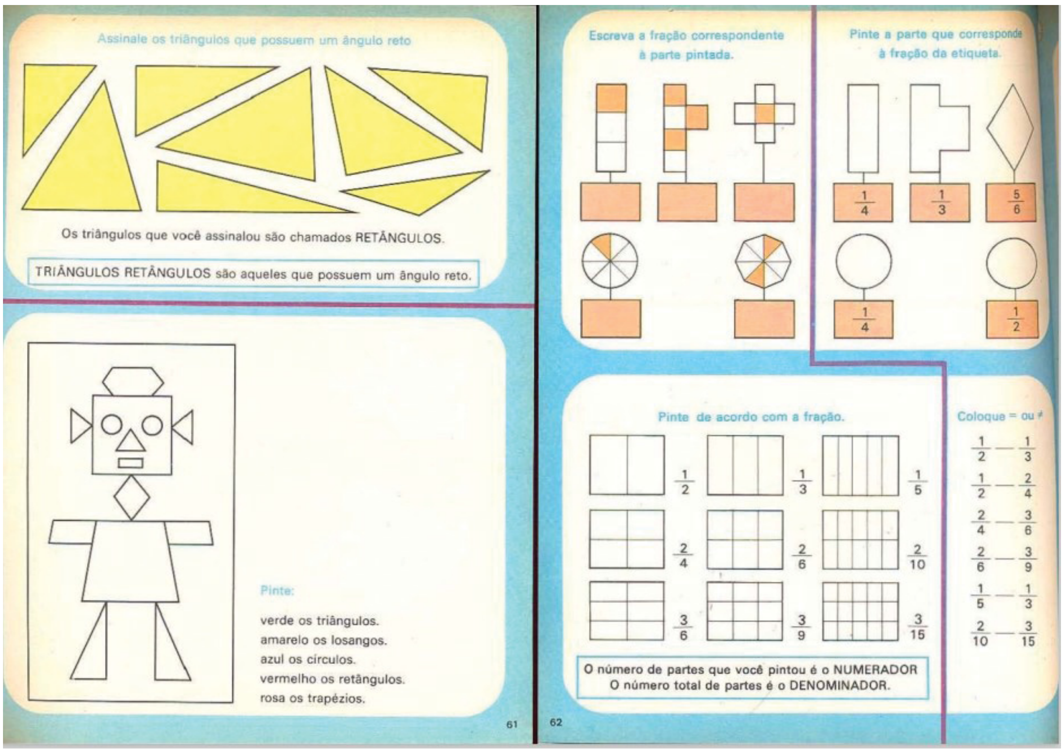
Problema de pesquisa: Quais imagens relacionadas às frações estavam presentes em livros didáticos dos primeiros anos de escolarização ao tempo do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1970?

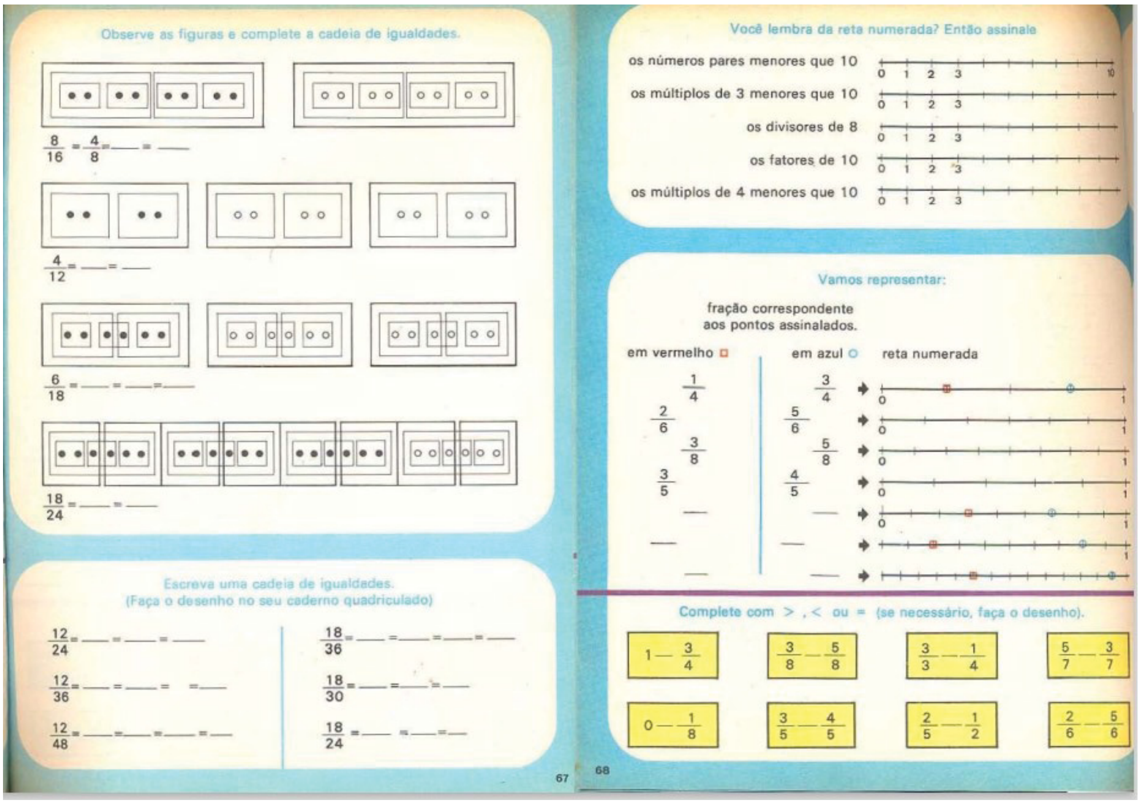
Orientando: João Paulo Bertoldo
Orientadora: Barbara Diesel Novaes

1) Como ocorreu o processo de seleção das imagens que iriam compor as seções do livro didático destinadas ao ensino das frações?
2) Ao elaborar a obra foi pensado em uma possível "articulação visual" da página, em unir o texto escrito, as imagens e a atividade do sujeito? Poderia comentar um pouco sobre essas ideias?
3) Houve inspiração em materiais/livros produzidos fora do país? Se sim, quais os principais?
4) Qual o papel dos livros do SMSG (Mathematics for Elementary School) para elaboração da coleção "Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar" e na coleção "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau"?

5) Qual papel assumido pelas imagens nos livros didáticos da coleção do Gruema, durante o Movimento da Matemática Moderna?
6) Qual a finalidade de usar um número grande de imagens para o ensino das frações? O uso do livro didático estaria associado a uso de materiais concretos/ materiais estruturados/ manipulativos?
7) Como foi pensado a sequência das imagens e os tipos de imagens para ensinar as frações na coleção de livros didáticos?
8) Percebemos que a mesma imagem para ensinar frações se repete(-se) nos livros do segundo, terceiro e quarto anos. Qual a intencionalidade disso?
9) Em que medida as experiências no Vocacional, Colégio Vera Cruz, Classes experimentais colaboraram ou não para a escrita do livro didático e a seleção das imagens para ensinar frações?
10) Quais o papel das cores nas imagens do livro do Gruema? Há uma intencionalidade?
11) Ao analisar livros didáticos do período da matemática moderna e guias para os professores, encontramos os termos “concreto”, “semi-concreto”, “semi-abstrato” e “abstrato”. O que a senhora tem a dizer sobre isso? Há relação com as imagens nos livros didáticos da coleção do GRUEMA?

Imagens sobre frações selecionadas do livro 4 do GRUEMA





Observe as figuras e complete a cadeia de igualdades.

$\frac{8}{16} = \frac{4}{8} =$ ___ = ___

$\frac{4}{12} =$ ___ = ___

$\frac{6}{18} =$ ___ = ___ = ___

$\frac{18}{24} =$ ___ = ___

Escreva uma cadeia de igualdades.
(Faça o desenho no seu caderno quadriculado)

$\frac{12}{24} =$ ___ = ___ = ___

$\frac{12}{36} =$ ___ = ___ = ___

$\frac{12}{48} =$ ___ = ___ = ___ = ___

$\frac{18}{36} =$ ___ = ___ = ___ = ___

$\frac{18}{30} =$ ___ = ___ = ___

$\frac{18}{24} =$ ___ = ___ = ___

67

Você lembra da reta numerada? Então assinale

os números pares menores que 10

os múltiplos de 3 menores que 10

os divisores de 8

os fatores de 10

os múltiplos de 4 menores que 10

Vamos representar:

fração correspondente aos pontos assinalados.

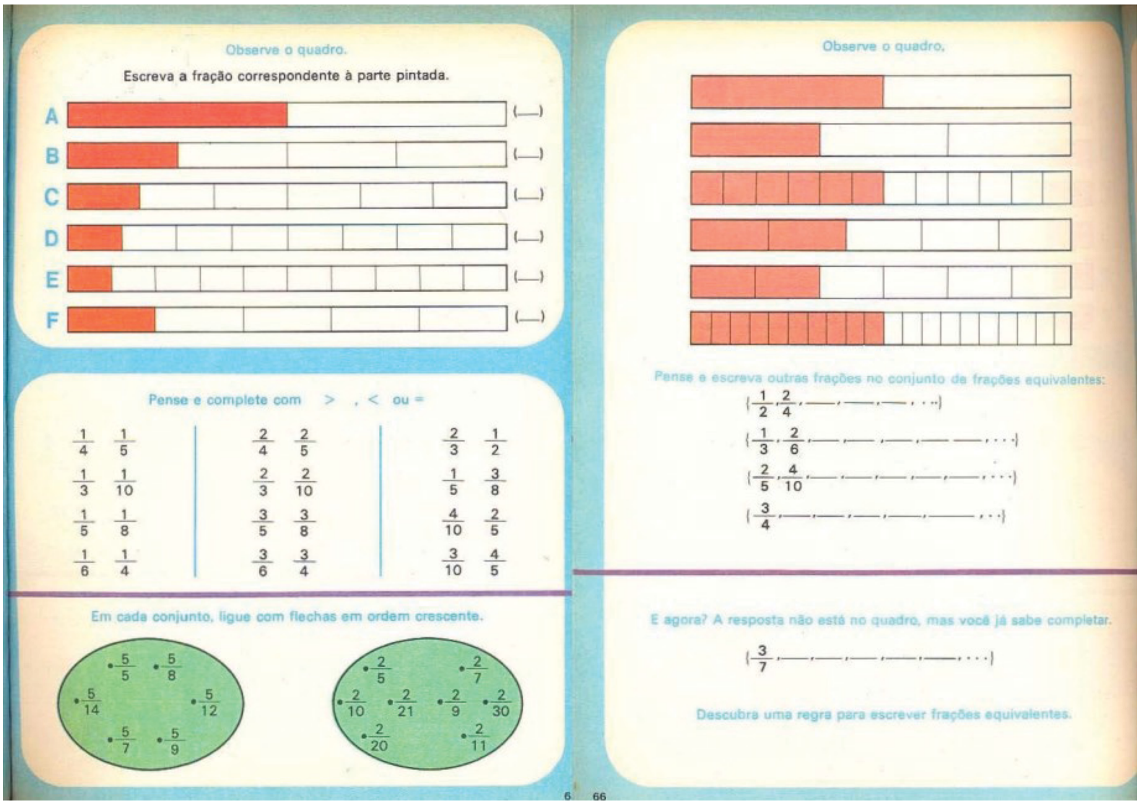
em vermelho	em azul	reta numerada
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
___	___
___	___
___	___

Complete com >, < ou = (se necessário, faça o desenho).

1 ___ $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ ___ $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{3}$ ___ $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{7}$ ___ $\frac{3}{7}$

0 ___ $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{5}$ ___ $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ ___ $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{6}$ ___ $\frac{5}{6}$

68



Observe o quadro.

Escreva a fração correspondente à parte pintada.

A (___)
B (___)
C (___)
D (___)
E (___)
F (___)

Pense e complete com >, < ou =

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{8}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{10}$ $\frac{2}{5}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{5}$

Em cada conjunto, ligue com flechas em ordem crescente.

$\frac{5}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{14}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{9}$

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{2}{21}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{30}$ $\frac{2}{20}$ $\frac{2}{11}$

6

Observe o quadro.

Pense e escreva outras frações no conjunto de frações equivalentes:

$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4},$ ___, ___, ___, ...$\}$

$\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6},$ ___, ___, ___, ___, ___, ...$\}$

$\{\frac{2}{5}, \frac{4}{10},$ ___, ___, ___, ___, ...$\}$

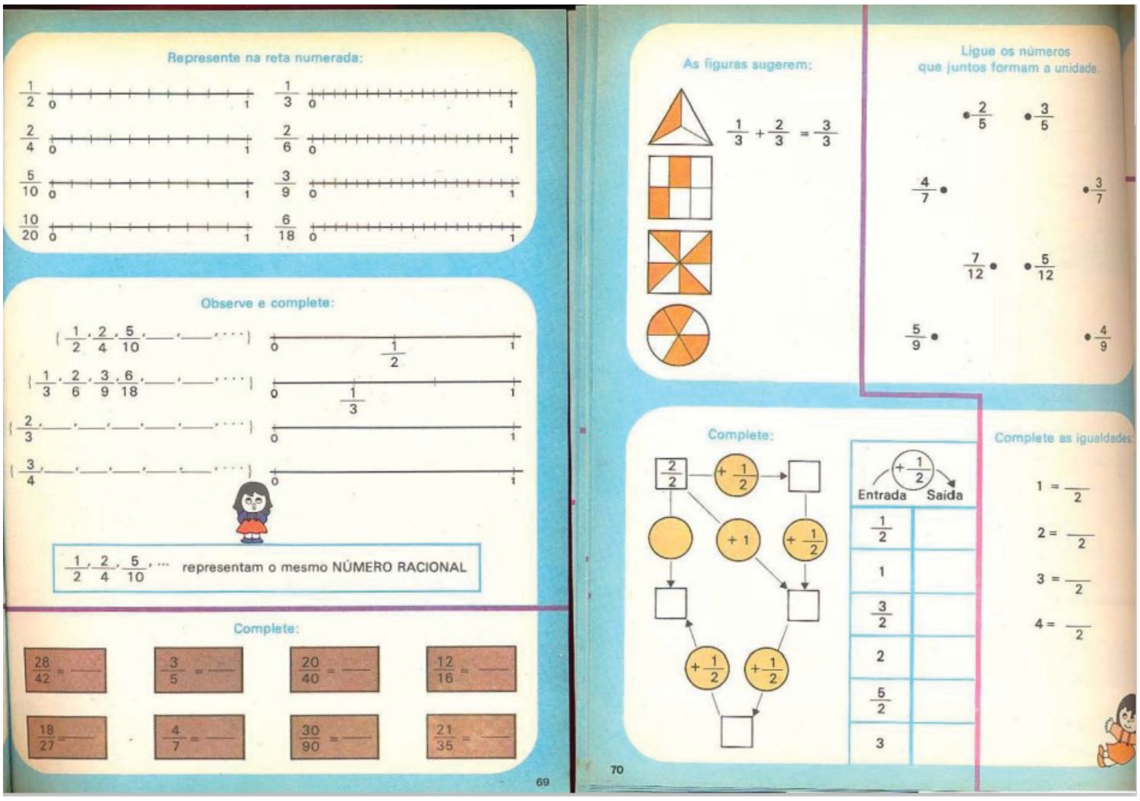
$\{\frac{3}{4},$ ___, ___, ___, ___, ___, ...$\}$

E agora? A resposta não está no quadro, mas você já sabe completar.

$\{\frac{3}{7},$ ___, ___, ___, ___, ...$\}$

Descubra uma regra para escrever frações equivalentes.

66



Represente na reta numerada:

$\frac{1}{2}$ 0 — 1 $\frac{1}{3}$ 0 — 1

$\frac{2}{4}$ 0 — 1 $\frac{2}{6}$ 0 — 1

$\frac{5}{10}$ 0 — 1 $\frac{3}{9}$ 0 — 1

$\frac{10}{20}$ 0 — 1 $\frac{6}{18}$ 0 — 1

Observe e complete:

$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \_\_, \_\_, \ldots\}$ 0 $\frac{1}{2}$ 1

$\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{6}{18}, \_\_, \_\_, \ldots\}$ 0 $\frac{1}{3}$ 1

$\{\frac{2}{3}, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \ldots\}$ 0 1

$\{\frac{3}{4}, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \ldots\}$ 0 1

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \ldots$ representam o mesmo NÚMERO RACIONAL

Complete:

$\frac{28}{42} = \_\_$ $\frac{3}{5} = \_\_$ $\frac{20}{40} = \_\_$ $\frac{12}{16} = \_\_$

$\frac{18}{27} = \_\_$ $\frac{4}{7} = \_\_$ $\frac{30}{90} = \_\_$ $\frac{21}{35} = \_\_$

69

70

As figuras sugerem:

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$

Ligue os números que juntos formam a unidade.

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$

Complete:

$\frac{2}{2}$ $+\frac{1}{2}$ $+1$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$

Entrada $+\frac{1}{2}$	Saída
$\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{3}{2}$	
2	
$\frac{5}{2}$	
3	

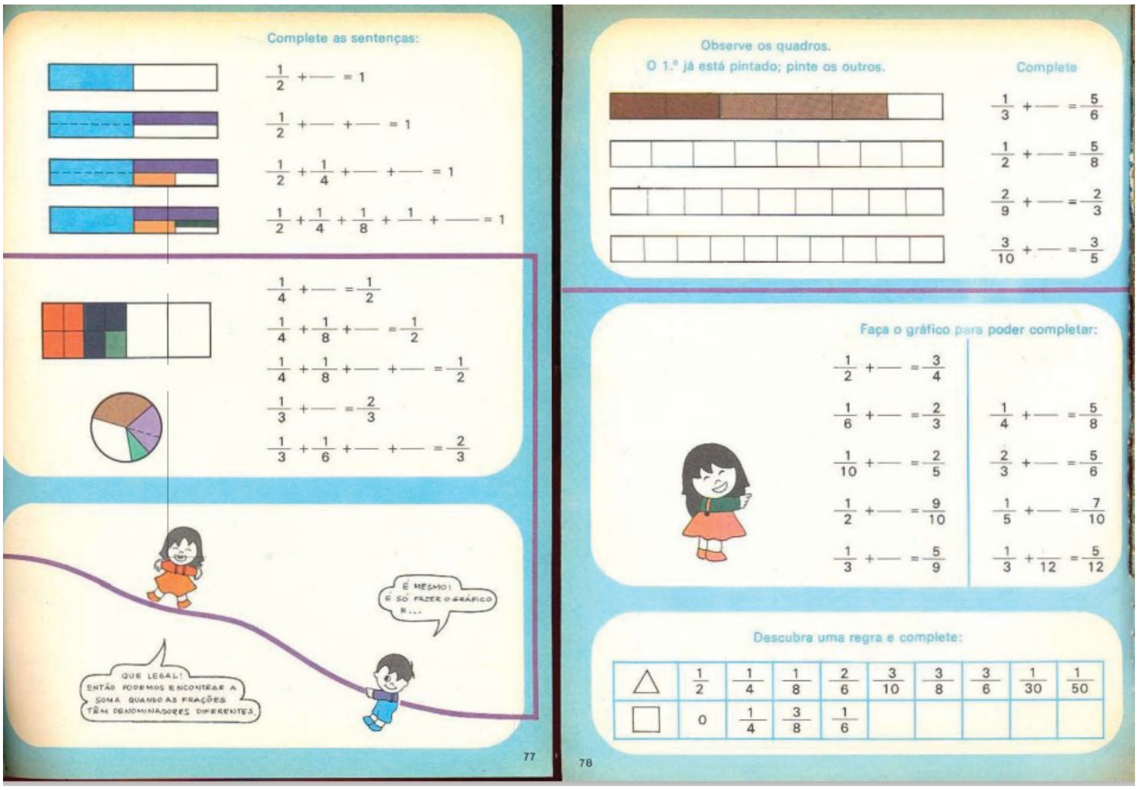
Complete as igualdades:

$1 = \frac{\_\_}{2}$

$2 = \frac{\_\_}{2}$

$3 = \frac{\_\_}{2}$

$4 = \frac{\_\_}{2}$



Complete as sentenças:

$\frac{1}{2} + \_\_ = 1$

$\frac{1}{2} + \_\_ + \_\_ = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \_\_ + \_\_ = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{\_\_} + \_\_ = 1$

$\frac{1}{4} + \_\_ = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \_\_ = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \_\_ + \_\_ = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} + \_\_ = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \_\_ + \_\_ = \frac{2}{3}$

77

78

Observe os quadros.
O 1.º já está pintado; pinte os outros.

Complete

$\frac{1}{3} + \_\_ = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{2} + \_\_ = \frac{5}{8}$

$\frac{2}{9} + \_\_ = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{10} + \_\_ = \frac{3}{5}$

Faça o gráfico para poder completar:

$\frac{1}{2} + \_\_ = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{6} + \_\_ = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{10} + \_\_ = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{2} + \_\_ = \frac{9}{10}$

$\frac{1}{3} + \_\_ = \frac{5}{9}$

$\frac{1}{4} + \_\_ = \frac{5}{8}$

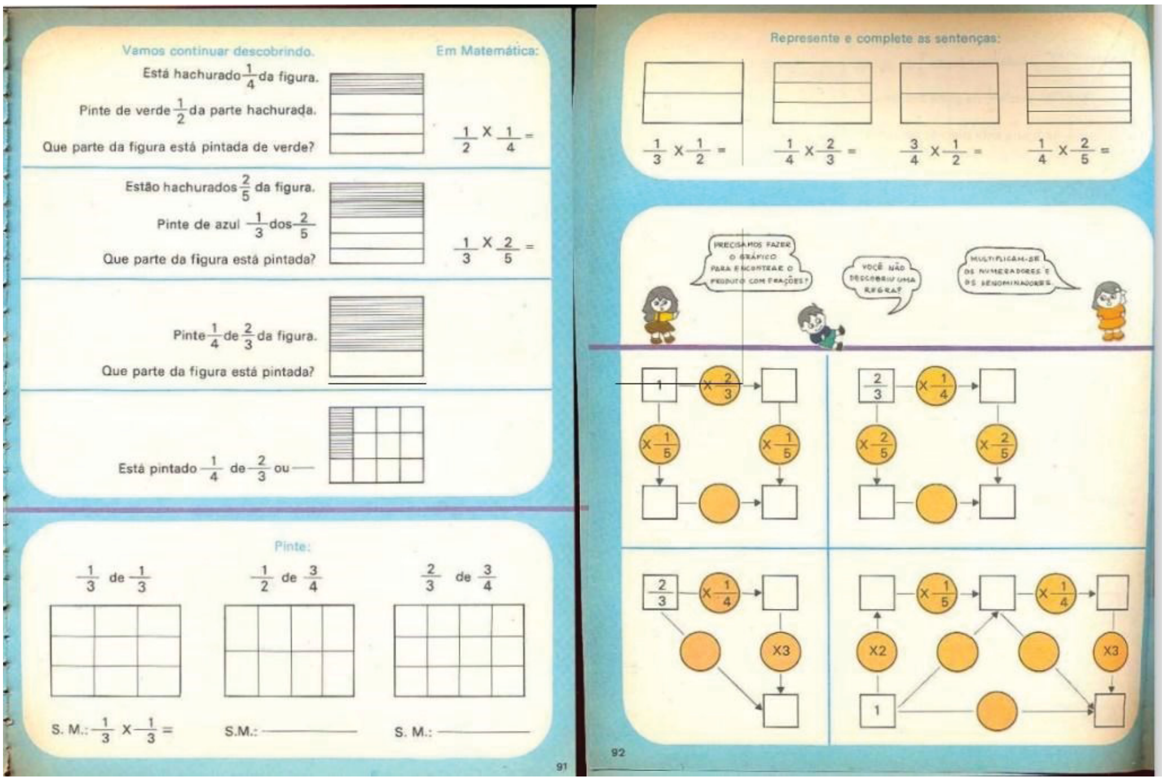
$\frac{2}{3} + \_\_ = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{5} + \_\_ = \frac{7}{10}$

$\frac{1}{3} + \frac{\_\_}{12} = \frac{5}{12}$

Descubra uma regra e complete:

△	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{50}$
□	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$					



Vamos continuar descobrindo.

Em Matemática:

Está hachurado $\frac{1}{4}$ da figura.

Pinte de verde $\frac{1}{2}$ da parte hachurada.

Que parte da figura está pintada de verde?

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} =$

Estão hachurados $\frac{2}{5}$ da figura.

Pinte de azul $\frac{1}{3}$ dos $\frac{2}{5}$

Que parte da figura está pintada?

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} =$

Pinte $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ da figura.

Que parte da figura está pintada?

Está pintado $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ ou ——

Pinte:

$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$

S. M.: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} =$ $\qquad$ S.M.: ________ $\qquad$ S. M.: ________

91

Represente e complete as sentenças:

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$ $\qquad$ $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} =$ $\qquad$ $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$ $\qquad$ $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} =$

92

ANEXO 2 – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA

Entrevista concedida por Lucília Bechara Sanchez a Barbara Winiarski Diesel Novaes, Danilene Donin Berticelli e João Paulo Bertoldo, em 23 de maio de 2024.

Danilene: Só para a gente começar. De onde a professora fala?

Barbara: De São Paulo. A gente já estudou, o meu foco maior está na aritmética dos anos iniciais, já teve vários trabalhos sobre frações equivalentes sobre é reta numérica, números racionais, a Danilene é especialidade no cálculo mental. Então, a orientanda dela está mais voltada para o cálculo mental. Mas a coleção de vocês é uma inspiração. Todo mundo fala isso, mas a gente vai reiterar porque é incrível. A gente ainda pode utilizar de forma atual, muita coisa que é atual, muito atual.

Prof. Lucília: Obrigada pela… O João acha isso, João?
João Paulo: Acho, profa., super acho. Bem atemporal e as crianças, digamos assim, as crianças modernas também se motivam com aquilo.
Prof. Lucília: Tem algumas coisas que eu também acho que ainda são atuais, não é? Sim. Em algum lugar vocês falam da edição de 70 e de 2021, não é isso? Vocês falam? Ou não?
Danilene: Aqui a gente percebeu o seguinte, isso foi a minha aluna até que escreveu, a gente está trabalhando com a sua coleção, anos 70, e estamos olhando para materiais de 2021. Então a gente quer ver essas permanências e mudanças que tiveram nessas atividades ao longo da história. Então é um pouco nesse sentido que se está trabalhando com as coleções.
Prof. Lucília: Muito bom, estamos aqui. Vamos fazer render a nossa reunião, porque tem que ter resultado, não é isso?
Barbara: Isso. Como que a senhora prefere? Não sei se a senhora chegou a ler aquelas inquietações nossas, ou a senhora prefere que a gente vá direcionando, ou a senhora vai falando conforme...
Prof. Lucília: Eu prefiro que vocês direcionem, porque acho que vocês é quem sabem aonde querem chegar, não é isso? E eu, claro que, quando se eu achar que tenho que dar uma outra explicação, aí eu faço as minhas observações. Eu acho

que é melhor até pelos objetivos que a gente está aqui se encontrando, não é isso? Que é muito mais para um trabalho de orientação de tese. Então, vocês são quem sabem, como dizem, qual é o problema de vocês.

Barbara: Isso. Então, acho que eu vou deixar a Danilene fazer algumas perguntas. A Juliana não pode estar presente, porque ela é professora da rede, também está em sala de aula. E daí, acho que a Danilene poderia fazer algumas perguntas em relação ao cálculo mental, contextualizar, e depois a gente faz as perguntas relacionadas às frações.

Prof. Lucília: Vocês todos são de licenciatura em que área?

Barbara: Matemática.

Prof. Lucília: Ah, todos. O João também.

Barbara: Isso.

João Paulo: Eu fiz Química, prof.

Prof. Lucília: Ah, Química, mas dá aula?

João Paulo: É, para os anos iniciais, de todas as disciplinas: Português, Matemática… Eu sou o Normalista aqui da galera.

Barbara: É porque é permitido, ele faz o curso Normal, o Magistério, né, e, tendo uma Licenciatura, ele pode atuar nos anos iniciais, mas ele já foi coordenador também da rede municipal, aqui de Toledo, em relação à Matemática. Você tem uma questão com a Matemática, não é, João?

João Paulo: Ah, sim. Digamos que eu passei pela Química, mas fiquei na Matemática.

Prof. Lucília: Muito bom. Tens bom gosto.

Danilene: Então, deixa eu falar para a professora Lucília um pouquinho o que a Juliana está pesquisando. Ela está tentando caracterizar uma Matemática do ensino do cálculo mental, buscando permanências e transformações nas atividades. Então, ela vai olhar para uma coleção de 1970, que é a coleção que vocês elaboraram, e está olhando para um material de 2021, que é o material que está sendo utilizado na rede, no Programa Nacional do Livro Didático. E aí a gente observa que, na coleção do Gruema, se percebe atividades muito ricas em conhecimentos de cálculo mental. Gostaria de saber se vocês tiveram contato com outros materiais de outros países para a elaboração dessas atividades que compõem o material e se teve algum pesquisador que foi utilizado como uma referência para o embasamento teórico. Então, mais ou menos nesse sentido que a gente gostaria que a senhora contasse para nós um pouco sobre as atividades.

Prof. Lucília: Então, eu vou falar alguma coisa que vocês já conhecem, mas só para dar um contexto para poder explicar. Esse livro foi realizado dentro do Movimento da Matemática Moderna, certo? O Movimento da Matemática Moderna no Brasil começou em 1961, quando teve o curso do GEEM, quando foi fundado o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, foi lá. Aconteceu uma coisa que me chamou a atenção, porque até então quem escrevia livros de Matemática não eram professores de Matemática (do primário). Quem escrevia os livros do primário eram pedagogos que escreviam os livros do primário. E aí a Manhúcia e eu fomos convidadas, escaladas vamos chamar assim, lá no GEEM a dar os cursos para os professores primários, dar a matemática para os professores primários. E nós aceitamos. Eu, por exemplo, no começo nem sabia muito bem como é que se trabalhava no primário. Conhecia os livros, que pena que não me lembro agora os autores da época. Então, nós fomos dar o curso para esses professores primários para ensiná-los a Matemática Moderna. Então, o que aconteceu? A editora Nacional, que era o seu Octalles, ele nos convidou para escrever o livro do primário. E nós, inclusive, achamos aquilo não muito fácil, porque, embora a gente estava trabalhando muito com os professores primários lá na Matemática Moderna. Então, já que vocês perguntaram a influência, a influência na época maior, se falava no Vernot, eu tinha muita simpatia pelos franceses, então tinha a Luciane Félix, que é uma educadora francesa que... Isso! Luciane Félix, é isso mesmo. Ela... Depois tinha também uma outra pessoa que eu tinha muita simpatia, são os belgas. E tinha o Frédéric Papy. Então, eu gostava muito dos franceses. Mas a influência que o GEEM teve maior foi do SMSG, Scum Ethnic Study Group. Então, foi essa a influência maior. Então, na verdade, eu e a Manhúcia nos simpatizamos muito pelos franceses. E aí o Vernot aparece muito mais, quem trabalha muito com o Vernot é a **Esther Gross**. A Esther Gross trabalha hoje, foi até orientador dela. Outro que eu tive muita simpatia, que me influenciou demais, foi o Dienes. Então, Manhúcia e eu resolvemos escrever este livro. E, na época, um dos pontos, vocês vão recapitular um pouquinho da Matemática Moderna, era a teoria dos conjuntos e era a unificação da Matemática. A Matemática era unificada através da teoria dos conjuntos e da lógica. E tinha a álgebra também, que o Jaci Monteiro foi um grande que participou muito, que é a álgebra moderna, vamos chamar assim que a gente chamava na ocasião. Então, a gente olhava muito todos esses materiais para fazer o nosso material.

Então, o nosso objetivo era fazer um livro que fosse da Matemática Moderna. Então, nós tínhamos esta... E a matemática moderna tinha também uma outra influência muito forte, que era do Piaget. O Piaget, ele foi o inspirador, vamos chamar assim, da Matemática Moderna. E o Piaget era muito de compreensão, de construção do conhecimento, não simplesmente repetição. E o que a matemática clássica trazia era a repetição, a matemática clássica, era a memorização, era a tabuada, eram os algoritmos. Então, nós fomos muito influenciados por esses... E a minha influência com o Dienes ficou muito forte. Nós tivemos uma época, a Manhúcia e eu, vamos chamar assim, nos separamos, porque eu quis me dedicar mais especificamente a trabalhar na linha do Dienes, nas seis etapas do processo de aprendizagem do Dienes. E o Vera Cruz, onde eu tinha acabado de colocar a minha filha, não adotava livros, eles trabalhavam em cima de fichas, com a Montessori também, a Lubienska. Então, eles queriam que eu construísse a matemática do Dienes e não utilizasse o nosso livro. Aí a Manhúcia ficou bastante chateada com esse fato. Então a gente teve uma época de, vamos chamar assim, de separação. Mas depois nós voltamos e fizemos um outro livro também baseado na Matemática Moderna. Então, por enquanto, é isso que eu tenho para contar para vocês, de como é que a ideia desse livro nasceu. Uma outra influência muito grande foi a da álgebra moderna. Tanto assim que estava dentro da linha da teoria dos conjuntos e da unificação da matemática, que é a questão da... Eu falei que a influência da Matemática Moderna, eu ia colocar, acho que... do cálculo mental. Então, o cálculo mental, se vocês observarem, ele está muito fundamentado nas propriedades da álgebra, que é a associativa, a comutativa, a transitiva, a distributiva, por exemplo, a propriedade distributiva. Porque é na propriedade distributiva que você faz que, por exemplo, 23 vezes 12 E é o mesmo aqui, 23 X 10, mais... 23 X 10, mais 23 X 2. Então, essa distributividade, ela explicava o processo chamado processo breve do algoritmo da divisão. Você baixava, não é isso? Abaixava, e a gente começou a fazer mais pelo processo longo, que o processo longo evidenciava mais a propriedade distributiva. E o cálculo mental, se vocês observarem, ele está muito influenciado pelas propriedades da álgebra.

Danilene: Então, agora, olhando para as atividades que a gente separou aqui, algumas que colocamos na figura, por exemplo, oito mais quanto que dá oito? Um mais quanto que dá oito? Dois mais quanto que dá oito? Na verdade, é a álgebra que está por trás da construção dessas atividades.

Prof. Lucília: Exatamente, é a álgebra que está por trás, porque a álgebra é a generalização, vou chamar, da aritmética, que a aritmética é uma generalização. É isso mesmo. Você pegou bem o exemplo. Uma outra coisa também que fica no que vocês deram das frações, acho que é o último, que aparece o que era muito da Matemática Moderna, e bem o Dienes trabalhava muito, que ele chama variabilidade perceptiva e variabilidade matemática. Nas seis etapas do processo de aprendizagem, ele põe a variabilidade perceptiva. Então, ele trabalha com várias... com várias percepções das frações. A fração na geometria, a fração como conjunto numérico, a fração... Então, esse é um aspecto que fica lá bem evidente, que é da matemática moderna. E nós já usamos isso bem lá nos primeiros livros. Uma outra coisa que observei também, quando eu estava vendo a nossa fundamentação, é muito mais, talvez a gente teve mais influência do Piaget, do Dienes, do que do Vernot, embora esses outros também trabalharam, mas eu acho que no nosso livro, eu acho que esses é que foram que mais nos influenciaram. Aquele exercício de fração, que você pega o meio, multiplica por dois, multiplica por um terço e depois faz a composição, é como se fosse... A gente chamava isso, o Papy que usava isso, as máquinas. Ele fazia as transformações. Ele trabalhava com transformações.

Barbara: Até eu cheguei a comprar no Sebo esses livros, aqui, do Dienes.

Prof. Lucília: Eu imagino que é do Sebo.

Barbara: Que são as fichas de trabalho. Ele fala alguma coisa sobre as superestruturas e os estados, não é? E quando eu olhei, aquela atividade...

Prof. Lucília: Estados e operadores, exatamente.

Barbara: Estados e operadores. Quando olhei aquela atividade, falei, gente, como elas conseguiram traduzir isso, ainda mais com uma ilustração e para o nível, para as crianças, porque achei esses dois livros muito difíceis para a gente compreender.

Prof. Lucília: É verdade. Ele é muito formal.

Barbara: Isso.

Prof. Lucília: É isso que se chama... Eu nem tenho mais esses livros para mim, foram todos pro GHEMAT.

Barbara: Isso, eu acabei adquirindo no Sebo, e um outro exemplar, uma colega nossa, a Marilise Portela, acabou doando, porque uma das professoras que escreveram o livro do NEDEM, do NEDEM dos Anos Iniciais, ela foi num curso de 1970, que o Dienes estava em São Paulo, e tem um desses livros autografado por ela, pela Henrieta. É fascinante essa questão da História. Quando a senhora fala do livro, é esse livro aqui, que é o de 1967, que é o Curso Moderno?

Prof. Lucília: Exatamente, esse foi o primeiro, não é? Esse é de 67. Isso, que teve essa coleção.

Barbara: E depois, teve a outra coleção, que é o Ensino Moderno do Primeiro Grau, que também teve uma vendagem muito grande. Exatamente. Algumas coisas se mantêm e acho que algumas coisas também foram atualizadas. Essas máquinas de estado, acho que só têm na coleção do GRUEMA mesmo, pelo que percebi, que é muito interessante.

Prof. Lucília: Exatamente. Estados e operadores.

Barbara: É, máquina de estado.

Prof. Lucília: Bárbara, vocês já sabem de tudo, não precisa falar mais.

Barbara: Professora, em relação ao Piaget, acho que pode ajudar a Danilene, quer dizer, a Danilene e a gente é o mesmo grupo, então, por isso que a gente está, fizemos juntos as questões. Acho que na tese da Lucinha ou da Denise, ela relata que, a senhora coloca que os seis estudos foi um dos livros principais na hora de pensar a sequência da coleção, a graduação, porque a gente percebe, por exemplo, em relação só a esse caso particular das imagens. As imagens parecem que vão se repetindo no volume 1, no volume 2, no volume 3, sempre acrescentando alguma coisa mais complexa.

Prof. Lucília: As imagens.

Barbara: Isso. O Piaget foi nesse sentido, esse pano de fundo em relação à aprendizagem das crianças?

Prof. Lucília: As imagens têm muito a ver com o concreto e o abstrato, que era um outro ponto muito valorizado. Eu até costumo contar que eu estava querendo desistir de ser professora quando apareceu tanto o Vocacional mas, principalmente, a Matemática Moderna, porque eu vi que a matemática não precisava ser aquela disciplina de regras. Põe a direita, põe a esquerda. Então, daria para você ensinar matemática de uma maneira construtiva, de uma maneira concreta, lúdica, E foi muito a influência do Dienes. O Dienes trabalha com jogos. Basicamente, ele trabalha com jogos, trabalha com material multibase, no caso. Ele chamava de variabilidade perceptiva e variabilidade matemática. A variabilidade perceptiva é aquela variabilidade que leva à abstração e a variabilidade matemática é a que leva à generalização. Então, foi bem fundamentado nisso que o Dienes formalizou bastante nos seus livros. O Dienes, na ocasião, estava no Canadá, quando ele veio para o Brasil pela primeira vez, porque ele era húngaro. Mas ele estava... no Canadá.

Danilene: E as atividades, assim, porque a gente percebe uma riqueza na variedade das atividades, com muitas imagens, então, hoje, por exemplo, estudando cálculo mental, as estratégias, depois que a gente avançou um pouquinho, percebe que elas são muito ricas nesses conhecimentos de cálculo mental. Vocês criaram todas essas atividades ou vocês acabaram se inspirando em alguma outra atividade para criar esse material? Como é que foi isso?

Prof. Lucília: Olha, eu acho que a gente... Eu acho que a gente criou bastante. Eu diria que nós criamos bastante. A gente inventou bastante. Eu me lembro que a gente sentava ali na Maria Antônia, tinha uma... um lugar que a gente ficava lá conversando e vendo que imagens que a gente ia colocar dentro dessa linha da concretização. Agora, o Papy foi um inspirador, George Papy, porque ele trabalhou muito com imagens. Aliás, os que nós tivemos contato, inclusive, tanto na Bélgica quanto em Luxemburgo, nós tivemos um contato com o Disburg, que é um de Luxemburgo, e que também tinha bastante... muito atualizado na chamada Matemática Moderna. Tanto assim que, por exemplo, a minha tese de Mestrado foi sobre transformações geométricas. As transformações geométricas é todo um trabalho da Luciane Perix. Quem trabalhou assim e essa tese de... Bom, façam perguntas porque eu vou começar a falar demais.

Danilene: Eu tenho mais uma, Barbara, ainda que eu gostaria de fazer, sobre o cálculo mental. Se a professora... Como você entendia a finalidade do cálculo mental naquele momento que vocês estavam elaborando esse material?

Prof. Lucília: Como é que eu percebia? Eu tinha um certo até, vamos chamar, preconceito com a tabuada. Tinha mesmo. 5 x 1, 5 x 2, 5 x 3... A tabuada do 7 é difícil. 7 x 1, 7 x 2, 7 x 3... Aquilo me deixava muito incomodada. Então, quando eu vi a possibilidade de você, em vez de fazer 7 x 8, você pode fazer (7 x 4) + (7 x 4) ou (7 x 4) você pode fazer (7 x 2) + (7 x 2) isso começou a me encantar a matemática. Disso que eu falei, quem me trouxe de volta para a matemática foi a Matemática Moderna, pelo fato dela ter essa parte de compreensão dos números, você entendia os números. Não sei se vocês viram o processo longo que a gente desenvolveu no GRUEMA, ou nas séries iniciais. E aquilo, aquele processo longo para mim dizia, puxa vida, agora dá para eu entender o que é uma divisão, o que estou fazendo quando divido 785 por 20. Eu faço aquelas tentativas, põe 100, 100 é muito, 50 é pouco, então... Para mim, isso era a matemática compreendida, matemática não mecânica. Eu acho que foi o que me atraiu na Matemática Moderna e depois os Vocacionais. Os Vocacionais eram mais os ginásios.

Danilene: Perfeito. Obrigada.

Prof. Lucília: Não sei se estou respondendo às perguntas.

Barbara: Está perfeito. Tudo começa a fazer sentido, porque a gente vai lendo o material ali, vai lendo uma tese ali, um artigo, tudo espalhado, e parece que a senhora está conectando tudo. Então, está perfeito. Danilene, você quer que eu coloque a imagem para ela?

Danilene: Sim, se você tem.

Barbara: É que eu acho que é interessante, por que a gente vai ter que aprofundar essa questão da variabilidade perceptiva. Porque, se a gente colocar aqui, professora, para a senhora relembrar, a aluna da Danilene está especificamente muito interessada nessa variabilidade perceptiva. Então, aqui tem uma maneira de organização. Logo, na sequência...

Prof. Lucília: Deixa eu ver essa daqui. Então, aqui eu acho que, quando vocês falam em variabilidade, eu acho que nas frações a variabilidade perceptiva é bem evidente, mais até do que no cálculo mental. Mas vamos ver aqui. A variabilidade perceptiva no caso, aqui, eu não sei se chamaria de uma variabilidade perceptiva, mas, realmente, o fato de vocês colocarem o oito de diferentes maneiras, ele sai um pouquinho do seu enquadramento só de cálculo. Mas, nas frações, a variabilidade perceptiva e a variabilidade matemática, é fácil de explicar.

Barbara: Aqui, professora, achei interessante, a senhora cita bastante o Papy, o belga, ele é uma sumidade, mas tem um outro belga, que era o Cuisenaire, que o material dele foi difundido pelo Kaleb Gateno, vocês chegaram a ter contato com esse material também?

Prof. Lucília: Também, também. Também tivemos. O contato com o Cuisenaire estava muito ligado ao pessoal que trabalhava com o material Cuisenaire. Por que a gente não foi tão apegado tanto ao Cuisenaire quanto ao material dourado, que também era do mesmo grupo? Acho que sim. Por quê? Por causa da variabilidade perceptiva. Então, trabalhar com um único material, a gente não variava a percepção do 8 + 2, por isso, a gente não valorizou muito, não se apegou muito ao material Cuisenaire, por causa dessa questão da variabilidade perceptiva.

Danilene: Mas, então, pensando assim, essa variabilidade perceptiva pode ser também visível nas figuras que a Barbara colocou, porque você não fica no 7 +1 = 8, e você parte do 8 para ele trazer todas as possibilidades de resposta, não é?

Prof. Lucília: É, sem dúvida, sem dúvida. Tem todas as possibilidades de resposta, e mesmo de pensar os números, sem estar fechado em uma equação, fechado em uma sentença matemática. 8 + 8, porque a tabuada, como era? Era 7 X 8, 7 X 9, multiplicação igual, era assim que se ensinava a tabuada. Na época, você, sempre que tem uma mudança, tem as resistências, como teve também, resistência da Matemática Moderna. O pessoal achava que os alunos não iam aprender as multiplicações, não iam memorizar a tabuada, então teve muita, também, resistência inicialmente, não foi assim que a Matemática Moderna entrou tão facilmente. Teve muita resistência.

Barbara: É, você imagine, né, também no contexto educacional brasileiro, na década de 60, pelo menos aqui no Paraná, era "um mar" de professores leigos, e que não tinham uma formação adequada, e a professora Neusa mesmo falou que era professora universitária, era professor dos anos iniciais, que era o primário, todo mundo teria que parar e estudar, porque não conhecia essa matemática, essa Matemática Moderna.

Prof. Lucília: Exatamente. E eram normalistas, que davam aulas no...

Barbara: A professora Neusa começou a carreira dela aqui em Palotina e ela falou que em 59 ela era a única Normalista formada na cidade e que o povo da cidade de Palotina a aproveitou (ela) já para dar aula para o ginásio, porque logo na sequência foi lançado o livro do Sangiorgi e ela era a única Normalista com um pouquinho mais de condições de poder trabalhar com o livro do Sangiorgi no ginásio.

Prof. Lucília: É engraçado que o próprio Sangiorgi foi com muito cuidado para atualizar o livro para a Matemática Moderna, porque ele vendia muitos livros. E... E aí o pessoal não estava ainda preparado. Ainda, por exemplo, não decorar tabuada era uma coisa... Ou trabalhar com as frações como classe de equivalência, ou trabalhar com as frações na reta numérica, por exemplo. A gente ainda trabalhava com a geometria, com os teoremas de Euclides, nem trabalhava, a gente chamava de congruência, chamava de teoremas de Euclides, os axiomas, os postulados e os teoremas. Então, o Sangiorgi tomava cuidado que os professores ainda não estavam totalmente formados.

Barbara: Isso, e assim, é porque eu acho que essa primeira coleção, vocês tinham as ilustradoras também, que é uma coisa fantástica, esse livro todo colorido, todo convidativo para ensinar, acho que tem muito a ver mesmo com o que a senhora falou, dessa questão de fazer diferente do que estava sendo feito, essa matemática clássica que não era nada atrativa, que era muito punitiva. Então, realmente é bem interessante. Não sei se a Danilene quer fazer mais alguma pergunta do cálculo mental, posso fazer da… Pode ir para as frações. Ah, tá. A senhora já adiantou algumas coisas das frações e eu agradeço por isso, agradecemos por isso, né, João, em relação a isso. Então, assim, acho que a primeira questão que a gente tinha colocado, a senhora já respondeu, mas quem sabe pode complementar, como ocorreu o processo de seleção das imagens, que iriam compor a seleção do livro didático, destinadas ao ensino das frações, vocês procuraram ter essa variabilidade de...

Prof. Lucília: De imagens, não é? Agora, a inspiração, como eu disse, nós aqui do GRUEMA, nós nos inspiramos bastante nos livros franceses. E a gente ia lá, o SMSG, que era americano, também, o Biberman, Biberman, que é uma outra coleção americana que começou com a temática moderna lá nos Estados Unidos. Também nós olhávamos. Olhávamos realmente muitos livros franceses, muitos livros belgas.

Barbara: Livros didáticos, professora, ou também livros didáticos?

Prof. Lucília: Também livros didáticos. Somente os novos dessas coleções, como falei, SMSG, olhávamos muito. Então, a inspiração partiu muito de livros de outros países.

Barbara: Acho que, na tese da Lucinha, ela coloca alguma coisa do livro do SMSG, Mathematics for Elementary School, que seria um livro, se eu não tiver acesso a esse livro, acho que vou ter que ir lá para Santos para procurar, que seria um livro para a escola elementar do SMSG, não é?

Prof. Lucília: Exatamente. Se tiverem oportunidade, não sei se ainda existe algum exemplar, mas deve ter em Sebo.

Barbara: Deve ter no centro de documentação, deve ter.

Prof. Lucília: Além de eu ter mais simpatia pelos franceses, eu também tinha mais facilidade na língua francesa. Então, eu me apegava mais. Gostava mais, achava que tinha um espírito mais brasileiro do que os americanos.

Barbara: Com certeza. E os manuais pedagógicos que estavam circulando na época, que estavam naquela transição, por exemplo, a Irene De Albuquerque, a Rizza Porto, Norma Cunha Osório, esses manuais pedagógicos que eram direcionados à formação de professores, vocês chegaram a ter algum contato?

Prof. Lucília: É... Qual o nome que você citou agora?

Barbara: Era a Risa Porto, Norma... Agora, meu Deus, me fugiu. A Risa Porto, a **Irene De Albuquerque**, eram autoras... Não, eram mais os livros mesmo que a senhora já citou, não é?

Prof. Lucília: Não, eu, pelo menos, não me lembro de ter tido contato com elas, não, com esse tipo de livro. E a gente, tanto assim, que às vezes era até criticado na época, que ia procurar livros de outros países, a gente realmente saía atrás de livros.

Barbara: Mas eu acho que faz parte, né? Eu vejo... Agora à noite, a gente tem um grupo de estudo à noite, professora, que é o grupo da quarta, né? A Daniele também tem um projeto de extensão que é o cálculo mental para a formação de professores, né?

Prof. Lucília: A gente busca em todos os lugares... (telefone toca). Um minutinho só. É meu filho, esse eu não posso deixar de atender.

Barbara: Beleza.

Prof. Lucília: Ele vai até rapidinho. Oi, Tito. E aí? E eu tô numa reunião de trabalho com um grupo aí do Paraná. Esse meu filho mora no Paraná. Vai trabalhar, vai lá trabalhar. Falamos depois. Tá bom, depois eu olho. É um grupo de pesquisa lá do interior do Paraná. Ótimo. Então eles merecem ser priorizados, eles merecem. Um beijo. O meu filho não dá para não atender, né?

Barbara: Ah, com certeza. Nossa, acho que eu sempre vou priorizar também quando os meus estiverem fora, né? Por enquanto eles são pequenos. A gente entende a senhora porque a gente também busca em tudo que é lugar. A Danilene busca até quando você não sabe a língua, ela conseguiu material até em polonês e daí coloca no Google Tradutor, para trazer coisas diferentes, novas, né? Saber o que está acontecendo. Então, assim, a gente super entende que a senhora está colocando. Uma outra questão que a gente colocou, eu acho que tem a ver com o que a senhora já respondeu também, (que a gente, na página,) a gente percebeu que parece que a senhora fazia uma articulação visual. Então, assim, ao elaborar a obra, foi pensado em uma possível articulação visual da página, em unir o texto escrito, as imagens e a atividade do sujeito?

Prof. Lucília: Espera aí, acho que eu não entendi bem a pergunta.

Barbara: Assim, por exemplo, numa página do livro da senhora, a gente vê que tem as imagens e tem também o texto matemático. Eu acho que a senhora já respondeu isso, que tem essa... Como que eu posso dizer? Essa variabilidade... A senhora usou a palavra variabilidade perspectiva e matemática.

Prof. Lucília: Porque, exatamente, eu falei, a perceptiva leva à abstração. E a matemática à generalização. Construção... variáveis matemáticas, né? A perceptiva é um meio representado de várias maneiras, é a variabilidade perceptiva, perceber que um meio é uma fração, dois terços outra fração, aí próprias, impróprias, a reta numérica, por exemplo, né? Isso tudo são variabilidade perceptível, que ajuda a abstração, como eu disse, e variabilidade matemática, que ajuda uma generalização.

Barbara: Isso, nesse sentido, eu não sei se, (acho que) no livro, no manual de orientação para os professores, acho que vocês, em vários momentos, colocam essa questão de partir de questões do concreto. Eu não sei se vocês chegaram a usar os termos, aqui no Paraná, as professoras da coleção do NEDEM utilizaram, semiconcreto, semiabstrato e abstrato. Concreto, semiconcreto, semiabstrato e abstrato. Vocês utilizaram esses conceitos de semiconcreto e semiabstrato?

Prof. Lucília: Não, não sabia disso.

Barbara: É, aqui eles chamaram de (desse)semiconcreto os materiais estruturados, então, por exemplo, se você tem um círculo de frações, que você já não o tem mais, é representado por não sei, maçãs ou laranjas, e daí o semiconcreto seria essa representação ou de áreas ou de contadores discretos ou um comprimento, mas então era só uma... Uma dúvida também...

Prof. Lucília: É interessante, mas isso nunca chamou a atenção, é verdade, porque uma coisa é você trabalhar a metade de uma banana, outra coisa é trabalhar a metade de um círculo. Está certo? É um material concreto, mas ele está já estruturado, vamos chamar assim.

Barbara: E a senhora tá falando muito a reta numérica. Como que teve essa ideia de trabalhar com a reta numérica? Porque chama muito a atenção mesmo. Porque parece que até um determinado momento histórico, as frações, elas eram muito focadas na parte-todo e não como número. E daí vocês colocam reta numérica desde o primeiro livro, já com os números inteiros e vai avançando. Eu achei isso, nós achamos isso muito.

Prof. Lucília: Então, boa pergunta também, dificilmente eu saberia dizer, mas uma pessoa que trabalhou muito com a reta numérica foi o Dienes, né? O Dienes trabalha muito com a reta numérica, localização, por exemplo, uma coisa, enxergar a fração numa reta numérica, ou você pega um zero a um, outra coisa, você pega zero, um, dois, três. Então, Ou, por exemplo, quando você vai representar os decimais na reta numérica, você vai representar os números negativos na reta numérica, dá uma visibilidade, dá uma concretização para os números muito grandes. Ou quando você vai mostrar que um meio, dois quartos, três sextos, têm todos a mesma posição na reta numérica. Então, a reta numérica seria quase um nível de abstração, ela dá um caminho, isso que você estava colocando, de concretização maior.

Barbara: Isso. Para o caminho da variabilidade matemática que leva à generalização. Exatamente. Até aqui no Paraná, não sei se a professora teve algum contato com as professoras do NEDEM que escreveram os livros dos anos iniciais.

Prof. Lucília: Eu não tive, não, mas é um nome bem familiar para mim. Eu tive contato indireto, não direto.

Barbara: A Henrieta, a Clélia, porque elas usam o livro de vocês, do GRUEMA, como referência na escrita do livro delas, aqui do Paraná. Então, tem muito de vocês e têm algumas coisas também que são diferentes, que elas mesmas pensaram e tiveram as classes experimentais. Esse material dos livros, ele foi testado também nas classes experimentais do Vocacional?

Prof. Lucília: Foram. Foram testados.

Barbara: Isso. Deixa eu ver.

Danilene: Bárbara, eu só não entendi quem que era o autor, não sei se você anotou ali, que ela citou das variabilidades perceptivas e matemáticas.

Barbara: Ah, o Dienes, tá. Aqui no Paraná a gente tem uma colega que agora está aposentada também, a **Elenir Paludo Soares**, que a professora Neusa orientou, que ela trabalha com sistema de numeração decimal e o Dienes, ela, eu li isso (na)na tese dela, mas agora... Nossa, professora, foi muito bom. Está sendo muito boa essa conversa. Deixa eu ver. Então, eu acho que dá para a gente já ter uma boa ideia a partir do que a senhora falou, mas se a senhora fosse parar e pensar sobre isso, qual o papel assumido pelas imagens nos livros da coleção do GRUEMA? Qual que a senhora acha que foi o papel das imagens?

Prof. Lucília: O papel das imagens é... Eu chamaria de... Pelo menos é o que a gente sempre discutia, né? É tornar mais visível para a criança ou para o adolescente, é ajudar a compreender a matemática, a compreender a abstração, porque a matemática é abstrata, seja ela álgebra, ou seja, ela... números. Então, o papel das imagens para nós sempre teve... embora nós temos também uma crítica, uma autocrítica, de que os livros do GRUEMA, principalmente os de 5ª a 8ª, na ocasião, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, eles estavam um pouco formais. Então, por exemplo, a gente fazia... o conjunto… muito formal, muita formalização. Vocês devem ter aí livros do GRUEMA. Então, a gente usava muito a linguagem de conjuntos para os alunos. A gente teve um pouco essa autocrítica, de que a gente exagerou no que a gente chamava de formalização. Linguagem formal de conjuntos, não é? Porque os conjuntos tinham umas exigências, não é? A pertence a B. Então, se vocês olharem, vão observar essa formalização que ficou um pouco exagerada, quase como uma nova linguagem.

Barbara: Isso, mas me parece que as imagens não estavam ali totalmente estáticas, porque você pede para pintar, para dividir de forma diferente, para colocar o número na reta numérica. Acho que não sei se é nesse livro que a senhora colocou o dobro e a metade, tem que virar o livro para poder...

Prof. Lucília: Isso acontece mais nas séries iniciais, do que você está falando. Agora, se você pegar o GRUEMA nas séries finais, acho que você vai observar essas formalizações, que depois a gente fez uma autocrítica disso. Acho que uma vez eu conversei até com a Lucinha, que trabalhou com o GRUEMA.

Barbara: Sim. É que a gente acabou focando mais nos anos iniciais mesmo, mas eu tenho a coleção para frente também.

Prof. Lucília: É isso, exatamente.

Barbara: Do quinto, né, vai ficar para o próximo mestrando, para a gente explorar mais para frente. Deixa eu ver, só para não cansar muito a professora também, deixa eu ver aqui. A questão das imagens a senhora já colocou, eu acho que o livro didático, ele também, ele tinha, assim, um apelo para ser associado com materiais concretos, materiais manipulativos, assim, e vocês tinham esse entendimento que o livro deveria ser utilizado com materiais manipulativos?

Prof. Lucília: Com materiais manipulativos? Eu acho que a gente sugere até no livro do professor.

Barbara: No livro do professor. Isso mesmo. Em relação, mais especificamente agora, às imagens das frações, só para ver se a gente está compreendendo corretamente. A gente percebe que a imagem que está desde o primeiro ano tem o início das frações, o segundo, o terceiro, o quarto. Tinha pensado numa sequência de complexidade em relação às frações quando a criança chegasse na quarta série, na época. Qual seria o objetivo principal das frações?

Prof. Lucília: Então, o... na verdade, eu estou pensando aqui, interessante, porque eu sempre fico associando com antes da Matemática Moderna. As frações, inicialmente, os objetivos dela eram ensinar a redução do mesmo denominador, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, as regras do máximo e de mínimo. Agora, com o aparecimento da Matemática Moderna, você faz conjuntos dos divisores, conjuntos dos múltiplos, a intersecção de divisores com múltiplos para ver qual é o menor, qual é o maior. Então, a ideia de máximo divisor comum, de mínimo divisor comum, que era uma coisa mais mecânica, elas começaram, através da teoria dos conjuntos, a ficar mais... mais compreensiva. Por que o que é máximo divisor comum? Era uma regrinha que você tinha lá de enquadrar e de falar, olha, põe aqui, põe aqui a regra, e depois você achou um número que você vai dividir pelo denominador e multiplicar pelo numerador para poder reduzir todos ao mesmo denominador e poder somar. Era assim que a gente fazia a soma de frações antes da Matemática Moderna. O que a Matemática Moderna trouxe? É classe de equivalência, é intersecção de divisores com os múltiplos. No nosso livro, eu acho que aparece... A formalização que eu critico, que nós criticamos com o tempo, foi muito mais de usar muito a linguagem de conjuntos, entende? Parênteses, colchetes, chaves, enfim. Na verdade, parênteses, colchetes, chaves é das expressões aritméticas de antigamente.

Barbara: Isso, mas foi uma tendência grande, aqui no Paraná, também no livro do NEDEM. No quinto ano tem o pertence, está contido, tem várias... a linguagem da Matemática Moderna já aparece muito cedo mesmo, já nos livros do quarto ano, do quarto, quarta série, terceira série, já aparece muito isso.

Prof. Lucília: Exatamente.

Barbara: Eu acho que sobre a questão do Vocacional e Vera Cruz, a senhora já colocou. Tem uma pergunta aqui, do João, acho que está louco que eu faça ainda que eu não fiz. Depois eu acabei tomando conta, né, João? Mas é que eu sou muito ansiosa. Porque a gente vê que o livro é muito colorido, do GRUEMA, tanto as duas coleções. Qual seria o papel das cores nas imagens do livro do GRUEMA? Há uma intencionalidade das cores, esse colorido? Porque essa impressão a quatro cores foi uma coisa bem diferente, comparado com outros livros da época, não tinha isso.

Prof. Lucília: Poxa vida, eu não sei te responder isso. Mas é verdade, não tinha mesmo. E matemática era bem menos. Provavelmente que é para... Talvez para denunciar que a matemática era uma coisa... É uma pergunta bastante interessante. Precisaria pensar um pouquinho para responder melhor essa função das cores. Mas tem mesmo, tem muita preocupação com cores. Isso é um diferencial, sim, dos primeiros livros do curso moderno.

Barbara: É, porque já tinha... Agora já não vou lembrar que eu li tanta coisa, mas acho que talvez tenha alguma coisa a ver com a... Acho que o professor Wagner escreve um capítulo e fala que no livro do Sangiorgi tinha alguma coisa sobre isso, mas também não cheguei a aprofundar essa questão das cores, mas chama muita atenção, na coleção, as cores e toda essa diagramação, essa mudança editorial com ilustradoras, mulheres.

Prof. Lucília: Talvez, eu vou tentar uma resposta chutada, não tenho... Acho que não me lembro de alguma intencionalidade, mas acreditando que as cores atraem as crianças, as crianças gostam de desenhar, então a gente achou que pondo cores a gente estaria atraindo. E as cores também, se você souber usar as cores, elas falam também, elas denunciam. Então, provavelmente tinha esse fundo que a Matemática Moderna traz, que é transformar a matemática numa disciplina atraente, numa disciplina que as crianças gostam. Acho que a Matemática Moderna veio com um pouco também com essa mensagem. E olha que nós éramos, como eu falei, foi o primeiro livro didático escrito por professores, livro de primeira à quarta, escrito por professores de matemática.

João Paulo: Professora, me chamou a atenção quando eu li na tese da Vilela que a professora fez até uma reclamação formal junto à editora por conta das cores. Eu queria entender, então, será que foi com relação à má qualidade da impressão, alguma coisa assim? Por isso a pergunta.

Prof. Lucília: Interessante essa pergunta das cores. É uma coisa que eu nunca pensei mais profundamente, mas eu estou tentando, chutando uma... Acho que era essa coisa... Acho.

Barbara: Que nessa parte específica da tese da Lucinha, acho que é o recorte de uma entrevista da senhora que fala dessa questão, acho que é a impressão mesmo, não ficou exatamente com as cores que vocês tinham pedido, mas também tem esse outro lado das cores como uma... como uma questão didática mesmo. As duas coisas, na verdade, a pergunta.

Prof. Lucília: É sobre... Qual é a outra que você falou, Barbara?

Barbara: Não, é uma intencionalidade didática das cores.

Prof. Lucília: Ah, sim, acho que é.

Barbara: É.

Prof. Lucília: É uma coisa que atrai, uma coisa que torna a matemática mais alegre. Isso.

Barbara: Vocês pedem para pintar as frações, uma parte das frações. A todo momento tem uma interação, a gente percebe, não sei, uma interação com o aluno, não é…

Prof. Lucília: A matemática era mais dura antes, a matemática era mais dura. A matemática era para aprender os números e aprender as operações. E as cores, a matemática fica mais lúdica, ela fica mais... mais interdisciplinar, vamos chamar assim, porque as cores também falam, as cores também... a gente não se dá muito conta do que as cores fazem, da eficiência, mas elas têm essa função.

Barbara: A questão didática, pedagógica, por trás. Eu notei que no livro 4, nós notamos que no livro 4, por exemplo, as frações vêm logo depois da geometria. Tinha uma intencionalidade nisso, de apresentar primeiro as figuras, as formas geométricas, e depois as frações, que daí iniciam também com partes de formas geométricas? Não sei.

Prof. Lucília: Interessante essa sua observação. Interessante essa sua pergunta. Eu teria esquecido dela se você não a tivesse feito. Porque isso foi bastante intencional. Porque o que acontecia é que era pouca geometria. Na matemática moderna, a geometria foi muito valorizada. Mesmo que estivesse trabalhando com medidas, e a gente falava, poxa vida, a geometria fica sempre nas últimas páginas. O professor, se der tempo, ele faz. Não, temos que colocar a geometria antes, temos que aplicar. Pode ver que tem exemplos de litro, integrar, essa ideia de integração também. Vou falar em meio litro, vou falar em meio quilo. Então, com certeza, isso foi intencional. Foi intencional.

Barbara: Danilene, tem alguma pergunta do cálculo mental que você lembrou enquanto a gente estava falando?

Danilene: Eu acho que não, eu voltei para a minha listinha que eu e a Juliana tínhamos feito, eu acho que ela conseguiu atender a grande maioria das coisas. Agora a gente precisa ir para os referenciais que ela passou para nós.

Prof. Lucília: E tem uma coisa interessante que eu percebi aqui. A última imagem de vocês sobre frações...

Barbara: Deixa eu mostrar.

Prof. Lucília: Acho que é a última. É essa daqui, ó. Essa daqui, muito interessante, essa daqui.

Barbara: Qual a professora? Essa aqui da máquina de estados?

Prof. Lucília: É, porque você... É uma máquina, não é?

Barbara: Sim.

Prof. Lucília: É uma transformação. Então, você faz. Estou sem óculos, vou ter que botar o óculos para enxergar.

Barbara: Vou tentar ampliar no máximo aqui. Peraí.

Prof. Lucília: Isso, aumenta aqui. Olha aí. Trabalha a ideia de máquinas, é transformação. Isso mesmo. Olha, entrada e saída. Entra o meio e sai depois, o que entrou, o que saiu, depois faz a composição de máquinas. Faz a composição de máquinas. O meio, você faz dois terços, depois mais. A composição das duas máquinas é essa que eu estou enxergando, meus óculos aqui não estão me ajudando a ver.

Barbara: É, opa, agora eu aumentei muito aqui, mas aqui, e assim eu também, chamou muita atenção da gente essa questão da construção do todo, o Piaget fala muito da importância do entendimento do todo, não sei se eu estou interpretando, mas assim, por exemplo, o 1, o que é o 1? É o 2 sobre o 2, o 2 é o 4 sobre o 2, porque as crianças têm muita dificuldade com as frações impróprias, quando o numerador é maior que o denominador.

Prof. Lucília: É o que mostra que, no fundo, isso dá aquela entrada para o chamado conjunto dos números racionais. Porque os números inteiros são também racionais. Isso tem a ver muito com os conceitos que a Matemática Moderna trouxe, os números racionais, os números reais.

Barbara: Isso, eu arrisco a dizer que vocês começaram a trazer o que depois ficou muito em voga dos significados das frações, então têm vários significados como número, como operador, como parte todo, eu acho que a matemática clássica, como a senhora coloca, me parece, agora eu tô, me parece mesmo, que ela estava muito focada na questão da parte- todo, daí, não fazia essa conexão com o número, racional e com todos os significados, a fração equivalente também, ela é tão importante, para a gente ir para os números decimais. Então, olhando as páginas aqui, Danilene, olha só, representa o mesmo número racional, um meio, dois quartos, cinco décimos.

Prof. Lucília: Representa exatamente o mesmo número racional.

Barbara: É na reta numérica...

Prof. Lucília: O conceito da Matemática Moderna que a gente trouxe. E aí vem aquele entusiasmo, vamos ter coerência. Temos que ter uma coerência, uma integração.

Barbara: E vocês trazem também, tipo, não jogaram a água com o bebê junto, porque ainda tem essas tiras, que era uma coisa bastante característica, mas já é diferente aqui, a maneira que vocês colocaram, vocês criam em cima do que já existia, ao meu ver, parece que sim.

Prof. Lucília: É porque fração, ela trabalhava, pegava círculo, quadrado, retângulo, Outra coisa interessante é quando você trabalhava o meio, um quarto de dois terços. Então você pegava na horizontal e na vertical. Um quarto e depois cortava... Essa daqui é bem evidente. Um quarto de dois terços. Então... Pra mim tudo isso tem a ver com uma iluminação da matemática. Olha aqui as transformações, olha aqui.

Barbara: Sim

Prof. Lucília: As máquinas que a gente chamava, né?

Barbara: Isso. Nossa, professora, eu não sei, Daniele, mas eu estou assim... O professor Wagner, o Prost, falam que a gente não pode se apaixonar pelo objeto de estudo, que a gente tem que fazer o distanciamento, mas eu acho que, não sei, a senhora é "tudo de bom", numa linguagem bem coloquial.

Prof. Lucília: Que bom, eu fico muito contente, porque eu acho que essas coisas, isso para mim é conhecimento, enfrentar a evolução.

Barbara: A gente já tinha assistido às *lives* com o Carlos Matias, que a senhora fez também. Lá no GHEMAT também, quando a senhora falou. Só não comprei o livro da senhora, ainda não conseguimos, porque não tem no *site*, tem que mandar o PIX, é muito inspirador, assim, pra gente que trabalha com formação de professores, porque o João também participa do Grupo da Quarta, à noite, de você, dos professores criarem os materiais, elaborarem em cima e não ter as coisas prontas, nada se cria, tudo se transforma, mas assim, você colocar o seu olhar, essa matemática escolar, o seu olhar crítico sobre o que e como criar em cima. Acho que essa é uma mensagem muito importante.

Prof. Lucília: É um professor participativo, um professor que pode propor. Ele tem espaço para propor, não é para ficar repetindo aquilo que está no livro ou aquilo que foi dito.

Barbara: Isso, e daí ele casa muito com o que o Wagner fala sempre, que é a matemática do ensino e não o ensino da matemática. A matemática do ensino tem que ser feita por professores de matemática, dentro da cultura escolar, pelas pessoas que sabem realmente onde estão os anseios da matemática.

Prof. Lucília: E ouvir o aluno para ver o que ele entendeu daquilo, porque isso ajuda muito, porque se você ver o que ele entendeu, você talvez, muitas vezes, você fala, poxa vida, não é por aí, porque aquilo foi, não era para entender isso. Fala, João.

Danilene: Pode falar, João.

João Paulo: Profa., eu queria fazer uma pergunta capciosa.

Prof. Lucília: Vamos lá.

João Paulo: Profa. fracassou ou não fracassou? Como é que é isso? Fracassou em que nível a Matemática Moderna? Que leitura que a profa. tem?

Prof. Lucília: Nossa. A sua pergunta é mais do que capciosa.

João Paulo: É Kline, né? A minha pergunta é Kline.

Prof. Lucília: O fracasso da Matemática Moderna. Esse livro, o fracasso da Matemática Moderna, é um livro que foi, se você pegar o livro original, a tradução não é exatamente essa. Isso. Você tem o livro em inglês? Exatamente.

Danilene: Não, esse aqui está traduzido.

Prof. Lucília: Está traduzido. Porque, olha, como tudo, toda transformação, ela não nasce pronta. Ela não nasce pronta. Ela vem e ela comete seus exageros, sim, o entusiasmo da Matemática Moderna, um dos pontos que eu acho que a Matemática Moderna se chamaria falhou, que foram, se queria chamar de fracasso, não é bem fracasso, é esse excesso de formalização, de formalismo, que eu chamo. Esse, para mim, é um ponto, era tanta vontade de aplicar a Matemática Moderna que se colocava parênteses com a formalização. O GRUEMA, por exemplo, acho que pecou um pouco com esse excesso de formalização. Mas eu acho que a Matemática Moderna foi um passo importante. Muito boa pergunta, viu, João? Eu acho que é isso mesmo.

João Paulo: Professora, mas chegou no primário?

Prof. Lucília: Por exemplo, uma coisa que o Ubiratan criticava é quando ele falava sobre a resolução de problemas. Então, teve uma crítica da Matemática Moderna que ela não trabalhava com problemas, ela trabalhava só com fórmulas. Também acho que esse, para mim, foi um dos excessos, acho que ela trouxe tantos, não só benefícios, ela atualizou. Então, eu sou suspeita. Embora... é difícil, naquele momento, você querer uma renovação... é como hoje, por exemplo, quando você vê essa questão do casamento entre duas mulheres ou entre dois homens. As pessoas ficam todas meio... por quê? Porque é uma coisa que as pessoas não estão acostumadas. Entendeu? Então cria toda uma... eu diria que a Matemática Moderna veio derrubar realmente alguns... e aí ela pode ter cometido alguns, eu chamo de exageros. Obrigada pela pergunta, gostei, João.

Barbara: É porque, na verdade, no caso, claro, teve essa questão dos exageros, mas a criação dos grupos de estudos, os congressos, a atualização dos níveis didáticos...

Prof. Lucília: Por isso que tem que estar aberta ao debate, aberta à crítica. Eu não sei se na época eu tinha esse espírito. Hoje, com a minha idade, eu tenho mais. Você tem que estar aberta ao debate, à crítica, não achar só que é pessoa. Não! Você é antiquada, entra com preconceito, entendeu?

Barbara: Eu acho que até hoje quando tem uma renovação do ensino, né, eu lembro que uma vez eu assisti uma palestra do Kil Patrick, que era americano, né, que ele falou assim, que passa o tsunami e o fundo da escola não muda, né, então essas mudanças elas vêm muito lentamente, mas elas têm que acontecer e as reformas eu acho que elas têm pontos positivos e negativos em todas as reformas, acho que vai ter pontos positivos e pontos negativos, mas acho que a pergunta do João é bem... porque realmente esse livro abalou um pouco na década de 70, quando foi...

Prof. Lucília: Abalou e fez pensar também, porque entrou... tem até uma outra expressão, que era “volta ao fundamental”.

Barbara: Back to basics.

Prof. Lucília: Back to basics. Então, aconteceram expressões que acho que têm, no fundo, resistências à mudança que tem em todos os setores, todas as ideias. E tem também que as mudanças vêm de uma maneira, muitas vezes, ainda sem reflexão, ainda sem amadurecimento. Gostei muito da pergunta, é interessante.

Barbara: Em relação aos anos iniciais, acho que até a questão da apropriação... Isso é uma coisa particular minha, mas me parece que a apropriação do Dienes e do Piaget foi muito mais forte nos anos iniciais, no primário do que no ginasial.

Prof. Lucília: Com certeza, acho também isso.

Barbara: E a senhora, a Lucinha, graças a Deus fez aquela pesquisa maravilhosa. Quatro milhões e meio de exemplares não é para qualquer um. A vendagem foi uma coisa. De alguma forma, acho que abalou as estruturas. Tem uma música que toca agora na novela, às vezes eu assisto a novela quando não tenho aula à noite, que ela fala assim que eu não derrubo as estruturas, mas eu balanço. Eu não posso mudar o mundo, mas eu balanço. Não sei se a senhora já escutou essa música. Com certeza, acho que vocês balançaram aí.

Danilene: Estão balançando até hoje. Estão balançando até hoje.

Prof. Lucília: Porque a coisa nova tem aspectos morais, tem aspectos de costumes mesmo, de resistências à mudança, isso também tem.

Barbara: Mas é natural no ser humano, por que você está com aquilo ali sedimentado e, de repente, vem uma coisa nova.

Prof. Lucília: Ou então tem aquela ideia, você pode derrubar, jogar com água a própria criança, isso também pode acontecer, né?

Barbara: É, verdade. Professora, então acho que já tomamos uma hora e pouco, parece que não vimos...

Prof. Lucília: Fiquem à vontade, se precisar a gente... Alguma dúvida, você diz que vai fazer a transcrição para eu dar uma lida, se eu quiser eu complemento. Quando eu tentei preparar, eu vi que eu não tenho aqui em casa nem o livro do Dienes, nem o livro do Curso Moderno, o GHEMAT me levou tudo.

Barbara: Mas, de repente, dá para... Eu estava vendo que tenho até cópias duplicadas, porque a professora Neuza fez um acervo muito grande. De repente, a gente pode trocar figurinhas e eu mandar para a senhora ficar com um exemplar e mandar outro para a senhora.

Prof. Lucília: Quando o profissional do GEMAT veio aqui em casa para levar o material, os meus filhos ficaram muito bravos. Eu falei, olha, aqui vai ficar mofando, vai ficar... Lá, pelo menos, vai ser material para muita gente aprender. E é que eu não me arrependo um minuto de ter... Pelo contrário, tenho orgulho de ter disponibilizado o meu material.

Barbara: Professora, mas assim, a coleção, as duas coleções, elas estão no repositório. Então, por acaso, eu tenho alguns exemplares aqui, porque a professora Neuza tinha, e ela doou para o GHEMAT Paraná, mas o João mesmo fez o mestrado, está escrevendo o trabalho dele só consultando o repositório.

Prof. Lucília: Ah, boa observação. Eu tentei pegar no repositório, mas a minha ignorância... Por isso que eu falo, eu estou atrasado em matéria de tecnologia. Eu sei como defender, mas eu não consegui abrir aquele dia, eu tive um problema aí na internet, não consegui abrir. Eu queria dar uma... Tem razão. Olha aí, você fez uma boa observação.

Barbara: Eu vou mandar para a senhora os *links* dos seus livros lá, porque o pessoal digitalizou e o Brasil inteiro está usando.

Prof. Lucília: Eu procurei... Olha, eu acabei de organizar a minha biblioteca e mandei um monte de coisas lá para o GHEMAT. O Wagner sabe disso.

Barbara: A professora Neuza também, a Lucinha também. Está todo mundo mandando, porque lá vai ser um centro gigantesco. Então, vai estar todo o material dos educadores matemáticos lá reunidos. Então, acho que a senhora fez certo, sim.

Prof. Lucília: Muito bom.

Barbara: Mas muito obrigada, a gente vai fazer.

Prof. Lucília: Então... Olha, se precisar, eu estou à disposição para fazer perguntas. Como é que você chamou, João, a pergunta que você veio fazer para mim? Capciosa?

Barbara: Capciosa. Mas a gente vai fazer então... Ela foi muito boa. Isso, nós vamos fazer a transcrição, a transliteração, esqueci como é que é o termo lá, passar para a senhora, se a senhora quiser tirar algum trecho, a senhora tira, e daí só depois disso que a gente vai utilizar daí.

Prof. Lucília: Tá bom. Eu fico muito feliz de acompanhar, porque isso é a construção de um conhecimento, e é tudo que eu acho que a gente tem que valorizar.

Barbara: Com certeza.

Danilene: Muito obrigada, professora, pelo seu tempo e por compartilhar com a gente essas informações tão preciosas.

Barbara: Tá bom.

Prof. Lucília: Eu que agradeço, tá bom?

Barbara: Obrigada