

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SANDMARA LANHI

APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA AO CONTROLE DE
VIBRAÇÕES DE PLACAS DE PLATAFORMAS *OFFSHORE* UTILIZANDO CAMADAS
RESTRITAS VISCOELÁSTICAS

CURITIBA

2024

SANDMARA LANHI

APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA AO CONTROLE DE
VIBRAÇÕES DE PLACAS DE PLATAFORMAS *OFFSHORE* UTILIZANDO CAMADAS
RESTRITAS VISCOELÁSTICAS

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira

CURITIBA
2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Lanhi, Sandmara

Aplicação de otimização estrutural topológica ao controle de vibrações de placas de plataformas *offshore* utilizando camadas restritas viscoelásticas. / Sandmara Lanhi. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira

1. Materiais viscoelásticos. 2. Método dos Elementos Finitos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Pereira, Jucélio Tomás. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA
MECÂNICA - 40001016040P5

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **SANDMARA LANHI** intitulada: **APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA AO CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE PLACAS DE PLATAFORMAS OFFSHORE UTILIZANDO CAMADAS RESTRITAS VISCOELÁSTICAS**, sob orientação do Prof. Dr. JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutora está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 15 de Julho de 2024.

Assinatura Eletrônica

19/07/2024 20:57:33.0

JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

17/07/2024 10:18:12.0

CARLOS ALBERTO BAVASTRI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

17/07/2024 10:12:41.0

MARCO ANTÔNIO LUERSEN

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

20/07/2024 10:42:05.0

JÉDERSON DA SILVA

Avaliador Interno Pós-Doc (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira pela orientação, confiança e incentivo.

Aos membros da banca Prof. Dr. Marco A. Luersen, Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri e Prof. Dr. Jéderson da Silva pela leitura e contribuições para a melhoria deste trabalho.

À Universidade Federal do Paraná e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PgMec) por propiciarem as condições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao apoio financeiro do Programa de Recursos Humanos da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (PRH–ANP), suportado com recursos provenientes do investimento de empresas petrolíferas qualificadas na Cláusula de P, D&I da Resolução ANP *n*⁰ 50/2015.

Ao meu parceiro de vida Eder, ao meu irmão Advan e à minha mãe Odete por todo carinho, amor, compreensão, por acreditarem e torcerem por mim incondicionalmente.

Aos meus amigos Samuel, Luiz Otávio, Bruno, Gabriela, José Eduardo e Adina pelas palavras de conforto nos momentos de dificuldade, pelo apoio e por toda ajuda fornecida.

Aos colegas e a todo o grupo do Laboratório de Vibrações e Som e Mecânica dos Sólidos Computacional da UFPR, pelo apoio e motivação ao longo desse período.

À todas as pessoas que de alguma maneira contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se como os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.

Theodore Roosevelt.

RESUMO

Estruturas do tipo placa estão presentes em diversas aplicações, como automóveis, aviões, pontes e plataformas de petróleo. São estruturas planas, flexíveis e que suportam cargas estáticas e/ou dinâmicas, principalmente perpendicularmente às faces gerando flexão. Como consequência, podem ocasionar vibrações, desconforto acústico, falhas mecânicas por fadiga e/ou redução no desempenho da estrutura. Para mitigar as vibrações em estruturas flexíveis, uma das técnicas atualmente utilizadas é o controle passivo via camada restrita (CR). Esta forma de controle se caracteriza por adicionar uma camada de material viscoelástico (MVE) sobre a estrutura vibrante, e sobre o MVE adicionar uma camada de material, geralmente elástico, denominada por camada restritora. A energia vibratória é dissipada pela deformação em cisalhamento sofrida pelo MVE. No entanto, devido ao peso adicionado e ao aumento significativo do custo, apenas uma parcela da área total da estrutura é coberta com CR. Para maximizar a eficiência dessa cobertura, técnicas de otimização topológica podem ser empregadas, visando determinar a distribuição ideal das CRs. Contudo, as técnicas de otimização topológicas baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) podem apresentar algumas instabilidades numéricas, como por exemplo, o fenômeno de *checkerboard*. Este fenômeno, gera soluções ótimas que exibem padrão de alternância entre sólido e vazio, semelhante a um tabuleiro de xadrez. Esse padrão gera uma rigidez elevada que não corresponde à rigidez real da estrutura, além de produzir soluções ótimas complexas e de difícil fabricação. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma metodologia de otimização topológica de CRs, com vistas ao controle passivo de vibrações em placas semiespessas e na redução do fenômeno de *checkerboard*. Para isso, as posições das CRs são tomadas como variáveis de projeto e um algoritmo genético (AG) baseado em decisão binária é utilizado para determinar as posições ótimas. A função objetivo é uma aproximação da norma Euclidiana da função inércia e duas restrições são impostas ao problema de otimização, uma que limita a área máxima de cobertura por CR e outra que limita o valor do perímetro das CR. Além da metodologia citada, também foi desenvolvida uma nova técnica de mutação. Esta técnica é denominada por análise de melhoria e se baseia em classificar os elementos finitos que recebem CR isoladamente com base em sua eficiência em reduzir a vibração da estrutura toda. Na etapa de mutação, os genes considerados como os mais eficientes são utilizados para mutar um indivíduo gerado randomicamente pelo AG. Para avaliar a metodologia de otimização proposta, são apresentados resultados numéricos controlando diferentes faixas de frequências, considerando percentuais de cobertura de 10% e 20% de CR, além de diferentes valores de perímetro limite. Isso é realizado para analisar os formatos e as complexidades das topologias ótimas encontradas para diferentes valores limites de perímetro e percentual de cobertura. Alguns dos resultados numéricos são confrontados com resultados experimentais, de forma a validar a metodologia proposta. Além disso, os resultados mostram que o controle de vibrações de modos específicos reduziu o pico da FRF em até 25 dB e no controle de banda larga até 15 dB para 10% de cobertura por CR, equivalente a 1% de massa adicionada.

Palavras-chave: Camadas restritas; Material viscoelástico; Método dos Elementos Finitos; Placas laminadas; *Checkerboard*; Controle de perímetro.

ABSTRACT

Plate-type structures are widely used in applications such as automobiles, airplanes, bridges and oil platforms. These flat and flexible structures are designed to support static and/or dynamic loads especially perpendicular to its faces. As a result, vibrations, acoustic discomfort and mechanical failures due to fatigue may occur. To mitigate the vibrations, one of the most used techniques is passive vibration control via constrained layer (CL). This technique is characterized by the application of a layer of viscoelastic material (VEM) over the vibrating structure, superimposed by a constraining layer, generally made of elastic material. The vibratory energy is dissipated by the shear deformation suffered by the VEM. However, due to the added weight and significant increase in cost, only a portion of the total area of the structure is covered with CL. To maximize the efficiency CL, topological optimization techniques are used to determine the ideal distribution of CL. Nevertheless, topological optimization techniques based on the Finite Element Method (FEM) may present some numerical instabilities, such as the checkerboard phenomenon. This phenomenon generates optimal solutions that exhibit alternating patterns between solid and void, which present a high stiffness that does not correspond to the real stiffness of the structure. In addition, these solutions tend to be complex and difficult to manufacture. In the sense of what has been presented, this work aims to develop a methodology for topological optimization of CLs for vibration control in semi-thick plates and reducing the checkerboard phenomenon. For this purpose, the positions of the CLs are taken as design variables and a genetic algorithm (GA) based on binary decision is used to determine the optimal positions. The objective function is an approximation of the Euclidean norm of the inertance function and two constraints are imposed: one that limits the maximum coverage area per CL and another that limits the value of the CL perimeter. Furthermore, a new mutation technique, called improvement analysis, was developed. This technique classifies the finite elements that receive CL individually based on their efficiency in reducing vibration of the entire structure. In the mutation step, the most efficient finite elements are used to mutate a generic individual randomly generated by the GA. To evaluate the proposed optimization methodology, numerical results are presented for vibration control in different frequency bands, considering coverage percentages of 10% and 20% of CL, with different values of the perimeter constraint. These results allow analyzing the shapes and complexities of the optimal topologies. Some of the numerical results were confronted with experimental results to validate the methodology. Finally, the results show that the solutions found for the control of vibrations of specific modes reduced the FRF peak by up to 25 dB and that for broadband control by up to 15 dB, with 10% coverage by CL, equivalent to only 1% of added mass. In addition, the results found are free of checkerboard and have little complexity, allowing them to be easily constructed.

Keywords: Constrained layer; Viscoelastic material; Finite Element Method; Laminated plates; Checkerboard; Perimeter control.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO DE UMA ESTRUTURA COM CAMADA DE MVE RESTRITO	33
FIGURA 2 – (A) MODELO MECÂNICO DE UMA VIGA MBB E (B) RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA VIGA COM <i>CHECKERBOARD</i>	34
FIGURA 3 – REPRESENTAÇÕES DE UMA ESTRUTURA BASE CONTENDO CAMADA RESTRITA (A) CONFIGURAÇÃO INDEFORMADA, (B) CONFIGURAÇÃO DEFORMADA	38
FIGURA 4 – CÉLULA UNITÁRIA E ESTRUTURA MACROSCÓPICA.	46
FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO DE UMA ESTRUTURA MULTIMATERIAL DEFINIDA POR FUNÇÕES DE CONJUNTO DE NÍVEIS.	47
FIGURA 6 – EFEITO DA TEMPERATURA NO MÓDULO DE ARMAZENAMENTO (G OU E) E NO FATOR DE PERDA DO MVE (η) PARA FREQUÊNCIA CONSTANTE	58
FIGURA 7 – EFEITO DA FREQUÊNCIA NO MÓDULO DE ARMAZENAMENTO (G OU E) E NO FATOR DE PERDA DO MVE (η) PARA TEMPERATURA CONSTANTE	59
FIGURA 8 – CURVA CARACTERÍSTICA EM UM TESTE DE FLUÊNCIA: (A) TENSÃO DE ENTRADA, (B) DEFORMAÇÃO DE SAÍDA	59
FIGURA 9 – CURVA CARACTERÍSTICA EM UM TESTE DE RELAXAÇÃO: (A) DEFORMAÇÃO DE ENTRADA, (B) TENSÃO DE SAÍDA	60
FIGURA 10 – ARRANJOS DE MOLA E AMORTECEDOR PARA MODELOS DE: (A) MAXWELL E (B) KELVIN-VOIGT	61
FIGURA 11 – ARRANJOS DE MOLA E AMORTECEDOR MODELO DE: (A) ZENER E (B) ZENER EQUIVALENTE	62
FIGURA 12 – (A) PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS MEDIDAS EM CURTOS INTERVALOS DE TEMPO EM DIFERENTES TEMPERATURAS. (B) PROCEDIMENTO DE DESLOCAMENTO DA TEMPERATURA	66
FIGURA 13 – DEFORMAÇÃO DA PLACA SEGUNDO HIPÓTESES DE KIRCHHOFF E REISSNER-MINDLIN	71
FIGURA 14 – ELEMENTO INFINITESIMAL DE PLACA SUJEITO A CARREGAMENTOS DE FORÇAS E MOMENTOS	75
FIGURA 15 – SISTEMA DE COORDENADAS PARA UMA PLACA SOB CARREGAMENTO TRANSVERSAL	80
FIGURA 16 – ELEMENTO QUADRILATERAL DE QUATRO NÓS. (A) SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS, (B) SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS.	81

FIGURA 17 – MODELO CINEMÁTICO DE UM ELEMENTO DE PLACA LAMINADA.	84
FIGURA 18 – FORMAS BÁSICAS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	98
FIGURA 19 – FLUXOGRAMA DO FUNCIONAMENTO DE UM ALGORITMO GE- NÉTICO PADRÃO	99
FIGURA 20 – REPRESENTAÇÃO DE UM CROMOSSOMO.	99
FIGURA 21 – REPRESENTAÇÃO DE UM GENE.	99
FIGURA 22 – REPRESENTAÇÃO DE UMA POPULAÇÃO.	100
FIGURA 23 – CRUZAMENTO ENTRE DOIS INDIVÍDUOS UTILIZANDO A TÉC- NICA DE PONTO SIMPLES E PONTO DUPLO	102
FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE PROJETO	106
FIGURA 25 – ESQUEMA GRÁFICO DA ANÁLISE DE MELHORIA	111
FIGURA 26 – REPRESENTAÇÃO DO MÉTODO DA ROLETA PONDERADA	112
FIGURA 27 – FLUXOGRAMA DA METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO AG	118
FIGURA 28 – NOMOGRAMA DO MATERIAL ISODAMP C-1002	121
FIGURA 29 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZADA PARA A PLACA RETANGULAR	123
FIGURA 30 – MODOS DE VIBRAR PARA A PLACA RETANGULAR SOB CONDI- ÇÕES DE CONTORNO TOTALMENTE LIVRE	124
FIGURA 31 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO MODAL PARA A PLACA RETANGU- LAR SOB CONDIÇÕES DE CONTORNO TOTALMENTE LIVRE	124
FIGURA 32 – PLACA RETANGULAR NA CONDIÇÃO LIVRE PARA ANÁLISE EXPERIMENTAL	126
FIGURA 33 – FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SISTEMA PRIMÁRIO DA PLACA RETANGULAR NA CONDIÇÃO TOTALMENTE LIVRE	126
FIGURA 34 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 100$ E 10% DE CR	127
FIGURA 35 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR, COM $\alpha = 100$ E 10% DE CR	127
FIGURA 36 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	128

FIGURA 37 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR, COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR	129
FIGURA 38 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	129
FIGURA 39 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR, COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR	130
FIGURA 40 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	130
FIGURA 41 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR	131
FIGURA 42 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	131
FIGURA 43 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR	132
FIGURA 44 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR	133
FIGURA 45 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR	133
FIGURA 46 – CONFIGURAÇÃO DA CR PARA CONTROLE DE UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR	134
FIGURA 47 – FRF PARA CONFIGURAÇÃO ÓTIMA EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR	135

FIGURA 48 – CONFIGURAÇÃO DA CR PARA CONTROLE DE UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR	136
FIGURA 49 – (A) FRFS OBTIDAS VIA ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA PARA O RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO CONTROLANDO UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR; (B) DETALHE NO PICO DE CADA UM DOS MODOS DE VIBRAR	136
FIGURA 50 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	137
FIGURA 51 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR	138
FIGURA 52 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	138
FIGURA 53 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR	139
FIGURA 54 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR	139
FIGURA 55 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR	140
FIGURA 56 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	141
FIGURA 57 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR	141
FIGURA 58 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	142

FIGURA 59 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR	142
FIGURA 60 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR	143
FIGURA 61 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR	143
FIGURA 62 – DIMENSÕES DA GEOMETRIA DA PLACA COM FURO EXCÊNTRICO	144
FIGURA 63 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA A PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO	145
FIGURA 64 – MODOS DE VIBRAR PARA A PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO SOB CONDIÇÕES DE CONTORNO TOTALMENTE LIVRE	145
FIGURA 65 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO MODAL ELEMENTAR PARA A PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO	146
FIGURA 66 – PLACA COM FURO QUADRADO NA CONDIÇÃO LIVRE PARA ANÁLISE EXPERIMENTAL	147
FIGURA 67 – FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SISTEMA PRIMÁRIO DA PLACA COM FURO QUADRADO NA CONDIÇÃO TOTALMENTE LIVRE	148
FIGURA 68 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 100$ E 20% DE CR	148
FIGURA 69 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO, COM $\alpha = 100$ E 20% DE CR	149
FIGURA 70 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	149
FIGURA 71 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR	150

FIGURA 72 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	150
FIGURA 73 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR	151
FIGURA 74 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	151
FIGURA 75 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR	152
FIGURA 76 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE	152
FIGURA 77 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR	153
FIGURA 78 – SOLUÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR	153
FIGURA 79 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR	154
FIGURA 80 – SOLUÇÕES ÓTIMAS PARA CONTROLE DE FAIXAS DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO (A) E DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR	154
FIGURA 81 – FRF PARA AS SOLUÇÕES ÓTIMAS OBTIDAS PARA O CONTROLE DE FAIXAS DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO (A) E DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR	155

FIGURA 82 – SOLUÇÕES PARA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E $PR_{cr} = 10\%$. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO SIMÉTRICA; (C) FRF	156
FIGURA 83 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO CAMPO DE DESLOCAMEN- TOS DA PRIMEIRA CAMADA DO LAMINADO NO PLANO X-Z . . .	175
FIGURA 84 – REPRESENTAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS DA SE- GUNDA CAMADA DO LAMINADO NO PLANO X-Z	178
FIGURA 85 – REPRESENTAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS DA TER- CEIRA CAMADA DO LAMINADO NO PLANO X-Z	181

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CLASSIFICAÇÃO DOS ARTIGOS CITADOS EM RELAÇÃO À OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	49
TABELA 2 – PARÂMETROS MATERIAIS DO MVE ISODAMP C-1002	120
TABELA 3 – FAIXAS DE FREQUÊNCIAS DE INTERESSE	125
TABELA 4 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR	129
TABELA 5 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR	130
TABELA 6 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR	131
TABELA 7 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR	132
TABELA 8 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO	134
TABELA 9 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR	137
TABELA 10 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR	138
TABELA 11 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO	140

TABELA 12 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO	141
TABELA 13 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO	142
TABELA 14 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO	144
TABELA 15 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO	147
TABELA 16 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O SEGUNDO MODO	148
TABELA 17 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO	149
TABELA 18 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O QUARTO MODO	150
TABELA 19 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO	152

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AG	Algoritmo Genético
AM	Análise de Melhoria
BESO	Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional (do inglês, <i>Bidirectional Evolutionary Structural Optimization</i>)
CR	Camada Restrita
DEMEC	Departamento de Engenharia Mecânica
DMS	Múltipla Busca Direta (do inglês, <i>Direct MultiSearch</i>)
EF	Elemento Finito
ESO	Otimização Estrutural Evolucionária (do inglês, <i>Evolutionary Structural Optimization</i>)
FRF	Função Resposta em Frequência
GESO	Otimização Estrutural Evolutiva Genética (do inglês, <i>Genetic Evolutionary Structural Optimization</i>)
ICC	Criação Inteligente de Cavidade (do inglês, <i>Intelligent Cavity Creation</i>)
LaSCom	Laboratório de Mecânica dos Sólidos Computacional
LAVIBS	Laboratório de Vibrações e Som
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i> (software matemático)
MCD	Modelo de Camadas Discretas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMA	Método de Assíntotas Móveis (do inglês, <i>Method of Moving Asymptotes</i>)
MPGA	Algoritmo Genético de Múltiplas Populações (do inglês, <i>Multi-Population Genetic Algorithm</i>)
MSE	Energia de Deformação Modal (do inglês, <i>Modal Strain Energy</i>)
MVE	Material Viscoelástico
NSGA	Algoritmo Genético de Ordenação Não Dominada (do inglês, <i>Non Dominated Sorting Genetic Algorithm</i>)

PLSM	Método de Conjunto de Nível Parametrizado (do inglês, <i>Parameterized Level Set Method</i>)
SIMP	Microestrutura Isotrópica Sólida com Penalização (do inglês, <i>Solid Isotropic Microestructure with Penalization</i>)
TCD	Teoria de Camadas Discretas
TCOS	Teoria Cisalhante de Ordens Superiores
TCP	Teoria Clássica de Placas
TCPO	Teoria Cisalhante de Primeira Ordem
TCUE	Teoria de Camada Única Equivalente
ZZ	Teoria Zigue-Zague

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

a_0, a_1, b_0, b_1	Parâmetros associados ao modelo de Zener fracionário
$A_{ks}(\Omega)$	Componente ks da matriz de inertância (A)
A_p	Aptidão do algoritmo genético
b	Constante de transformação binário em decimal
$\mathbf{B}_c^e$	Matriz de derivadas das funções de forma associada às tensões e deformações de cisalhamento
$\mathbf{B}_f^e$	Matriz de derivadas das funções de forma associada às tensões e deformações de flexão
$\tilde{\mathcal{B}}_k$	Matriz de deformações-deslocamentos da placa laminada
$\mathcal{B}_k$	Matriz de deformações-deslocamentos da placa laminada rearranjada em submatrizes de membrana-acoplamento, flexão e cisalhamento
$\mathcal{B}_k^{MA}$	Matriz de deformações-deslocamentos para o termo de membrana-acoplamento
$\mathcal{B}_k^F$	Matriz de deformações-deslocamentos para o termo de flexão
$\mathcal{B}_k^C$	Matriz de deformações-deslocamentos para o termo de cisalhamento
$\hat{\mathcal{B}}_k$	Matriz de deformações-deslocamentos modificada da placa laminada
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento viscoso de um sistema sob vibração
d	Número de dígitos binários
$\mathbf{d}^e$	Vetor de deslocamentos nodais generalizados da placa laminada
$\dot{\mathbf{d}}^e$	Vetor de velocidades nodais generalizadas da placa laminada
$\mathbf{d}_Q^e$	Vetor de deslocamentos nodais generalizados
$\mathbf{d}^g$	Matriz de deslocamentos globais
D_c	Rigidez ao cisalhamento da placa de Reissner-Mindlin
$\mathbf{D}_c$	Matriz de rigidez ao cisalhamento
D_f	Rigidez à flexão da placa de Reissner-Mindlin

$\mathbf{D}_f$	Matriz de rigidez à flexão
$\mathbf{D}_k$	Matriz de elasticidade da k -ésima camada da placa laminada
$\hat{\mathbf{D}}_k$	Matriz constitutiva modificada da k -ésima camada da placa laminada
$\mathbf{D}_k^{MA}$	Matriz constitutiva referente ao termo de membrana e acoplamento
$\mathbf{D}_k^F$	Matriz constitutiva referente ao termo de flexão
E	Módulo de elasticidade
$E_C(\Omega)$	Módulo de elasticidade complexo dependente da frequência
$E_R(\Omega)$	Parcela real do módulo de elasticidade complexo $E_C(\Omega)$
$E_I(\Omega)$	Parcela imaginária do módulo de elasticidade complexo $E_C(\Omega)$
E_0	Módulo de elasticidade dinâmico, assíntota com $\Omega \rightarrow 0$
E_∞	Módulo de elasticidade dinâmico, assíntota com $\Omega \rightarrow \infty$
E_k	Módulo de elasticidade do material da k -ésima camada da placa laminada
$E(\Omega_0)$	Módulo de elasticidade na frequência de referência, Ω_0
EC	Energia cinética
EC^e	Energia cinética do elemento de placa
EC_L^e	Energia cinética do elemento de placa laminada
EP	Energia potencial
EP^e	Energia potencial do elemento de placa
EP_L^e	Energia potencial do elemento de placa laminada
$\mathbf{f}(t)$	Vetor de força de excitação (forças generalizadas) de um sistema sob vibração
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
$f(\mathbf{x}^*)$	Função objetivo avaliada no ponto de ótimo, $\mathbf{x}^*$
$\mathbf{F}(\Omega)$	Vetor de força de excitação no domínio da frequência de um sistema sob vibração
$F_s(\Omega)$	Força de excitação aplicada no grau de liberdade s

$g_i(\mathbf{x})$	i -ésima restrição de desigualdade
G	Módulo de cisalhamento
$G_C(\Omega)$	Módulo de cisalhamento complexo dependente da frequência
$G_R(\Omega)$	Parcela real do módulo de cisalhamento
$G_I(\Omega)$	Parcela imaginária do módulo de cisalhamento
G_0	Módulo de cisalhamento dinâmico, assíntota com $\Omega \rightarrow 0$
G_∞	Módulo de cisalhamento dinâmico, assíntota com $\Omega \rightarrow \infty$
$\mathbf{G}_k$	Matriz de cisalhamento da k -ésima camada da placa laminada
$\mathbf{G}_k^c$	Matriz constitutiva referente ao termo de cisalhamento
h	Espessura da placa
$h_j(\mathbf{x})$	j -ésima restrição de igualdade
h_k	Espessura da k -ésima camada da placa laminada
$H(t)$	Função Heavyside
$\mathbf{H}(\Omega)$	Matriz de receptância
$H_{ks}(\Omega)$	Componente ks da matriz de receptância
I_e^{el}	Índice de melhoria do e -ésimo elemento da malha
$\mathbf{I}_{\hat{n} \times \hat{n}}$	Matriz identidade de ordem $\hat{n} \times \hat{n}$
$\mathbf{I}_\rho$	Matriz de inércia da placa
$\mathbf{I}_k^e$	Matriz de densidades da placa laminada
I_{max}	Máximo valor do índice de melhoria I_{el}^e
$\mathbf{J}_k^e$	Matriz de inércia elementar da k -ésima camada da placa laminada
$\hat{\mathbf{J}}_k^e$	Matriz de inércia modificada da k -ésima camada da placa laminada
$J(t)$	Módulo de fluência
$\mathbf{K}^e$	Matriz de rigidez do elemento
$\mathbf{k}_L^e$	Matriz de rigidez do elemento da placa laminada
$\mathbf{k}_r$	Matriz de rigidez modal

$\mathbf{K}(\Omega)$	Matriz de rigidez do sistema composto
$\mathbf{K}_e$	Matriz de rigidez referente à parcela do material elástico
$\mathbf{K}_L$	Matriz de rigidez global da placa laminada
$\mathbf{K}_v(\Omega)$	Matriz de rigidez referente à parcela do material viscoelástico
$\mathbf{K}_v(\Omega_0)$	Matriz de rigidez do material viscoelástico na frequência de referência Ω_0
$\mathbf{K}'_v$	Matriz de rigidez do material viscoelástico considerando um módulo de elasticidade de $1N/m^2$
$\mathbf{K}_0(\Omega_0)$	Matriz de rigidez do sistema composto na frequência de referência Ω_0
l	Valor de uma variável na forma decimal, obtida a partir de valores binários
$\mathbf{L}$	Matriz de operadores diferenciais
m	Número de restrições do problema de otimização
$\mathbf{m}_L^e$	Matriz de massa do elemento da placa laminada
$\mathbf{m}_r$	Matriz de massa modal
m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}	Componentes de momento no plano
$\mathbf{M}$	Matriz de massa do sistema composto
$\mathbf{M}^e$	Matriz de massa do elemento
$\mathbf{M}_L$	Matriz de massa global da placa laminada
n	Número de graus de liberdade da estrutura
$\hat{n}$	Número de graus de liberdade truncado
n_c	Número de camadas
n_{cr}	Número de elementos com camada restrita
n_{el}	Número de elementos da malha de elementos finitos
n_f	Número de valores de frequência presentes em um intervalo de interesse
n_g	Número de restrições de desigualdade
n_h	Número de restrições de igualdade
n_{ind}	Número de indivíduos de uma população

n_k	Número de elementos adicionados
n_v	Número de variáveis de projeto
N_i^e	Função de forma elementar para elemento quadrilátero
$\mathbf{N}$	Matriz de funções de forma do elemento quadrilátero
$\mathbf{N}_k^e$	Matriz de funções de forma do elemento da k -ésima camada da placa laminada
p	Perímetro
p_{ad}	Fração de área adicionada
p_{lim}	Valor máximo para o perímetro das camadas restritas
p_{ref}	Perímetro de referência
$\hat{\mathbf{p}}(t)$	Vetor de coordenadas generalizadas no subespaço modal
$\hat{\dot{\mathbf{p}}}(t)$	Vetor de velocidades correspondente às coordenadas generalizadas no subespaço modal
$p(\mathbf{x})$	Perímetro das camadas restritas para cada configuração do processo de otimização
P^e	Valor da piora para o e -ésimo elemento da malha
Pr_{cr}	Percentual de cobertura por CR
P_z	Carregamento de força na direção do eixo z
$\mathbf{P}(\Omega)$	Vetor correspondente à resposta dinâmica do sistema composto no subespaço modal
q_x, q_y	Momentos em torno dos eixos y e x , respectivamente
q_{xz}, q_{yz}	Componentes de esforços cortantes
$\mathbf{Q}(\Omega)$	Vetor correspondente a resposta dinâmica do sistema composto em função das coordenadas generalizadas
r_k	Parâmetro de penalidade da função objetivo
$\mathbf{R}^e$	Matriz de conectividade
$R(t)$	Módulo de relaxação
S_c	Área de cobertura

S_e	Área do elemento finito
S_k	Área de cobertura para a k -ésima iteração
S_p	Área superficial da placa base
S_{max}	Valor máximo para a área de recobrimento por CR
T	Temperatura
T_0	Temperatura de referência
u, v, w	Componentes de deslocamentos para placa de Reissner-Mindlin
u_k, v_k, w_k	Componentes de deslocamentos da k -ésima camada da placa laminada
u_0, v_0, w_0	Deslocamentos translacionais da camada de referência da placa laminada
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos da placa
$\mathbf{u}_k$	Vetor de deslocamentos da k -ésima camada da placa laminada
$\mathbf{u}_k^e$	Vetor de deslocamentos do elemento da k -ésima camada da placa laminada
$\mathbf{u}^e$	Vetor de deslocamentos nodais do elemento quadrilátero de quatro nós
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor de velocidades
Ω_k^e	Domínio do elemento da k -ésima camada da placa laminada
w	Deflexão transversal
W	Trabalho externo realizado por forças conservativas
$\mathbf{x}$	Vetor de variáveis de projeto
$\mathbf{x}^*$	Vetor de variáveis de projeto ótimo
$\mathbf{x}(t)$	Vetor de resposta (deslocamentos generalizados) de um sistema sob vibração
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Vetor de velocidades
$\ddot{\mathbf{x}}(t)$	Vetor de acelerações
$\mathbf{X}(\Omega)$	Vetor de resposta no domínio da frequência de um sistema sob vibração
$\mathbf{X}_0$	População inicial do algoritmo genético
X_k	Resposta em deslocamento generalizado obtido no grau de liberdade k
$\mathbf{X}_{new}$	Nova população do algoritmo genético

Y_{ks}	Componente ks da matriz de mobilidade (Y)
z_k	Componente vertical da posição de um ponto qualquer pertencente a k -ésima camada do laminado

Alfabeto grego

α	Fator de relaxação utilizado no cálculo do perímetro limite
α_e	Função objetivo calculada para o e -ésimo elemento da malha recebendo camada restrita
α_{sp}	Função objetivo calculada para o sistema primário
$\alpha_T(T)$	Fator de translação temperatura-frequência
β	Ordem da derivada do modelo fracionário de Zener
β_k^x, β_k^y	Rotações da k -ésima camada da placa laminada em relação aos eixos x e y
γ	Vetor de deformações por cisalhamento
$\tilde{\gamma}_{xz}^k, \tilde{\gamma}_{yz}^k$	Componentes de deformações transversais para a k -ésima camada da placa laminada
δ	Operador variacional
$\Delta E(\Omega; \Omega_0)$	Incremento do módulo de elasticidade complexo
ε	Vetor de deformações
$\varepsilon(\Omega)$	Deformação na domínio da frequência
$\varepsilon(T)$	Deformação na domínio do tempo
$\tilde{\varepsilon}_k$	Vetor de deformações da k -ésima camada da placa laminada
ε_k	Vetor de deformações da k -ésima camada da placa laminada rearranjado nas componentes de membrana-acoplamento, flexão e cisalhamento
ε_k^e	Vetor de deformações do elemento na k -ésima camada da placa laminada
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$	Componentes de deformações no plano;
$\tilde{\varepsilon}_{xx}^k, \tilde{\varepsilon}_{yy}^k, \tilde{\gamma}_{xy}^k$	Componentes de deformações no plano para k -ésima camada da placa laminada
$\varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Componentes de deformações transversais

η	Fator de perda modal
θ_1, θ_2	Constantes do modelo WLF dependentes do material
$\Lambda_{0,\hat{n}x\hat{n}}$	Matriz espectral truncada obtida para frequência de referência, Ω_0
λ_i^*	i -ésimo autovalor complexo associado ao i -ésimo autovetor ϕ_i^* complexo
μ	Coefficiente de viscosidade
ν	Coefficiente de Poisson
ν_k	Coefficiente de Poisson da k -ésima camada da placa laminada
ξ, η	Componentes do sistema de coordenadas locais do elemento quadrilátero
ρ	Densidade de massa do material
ρ_k^e	Densidade de massa do material do elemento da k -ésima camada da placa laminada
σ	Vetor de tensões
$\sigma(\Omega)$	Tensão no domínio da frequência
$\sigma(T)$	Tensão no domínio do tempo
σ_k	Vetor de tensões da k -ésima camada da placa laminada
σ_k^e	Vetor de tensões do elemento finito na k -ésima camada da placa laminada
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	Componentes de tensões no plano
$\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Componentes de tensões transversais
τ	Vetor de tensões por cisalhamento
$\tau_{\hat{n}x\hat{n}}$	Matriz de ordem $\hat{n}x\hat{n}$ relacionada a matriz de amortecimento $\mathbf{C}$
τ_σ	Tempo de relaxação
φ	Função conjunto de nível
Φ	Matriz modal ou matriz de autovetores
Φ	Matriz de autovetores de dimensão $n \times n$
$\hat{\Phi}_0$	Matriz de autovetores normalizada pela massa e truncada
ϕ_i^*	i -ésimo autovetor complexo da matriz de autovetores Φ

ϕ_x, ϕ_y	Componentes de rotações no plano
ϕ_x^e, ϕ_y^e, w^e	Componentes de deslocamentos de um elemento de placa
$\phi(\mathbf{x}, r_k)$	Função objetivo de um problema de otimização irrestrito
χ	Vetor de curvatura da placa
Ψ	Matriz de autovetores normalizados pela massa
Ω	Frequência angular [rad/s]
Ω_0	Frequência de referência
Ω_i	Frequência inicial de um intervalo de interesse
Ω_f	Frequência final de um intervalo de interesse

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	32
1.1	OBJETIVOS	35
1.1.1	Objetivo geral	35
1.1.2	Objetivos específicos	35
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO	36
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	37
2.1	CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES	37
2.1.1	Controle passivo de vibrações em placas e cascas via camada restrita	38
2.2	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	41
2.3	CONTROLE DE <i>CHECKERBOARD</i>	50
2.3.1	Controle de <i>checkerboard</i> na otimização de CR	52
2.3.2	Controle de <i>checkerboard</i> via restrição de perímetro	53
2.4	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO	55
3	REVISÃO CONCEITUAL	56
3.1	PLATAFORMAS DE PETRÓLEO OFFSHORE	56
3.2	MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	57
3.2.1	Modelos constitutivos clássicos de MVEs	60
3.2.2	Modelos constitutivos de MVEs baseados em derivadas fracionárias	62
3.2.3	Comportamento dinâmico dos MVEs	63
3.2.4	Influência da temperatura em MVEs	65
3.3	TEORIA DE FLEXÃO EM PLACAS	67
3.4	VIBRAÇÕES EM PLACAS	76
3.4.1	Princípio de Hamilton	76
3.4.2	Princípio de Hamilton aplicado à flexão de placas de Reissner-Mindlin	77
3.5	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PLACA QUADRILATERAL (Q4) DE REISSNER-MINDLIN PARA PLACAS SOB VIBRAÇÃO	79
3.6	TEORIA DE PLACAS LAMINADAS	83
3.7	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PLACA QUADRILATERAL (Q4) DE REISSNER-MINDLIN PARA PLACAS LAMINADAS SOB VIBRAÇÃO	88
3.7.1	Definição das matrizes de massa e rigidez globais	91
3.8	VIBRAÇÕES EM PLACAS LAMINADAS	91
3.8.1	Função resposta em frequência	92
3.8.2	Obtenção da resposta aproximada da FRF do sistema composto	93
3.9	CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA	96

3.10	OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS	97
3.10.1	Operadores genéticos	101
3.10.2	Operadores de controle	102
3.10.3	Critérios de parada	103
4	METODOLOGIA	105
4.1	FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO ALGORITMO GENÉTICOS	105
4.1.1	Restrição sobre a área máxima recoberta com CR	106
4.1.2	Restrição relativa ao perímetro	106
4.1.3	Problema de otimização proposto	107
4.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITO	107
4.2.1	Atualização do parâmetro de penalização	108
4.3	AG COM RESTRIÇÃO DE PERÍMETRO	109
4.3.1	Análise de melhoria	110
4.3.2	Mutação modificada (viciada)	110
4.4	Controle do <i>checkerboard</i> via controle do perímetro	114
4.4.1	Definição do valor do p_{lim}	115
4.5	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	115
4.5.1	Cálculo da aptidão	115
4.5.2	Critério de parada	116
4.5.3	Parâmetros do AG	116
5	MATERIAIS	119
5.1	MATERIAIS UTILIZADOS PARA ANÁLISE NUMÉRICA	119
5.2	MATERIAIS UTILIZADOS PARA REALIZAÇÃO EXPERIMENTAL	119
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	122
6.1	PLACA RETANGULAR	123
6.1.1	Validação experimental do sistema primário para placa retangular	125
6.1.2	Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende o primeiro modo de vibrar, para valores de $\alpha = 100$ e de $P_{r_{cr}} = 10\%$	127
6.1.3	Resultados da otimização para faixas de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,5$ e de $P_{r_{cr}} = 10\%$	128
6.1.4	Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,5$ e $P_{r_{cr}} = 10\%$	133
6.1.5	Realização experimental da configuração obtida para faixa de frequências que compreende o terceiro modo de vibrar para $\alpha = 1,5$ e $P_{r_{cr}} = 10\%$	134

6.1.6	Realização experimental da configuração obtida para faixa de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,5$ e $P_{r_{cr}} = 10\%$	135
6.1.7	Resultados da otimização para faixas de frequências que compreendem o primeiro e o terceiro modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,5$ e de $P_{r_{cr}} = 20\%$	137
6.1.8	Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,5$ e $P_{r_{cr}} = 20\%$	139
6.1.9	Resultados da otimização para faixas de frequências que compreendem o primeiro e o terceiro modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,8$ e $P_{r_{cr}} = 10\%$	139
6.1.10	Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,8$ e $P_{r_{cr}} = 10\%$	143
6.2	PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO	143
6.2.1	Validação experimental do sistema primário para placa retangular com furo excêntrico	144
6.2.2	Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende o primeiro modo de vibrar, para valores de $\alpha = 100$ e de $P_{r_{cr}} = 20\%$	146
6.2.3	Resultados da otimização para faixas de frequência que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,8$ e de $P_{r_{cr}} = 20\%$	146
6.2.4	Resultado da otimização para faixa de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,8$ e $P_{r_{cr}} = 20\%$	151
6.2.5	Realizações experimentais das configurações obtidas para faixas de frequências que compreende o primeiro e o segundo modo de vibrar, individualmente	153
6.3	DISCUSSÕES GERAIS	154
7	CONCLUSÕES	158
7.1	CONCLUSÕES GERAIS	158
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	159
	REFERÊNCIAS	161
	APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS PARA LAMINADO DE TRÊS CAMADAS	174

APÊNDICE B – DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PLACA QUADRILATERAL (Q4) DE REISSNER-MINDLIN PARA UMA PLACA LAMINADA COM TRÊS CAMADAS SOB VIBRAÇÃO183

1 INTRODUÇÃO

Estruturas do tipo placa estão presentes em diversas aplicações como automóveis, aviões, navios, pontes, componentes de máquinas e plataformas de petróleo. São consideradas como um elemento de grande importância, devido às suas propriedades e por suportarem grandes cargas, até mesmo quando muito esbeltas (VENTSEL *et al.*, 2002; SZILARD, 2004). Placas são estruturas planas, que apresentam duas dimensões (normalmente as dimensões no plano) muito maiores que uma terceira dimensão, a espessura. Na maioria das vezes, o valor da espessura não ultrapassa um décimo da menor dimensão da placa (REDDY, 2007). As placas podem suportar cargas estáticas e/ou dinâmicas, predominantemente perpendicularmente às faces, gerando flexão (VENTSEL *et al.*, 2002). No caso especial de placas metálicas, por serem estruturas muito flexíveis, com baixo amortecimento, baixa rigidez e grande superfície sonora, quando excitadas, podem ser fonte de vibração e/ou ruído.

As estruturas do tipo placa compõem várias estruturas, entre elas as plataformas de petróleo *offshore*. As plataformas *offshore* são utilizadas para perfuração, produção, armazenamento e transporte de petróleo e/ou gases extraídos a partir de diferentes profundidades do oceano. Diferentes tipos de plataformas *offshore* estão disponíveis, como plataformas auto-elevatórias, de gravidade, de jaqueta de aço, de perna de tensão (TLP do inglês *Tension Leg Platform*), de perna articulada, de torre estaiada, de longarina e sistemas flutuantes de produção (KANDASAMY *et al.*, 2016). Estas estruturas se encontram em ambiente oceânico por longos períodos de tempo e, devido às cargas ambientais de natureza dinâmica, como ondas, ventos, gelo e terremotos (WILSON, 2003), podem estar sujeitas à vibração excessiva, ocasionando em elevados níveis de ruído.

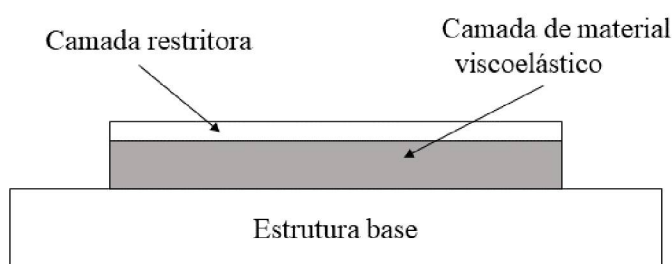
A existência de vibrações, na grande maioria das estruturas, pode gerar problemas como, desgaste em diferentes componentes, falhas estruturais e mecânicas, desconforto acústico e redução do desempenho. No caso específico de plataformas *offshore*, a vibração pode causar falhas nas instalações do convés, falha por fadiga, colocar em risco a vida da tripulação, afetar a capacidade de manutenção, além de elevados níveis de ruído causando desconforto acústico para as pessoas que ali trabalham (ZHANG *et al.*, 2017). Estudos apontam, que a redução da amplitude de vibração de uma plataforma *offshore* em torno de 15%, pode prolongar a sua vida útil em torno de duas vezes. Com isso, o gasto com manutenção e inspeção das estruturas pode ser significativamente reduzido (OU *et al.*, 2007). Nesse sentido, tanto o controle de vibrações, quanto o controle de ruído, se tornou uma preocupação fundamental para melhorar a durabilidade, o desempenho e o conforto das máquinas, dos equipamentos e de diferentes estruturas, entre elas as plataformas *offshore*.

Para tentar mitigar as vibrações, diversos métodos de controle de vibrações podem ser encontrados na literatura os quais podem ser categorizados em métodos ativo, passivo, semiativo e híbrido (KIM *et al.*, 2013; KANDASAMY *et al.*, 2016). O método de controle ativo, utiliza de alguma fonte de energia extra para realizar o controle da vibração, a qual adiciona uma

vibração igual ou contrária para cancelar a vibração da estrutura, sem mudança de rigidez ou amortecimento. De forma contrária, no controle passivo, não há adição de fonte externa de energia. O controle é realizado, tipicamente, pela adição de mecanismos de dissipação de energia à estrutura vibrante. Em geral, são utilizados materiais viscoelásticos (MVEs). No controle semiativo, as propriedades mecânicas do elemento de amortecimento são modificadas ou controladas por uma pequena quantidade de energia externa. Já o controle híbrido é uma combinação do controle ativo com o passivo (KANDASAMY *et al.*, 2016). Dentre os métodos citados, o método de controle passivo, em especial por camada restrita (CR), tem se destacado e tem sido amplamente utilizado em estruturas em geral, mas principalmente em estruturas flexíveis, como placas e cascas. Isso se dá, pela sua simplicidade, facilidade de implementação, baixo custo e por proporcionar elevados efeitos de amortecimento em amplas faixas de frequência e temperatura (KIM *et al.*, 2013; YUN; YOUN, 2018), e com pouca massa adicionada à estrutura.

O controle passivo por CR consiste em adicionar uma camada de material viscoelástico (MVE) sobre a estrutura que se deseja controlar a vibração. Sobre esta camada, é adicionada uma camada de material, geralmente, metálico e elástico, (ANSARI *et al.*, 2013), denominada de camada restritora ou camada de restrição (FIGURA 1). Desta forma, o controle de vibrações da estrutura é realizado preponderantemente por meio da deformação em cisalhamento da camada de MVE. Esta deformação é resultante das diferenças entre os deslocamentos da estrutura base e da camada restritora, decorrentes do movimento em flexão da estrutura vibrante. Assim, uma parcela da energia vibratória é dissipada na forma de calor (ZHENG *et al.*, 2013).

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO DE UMA ESTRUTURA COM CAMADA DE MVE RESTRITO



FONTE: A autora (2024).

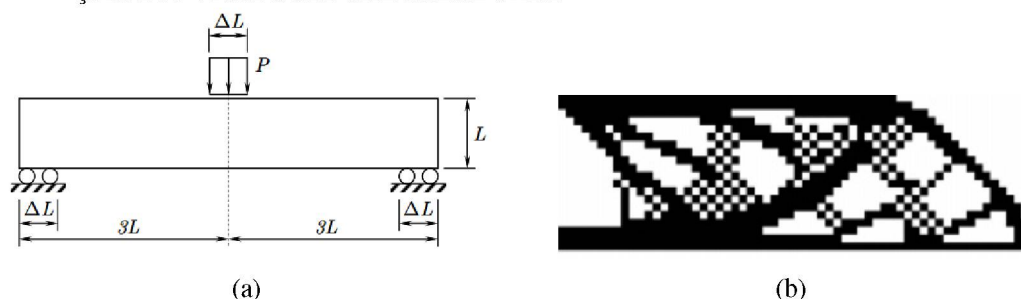
A cobertura total de uma dada estrutura vibrante com CR pode ser inviável, em virtude do custo excessivo e/ou do aumento no peso da estrutura composta (estrutura vibrante, mais camada de MVE e mais camada restritora), principalmente em placas e cascas. Assim, é comum o recobrimento de apenas uma parcela em área da estrutura. Contudo, para que o controle de vibrações seja eficiente, é necessário determinar a melhor distribuição de CR sobre a estrutura vibrante. Para isso, existem diferentes métodos que visam obter a distribuição ideal de CR sob restrições de volume ou área. Entre eles podem ser citados os métodos baseados em conceitos de otimização topológica.

Quando técnicas de otimização topológica são utilizadas, determina-se o número, a localização e a conectividade dos elementos que contém CR, dentro de um domínio pré-

determinado de projeto. A utilização da técnica de otimização topológica tem sido uma ferramenta de grande importância tecnológica na obtenção do controle de ruído e vibrações em placas e cascas (CUI *et al.*, 2022; CHEN *et al.*, 2021b; ZHANG *et al.*, 2021; YUN; YOUN, 2018). O emprego desta técnica na otimização de CR tem possibilitado o controle em amplas faixas de frequência, mas com pequenas frações de recobrimento por CR.

No entanto, alguns problemas podem ser encontrados na otimização topológica que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF). Entre eles podem ser citadas instabilidades numéricas como dependência de malha, existência de mínimos locais e *checkerboard* (ARAÚJO *et al.*, 2020; SIGMUND; PETERSSON, 1998). O *checkerboard* refere-se à formação de soluções ótimas compostas por um padrão alternado de elementos sólidos e vazios que se assemelham a um tabuleiro de xadrez, como pode ser visto na FIGURA 2 (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Esse tipo de instabilidade numérica pode gerar elevada rigidez, que não condiz com a rigidez real da estrutura, além de dificultar a fabricação (DIAZ; SIGMUND, 1995). Desta forma, tal problema deve ser evitado.

FIGURA 2 – (A) MODELO MECÂNICO DE UMA VIGA MBB E (B) RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA VIGA COM *CHECKERBOARD*



FONTE: Bourdin (2001).

No sentido do que foi apresentado, este trabalho trata do desenvolvimento de uma metodologia de otimização topológica de CRs, com vistas ao controle passivo de vibrações em placas semiespessas. Além disso, busca-se mitigar o fenômeno de *checkerboard* encontrado na otimização das CRs. Para isso, as posições das CRs foram tomadas como variáveis de projeto e um algoritmo genético baseado em decisão binária foi utilizado para determinar as posições ótimas. As variáveis de projeto são representadas por variáveis discretas e binárias (0 e 1), sendo que o valor igual a 0 indica a ausência de CR e o valor igual a 1 representa a presença de CR. A função objetivo utilizada é a norma Euclidiana da função inércia. Ademais, o problema de otimização está submetido a uma restrição de máxima área de cobertura por CR e a uma restrição que limita o perímetro das CRs. O intuito de utilizar esta restrição de perímetro é reduzir, ou até mesmo evitar, o fenômeno de *checkerboard*. Com isso, deseja-se preencher a lacuna encontrada na literatura, em relação à utilização de uma restrição de perímetro para controlar o fenômeno de *checkerboard* encontrado na otimização topológica de CRs baseadas em variáveis discretas.

Também foi desenvolvida uma técnica utilizada para realizar a mutação dos indivíduos

gerados randomicamente pelo AG. Esta técnica se baseia na análise de melhoria, a qual consiste em avaliar o quanto um único elemento finito recebendo CR é capaz de alterar a função objetivo. Assim, os elementos são classificados com base em sua eficiência em reduzir a vibração da estrutura e essa classificação é dada pelo índice de melhoria, o qual é determinado pela diferença entre as normas Euclidianas da função inércia do sistema sem amortecimento e da função inércia do sistema para cada EF contendo CR isoladamente. Na etapa de mutação (aqui denominada por mutação modificada), os elementos de maior eficiência são utilizados para melhorar randomicamente as soluções candidatas também geradas randomicamente pelo AG. O objetivo de fazer isso é melhorar, em termos de controle de vibração e em termos de mitigar o fenômeno de *checkerboard*, um indivíduo genérico.

A metodologia proposta é aplicada à duas estruturas do tipo placa, uma delas é uma placa retangular semiespessa e a outra é uma placa retangular semiespessa com um furo excêntrico. São considerados diferentes valores limites de perímetros e diferentes valores de percentual de cobertura em área por CR, no controle de vibração de faixas de frequências que abrangem do primeiro ao quarto modo de vibrar isoladamente e concomitantemente. Isso tem como intuito avaliar o formato e a complexidade da topologia ótima encontrada para diferentes valores limites de perímetro e percentual de cobertura. Para validar a metodologia conceitual/numérica proposta e implementada, experimentos físicos foram realizados.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver uma metodologia de otimização estrutural topológica, utilizando algoritmos genéticos (AG), para determinar a distribuição ótima de MVE restrito para o controle passivo ótimo de vibrações em placas metálicas de plataformas de extração de petróleo *offshore* controlando *checkerboard* por meio de uma restrição de perímetro.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Implementar uma formulação para solução de placas multicamadas, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF);
- Implementar uma formulação para solução de placas multicamadas utilizando MVE;
- Implementar uma rotina de otimização estrutural topológica para camadas restritas (CR) controlando o *checkerboard*;
- Realizar validação dos resultados numéricos por meio de experimentos físicos.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

No corrente capítulo são apresentados, sucintamente, a importância do controle de vibrações, a classificação das formas de controle, além dos objetivos a serem alcançados com a metodologia proposta.

No capítulo 2 é realizada a revisão bibliográfica sobre os conceitos de controle passivo de vibrações, otimização topológica de camadas restritas em placas e cascas e as técnicas de controle de *checkerboard* utilizadas atualmente. Em relação ao controle passivo, são apresentadas formas de controle, tais como isoladores, absorvedores dinâmicos e dissipadores de energia. Entre os dissipadores, a atenção é dada ao controle passivo pela utilização de CRs. Nesse capítulo, são apresentadas também as principais formas de otimização topológica de CRs encontradas na literatura atual. Além disso, são discutidas as formas de controle de *checkerboard* encontradas na literatura, com ênfase no controle de *checkerboard* em CRs e nas técnicas de controle de *checkerboard* por meio de restrição de perímetro, aplicadas em estruturas em geral. Na sequência são mostradas as principais contribuições deste trabalho.

No capítulo 3 são apontados os principais conceitos envolvendo MVEs, como modelos reológicos, comportamento dinâmico e a influência da temperatura no comportamento desses materiais. Apresenta-se, também, a teoria de flexão em placas, em especial a teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO) e a teoria de placas laminadas, utilizada nesse trabalho. Além disso, as formulações de elementos finitos e de vibrações para a teoria de placas laminadas. Também, são discutidos conceitos gerais de otimização e de otimização utilizando algoritmo genético.

No capítulo 4 a formulação do problema de otimização proposto é discutida, a qual é a base para o desenvolvimento desta tese. As variáveis de projeto e função objetivo são apresentadas, bem como o problema de otimização a ser desenvolvido. Além disso, apresenta-se a técnica de controle de *checkerboard* baseada na restrição de perímetro adicionada ao problema de otimização.

No capítulo 5 são expostos os materiais empregados no desenvolvimento numérico e experimental ao longo do desenvolvimento desta tese.

No capítulo 6, os resultados obtidos utilizando a metodologia proposta são apresentados e discutidos.

E por fim, o capítulo 7 é dedicado à conclusão e às considerações finais da presente tese, discutindo os principais pontos positivos e negativos da metodologia proposta e as sugestões para os trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo deste capítulo é caracterizar o estado da arte em relação ao controle de *checkerboard* na otimização topológica de camadas restritas utilizadas no controle passivo de vibrações em placas. Neste sentido, é exibida a revisão bibliográfica sobre as formas de controle passivo de vibrações, com ênfase ao uso de CRs em placas e/ou cascas. Posteriormente, é mostrada uma revisão da bibliografia das abordagens de otimização topológica utilizadas no controle passivo de vibrações por CR. E por fim, são apresentadas as revisões sobre as formas de controle de *checkerboard* utilizadas na otimização topológica de CRs e as técnicas de controle de *checkerboard* via restrição de perímetro utilizadas em estruturas em geral.

2.1 CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

Com o intuito de melhorar o desempenho, a durabilidade e o conforto de produtos e equipamentos, o controle de ruído e vibrações tornou-se um assunto de grande preocupação em diversas áreas. Atualmente, existem diversas técnicas que visam a redução de vibrações e ruídos, como por exemplo métodos ativos (JIANG *et al.*, 2021; CAO *et al.*, 2020), passivos (ZHANG *et al.*, 2021; XU *et al.*, 2021), semiativos (HU *et al.*, 2019; MANOHARAN *et al.*, 2016) e híbridos (KIM *et al.*, 2013; KANDASAMY *et al.*, 2016).

No controle passivo, uma parcela da energia vibratória é dissipada por meio do movimento realizado pela própria estrutura, sem a necessidade de utilização de fontes de alimentação externa ou atuadores. Já o controle ativo, utiliza dispositivos que necessitam de fonte externa de energia, os quais operam ativamente controlando a vibração da estrutura (SILVA, 2007). O método ativo basicamente utiliza atuadores de controle e sensores, sendo que os mais comuns são produzidos com filmes piezoelétricos colados à estrutura vibrante. O método híbrido é uma combinação da simplicidade do método passivo com a eficácia do método ativo. O método híbrido pode ser dividido em amortecimento de camada restrita ativa, compósitos de amortecimento piezoelétricos ativos, compósitos de amortecimento eletromagnético e redes piezoelétricas ativas (BAZ, 2019).

De maneira geral, o controle passivo pode ser dividido em três categorias: dissipadores de energia (ZHANG *et al.*, 2021; ZHANG; CHEN, 2019; ZHANG *et al.*, 2019; YUN; YOUN, 2018; YUN; YOUN, 2017), neutralizadores dinâmicos (KLUTHCOVSKY *et al.*, 2023; HANG-XING *et al.*, 2021; PEIKKHOSH *et al.*, 2021; ARI; FAAL, 2020; CHAARI *et al.*, 2019; SILVA; BAVASTRI, 2019; ZHU *et al.*, 2018) e isoladores de vibrações (CHEN *et al.*, 2021a; WANG *et al.*, 2020; YE *et al.*, 2020; XU *et al.*, 2018a; AGLIETTI *et al.*, 2004). Os dissipadores, são dispositivos que realizam o controle de vibrações pela conversão de energia cinética em calor. Como exemplos de dissipadores têm-se os amortecedores baseados em atrito, amortecedores viscoelásticos e amortecedores de fluido viscoso. Os neutralizadores dinâmicos, realizam o controle de vibrações por meio da transferência de parte da energia de vibração para sistemas auxiliares.

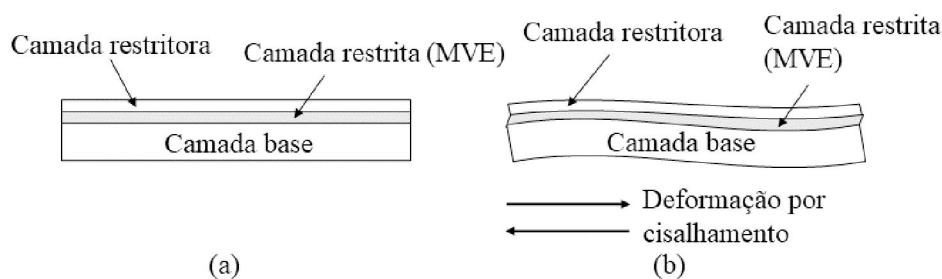
Estes possuem duas formas comuns: neutralizadores de massa sintonizado e neutralizadores de líquido sintonizado (MA *et al.*, 2021). Já os isoladores, são responsáveis por evitar a transmissão da vibração para a estrutura, modificando a vibração e levando-a para uma frequência mais baixa.

Na sequência do texto, a atenção será dada ao controle passivo de vibrações por camada restrita (CR). Esta técnica é utilizada largamente no controle de vibração em estruturas flexíveis, devido a mínima massa adicionada a estrutura a ser controlada e se enquadra na categoria de dissipadores de energia.

2.1.1 Controle passivo de vibrações em placas e cascas via camada restrita

O controle passivo de vibrações por camadas restritas (do inglês *constrained layer*) na sua forma mais simples é composto por uma camada de material viscoelástico (MVE) restrito por outra camada de material, geralmente, metálico. Estas duas camadas estão dispostas sobre a estrutura que se deseja controlar a vibração, a qual usualmente é denominada de estrutura base ou sistema primário. A vibração é dissipada predominantemente pela deformação em cisalhamento da camada de MVE. Isso ocorre, basicamente, em decorrência da diferença entre os deslocamentos da estrutura base e da camada restritora durante o movimento de flexão da estrutura (YAMAMOTO *et al.*, 2015). Na FIGURA 3, são apresentadas as configurações indeformada (FIGURA 3 (a)) e deformada da CR (FIGURA 3 (b)). A utilização de CR para o controle de vibrações apresenta eficácia em grandes faixas de frequência e um baixo custo relativo, tanto em relação ao desenvolvimento quanto à manutenção (CUNHA-FILHO *et al.*, 2016).

FIGURA 3 – REPRESENTAÇÕES DE UMA ESTRUTURA BASE CONTENDO CAMADA RESTRITA (A) CONFIGURAÇÃO INDEFORMADA, (B) CONFIGURAÇÃO DEFORMADA



FONTE: A autora (2024).

Camadas restritas (CR) geralmente são utilizadas em estruturas do tipo placa ou casca, pois, estas estruturas são finas e flexíveis e, quando submetidas à vibrações, se deformam predominantemente em flexão, gerando ruído e vibração. Nesse sentido, a deformação em flexão da placa favorece a deformação em cisalhamento da camada de MVE e, conseqüentemente, favorece a dissipação da energia vibratória de toda a estrutura (ANSARI *et al.*, 2013).

Entre os primeiros trabalhos encontrados na literatura, que utilizaram CR, estão os trabalhos de Kerwin (1959), no qual o autor desenvolveu uma teoria analítica para obter o fator de perda para uma placa tratada com CR. A expressão era dada em função das propriedades do

material de uma placa e das dimensões das camadas base, MVE e CR. Na sequência, Ditaranto e Blasingame (1966) estenderam o trabalho de Kerwin (1959) considerando deformações extensionais na camada de MVE e, com isto, obtiveram os fatores de perda para vigas de três e cinco camadas. Anos mais tarde, Mead e Markus (1969) deduziram a equação diferencial do movimento de sexta ordem em termos dos deslocamentos transversais para uma viga sanduíche com núcleo de MVE.

Na literatura, podem ser encontrados inúmeros trabalhos que buscam estudar o comportamento de placas ou cascas amortecidas com cobertura total por CR. No estudo realizado por Kudal e Cicirello (2018), os autores realizaram a cobertura total da placa utilizando MVE em tiras. Eles analisaram três orientações das tiras: paralelas, perpendiculares e em 45° ao longo do comprimento da placa. Os resultados obtidos mostram que a energia dissipada está intimamente ligada ao alinhamento das tiras com as linhas modais de modos particulares.

A estrutura contendo camada restrita pode ser constituída por diferentes materiais viscoelásticos, como apresentado por Sheng *et al.* (2018). Nesse estudo, as características de uma placa sanduíche com núcleo periódico composto por MVE foram investigadas. Os autores analisaram numérica e experimentalmente a estrutura constituída por dois MVEs que compunham a CR, dispostos de forma periódica. A estrutura estava montada de maneira tal que cada elemento de placa sanduíche era considerado como duas sub placas sanduíche que se uniam de ponta a ponta. Os autores confirmaram que o comportamento da estrutura amortecida por CR utilizando dois MVEs apresenta melhores resultados que estruturas amortecidas utilizando apenas um MVE.

No trabalho de Zhai *et al.* (2018) foi investigada uma placa sanduíche de cinco camadas com núcleos de MVE, sob vibração livre. Foram determinadas as quatro primeiras frequências naturais e fatores de perda modal da placa. Na sequência, esses valores foram plotados graficamente em função da razão de aspecto, razão comprimento/espessura e razão espessura viscoelástica/espessura total da placa. Com isso foram determinados os comportamentos das frequências naturais e do fator de perda modal conforme a variação dos demais parâmetros. Em Cunha-Filho *et al.* (2016), os autores analisaram a atenuação de instabilidades aeroelásticas supersônicas de placas retangulares utilizando CR. Para isso, os pesquisadores realizaram um estudo da influência das espessuras das camadas de MVE e restritora.

As CRs também podem ser utilizadas em estruturas-bases constituídas por outros materiais que não sejam materiais elásticos. Painéis duplamente curvos com núcleo de MVE e com CR de material funcionalmente graduado (FGM, do inglês *Functionally Graded Material*) compostos por metal e cerâmica (Al/ZrO_2) são investigados no trabalho de Sahu *et al.* (2020). Nesse estudo, a CR apresenta a superfície superior rica em cerâmica e a superfície inferior rica em metal, e a camada base é de material elástico isotrópico. Nesse trabalho, os efeitos da espessura da camada de MVE, da espessura da CR, da razão de aspecto, do fator de perda do MVE e do fator de perda da estrutura amortecida foram analisados também sob vibração livre.

No trabalho de Permoon e Farsadi (2021), foi investigado o comportamento do amorte-

cimento e das frequências naturais de placas com três camadas. A placa era composta por faces metálicas e núcleo de MVE. Nesse estudo, os pesquisadores analisaram os efeitos da relação comprimento-largura-espessura do núcleo de MVE na frequência natural e no fator de perda modal da placa. Por sua vez, Biswal e Mohanty (2019) estudaram os efeitos das espessuras das camadas de restrição e de MVE, do fator de perda do MVE e da razão de aspecto (relação entre o comprimento e a largura do painel) nas frequências naturais e no fator de perda da estrutura amortecida em painéis esféricos de casca sanduíche. A estrutura estava na condição de vibração livre. Os painéis eram compostos por cinco camadas, sendo elas: duas camadas de face e, uma camada central de material elástico e duas camadas de MVE. Yang *et al.* (2019) desenvolveram uma nova formulação tridimensional para cascas rasas¹ laminadas sanduíches, sujeitas a vibrações. Além disso, realizaram várias análises modais para avaliar as influências das condições de contorno, dimensão, temperatura e dependência em relação a frequência.

Alguns estudos mostram análises comparativas do controle de vibrações obtido por estruturas parcialmente e totalmente tratadas por CR com a estrutura sem amortecimento. Um exemplo é Zhang *et al.* (2021), onde os autores realizaram a análise experimental de placas finas. O objetivo do trabalho era reduzir a vibração em painéis de aeronaves.

Apesar de vários trabalhos utilizarem o recobrimento total de placas e cascas com CR, isso não é o ideal, pois, além de aumentar o peso da estrutura, podem interferir no seu desempenho em vibração e amortecimento. Nesse sentido, vários outros estudos foram desenvolvidos restringindo a área de recobrimento por CR. Esses estudos são apresentados na sequência deste texto.

Ansari *et al.* (2013), buscaram o controle do primeiro modo de vibração. Além disso, os autores realizaram um estudo da geometria da CR, onde descobriram que, ao alterar a forma geométrica da CR de quadrada para circular, obtinha-se um aumento de dez por cento no valor do fator de perda modal.

Alguns autores buscaram, em seus estudos, o controle de todos os modos compreendidos em uma faixa de frequência de interesse. Esse é o caso de Fang e Zheng (2015b), no qual CRs foram distribuídas sobre placas excitadas harmonicamente para controle da resposta ressonante de uma ou mais frequências de ressonância. Para isso, foi realizada a minimização do quadrado da resposta em deslocamento. Os resultados numéricos foram validados com experimentos físicos. Por sua vez, Chen *et al.* (2021b) tinham como objetivo a maximização do fator de perda modal para uma faixa de frequência, que compreendia os seis primeiros modos de vibrar de uma placa. Os modos de vibrar foram controlados mantendo a fração de volume de CR fixa. Resultados numéricos e experimentais foram apresentados. Os três primeiros modos foram controlados no trabalho de Wang *et al.* (2021). Neste trabalho, também, foi investigada a influência da espessura da camada de MVE sobre o amortecimento. Xu *et al.* (2015) realizaram a análise numérica em placas e vigas tratadas com CR. A viga era de material compósito anisotrópico sob condição de

¹ São definidas como cascas rasas, cascas abertas, as quais apresentam grande proporção de raio de curvaturas em relação ao comprimento ou largura.

engastada na borda esquerda. A placa era de compósito laminado ortotrópico na condição de bi apoiada. Os autores observaram o comportamento do amortecimento em função da variação da espessura da camada de restrição, espessura da camada de MVE e da posição das CRs.

As CRs podem ser utilizadas no controle de vibrações residuais de estruturas do tipo casca, sujeitas a cargas de impacto. A vibração residual é a vibração livre que ocorre depois da aplicação de cargas externas (YAN *et al.*, 2018). Yan *et al.* (2018) encontraram a distribuição ótima de CR por meio de uma abordagem baseada em respostas transitórias da estrutura. Para isso, foi utilizada otimização, a qual tinha como objetivo reduzir as respostas de vibrações residuais, após a aplicação de cargas de impacto a estrutura.

Além do controle de vibrações, CRs podem ser utilizadas no controle de ruído, pois estruturas do tipo placa, quando sujeitas à vibrações, causam elevado ruído. Nesse sentido, Zheng *et al.* (2016) buscaram a distribuição ótima de CR que reduzisse a potência sonora irradiada por placas em modos de baixa frequência. Nesse trabalho, foram apresentados exemplos numéricos e experimentais. Nos trabalhos de Ling *et al.* (2016), Zhang *et al.* (2018) e Zhang *et al.* (2019), os autores objetivaram o controle da potência da radiação sonora de placas. Em Ling *et al.* (2016), a placa tratada estava anexada a uma cabine acústica. Nos trabalhos de Zhang *et al.* (2018) e Zhang *et al.* (2019), a influência dos materiais da CR foi investigada no controle da potência da radiação sonora.

Um dos componentes essenciais nas CRs, são os MVEs. As propriedades desses materiais variam significativamente com a frequência e a temperatura. Em geral, essa variação pode ser negligenciada somente quando o material opera em pequenas faixas de frequência ou temperatura. Caso contrário, o comportamento em amortecimento pode ser impreciso. Buscando entender o comportamento dos MVEs com a variação da temperatura e frequência, Zhang *et al.* (2021) realizaram análises numéricas considerando as características dessas duas grandezas nas frequências naturais, nos fatores de perda modal e no layout das CRs.

Outra questão relevante é que as propriedades físicas de um MVE têm grande influência no comportamento de amortecimento de camada restrita. Tendo isso em mente, alguns autores tem buscado desenvolver novos MVEs a partir de novas configurações microestruturais desses materiais. Isso é realizado com o intuito de melhorar as propriedades a nível da estrutura global. Nesse sentido, alguns autores podem ser citados. Chen e Liu (2016) realizaram o projeto das microestruturas 2D de MVEs para obter o valor máximo do fator de perda modal da macroestrutura. Fang *et al.* (2020) tinham o mesmo objetivo, encontrar o máximo fator de perda modal da macroestrutura, porém para isso, os autores realizaram o projeto de microestruturas de MVE em 3D.

2.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A utilização de CR para mitigação de vibração e radiação acústica tem sido viável e eficaz desde a sua aplicação proposta por Kerwin (1959). No entanto, devido às limitações de

custo e peso, o uso prático de CR é restrito à cobertura de apenas uma parcela da estrutura base. Além disso, para dissipar efetivamente a energia de vibração, os MVEs devem ser distribuídos em locais onde ocorra maior deformação cíclica do MVE conforme as vibrações da estrutura nos modos que se deseja controlar (XU *et al.*, 2015). Nesse sentido, é importante e altamente recomendável determinar a distribuição ideal de CR com o propósito de controlar a vibração. Isso leva a um problema de otimização de determinação da posição de instalação da CR na estrutura base. Esse problema pode ser resolvido utilizando conceitos de otimização estrutural topológica.

A otimização topológica foi originalmente iniciada por (MICHELL, 1904), que estudou treliças estaticamente determinadas para uma série de condições de carregamento e suporte. Um problema padrão de otimização topológica visa determinar a distribuição ótima de material sólido, para um volume específico, que minimize (ou maximize) uma função objetivo. Determinar a topologia ótima consiste em encontrar a distribuição espacial, conectividade e formas ótimas dos elementos da estrutura, de modo que a função objetivo seja extrema (SIGMUND; PETERSSON, 1998; BENDSOE; SIGMUND, 2004). Assim, a determinação da distribuição ótima de material na otimização topológica recai em um problema de programação discreta 0 – 1, no qual, valores iguais a 0, representam vazios e valores iguais a 1 indicam a presença material sólido, para qualquer ponto do domínio (SIGMUND; MAUTE, 2013).

Ao longo dos anos, diversas abordagens de otimização topológica foram desenvolvidas, incluindo o método de homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), a abordagem de material isotrópico sólido com penalização (SIMP, do inglês *Solid Isotropic Material with Penalization*) (BENDSØE, 1989; ZHOU; ROZVANY, 1991), o método evolucionário de otimização estrutural (ESO, do inglês *Evolutionary Structural Optimization*) (XIE; STEVEN, 1996), métodos baseados em conjunto de níveis (WANG *et al.*, 2003) e métodos baseados no conceito de derivada topológica (NOVOTNY; SOKOŁOWSKI, 2012). No trabalho de Sigmund e Maute (2013) várias dessas técnicas de otimização topológica são discutidas.

O **método ESO** se baseia na ideia de que a estrutura ideal possa ser obtida removendo, gradualmente, o material que está sendo utilizado ineficazmente dentro do domínio de projeto e, dessa forma, a estrutura evolua para forma e topologias ideais (LIU *et al.*, 2008; HUANG; XIE, 2010). No entanto, não há garantia de que tal processo evolucionário sempre encontre a melhor solução (HUANG; XIE, 2010). O método ESO é baseado em variáveis discretas que utilizam decisão binária. Ou seja, no processo de otimização, o vetor de variáveis de projeto é composto por valores de 0 e 1. As principais vantagens do método ESO podem ser mencionadas: facilidade e simplicidade de implementação e o fato de o método não produzir densidades intermediárias durante o processo de otimização (ZHANG *et al.*, 2021). Por outro lado, sua principal desvantagem está no fato de que, ao rejeitar um elemento que seja candidato a ótimo local, a solução final pode não evoluir para um ótimo global (ROZVANY, 2001). Os elementos removidos pelo ESO, podem ser inseridos posteriormente em outra iteração do processo (LIU *et al.*, 2008).

Alguns trabalhos como Liu *et al.* (2008) e Querin *et al.* (1998), corrigiram algumas deficiências encontradas no método ESO original. Por exemplo, Liu *et al.* (2008) utilizaram o algoritmo genético (AG) como um método de busca global para melhorar o algoritmo e o denominaram de **otimização estrutural evolucionária genética, GESO** (do inglês, *Genetic Evolutionary Structural Optimization*). Para isso, os autores utilizaram o conceito de aptidão do AG. Já no trabalho de Querin *et al.* (1998), novos elementos são inseridos em torno de elementos já existentes, para ampliar a região de busca do algoritmo, denominado pelos autores de **otimização estrutural evolucionária bidirecional, BESO** (do inglês, *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*). Além disso, o BESO remove o material ineficaz e adiciona material em regiões promissoras, de forma simultânea.

O ESO também tem sido utilizado na otimização topológica de CRs. Por exemplo, Zhang *et al.* (2021) apresentaram uma versão modificada do ESO convencional na supressão de vibrações em painéis de aeronave. Para isso, os autores realizaram a maximização do fator de perda modal, impondo restrição à fração de volume da CR. Esta nova versão, aprimora a taxa de evolução do método. Os resultados foram comparados com os resultados obtidos pelo ESO convencional, e foi observado que o ESO aprimorado aumentou a eficiência do cálculo e também encontrou geometrias topológicas mais razoáveis. A mesma função objetivo foi investigada por Liu *et al.* (2018b). Neste trabalho, foram estudadas placas compósitas metálicas e placas de fibra de carbono, sujeitas a vibração aleatória. Além disso, o estudo considerou a falha material segundo o critério de tensões de von Mises² e foi observado que as estruturas tratadas com CR, além de terem melhor comportamento em vibração também tiveram uma redução significativa no valor máximo desta tensão efetiva. Já Fang e Zheng (2015b) verificaram que, na análise de sensibilidade dos problemas de otimização de topologia, normalmente é negligenciado o cálculo da derivada da razão de amortecimento modal. Segundo esses autores, isso poderá gerar erros na análise da sensibilidade total e produzir desvios nos *layouts* ideais das CRs. Desta forma, foi inserida a derivada da razão de amortecimento modal no cálculo da sensibilidade. Para avaliar a metodologia, foi minimizada a resposta ressonante de placas com CR sob excitações harmônicas. Com o método proposto, os autores obtiveram valores superiores para taxa de amortecimento modal, quando comparados com resultados obtidos utilizando análise de sensibilidade convencional. No trabalho de Zhang *et al.* (2019), um modelo de otimização de dois níveis para CRs é proposto. No primeiro nível, o BESO é utilizado para determinar as posições ótimas das CRs. No segundo nível, o AG é utilizado para determinar as espessuras do MVE e da CR. O objetivo do trabalho era reduzir a potência sonora de placas vibratórias.

Por sua vez, em Zhu *et al.* (2023) o BESO foi utilizado no projeto de otimização topológica de CRs aplicadas ao controle de vibrações de estruturas com paredes finas. O problema de

² Richard Edler von Mises (1883-1953), matemático, físico e engenheiro mecânico renomado, desenvolveu o critério de escoamento de von Mises. Esse critério também é conhecido como teoria da energia de cisalhamento ou teoria da energia de distorção máxima. Essa teoria afirma, que para um material dúctil o escoamento começa em um local onde a tensão efetiva segundo o critério de von Mises se torna igual ao limite da tensão de escoamento do material.

otimização está restrito à máxima fração de volume de CR, sendo que o objetivo é a maximização do valor ponderado dos primeiros fatores de perda modal.

Outro método baseado em variáveis discretas e decisão binária é o **algoritmo genético (AG)**. Este algoritmo se baseia nos conceitos da evolução natural segundo a teoria de Darwin³, onde possíveis soluções competem pela sobrevivência por meio de sua aptidão (AL-AJMI; BOURISLI, 2008). Este algoritmo também tem sido utilizado na otimização topológica de CR em placas, como por exemplo Kanke (2017) e Kanke *et al.* (2022), onde o AG foi utilizado para determinar a distribuição ótima de CR sobre placas excitadas harmonicamente. Para isso os autores buscaram a minimização da norma Euclidiana de uma componente da matriz função resposta em frequência da inertância, mas sob restrição de fração de volume da CR. Os autores obtiveram resultados condizentes com a literatura. Entretanto, nesses trabalhos foi detectada a ocorrência do clássico fenômeno de oscilação da ocorrência de CR, denominado *checkerboard*.

Outra versão do AG é o **MPGA, algoritmo genético de múltiplas populações** (do inglês *Multi-Population Genetic Algorithm*). Este é um algoritmo de busca global baseado no AG convencional, mas que decompõe o AG em várias subpopulações. Para isso, o MPGA utiliza o conceito de evolução paralela, aumentando o número de padrões de genes trocando informações entre as subpopulações, evitando assim a convergência prematura (QIN *et al.*, 2021). Qin *et al.* (2021) utilizaram o MPGA na otimização topológica de CRs de placas finas sujeitas a cargas móveis, maximizando o fator de perda modal.

Os AGs também são encontrados em trabalhos voltados à redução de ruído. Em um destes, Ling *et al.* (2016) buscaram o layout ótimo de CRs visando reduzir a potência de radiação sonora de uma placa anexada a uma cavidade acústica.

Em outros trabalhos, os autores utilizaram AG para determinar a importância das espessuras das camadas de MVE e camada restritora, no comportamento de amortecimento de CRs. Zhang e Zheng (2015) apresentaram um procedimento para otimização, que buscava determinar a localização ótima das CRs e as espessuras ótimas da camada de MVE e da camada restritora, simultaneamente. Além disso, também analisaram o efeitos de tais parâmetros no desempenho na supressão de vibrações com base no conjunto de soluções ideais de Pareto. Para isso, os autores utilizaram um **algoritmo genético de ordenação não dominada, NSGA** (do inglês *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*) para maximizar o fator de perda modal. Xu *et al.* (2015) também realizaram uma otimização multi-objetivo, com o objetivo de determinar as espessuras ótimas das camadas de MVE e restritora. Para isso os autores analisaram três funções objetivos: 1) maximização do fator de perda modal, 2) minimização da massa da CR adicionada à estrutura e 3) minimização da soma de N frequências naturais. Neste artigo, o NSGA também foi utilizado. O NSGA é robusto e apresenta bons resultados em problemas de otimização que utilizam variáveis híbridas, como é o caso do trabalho mencionado, onde o vetor de variáveis de projeto é composto por variáveis discretas (localização das CRs) e por variáveis contínuas

³ Charles Robert Darwin (1809-1882) foi um importante biólogo, responsável por estabelecer a teoria da evolução das espécies baseada na ideia de que todos os seres vivos descendem de um ancestral em comum.

(espessuras das camadas de MVE e camadas restritoras).

No entanto, problemas de otimização que utilizam variáveis binárias, como os citados, podem apresentar instabilidades numéricas e padrões de tabuleiro de xadrez, denominados por *checkerboard* (DIAZ; SIGMUND, 1995; SIGMUND; PETERSSON, 1998; YUN; YOUN, 2017). Para evitar as dificuldades mencionadas, o método baseado na definição de uma microestrutura sólida com penalização, **SIMP** (do inglês *Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) pode ser utilizado para relaxar a função característica binária, modificando uma função discreta para uma função contínua, a qual pode assumir valores reais entre 0 e 1. Em geral, a função utilizada é definida com base em um conceito de densidade relativa, devido às suas simplicidades de formulação e de implementação. Ao fazer isso, as características do material necessitam ser interpoladas utilizando uma função contínua e dependente da densidade, a qual, normalmente é considerada como uma variável de projeto (YAMAMOTO *et al.*, 2015).

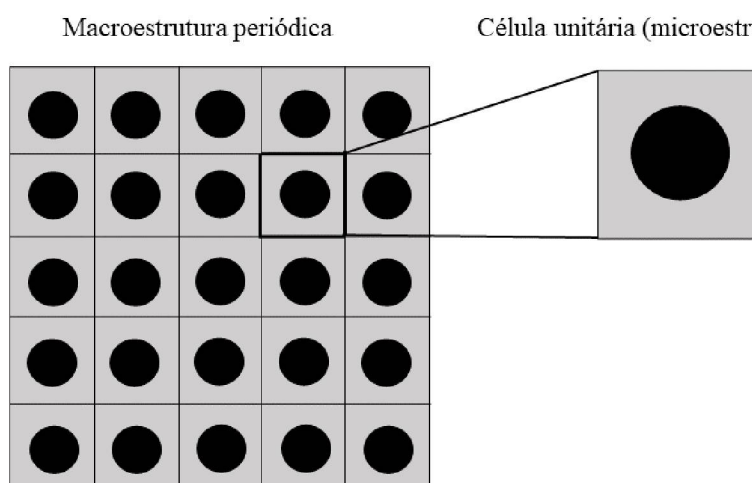
O SIMP tem sido largamente utilizado em trabalhos de otimização topológica de CRs em placas e, normalmente, junto com ele, o método de assíntotas móveis (MMA, do inglês *Method of Moving Asymptote*) é utilizado para resolver o problema de otimização. No estudo de Fang e Zheng (2015a), ambos os métodos foram utilizados para reduzir a vibração de placas sujeitas à excitações harmônicas ou à excitações estacionárias aleatórias. Para isso, foi realizada a minimização da amplitude da resposta em deslocamentos. Já Chen *et al.* (2021b) realizaram a maximização dos fatores de perda modal, calculados pelo método da energia de deformação modal (MSE, do inglês *Modal Strain Energy*). O problema de otimização foi restrito a valores pré-determinados de frações de volume de CR. Takezawa *et al.* (2016) propuseram uma nova função objetivo, a flexibilidade dinâmica. Esta função foi maximizada, com o intuito de determinar as posições ideais de CR, para reduzir a vibração de placas em 2D e 3D, mas com restrição sobre o volume de material do amortecimento. Ling *et al.* (2011) desenvolveram um modelo de elementos finitos para descrever o comportamento dinâmico de placas. Esses autores realizaram a otimização topológica de CRs utilizando o fator de amortecimento modal como função objetivo. Já Zheng *et al.* (2016) utilizaram SIMP e MMA para obter localizações ótimas de CR, de modo que minimizassem a potência sonora radiada em placas excitadas harmonicamente.

Os trabalhos citados anteriormente visam a otimização topológica das camadas restritas para controle de vibrações e ruído. No entanto, sabendo que o desempenho das estruturas dependem fortemente das propriedades físicas dos materiais que as compõem, alguns trabalhos tratam do desenvolvimento de novos materiais de amortecimento. Nesse sentido, alguns autores desenvolveram novos materiais por meio de otimização de topologia de uma microestrutura produzida em MVE. A estrutura global é composta por infinitas microestruturas e seu comportamento deve ser determinado com base nesta microestrutura. Com isso, são necessários uma formulação em duas escalas e o método de homogeneização.

O **método da homogeneização** é, geralmente, utilizado para determinar as propriedades efetivas de materiais compósitos contendo microestruturas periódicas. Em outras palavras, pela teoria da homogeneização, considera-se que as propriedades efetivas do material sejam funções

periódicas da variável microscópica. Assume-se, também, que o elemento de volume representativo da microestrutura seja muito pequeno quando comparado com as dimensões de domínio global. Uma representação genérica da microestrutura e do domínio global são apresentados na FIGURA 4. A principal ideia do método da homogeneização é simplificar o comportamento do material a nível microscópico, de modo que as propriedades a nível macroscópico sejam obtidas (AL-AJMI, 2004).

FIGURA 4 – CÉLULA UNITÁRIA E ESTRUTURA MACROSCÓPICA.



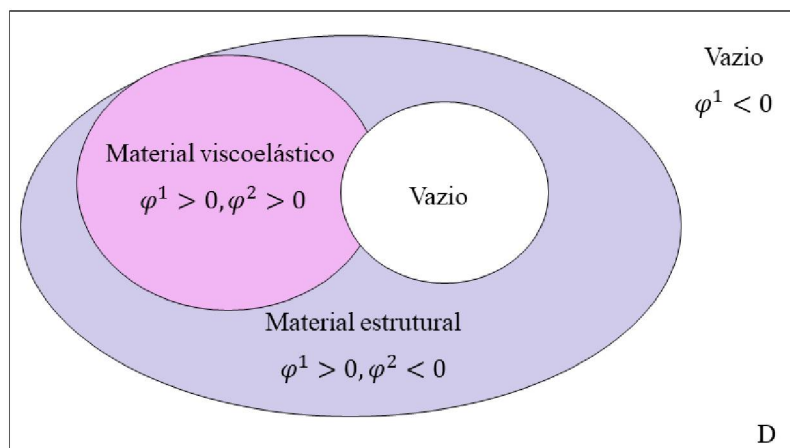
FONTE: A autora (2024).

O método da homogeneização tem sido utilizado na otimização topológica microestrutural de MVEs, utilizados em CRs. Um exemplo é o trabalho de Chen e Liu (2016), no qual os autores desenvolveram um método de otimização topológica em duas escalas. O objetivo do trabalho era determinar a configuração microestrutural ótima do MVE utilizado em CRs. Para isso, o fator de perda modal da macroestrutura foi maximizado. Nesse trabalho, a estrutura utilizada para análise era uma viga. As densidades relativas do material da microestrutura foram consideradas como variáveis de projeto via modelo SIMP, e o processo de otimização foi resolvido pelo MMA. Fang *et al.* (2020) realizaram um trabalho parecido com o anterior, utilizando as mesmas ferramentas. Porém as células da microestrutura eram em 3D. Além disso, a estrutura tratada com amortecimento era do tipo placa. No estudo de Liu *et al.* (2018a), foi realizada a otimização topológica de microestruturas periódicas de MVEs em 2D e 3D. Nesse trabalho, também, maximizou-se o fator de perda modal, porém, nesse caso, o problema estava sujeito a restrições de frequência e fração de volume do MVE. Para isso, foi utilizado o método de otimização BESO. A estrutura utilizada para análise era uma viga.

Nos **métodos de otimização baseados em conjunto de níveis** (do inglês *level set*), os conjuntos de níveis representam o limite estrutural entre dois materiais. As funções de conjunto de níveis são utilizadas para representar os subdomínios de cada material. A FIGURA 5 ilustra a distribuição de material utilizando funções de conjunto de níveis, φ . Nesse caso, a função de conjunto do primeiro nível, φ^1 , separa o material do vazio, e a função de conjunto do segundo

nível, φ^2 , separa o material estrutural do MVE (KOLK *et al.*, 2017). Com a utilização de funções de conjunto de níveis na otimização topológica consegue-se obter claramente o limite entre os materiais (fronteira entre materiais), sem que ocorra checkerboard. Porém, o método de otimização pode sofrer com grandes quantidades de mínimos locais e, também, com a dependência de uma estimativa inicial (LIU *et al.*, 2021).

FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO DE UMA ESTRUTURA MULTIMATERIAL DEFINIDA POR FUNÇÕES DE CONJUNTO DE NÍVEIS.



FONTE: A autora (2024).

LEGENDA: φ^1 : Função de conjunto de primeiro nível, que determina a colocação do material; φ^2 : Função de conjunto de segundo nível, que diferencia o material estrutural do MVE.

Na otimização topológica de CRs em placas, o método de conjunto de níveis pode ser utilizado para determinar a localização ideal da CR e, também, sua melhor forma, de maneira simultânea, como no trabalho apresentado por Ansari *et al.* (2013). Para isso, os autores maximizaram o fator de perda modal de placas. Zhang *et al.* (2021) utilizaram um método de conjunto de nível parametrizado (PLSM, do inglês *Parameterized Level Set Method*) na otimização topológica de placas com CRs. O foco do trabalho estava em investigar o efeito das propriedades dependentes da temperatura e frequência dos MVEs, sobre os layouts das CRs otimizadas.

Na literatura, também, podem ser encontrados diversos trabalhos na área de otimização topológica de camadas restritas, que utilizam outros métodos de otimização, como por exemplo os trabalhos de Madeira *et al.* (2017) e Madeira *et al.* (2020). Nestes trabalhos, os autores adotaram um processo de otimização multiobjetivo, o método *Direct MultiSearch* (DMS), em que realizaram a minimização do peso das CRs e a maximização do fator de perda modal, simultaneamente.

Esta seção teve como objetivo apresentar a importância da otimização topológica na obtenção da distribuição ótima de CR e camadas irrestritas. Em especial, a atenção foi dada para o controle de vibrações e ruído em estruturas do tipo placa e casca. Além disso, foram apresentadas as principais técnicas que têm sido utilizadas para tal objetivo. Na TABELA 1, os trabalhos

citados nesta seção estão apresentados de forma classificada em relação à função objetivo, variáveis de projeto, método de otimização e tipo de variáveis (se contínuas ou discretas).

TABELA 1 – CLASSIFICAÇÃO DOS ARTIGOS CITADOS EM RELAÇÃO À OTIMIZAÇÃO TO-
POLÓGICA

Trabalho	Método de Otimização	Função Objetivo	Variáveis de Projeto	Estrutura	Tipo de Variáveis
Ling <i>et al.</i> (2011), Zheng <i>et al.</i> (2013)	MMA	Maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Contínuas (SIMP)
Ansari <i>et al.</i> (2013)	–	Maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Contínuas (Método de ajuste de nível)
Fang e Zheng (2015a)	MMA	Minimização da amplitude de deslocamento	Posições	Placa	Contínuas (SIMP)
Fang e Zheng (2015b)	ESO	Minimização da amplitude de deslocamento	Posições	Placa	Discretas
Xu <i>et al.</i> (2015)	NSGA	Max. do fator de perda modal e min. da massa da CR e frequências naturais	Posições e espessuras ¹	Viga e Placa	Discretas
Zhang e Zheng (2015)	NSGA	Maximização do fator de perda modal	Posições e espessuras ¹	Placa	Discretas e contínuas
Ling <i>et al.</i> (2016)	GA	Minimização da potência de radiação sonora	Posições	Placa	Discretas
Zheng <i>et al.</i> (2016), Fang <i>et al.</i> (2020), Chen <i>et al.</i> (2021b)	MMA	Maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Contínuas (SIMP)
Kanke (2017), Kanke <i>et al.</i> (2022)	GA	Minimização da inércia	Posições	Placa	Discretas
Madeira <i>et al.</i> (2017), Madeira <i>et al.</i> (2020)	DMS	Minimização da massa da CR e maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Contínuas
Liu <i>et al.</i> (2018b), Zhang <i>et al.</i> (2021)	ESO	Maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Discretas
Zhang <i>et al.</i> (2018)	ESO e GA	Minimização da potência de radiação sonora	Posições e espessuras ¹	Placa	Discretas e Contínuas
Zhang <i>et al.</i> (2019)	BESO e GA	Minimização da potência de radiação sonora	Posições e espessuras ¹	Placa	Discretas e contínuas
Zhu <i>et al.</i> (2023)	BESO	Maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Discretas
Qin <i>et al.</i> (2021)	MPGA	Maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Contínuas
Zhang <i>et al.</i> (2021)	MMA	Maximização do fator de perda modal	Posições	Placa	Contínuas (Método de ajuste de nível)

Nota: ¹: As espessuras são da camada de MVE e da camada restritora.

FONTE: A autora (2024).

2.3 CONTROLE DE *CHECKERBOARD*

O fenômeno numérico denominado por *checkerboard* se caracteriza por regiões de transição entre elementos sólidos e vazios, e que estão dispostos de forma alternada semelhantes à um tabuleiro de xadrez (FIGURA 2 (b)). Esta configuração pode ser comumente obtida como resultado do processo de otimização topológica onde os campos de deslocamentos são determinados por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Tal fenômeno é puramente numérico e pode surgir devido à modelagem inadequada da rigidez ocorrida pela utilização de elementos finitos de baixa ordem (DIAZ; SIGMUND, 1995; PEREIRA, 2001). A ocorrência de *checkerboard* é indesejável, pois gera instabilidade numérica, apresenta uma rigidez numérica significativamente superior à rigidez física e é de difícil fabricação (SHUKLA *et al.*, 2013; DIAZ; SIGMUND, 1995).

No sentido de controlar tal fenômeno, diversas técnicas foram desenvolvidas e, segundo Sigmund e Petersson (1998) e Bendsoe e Sigmund (2004), algumas delas são:

- (a) suavização: após a obtenção da topologia ótima da estrutura, um processo de suavização de imagens é aplicado à imagem de saída. Como consequência, a imagem obtida apresenta mais regiões com escalas de cinza e menos *checkerboard*. Este método não leva em consideração problemas que possam ocorrer após a suavização (LI *et al.*, 2001);
- (b) elementos finitos de alta ordem: vários trabalhos sugerem a utilização de elementos finitos de alta ordem, por exemplo elementos quadrangulares de 8 ou 9 nós, como é o caso dos trabalhos de Diaz e Sigmund (1995) e Jog e Haber (1996). Segundo esses autores, esses elementos reduzem a tendência de geração de padrões de *checkerboard*. Contudo, o tempo de processamento dispendido nas análises por elementos finitos poderá ser consideravelmente superior àquele usado para elementos de menor ordem;
- (c) *patches*: em tradução livre significa padrões. Tais padrões são formados por um conjunto de quatro elementos finitos (também denominados de "superelementos"). Neste conjunto de elementos, as propriedades são mantidas constantes. Entretanto, esta técnica pode não corrigir os padrões de *checkerboard* produzidos pela otimização topológica (BENDSØE *et al.*, 1993);
- (d) controle de perímetro: restringe o espaço de busca a um valor pré-determinado de perímetro. Isso é implementado por meio de uma restrição no processo de otimização. O método foi desenvolvido por Ambrosio e Buttazzo (1993);
- (e) restrição de gradiente global ou local: são restrições impostas ao processo de otimização baseadas no cálculo de gradientes de funções dependentes da densidade. A qual é definida no interior do domínio de projeto. Os valores de densidade podem ser discretos ou contínuos (PETERSSON; SIGMUND, 1998; ZHOU *et al.*, 2001; PEREIRA *et al.*, 2004);

- (f) filtro de independência de malha: este tipo de filtro é puramente heurístico e modifica a sensibilidade (ou densidade) do projeto de um elemento finito específico. É baseado no cálculo de uma média ponderada das sensibilidades (ou densidades) de elementos finitos vizinhos, dentro de uma vizinhança fixa e de dimensão pré-determinada. É um método simples de implementar, não requer tempo elevado para processamento e produz resultados semelhantes aos obtidos por meio da restrição de gradiente local. Segundo Sigmund (2007), tal filtro compreende o filtro de sensibilidade (SIGMUND, 1997; BUHL *et al.*, 2000; SIGMUND, 2001; BENDSOE; SIGMUND, 2004; PEDERSEN *et al.*, 2006; HUANG; XIE, 2007; SIGMUND, 2007; HU *et al.*, 2009; SIGMUND; MAUTE, 2012; LUO *et al.*, 2021) e o filtro de densidade (BOURDIN, 2001; BRUNS; TORTORELLI, 2001; YUN; YOUN, 2017; LAMBE; CZEKANSKI, 2018; XU *et al.*, 2018b; LI; KIM, 2018).

Outras formas e/ou técnicas têm sido utilizadas e desenvolvidas ao longo dos anos para o controle de *checkerboard*. Por exemplo, Kim *et al.* (2000) propôs um método alternativo para controlar as cavidades (vazios) geradas no processo de otimização topológica, denominada Criação Inteligente de Cavidade (ICC). Consequentemente, o *checkerboard* também é controlado. Esta técnica foi formulada para encontrar soluções entre os resultados obtidos pelos métodos ESO (CHU *et al.*, 1996; HUANG; XIE, 2010) e *Nibbling* ESO. O método ESO segue o conceito de criar cavidades removendo material considerado ineficaz, dentro ou na fronteira do domínio de projeto. O método *Nibbling* ESO se baseia no mesmo conceito, mas remove apenas os elementos que estão nos limites do domínio, modificando apenas os limites prescritos da estrutura. O ICC foi formulado para encontrar soluções entre os extremos obtidos nestes dois métodos. Assim, o ICC emprega ambos os métodos de forma adequada para encontrar a estrutura otimizada e controla quando e onde um vazio deve ser criado.

Na sequência, Borrvall e Petersson (2001) desenvolveram o que os autores chamaram de método de penalização regularizada. Tal método consiste em adicionar uma restrição explícita ao problema de otimização, para penalização da função de densidade. Para isso, a restrição é controlada por uma tolerância. A ideia é tornar a restrição fracamente fechada e poder converter sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes. Com isso, os autores evitaram os padrões cinza e de *checkerboard*.

No trabalho de Poulsen (2002) foi implementado ao problema de otimização uma restrição que visa evitar a formação de *checkerboard* e de padrões de "articulação conectada por um nó". A definição de articulação conectada por um nó é dada no trabalho como sendo um conjunto de quatro elementos conectados por um nó. Sendo que, dois elementos opostos estão preenchidos de material e os outros dois elementos estão vazios. A restrição, é adicionada ao problema de minimização da flexibilidade, além disso, a restrição é baseada nas densidades do material de tal forma que esses valores não sejam monotônicos⁴ ao redor do nó. O esquema é

⁴ Valores monótonos são definidos pela matemática como sendo valores que mantém a relação de ordem, crescente ou decrescente.

formulado em termos de que uma única restrição adicionada ao problema de otimização e que pode ser utilizada em casos em 2D e 3D.

Guest *et al.* (2004) desenvolveram uma abordagem de controle de perímetro baseada nos volume nodais, ao invés das frações de volume elementar. As variáveis nodais são tomadas como sendo as variáveis de projeto e são projetados no espaço do elemento para determinar as frações de volume do elemento. A projeção é realizada por meio da utilização de funções independentes da malha, baseadas na escala de comprimento mínimo. Dois esquemas de projeção foram testados, um esquema linear e o outro não-linear que utiliza a função degrau de Heaviside. O objetivo do problema de otimização topológica é a minimização da flexibilidade. A solução do problema é obtida para atender a restrição de perímetro definida inicialmente, sem adição de funções de penalidade ou filtros de sensibilidade. Como resultado, a estrutura obtida não contém padrões de *checkerboard* ou dependência de malha.

Em outro exemplo de controle de checkerboard, Bruggi (2008) utilizou elementos finitos mistos. Em elementos mistos, tensões e deslocamentos são variáveis independentes na formulação de elementos finitos. O objetivo do estudo era reduzir a flexibilidade (*compliance*) estrutural usando otimização topológica. O problema de otimização estava sujeito à restrição de volume do material sólido. Duas formulações descendentes do princípio variacional de Hellinger-Reissner foram empregadas. Com a aplicação da primeira formulação, foram encontrados padrões de *checkerboard*. Isso foi posteriormente corrigido ao utilizar densidades nodais (definidas nos nós) ao invés de densidades elementares (definidas como constantes em cada elemento). A segunda formulação apresentou padrões livres de *checkerboard*. Segundo o autor, a principal desvantagem da discretização mista é o custo computacional. Para contornar isso, ele sugere utilizar abordagens baseadas na discretização de densidades nodais, ao invés de utilizar àquelas baseadas em elementos.

2.3.1 Controle de *checkerboard* na otimização de CR

No caso específico de controle de *checkerboard* em camadas restritas, as principais técnicas que têm sido utilizadas são os filtros de densidade e de sensibilidade. Os trabalhos que empregaram tais filtros são apresentados na sequência. No estudo de Zheng *et al.* (2013), o filtro de Sigmund e Petersson (1998) foi aplicado ao problema de otimização topológica de CRs em placas. A função objetivo era a combinação de vários fatores de perda modal, determinados pelo método de energia de deformação modal de elementos finitos. Fang e Zheng (2015b) usaram o mesmo filtro que o trabalho anterior na otimização topológica de CR para minimizar a resposta ressonante de placas. Além disso, os autores desenvolveram um método de análise de sensibilidade aprimorado. Este método considera a derivada da razão de amortecimento modal.

No estudo de Zheng *et al.* (2016), a filtragem de sensibilidade foi utilizada. Os autores realizaram a otimização topológica de CR para controle da radiação sonora em ressonâncias de baixa frequência. As estruturas de análise eram placas finas. As sensibilidades foram determinadas como as derivadas da função objetivo em relação às densidades relativas dos elementos as

quais eram as variáveis de projeto do problema.

Além da otimização topológica de CRs, Liu *et al.* (2018b) realizaram a análise do comportamento da tensão equivalente de von Mises. Esse último foi analisado em relação à adição de CR à estrutura. As estruturas investigadas foram painéis metálicos e compósitos. A função objetivo foi a maximização do primeiro fator de perda modal. Para controlar o *checkerboard*, o filtro de sensibilidade de Bendsoe e Sigmund (2004) foi utilizado.

Em Zhang *et al.* (2018) um processo de otimização hierárquico foi desenvolvido para minimizar a potência de radiação sonora em placas. O processo compreende duas etapas. Na primeira, o método ESO foi utilizado para determinar a distribuição ótima das CRs. Na segunda etapa, o algoritmo genético (AG) foi usado para determinar as espessuras das camadas de MVE e restritora. As posições determinadas pelo ESO são tomadas como posição inicial para que as espessuras sejam determinadas pelo AG. Para evitar o padrão de *checkerboard*, o filtro de sensibilidade de Huang e Xie (2007) foi utilizado.

Zhang *et al.* (2021) realizaram a otimização topológica de CRs para supressão de vibrações de painéis de aeronaves. A fração de volume de recobrimento por CR foi tomada como uma restrição. O método de otimização utilizado foi o ESO e a função objetivo foi o fator de perda modal. Para resolver os problemas de dependência de malha e de padrão de *checkerboard* os autores utilizaram o filtro de sensibilidade proposto por Sigmund (1997). Por sua vez, Chen *et al.* (2021b), apresenta uma versão modificada do filtro de Sigmund (1997). Nesse trabalho, foi realizada a otimização de CRs para supressão de vibrações em placas. A função objetivo estudada foi a maximização dos fatores de perda modal compreendidos em uma faixa de frequência de estudo.

No trabalho de Zhu *et al.* (2023) o BESO é utilizado no projeto de otimização topológica de CR aplicadas ao controle de vibrações de estruturas com paredes finas. O fator de perda modal é tomado como a função objetivo para o problema de otimização, e o controle de *checkerboard* foi realizado pela utilização de um filtro de sensibilidade desenvolvido por Sigmund e Petersson (1998).

No trabalho de Wu *et al.* (2024) os autores investigaram a otimização topológica de estruturas tratadas com CR em diferentes condições de temperatura e frequência. Para evitar padrões de *checkerboard*, os autores utilizaram o filtro de sensibilidade desenvolvido por Sigmund e Petersson (1998).

Os trabalhos apresentados nesta seção se referem às técnicas de *checkerboard* utilizadas na otimização topológica de camadas restritas. Como pode ser observado, a maioria dos trabalhos utilizam de filtros de sensibilidade ou de densidade para controle de *checkerboard* em CR.

2.3.2 Controle de *checkerboard* via restrição de perímetro

As técnicas de otimização topológica se resumem em identificar regiões de material sólido e vazios dentro de um domínio de projeto, de forma a obter uma estrutura ótima para determinado critério e quantidade de material. No entanto, este problema de otimização (contém/não

contém material) é um problema de programação inteira (0 e 1) que é difícil de ser resolvido e é dito mal posto (SIGMUND; PETERSSON, 1998; FERNANDES *et al.*, 1999). Uma das formas de superar essa dificuldade é relaxando o problema pela introdução de uma variável de projeto definida para uma fração de volume de material que varia entre 0 e 1, normalmente relacionada a uma variável densidade artificial ρ . No entanto, isso pode desenvolver regiões de material poroso, regiões de *checkerboard* e de dependência de malha.

Outra maneira de resolver o problema de programação inteira mal posto é por meio da utilização de uma restrição de perímetro. O perímetro de uma estrutura pode ser definido, simplesmente, como o comprimento total do arco da fronteira da região sólida. A utilização da restrição de perímetro em problemas de otimização topológica foi inicialmente discutida por Ambrosio e Buttazzo (1993) e implementada por Haber *et al.* (1996), com o intuito de realizar o controle de *checkerboard* em estruturas bidimensionais, e posteriormente, em estruturas tridimensionais por Fernandes *et al.* (1999) e Beckers (1999). Além do controle de *checkerboard*, os autores Sigmund e Petersson (1998) afirmam que ao utilizar uma restrição de perímetro, o fenômeno de dependência de malha também pode ser evitado.

A definição matemática para a medida do perímetro pode ser realizada considerando o conceito de variação total de uma função contínua por partes ρ (HABER *et al.*, 1996; SIGMUND; PETERSSON, 1998), dada por

$$TV(\rho) = \int_{\Omega} |\nabla \rho| d\Omega + \int_{\Gamma} |\langle \rho \rangle| d\Gamma. \quad (2.1)$$

O termo $TV(\rho)$ significa a variação total da função ρ , $\nabla \rho$ é o gradiente da função, $\langle \rho \rangle$ é o salto da função e Γ é a região limite de descontinuidade. A região limite de descontinuidade é o limite de cada elemento finito, do modelo numérico utilizado. Caso, o problema de otimização topológica receba variáveis de projeto compostas por valores discretos de 0 ou 1, a parcela referente ao gradiente da função ρ se torna nula para todo o domínio. Nesse sentido, a equação (2.1) pode ser expressa apenas em função do termo dependente dos saltos da função densidade, conforme (SIGMUND; PETERSSON, 1998)

$$TV(\rho) = \int_{\Gamma} |\langle \rho \rangle| d\Gamma, \quad (2.2)$$

e assim, a medida do perímetro pode ser definida como (SIGMUND; PETERSSON, 1998)

$$p(\rho) = \sum_{i=1}^I l_i \left(\sqrt{\langle \rho \rangle_i^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \right). \quad (2.3)$$

O termo $\langle \rho \rangle_i$ é o salto da densidade do material através da interface i de comprimento l_i do elemento I . O parâmetro ε é um número pequeno e positivo que garante a diferenciabilidade

da equação do perímetro. Esta expressão representa a variação total da densidade constante, elemento a elemento, quando $\varepsilon = 0$.

A restrição de perímetro tem sido utilizada em vários trabalhos, com diversas técnicas de otimização, como por exemplo conjunto de níveis (YAMASAKI *et al.*, 2010; XIA *et al.*, 2015), SIMP (ZHANG; DUYSINX, 2003; QIU *et al.*, 2009; PARK *et al.*, 2018), BESO (YANG *et al.*, 2002; HAN *et al.*, 2021), MMA (CHRISTIANSEN *et al.*, 2015; LI *et al.*, 2020) e AG (BALAMURUGAN *et al.*, 2006). Nestes trabalhos, há aplicações na otimização topológica de tecidos ósseos (PARK *et al.*, 2018), vigas bidimensionais (HAN *et al.*, 2021) e tridimensionais, (CHRISTIANSEN *et al.*, 2015) e em células unitárias (QIU *et al.*, 2009).

Por meio dos resultados obtidos nos trabalhos citados anteriormente, foi demonstrado que a inclusão de uma restrição do perímetro ao problema de otimização topológica pode ser benéfico. Os resultados apresentam que o controle de perímetro pode gerar soluções independentes de malha e também livres de *checkerboard* (PETERSSON, 1999; SHUKLA *et al.*, 2013). Além disso, o controle perimetral se mostrou eficiente em controlar o tamanho e o número de vazios, possibilitando controlar a complexidade das estruturas otimizadas e permitindo a fabricação das mesmas. Nesse sentido, a utilização do controle perimetral pode ser aplicado na otimização topológica de CR e pode ser uma ferramenta valiosa no controle de *checkerboard*.

2.4 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

A partir da revisão bibliográfica realizada, é possível perceber que a utilização de CR no controle passivo de estruturas flexíveis como placas e cascas é um assunto atual e de grande relevância. Além disso, quando devidamente projetadas, as CRs podem realizar o controle de vibrações e ruído em amplas faixas de frequência. Também, é possível obter um controle eficaz até mesmo para quantidades reduzidas de massa de CR adicionada à estrutura.

Outro ponto observado é que a maioria dos trabalhos que realizam o controle de vibrações em placas utilizando CR não realizam o controle de *checkerboard*. E quando há controle de *checkerboard*, as técnicas utilizadas são baseadas em filtros de sensibilidade ou densidades, para os quais, normalmente, cálculos de derivadas são requeridos.

Pela extensa busca realizada, até o presente momento a adição da restrição de perímetro ao problema de otimização topológica de CRs visando o controle de *checkerboard* ainda não fora estudado. Sendo assim, este trabalho visa preencher esta lacuna e utilizar a restrição de perímetro para impedir a geração *checkerboard* na otimização de CRs. Nesse sentido, este trabalho visa determinar a distribuição ótima de CR utilizando a técnica de otimização topológica, baseada em AG, para controle passivo ótimo de vibrações em placas semiespessas. O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia que possibilite controlar o *checkerboard*.

3 REVISÃO CONCEITUAL

Neste capítulo, são apresentados alguns modelos clássicos de MVE, com ênfase ao modelo de Zener baseado em cálculo fracionário. Posteriormente, são mostradas as teorias de flexão de placas semiespessas¹, com base na teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO) e na teoria de placas laminadas que utiliza uma teoria de camadas discretas. Também, é exposta a formulação do problema de elementos finitos para placas semiespessas e placas laminadas. Por fim, é discutida a formulação de vibrações em placas para obtenção da resposta numérica da FRF do sistema composto.

3.1 PLATAFORMAS DE PETRÓLEO OFFSHORE

As plataformas de petróleo *offshore* são largamente utilizadas para explorar, perfurar, produzir, armazenar e transportar petróleo e/ou gás advindos de diferentes profundidades oceânicas. Vários tipos de plataformas *offshore* existem, como plataformas auto-elevatórias, plataformas de gravidade, plataformas fixas ("*jacket*"), plataformas de pernas de tensão (TLPs), plataformas de pernas articuladas, plataformas de torre estaiada, plataformas de longarina, sistemas de produção flutuantes e estruturas flutuantes muito grandes (ZHANG *et al.*, 2017).

As estruturas de plataformas de petróleo *offshore* estão constantemente sob a ação de forças dinâmicas devido à ação da natureza por toda sua vida útil. Como exemplos de cargas dinâmicas naturais podem ser citados o vento, as ondas marítimas, as correntes de água, o gelo e terremotos (KANDASAMY *et al.*, 2016). Essas cargas dinâmicas geram vibrações nas plataformas que podem resultar na redução da produtividade da plataforma, colocar em risco a segurança dos operadores, afetar a capacidade de manutenção e a operacionalidade da estrutura, além de causar falhas, como falhas nas instalações e falha por fadiga.

Vários componentes das plataformas são compostos por estruturas que se assemelham a estruturas do tipo placa ou casca. Desta forma, podem estar sujeitos a ruído e vibrações, devido às características dessas estruturas. Para contornar estes problemas, o controle passivo vem sendo largamente implementado com sucesso nas plataformas *offshore* nas últimas décadas. Isso se dá, principalmente, devido à sua facilidade e ao menor custo de implementação, eficácia na mitigação de vibrações e por manter a estabilidade e confiabilidade das plataformas *offshore* (ZHANG *et al.*, 2017).

¹ Segundo Reddy (2007), placas finas são aquelas que apresentam uma proporção de espessura por comprimento de $\frac{h}{L} \geq \frac{1}{50}$ e placas espessas de $\frac{h}{L} \geq \frac{1}{20}$. Assim, placas semiespessas são aquelas que apresentam uma proporção de espessura por comprimento entre esses valores, ou seja, $\frac{1}{50} \leq \frac{h}{L} \leq \frac{1}{20}$.

3.2 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Os MVEs têm sido utilizados em várias áreas, como a espacial, a automobilística, a estrutural, a civil e a militar. Isso se dá, em razão de sua ótima capacidade de dissipação de energia, permitindo que sejam aplicados no controle e na redução de vibrações. Para isso, esses materiais, podem ser empregues na construção de diversos dispositivos. Como exemplos destes dispositivo são citados os neutralizadores dinâmicos, os isoladores e as camadas irrestritas e restritas.

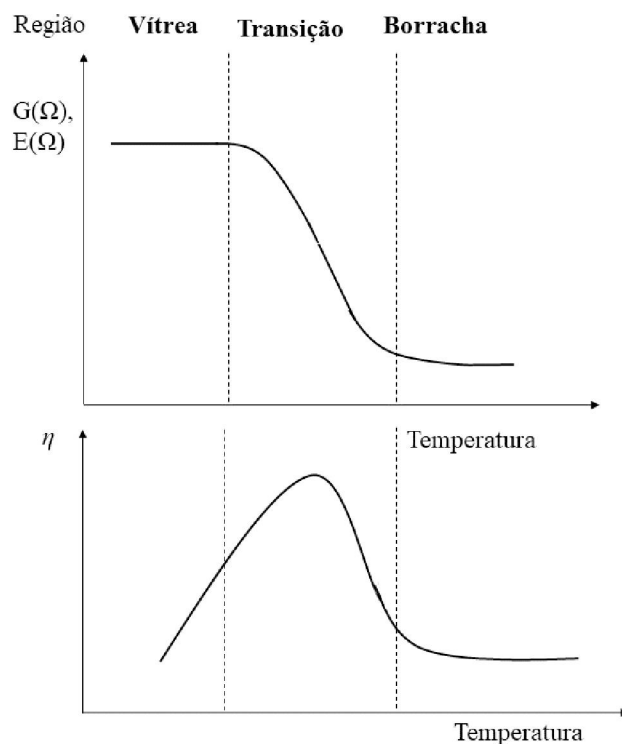
As propriedades dos MVEs lineares, podem ser consideradas como uma mistura das propriedades de materiais elásticos e materiais viscosos (YANG, 2018). Além disso, os MVEs são capazes de armazenar e dissipar energia mecânica, simultaneamente (YUN; YOUN, 2017). As capacidades de dissipação e de armazenamento de energia dos MVEs estão associadas à dois principais parâmetros, o fator de perda (η) e o módulo de elasticidade (E), ou ainda, pelo o módulo de cisalhamento (G) (HAMBRIC *et al.*, 2016).

O comportamento mecânico, incluindo a capacidade de amortecimento dos MVEs, são fortemente dependentes da temperatura e da frequência de operação. O comportamento do MVE relacionado à variação da temperatura pode ser observado na FIGURA 6. Nesta figura, estão apresentados o módulo de elasticidade/cisalhamento (E ou G) e o fator de perda variando com a temperatura e considerando uma frequência fixa. O módulo de elasticidade/cisalhamento é uma função complexa. Além disso, nesta figura existem três regiões bastante características: a vítrea, a de transição e a de borracha. Na região de baixa temperatura, definida como região vítrea, o MVE tem comportamento semelhante ao vidro, muito rígido. Nesta região o módulo de elasticidade (ou de cisalhamento) do MVE normalmente é superior ao valor em outras regiões da curva. Com o aumento da temperatura, o módulo de elasticidade é reduzido fazendo com que o material perca sua rigidez. Ao passo que isso ocorre, o fator de perda aumenta significativamente com o aumento da temperatura. Essa região é denominada como região de transição. Ao chegar no valor mais baixo do módulo de elasticidade, o MVE atinge a região de borracha. Nesta região, o MVE tem comportamento semelhante ao da borracha, muito macio, com fator de perda muito baixo e que varia lentamente com a temperatura (BAZ, 2019).

Mantendo a temperatura constante e variando a frequência, o comportamento do MVE pode ser observado na FIGURA 7. Percebe-se que o MVE enrijece conforme há um aumento na frequência. No entanto, maiores valores do fator de perda ocorrem na região de frequência média. Em baixas frequências, o MVE apresenta comportamento vítreo. As FIGURAS 6 e 7, mostram que o comportamento do MVE em altas frequências é o inverso do comportamento em altas temperaturas. Essa característica fornece a base para o "princípio de superposição da temperatura-frequência", que é utilizado para definir as propriedades dos MVEs (BAZ, 2019).

Dois tipos de ensaios que possibilitam a caracterização do comportamento mecânico dos MVEs são os testes de fluência (FIGURA 8) e de relaxação (FIGURA 9), cujas curvas são

FIGURA 6 – EFEITO DA TEMPERATURA NO MÓDULO DE ARMAZENAMENTO (G OU E) E NO FATOR DE PERDA DO MVE (η) PARA FREQUÊNCIA CONSTANTE



FONTE: A autora (2024).

apresentadas para polímeros termofixos² e termoplásticos³.

Nos testes de fluência (do inglês "*creep*"), FIGURA 8, geralmente, uma tensão de tração ou de cisalhamento uniaxial constante (σ_0) é aplicada em um elemento de material. Com isso, observa-se o comportamento da deformação ao longo do tempo ($\varepsilon(t)$).

Como boa parte dos MVEs apresentam comportamento linear sob pequenas tensões (FINDLEY; DAVIS, 2013), a relação entre tensão e deformação também será linear. E, no caso de um teste de fluência, esta relação é dada por (GUTIERREZ-LEMINE, 2014)

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t), \quad (3.1)$$

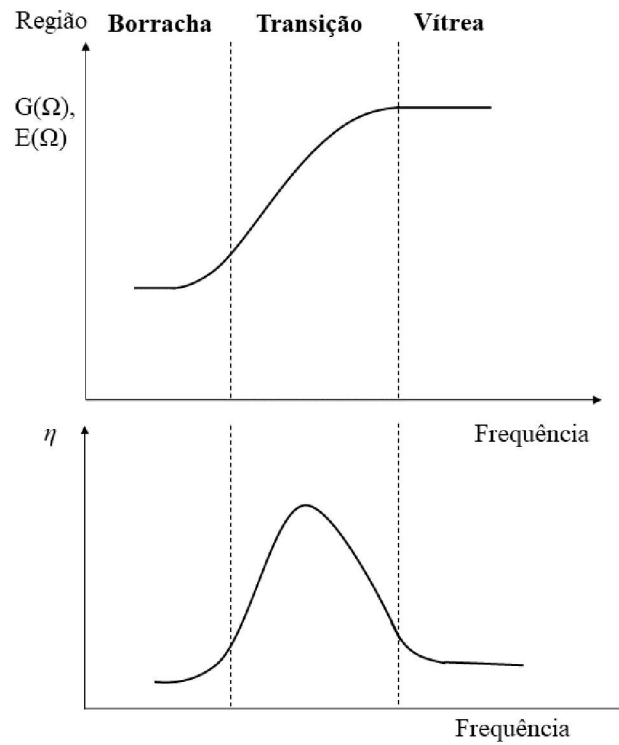
onde a função $J(t)$ é denominada por módulo de fluência, ou seja, é a deformação à fluência por unidade de tensão aplicada e é uma propriedade dependente do material. Tomando um elemento de volume material e aplicando um histórico de tensões $\sigma(t)$, pode-se aplicar o princípio da superposição de Boltzmann⁴, o qual afirma que a soma das saídas de deformações resultantes

² Os polímeros termofixos, também denominados termoendurecíveis, possuem ligações primárias e secundárias entre suas cadeias moleculares. Como o nome já sugere, esses materiais não podem ser fundidos, ou seja, sua rigidez não se altera com a temperatura.

³ Os polímeros termoplásticos tem apenas ligações secundárias entre as cadeias moleculares. Além disso, essa classe de materiais pode ser fundida e moldada, ou seja, esses materiais amolecem quando aquecidos e endurecem quando são resfriados. Quanto a sua cristalinidade, esses materiais podem ser amorfos ou cristalinos

⁴ Ludwig Boltzmann (1844-1906), físico austríaco, conhecido por seu trabalho na termodinâmica estatística.

FIGURA 7 – EFEITO DA FREQUÊNCIA NO MÓDULO DE ARMAZENAMENTO (G OU E) E NO FATOR DE PERDA DO MVE (η) PARA TEMPERATURA CONSTANTE

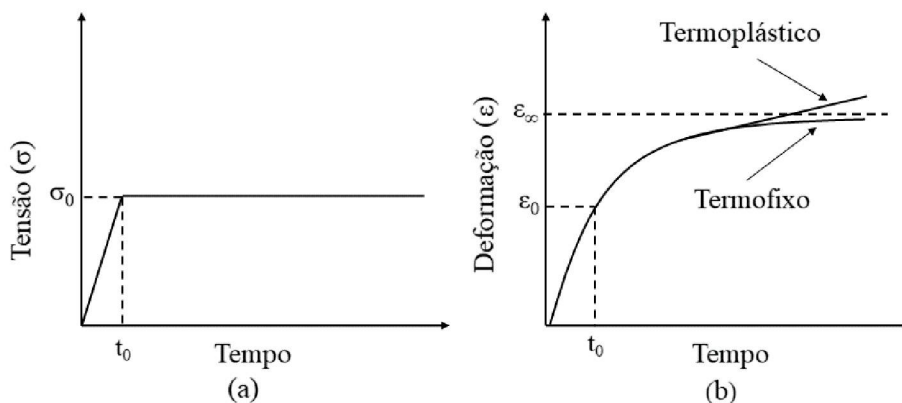


FONTE: A autora (2024).

para cada entrada de tensão é igual à deformação resultante e pode ser escrita como (FINDLEY; DAVIS, 2013)

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.2)$$

FIGURA 8 – CURVA CARACTERÍSTICA EM UM TESTE DE FLUÊNCIA: (A) TENSÃO DE ENTRADA, (B) DEFORMAÇÃO DE SAÍDA



FONTE: A autora (2024).

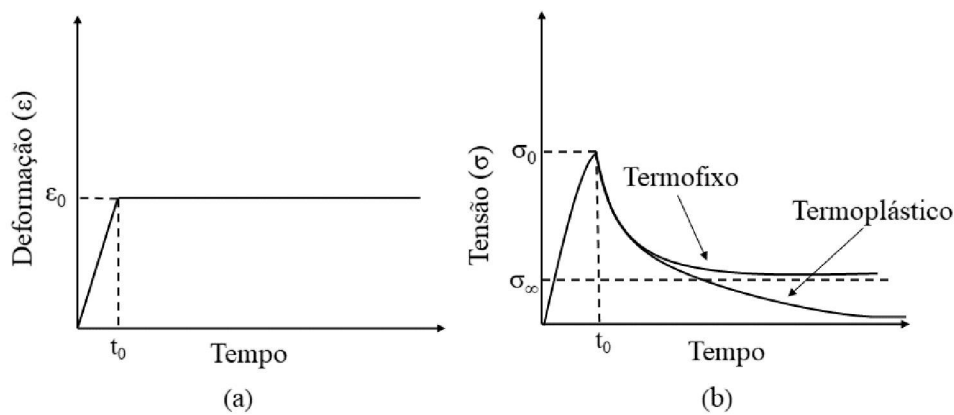
Já em um ensaio de relaxação, FIGURA 9, aplica-se uma deformação constante ao material, (ε_0) e se faz a leitura da tensão ($\sigma(t)$), resultando em

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t), \quad (3.3)$$

onde $R(t)$ é a função módulo de relaxação, representando a tensão por unidade de deformação aplicada. Utilizando o princípio de superposição Boltzmann e considerando o histórico de deformação aplicada $\varepsilon(t)$, a equação da tensão pode ser reescrita como (FINDLEY; DAVIS, 2013)

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.4)$$

FIGURA 9 – CURVA CARACTERÍSTICA EM UM TESTE DE RELAXAÇÃO: (A) DEFORMAÇÃO DE ENTRADA, (B) TENSÃO DE SAÍDA



FONTE: A autora (2024).

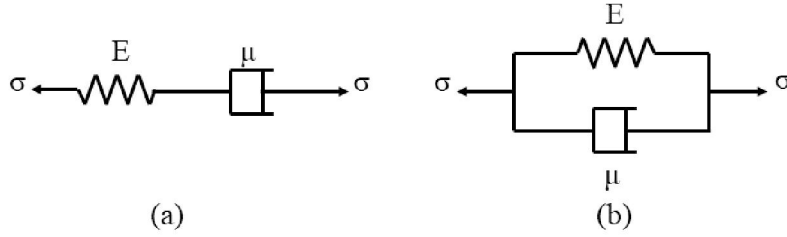
3.2.1 Modelos constitutivos clássicos de MVEs

As propriedades mecânicas dos MVEs devem ser representadas por modelos que constituem ambos os comportamentos, elástico e viscoso. Para isso, entre outros, podem ser utilizados modelos mecânicos constituídos de elementos de mola (elementos de Hooke) e de amortecimento (elemento dissipativo, ou ainda, elemento de Newton). Contudo, o arranjo de molas e amortecedores pode ser realizado de inúmeras formas para representar a resposta do MVE. Dentre as possibilidades, os dois modelos que inicialmente foram desenvolvidos são Maxwell⁵ e Kelvin⁶-Voigt⁷. O modelo mecânico de Maxwell (FIGURA 10 (a)), combina um elemento de mola linear e um elemento de amortecimento viscoso, conectados em série. Por outro lado, no modelo mecânico de Kelvin-Voigt (FIGURA 10 (b)), há um elemento de mola linear e um elemento de amortecimento viscoso combinados em paralelo.

As equações constitutivas para o modelo de Maxwell e Kelvin-Voigt, são apresentadas, respectivamente, pelas equações (3.5) e (3.6) (MAINARDI, 2022),

⁵ James Clerk Maxwell (1831-1879), de nacionalidade escocesa, físico e matemático, desenvolveu um dos primeiros modelos para representar o comportamento do MVE. Se destacou devido ao desenvolvimento da

FIGURA 10 – ARRANJOS DE MOLA E AMORTECEDOR PARA MODELOS DE: (A) MAXWELL E (B) KELVIN-VOIGT



FONTE: A autora (2024).

$$\sigma(t) + \tau_{\sigma} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (3.5)$$

e

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (3.6)$$

Os termos τ_{σ} , μ e E são, respectivamente, o tempo de relaxação, o coeficiente de viscosidade do elemento viscoso e o módulo de elasticidade do elemento de mola. Os termos $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ são as funções de tensão e deformação, dependentes do tempo t (KATSOURINIS; KONTOU, 2019).

Esses modelos, isoladamente, não são suficientes para representar adequadamente o comportamento realístico da maioria dos MVEs. Por exemplo, o modelo de Maxwell não apresenta a taxa de deformação decrescente sob tensão constante, que é uma característica da fluência primária (FINDLEY; DAVIS, 2013). A mesma afirmação pode ser feita em relação ao modelo de Kelvin-Voigt, visto que esse modelo não tem nenhuma resposta elástica instantânea durante o teste de fluência (BRINSON *et al.*, 2008). Além disso, o modelo de Kelvin-Voigt não é capaz de exibir deformação independente do tempo no carregamento (ou descarregamento), e também não descreve deformação permanente após o descarregamento (FINDLEY; DAVIS, 2013).

Outro modelo bastante utilizado para representar o comportamento viscoelástico é o modelo de Zener. Este modelo é um pouco mais elaborado que os outros dois já apresentados. Ele possui um elemento de mola a mais, adicionado paralelamente ao modelo de Maxwell ou em série ao modelo Kelvin-Voigt, conforme é apresentado na FIGURA 11.

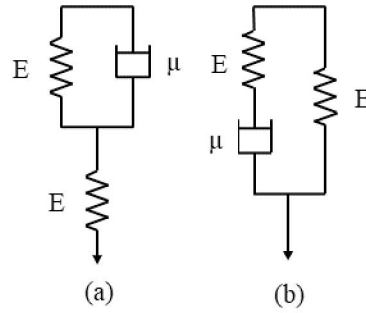
No modelo de Zener, devido à combinação de mais um elemento de mola aos de modelos Maxwell e de Kelvin-Voigt, adicionou-se uma constante positiva devido ao módulo de fluência e também uma constante devido ao módulo de relaxação (MAINARDI, 2022). Genericamente, a equação constitutiva para o modelo de Zener é dada por

forma final da teoria moderna de eletromagnetismo.

⁶ Lord Kelvin (Sir William Thomson (1824-1907)) físico, escocês, teve contribuições importantes na eletricidade e termodinâmica. Conhecido por desenvolver a escala Kelvin de temperatura absoluta.

⁷ Woldemar Voigt (1850-1919), físico alemão contribuiu, principalmente, com a teoria de cristais e introduziu pela primeira vez a definição de tensor.

FIGURA 11 – ARRANJOS DE MOLA E AMORTECEDOR MODELO DE: (A) ZENER E (B) ZENER EQUIVALENTE



FONTE: A autora (2024).

$$\left[1 + \tau_{\sigma} \frac{d}{dt} \right] \sigma(t) = \left[E + \mu \frac{d}{dt} \right] \varepsilon(t). \quad (3.7)$$

Percebe-se que ambos os modelos, Maxwell, Kelvin-Voigt e Zener, são modelos compostos por elementos de mola e amortecedor viscoso, e o que os diferencia um dos outros é o arranjo e a quantidade destes elementos. Assim, pode-se afirmar que ambos respeitam a mesma equação constitutiva, dada por

$$\left[1 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{d^i}{dt^i} \right] \sigma(t) = \left[a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \frac{d^j}{dt^j} \right] \varepsilon(t), \quad (3.8)$$

onde as constantes a_0 , a_j ($j = 1, \dots, m$), e b_i ($i = 1, \dots, n$) são parâmetros associados ao modelo reológico adotado, $\sigma(t)$ é a função de tensão, $\varepsilon(t)$ é a função de deformação e $\frac{d^i}{dt^i}$ é o operador diferencial de ordem inteira. Portanto, m e n assumem valores inteiros, em que $m = n$ ou $m = n + 1$. A diferença de um modelo para outro, está na quantidade de termos dentro do somatório. Isto dependerá da quantidade de elementos de mola e amortecedores viscosos utilizados para construir o modelo mecânico. A equação (3.8), é denominada de equação constitutiva do MVE baseada em derivadas inteiras.

3.2.2 Modelos constitutivos de MVEs baseados em derivadas fracionárias

Os modelos constitutivos de MVEs baseados em derivadas inteiras necessitam de um elevado número de termos no somatório para obter uma descrição razoável do comportamento real do material (ESPÍNDOLA *et al.*, 2005). Uma alternativa para reduzir esse número de termos é pela utilização dos conceitos de cálculo fracionário. Com estes modelos matemáticos, as ordens de diferenciação e integração assumem valores não inteiros e não necessariamente fracionários.

A equação constitutiva para MVEs definida a partir de derivadas fracionárias permite representar com relativa fidelidade o comportamento de materiais reológicos com apenas quatro ou cinco parâmetros (ESPÍNDOLA *et al.*, 2005). As equações de ordem inteira e de ordem

fracionárias podem parecer muito semelhantes, porém, na prática, geram resultados extremamente diferentes. As teorias do comportamento molecular de MVEs estão intimamente ligadas à formulação de derivadas e integrais fracionárias (BAGLEY; TORVIK, 1983; ESPÍNDOLA *et al.*, 2008). Além disso, modelos baseados em derivadas de ordem fracionária podem permitir um melhor ajuste da curva característica dos MVEs por meio da alteração da ordem de diferenciação das derivadas (PRITZ, 1996). Tais fatos, refletem na capacidade dos modelos de ordem fracionária representarem tão precisamente o comportamento dos MVEs, mesmo utilizando poucos parâmetros (ESPÍNDOLA *et al.*, 2008).

Um dos cientistas que propôs a equação constitutiva dos MVEs para derivadas fracionárias foi Scott-Blair⁸. A utilização da equação constitutiva com derivadas fracionárias na viscoelasticidade linear leva a uma generalização dos modelos mecânicos clássicos, nos quais o elemento de amortecimento (elemento de Newton) é substituído por um elemento mais geral, denominado de elemento de Scott-Blair, com ordem de diferenciação β , onde $\beta \in (0,1)$ (MAINARDI, 2022).

É possível obter as equações constitutivas de ordem fracionária para os modelos clássicos da viscoelasticidade utilizando a composição de elementos de Hooke (elemento de mola) e elementos dissipativos de Scott-Blair. Para isso, substitui-se a derivada de ordem unitária dos modelos clássicos, pela derivada de ordem β (MAINARDI, 2022). Para os modelos clássicos, a forma generalizada da equação constitutiva de ordem fracionária é dada por

$$\left[1 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{d^{\beta_i}}{dt^{\beta_i}} \right] \sigma(t) = \left[a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^{\beta_i}}{dt^{\beta_i}} \right] \varepsilon(t), \quad (3.9)$$

com $\beta_i = i + \beta - 1$.

O modelo de Zener, necessita de apenas quatro parâmetros para descrever o comportamento dinâmico de MVEs em amplas faixas de frequência (PRITZ, 1996). Utilizando $m = n = 1$, a equação (3.9) pode ser reescrita, para o modelo de Zener, como

$$\left[1 + b_1 \frac{d^{\beta_1}}{dt^{\beta_1}} \right] \sigma(t) = \left[a_0 + a_1 \frac{d^{\beta_1}}{dt^{\beta_1}} \right] \varepsilon(t), \quad (3.10)$$

onde os quatro parâmetros característicos do material a_0 , a_1 , b_1 e β_1 precisam ser determinados experimentalmente para o MVE dado. Desta forma, a partir do modelo de Zener, o comportamento dinâmico dos MVEs pode ser determinado.

3.2.3 Comportamento dinâmico dos MVEs

A partir de agora, as equações e propriedades referentes aos MVEs são obtidas para o modelo de Zener fracionário, modelo o qual é utilizado ao longo deste trabalho. Nesse sentido,

⁸ George William Scott Blair (1902-1987), químico de origem britânica, ficou conhecido devido suas contribuições na reologia.

como tem-se o interesse no comportamento dinâmico da estrutura no domínio da frequência, é aplicada a transformada de Fourier à equação (3.10) e feita uma renomeação de variável $\beta_1 = \beta$, resultando em

$$\sigma(\Omega) + b_1(i\Omega)^\beta \sigma(\Omega) = a_0 \varepsilon(\Omega) + a_1(i\Omega)^\beta \varepsilon(\Omega), \quad (3.11)$$

onde Ω é a frequência e é dada em rad/s, e $i = \sqrt{-1}$. Definindo a relação entre tensão e deformação, tem-se o módulo de elasticidade complexo do material (PRITZ, 1996)

$$E(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{a_0 + a_1(i\Omega)^\beta}{1 + b_1(i\Omega)^\beta}. \quad (3.12)$$

Renomeando algumas variáveis onde $a_0 = E_0$ é o módulo de elasticidade dinâmico quando a frequência tende a zero, $a_1 = E_\infty b_1$, sendo que E_∞ é o módulo dinâmico quando a frequência tende ao infinito e $b_1 = (b_0 \alpha_T(T))^\beta$ é a constante do tempo de relaxação do material. A constante b_0 é determinada para a temperatura de referência T_0 e $\alpha_T(T)$ é conhecido como fator de deslocamento (FERRY, 1980). Adotando essas novas definições a equação (3.12) pode ser reescrita conforme

$$E(\Omega) = \frac{E_0 + E_\infty b_1(i\Omega)^\beta}{1 + b_1(i\Omega)^\beta}, \quad (3.13)$$

onde os termos E_0 , E_∞ , b_1 e β são os quatro parâmetros característicos de cada material e devem ser obtidos experimentalmente. O módulo de cisalhamento complexo também pode ser definido, conforme (ESPÍNDOLA *et al.*, 2005)

$$G(\Omega) = \frac{G_0 + G_\infty b_1(i\Omega)^\beta}{1 + b_1(i\Omega)^\beta}, \quad (3.14)$$

onde G_0 e G_∞ são os módulos de cisalhamento dinâmicos determinados quando as frequências que tendem a zero e ao infinito, respectivamente.

Os módulos de elasticidade e de cisalhamento do MVE são funções complexas. Portanto, ambos podem ser divididos em suas parcelas real e imaginária, na forma (FERRY, 1980)

$$E_C(\Omega) = E_R(\Omega) + iE_I(\Omega) \quad (3.15)$$

e

$$G_C(\Omega) = G_R(\Omega) + iG_I(\Omega). \quad (3.16)$$

Nesse caso, $E_R(\Omega)$ e $E_I(\Omega)$ são, respectivamente, as parcelas real e imaginária do módulo de elasticidade complexo, $E_C(\Omega)$. $G_R(\Omega)$ e $G_I(\Omega)$ são as parcelas real e imaginária do módulo de cisalhamento complexo, $G_C(\Omega)$. As parcelas reais dos módulos de cisalhamento ($G_R(\Omega)$) e de

elasticidade ($E_R(\Omega)$) são denominadas de módulo de armazenamento, as quais estão associadas à capacidade do material de armazenar energia. As parcelas imaginárias ($G_I(\Omega)$) e ($E_I(\Omega)$) são denominadas de módulo de perda, e estão associadas à sua capacidade dissipar energia.

Outra maneira de representar os módulos de elasticidade e cisalhamento complexos é dada pelas equações (FERRY, 1980)

$$E_C(\Omega) = E_R(\Omega)(1 + \eta_E(\Omega)) \quad (3.17)$$

e

$$G_C(\Omega) = G_R(\Omega)(1 + \eta_G(\Omega)), \quad (3.18)$$

sendo que $\eta_E(\Omega)$ e $\eta_G(\Omega)$ são os fatores de perda do material, dados pela relação entre os módulos de perda e armazenamento e são dados por

$$\eta_E = \frac{E_I(\Omega)}{E_R(\Omega)} \quad (3.19)$$

e

$$\eta_G = \frac{G_I(\Omega)}{G_R(\Omega)}. \quad (3.20)$$

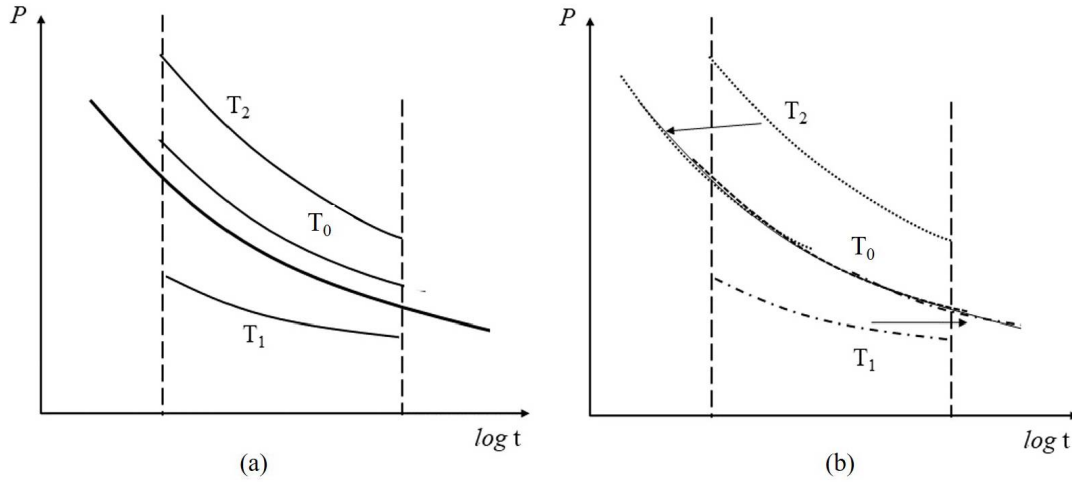
3.2.4 Influência da temperatura em MVEs

Os módulos de elasticidade, de cisalhamento e várias outras propriedades dos MVEs são dependentes do tempo e da temperatura, como por exemplo o módulo de relaxação, o módulo de fluência, as resistências à fratura e à tração. Devido a isso, para se caracterizar uma propriedade dependente do tempo e temperatura, seria necessário que fossem realizados vários testes com MVEs e em diferentes temperaturas constantes. O mesmo deveria ser feito para propriedades dependentes da temperatura e frequência. Contudo, esse tipo de caracterização das propriedades viscoelásticas é demorada, cara e, frequentemente, impraticável.

Nesse sentido, para determinada propriedade do MVE, o comportamento desse material é analisado em pequenos intervalos de tempo. E para cada intervalo de tempo as curvas geradas nos testes são armazenadas. Como por exemplo, na FIGURA 12 (a), na qual contém quatro curvas da mesma propriedade genérica, P . As três curvas menores são obtidas para menores intervalos de tempo de observação da propriedade e correspondem às temperaturas T_1 , T_2 e T_0 . A quarta curva é obtida em um intervalo de tempo maior T_0 (GUTIERREZ-LEMINI, 2014).

Na FIGURA 12 (b), realiza-se o deslocamento das curvas das temperaturas T_1 e T_2 sobre a curva da temperatura T_0 . Observa-se, que mudando criteriosamente os dados coletados nos testes para diferentes temperaturas e para curtos intervalos de tempo, é possível obter a função da propriedade do material em um das temperaturas de teste, que seria válida para um maior intervalo de tempo. Esse procedimento é denominado de superposição de tempo-temperatura (GUTIERREZ-LEMINI, 2014).

FIGURA 12 – (A) PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS MEDIDAS EM CURTOS INTERVALOS DE TEMPO EM DIFERENTES TEMPERATURAS. (B) PROCEDIMENTO DE DESLOCAMENTO DA TEMPERATURA



FONTE: A autora (2024).

Como se percebe, ocorrem deslocamentos nas curvas da propriedade devido às mudanças de temperatura. Para modelar esse comportamento do deslocamento da temperatura e evitar que sejam realizados muitos testes, pode-se utilizar alguns dos modelos matemáticos propostos na literatura. Uma das possibilidades para descrever o comportamento de translação da temperatura-frequência, e talvez a mais utilizada, é o modelo de WLF (Williams–Landel–Ferry), dado por (GUTIERREZ-LEMINI, 2014)

$$\log_{10} \alpha_T(T) = \frac{-\theta_1(T - T_0)}{(\theta_2 + T - T_0)}, \quad (3.21)$$

onde θ_1 e θ_2 são constantes do material obtidas experimentalmente, T_0 é a temperatura de referência, T é a temperatura de trabalho do MVE e $\alpha_T(T)$ é uma constante definida como um fator de deslocamento que descreve a dependência dos tempos de relaxação em relação à temperatura (HAMBRIC *et al.*, 2016). Considerando os efeitos de temperatura e frequência a equação do módulo de elasticidade complexo, equação (3.13) pode ser reescrita como:

$$E(\Omega, T) = \frac{E_0 + E_\infty \phi_0 (i\Omega_R)^\beta}{1 + \phi_0 (i\Omega_R)^\beta}, \quad (3.22)$$

onde $\phi_0 = b_0^\beta$ e $\Omega_R = \Omega \alpha_T(T)$, conhecida como frequência reduzida. Esta equação, definida para o Ω_R permite quantificar a relação entre os efeitos da frequência de excitação e da temperatura de trabalho do MVE. Isso permite que as características viscoelásticas em diferentes temperaturas possam ser relacionadas entre si por mudanças nos valores das frequências de excitação (CUNHA-FILHO *et al.*, 2016). Como, a temperatura de trabalho do MVE é mantida fixa e constante ao longo desse trabalho, o termo referente a temperatura é omitido nas equações que se referem às propriedades obtidas para esse material.

3.3 TEORIA DE FLEXÃO EM PLACAS

A denominação de placa é dada a um elemento estrutural plano, que está submetido a carregamentos transversais que causam principalmente deformações por flexão (VENTSEL *et al.*, 2002). A espessura da placa pode ser considerada muito pequena quando comparada com as outras dimensões, na maioria dos casos, na ordem de grandeza de um décimo das demais dimensões (REDDY, 2007). Ao fazer esta consideração, muitas vezes as placas não precisam ser dimensionadas com equações tridimensionais da teoria da elasticidade. Assim, carregamentos transversais como deformações, deslocamentos e tensões podem ser determinadas por análise bidimensional, levando a uma grande simplificação no problemas de placas (BLAAUWENDRAAD, 2012).

Estruturas contendo placas planas são utilizadas em vários ramos estruturais, nas áreas da mecânica, aeroespacial, naval, petrolífera, entre outras. Devido a sua grande importância no desenvolvimento industrial e tecnológico, várias teorias surgiram para estudo do comportamento de placas e laminados. Segundo Liew *et al.* (2019), o comportamento em deformação de placas e cascas laminadas podem ser estudadas, frequentemente, por quatro teorias: teoria da elasticidade tridimensional, teorias de camada única equivalentes (TCUE), teorias zigue-zagues (ZZ) e teorias de camadas ou teoria de camadas discretas (TCD).

A teoria baseada na elasticidade tridimensional trata a estrutura laminada como sólidos 3D, sem qualquer consideração a respeito da divisão em camadas. São teorias altamente dispendiosas computacionalmente (LIEW *et al.*, 2019).

Nas teorias zigue-zagues (ZZ), é suposto que o campo de deslocamentos é uma superposição do campo de deslocamentos global de primeira ordem, segunda ordem ou ordem superiores. Posteriormente, são impostas condições de deslocamentos e/ou continuidade de tensões nas interfaces das camadas. Uma vantagem destas teorias é que o número de variáveis da equação cinemática não depende do número de camadas. Contudo, para uma análise precisa de tensões transversais é necessária a utilização de equações constitutivas 3D (LIEW *et al.*, 2019). Para alguns autores, não há distinção entre as teorias ZZs e TCDs.

Considerando as teorias de camadas discretas, ou teoria "*layerwise*" o campo de deslocamentos é expandido em cada camada do laminado (REDDY, 1990), a qual pode ser modelada independentemente das demais. As teorias multicamadas, permitem que os deslocamentos no plano variem ao longo da espessura do laminado, ou seja, elas fornecem o comportamento de "zigue-zague" dos deslocamentos ao longo da espessura das camadas (REDDY, 2003). Nas teorias de camadas que se baseiam em deslocamentos, a continuidade do deslocamento nas interfaces entre as camadas é imposta por meio de funções de deslocamento ou da adição de equações de restrição nas interfaces das camadas (GUO *et al.*, 2014).

As teorias de camada única equivalente são aquelas nas quais um laminado heterogêneo composto por várias camadas é tratado como sendo composto por uma única camada homogênea. Também, é considerado que seu comportamento constitutivo possa ser reduzido de um estado tridimensional para um estado bidimensional. Ou seja, o material do laminado é representado

como uma única camada equivalente com propriedades materiais equivalentes. Isso é possível devido às suposições realizadas sobre a cinemática das deformações ao longo da espessura do laminado, na qual considera-se que o campo de deslocamentos (ou campo de tensões) é uma combinação de funções lineares da coordenada da espessura. Como exemplos de teorias de camada única podem ser citadas: a teoria clássica de placas (TCP), também denominada por teoria de placas de Kirchhoff, a teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO) e teorias cisalhantes de ordem superiores (TCOS) (REDDY, 1990; REDDY, 2003; LIEW *et al.*, 2019).

A teoria de camada única equivalente, apesar de apresentar baixo custo computacional e ser bastante simples, apresenta bons resultados para laminados finos. Já para laminados espessos, conforme aumenta a espessura do laminado, os resultados obtidos se tornam imprecisos. Essa teoria, muitas vezes se torna incapaz de descrever com precisão as respostas de tensão e deformação nas proximidades de descontinuidades geométricas ou de material, ou em regiões de elevados carregamentos (REDDY, 2003).

Amplas revisões da bibliografia relativas à utilização das quatro teorias citadas, em placas e cascas são apresentadas nos trabalhos de Kreja (2011), Khandan *et al.* (2012), Caliri *et al.* (2016), Abrate e Sciuva (2017), Kulkarni *et al.* (2018), Irfan e Siddiqui (2019) e Li (2021).

Neste trabalho, utiliza-se a teoria de placa e casca em camadas desenvolvida por Moreira *et al.* (2006), em que cada camada é modelada com base na teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO) seguindo as hipóteses de Reissner-Mindlin. A formulação apresentada pela teoria é adequada para modelagem dinâmica de placas laminadas com núcleo macio, como é o caso de placas laminadas com núcleo de MVE. A teoria definida pelos autores pode ser aplicada a placas com n_c números de camadas.

A **teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO)**, também denominada como teoria de placas moderadamente espessas (BHASKAR; VARADAN, 2021), é uma extensão da teoria clássica de placas (TCP) (ou teoria de Kirchhoff), na qual inclui-se uma hipótese considerando a deformação transversal por cisalhamento. As equações governantes da placa desenvolvidas pela teoria de Kirchhoff, são obtidas a partir das deflexões transversais da placa $w(x,y)$ e por meio das seguintes hipóteses (SZILARD, 2004):

- (1) O material da placa é homogêneo, isotrópico, linear e elástico. Dessa forma, satisfaz a Lei de Hooke generalizada;
- (2) A tensão normal na direção transversal, σ_{zz} , normal ao plano médio, é desprezivelmente pequena quando comparada às tensões normais nas direções que caracterizam o plano da placa, σ_{xx} e σ_{yy} ;
- (3) A placa é inicialmente plana, com espessura, h pequena quando comparada as demais dimensões da placa. Ou seja, a menor dimensão lateral da placa é pelo menos 10 vezes superior ao valor da espessura;

- (4) As deflexões transversais $w(x,y)$ são pequenas quando comparadas à espessura da placa; As deflexões da placa obedecem à hipótese de pequenas deformações e deslocamentos, com limite máximo de um décimo da espessura da placa;
- (5) A deformação sofrida pela superfície do plano médio é pequena, podendo ser desprezada;
- (6) Seções normais à superfície média antes da deformação permanecem planas e normais após a deformação e permanecem inextensíveis. Isso implica que as deformações cisalhantes γ_{xz} e γ_{yz} são desprezadas e ε_{zz} é omitida;

A TCP apresenta bons resultados quando aplicada a placas finas, porém sua precisão é reduzida com o aumento da espessura da placa, superestimando as frequências naturais e cargas de flambagem em placas moderadamente espessas. Esses problemas surgem devido à negligência dos efeitos das deformações causadas pelo cisalhamento transversal (suposição 6). Ou seja, na TCP, a deformação é apenas consequência da flexão e do alongamento no plano. Essas dificuldades tornaram necessário o desenvolvimento de teorias mais refinadas que melhorassem os resultados em placas moderadamente espessas (SZILARD, 2004).

Nesse sentido, E. M. Reissner⁹ e R. D. Mindlin¹⁰ desenvolveram uma hipótese que abrange as placas moderadamente espessas, denominada hipótese de Reissner-Mindlin, também conhecida como teoria de primeira ordem. Nesta hipótese, apenas os termos de primeira ordem, dependentes da espessura são considerados nas expansões de deslocamentos e deformações. Além disso, consideram-se, também, as deformações transversais causadas por cisalhamento, que é a principal diferença entre as duas teorias, TCP e TCPO. Assim, a teoria para placas semiespessas abrange as cinco primeiras hipóteses de Kirchhoff e a hipótese de Reissner-Mindlin, dada por

- (6) Os filamentos transversais normais ao plano médio da placa não deformada permanecem retos e inextensíveis, porém, podem não necessariamente, se manter normais à superfície do plano médio da placa após a deformação (REDDY, 2007; BHASKAR; VARADAN, 2021).

Na FIGURA 13 é apresentada uma configuração deformada genérica da placa com os filamentos materiais transversais definidos pelas hipóteses de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin. O campo de deslocamentos pode ser obtido por meio do método semi-inverso utilizado por Reddy (2007), o qual supõe que o campo de deslocamentos satisfaz as equações da elasticidade e é dado na forma

$$u_i(x,y,z,t) = \sum_{j=0}^N (z)^j \phi_i^j(x,y,t), \quad (3.23)$$

⁹ Eric Max Reissner (1913-1996), matemático e engenheiro de nacionalidade alemã, desenvolveu um modelo de placas que inclui os efeitos de deformações cisalhantes transversais.

¹⁰ Raymond David Mindlin (1906-1987), engenheiro que contribuiu significativamente nas teorias da elasticidade e mecânica aplicada.

onde ϕ_i^j são funções desconhecidas das coordenadas da superfície (x,y) e do tempo, t . A forma específica da equação (3.23) depende da cinemática da deformação definida para o problema. A teoria de Kirchhoff se baseia na suposição da inextensibilidade do filamento transversal à superfície média da placa ($\varepsilon_{zz} = 0$) e na suposição de que as seções normais à superfície média antes da deformação se mantêm normais após a deformação ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). Para a teoria de Reissner-Mindlin, a suposição de inextensibilidade ($\varepsilon_{zz} = 0$) do filamento é mantida, mas os efeitos das deformações transversais por cisalhamento são considerados (ou seja, γ_{xz} e γ_{yz} podem ser diferentes de zero). Assim, a partir da FIGURA 13 e das premissas apresentadas, é possível definir os campos de deslocamentos u e v em função das rotações ϕ_x e ϕ_y como (REDDY, 2007):

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= z\phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= z\phi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde ϕ_x e ϕ_y são as rotações do filamento material transversal ao plano médio da placa em torno dos eixos y e x , respectivamente. Vale notar que ϕ_x e ϕ_y não obedecem a regra da mão direita. Porém, em alguns textos da literatura, a regra da mão direita é utilizada, e então os termos são substituídos por: $\beta_x = \phi_y$ e $\beta_y = -\phi_x$. Na teoria de Kirchhoff, os termos ϕ_x e ϕ_y correspondem a $-\partial w/\partial x$ e a $-\partial w/\partial y$, e u , v e w são as componentes do vetor de deslocamentos de um ponto qualquer da placa nas direções x , y e z , respectivamente. Já na teoria de Reissner-Mindlin, os termos ϕ_x e ϕ_y são iguais a $(\gamma_{xz} + \partial w/\partial x)$ e $(\gamma_{yz} + \partial w/\partial y)$, respectivamente, onde os termos $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ representam a variação da inclinação do plano médio e os termos γ_{xz} e γ_{yz} representam a rotação, devido à deformação cisalhante, do filamento transversal, que nem sempre é perpendicular ao plano médio deformado. Esses últimos (γ_{xz} , γ_{yz}) são o diferencial da teoria de Reissner-Mindlin em relação a teoria de Kirchhoff (REDDY, 2007). As quantidades $\phi_x(x,y)$ e $\phi_y(x,y)$ e $w(x,y)$ são denominados deslocamentos generalizados.

Para obter as equações diferenciais que descrevem o comportamento de estruturas do tipo placa, é necessário utilizar as três equações básicas da mecânica do contínuo na seguinte ordem: equações da cinemática, equações constitutivas e as equações de equilíbrio. As equações da cinemática fornecem as relações entre os deslocamentos e deformações da placa. Com as relações constitutivas determinam-se as tensões às quais a placa está sujeita, além dos momentos de torção e flexão e das forças de cisalhamento. E, por fim, as equações de equilíbrio fornecem as equações diferenciais que governam o comportamento da placa.

Dessa forma, admitindo as hipóteses de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, as equações cinemáticas são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

É importante ressaltar que as deformações ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} são dependentes das coordenadas em x , y e z , variam linearmente com a espessura e são nulas no plano médio ($z=0$). Já as deformações cisalhantes γ_{xz} e γ_{yz} , que são associadas as tensões de cisalhamento, são independentes da coordenada z , portanto constantes ao longo da espessura da placa (BLAAUWENDRAAD, 2012).

Como a componente de tensão σ_{zz} é negligenciada, as relações constitutivas são:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson do material. Substituindo o campo de deformações, equação (3.26), na equação (3.27) tem-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\
\sigma_{yy} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
\tau_{xy} &= Gz \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
\tau_{xz} &= G \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} &= G \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de cisalhamento do material. Por meio das equações 3.28, observa-se que as tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} , e a tensão cisalhante τ_{xy} variam linearmente com a espessura. Além disso, as tensões normais apresentam valor de máximo nas superfícies superior e inferior da camada, e valor igual a zero na superfície média da camada (SZILARD, 2004; BLAAUWENDRAAD, 2012).

Nesta teoria, a coordenada z não deve aparecer nas equações finais de tensões. Para resolver isso, pode-se utilizar as resultantes adequadamente apropriadas das tensões na forma de integrais em função da coordenada z . As ações resultantes decorrentes das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} é causar flexão e torção da placa. Assim, os esforços resultantes associados a essas tensões são os momentos de flexão e de torção por unidade de comprimento, conforme (BHASKAR; VARADAN, 2021)

$$(m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z dz. \quad (3.29)$$

Já as tensões de cisalhamento transversais, τ_{xz} e τ_{yz} , geram esforços cortantes por unidade de comprimento dados por

$$(q_{xz}, q_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz. \quad (3.30)$$

Observa-se que, segundo o modelo de placas semiespessas aqui apresentado, a distribuição de tensão de cisalhamento transversal é constante ao longo da espessura. No entanto, a distribuição de tensões de cisalhamento transversal em placas moderadamente espessas é parabólica. Uma forma simples de corrigir essa incoerência é multiplicando a equação (3.30) por um *fator de correção de cisalhamento*, k^2 . A adição desta constante na equação, visa obter a energia de deformação da placa, o mais próximo quanto possível da energia que seria obtida pela análise tridimensional (BHASKAR; VARADAN, 2021). Desta forma, a equação (3.30) pode ser reescrita como

$$(q_{xz}, q_{yz}) = k^2 \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz. \quad (3.31)$$

Mindlin observou que os valores do fator k são funções lineares do coeficiente de Poisson, ν , e comparando sua teoria com a elasticidade tridimensional, forneceu duas estimativas para tal fator. A primeira, compreende os valores $0,75 \leq k^2 \leq 0,91$ para coeficientes de Poisson de $0 \leq \nu \leq 0,5$. A segunda estimativa é baseada na velocidade de onda de cisalhamento $k^2 = \pi/12 = 0,822$. Além destas estimativas, encontra-se na literatura uma expressão mais exata para o fator de correção de cisalhamento, também baseada no coeficiente de Poisson, dada por $k^2 = 20(1+\nu)/(24+25\nu+\nu^2)$. Esta considera a variação parabólica das tensões de cisalhamento (SZILARD, 2004).

Para placas homogêneas e isotrópicas, os valores de k^2 utilizados convencionalmente são $5/6$ e $\pi^2/12$, como originalmente proposto por Reissner-Mindlin (BHASKAR; VARADAN, 2021). As equações resultantes da integração da equação (3.29) se tornam:

$$\begin{aligned} m_{xx} &= D_f \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ m_{yy} &= D_f \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\ m_{xy} &= \frac{D_f(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde o termo $D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ é denominado rigidez à flexão da placa, e tem como unidade [N.m]. Quanto às equações resultantes da integração da equação (3.31), tem-se:

$$\begin{aligned} q_{xz} &= D_c \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ q_{yz} &= D_c \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde o termo $D_c = \frac{Ehk^2}{2(1+\nu)}$ é denominado de rigidez ao cisalhamento e sua unidade é [N/m].

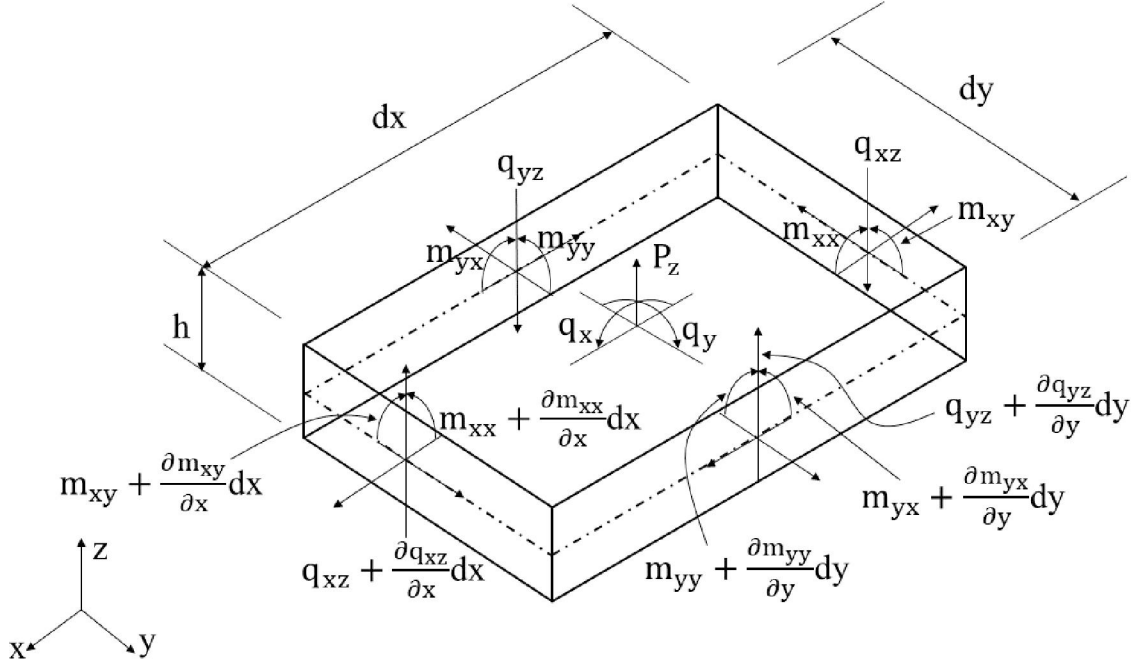
A última etapa para obtenção das equações governantes da placa, é a aplicação das equações de equilíbrio. Para isso, é considerado um elemento infinitesimal de placa com dimensões dx por dy e espessura h , conforme a FIGURA 14. O elemento está sujeito a uma carga distribuída transversal de intensidade P_z por unidade de área, e duas cargas distribuídas de momentos q_x e q_y , as quais realizam momentos no plano y-z e x-z, respectivamente. Ambos os momentos são dados por unidade de comprimento. Além disso, o elemento de volume está sujeito a momentos de flexão, m_{xx} e m_{yy} , momento torçor, $m_{xy} = m_{yx}$ e cargas de cisalhamento transversal, q_{xz} e q_{yz} , decorrentes das tensões em suas bordas.

Realizando a análise dos carregamentos nas direções x, y e z, e fazendo as simplificações necessárias, as equações de equilíbrio podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + P_z &= 0 \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + q_y - q_{yz} &= 0 \\ \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + q_x - q_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Substituindo as equações (3.32) e (3.33) na equação (3.34), têm-se as equações diferenciais governantes do fenômeno de flexão de placa segundo o modelo de placa semiespessa de Reissner-Mindlin:

FIGURA 14 – ELEMENTO INFINITESIMAL DE PLACA SUJEITO A CARREGAMENTOS DE FORÇAS E MOMENTOS



FONTE: Adaptado de Blaauwendraad (2012).

$$\begin{aligned}
 D_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_c \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + P_z &= 0 \\
 -D_c \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{D_f}{2} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right] + q_x &= 0 \\
 -D_c \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{D_f}{2} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right] + q_y &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

ou ainda como:

$$\begin{aligned}
 D_c (\nabla^2 w - \psi) + P_z &= 0 \\
 -D_c \left(-\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{D_f}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \phi_x + (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + q_x &= 0 \\
 -D_c \left(-\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{D_f}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \phi_y + (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + q_y &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde o termo $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ e o termo $\psi = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)$.

O sistema de equações da equação (3.36) é de sexta ordem, portanto três condições de contorno podem ser satisfeitas em qualquer aresta. As condições de contorno utilizadas frequentemente são (BHASKAR; VARADAN, 2021):

(a) Aresta simplesmente apoiada:

Em $x = \text{constante}$: $w(x,y) = m_{xx} = 0$ com $m_{xy} = 0$, ou $\phi_y = 0$;

Em $y = \text{constante}$: $w(x,y) = m_{yy} = 0$ com $m_{xy} = 0$, ou $\phi_x = 0$;

(b) Aresta fixa:

Em $x = \text{constante}$: $w(x,y) = \phi_x = 0$ com $m_{xy} = 0$, ou $\phi_y = 0$;

Em $y = \text{constante}$: $w(x,y) = \phi_y = 0$ com $m_{xy} = 0$, ou $\phi_x = 0$;

(c) Arestas livres:

Em $x = \text{constante}$: $q_{xz} = m_{xx} = m_{xy} = 0$

Em $y = \text{constante}$: $q_{yz} = m_{yy} = m_{xy} = 0$;

As equações diferenciais dadas pelas equações (3.35) (ou pelas equações (3.36)) são denominadas de equações governantes da placa segundo a teoria Reissner-Mindlin. Em elementos finitos, essas equações são denominadas de formulação forte. A partir dessas equações obtém-se a forma integral a qual é denominada de forma fraca. Esta formulação é utilizada para formular o elemento de placa por elementos finitos (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

3.4 VIBRAÇÕES EM PLACAS

As equações do movimento de qualquer sistema dinâmico podem ser descritas utilizando a segunda lei do movimento de Newton por meio da adição vetorial dos esforços que agem sobre a estrutura. No entanto, à medida que a estrutura se torna mais complexa, a utilização desta abordagem se torna mais complexa (PETYT, 2010). Desta forma, a aplicação do princípio de Hamilton¹¹ se apresenta como uma alternativa para este problema, possibilitando a obtenção da equação do movimento por meio da utilização de quantidades escalares de energia. Além disso, este princípio pode ser utilizado em qualquer tipo de sistema: discreto, com vários graus de liberdade ou sistemas contínuos (PETYT, 2010).

3.4.1 Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton é uma generalização do princípio dos trabalhos virtuais aplicado à dinâmica. Para tanto, é considerado que o sistema dinâmico é caracterizado por três funções de energia: a energia cinética, EC , a energia potencial, EP , e o trabalho realizado por forças externas, W (REDDY, 2007). Este princípio estabelece que a partir de todas as trajetórias possíveis de serem realizadas por uma partícula material, saindo de sua posição no instante de tempo t_1 para a posição no tempo t_2 , esta terá como caminho real aquele para o qual a integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(EC - EP)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (3.37)$$

¹¹ William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático, físico e astrônomo, fez grandes contribuições nos campos da ótica, dinâmica e álgebra e grande influente na mecânica quântica e teoria quântica de campos.

é mínima (REDDY, 2007), onde δ é o operador variacional.

As forças externas que agem sobre a estrutura podem ser conservativas ou não conservativas. No caso do trabalho realizado pelas forças conservativas (tais como forças devido à gravidade, alongamento de uma mola elástica e deformação de um corpo elástico), este é independente do caminho e depende somente das posições iniciais e finais, respectivamente, instantes de tempo t_1 e t_2 da partícula. Este trabalho é reversível e pode ser convertido em energia cinética ou armazenado como energia potencial. Por outro lado, o trabalho realizado por forças não conservativas (como forças de atrito, arrasto, amortecimento, e deformação de corpo inelástico) depende do caminho da partícula e não é reversível. Nesse caso, a energia mecânica não é conservada e, em geral, a energia é convertida em calor (CASSEL, 2013).

No caso de um sistema deformável em equilíbrio dinâmico, onde as forças conservativas são nulas ($\delta W = 0$), como é o caso de vibrações livres, a equação (3.37) se torna

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (EC - EP) dt = 0. \quad (3.38)$$

Nesta equação, as energias cinética e potencial são definidas, respectivamente, como

$$EC = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV, \quad (3.39)$$

$$EP = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (3.40)$$

Nessas expressões, V representa o volume do corpo, $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor de velocidades de cada ponto da estrutura, ρ é a densidade de massa do material, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões, ambos colocados em forma vetorial (LIU; QUEK, 2014).

3.4.2 Princípio de Hamilton aplicado à flexão de placas de Reissner-Mindlin

O princípio de Hamilton pode ser aplicado ao problema de equilíbrio dinâmico de flexão de placas de Reissner-Mindlin. Como apresentado em seções a seguir, essa formulação possibilita obter as parcelas das energias cinética e potencial no interior de um elemento finito genérico, assim como obter as matrizes de massa e rigidez do elemento. Para isso são definidos os vetores de deformação devido a flexão, $\boldsymbol{\varepsilon}$, e devido ao cisalhamento, $\boldsymbol{\gamma}$, como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \boldsymbol{\chi} \quad (3.41)$$

e

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (3.42)$$

respectivamente.

A energia potencial devido o processo de deformação, dada pela equação (3.40), pode ser dividida em duas parcelas: uma devido à energia em flexão e outra parcela devido à energia em cisalhamento transversal ao plano, conforme (LIU; QUEK, 2014; PETYT, 2010)

$$EP = \frac{1}{2} \int_{A^e} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA dz + \frac{1}{2} \int_{A^e} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\gamma} dA dz. \quad (3.43)$$

Nesta equação, o vetor de tensões devido ao cisalhamento, $\boldsymbol{\tau}$, pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = k \mathbf{D}_c \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.44)$$

sendo G o módulo de cisalhamento. Por sua vez, a matriz de rigidez ao cisalhamento $\mathbf{D}_c$, é dada por

$$\mathbf{D}_c = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

E o vetor de tensões devido à flexão é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.46)$$

onde a matriz $\mathbf{D}_f$ é denominada matriz de rigidez à flexão, dada por

$$\mathbf{D}_f = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Substituindo, as equações (3.41), (3.42), (3.44), (3.45) e (3.47) na equação (3.43), tem-se

$$EP = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\chi} dA + \frac{1}{2} \int_A kh \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_c \boldsymbol{\gamma} dA. \quad (3.48)$$

A constante k é utilizada para corrigir as tensões de cisalhamento ao longo da espessura do elemento. Uma discussão a respeito dos valores que esta constante pode assumir, segundo a teoria de flexão de Reissner-Mindlin, é apresentada na seção 3.3.

Em relação à energia cinética total da estrutura (EC), partindo de um campo de deslocamentos genérico (equação (3.24)), tem-se que $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor de velocidades de um ponto qualquer, dado pela derivada do campo de deslocamentos em relação ao tempo. Assim, reescrevendo a equação da energia cinética, equação (3.39) tem-se (PETYT, 2010)

$$EC = \frac{1}{2} \int_A \rho \left(\frac{h^3}{12} \dot{\phi}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\phi}_y^2 + h \dot{w}^2 \right) dA = \frac{1}{2} \int_A \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{u}} dA \quad (3.49)$$

onde ρ é a densidade de massa do material e $\mathbf{I}_\rho$ é a matriz de inércia, dada por

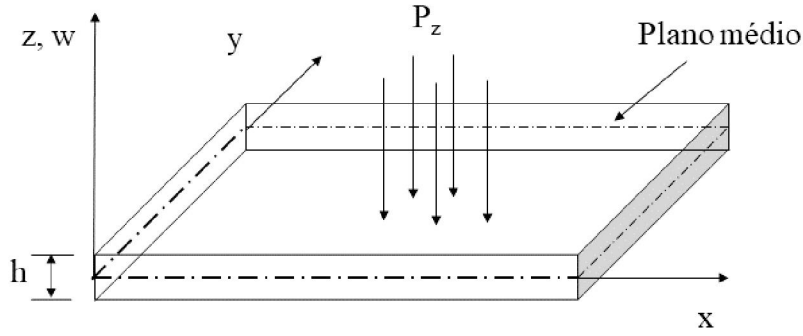
$$\mathbf{I}_\rho = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

3.5 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PLACA QUADRILATERAL (Q4) DE REISSNER-MINDLIN PARA PLACAS SOB VIBRAÇÃO

Estruturas do tipo placa podem estar sujeitas a cargas dinâmicas normais ao seu plano médio, as quais resultam em vibração de flexão. A análise numérica de vibrações desse tipo de estruturas pode ser realizada utilizando o MEF com diferentes abordagens, portanto, com diferentes termos de diferentes geometrias e de funções de forma. Neste trabalho, em função do tipo de geometria escolhida, são utilizados elementos quadriláteros de quatro nós, baseados na teoria de flexão de placas semiespessas de Reissner-Mindlin para laminados.

Considera-se, aqui, uma placa genérica, como aquela mostrada na FIGURA 15, representada por um plano bidimensional x-y, a qual pode ser dividida em elementos quadriláteros com quatro nós e quatro arestas. Cada nó possui três graus de liberdade, os quais incluem a deflexão $w(x,y)$, a rotação em torno do eixo x, $\phi_x(x,y)$, e a rotação em torno do eixo y, $\phi_y(x,y)$. Pelas premissas cinemáticas do modelo de Reissner-Mindlin, as rotações ($\phi_x(x,y)$ e $\phi_y(x,y)$) são independentes da deflexão, $w(x,y)$. Assim, os deslocamentos generalizados no interior do elemento podem ser interpolados por funções de forma independentes. Ou seja, a deflexão e as rotações, podem ser definidas pelas relações

FIGURA 15 – SISTEMA DE COORDENADAS PARA UMA PLACA SOB CARREGAMENTO TRANSVERSAL



FONTE: A autora (2024).

$$\begin{aligned}
 w^e(x,y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi,\eta) w_i^e \\
 \phi_x^e(x,y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi,\eta) \phi_{xi}^e \\
 \phi_y^e(x,y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi,\eta) \phi_{yi}^e,
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

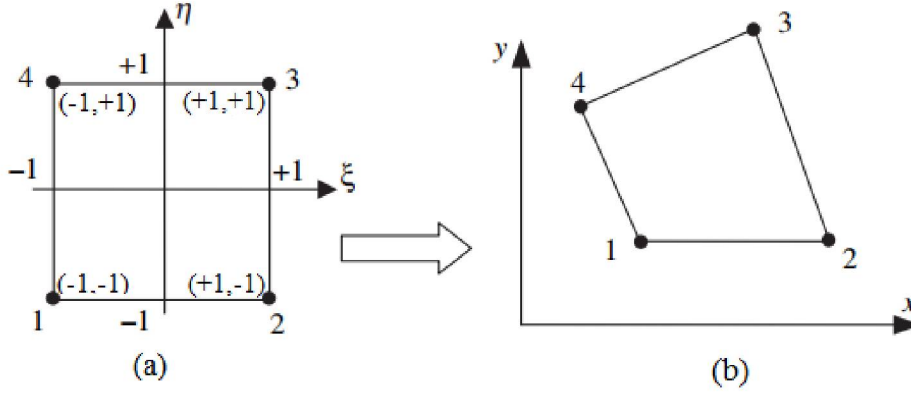
onde $w^e(x,y)$, $\phi_x^e(x,y)$ e $\phi_y^e(x,y)$ são as componentes do campo de deslocamentos generalizados aproximados pela combinação dos valores nodais desses deslocamentos w_i^e , ϕ_{xi}^e e ϕ_{yi}^e (com $i = 1, \dots, 4$), utilizando as funções de forma para cada elemento da malha de elementos finitos. $N_i(\xi,\eta)$ são as funções de forma elementares, as quais garantem a continuidade dos deslocamentos generalizados nas interfaces de elementos adjacentes, e são dadas, na forma genérica, por

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, \dots, 4. \tag{3.52}$$

Os termos ξ_i e η_i são as coordenadas nodais do elemento de referência, valores entre parênteses na FIGURA 16(a), e ξ e η são as coordenadas do elemento no sistema local. As funções de forma são bilineares e são dadas por:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

FIGURA 16 – ELEMENTO QUADRILATERAL DE QUATRO NÓS. (A) SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS, (B) SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS.



FONTE: Adaptado de Fish e Belytschko (2007).

Com isso, a equação (3.51) pode ser escrita na forma matricial como

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N} \mathbf{d}_Q^e, \quad (3.54)$$

onde o subíndice Q se refere ao elemento quadrilátero de quatro nós e o termo $\mathbf{d}_Q^e$ é o vetor de deslocamentos nodais generalizados do elemento, dado por

$$\mathbf{d}_Q^e = \left\{ w_1 \quad \phi_{x1} \quad \phi_{y1} \quad \cdots \quad w_4 \quad \phi_{x4} \quad \phi_{y4} \right\}^T, \quad (3.55)$$

e a matriz $\mathbf{N}$ é a matriz de funções de forma dada por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Observa-se que é necessário determinar as matrizes de massa e rigidez do elemento. Para tanto, são utilizadas as equações das energias, equações (3.39) e (3.40), e o princípio de Hamilton. Dessa forma, a energia potencial é definida na forma elementar como

$$EP^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA dz + \frac{1}{2} \int_{A^e} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\gamma} dA dz, \quad (3.57)$$

onde os vetores de deformação em flexão $\boldsymbol{\varepsilon}$ e em cisalhamento $\boldsymbol{\gamma}$ para o elemento são obtidos por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_f^e \mathbf{d}_Q^e \quad (3.58)$$

e

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_c^e \mathbf{d}_Q^e. \quad (3.59)$$

Nestas equações, $\mathbf{B}_f^e$ e $\mathbf{B}_c^e$ são as matrizes de derivadas das funções de forma associadas às tensões e deformações no plano (flexão) e transversais (cisalhamento) ao plano médio da placa, respectivamente. Ambas são dadas por (PETYT, 2010; LIU; QUEK, 2014)

$$\mathbf{B}_f^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4^e}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & -\frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & -\frac{\partial N_4^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

e

$$\mathbf{B}_c^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & N_1^e & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & 0 & N_4^e \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & -N_1^e & 0 & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & -N_4^e & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Substituindo as equações (3.44), (3.46), (3.58), (3.59), (3.60) e (3.61) na equação (3.57), tem-se que

$$EP^e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_Q^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{d}_Q^e, \quad (3.62)$$

onde $\mathbf{K}^e$ representa a matriz de rigidez do elemento de placa de Reissner-Mindlin, e é dada por

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \frac{h^3}{12} \mathbf{B}_f^{eT} \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f^e dA + \int_{A^e} kh \mathbf{B}_c^{eT} \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c^e dA. \quad (3.63)$$

O primeiro termo à direita é referente à rigidez à flexão e o segundo termo é referente à rigidez ao cisalhamento. É importante ressaltar que a parcela devido a rigidez ao cisalhamento é dependente de h , e que a parcela devido à rigidez à flexão depende de h^3 . Com isso, a parcela devido ao cisalhamento é dominante sobre a parcela da rigidez a flexão quando a espessura se torna muito pequena em relação ao seu comprimento lateral. Isso recebe o nome de travamento por cisalhamento (do inglês, *shear locking*) (KHENNANE, 2021).

Para determinar a matriz de massa do elemento, a equação da energia cinética é utilizada, equação (3.49) e é calculada no domínio do elemento. E, posteriormente, substituindo a equação (3.54) na equação (3.49), tem-se (LIU; QUEK, 2014)

$$EC^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_Q^{eT} \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{d}}_Q^e, \quad (3.64)$$

onde a matriz de inércia $\mathbf{m}^e$ é dada por

$$\mathbf{M}^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{I}_\rho \mathbf{N}^e dA, \quad (3.65)$$

e a matriz $\mathbf{I}_\rho$ é dada pela equação (3.50).

As matrizes de rigidez elementar, equação (3.63), e de massa elementar, equação (3.65), foram solucionadas utilizando integração numérica, no caso deste trabalho, a quadratura de Gauss (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

3.6 TEORIA DE PLACAS LAMINADAS

O elemento finito para placas laminadas utilizado neste trabalho se baseia na teoria desenvolvida por Moreira *et al.* (2006). O elemento finito modela um laminado dividido em n_c camadas, FIGURA 17. Esse modelo de placa laminada é usualmente denominado de modelo de placas discretas (MCD), também conhecido por modelo zigue-zague. Cada camada é tratada individualmente como uma placa semiespessa satisfazendo as hipóteses de Reissner-Mindlin.

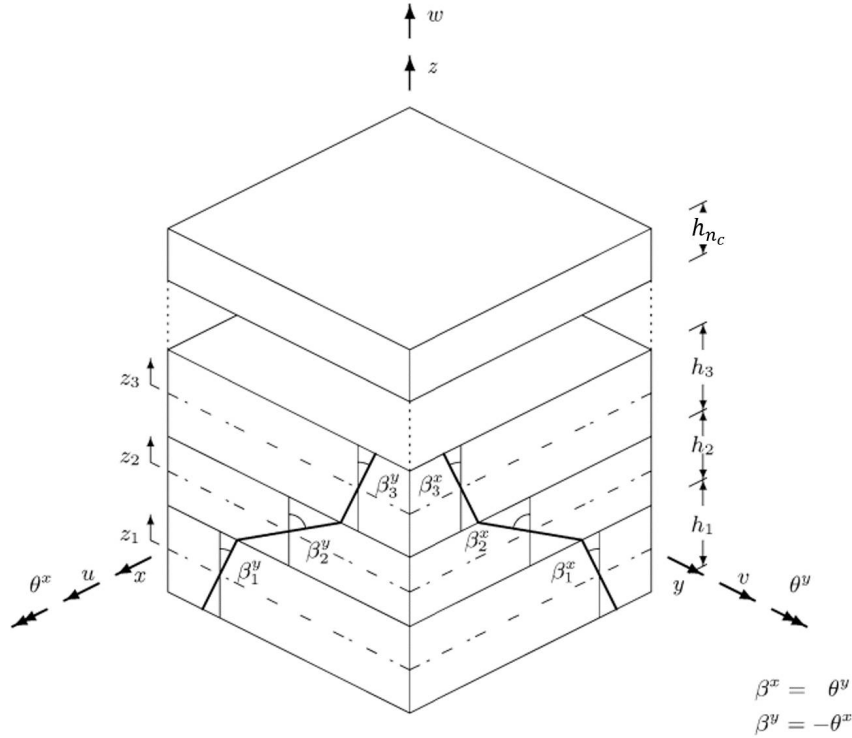
Segundo Xu *et al.* (2015), este modelo de elemento finito laminado é capaz de proporcionar o mesmo nível de precisão que um modelo elementar tridimensional. No entanto, a utilização do modelo de elemento finito laminado apresenta algumas vantagens em relação aos modelos tridimensionais. Primeira, a matriz de rigidez pode ser obtida mais rapidamente. Segunda, o modelo de elemento finito laminado permite manter a estrutura de dados bidimensional, ou seja, permite uma simplificação na obtenção e na alteração da malha. Terceira, parâmetros como número de camadas e as dimensões de cada camada, podem ser tratados como parâmetros físicos durante o processo de otimização. Isso permite que o processo de otimização seja mais simples de ser resolvido. As posições e os parâmetros geométricos das estruturas com amortecimento viscoelástico podem ser otimizados simultaneamente sem refazer a malha de elementos finitos.

Segundo a teoria de placas em camadas de Moreira *et al.* (2006), cada camada é modelada seguindo as suposições:

- os materiais das camadas são isotrópicos/ortotrópicos e homogêneos;
- a deformação normal ao longo da espessura é desprezável;
- as teorias lineares da elasticidade e da viscoelasticidade são respeitadas;
- as inércias translacionais e rotativas de todas as camadas são contabilizadas;
- as deformações extensionais e de cisalhamento são contabilizadas para todas as camadas.

Cada k -ésima camada está associada a uma rotação em torno do eixo x (β_k^y) e a uma rotação em torno do eixo y (β_k^x), que são únicas e independentes das rotações das demais camadas. Segundo a formulação para uma placa dividida em n_c camadas, o domínio de uma

FIGURA 17 – MODELO CINEMÁTICO DE UM ELEMENTO DE PLACA LAMINADA.

FONTE: Adaptado de Moreira *et al.* (2006).

camada genérica k é dado por $V_k = \left\{ (x, y, z_k) \in \mathbb{R}^3 \mid z_k \in \left[-\frac{h_k}{2}, \frac{h_k}{2} \right], (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2 \right\}$, sendo A a área e h_k a espessura, respectivamente. O campo de deslocamentos para uma camada k genérica da placa laminada pode ser definido por

$$\mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} u_k(x, y, z_k) \\ v_k(x, y, z_k) \\ w_k(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^x + \sum_{j=2}^{k-1} h_j\beta_j^x + \frac{h_k}{2}\beta_k^x + z_k\beta_k^x \\ v_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j\beta_j^y + \frac{h_k}{2}\beta_k^y + z_k\beta_k^y \\ w_0 \end{Bmatrix}, \quad (3.66)$$

onde $u_0 = u_0(x, y)$, $v_0 = v_0(x, y)$ e $w_0 = w_0(x, y)$ são os deslocamentos de um ponto no plano de referência (camada $k=1$), $\beta_k^y = \beta_k^y(x, y)$ e $\beta_k^x = \beta_k^x(x, y)$ são as rotações das normais em torno dos eixos x e y , respectivamente, e dependentes das coordenadas x e y . k ($k = 1, 2, 3, \dots$) é o número de camadas da placa, e h_j é a espessura da j -ésima camada da placa laminada ($j = 2, \dots, n_c$).

A equação (3.66) pode ser reescrita na forma matricial, em função do vetor de deslocamentos generalizados $\mathbf{d}^e$, conforme

$$\mathbf{u}_k = \mathcal{N}_k \mathbf{d}^e. \quad (3.67)$$

O termo $\mathbf{d}^e$ representa o vetor contendo todos os graus de liberdade nodais do elemento de placa

laminada e, para n_c camadas, é dado por

$$\mathbf{d}^e = \left\{ u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \beta_1^x \quad \beta_1^y \quad \cdots \quad \beta_k^x \quad \beta_k^y \quad \cdots \quad \beta_{n_c}^x \quad \beta_{n_c}^y \right\}^T. \quad (3.68)$$

Por sua vez, a matriz $\mathcal{N}_k$ é definida como

$$\mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \cdots & h_j & 0 & \cdots & \frac{h_k}{2} + z_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & \cdots & 0 & h_j & \cdots & 0 & \frac{h_k}{2} + z_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

O campo de deformações para cada k -ésima camada pode ser obtido pelo uso da equação diferencial cinemática relacionando os campos de deslocamentos e de deformações da mecânica do contínuo, considerando pequenas deformações, como

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{L} \mathbf{u}_k, \quad (3.70)$$

sendo que a matriz $\mathbf{L}$ é a matriz de operadores diferenciais, dada por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Realizando a expansão da equação (3.70), aplicada a cada camada do laminado, possibilita a obtenção dos termos do campo de deformações, como

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{xx}^k &= \overbrace{\frac{\partial u_0}{\partial x}}^M + \overbrace{\frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial x} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^x}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\beta_k^x}{\partial x}}^A + \overbrace{z_k \frac{\partial \beta_k^x}{\partial x}}^F \\
\tilde{\varepsilon}_{yy}^k &= \overbrace{\frac{\partial v_0}{\partial y}}^M + \overbrace{\frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial y} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial y} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\beta_k^y}{\partial y}}^A + \overbrace{z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial y}}^F \\
\tilde{\gamma}_{xy}^k &= \overbrace{\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}}^M + \overbrace{\frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial y} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^x}{\partial y} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\beta_k^x}{\partial y} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x}}^A \\
&\quad + \overbrace{\sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\beta_k^y}{\partial x}}^A + \overbrace{z_k \frac{\partial \beta_k^x}{\partial y} + z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x}}^F \\
\tilde{\gamma}_{xz}^k &= \overbrace{\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_k^x}^C \\
\tilde{\gamma}_{yz}^k &= \overbrace{\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_k^y}^C.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Na equação (3.72), os termos definidos como M, A, F e C referem-se, respectivamente, aos termos de membrana, acoplamento, flexão e cisalhamento. Com isso, o campo de deformações pode ser obtido diretamente a partir dos deslocamentos nodais generalizados $\mathbf{d}^e$, conforme a equação

$$\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{\mathcal{B}}_k \mathbf{d}^e, \tag{3.73}$$

onde a matriz $\tilde{\mathcal{B}}_k$ é a matriz de deformações-deslocamentos, sendo dada por

$$\tilde{\mathcal{B}}_k = \mathbf{L} \mathcal{N}_k. \tag{3.74}$$

A matriz de deformações-deslocamentos, $\tilde{\mathcal{B}}_k$, pode ser rearranjada e dividida em três submatrizes. Sendo que cada submatriz refere-se a cada componente de deformação: membrana e acoplamento, flexão e cisalhamento. Este novo arranjo é dado por

$$\mathcal{B}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \dots & h_j \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \dots & 0 & h_j \frac{\partial}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \dots & h_j \frac{\partial}{\partial y} & h_j \frac{\partial}{\partial x} & \dots & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & z_k \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_k \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & z_k \frac{\partial}{\partial y} & z_k \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Para esse arranjo, o campo de deformações na k -ésima camada, $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, posto em termos dos deslocamentos generalizados $\mathbf{d}^e$ é dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathcal{B}_k \mathbf{d}^e. \quad (3.76)$$

As equações (3.66), (3.72), (3.73) e (3.75) são apresentadas de forma explícita no Apêndice A para cada camada de um laminado composto por três camadas.

A relação entre os campos de tensão e de deformação, para a k -ésima camada, é dada pela relação constitutiva, para a qual as tensões de uma camada de material elástico, linear e isotrópico pode ser colocada na forma vetorial (σ_k) e escrita como

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \mathbf{D}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad (3.77)$$

onde a matriz $\mathbf{D}_k$ é a matriz de rigidez constitutiva elástica definida como

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k^{MA} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_k^F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_k^C \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Os termos $\mathbf{D}_k^{MA}$, $\mathbf{D}_k^F$ e $\mathbf{G}_k^C$, são matrizes constitutivas de membrana e acoplamento, de flexão e de cisalhamento, respectivamente, dadas no sistema de coordenadas locais. Essas matrizes são definidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k^{MA} &= \mathbf{D}_k^F = \mathbf{D}_k \\ \mathbf{G}_k^C &= \mathbf{G}_k. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nesse caso, as matrizes $\mathbf{D}_k$ e $\mathbf{G}_k$ são as matrizes constitutivas de elasticidade plana e de cisalhamento, respectivamente, definidas para um material elástico, linear e isotrópico. Para uma camada k genérica, elas são dadas por

$$\mathbf{D}_k = \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_k & 0 \\ \nu_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_k}{2} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

e

$$\mathbf{G}_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

onde E_k é o módulo de elasticidade e ν_k é o coeficiente de Poisson do material da camada genérica k .

3.7 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PLACA QUADRILATERAL (Q4) DE REISSNER-MINDLIN PARA PLACAS LAMINADAS SOB VIBRAÇÃO

Nesta seção, é mostrado o desenvolvimento das equações de elementos finitos para placas laminadas utilizando a teoria de camadas, como apresentado por Moreira *et al.* (2006). O elemento finito proposto pelos autores é baseado no elemento quadrilátero de quatro nós. Com isso, o campo de deslocamentos generalizados elementar, equação (3.68), para um elemento, em função da matriz das funções de forma, $\mathbf{N}_k^e$, é dado por

$$\mathbf{u}_k^e = \mathcal{N}_k \mathbf{N}_k^e \mathbf{d}^e, \quad (3.82)$$

onde a matriz de funções de forma do elemento de placa laminada, $\mathbf{N}_k^e$, é dada por

$$\mathbf{N}_k^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & \cdots & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & \cdots & 0 & N_4^e & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & N_1^e & \cdots & 0 & 0 & N_4^e \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

e lembrando que a matriz $\mathcal{N}_k$ é dada pela equação (3.69).

Considerando uma placa laminada composta por n_c camadas, a energia de deformação total do e -ésimo elemento, denotado EP_L^e , pode ser obtida por um somatório das energias de deformações de cada camada elemento. Assim, utilizando a equação (3.40) tem-se

$$EP_L^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_c} \int_{V_k^e} \boldsymbol{\varepsilon}_k^{eT} \boldsymbol{\sigma}_k^e d\Omega_k^e. \quad (3.84)$$

O termo $\boldsymbol{\varepsilon}_k^e$ representa o vetor de deformações, $\boldsymbol{\sigma}_k^e$ o vetor de tensões, Ω_k^e o domínio definidos para a k -ésima camada, e n_c o número de camadas do laminado. Substituindo as expressões para o vetor de deformações (da equação (3.73)), para o vetor de tensões (da equação (3.77)) e para o vetor de deslocamentos (da equação (3.82)) na equação anterior (equação (3.84)) e integrando em relação à espessura de cada camada da placa laminada, tem-se a energia de deformação total para o elemento, dada por

$$EP_L^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_c} \int_{A^e} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{N}_k^{eT} \hat{\mathcal{B}}_k^T \hat{\mathbf{D}}_k \hat{\mathcal{B}}_k \mathbf{N}_k^e \mathbf{d}^e dA^e. \quad (3.85)$$

Nesse caso, a matriz de rigidez do elemento de placa laminada é dada pelo termo

$$\mathbf{K}_L^e = \sum_{k=1}^{n_c} \int_{A^e} \mathbf{N}_k^{eT} \hat{\mathcal{B}}_k^T \hat{\mathbf{D}}_k \hat{\mathcal{B}}_k \mathbf{N}_k^e dA^e \quad (3.86)$$

e a equação da energia de deformação em função da matriz de rigidez, é dada por

$$EP_L^e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{K}_L^e \mathbf{d}^e. \quad (3.87)$$

O termo EP_L^e é a energia de deformação para um elemento de placa laminada composto por n_c camadas.

A matriz de deformações-deslocamentos modificada $\hat{\mathcal{B}}_k$ mostrada na equação (3.85), é dada por

$$\hat{\mathcal{B}}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_k^{MA} \\ \frac{1}{z_k} \mathcal{B}_k^F \\ \mathcal{B}_k^C \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

onde os termos $\mathcal{B}_k^{MA}$, $\mathcal{B}_k^F$, $\mathcal{B}_k^C$, são as matrizes de deformações-deslocamentos para os termos de membrana-acoplamento, de flexão e de cisalhamento, respectivamente, advindas da equação (3.75). A matriz $\hat{\mathbf{D}}_k$ é a matriz constitutiva modificada, a qual inclui os termos resultantes da integração em relação à espessura e é dada por

$$\hat{\mathbf{D}}_k = \begin{bmatrix} h_k \mathbf{D}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{h_k^3}{12} \mathbf{D}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_k \mathbf{G}_k \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

Para determinar a parcela da matriz de massa associada à cada camada do elemento de placa laminada, utiliza-se a equação (3.39). Considerando que as camadas da placa laminada podem ser de diferentes materiais, as densidades podem ser postas na forma matricial como

$$\mathbf{I}_k^e = \begin{bmatrix} \rho_k^e & 0 & 0 \\ 0 & \rho_k^e & 0 \\ 0 & 0 & \rho_k^e \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

onde ρ_k^e é a densidade do elemento da k -ésima camada. Substituindo as equações (3.82) e (3.90) na equação (3.39), tem-se a equação que fornece a energia cinética para um elemento de placa laminada constituído por n_c camadas

$$EC_L^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_c} \int_{A^e} \int_{z_k} \dot{\mathbf{d}}^{eT} \mathbf{N}_k^{eT} \mathbf{J}_k^e \mathbf{N}_k^e \dot{\mathbf{d}}^e dA^e dz_k, \quad (3.91)$$

onde a matriz $\mathbf{J}_k^e$ pode ser escrita como

$$\mathbf{J}_k^e = \mathcal{N}_k^T \mathbf{I}_k^e \mathcal{N}_k. \quad (3.92)$$

Integrando a equação (3.91) em relação à espessura de cada camada, tem-se a energia cinética total para um elemento de placa laminada, dada por

$$EC_L^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_c} \int_{A^e} \dot{\mathbf{d}}^{eT} \mathbf{N}_k^{eT} \hat{\mathbf{J}}_k^e \mathbf{N}_k^e \dot{\mathbf{d}}^e dA^e, \quad (3.93)$$

sendo $\dot{\mathbf{d}}$ o vetor nodal de velocidades e o termo $\hat{\mathbf{J}}_k^e$ a matriz de inércia modificada, resultante da integração dos termos dependentes da espessura da placa, definida como

$$\hat{\mathbf{J}}_k^e = \rho_k h_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \cdots & h_j & 0 & \cdots & \frac{h_k}{2} & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & \cdots & 0 & h_j & \cdots & 0 & \frac{h_k}{2} \\ & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \frac{h_1^2}{4} & 0 & \cdots & \frac{h_1}{2} h_j & 0 & \cdots & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} & 0 \\ & & & \frac{h_1^2}{4} & \cdots & 0 & \frac{h_1}{2} h_j & \cdots & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & h_j^2 & 0 & \cdots & \frac{h_k}{2} h_j & 0 \\ & & & & & & & h_j^2 & \cdots & 0 & \frac{h_k}{2} h_j \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \frac{h_k^2}{3} & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{h_k^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

sim.

Da equação da energia cinética, equação (3.93), extraí-se a matriz de massa elementar da placa laminada, $\mathbf{M}_L^e$, a qual pode ser escrita como

$$\mathbf{M}_L^e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_c} \int_{A^e} \mathbf{N}_k^{eT} \hat{\mathbf{J}}_k^e \mathbf{N}_k^e dA^e. \quad (3.95)$$

Rearranjando a equação da energia cinética do elemento genérico de placa laminada, a partir da equação (3.95), tem-se

$$EC_k^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^{eT} \mathbf{M}_L^e \dot{\mathbf{d}}^e. \quad (3.96)$$

No Apêndice B os termos das equações (3.82) e (3.92) são apresentados de forma explícita para um elemento finito de placa laminada, contendo uma, duas e três camadas, respectivamente.

3.7.1 Definição das matrizes de massa e rigidez globais

O vetor elementar de deslocamentos nodais $\mathbf{d}^e$ pode ser colocado em função da matriz de conectividade dos elementos ($\mathbf{R}^e$) e do vetor de deslocamentos globais ($\mathbf{d}^g$), conforme a equação

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{d}^g. \quad (3.97)$$

Substituindo a equação acima, nas equações de massa (equação (3.95)) e rigidez (equação (3.86)) elementares, tem-se as matrizes de massa e de rigidez globais do laminado, após o processo de superposição, como

$$\mathbf{M}_L = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{R}^{eT} \mathbf{M}_L^e \mathbf{R}^e \quad (3.98)$$

e

$$\mathbf{K}_L = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^e, \quad (3.99)$$

respectivamente. Aqui, o termo n_{el} denota o número total de elementos da placa laminada.

3.8 VIBRAÇÕES EM PLACAS LAMINADAS

A utilização de placas laminadas tem crescido consideravelmente em diversas áreas da engenharia. Isso se deve ao fato desse tipo de estrutura poder ser produzido utilizando materiais diversos. Com isso, aumenta-se a resistência mecânica da estrutura, o peso é reduzido e, conseqüentemente, melhora seu desempenho estrutural.

Nesse sentido, vários autores têm estudado os comportamentos estático e dinâmico desse tipo de estrutura. No estudo apresentado por Moita *et al.* (2011), foi desenvolvido um modelo de elementos finitos para análise de vibrações em um laminado com núcleo viscoelástico restrito

entre camadas elásticas. As camadas elásticas foram modeladas usando a teoria clássica de placas e o núcleo viscoelástico a teoria de Reissner-Mindlin. Akoussan *et al.* (2015) desenvolveram um modelo de elementos finitos para laminados ortotrópicos com núcleo viscoelástico, utilizando a teoria de camadas de "zigue-zague".

Ren e Zhao (2019) estudaram um laminado sanduíche de camada restrita, onde a camada de restrição e a camada base são tratadas como camadas finas utilizando a teoria de Kirchhoff, e a camada de MVE é tratado como camada espessa, pela teoria de Reissner-Mindlin (TCPO). Já no trabalho de Ren *et al.* (2020), os autores estudaram um laminado com núcleo viscoelástico moderadamente espesso. Nesse trabalho, foi apresentada uma formulação de elementos finitos para análise de vibrações considerando amortecimento de placas baseada em uma teoria de camadas mista. As camadas de base e de restrição satisfazem a teoria de Kirchhoff, e a camada intermediária, composta por MVE, é modelada por uma teoria cisalhante de alta ordem.

Foram apresentados aqui alguns dos muitos trabalhos que são encontrados e que tratam do estudo de vibrações em laminados com ou sem núcleo viscoelástico. Isso visa ressaltar a importância do estudo de vibrações em placas laminadas.

3.8.1 Função resposta em frequência

A equação dinâmica que governa o movimento de um sistema linear, descrita no domínio do tempo, pode ser posta na forma matricial (PETYT, 2010)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.100)$$

onde $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são as matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez do sistema. $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ são os vetores de resposta (deslocamentos generalizados) e de forças de excitação generalizadas, no domínio do tempo, respectivamente.

Neste trabalho, são utilizadas camadas restritas com MVE no controle de vibrações de placas. Assim, as propriedades do MVE são dependentes da frequência (Ω) e da temperatura (T), enquanto que as propriedades do material elástico são independentes destas duas variáveis. Desta maneira, a matriz de rigidez do sistema composto ($\mathbf{K}$) pode ser escrita como a soma das parcelas do MVE e do material elástico. Isso pode ser realizado conforme

$$\mathbf{K}(\Omega, T) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\Omega, T), \quad (3.101)$$

onde a matriz de rigidez $\mathbf{K}_v(\Omega, T)$ refere-se à parcela do MVE. Esta parcela é dependente da frequência e da temperatura, e é dada por valores complexos. A matriz $\mathbf{K}_e$ refere-se ao material elástico (material metálico) e que contém somente valores reais e constantes (XIE *et al.*, 2019). Neste trabalho, a temperatura de trabalho do MVE é mantida constante. Portanto, o termo que se refere à temperatura pode ser omitido em todas as propriedades do MVE.

A partir das considerações realizadas, aplicando a transformada de Fourier à equação (3.100), e considerando a resposta em regime permanente, tem-se a equação do movimento no domínio da frequência dada por

$$[-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K}(\Omega)]\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.102)$$

$\mathbf{X}(\Omega)$ e $\mathbf{F}(\Omega)$ são as transformadas de Fourier de $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$, respectivamente.

A obtenção da FRF de um sistema exige que a equação (3.102) seja resolvida para cada valor de frequência dentro de um intervalo de interesse contendo n frequências. Existem duas formas básicas para se resolver este problema. A primeira delas é pela solução, em sequência, de n sistemas lineares de equações, sendo que cada sistema é resolvido para um valor discreto de frequência. A segunda forma se dá pela solução do problema de autovalores/autovetores associado ao problema e posterior desacoplamento das equações. Neste caso, a principal dificuldade se encontra em resolver o problema de autovalores/autovetores, visto que se trata de um problema não-linear de equações, pois envolve uma matriz de rigidez dependente da frequência. Em ambas as situações, o custo computacional é elevado.

3.8.2 Obtenção da resposta aproximada da FRF do sistema composto

Com o intuito de resolver a dificuldade em se obter a solução da equação (3.102), de forma aproximada e com menor custo computacional, Floody *et al.* (2007) e Floody (2010) desenvolveram uma técnica para solução aproximada, na qual os autovalores e autovetores são calculados em uma frequência de referência (Ω_0). Adicionalmente, são considerados somente os primeiros $\hat{n}$ modos de vibrar dentro de uma faixa de frequência de interesse que tenha uma participação significativa no cálculo da FRF. Nesse caso, o número de modos escolhidos ($\hat{n}$) é significativamente inferior à dimensão n do sistema original. Na sequência, a equação do sistema pode ser resolvida para cada frequência, dentro de um intervalo de interesse, apenas considerando um incremento na frequência ($\Delta E(\Omega; \Omega_0)$).

Com a utilização desta técnica, não há necessidade de resolver o problema de autovalores/autovetores para cada frequência do intervalo de interesse, apenas para a frequência de referência Ω_0 . Este método, tem como característica geral reduzir a ordem das equações do sistema e assim diminuir o número de operações e minimizar o tempo de processamento (MURARO *et al.*, 2023). Essa técnica é apresentada explicitamente nesta seção.

Inicialmente, considerando a parcela da matriz de rigidez relativa ao MVE avaliada em uma frequência de referência pré-definida (Ω_0) pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_v(\Omega_0) = E(\Omega_0)\mathbf{K}'_v, \quad (3.103)$$

sendo $\mathbf{K}'_v$ a matriz que denota a parcela da matriz de rigidez do MVE gerada considerando um

módulo de elasticidade arbitrário e constante (por exemplo $1N/m^2$), que posteriormente, será corrigido. Assim, a matriz de rigidez do sistema composto avaliada na frequência de referência, Ω_0 , é dada por

$$\mathbf{K}_0(\Omega_0) = \mathbf{K}_v(\Omega_0) + \mathbf{K}_e = E(\Omega_0)\mathbf{K}_v' + \mathbf{K}_e, \quad (3.104)$$

onde $\mathbf{K}_0(\Omega_0)$ é a matriz de rigidez do sistema composto, considerando o material elástico e o MVE avaliado na frequência de referência, (Ω_0) . Pode-se observar que nesta equação, o único termo dependente da frequência é o módulo de elasticidade complexo $(E(\Omega_0))$, que é obtido por meio da equação (3.13).

Em uma etapa posterior, um problema de autovalores, associado às matrizes de massa e de rigidez do sistema composto é resolvido para a frequência de referência, $\mathbf{K}(\Omega_0)$, de acordo com a equação

$$[\mathbf{K}_0(\Omega_0) - \lambda_i^* \mathbf{M}] \phi_i^* = \mathbf{0} \quad (3.105)$$

com i variando de 1 até o número total de graus de liberdade do sistema, n . O i -ésimo autovalor complexo é representado por λ_i^* e ϕ_i^* é o i -ésimo autovetor complexo correspondente. A matriz modal é definida como $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$, onde suas colunas são os autovetores obtidos na equação (3.105).

Este método assume que apenas os primeiros modos de vibrar contribuem significativamente para a resposta do sistema. Assim, a matriz modal, Φ , avaliada na frequência de referência, pode ser truncada para os $\hat{n}$ primeiros autovetores, onde $\hat{n} \ll n$. A matriz modal tem agora, dimensão de $n \times \hat{n}$. Em uma etapa posterior, os autovalores são organizados em ordem crescente e os autovetores são reordenados de forma correspondente. Depois disso, os autovetores são normalizados pela matriz de massa modal e passam a ser definidos por $\hat{\Phi}_0$. Com isso, as seguintes propriedades são observadas:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_0^T \mathbf{M} \hat{\Phi}_0 &= \mathbf{I}_{\hat{n} \times \hat{n}} \\ \hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}_0(\Omega_0) \hat{\Phi}_0 &= \Lambda_{0, \hat{n} \times \hat{n}}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

onde $\mathbf{I}_{\hat{n} \times \hat{n}}$ é a matriz identidade, $\hat{\Phi}_0$ é a matriz dos autovetores complexos, denominada por matriz modal, $\Lambda_{0, \hat{n} \times \hat{n}}$ é denominada de matriz espectral complexa, composta em sua diagonal principal, pelos autovalores complexos, λ_i^* . Observa-se que a notação Ω_0 refere-se à matriz espectral obtida considerando as propriedades do MVE obtidas na frequência fixa Ω_0 .

Agora, a matriz de rigidez precisa ser atualizada para cada valor discreto de frequência dentro da faixa de frequência de interesse de análise da estrutura. No método em discussão, isso é

feito através de um processo incremental, para o qual o incremento é acrescentado à propriedade do material, ou seja, ao módulo de elasticidade, $\Delta E(\Omega; \Omega_0)$. Isso é apresentado na equação

$$\Delta E(\Omega; \Omega_0) = E(\Omega) - E(\Omega_0) = \frac{E_0 + E_\infty b_1 (i\Omega)^\beta}{1 + b_1 (i\Omega)^\beta} - E(\Omega_0). \quad (3.107)$$

A matriz de rigidez do sistema composto, $\mathbf{K}(\Omega)$, calculada para qualquer valor discreto de frequência é dada por

$$\mathbf{K}(\Omega) = \mathbf{K}_0(\Omega_0) + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \mathbf{K}'_v = \mathbf{K}_e + E(\Omega_0) \mathbf{K}'_v + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \mathbf{K}'_v. \quad (3.108)$$

Para o cálculo da FRF, realiza-se a transformação de coordenadas do espaço de configuração para o subespaço modal do sistema composto por meio da equação

$$\mathbf{X}(\Omega) = \hat{\mathbf{\Phi}}_0 \mathbf{P}(\Omega), \quad (3.109)$$

onde $\mathbf{P}(\Omega)$ é o vetor de coordenadas generalizadas no subespaço modal e $\mathbf{X}(\Omega)$ é o vetor de coordenadas generalizadas no espaço de configuração.

Pré-multiplicando a equação do movimento, equação (3.102), por $\hat{\mathbf{\Phi}}_0^T$ e fazendo a transformação de coordenadas, por meio da utilização da equação (3.109), é possível obter a equação do movimento para cada valor discreto de frequência, Ω , conforme

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_0^T [-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K}(\Omega)] \hat{\mathbf{\Phi}}_0 \mathbf{P}(\Omega) = \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{F}(\Omega), \quad (3.110)$$

onde a equação (3.108), obtida anteriormente é utilizada para substituir a matriz de rigidez do sistema composto, $\mathbf{K}(\Omega)$ conforme

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{K}(\Omega) \hat{\mathbf{\Phi}}_0 = \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{K}_0(\Omega_0) \hat{\mathbf{\Phi}}_0 + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{K}'_v \hat{\mathbf{\Phi}}_0. \quad (3.111)$$

Reescrevendo a equação (3.110) utilizando as relações da equação (3.106) e a equação (3.111), tem-se

$$[-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}x\hat{n}} + i\Omega \tau_{\hat{n}x\hat{n}} + \mathbf{\Lambda}_{0,\hat{n}x\hat{n}} + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \mathbf{\Lambda}'_v] \mathbf{P}(\Omega) = \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.112)$$

onde $\mathbf{\Lambda}'_v = \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{K}'_v \hat{\mathbf{\Phi}}_0$, $\tau_{\hat{n}x\hat{n}} = \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{\Phi}}_0$, $\mathbf{I}_{\hat{n}x\hat{n}}$ e $\mathbf{\Lambda}_{0,\hat{n}x\hat{n}}$ são matrizes diagonais e constantes ao longo de toda a faixa de frequências. E pode ser observado, na equação (3.112), que a única variável dependente da frequência é $\Delta E(\Omega; \Omega_0)$, e que a nova ordem desse sistema é $\hat{n}x\hat{n}$, significativamente menor que aquele da equação (3.102).

Finalmente, a equação (3.112) permite determinar uma aproximação para a resposta dinâmica do sistema composto no subespaço modal para qualquer frequência utilizando,

$$\mathbf{P}(\Omega) = [-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}x\hat{n}} + i\Omega \tau_{\hat{n}x\hat{n}} + \mathbf{\Lambda}_{0,\hat{n}x\hat{n}} + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \mathbf{\Lambda}'_v]^{-1} \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.113)$$

É importante ressaltar, que na equação (3.113) a atualização do vetor $\mathbf{P}(\Omega)$ depende apenas da atualização do valor de $\Delta E(\Omega; \Omega_0)$, pois as demais matrizes e o vetor de força de excitação são constantes. Ou seja, as matrizes $\mathbf{I}_{\hat{n}x\hat{n}}$, $\mathbf{\Lambda}_{0,\hat{n}x\hat{n}}$, $\hat{\mathbf{\Phi}}_0$, $\mathbf{\Lambda}'_v$, e $\tau_{\hat{n}x\hat{n}}$, são constantes, pois são calculadas para uma frequência de referência pré-definida e fixa. A dimensão dessas matrizes é $\hat{n}x\hat{n}$, sendo $\hat{n} \ll n$ e n o número total de graus de liberdade do sistema. Portanto, a solução desta equação pode ser realizada de forma direta, resolvendo o sistema de equações para cada frequência Ω , ou para cada frequência Ω atualizar o valor de $\Delta E(\Omega; \Omega_0)$ e inverter o termo entre colchetes da equação (3.113).

A resposta dinâmica, equação (3.113), está sendo expressa em função das coordenadas generalizadas. Para obter a equação no espaço de configurações é necessário utilizar a equação (3.109). Assim, a resposta dinâmica no espaço de configurações do sistema composto é dada por

$$\mathbf{X}(\Omega) = \hat{\mathbf{\Phi}}_0 [-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}x\hat{n}} + i\Omega \tau_{\hat{n}x\hat{n}} + \mathbf{\Lambda}_{0,\hat{n}x\hat{n}} + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \mathbf{\Lambda}'_v]^{-1} \hat{\mathbf{\Phi}}_0^T \mathbf{F}(\Omega), \quad (3.114)$$

ou ainda,

$$\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \mathbf{F}(\Omega), \quad (3.115)$$

onde $\mathbf{H}(\Omega)$ é denominada matriz de receptância. A partir da equação (3.115) é possível obter a resposta do sistema, em deslocamentos, da estrutura para um dado ponto de excitação e resposta. Para obter a resposta em aceleração, ou seja a matriz de inertância, é necessário multiplicar equação (3.115) por $-\Omega^2$.

3.9 CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Um problema genérico de otimização pode ser escrito na forma de minimização de uma função objetivo (também denominada função custo), $f(\mathbf{x})$ (ARORA, 2017). Para determinar o valor de mínimo da função objetivo é necessário determinar o vetor de variáveis de projeto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_v})$ que gere esse valor. O problema de otimização pode estar sujeito a restrições de igualdade $h_j(\mathbf{x}) = 0$ e/ou a restrições de desigualdade $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ (ARORA, 2017). Na formulação padrão, um problema geral de otimização pode ser apresentado na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} \quad & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (j = 1 \text{ a } n_h) \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1 \text{ a } n_g). \end{aligned} \quad (3.116)$$

A região factível ou viável, S , é aquela que atende às especificações do problema e, portanto, é o conjunto composto por todos os pontos de projeto que satisfazem as restrições (ARORA, 2017). Desta forma, a região viável pode ser definida como

$$S = \{\mathbf{x} \mid h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1 \text{ a } n_h; g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1 \text{ a } n_g\}. \quad (3.117)$$

A função objetivo, $f(\mathbf{x})$, terá um ponto de mínimo global, $\mathbf{x}^*$, se a condição

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}), \text{ para todo } \mathbf{x}^* \in S \quad (3.118)$$

for satisfeita. Além disso, $\mathbf{x}^*$ é dito ser um ponto de mínimo local se a inequação (3.118) for satisfeita apenas para uma pequena vizinhança, N , de $\mathbf{x}^*$ compreendido pela região factível S . A vizinhança $N(\mathbf{x}^*)$ é definida por

$$N(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S \text{ com } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta\}, \quad (3.119)$$

para qualquer δ arbitrário, pequeno e maior que zero.

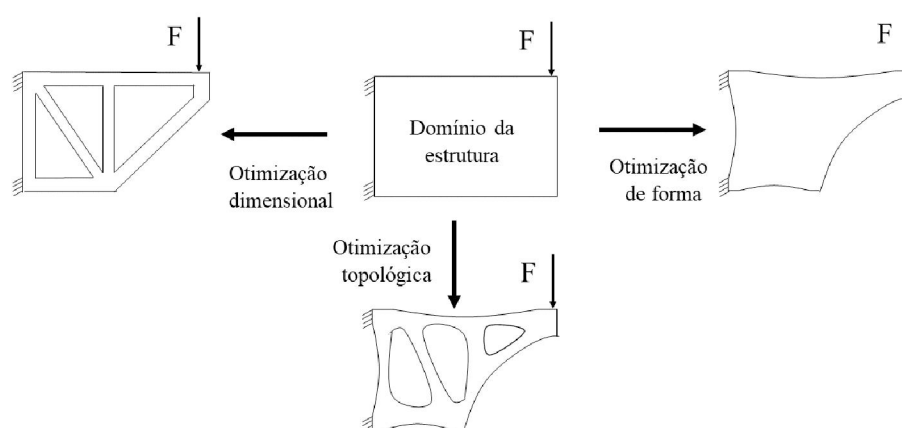
A utilização de conceitos de otimização em estruturas e componentes mecânicos é denominada otimização estrutural. A otimização estrutural pode ser dividida basicamente em otimização dimensional, de forma e topológica. Na otimização dimensional, busca-se determinar uma ou mais dimensões de uma estrutura com forma predeterminada. Como por exemplo, a busca pela espessura ótima de uma placa, visando extremizar uma dada função objetivo. Nesse caso, a variável de projeto é a espessura da placa, sendo que o domínio da estrutura é predeterminado e fixo. Já na otimização de forma, busca-se determinar a forma ótima deste domínio em questão. Neste caso, as variáveis de projeto envolvem parâmetros de definição do contorno da estrutura. E, por fim, a otimização topológica visa determinar características como localização, número e forma de furos e, portanto, a conectividade do domínio (BENDSOE; SIGMUND, 2004). Uma representação gráfica das três formas básicas de otimização estrutural é realizada na FIGURA 18.

A otimização topológica tem como objetivo determinar a distribuição ótima de material de uma estrutura dentro de um domínio preestabelecido de projeto. Normalmente, as únicas grandezas conhecidas em um problema de otimização topológica são as cargas aplicadas à estrutura, condições de contorno, volume da estrutura e algumas possíveis restrições de projeto, como localização e tamanhos dos furos, ou das áreas sólidas (BENDSOE; SIGMUND, 2004).

3.10 OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

O algoritmo genético (AG) é um algoritmo de otimização estocástico, baseado nos fundamentos da genética e seleção natural, embasado na teoria de Darwin. Foi desenvolvido por John H. Holland na década de 1960. O AG se baseia na ideia de que novas populações são

FIGURA 18 – FORMAS BÁSICAS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL



FONTE: A autora (2024).

geradas a partir de populações antecessoras, de forma que, cada nova população gerada apresente melhor desempenho que a anterior (HAUPT; HAUPT, 2004).

O AG é um método de busca global, que apresenta as seguintes vantagens: (1) não requer derivadas, tanto para função objetivo quanto para as restrições; e (2) a ergodicidade¹² das operações de evolução do AG o tornam eficaz na busca pelo ótimo global (ZHENG *et al.*, 2004).

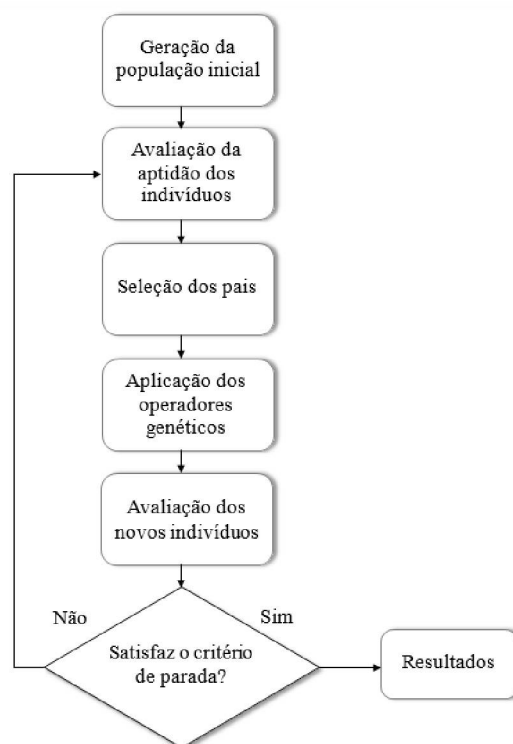
O AG inicia o processo de otimização pela geração aleatória de um conjunto de indivíduos, o qual caracteriza a população inicial. Essa população inicial está associada a um conjunto de pontos no espaço de projeto. Para cada indivíduo é calculado o valor da função objetivo e, a partir do qual, é associado um valor de aptidão. Tendo como base esses valores, são obtidos os indivíduos de melhor desempenho. Com base nos indivíduos mais aptos, é selecionado um subconjunto aleatoriamente de tamanho fixo. Esse processo é mantido até que um critério de parada seja satisfeito (ARORA, 2017). Um exemplo do funcionamento de um algoritmo genético padrão é apresentado na FIGURA 19.

Os indivíduos em AG são sequências de dígitos binários, obtidos pela codificação de um ponto do espaço de projeto, e podem representar uma possível solução do problema. Para que o AG determine respostas ótimas, são necessárias algumas operações sobre os indivíduos. Desta forma, os termos utilizados para definir os parâmetros do AG são apresentados na sequência. Para isso, as definições mais relevantes são aqui apresentadas com base principalmente nos trabalhos de Arora (2017) e Sivanandam e Deepa (2008):

- **Cromossomo e genoma:** normalmente, se refere à solução candidata do problema, ou seja, é um ponto de projeto do problema de otimização. Esse ponto é apresentado no formato codificado por valores binários (0 ou 1), os quais são denominados de bits e representam as variáveis de projeto do problema. Na FIGURA 20 é apresentado um cromossomo de 15 bits;

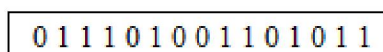
¹² Por meio de cálculos probabilísticos, a evolução futura de um sistema pode ser determinada.

FIGURA 19 – FLUXOGRAMA DO FUNCIONAMENTO DE UM ALGORITMO GENÉTICO PADRÃO



FONTE: Adaptado de Sivanandam e Deepa (2008).

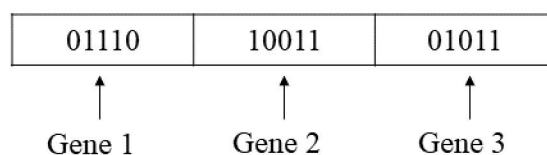
FIGURA 20 – REPRESENTAÇÃO DE UM CROMOSSOMO.



FONTE: A autora (2024).

- **Gene:** são bits únicos ou blocos de bits (*strings*) que codificam um elemento particular da solução candidata, FIGURA 21. Ou seja, uma *string* pode representar uma variável de projeto (gene);

FIGURA 21 – REPRESENTAÇÃO DE UM GENE.



FONTE: A autora (2024).

- **Genótipo:** refere-se ao conjunto particular de genes presentes em um cromossomo;
- **Fenótipo:** é o cromossomo codificado para utilização pelo problema físico;

- **Alelo:** na biologia, é a configuração de determinada característica do indivíduo, como por exemplo a cor dos olhos pode ser azul ou verde. No AG, o alelo é o valor (0 ou 1) de determinado gene;
- **Locus:** é a posição do gene no cromossomo, ou seja, a posição dentro do vetor de variáveis de projeto;
- **População:** A população é um conjunto de indivíduos (cromossomos), o qual representa um conjunto de variáveis de projeto. Na FIGURA 22 é apresentada uma população de 5 indivíduos;

FIGURA 22 – REPRESENTAÇÃO DE UMA POPULAÇÃO.

População	Cromossomo 1	0110011010
	Cromossomo 2	1001100101
	Cromossomo 3	1100110010
	Cromossomo 4	0101010101
	Cromossomo 5	1000111000

FONTE: A autora (2024).

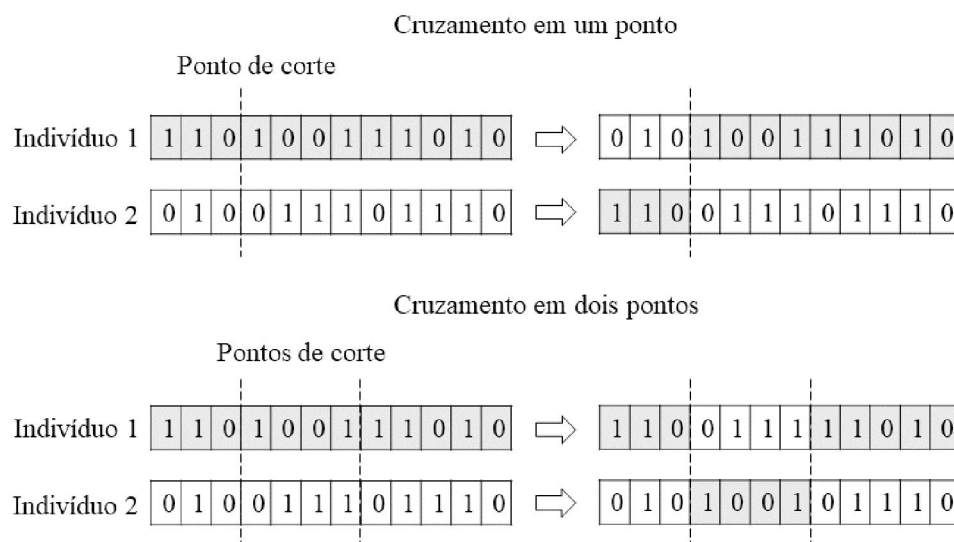
- **Geração:** representa cada iteração do processo de otimização;
- **Pais:** na criação de novos indivíduos ocorre uma troca genética, tanto na biologia quanto em AG. Os pais são indivíduos de uma população que possuem as melhores aptidões e que são utilizados para gerar uma nova população;
- **Filhos:** são os cromossomos gerados pelo cruzamento de dois pais selecionados com base em seus valores de aptidão e probabilidade, a partir da população gerada na iteração anterior;
- **Imigração:** é introduzir à população, indivíduos totalmente novos de forma aleatória. A imigração é um esforço adicional para aumentar a diversidade da população. Esta etapa é adicionada ao processo, quando o progresso em direção ao ponto de ótimo se torna muito lento. Assim, a inserção de novos indivíduos visa acelerar a convergência;
- **Aptidão:** é a função responsável por medir a qualidade de um indivíduo. Em outras palavras, para um dado indivíduo, a função objetivo é avaliada e, posteriormente, é calculada a aptidão. O valor da aptidão mostra quão boa é a solução e quão perto o cromossomo está do cromossomo (ponto) ótimo, comparando-a com as aptidões calculadas para soluções de gerações anteriores.

3.10.1 Operadores genéticos

Os operadores genéticos são responsáveis por gerar melhores populações a cada geração, de forma que a aptidão média de cada população seja melhorada. Esse processo ocorre até que um critério de parada seja satisfeito, ou que um limite de gerações seja atingido (ARORA, 2017). Para realizar a tarefa mencionada, os operadores genéticos utilizados são:

- **Seleção:** nesta etapa, dois pais da população corrente são selecionados para posterior utilização na etapa de cruzamento. O objetivo desta etapa, é selecionar aleatoriamente os indivíduos com base nos maiores valores de aptidão da população corrente, para serem cruzados e gerarem uma nova população descendente mais apta. As formas mais conhecidas de seleção são roleta e torneio. Na seleção por roleta, cada indivíduo possui uma fração de uma roleta, conforme seu valor de aptidão: indivíduos com maior aptidão ocupam uma fração maior da roleta e indivíduos com menor aptidão, ocupam fração menor da roleta. Na seleção por torneio, os indivíduos de uma população são selecionados aleatoriamente e comparam-se as aptidões. O mais apto é selecionado para ser um pai, e este indivíduo é colocado novamente na população original, e pode ser escolhido novamente para ser o outro pai;
- **Cruzamento:** nesta etapa, os dois pais selecionados na etapa de seleção são cruzados a fim de gerar dois filhos (dois indivíduos), a princípio, com maior aptidão. O objetivo do cruzamento é gerar uma população mais apta que a população da anterior. O cruzamento é realizado combinando ou misturando segmentos dos cromossomos dos pais. Existem várias técnicas para realizar o cruzamento, ponto simples, ponto duplo, múltiplos pontos, entre outros. Na técnica de ponto simples, por exemplo, dois indivíduos são selecionados de forma aleatória, e um ponto da *string* de cada indivíduo é selecionado. Esses dois segmentos selecionados de cada indivíduo são trocados e novos indivíduos são gerados. A técnica de ponto simples e ponto duplo são apresentadas na FIGURA 23;
- **Mutação:** a mutação é um operador utilizado para adicionar diversidade genética à população e evitar que o algoritmo convirja para um mínimo local. A etapa de mutação realiza a tarefa de recuperar materiais genéticos que possam ter sido perdidos durante as etapas de seleção e cruzamento e, também, por gerar novos indivíduos que explorem áreas do domínio que não foram exploradas até então. Uma etapa de mutação simples, consiste em inverter o valor (de 0 para 1, ou de 1 para 0) de algum gene escolhido de forma aleatória com base em uma determinada probabilidade;
- **Elitismo:** no elitismo, o melhor cromossomo ou os melhores cromossomos são copiados para a próxima população. Com isso o algoritmo mantém alguns indivíduos para que não sejam perdidos na etapa de geração.

FIGURA 23 – CRUZAMENTO ENTRE DOIS INDIVÍDUOS UTILIZANDO A TÉCNICA DE PONTO SIMPLES E PONTO DUPLO



FONTE: A autora (2024).

3.10.2 Operadores de controle

Os operadores de controle influenciam diretamente no funcionamento do AG e podem ajudar ou atrapalhar na busca pelo ótimo. Alguns dos principais operadores estão apresentados na sequência:

- **Geração da população inicial:** eventualmente, a população inicial pode ser gerada de forma aleatória, porém poderá ser gerada, também, a partir de pontos considerados como boas soluções para o problema. Estes últimos podem ser previamente conhecidos. Contudo, a população inicial deve conter material genético suficiente para cobrir o espaço de busca e fornecer maior diversidade;
- **Tamanho da população:** normalmente, o tamanho da população inicial depende da complexidade do problema e deve compreender material genético suficiente para explorar todo o espaço de busca. Pequenas populações podem limitar o espaço de busca e causar convergência prematura. Grandes populações podem representar uma maior diversidade, de forma que se tenha uma melhor cobertura do domínio. Com isso, é possível evitar a convergência prematura do algoritmo. Porém, maiores populações podem necessitar de recursos computacionais que reduzam o tempo de avaliação da população;
- **Codificação:** é uma forma de representar os genes presentes em um cromossomo. Na maioria das vezes é representado por uma *string* binária. E, para isso, existem formas de converter valores contínuos em binários e vice-versa. Segundo Rao (2019), o valor de uma variável l obtida na forma decimal a partir de valores binários (b) é dada por

$$l = \sum_{k=0}^{d_b} 2^k b_k, \quad (3.120)$$

onde a variável b assume valores de 0 ou 1, e $k = 0, 1, 2, \dots, d_b$, sendo d_b o número de dígitos binários. No entanto, para representar a variável contínua com alta precisão, Δx , é necessário determinar o número de dígitos binários, o qual é dado por

$$2^{d_b} \geq \frac{x^{(u)} - x^{(l)}}{\Delta x} + 1, \quad (3.121)$$

onde $x^{(u)}$ e $x^{(l)}$ são os limites superior e inferior, respectivamente.

- **Tamanho do cromossomo:** é definido pela quantidade de bits existente em um indivíduo;
- **Taxa de cruzamento:** essa taxa indica a frequência com o qual o cruzamento será realizado. Se houver cruzamento, os filhos terão genes de ambos os pais, caso não haja cruzamento, os filhos serão cópias idênticas dos pais. Quanto maior for a taxa de cruzamento mais rápido será o surgimento de novos indivíduos. Por outro lado, quanto menor for a taxa o algoritmo pode se tornar lento;
- **Taxa de mutação:** é responsável por determinar a frequência com a qual partes dos cromossomos deverão sofrer mutação. Se não houver mutação (nesse caso, a taxa de mutação é de 0%), após a etapa de cruzamento, os descendentes são copiados diretamente sem alteração. Caso haja mutação de 100%, todos os genes do cromossomo são modificados. Quando a taxa de mutação é muito elevada, a busca pelo ótimo se torna essencialmente aleatória. Entretanto, se a taxa de mutação for um valor razoável, é reduzida a probabilidade do algoritmo convergir para algum mínimo local.

3.10.3 Critérios de parada

O algoritmo de otimização deverá cessar após atingir algum critério previamente definido. Alguns critérios de parada são apresentados (SIVANANDAM; DEEPA, 2008; HAUPT; HAUPT, 2004; ARORA, 2017):

- **Número máximo de gerações:** o AG pára quando atinge um número máximo de gerações estabelecido inicialmente;
- **Nenhuma mudança no valor da aptidão:** quando o AG alcançar o melhor valor de aptidão da população por um número estabelecido de gerações seguidas, o algoritmo pára. Entretanto, caso o número de máximo de gerações seja atingido, antes do número de gerações sem que haja alteração no valor de aptidão, o algoritmo pára;

- **Convergência da função objetivo:** o algoritmo pára somente quando não houver melhoria na função objetivo em gerações consecutivas. Normalmente uma pequena tolerância, ε , é definida, e até que a diferença entre os valores da função objetivo, para duas gerações consecutivas, não seja menor que essa pequena tolerância, o algoritmo não pára.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, é apresentada a metodologia de otimização topológica de CRs, aqui proposta, com vistas ao controle passivo de vibrações em estruturas do tipo placa. O projeto de controle de vibrações é realizado pela aplicação de otimização topológica das CRs, por meio da utilização de um AG. Além disso, é exposta uma forma de controle de *checkerboard*, a qual se dá por meio da utilização de uma restrição de perímetro.

Uma outra metodologia é desenvolvida e aplicada aos indivíduos gerados randomicamente pelo AG, de forma a mutá-los e melhorá-los em termos de *checkerboard*. Esta, se baseia em classificar os genes de maior eficiência em reduzir a função objetivo e utilizá-los para melhorar as soluções candidatas do AG. Essa técnica é utilizada na etapa de mutação do AG e é baseada no conceito de melhoria.

No capítulo, são exibidos o problema padrão de otimização, a metodologia de mutação baseada no conceito de melhoria, a metodologia para controlar o *checkerboard* e os pseudo códigos, quando necessários.

4.1 FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO ALGORITMO GENÉTICOS

Nesta seção, é apresentada a metodologia de otimização topológica aplicada ao controle passivo de placas semiespessas, via cobertura parcial por CR utilizando um algoritmo genético (AG). A função objetivo utilizada é uma aproximação da norma Euclidiana da função resposta em frequência associada à componente k_s -ésima da matriz inertância, A_{ks} . Por sua vez, as variáveis de projeto são os valores binários (0 e 1), indicadores de existência ou não de CR em cada elemento finito. O percentual em área da placa que é coberta pela CR é inserida no problema de otimização como uma restrição. Além disso, uma restrição de perímetro é imposta ao problema com o intuito de mitigar a ocorrência de *checkerboard*.

O processo de otimização inicia pela discretização da estrutura base, em n_{el} elementos finitos. O problema consiste em determinar se cada EF (elemento finito) poderá ou não receber CR. A utilização da otimização de topologia busca determinar a posição ótima de CR que minimize a resposta de vibração em uma certa faixa de frequências de interesse e que reduza a função objetivo considerada. Esta função é a norma L_2 da função inertância dada pela equação

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{\int_{\Omega_i}^{\Omega_f} |A_{ks}(\Omega)|^2 d\Omega}, \quad (4.1)$$

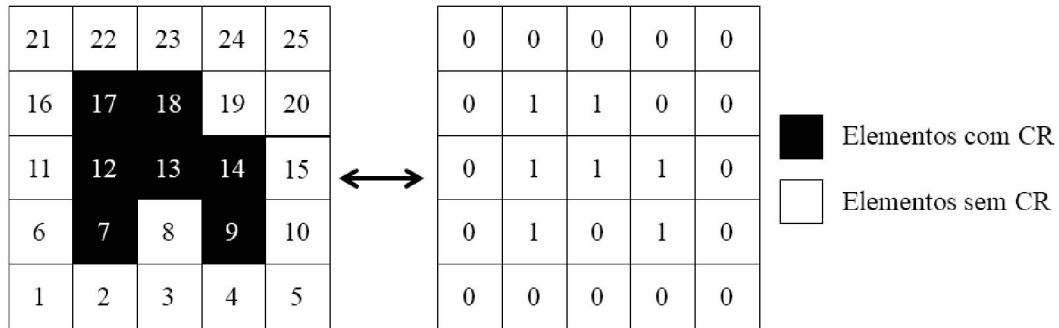
sendo que Ω_i e Ω_f são as frequências inicial e final, respectivamente, que limitam o intervalo de frequência em estudo. Considerando valores discretos obtidos no intervalo de frequência a equação (4.1) pode ser reescrita como

$$f(\mathbf{x}) = \Delta\Omega \sum_{q=1}^{n_f} |A_{ks}(\Omega)|^2, \quad (4.2)$$

onde $\Delta\Omega = ((\Omega_f - \Omega_i)/n_f)$ e n_f é o número de valores discretos de frequência dentro do intervalo de interesse.

As variáveis de projeto possuem relação biunívoca com os elementos da malha. O algoritmo de otimização escolhido é o algoritmo genético (AG), que pode ser configurado como um algoritmo de tomada de decisão binária. Nesse contexto, o vetor de variáveis de projeto, representado por $\mathbf{x}$ é composto por valores binários (0 ou 1). Consequentemente, cada elemento desse vetor indica a presença (se é igual a 1) ou a ausência (se é igual a 0) de CR, conforme mostrado na FIGURA 24. A dimensão do vetor de variáveis de projeto é equivalente ao número total de elementos da malha, identificado como n_{el} .

FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE PROJETO



FONTE: A autora (2024).

4.1.1 Restrição sobre a área máxima recoberta com CR

Como mencionado anteriormente, apenas uma parcela da área da placa é coberta por CR. Desta forma, a máxima de área (S_{max}) de recobrimento por CR é imposta como uma restrição ao problema de otimização, conforme

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{e=1}^{n_{el}} x_e S_e - S_{max}}{S_{max}} \leq 0, \quad (4.3)$$

onde S_e é a área de cada elemento e x_e assume valores de 0 ou 1.

4.1.2 Restrição relativa ao perímetro

A partir dos conceitos relacionados ao controle de perímetro, apresentados na Seção 2.3.2, e como o algoritmo de otimização utilizado neste trabalho é o AG, não há necessidade de

obter a derivada das equações referentes ao perímetro. Assim, a equação (2.3) pode ser reescrita, considerando nulo o parâmetro ε , como

$$p(\rho) = \sum_{i=1}^I l_i \left(\sqrt{\langle \rho \rangle_i^2} \right). \quad (4.4)$$

O termo $\langle \rho \rangle_i$ é o salto da densidade do material através da interface i de comprimento l_i do conjunto de todas as interfaces (arestas) na malha em análise. No sentido do que está apresentado, a restrição relacionada ao perímetro pode ser colocada na forma adimensional como

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}) - p_{lim}}{p_{lim}} \leq 0. \quad (4.5)$$

O termo $p(\mathbf{x})$ é o perímetro das CRs em cada configuração $\mathbf{x}$ e p_{lim} é o valor limite máximo pré-definido para o perímetro total.

4.1.3 Problema de otimização proposto

O problema de otimização de topologia, posto na forma padrão (ARORA, 2017), considerando as duas restrições, é apresentado como

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in B^{n_{el}}} \quad & f(\mathbf{x}) = \Delta\Omega \sum_{q=1}^{n_f} |A_{ks}(\Omega)|^2 \\ \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{e=1}^{n_{el}} x_e S_e - S_{max}}{S_{max}} \leq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}) - p_{lim}}{p_{lim}} \leq 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo que $B^{n_{el}}$ é o conjunto de vetores binários de dimensão n_{el} .

4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITO

Como apresentado na seção anterior, o problema geral de otimização utilizado neste trabalho apresenta duas restrições. Uma delas limita a dimensão da área de recobrimento por CR e a outra limita o comprimento do perímetro das CRs. Esta última restrição tem como objetivo mitigar a formação de *checkerboard*. Para resolver o problema de otimização, o AG é utilizado. Contudo, o AG é naturalmente adequado para resolver problemas irrestritos. Desta forma, este trabalho optou por transformar o problema dado pela equação (4.6) em um problema de otimização irrestrito. Para isso, é utilizado o conceito de função de penalidade de restrições.

Métodos de função de penalidade, modificam um problema de otimização restrito transformando-o em um problema irrestrito e a solução é obtida por meio da resolução de uma sequência de problemas de minimização irrestrita. Neste trabalho, o método de penalização

externa quadrática é utilizado. Assim, considera-se um problema de minimização sujeito a n_g restrições de desigualdade, posto na forma padrão (RAO, 2019), e dado por

$$\begin{aligned} &\text{Encontre } \mathbf{x} \text{ que minimize } f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a: } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_g, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $g_j(\mathbf{x})$ é a j -ésima função de restrição de desigualdade. Esta equação pode ser reescrita considerando a definição da função objetivo associada ao k -ésimo problema de otimização irrestrito, $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ (RAO, 2019)

$$\phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{n_g} \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle^q, \quad (4.8)$$

onde r_k é uma constante positiva conhecida como parâmetro de penalidade, e q é uma constante positiva, que normalmente é igual a 2. Por sua vez, a função $\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle$ é definida como (RAO, 2019)

$$\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle = \max \langle g_j(\mathbf{x}), 0 \rangle = \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) & \text{se } g_j(\mathbf{x}) > 0 \\ & \text{(restrição violada)} \\ 0 & \text{se } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \text{(restrição é satisfeita).} \end{cases} \quad (4.9)$$

O termo mais a direita da equação (4.8) tem como efeito elevar o valor da nova função objetivo, $\phi(\mathbf{x}, r_k)$, à medida em que cada restrição é violada (RAO, 2019).

Assim, para um problema de minimização irrestrito, tem-se que a nova função objetivo, associada ao k -ésimo problema, é dada por

$$\phi(\mathbf{x}, r_k) = \Delta\Omega \sum_{q=1}^{n_f} |A_{ks}(\Omega)|^2 + r_k \left(\left\langle \frac{\sum_{i=1}^{n_{el}} x_i S_i - S_{max}}{S_{max}} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{p(\mathbf{x}) - p_{lim}}{p_{lim}} \right\rangle^2 \right), \quad (4.10)$$

sendo que os dois termos mais a direita, os quais são multiplicados pelo parâmetro de penalização, r_k , estão na forma adimensional. Isso é realizado para que, ao se multiplicar por r_k , se obtenha valores de mesmas unidade e ordem de grandeza que a função objetivo. Por fim, o problema padrão para um problema irrestrito pode ser escrito como

$$\min_{\mathbf{x} \in B^{n_{el}}} \phi(\mathbf{x}, r_k) = \Delta\Omega \sum_{q=1}^{n_f} |A_{ks}(\Omega)|^2 + r_k \left(\left\langle \frac{\sum_{i=1}^{n_{el}} x_i S_i - S_{max}}{S_{max}} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{p(\mathbf{x}) - p_{lim}}{p_{lim}} \right\rangle^2 \right). \quad (4.11)$$

4.2.1 Atualização do parâmetro de penalização

Nesta seção é apresentado um esquema adaptativo de obtenção do parâmetro de penalização das restrições, r_k , baseado na média dos valores da função objetivo e nível de violação

de cada restrição ao longo de cada geração do AG. Este esquema não exige que nenhum parâmetro de penalidade seja previamente informado pelo usuário e foi desenvolvido por Barbosa e Lemonge (2003).

A função objetivo proposta pelo método é escrita como:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \text{ é viável} \\ F(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n_g} r_k v_k, & \text{outro} \end{cases} \quad (4.12)$$

onde

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } f(\mathbf{x}) > \bar{f}(\mathbf{x}) \\ \bar{f}(\mathbf{x}), & \text{outro.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Nesta expressão, $\bar{f}(\mathbf{x})$ é a média dos valores da função objetivo para a população corrente, n_g é o número de restrições de desigualdade do problema, r_k é o parâmetro de penalidade para a k -ésima restrição e para a geração corrente, e v_k são as violações da k -ésima restrição. Como no caso deste trabalho, só há restrições de desigualdade, a violação v_k da k -ésima restrição de desigualdade é dada pela equação (4.9). Entretanto, para o caso do problema deste trabalho, $n_g=2$. O parâmetro de penalização r_k é obtido pela seguinte equação:

$$r_k = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n_{ind}} f(\mathbf{x}) \right|}{\sum_{l=1}^{n_g} \left[\sum_{i=1}^{n_{ind}} v_l(\mathbf{x}) \right]^2} \left[\sum_{k=1}^{n_{ind}} v_k(\mathbf{x}) \right], \quad (4.14)$$

onde n_{ind} se refere ao número de indivíduos da população. Os valores de r_k podem oscilar muito devido aos valores da função objetivo ou até mesmo das violações. Para evitar que isso aconteça, os autores Barbosa e Lemonge (2008) sugerem que o fator de penalização seja estimado por meio de uma média ponderada entre o valor corrente de r_k e um novo valor predito por:

$$r_k^{(novo)} = \theta r_k^{(novo)} + (1 - \theta) r_k^{(corrente)}, \quad (4.15)$$

onde $\theta \in [0,1]$ é equivalente a um fator de relaxação.

4.3 AG COM RESTRIÇÃO DE PERÍMETRO

A população gerada randomicamente pelo AG pode resultar em indivíduos que apresentem muito *checkerboard* e, conseqüentemente, caracterizado por elevados valores de perímetro. Buscando reduzir estes problemas, este trabalho propõe uma metodologia baseada no processo de mutação de indivíduos gerados aleatoriamente pelo AG. Esta mutação se baseia no conceito de melhoria. Além disso, tendo como referência esse conceito, busca-se gerar indivíduos que melhorem a eficiência no controle de vibração.

Na sequência, uma metodologia para controlar o perímetro também é apresentada, pois apesar da mutação, os indivíduos gerados ainda podem ter um perímetro muito elevado. Para contornar esse problema, é utilizada uma metodologia para que o perímetro do indivíduo respeite um perímetro limite (p_{lim}) imposto previamente. Os pseudo códigos são apresentados quando necessário.

4.3.1 Análise de melhoria

A análise de melhoria (AM) tem como objetivo avaliar o quanto a adição de CR a um único elemento finito pode alterar o valor da função objetivo (equação 4.2). Portanto, embora variáveis discretas (0-1) estejam sendo utilizadas, este conceito é similar à obtenção da análise de sensibilidade por diferenças finitas em problemas com variáveis contínuas. Esta análise se baseia em classificar os elementos finitos da estrutura com base em sua eficiência em reduzir a vibração.

O processo de AM inicia pela discretização da estrutura base, em n_{el} elementos finitos e, posteriormente, são realizadas análises harmônicas para obter os valores da função objetivo para o sistema primário, α_{sp} , e para cada EF recebendo CR isoladamente, α_e . A variável α_e fornece o valor da função objetivo para cada e -ésimo elemento da malha recebendo CR e a variável $\mathbf{x}_e$ representa a configuração de CR do e -ésimo elemento.

Assim, para determinar o quanto um determinado elemento é eficiente na redução da vibração da estrutura, é realizada a diferença entre a aproximação da norma euclidiana da função inertância calculada para o sistema sem amortecimento, α_{sp} , e considerando cada EF recebendo CR, α_e , por meio da equação

$$I_e = \alpha_{sp} - \alpha_e. \quad (4.16)$$

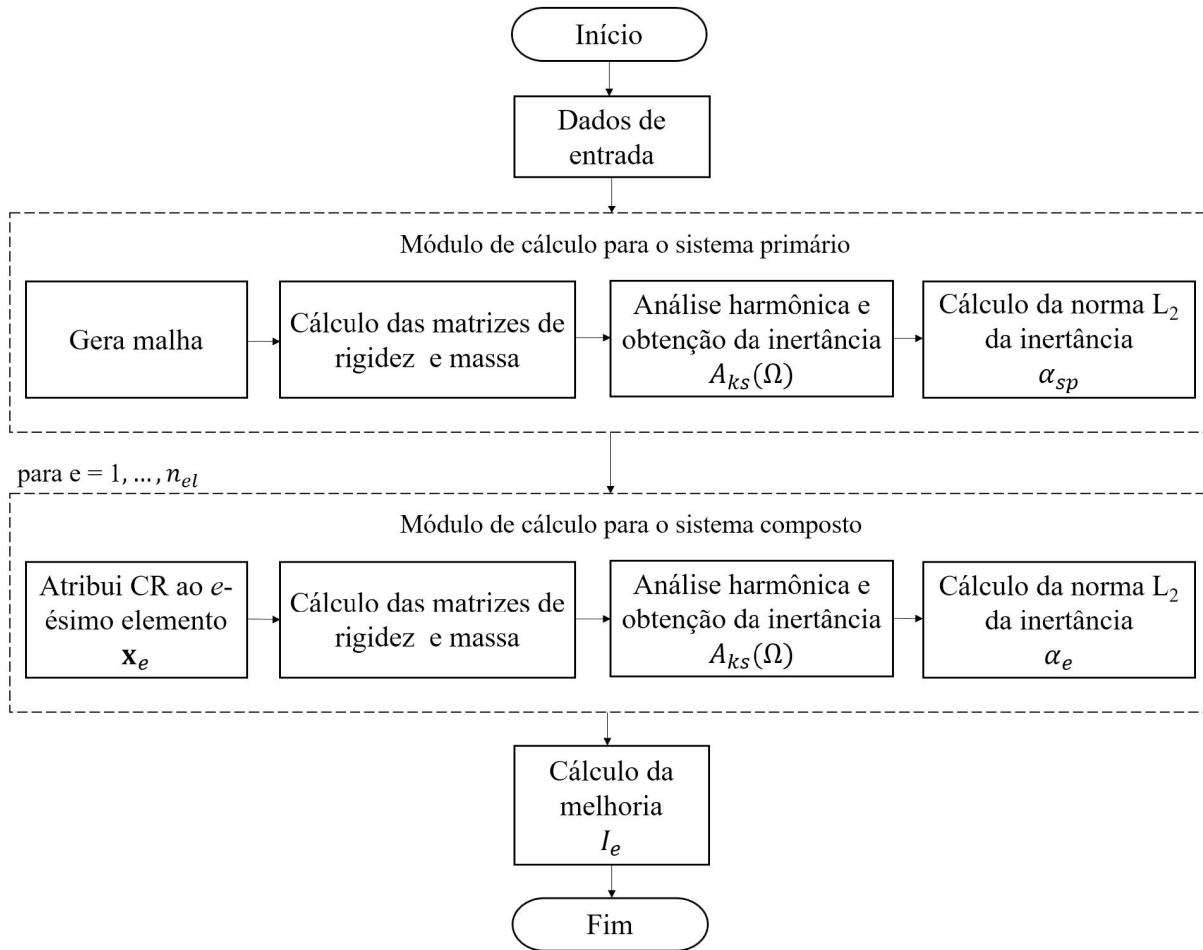
Ou seja, maiores valores de I_e apresentam maior redução no valor da inertância, causado pelo e -ésimo elemento.

A metodologia baseada em análise de melhoria é apresentada na forma de fluxograma na FIGURA 25. Todas as análises por elementos finitos e a obtenção dos parâmetros modais e de α_e são realizadas nas rotinas implementadas no *software* MATLAB.

4.3.2 Mutação modificada (viciada)

Nesta seção, o índice de melhoria é utilizado para melhorar randomicamente um indivíduo gerado, também randomicamente, pelo AG. Para isso, tomando um indivíduo genérico $\mathbf{x}$, são adicionados os genes mais eficientes, bem como são removidos os genes menos eficientes. Com isso pretende-se obter uma população mais eficiente do ponto de vista de *checkerboard* e de amortecimento estrutural. Os elementos (genes) mais eficientes são aqueles que apresentam maiores valores do índice de melhoria, I_e (equação 4.16), e indicam que tais elementos causam

FIGURA 25 – ESQUEMA GRÁFICO DA ANÁLISE DE MELHORIA



FONTE: A autora (2024).

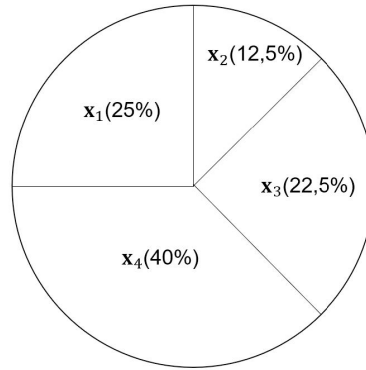
maior redução no valor da função objetivo. Já os elementos menos eficazes são aqueles que apresentam menor índice de melhoria.

Os genes que devem ser modificados, são determinados com base nos valores do índice de melhoria e são modificados na etapa de mutação. Para isso, utiliza-se o método da roleta ponderada (RAO, 2019). Para cada gene é atribuída uma fatia da roleta de forma que o tamanho da fatia é proporcional ao quanto ele apresenta de melhoria. Com esse método, os genes com maior valor de melhoria são mais prováveis de serem escolhidos para formar o indivíduo, e os genes com menor valor de índice de melhoria são mais prováveis de serem excluídos do indivíduo. A seleção dos genes que irão compor o indivíduo dependerão da parcela que esse gene ocupa na roleta. O cálculo da probabilidade de um e -ésimo gene ser escolhido para formar um indivíduo, bem como a probabilidade de um e -ésimo gene ser escolhido para ser retirado de um indivíduo pelo método da roleta ponderada é realizado pela equação

$$p_g(x^e) = \frac{F}{\sum_{j=1}^{n_{el}} F_{(j)}}, \quad (4.17)$$

onde n_{el} é o número de elementos da malha que é equivalente ao número de genes de um indivíduo, $p_g(x^e)$ é a probabilidade do gene x^e ser escolhido, se F for I_e , ou de ser retirado do indivíduo, se F for igual a $P_e = I_{max} - I_e$, onde I_{max} é o valor máximo do índice melhoria e P_e representa os genes com menor valor de melhoria. O pseudo código para o método da roleta ponderada é apresentado no *Algoritmo 1*.

FIGURA 26 – REPRESENTAÇÃO DO MÉTODO DA ROLETA PONDERADA



FONTE: A autora (2024).

Algoritmo 1 Roleta ponderada

```

1: Input: Vetor de melhoria,  $I_e$  (ou  $P_e$ );
2: Output: Vetor dos melhores elementos,  $e_m$  (ou o vetor dos piores elementos  $e_p$ );
3: Calcule a soma dos valores de  $I_e$ :  $I_{sum} = \sum I_e$ ;
4: Calcule o vetor de probabilidade de melhoria de cada gene do indivíduo:  $p_m = I_e / I_{sum}$ ;
5: Calcule a soma cumulativa de  $p_m$  e salve na variável  $s$ ;
6: Gere  $n_{cr}$  elementos aleatórios:  $r = rand(1, n_{cr})$ ;
7: Sorteie os elementos conforme os valores de  $s$ ;
8: Atualize a variável  $s1 = s$ ;
9: for  $k = 1 : length(r)$  do
10:    $ind_{\alpha}(k,1) = find(s1 > p_g(k,1), 1)$ ;
11:   if  $s1 = \emptyset$  then
12:     while  $s1 = \emptyset$  do
13:        $r1 = rand(1,1)$ ;
14:        $p1 = r1 \cdot s(end)$ ;
15:        $ind_{\alpha}(k,1) = find(s1 > p1, 1)$ ;
16:     end while
17:      $e_m(k,1) = \alpha(ind_{\alpha}(k,1))$ ;
18:     Atualize:  $s1(ind_{\alpha}(k,1), 1) = 0$ ;
19:   else
20:      $e_m(k,1) = \alpha(ind_{\alpha}(k,1))$ ;
21:     Atualize:  $s1(ind_{\alpha}(k,1), 1) = 0$ ;
22:   end if
23: end for

```

A partir do exposto na metodologia de mutação viciada, consideremos uma dada população inicial, X , gerada de forma aleatória por meio do AG, e de dimensões $n_{el} \times n_{ind}$, sendo que n_{ind} representa o número de indivíduos da população. Cada indivíduo segue um critério de

recobrimento por CR controlado por um percentual, definido pela variável Pr_{cr} . O número de elementos da malha com CR, referentes à esse percentual é dado pela variável n_{cr} . A malha de elementos finitos utilizada neste trabalho é uniforme, o que significa que todos os elementos da malha possuem a mesma área, S_e . Assim, para determinar o número de elementos n_{cr} com CR, é necessário determinar a área de cobertura, S_c , referente ao percentual Pr_{cr} , a qual é dada por:

$$S_c = Pr_{cr} \cdot S_p, \quad (4.18)$$

onde S_p é a área total da superfície da placa. Por fim, o número de elementos com CR é determinado pela equação:

$$n_{cr} = \frac{S_c}{S_e}. \quad (4.19)$$

Dada uma população inicial, identificada por $\mathbf{X}_i$, de dimensões $n_{el} \times n_{ind}$, cada indivíduo, $\mathbf{x}_i$ (dimensões $n_{el} \times 1$), desta população, será modificado por meio da mutação modificada. Para isso o seguinte procedimento sequencial é realizado:

Passo 1. Inicialmente, para cada indivíduo $\mathbf{x}_i$ são identificados os genes (elementos) que contêm CR e são armazenados na variável $\mathbf{e}_{cr}$;

Passo 2. Em uma etapa posterior, o método da roleta ponderada (*Algoritmo 1*) é utilizado para determinar os elementos mais eficientes, os quais são armazenados na variável $\mathbf{e}_m$, e os elementos menos eficientes, armazenados na variável $\mathbf{e}_p$. Os vetores $\mathbf{e}_{cr}$, $\mathbf{e}_m$ e $\mathbf{e}_p$ contêm os índices referentes aos elementos da malha que contêm CR para as respectivas situações. As dimensões dos vetores $\mathbf{e}_m$ e $\mathbf{e}_p$ são iguais a n_{cr} ;

Passo 3. Na sequência, os valores do vetor $\mathbf{e}_{cr}$ são comparados com os valores dos vetores $\mathbf{e}_m$ e $\mathbf{e}_p$. O objetivo é identificar os elementos de $\mathbf{e}_m$ que não estão em $\mathbf{e}_{cr}$ e os elementos de $\mathbf{e}_p$ que estão em $\mathbf{e}_{cr}$. Estes valores são armazenados em novas variáveis, $\mathbf{el}_m$ e $\mathbf{el}_p$, respectivamente;

Passo 4. Em seguida os elementos $\mathbf{el}_m$ são adicionados à condição inicial $\mathbf{e}_{cr}$ e os elementos de $\mathbf{el}_p$ são retirados de $\mathbf{e}_{cr}$, mantendo o número de elementos com CR, n_{cr} , pré-estabelecido anteriormente;

Passo 5. Caso aconteça da dimensão do vetor $\mathbf{e}_{cr}$ ser maior (ou menor) que n_{cr} , as variáveis α_e , I_e e P_e são atualizadas, excluindo os elementos que já estão em $\mathbf{e}_{cr}$;

Passo 6. Os passos 2 ao 5 são repetidos até que o tamanho do vetor $\mathbf{e}_{cr}$ seja n_{cr} ;

Passo 7. Atualiza $\mathbf{x}_i$, atribuindo o valor igual a 1 aos genes do vetor $\mathbf{e}_{cr}$ e zero aos demais, insere esse indivíduo à nova população $\mathbf{X}_v$, calcula o perímetro deste indivíduo e armazena em $\mathbf{p}$.

4.4 Controle do *checkerboard* via controle do perímetro

Nesta seção, é apresentada uma metodologia para controlar e reduzir o perímetro de forma que a distribuição das CRs mitiguem a geração de *checkerboard*. Por meio da subseção anterior, foi obtida uma população, $\mathbf{X}_v$, que agora se encontra viciada. Numa etapa posterior é importante determinar o perímetro que cada indivíduo apresenta, ou seja, qual é o perímetro para cada configuração de CR. Valores muito altos para o perímetro podem indicar a presença de *checkerboard*, valores menores de perímetro apresentam menos *checkerboard* ou até mesmo evitam este fenômeno. Além disso, a metodologia, que aqui é apresentada, visa gerar indivíduos que não violem a restrição imposta ao perímetro durante o processo de otimização, portanto, que atenda um valor de perímetro limite (p_{lim}).

Para obter indivíduos com o perímetro menor ou igual ao perímetro limite, o seguinte procedimento sequencial foi realizado:

- Passo 1.** Para um dado indivíduo $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, \dots, n_{ind}$) da população viciada $\mathbf{X}_v$, calcula-se o perímetro, p_i ;
- Passo 2.** Verifique se o perímetro p_i do indivíduo atende à condição de perímetro limite, p_{lim} . Caso o perímetro p_i seja menor que o p_{lim} , armazene o valor do perímetro e vá para o próximo indivíduo ($i + 1$). Caso o perímetro da configuração corrente seja maior que p_{lim} , e enquanto isso for verdade, o seguinte passo a passo é realizado:
- Passo 3.** Inicie o contador $k = 1$, atualize $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_i$ e armazene $p_k = p_i$;
- Passo 4.** Adicione CR de elemento em elemento à configuração corrente, $\mathbf{x}_k$ e calcule o perímetro. Para atribuir, CR à cada elemento da configuração $\mathbf{x}_k$ à cada valor igual a zero atribui-se o valor igual a 1 e calcula-se o perímetro. Os valores do perímetro são armazenados na variável $\mathbf{p}_{ad}$, o qual é um vetor de dimensão $n_{el} - n_{cr} \times 1$. Sendo que n_{el} é o número de elementos da malha e o termo n_{cr} representa o número de elementos que possuem CR, do qual Pr_{cr} é o percentual de CR. Os valores de $\mathbf{p}_{ad}$ são ordenados em ordem crescente e os índices dos elementos são armazenados na variável $\mathbf{e}_{ad}$. Isso é feito para analisar o quanto a adição de um elemento por vez, à configuração corrente pode manter ou reduzir o perímetro;
- Passo 5.** Determine os valores de $\mathbf{p}_{ad} \leq p_k$ e armazene em e_{ad}^* o melhor elemento, ou seja, aquele que reduz o perímetro da configuração corrente $\mathbf{x}_k$. Caso não haja redução no valor do perímetro, armazene aquele elemento que mantém o perímetro igual a p_k ;
- Passo 6.** Retire elemento a elemento que possui CR da configuração corrente, $\mathbf{x}_k$. Aqui o processo oposto ao apresentado no passo 4 é realizado. Tem-se a configuração corrente com os elementos que possuem CR, e agora retira-se elemento a elemento que possui CR e calcula o perímetro. Os valores do perímetro são armazenados na variável $\mathbf{p}_{del}$, o qual é um

vetor de dimensão $n_{cr} \times 1$. Os valores de $\mathbf{p}_{del}$ indicam os elementos que ao serem retirados da configuração inicial mais reduzem ou mantém o perímetro. Os índices dos elementos que reduzem o perímetro (ou mantém) são armazenados na variável $\mathbf{e}_{del}$;

Passo 7. Determine o mínimo valor de $\mathbf{p}_{del}$ e armazene na variável e_{del}^* o índice referente a esse perímetro. Esse elemento é aquele que reduz ou mantém o perímetro ao ser deletado da configuração corrente;

Passo 8. Atualize o contador $k = k + 1$ e atualize a variável $\mathbf{x}_{k+1}$ com os elementos e_{ad}^* e e_{del}^* , os quais são adicionados e retirados, respectivamente;

Passo 9. Calcule o perímetro p_{k+1} da configuração $\mathbf{x}_{k+1}$;

Passo 10. Verifique se: $p_{k+10} = p_k$, vá para o próximo indivíduo, caso contrário,

Passo 11. Atualize $p_i = \min(\mathbf{p}_k)$ e atualize a população $\mathbf{X}_v$.

Ao fim do procedimento sequencial apresentado, deseja-se obter um indivíduo sem *checkerboard* e com um valor de perímetro menor.

4.4.1 Definição do valor do p_{lim}

O valor do perímetro limite, p_{lim} tem relação direta com a área coberta por CR, A_c , e esta área é definida a partir do percentual de cobertura, Pr_{cr} , definido inicialmente. Dito isso, considerando um percentual de cobertura Pr_{cr} , a área de cobertura, A_c , é calculada considerando uma área concentrada e retangular de relação 2:1. A partir deste pressuposto, o perímetro desta geometria é calculado e tomado como perímetro de referência, p_{ref} e o perímetro limite é calculado pela equação

$$p_{lim} = \alpha \cdot p_{ref} \quad (4.20)$$

onde α é uma constante positiva que regula o valor de p_{lim} . Valores muito altos para p_{lim} podem acarretar na formação de *checkerboard*.

4.5 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

4.5.1 Cálculo da aptidão

Um dos principais parâmetros do AG e que influencia fortemente em sua eficiência é a aptidão. Podem ser encontradas diversas formas de calcular a aptidão de um indivíduo, como por exemplo utilizando distribuições linear e não linear. A distribuição linear faz com que os indivíduos mais aptos tenham uma probabilidade de seleção muito semelhante aos demais. No

entanto, para melhorar o processo de seleção, podem ser utilizados pesos no cálculo da aptidão, que podem ser lineares ou não lineares.

No desenvolvimento deste trabalho, foi utilizada uma técnica de peso não linear ($SP = 3$), de forma a fazer com que os indivíduos com maior aptidão tenham maior representatividade no momento da seleção. Para isso, a aptidão foi calculada da seguinte maneira (SUMATHI *et al.*, 2008)

$$Ap = \frac{n_{ind} \lambda^{(p_k-1)}}{\sum_{i=1}^{n_{ind}} \lambda^{(i-1)}} \quad (4.21)$$

onde n_{ind} é o número de indivíduos da população, p_k é a posição que o indivíduo ocupa na população (o indivíduo menos apto tem $p_k = 1$, o indivíduo mais apto $p_k = n_{ind}$) e λ é a raiz do polinômio:

$$SP + SP\lambda + \dots + SP\lambda^{(n_{ind}-2)} + (SP - n_{ind})\lambda^{(n_{ind}-1)} = 0. \quad (4.22)$$

No processo de otimização, como a restrição referente à área máxima de cobertura por CR influencia na quantidade de variáveis de projeto, pode ocorrer de que alguns indivíduos infrinjam esta restrição. Nesse sentido, na etapa de mutação modificada foi realizada a correção do número de elementos com CR para garantir que a restrição de área de cobertura fosse satisfeita. A correção do número de elementos com CR é feita considerando o conceito de melhoria e a roleta ponderada. Ou seja, se o número de elementos com CR for maior que o devido, utiliza-se a roleta ponderada para retirar os elementos de menor valor de índice de melhoria. Se o número de elementos for menor que o devido, a roleta ponderada é utilizada para determinar os elementos que devem ser adicionados ao indivíduo e que possuem maior valor de índice de melhoria.

4.5.2 Critério de parada

A solução ótima obtida pelo AG, deve atender um dos seguintes critérios de parada utilizados:

1. Quando a diferença entre a geração atual e a vigésima geração anterior, for inferior a uma tolerância pré-determinada;
2. Quando atinge um valor limite de gerações.

4.5.3 Parâmetros do AG

Para validar os parâmetros utilizados nos operadores genéticos do algoritmo, como tamanho de população, número máximo de gerações e número de indivíduos de elite, foram realizadas várias simulações. Com isso, verificou-se que uma população de 300 indivíduos era satisfatória em termos de convergência.

Em relação ao número de gerações, procurou-se manter uma margem de tolerância para que o algoritmo encontrasse o ponto de ótimo, portanto, utilizou-se um número máximo de 300 gerações. Já em relação ao número de elitismo, 2% do número de indivíduos se mostrou interessante.

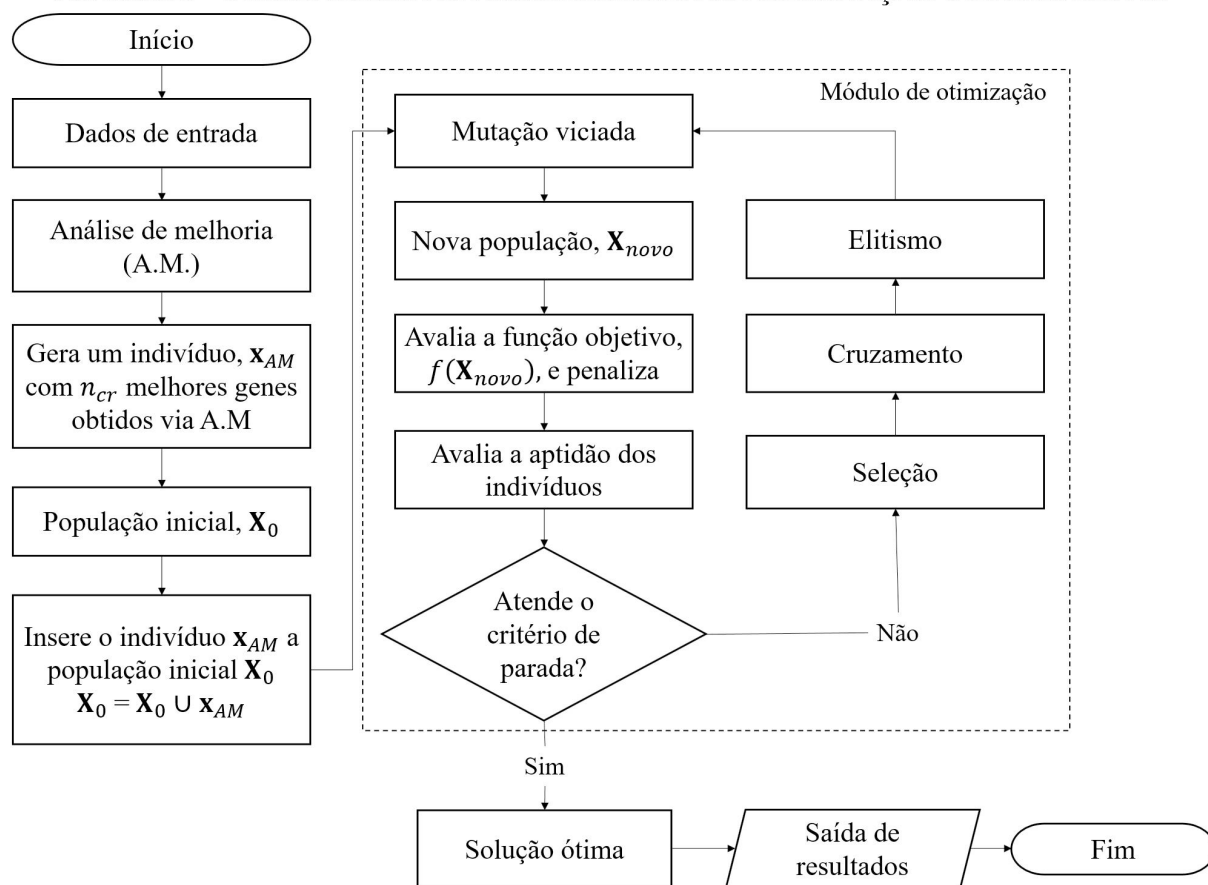
Na etapa de mutação, foi utilizada a mutação modificada apresentada na Seção 4.3.2. Para a qual, uma taxa de 1% do tamanho da população foi utilizada.

De forma geral, o processo de otimização realizado via AG inicia-se pela definição dos parâmetros iniciais, como por exemplo, dimensões da placa, espessuras das camadas, tamanho da malha, faixa de frequências de análise, condições de contorno, parâmetros do AG, percentual de cobertura e p_{lim} . Na sequência, a análise de melhoria é realizada e é obtido um indivíduo, $\mathbf{x}_{AM}$, com n_{cr} elementos de maior índice de melhoria. Em outra etapa, a população inicial $\mathbf{X}_0$ é gerada randomicamente pelo AG e esta população obedece o percentual PR_{cr} de cobertura definido inicialmente. Depois, o indivíduo $\mathbf{x}_{AM}$ é adicionado à população inicial, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0 \cup \mathbf{x}_{AM}$, e esta população é submetida à mutação viciada. O intuito de aplicar a mutação viciada é gerar indivíduos mais eficientes em termos de controle de vibração e de redução do *checkerboard*. Com isso, obtém-se uma nova população, denominada por $\mathbf{X}_{novo}$.

Para a nova população $\mathbf{X}_{novo}$, a função objetivo é avaliada e penalizada para cada indivíduo. Na sequência, os indivíduos são avaliados conforme sua aptidão. Caso, algum critério de parada seja satisfeito, a solução ótima $\mathbf{x}^*$ é armazenada e o resultado é analisado. Caso contrário, os operadores genéticos são aplicados à nova população $\mathbf{X}_{novo}$, a função objetivo é avaliada e os indivíduos são avaliados conforme sua aptidão. Esta última etapa é realizada até que um critério de parada seja satisfeito.

Todas as etapas da otimização topológica de CR via algoritmo genético com vistas ao controle passivo de estruturas do tipo placa, foram implementadas no *software* Matlab. O algoritmo está apresentado no fluxograma da FIGURA 27.

FIGURA 27 – FLUXOGRAMA DA METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO AG



FONTE: A autora (2024).

5 MATERIAIS

Neste capítulo são apresentados os materiais necessários para o desenvolvimento da análise numérica e a realização de experimentos físicos com placas tratadas com camada restrita.

5.1 MATERIAIS UTILIZADOS PARA ANÁLISE NUMÉRICA

Para o desenvolvimento da metodologia de otimização desenvolvida neste trabalho, foi utilizado um computador do Laboratório de Mecânica dos Sólidos Computacional (LaS-Com/DEMEC/UFPR), com licença nos seguintes *softwares*:

- Matlab: para implementação numérica da teoria de placas laminadas sob flexão, controle passivo ótimo de vibrações em placas tratadas com camada restrita e controle de *checkerboard*;
- Latex: para realização das atividade de redação;
- Abaqus: para a obtenção das FRFs que são comparadas com as FRFs geradas experimentalmente e por meio da implementação do modelo numérico realizado no Matlab.

Toda a formulação necessária para a solução do problema de elementos finitos, bem como a metodologia de otimização topológica proposta, foram implementadas em algoritmos desenvolvidos no Matlab. Além disso, as figuras também foram geradas utilizando essa ferramenta.

O *software* Abaqus foi utilizado para obtenção das FRFs que são comparadas com as FRFs geradas experimentalmente e com a FRF obtida utilizando o elemento finito de placa em camadas desenvolvido por Moreira e Rodrigues (2006). Para isso, foi utilizado um elemento finito de casca S4R (*shell element, 4 nodes, reduced integration*). Esse elemento finito é baseado na teoria cisalhante de primeira ordem (TCPO, também denominada como teoria de placas moderadamente espessas). Todas as FRFs obtidas pelo *software* Abaqus utilizaram os mesmos nós de excitação e de resposta que aquelas obtidas numericamente utilizando o elemento finito de placa em camadas. Além disso, foi utilizada uma malha uniforme e com o mesmo número de elementos. O número de elementos considerado foi determinado depois de realizar uma análise de convergência da malha tendo como base os valores das frequências naturais. A FRF gerada pelo Abaqus foi obtida a partir de uma análise dinâmica em estado estacionário. Esta análise fornece a amplitude em estado estacionário da resposta de um sistema devido à uma excitação harmônica em uma faixa de frequências.

5.2 MATERIAIS UTILIZADOS PARA REALIZAÇÃO EXPERIMENTAL

Para a realização dos testes experimentais, foram utilizadas as instalações físicas do Laboratório de Vibrações e Som (LAVIBS/UFPR), coordenado pelo Prof. Carlos A. Bavastri, e os seguintes materiais:

- Placas metálicas de aço: para análise experimental e validação dos resultados numéricos;
- Material viscoelástico ISODAMP C-1002: para análise experimental e validação dos resultados numéricos;
- Paquímetro: para medições das placas e material viscoelástico;
- Martelo de impacto: para aplicação da excitação nas estruturas;
- Acelerômetro: para obtenção das FRFs das estruturas;
- Analisador de sinais: responsável por captar os sinais dos acelerômetros e do martelo de impacto;
- Lixas: para preparar a superfície da placa base, camada restritora e MVE;
- Adesivo de ciano acrilato: utilizado para colar a camada restritora no MVE, e colar estes dois na placa base;
- Câmara climática: utilizada para garantir que a temperatura de trabalho do MVE estava na temperatura de projeto ótimo.

As placas metálicas de aço foram utilizadas para construir as placas bases e as camadas restritoras. As quais, para todos os casos analisados, o material empregue foi aço ASTM-A36, com módulo de elasticidade, densidade e coeficiente de Poisson iguais a 210 GPa, 7850 kg/m³ e 0,3, respectivamente. As espessuras das placas bases e das camadas restritora são 9,49 mm e 0,9 mm, respectivamente, as quais foram fabricadas utilizando corte a laser.

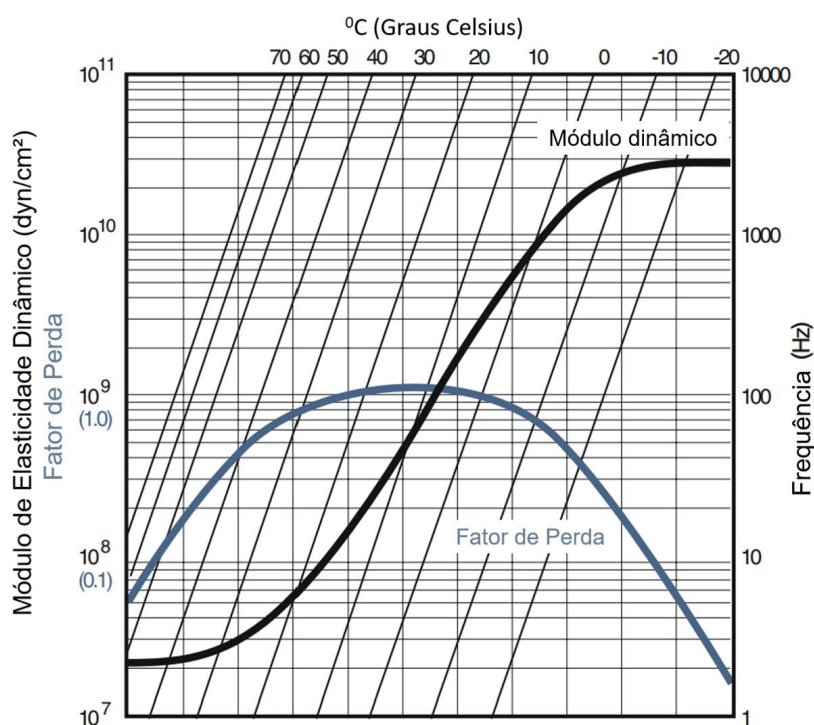
O MVE utilizado é o EAR[®] C-1002, conhecido comercialmente como ISODAMP C-1002 fabricado pela Aeero Technologies (Indianápolis, EUA). Os parâmetros materiais que caracterizam este MVE são apresentados na TABELA 2. Esses parâmetros foram obtidos a partir do nomograma do material, por meio da metodologia numérica baseada no modelo fracionário de Zener, apresentada por Sousa *et al.* (2017). Em todos os casos analisados neste trabalho, a espessura do material viscoelástico possuía valor igual 3,05 mm e a temperatura de trabalho foi considerada constante e igual 18,5^o C (291,6 K). Essa temperatura foi determinada com base no nomograma do material, FIGURA 28, estando dentro da faixa de temperatura em que o material apresenta o maior fator de perda.

TABELA 2 – PARÂMETROS MATERIAIS DO MVE ISODAMP C-1002

E_0 [MPa]	E_∞ [GPa]	b_1	θ_1	θ_2 [K]	β	T [K]	T_0 [K]	ρ [kg/m ³]	ν
1,93	2,73	2,08E-03	28,13	276	0,536	291,6	285,7	1289	0,49

FONTE: Sousa *et al.* (2017).

FIGURA 28 – NOMOGRAMA DO MATERIAL ISODAMP C-1002



NOTA: Nomograma fornecido pela empresa Aeero Technologies.

O material viscoelástico foi cortado utilizando um estilete. As superfícies das camadas restritoras e camadas de MVE, foram preparadas e fixadas às placas bases, utilizando adesivo de ciano acrilato Tekbond 793.

Quando construídos os sistemas compostos, estes foram colocados na câmara climática de modo a certificar que a temperatura do material viscoelástico estava na temperatura de trabalho considerada aqui ($18,5^{\circ}\text{C}$). O modelo da câmara climática utilizada é MN940TT0815 fabricada pela empresa Angelantoni Test Technologies.

Em todos os casos analisados neste trabalho, as FRFs experimentais, no caso específico deste trabalho, a inertância, foram obtidas utilizando acelerômetros fabricados pela PCB PIEZOTRONICS, modelo 32C68. A excitação foi aplicada através de um impacto via martelo instrumentado, também fabricado pela PCB PIEZOTRONICS, modelo 086C04. Os sinais dos acelerômetros e do martelo foram adquiridos pelo analisador de sinais Photon 2 produzido pela LDS DRACTION. Este equipamento foi utilizado em todas as análises experimentais e para todas as análises, os sinais foram adquiridos em uma faixa de frequências de 0 a 1000 Hz com 25600 linhas na frequência, sem a utilização de qualquer janela e considerando uma média de 5 leituras.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados os resultados referentes à metodologia desenvolvida neste trabalho, a qual é aplicada ao controle passivo de vibrações de duas estruturas do tipo placa: (1) uma placa retangular semiespessa e (2) uma placa retangular semiespessa com um furo quadrado excêntrico. Para isso, foram considerados os percentuais máximos de cobertura da placa por CR, $P_{r_{cr}}$, de CR de 10% e 20% e perímetros limites correspondentes aos valores de α iguais a 1,5 e 1,8. Esses valores foram utilizados por serem considerados satisfatórios após de diversas análises.

De forma simplificada, soluções ótimas são apresentadas para os resultados que se referem à:

Caso (1) Placa semiespessa retangular:

- 1.1) $\alpha = 1,5$, $P_{r_{cr}} = 10\%$ para o controle do primeiro ao quarto modo de vibrar individualmente e simultaneamente (controle de banda larga);
- 1.2) $\alpha = 1,5$, $P_{r_{cr}} = 20\%$ para o controle do primeiro e do terceiro modo de vibrar individualmente e dos quatro primeiros modos simultaneamente;
- 1.3) $\alpha = 1,8$, $P_{r_{cr}} = 10\%$ para o controle dos modos como no item 1.2;

Caso (2) Placa semiespessa retangular com furo excêntrico:

- 2.1) $\alpha = 1,8$, $P_{r_{cr}} = 20\%$ para o controle do primeiro ao quarto modo de vibrar individualmente e simultaneamente (controle de banda larga);

As espessuras das placas bases, das camadas de MVE e das camadas restritoras são mantidas constantes durante os processos de otimização e todas as CRs são compostas por uma única camada de MVE e uma única camada de material metálico (camada restritora).

As soluções ótimas obtidas, considerando faixas de frequência que compreendem cada modo individualmente, são comparadas às soluções obtidas via método de energia de deformação modal (do inglês, *modal strain energy* (MSE)). Assim, são apresentadas as configurações ótimas, configurações obtidas via MSE, as curvas de convergência da função objetivo, as FRFs, os valores do perímetro e os valores da função objetivo para cada um dos casos considerados.

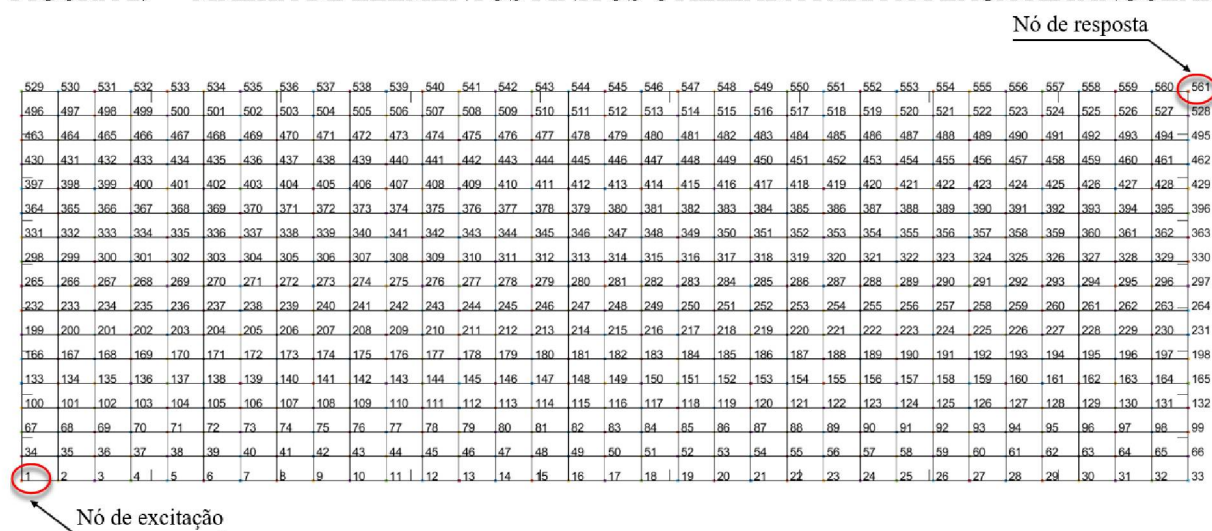
Na sequência deste capítulo, as FRFs obtidas numericamente são confrontadas com as FRFs obtidas experimentalmente para cada um dos sistemas primários analisados (placa retangular e placa retangular com furo excêntrico). Para a placa retangular, foram realizados experimentos físicos considerando as soluções ótimas obtidas para o controle de uma faixa de frequência que abrange o terceiro modo de vibrar, individualmente, e uma faixa de frequência que abrange do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente. Já para a placa retangular com furo excêntrico, foram realizados experimentos físicos considerando as soluções ótimas obtidas para o controle de faixas de frequência que abrangem o primeiro e o segundo modo de

vibrar, individualmente. As FRFs obtidas numericamente para estes resultados foram comparadas às FRFs obtidas experimentalmente.

6.1 PLACA RETANGULAR

As dimensões da placa retangular são 449 mm de comprimento, 179 mm de largura e 9,49 mm de espessura e é produzida em aço. Na análise numérica, foi utilizada uma malha uniforme de 32 x 16 elementos, totalizando 512 elementos e 561 nós, a qual está apresentada na FIGURA 29, bem como os nós de excitação (nó 1) e de resposta (nó 561). Estes nós de excitação e de resposta são utilizados para obtenção das FRFs numericamente e experimentalmente para todos os casos de análise desta estrutura. A placa está submetida a condições de contorno totalmente livre. Para essas condições, os modos de vibrar são apresentados na FIGURA 30 com suas respectivas frequências naturais.

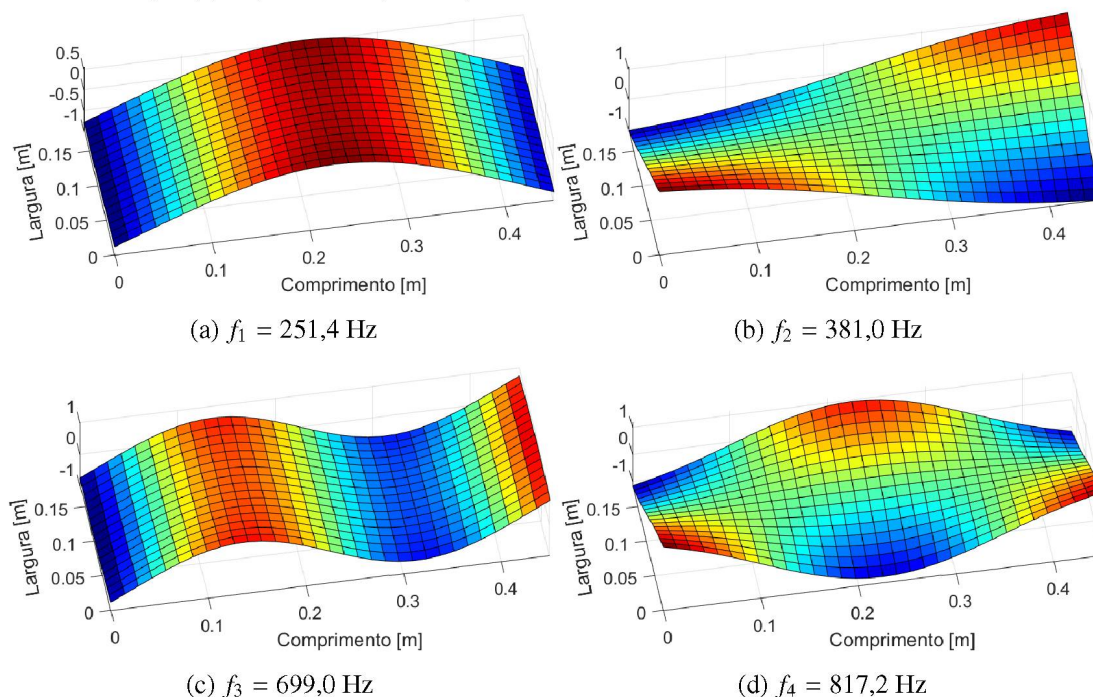
FIGURA 29 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZADA PARA A PLACA RETANGULAR



FONTE: A autora (2024).

Na FIGURA 31 estão apresentadas as energias de deformação elementares para cada um dos quatro modos de vibrar da placa retangular na condição de contorno considerada. A energia de deformação modal é determinada pelo método da energia de deformação modal, do inglês *modal strain energy* (MSE). Nesta abordagem, é assumido que a energia de deformação modal para a estrutura com amortecimento por MVE pode ser determinada em termos dos modos normais reais do sistema sem amortecimento (UNGAR; KERWIN, 1962; JOHNSON; KIENHOLZ, 1982). Ao utilizar este método, apenas os modos normais não amortecidos precisam ser obtidos. Posteriormente, são utilizados no cálculo da energia de deformação modal. Com isso, as distribuições de energia modal podem ser utilizadas de forma direta na decisão de onde localizar as CRs (JOHNSON; KIENHOLZ, 1982). A FIGURA 31 visa evidenciar as regiões de maior energia de deformação modal para cada um dos modos, e consequentemente, as regiões de maior flexão da estrutura. É válido ressaltar que segundo Xu *et al.* (2015) estas regiões

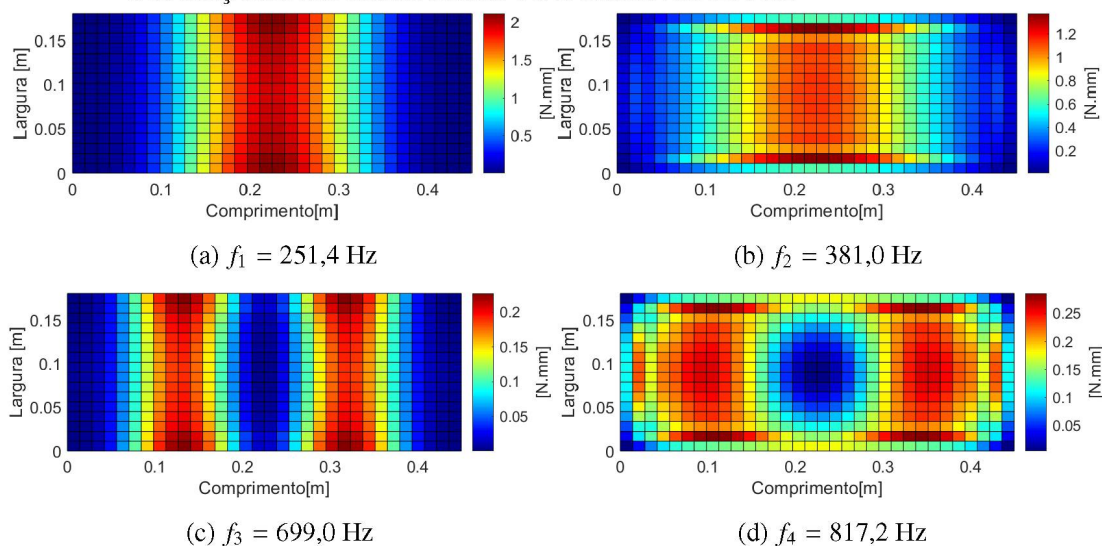
FIGURA 30 – MODOS DE VIBRAR PARA A PLACA RETANGULAR SOB CONDIÇÕES DE CON-
TORNO TOTALMENTE LIVRE



FONTE: A autora (2024).

podem ser propícias para instalação das CRs, pois apresentam maiores valores de deformações cíclicas, resultando em maior redução da vibração. Assim, conhecer as regiões de maior energia de deformação pode ser importante para avaliar as configurações otimizadas.

FIGURA 31 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO MODAL PARA A PLACA RETANGULAR SOB
CONDIÇÕES DE CONTO RNO TOTALMENTE LIVRE



FONTE: A autora (2024).

A FIGURA 30 e a FIGURA 31 foram geradas utilizando o *software* Matlab. Para os resultados que são apresentados na sequência, foram utilizadas as faixas de frequências apresen-

tadas na TABELA 3, onde cada uma delas compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar.

TABELA 3 – FAIXAS DE FREQUÊNCIAS DE INTERESSE

Modo (s) de interesse	Frequência natural (Hz)	Faixa de frequências de interesse de análise
1	251,4	200-300
2	381,0	350-450
3	699,0	650-750
4	817,2	750-850
1-4	-	100-1000

FONTE: A autora (2024).

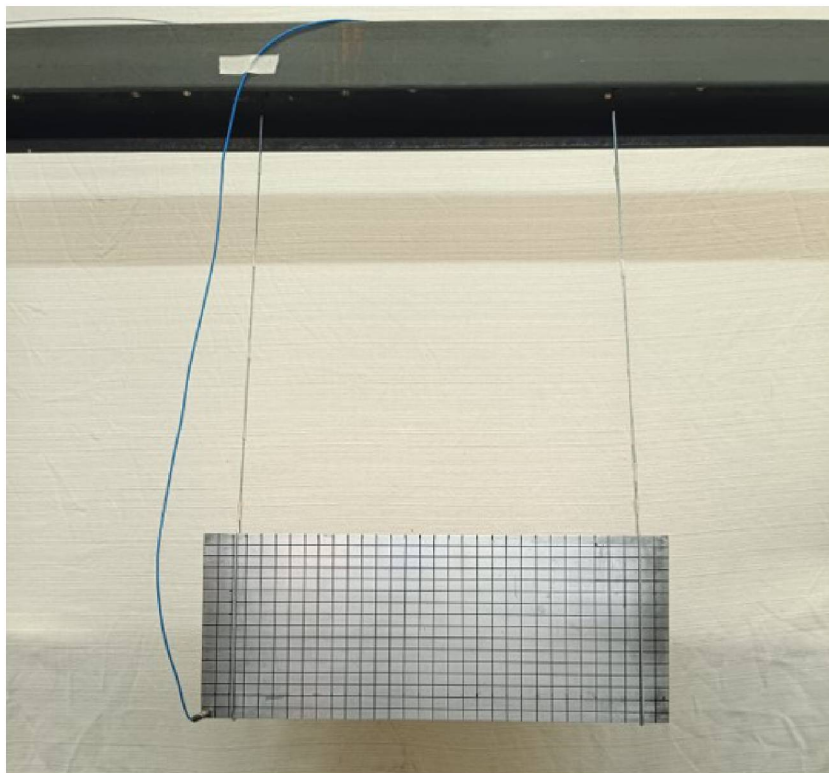
6.1.1 Validação experimental do sistema primário para placa retangular

Nesta seção, a inertância do sistema primário, obtida numericamente e para o nó de excitação (1) e nó de resposta (561), foi validada experimentalmente. Para simular fisicamente essa condição de contorno, a placa foi suspensa por fios de aço, conforme apresentada na FIGURA 32.

As FRFs (inertância) da estrutura em estudo são apresentadas na FIGURA 33. Nesta figura, são mostradas três curvas: a curva obtida numericamente utilizando o elemento finito de placa em camadas desenvolvido por Moreira *et al.* (2006), e que é implementado na estrutura de otimização aqui proposta, a curva obtida experimentalmente e a curva obtida numericamente utilizando o *software* comercial de elementos finitos, Abaqus. É válido ressaltar que os valores dos amortecimentos modais das curvas numéricas dos sistemas primários foram ajustados com base na curva experimental do sistema primário.

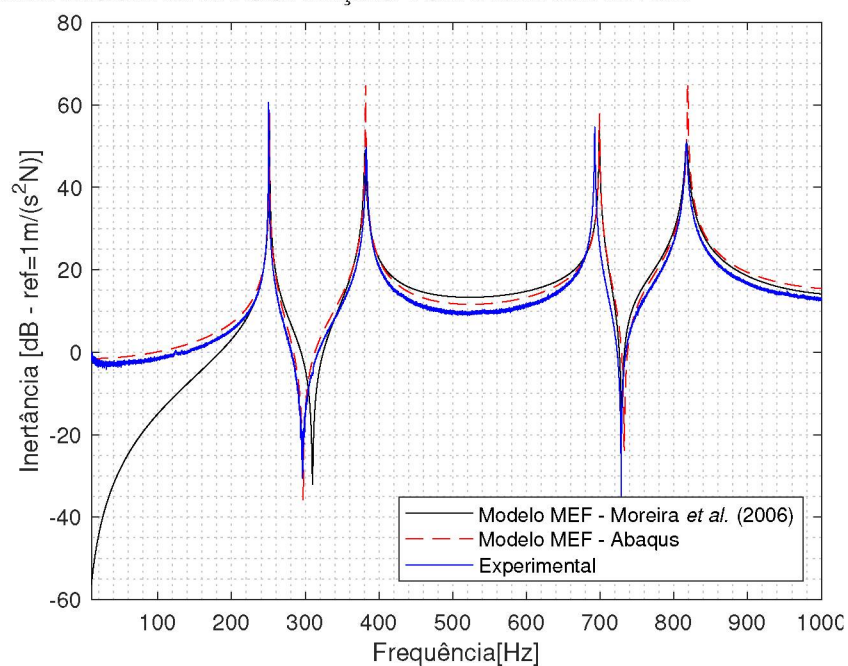
As curvas experimental e do modelo numérico são praticamente idênticas, o que pode indicar que o modelo numérico está muito bem ajustado aos parâmetros geométricos e de material da estrutura. Também é possível afirmar que a malha de elementos finitos utilizada para discretizar a estrutura está suficientemente refinada para representar o comportamento real da placa. Uma pequena discrepância nas amplitudes dos picos da FRF do modelo obtido no Abaqus pode ser notada. Possivelmente, isto seja devido à consideração de um único valor de fator de amortecimento modal para todos os modos. Outro ponto a ser discutido se refere à uma pequena diferença nos valores da frequência natural do terceiro modo de vibrar, para FRF experimental e numérica. Os quais são iguais a 692,6 Hz e a 699,0 Hz respectivamente, resultando em uma diferença de 0,92%. Essa variação pode ser considerada insignificante e pode ser atribuída à alguma imperfeição na placa que ocasionou nessa diferença e nesse modo em específico.

FIGURA 32 – PLACA RETANGULAR NA CONDIÇÃO LIVRE PARA ANÁLISE EXPERIMENTAL



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 33 – FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SISTEMA PRIMÁRIO DA PLACA RETANGULAR NA CONDIÇÃO TOTALMENTE LIVRE

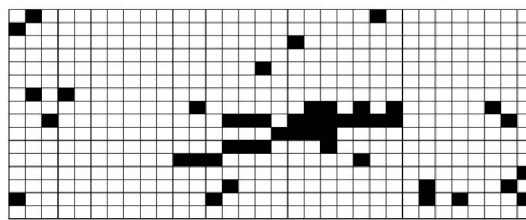


FONTE: A autora (2024).

6.1.2 Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende o primeiro modo de vibrar, para valores de $\alpha = 100$ e de $P_{cr} = 10\%$

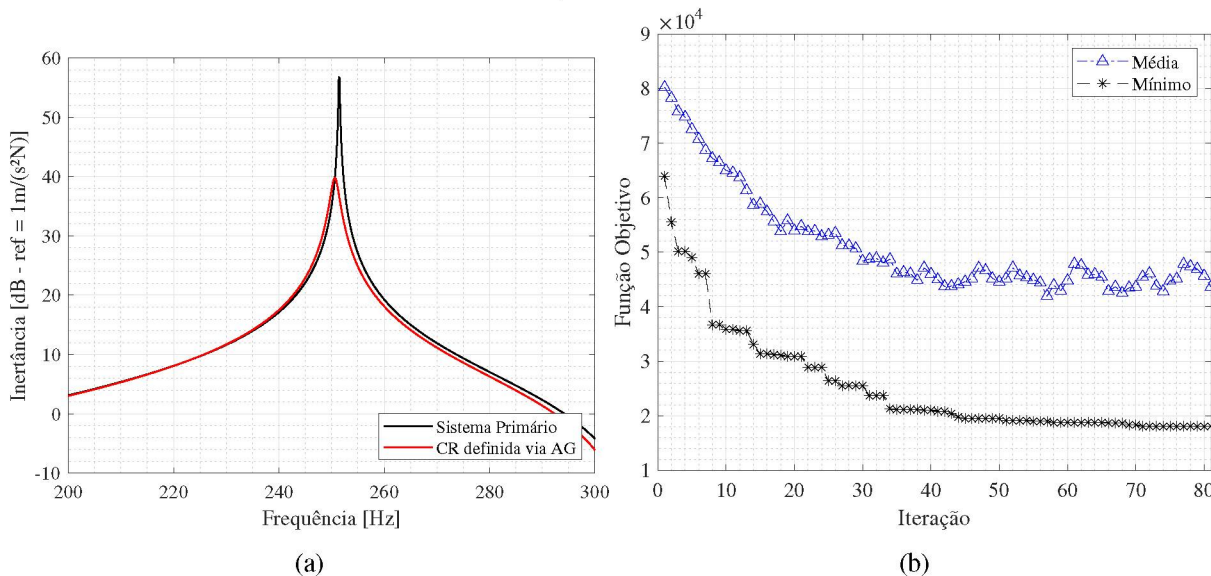
Nesta seção, um resultado da otimização controlando uma faixa de frequências que compreende o primeiro modo de vibrar para um $P_{cr} = 10\%$ e um $\alpha = 100$ é apresentado. Com este valor de α tem-se como objetivo simular uma situação na qual não há controle de *checkerboard*. Visto que assim o perímetro se torna um valor muito grande, possibilitando a existência de *checkerboard*. A solução encontrada para este problema está apresentada na FIGURA 34, a qual apresenta um perímetro igual a 1709,6 mm. A FRF e a curva de convergência estão apresentadas na FIGURA 35, onde o valor da função objetivo é igual a $2,3744 \cdot 10^4$.

FIGURA 34 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 100$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 35 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR, COM $\alpha = 100$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

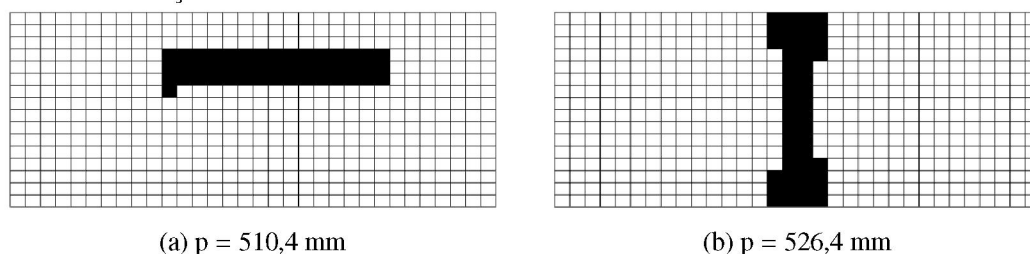
Apesar da solução encontrada gerar redução na função objetivo, é válido ressaltar que soluções com *checkerboard* podem apresentar uma maior rigidez que a rigidez real da estrutura (DIAZ; SIGMUND, 1995; SIGMUND; PETERSSON, 1998), o que pode ter ocasionado no amortecimento da estrutura. Além disso, é notável a complexidade da solução e a existência de *checkerboard*, tornando a solução inviável de ser fabricada na prática.

6.1.3 Resultados da otimização para faixas de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,5$ e de $P_{cr} = 10\%$

Os resultados apresentados nesta subseção foram obtidos considerando um perímetro de referência, p_{ref} , de 362,2 mm e um α igual a 1,5. Esses valores resultam em um perímetro limite, p_{lim} , de 543,4 mm. As configurações ótimas obtidas são apresentadas e comparadas às configurações obtidas via método MSE. A configuração de CR gerada por meio do método MSE é, a partir deste ponto, denominada por solução via MSE, e a solução encontrada pelo AG, de solução ótima. Na sequência, são mostrados os valores de perímetros destas soluções e também suas respectivas FRFs e a FRF referente ao sistema primário (placa sem amortecimento).

O primeiro caso analisado se refere ao controle de uma faixa de frequências em torno do primeiro modo de vibrar, 200 a 300 Hz. Para a qual, a solução ótima está apresentada na FIGURA 36 (a) e a solução obtida via MSE na FIGURA 36 (b).

FIGURA 36 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



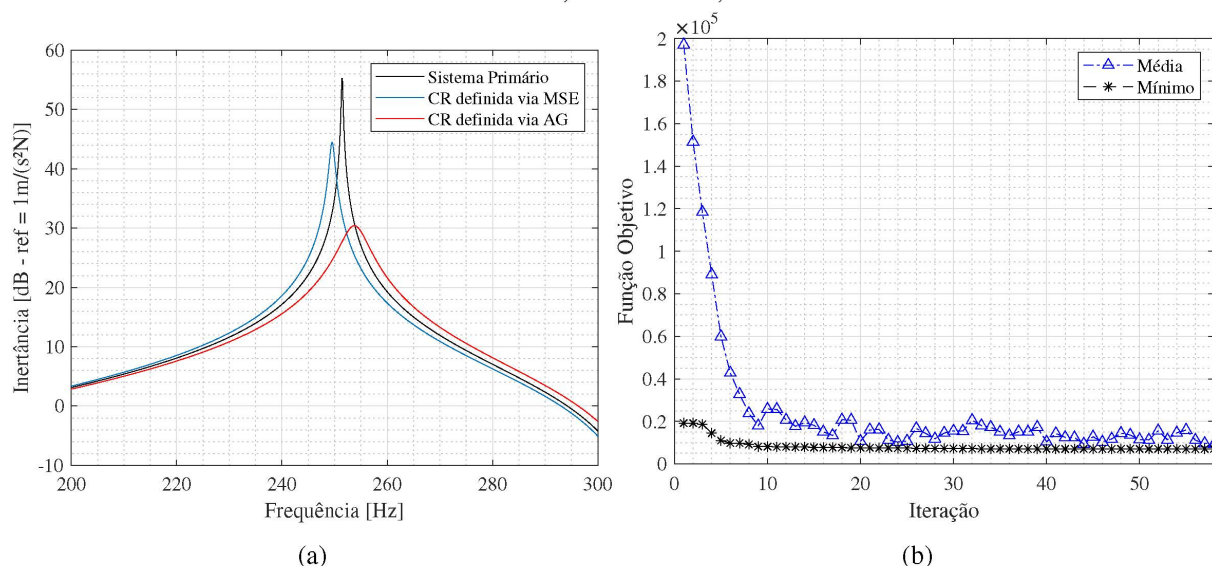
FONTE: A autora (2024).

A FRF relativa à solução ótima está apresentada na FIGURA 37 (a), assim como a FRF referente à solução obtida pelo método MSE. Pode-se notar que a solução ótima gerou uma significativa redução no valor da amplitude do pico da inertância quando comparada à outra configuração. Em relação ao sistema primário, esta redução é de aproximadamente 25 dB. As curvas de convergências para o valor médio e o valor mínimo da função objetivo para este problema de otimização estão apresentadas na FIGURA 37 (b). Nesta figura, pode-se verificar que o ponto de mínimo da função objetivo é, a princípio, encontrado próximo à trigésima geração e se manteve até a sexagésima geração.

Os valores da função objetivo para cada uma das soluções encontradas são mostradas na TABELA 4. Para fins de comparação, o valor da função objetivo para a placa sem CR também é apresentado.

Para a análise em torno do segundo modo de vibrar, uma faixa de frequências de 350 a 450 Hz foi considerada. A solução ótima obtida para este caso é apresentada na FIGURA 38 (a), e na FIGURA 38 (b) é mostrada a solução via MSE, para as quais, os perímetros são 526,8 mm e 1121,7 mm, respectivamente. Na TABELA 5 são expostos os valores da função objetivo para cada uma das soluções encontradas. Pode-se perceber que a solução ótima se mostrou mais

FIGURA 37 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR, COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

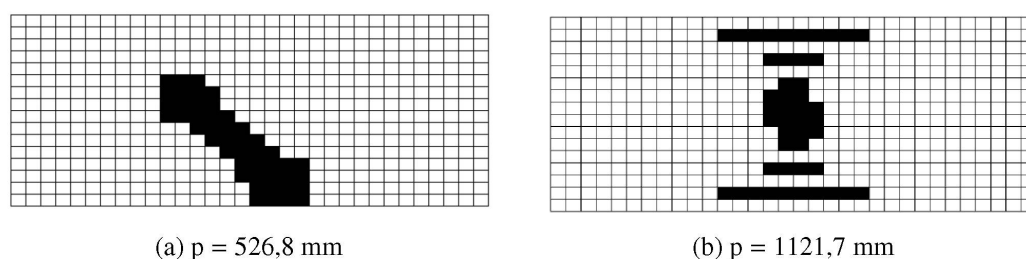
TABELA 4 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo (m/s^2N)
Sistema primário	-	$1,6385 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	526,4	$4,2184 \cdot 10^4$
CR definida via AG	510,4	$8,2060 \cdot 10^3$

FONTE: A autora (2024).

eficiente, gerando cerca de 10 dB de redução no pico da inertância em relação o sistema primário.

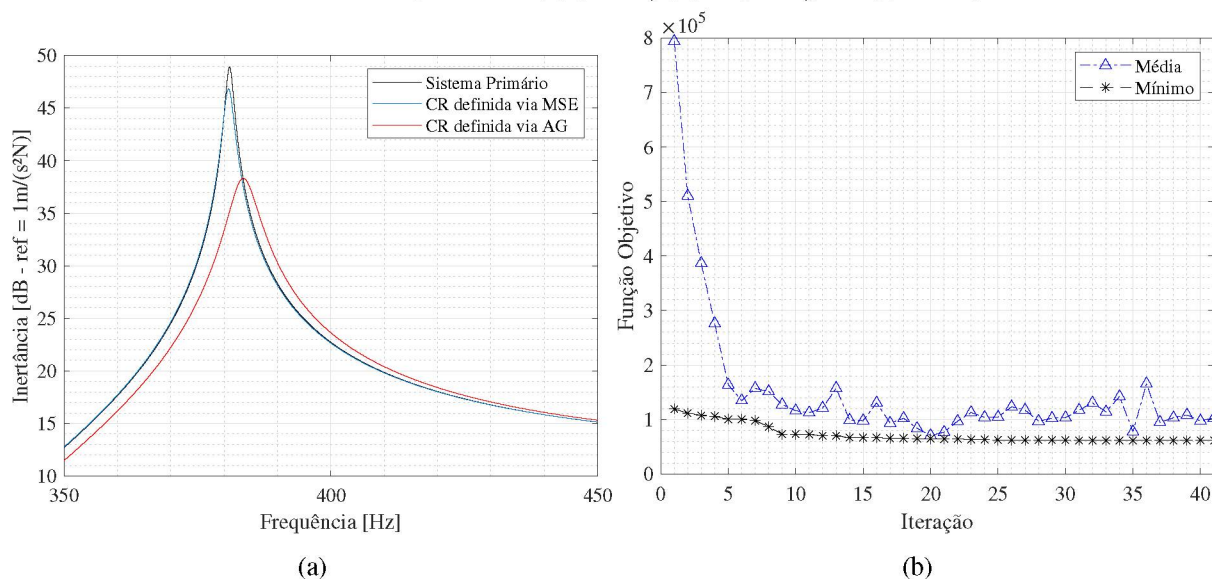
FIGURA 38 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

As soluções ótimas por AG e via MSE, para uma faixa de frequências que abrange o terceiro modo de vibrar, estão apresentadas na FIGURA 40 (a) e na FIGURA 40 (b), respectivamente. As FRFs para essas configurações estão na FIGURA 41 (a) e no item (b) desta mesma figura, está apresentada a curva de convergência. Para este resultado, a redução na amplitude

FIGURA 39 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR, COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

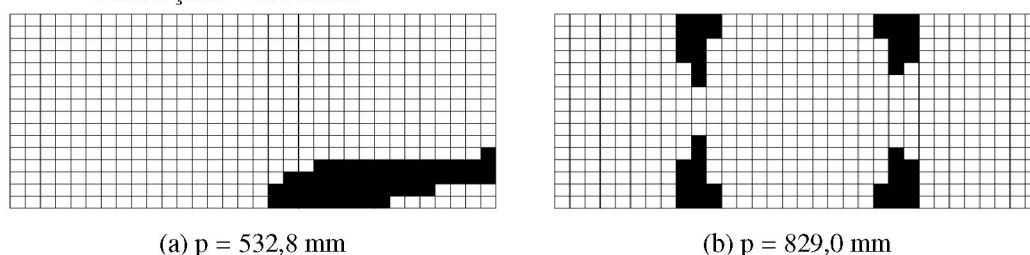
TABELA 5 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$1,8649 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	1121,7	$1,4630 \cdot 10^5$
CR definida via AG	526,8	$5,4201 \cdot 10^4$

FONTE: A autora (2024).

do pico da inertância, devido à configuração obtida via MSE é de cerca de 10 dB. Em relação à solução ótima, esta redução foi de aproximadamente 25 dB. Os valores da função objetivo podem ser conferidos na TABELA 6.

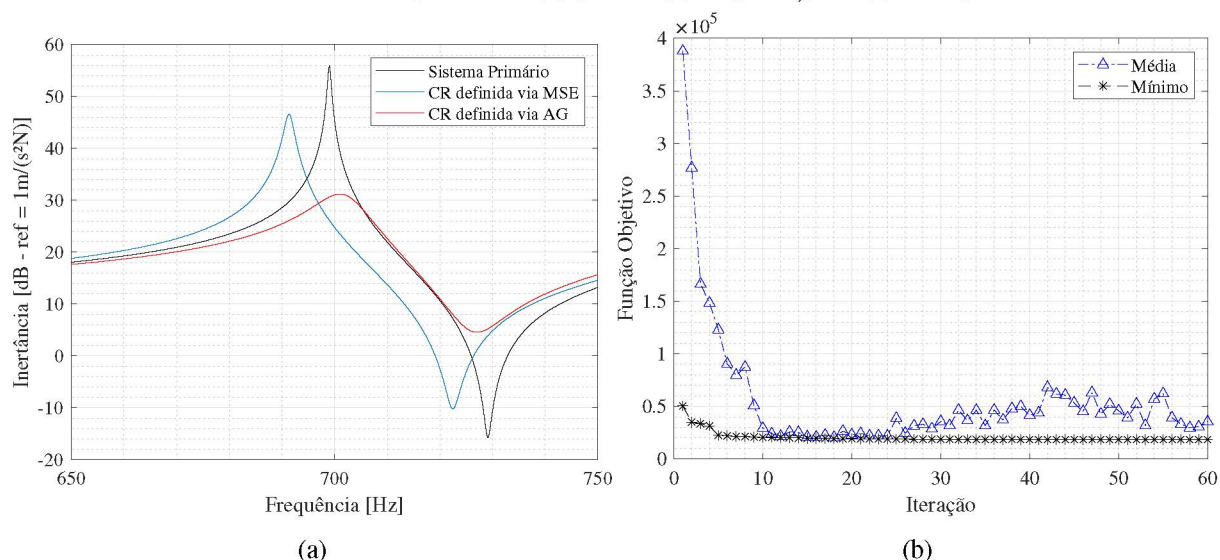
FIGURA 40 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

No último caso de análise desta subseção, foi considerada uma faixa de frequências em torno do quarto modo de vibrar, de 750 a 850 Hz. As soluções ótima e obtida via MSE são

FIGURA 41 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

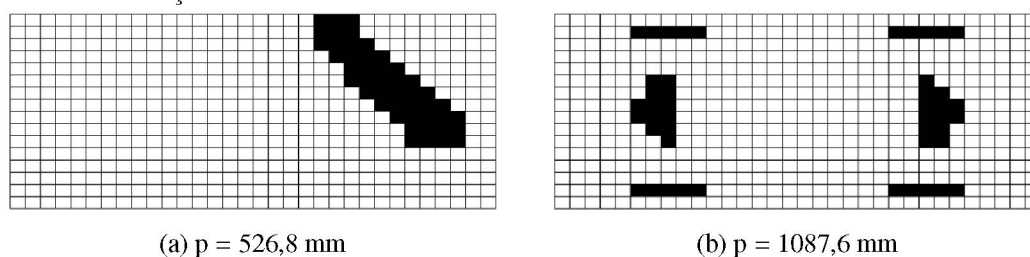
TABELA 6 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$3,9256 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	829,0	$1,3094 \cdot 10^5$
CR definida via AG	532,8	$2,1009 \cdot 10^4$

FONTE: A autora (2024).

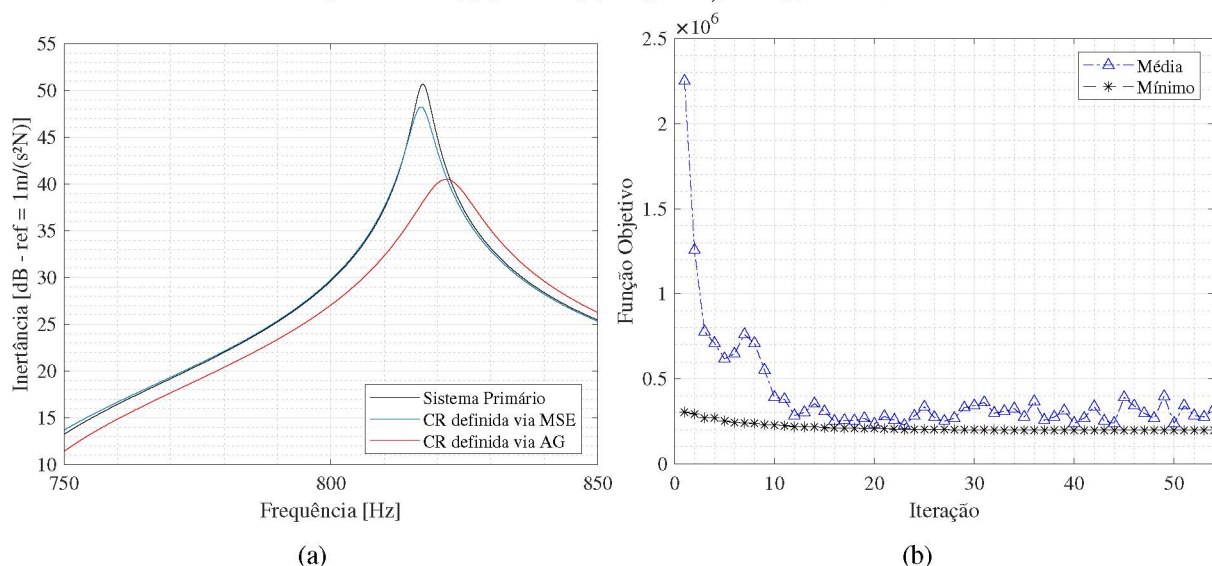
apresentadas nos itens (a) e (b) da FIGURA 42, com seus respectivos valores de perímetro. Na FIGURA 43 (a) estão apresentadas as FRFS e na FIGURA 43 (b), estão mostradas as curvas de convergência. A solução ótima apresenta uma redução na amplitude do pico da FRF, de cerca de 12 dB quando comparada à amplitude do pico do sistema primário. Os valores da função objetivo estão apresentadas na TABELA 7.

FIGURA 42 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 43 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

TABELA 7 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$5,8679 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	1087,6	$4,3747 \cdot 10^5$
CR definida via AG	526,8	$1,6459 \cdot 10^5$

FONTE: A autora (2024).

Pode-se afirmar que as configurações obtidas pelo AG com a restrição de perímetro cumpriram seu papel no controle do *checkerboard* e na redução da vibração da estrutura. Isso é evidenciado pelas soluções encontradas e pelos valores das funções objetivo, que indicam que as soluções ótimas não apresentam *checkerboard* e reduzem significativamente os valores da função objetivo.

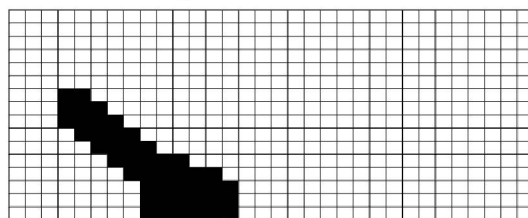
Outro ponto importante a ser considerado ao realizar o controle de vibrações em estruturas flexíveis, como placas e cascas, utilizando controle passivo por CR, é a quantidade de massa adicionada. Esse tipo de controle de vibrações é frequentemente utilizado em projetos onde o peso total da estrutura é um fator determinante. Nesse sentido, é importante evitar que o acréscimo de massa à estrutura composta não seja muito elevado. Dito isso, ao realizar o controle da placa retangular com 10% de CR estão sendo adicionados 89,10 gramas, ou seja, 1,5% da massa total da placa base. Com base nesta informação, é possível afirmar que as configurações encontradas, controlando cada um dos quatro modos individualmente, geraram uma redução significativa no pico da inertância para um pequeno acréscimo de massa.

6.1.4 Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,5$ e $P_{cr} = 10\%$

Nesta seção, é apresentada a solução gerada para controlar os quatro primeiros modos de vibrar, de forma simultânea, para uma placa livre. Para isso, uma faixa de frequências de 100 a 1000 Hz foi considerada. Os valores de perímetro limite e o percentual de cobertura se mantêm os mesmos da seção anterior, os quais são 543,4 mm e 10%, respectivamente.

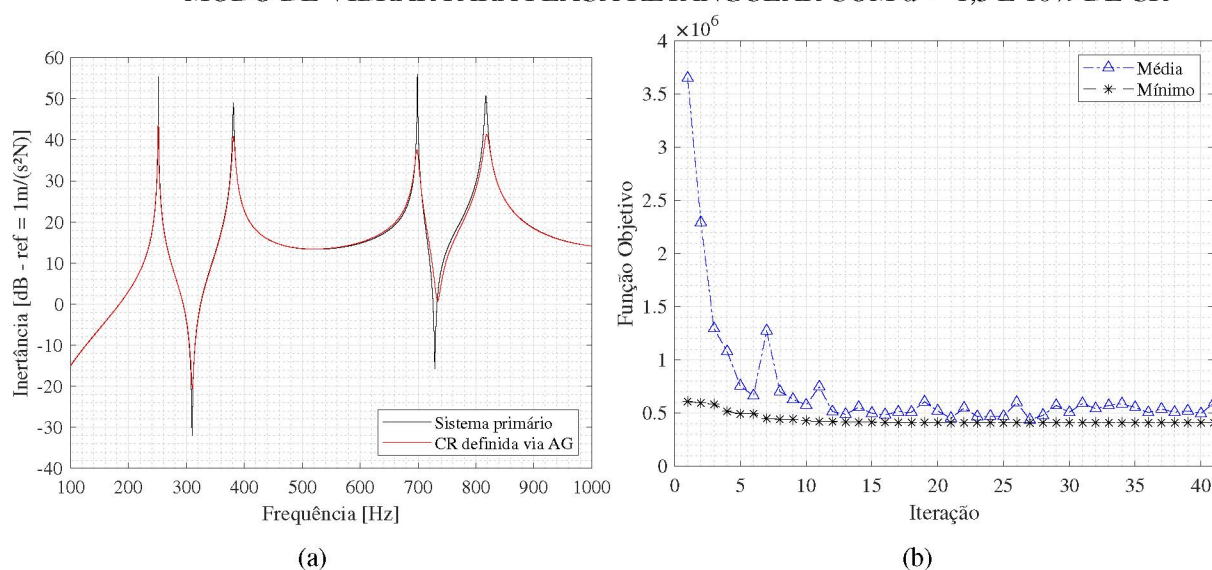
A solução ótima deste problema está apresentada na FIGURA 44, a qual tem um perímetro de 532,4mm. A FRF e a curva de convergência estão apresentadas na FIGURAS 45 (a) e 45 (b), respectivamente. Na TABELA 8, os valores da função objetivo para o resultado da otimização via AG e para a placa sem CR são mostrados.

FIGURA 44 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 45 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

A solução ótima gerou uma redução na amplitude dos picos da FRF de aproximadamente 8 dB para o segundo e quarto modo de vibrar, e de aproximadamente 15 dB para o primeiro e o terceiro modo.

TABELA 8 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2 N]$)
Sistema primário	-	$1,3472 \cdot 10^6$
CR definida via AG	532,4	$3,6129 \cdot 10^5$

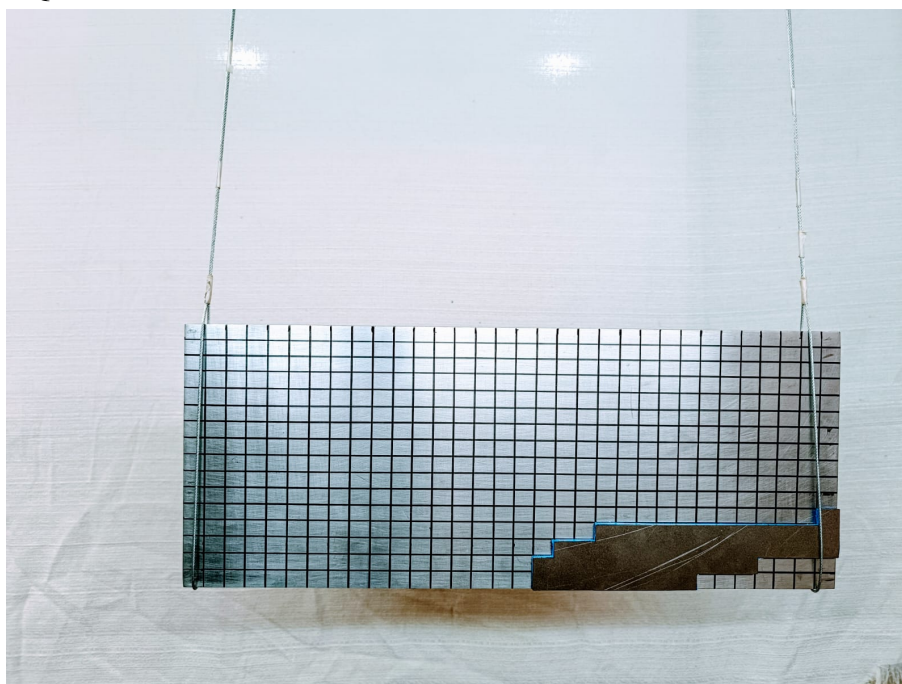
FONTE: A autora (2024).

6.1.5 Realização experimental da configuração obtida para faixa de frequências que compreende o terceiro modo de vibrar para $\alpha = 1,5$ e $P_{cr} = 10\%$

A validação experimental da configuração ótima para o controle do terceiro modo de vibrar é aqui realizada, para a qual a geometria está na FIGURA 46, sob a condição de contorno totalmente livre. Para simular essa condição de contorno, a placa foi suspensa por fios de aço. Os sinais do martelo e do acelerômetro foram adquiridos para uma faixa de frequências de 0 a 1000 Hz com 25600 linhas, adquiridos sem a utilização de qualquer janela e a FRF foi gerada considerando a média de 5 leituras.

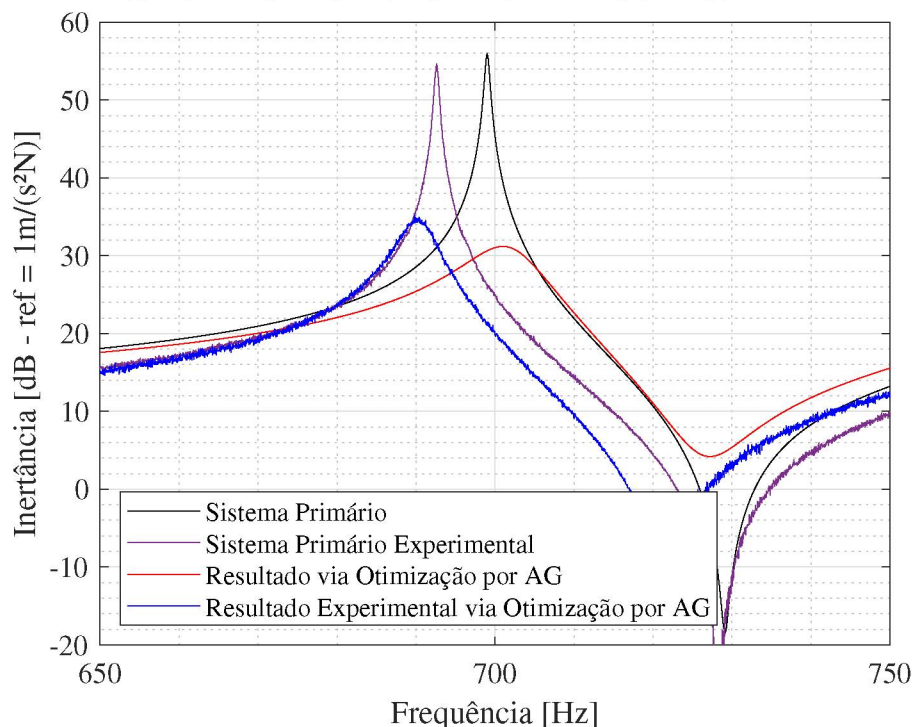
As FRFs, obtidas numérica e experimentalmente para a configuração ótima, estão apresentadas nas FIGURA 47. Nota-se uma redução superior, de aproximadamente 3 dB, na amplitude do pico da inertância para a FRF obtida numericamente. Além disso, nota-se que o pico da inertância, para a curva experimental, está deslocado na frequência assim, como já mencionado na Seção 6.1.1. No entanto, pode-se afirmar que o modelo numérico está muito bem ajustado e pode representar muito bem o comportamento real da placa tratada com CR.

FIGURA 46 – CONFIGURAÇÃO DA CR PARA CONTROLE DE UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 47 – FRF PARA CONFIGURAÇÃO ÓTIMA EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

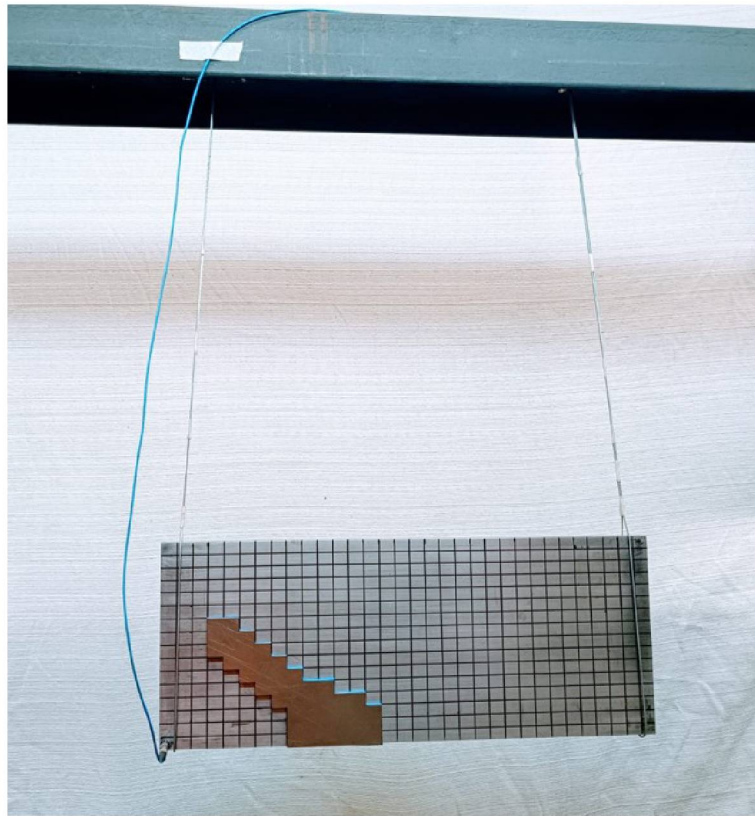
6.1.6 Realização experimental da configuração obtida para faixa de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,5$ e $P_{cr} = 10\%$

A configuração ótima encontrada para o controle de uma faixa de frequências que compreende os primeiros quatro modos de vibrar é construída fisicamente e, posteriormente, é obtida a FRF desta estrutura. A geometria está mostrada na FIGURA 48 sob a condição de contorno totalmente livre, bem como o ponto de leitura do acelerômetro.

Na FIGURA 49 (a) as FRFs para o sistema primário (numérica), para a solução numérica e para experimento físico estão apresentadas. Na FIGURA 49 (b), são mostrados com detalhes os picos da inertância para cada um dos modos de vibrar dentro da faixa de frequência considerada.

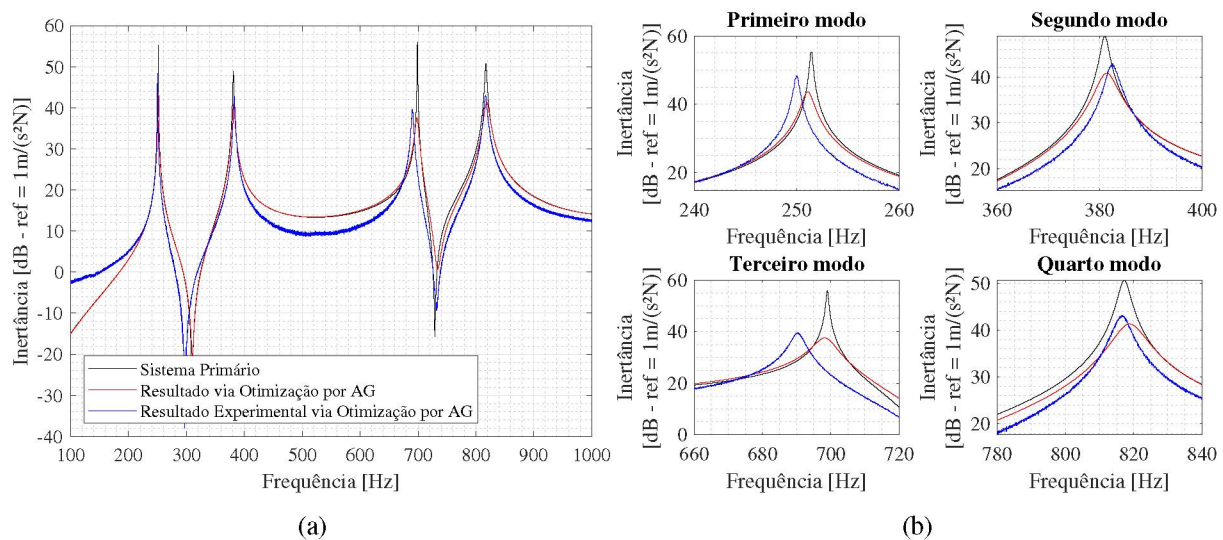
A curva numérica apresenta boa representação do comportamento real da estrutura, o que pode ser observado pela semelhança entre as curvas numérica e experimental. Além disso, pode-se afirmar que os parâmetros materiais do MVE utilizados no modelo numérico representam muito bem o comportamento real do MVE ISODAMP C-1002. Ou seja, o modelo mecânico de Zener fracionário utilizado para representar o comportamento do MVE, para as condições consideradas, se mostrou confiável. Outro ponto importante a ser considerado é em relação à FRF obtida numericamente para o sistema com CR. Esta FRF é obtida pela utilização da formulação apresentada na Seção 3.8.2, que se mostrou eficaz em representar muito bem o comportamento da estrutura com CR.

FIGURA 48 – CONFIGURAÇÃO DA CR PARA CONTROLE DE UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 49 – (A) FRFS OBTIDAS VIA ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA PARA O RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO CONTROLANDO UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR COM 10% DE CR; (B) DETALHE NO PICO DE CADA UM DOS MODOS DE VIBRAR



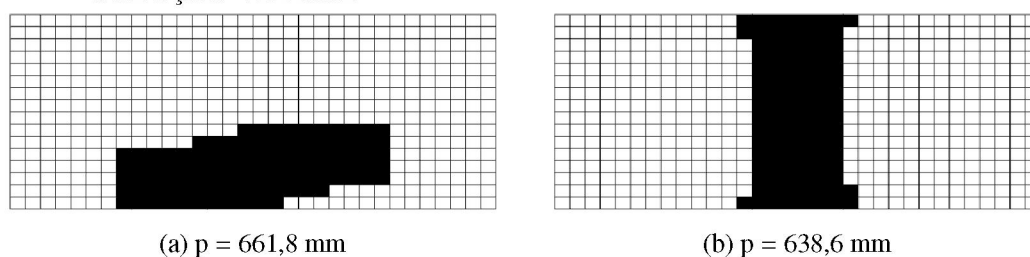
FONTE: A autora (2024).

6.1.7 Resultados da otimização para faixas de frequências que compreendem o primeiro e o terceiro modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,5$ e de $P_{cr} = 20\%$

Nesta seção, são apresentados os resultados para o controle de vibração em faixas de frequências que abrangem o primeiro e o terceiro modo, individualmente. Para isso, foi utilizado um percentual de cobertura de 20%, um perímetro de referência de 540 mm e perímetro limite de 810 mm. Nesse caso, o percentual de massa adicionada devido à adição de CR a placa base foi de 3%.

O primeiro caso de estudo desta seção foi o controle de vibração de uma faixa de frequências em torno do primeiro modo de vibrar. A solução ótima encontrada para este caso está sendo mostrada na FIGURA 50 (a) e na FIGURA 50 (b) está a solução determinada pelo MSE. As FRFs para estas duas soluções são expostas na FIGURA 51 (a) e, por fim, na FIGURA 51 (b) estão as curvas de convergência. Os valores dos perímetros para cada configuração obtida são mostrados na TABELA 9 em conjunto com os valores das funções objetivos. Observa-se que a solução ótima resultou em uma redução de 31 dB na amplitude do pico da inertância, enquanto que a solução gerada via MSE gerou 23 dB. Esta configuração ótima, obtida para 20% de CR, gerou em uma redução de cerca de 5dB a mais que a configuração obtida para 10% de CR.

FIGURA 50 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

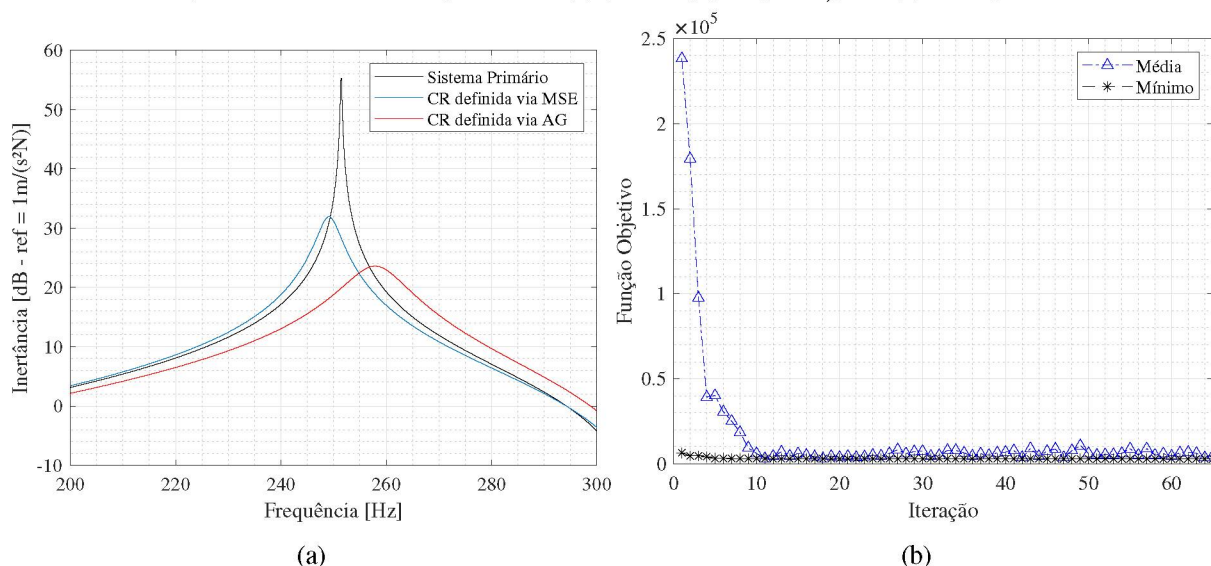
TABELA 9 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2 N]$)
Sistema primário	-	$1,6385 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	638,6	$9,6211 \cdot 10^3$
CR definida via AG	661,8	$3,5023 \cdot 10^3$

FONTE: A autora (2024).

As soluções encontradas para o controle de vibração em uma faixa de frequências em torno do terceiro modo de vibrar (de 650 a 750 Hz) são apresentadas na FIGURA 52 (a), a solução ótima e na FIGURA 52 (b), via MSE. As FRFs estão apresentadas na FIGURA 53 (a) e na FIGURA 53 (b) estão as curvas de convergência. A redução na amplitude do pico da inertância, para a solução ótima foi de 30 dB, já para a solução determinada pelo MSE, a redução

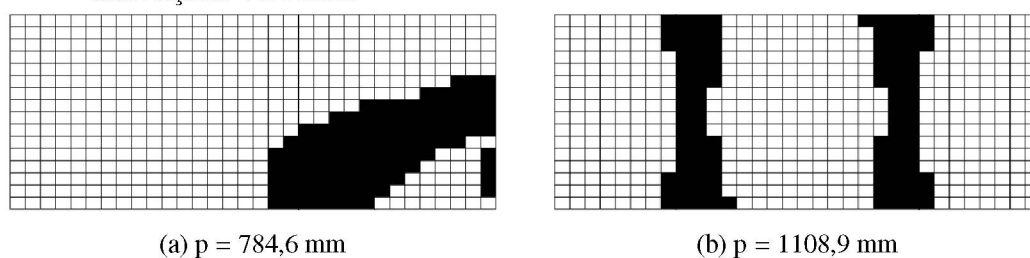
FIGURA 51 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

foi de 20 dB. Quando comparam-se as soluções ótimas encontradas para 10% e 20%, percebe-se que a solução para 20% ocasionou em uma redução de 5 dB a mais que a solução encontrada com 10% de CR.

FIGURA 52 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



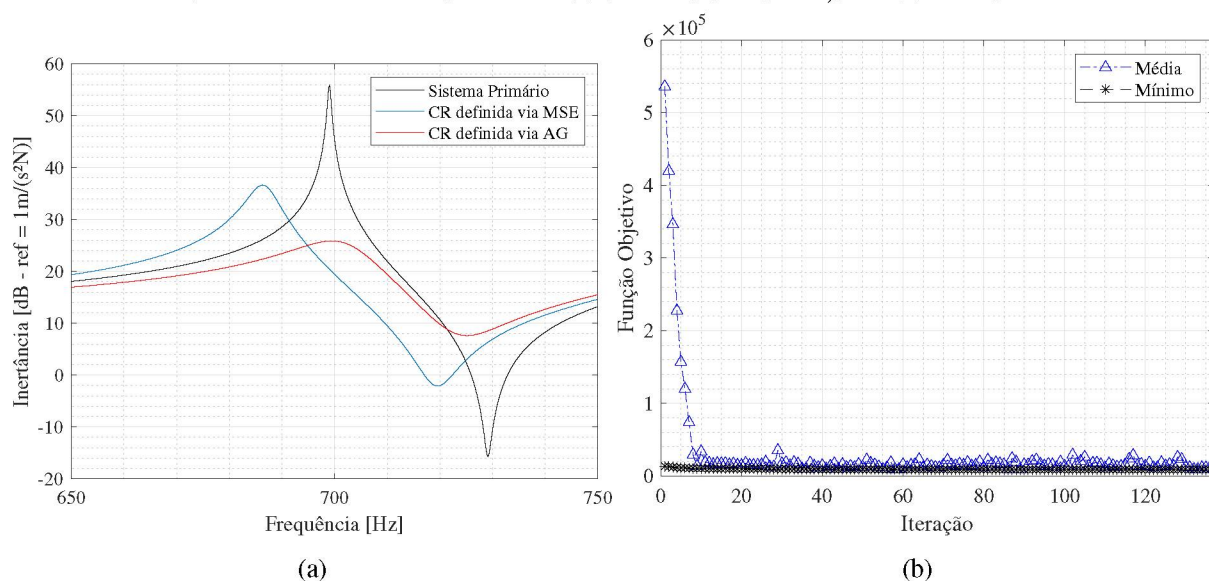
FONTE: A autora (2024).

TABELA 10 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$3,9256 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	1108,9	$4,1536 \cdot 10^4$
CR definida via AG	784,6	$1,0255 \cdot 10^4$

FONTE: A autora (2024).

FIGURA 53 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR

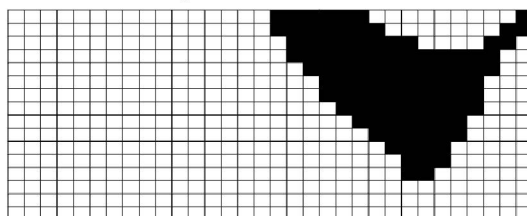


FONTE: A autora (2024).

6.1.8 Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,5$ e $P_{r_{cr}} = 20\%$

A faixa de frequências de estudo nesta análise compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar, 100 a 1000 Hz. A solução ótima encontrada pelo AG está na FIGURA 54, para a qual o perímetro é igual a 807 mm. Na FIGURA 55 (a) estão as FRFs e na FIGURA 55 (b) as curvas de convergência. Observa-se que houve uma redução na amplitude dos picos da FRF de 20 dB para o primeiro modo, 14 dB para o segundo, 26 dB para o terceiro e 16 dB para o quarto modo.

FIGURA 54 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR

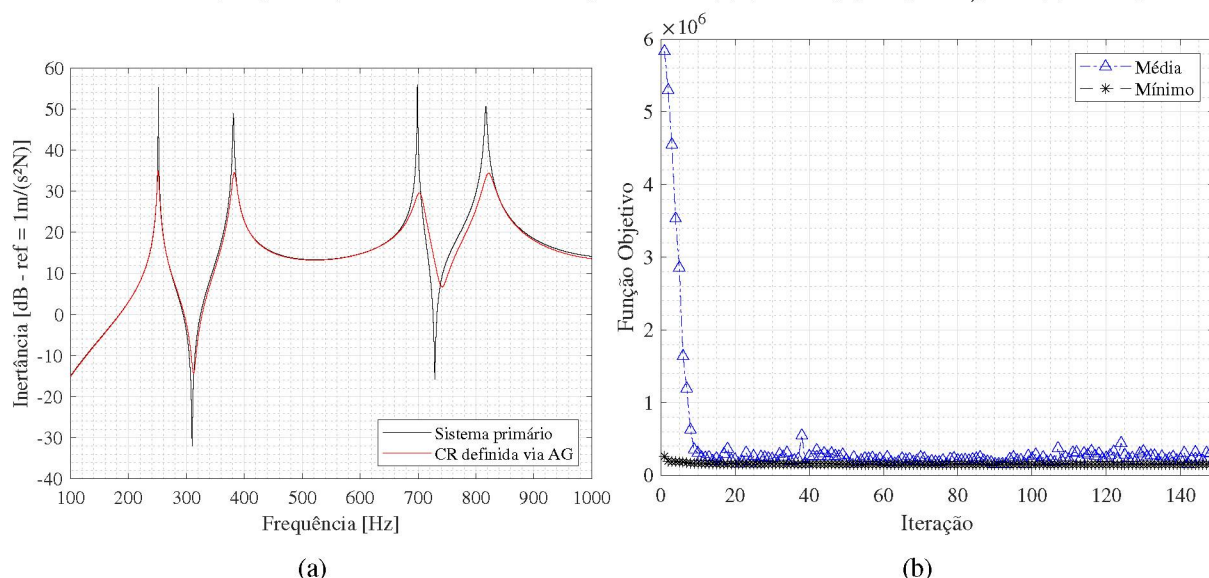


FONTE: A autora (2024).

6.1.9 Resultados da otimização para faixas de frequências que compreendem o primeiro e o terceiro modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,8$ e $P_{r_{cr}} = 10\%$

Nesta seção, o valor do perímetro é relaxado pela utilização de um α igual a 1,8 e mantém-se o percentual de cobertura em 10%, resultando em um perímetro limite igual a 652

FIGURA 55 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,5$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

TABELA 11 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,5$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$1,3472 \cdot 10^6$
CR definida via AG	807,0	$1,5403 \cdot 10^5$

FONTE: A autora (2024).

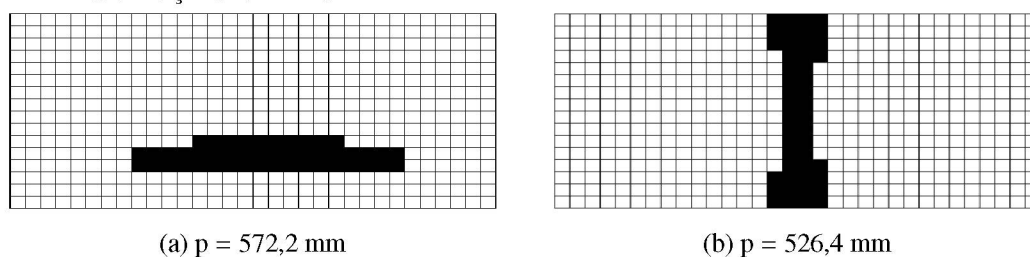
mm. A partir destes valores, as soluções para o controle do primeiro ao terceiro modo de vibrar da placa na condição totalmente livre são apresentadas.

Inicialmente, considerando a faixa de frequências em torno do primeiro modo (de 200 a 300 Hz), tem-se a solução ótima apresentada na FIGURA 56 (a) e na FIGURA 56 (b) a solução gerada via MSE. Os valores dos perímetro destas configurações são 572,2 mm e 526,4 mm, respectivamente. As FRFs e as curvas de convergência são apresentadas na FIGURA 57 e os valores da função objetivo estão na TABELA 12.

Quando este resultado é comparado à aquele de mesmo percentual de cobertura, mas com $\alpha = 1,5$ percebe-se que há pouca diferença em termos de redução na amplitude do pico da FRF e do valor da função objetivo. Em relação à redução da amplitude do pico da FRF, este permanece em 25 dB. No entanto, esta configuração apresenta um perímetro maior que aquele resultado obtido para $\alpha = 1,5$.

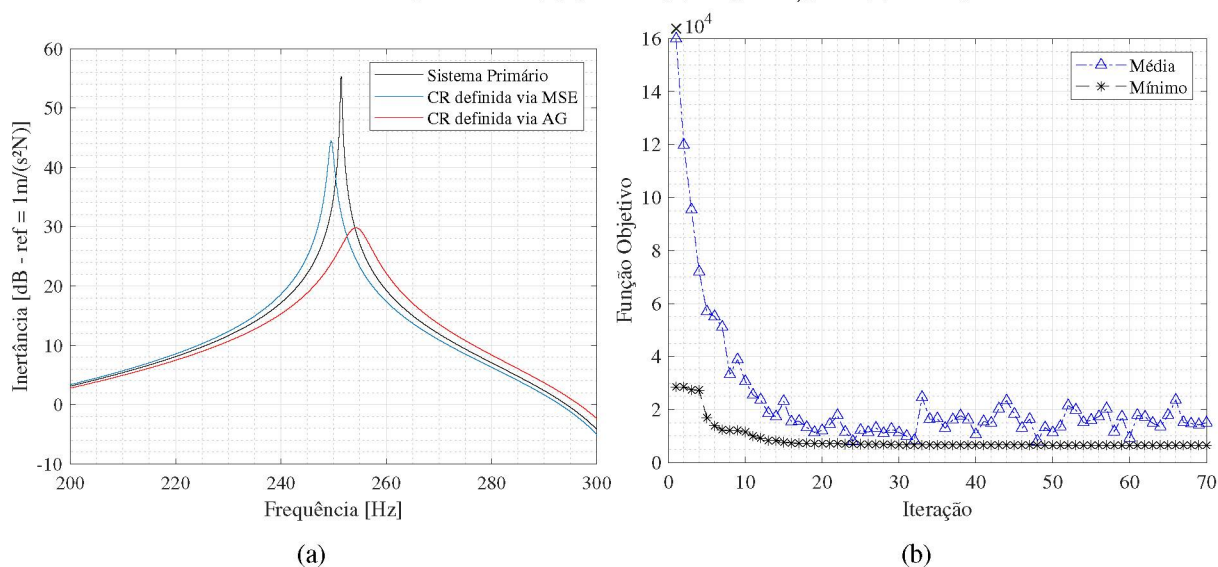
Em relação ao controle de vibrações em uma faixa de frequências que compreende unicamente o terceiro modo (650 a 750 Hz), a solução ótima obtida está apresentada na FIGURA 58 (a) e a solução encontrada via MSE está apresentada FIGURA 58 (b). As FRFs e as curvas de convergência estão apresentadas na FIGURA 59 (a) e (b), e os valores da função objetivo estão

FIGURA 56 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 57 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

TABELA 12 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO

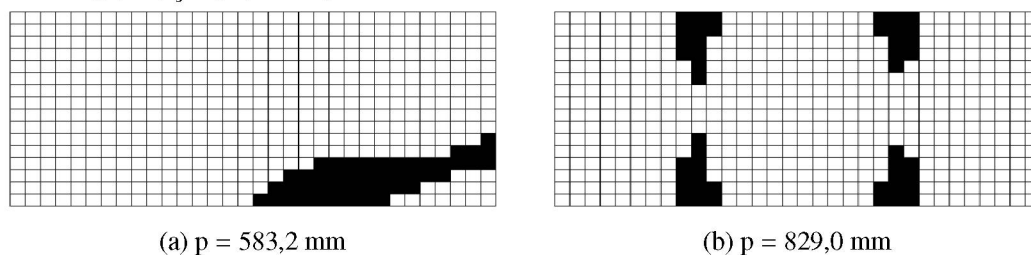
Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$1,6385 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	526,4	$4,2184 \cdot 10^4$
CR definida via AG	572,2	$7,6612 \cdot 10^3$

FONTE: A autora (2024).

na TABELA 13. Observa-se que este resultado apresentou uma redução de 25 dB na amplitude do pico da FRF, a mesma redução encontrada para um valor de perímetro menor, considerando um α de 1,5.

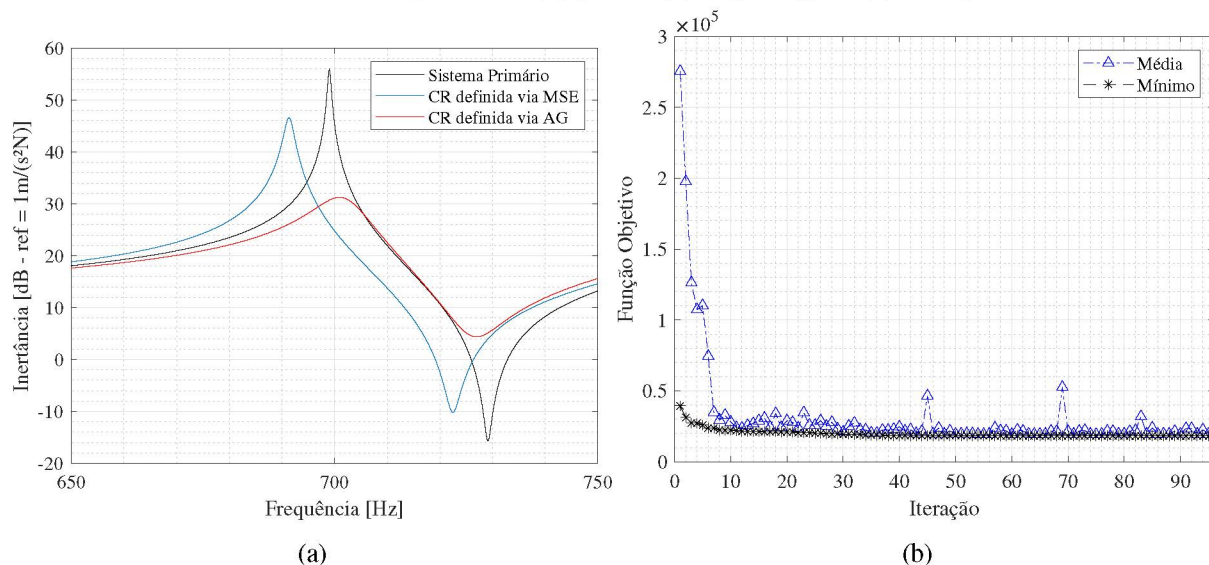
As soluções encontradas para o controle do primeiro e do terceiro modo de vibrar, individualmente, considerando $\alpha = 1,8$, são semelhantes as soluções obtidas para um $\alpha = 1,5$. Entretanto, devido o valor do perímetro limite ter sido relaxado nesta seção, as soluções ótimas

FIGURA 58 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 59 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

TABELA 13 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$3,9256 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	829,0	$1,3094 \cdot 10^5$
CR definida via AG	583,3	$2,1047 \cdot 10^4$

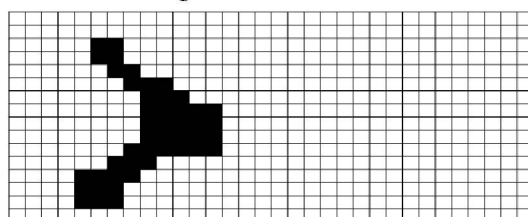
FONTE: A autora (2024).

encontradas mostram uma maior complexidade que aquelas encontradas para $\alpha = 1,5$, apesar de gerarem quase a mesma redução na função objetivo. Discussões sobre os valores dos perímetros limites são encontrados nos trabalhos de Yang *et al.* (2002) e Zhang e Duysinx (2003) para estruturas estáticas, mas que podem ser aplicar aqui também.

6.1.10 Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,8$ e $P_{cr} = 10\%$

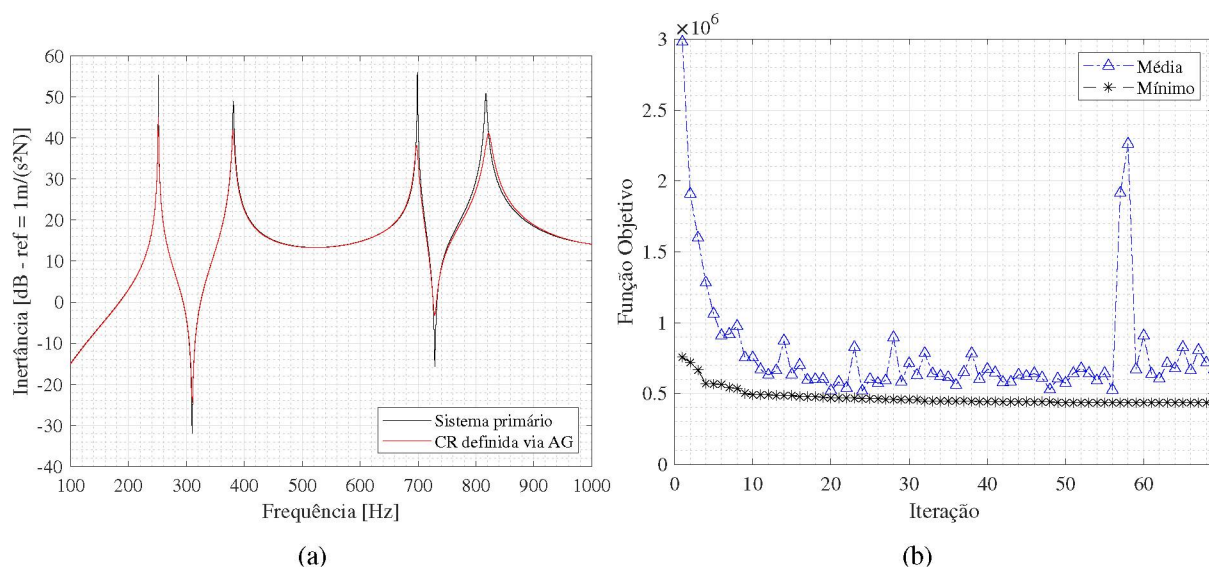
A solução ótima para o controle de vibração para uma faixa de frequências de 100 a 1000 Hz está mostrada na FIGURA 60 para a qual o perímetro é igual a 627,6 mm. As reduções nas amplitudes dos picos da inertância, são basicamente os mesmos que aqueles encontrados para $\alpha = 1,5$, 10 dB para o primeiro e quarto modo, 6 dB para o segundo e 18 dB para o terceiro. Novamente, percebe-se que ao aumentar o valor do perímetro limite, favorece o aparecimento de configurações mais complexas e que basicamente tem o mesmo comportamento em relação à redução da função objetivo.

FIGURA 60 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 61 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM $\alpha = 1,8$ E 10% DE CR



FONTE: A autora (2024).

6.2 PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO

Uma segunda estrutura é analisada neste trabalho: placa metálica retangular com furo excêntrico. A geometria e as dimensões desta placa são apresentadas na FIGURA 62. Esta placa

TABELA 14 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 10% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO

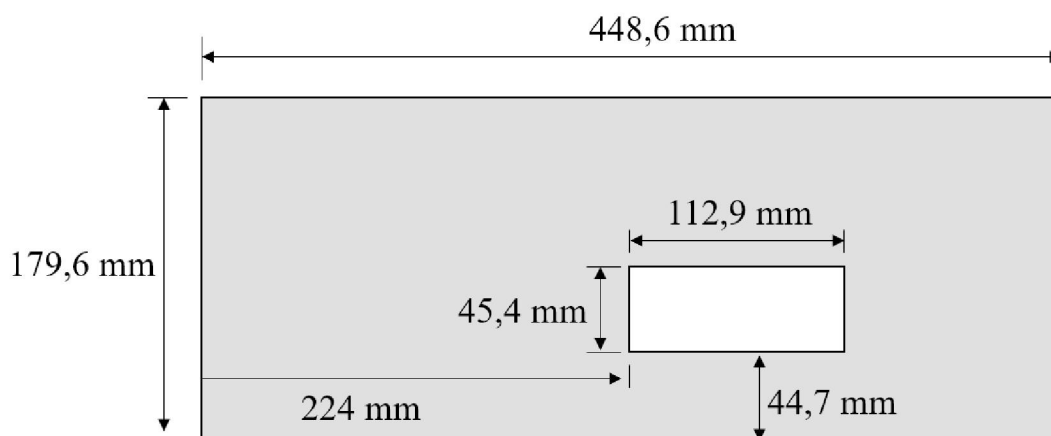
Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$1,3472 \cdot 10^6$
CR definida via AG	627,6	$3,7878 \cdot 10^5$

FONTE: A autora (2024).

possui 9,49 mm de espessura e é produzida em aço ASTM-A36. Para modelar a estrutura em EF, foi utilizada uma malha uniforme de 32 x 16 elementos, totalizando 480 elementos. A malha utilizada nesta placa está apresentada na FIGURA 63, bem como os nós de excitação (nó 2) e de resposta (nó 12) para obtenção da FRF. Estes nós de excitação e resposta, são utilizados em todas as análises que envolvem esta estrutura.

Na FIGURA 64 são apresentados os modos de vibrar para a estrutura em questão sob a condição de contorno totalmente livre. Adicionalmente, são exibidas as frequências naturais referentes a cada um dos modos de vibrar. Na FIGURA 65 estão apresentados os valores da energia de deformação modal associadas a para cada um dos quatro modos de vibrar para esta placa.

FIGURA 62 – DIMENSÕES DA GEOMETRIA DA PLACA COM FURO EXCÊNTRICO



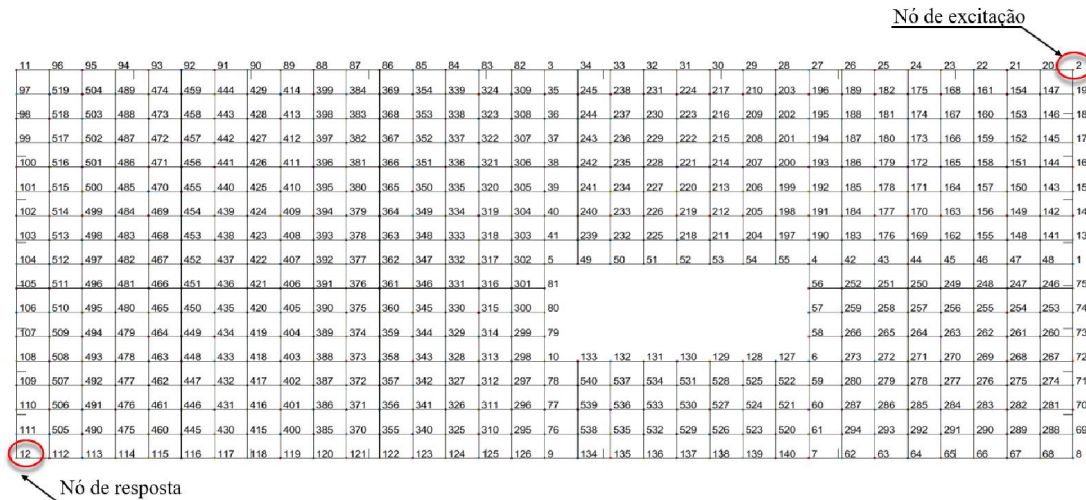
FONTE: A autora (2024).

6.2.1 Validação experimental do sistema primário para placa retangular com furo excêntrico

A placa em estudo nesta seção foi posta sob condição de contorno totalmente livre e, para representar fisicamente essa condição, a placa foi suspensa por fios de aço, conforme a FIGURA 66.

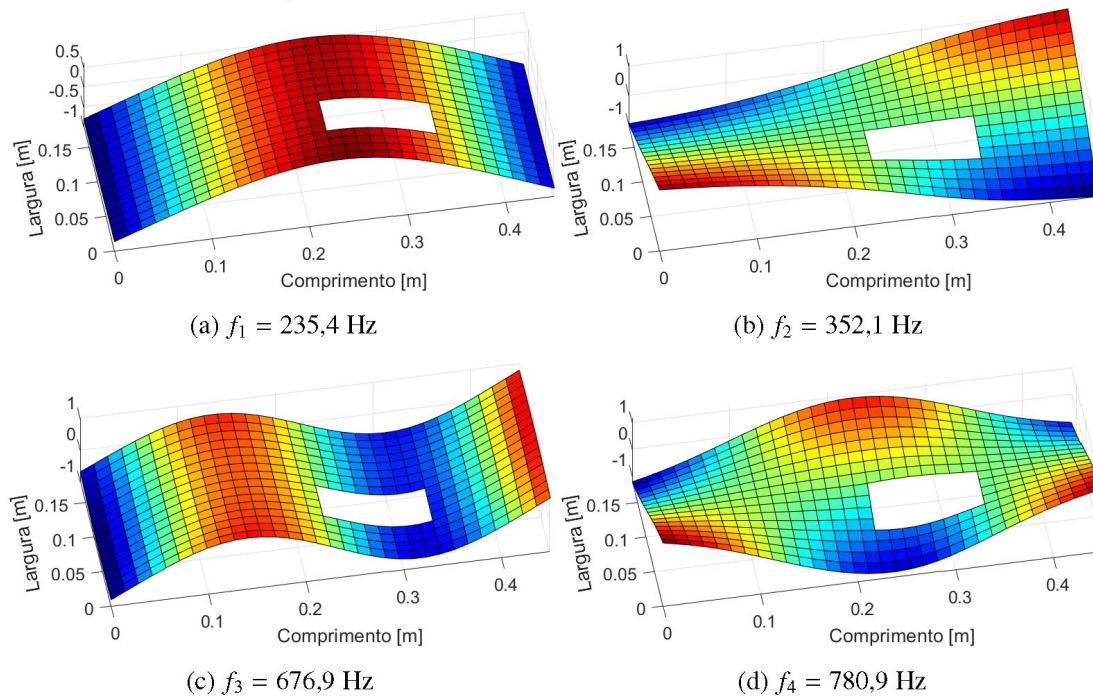
A FRF da estrutura em questão, obtida via MEF utilizando o elemento finito de placa laminada, é aqui (FIGURA 67) confrontada com a FRF obtida experimentalmente e a FRF obtida a partir do *software* de elementos finitos Abaqus. As FRFs são obtidas considerando os nós de excitação (nó 2) e de resposta (nó 12) apresentados na FIGURA 63. A FRF numérica se

FIGURA 63 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA A PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO



FONTE: A autora (2024).

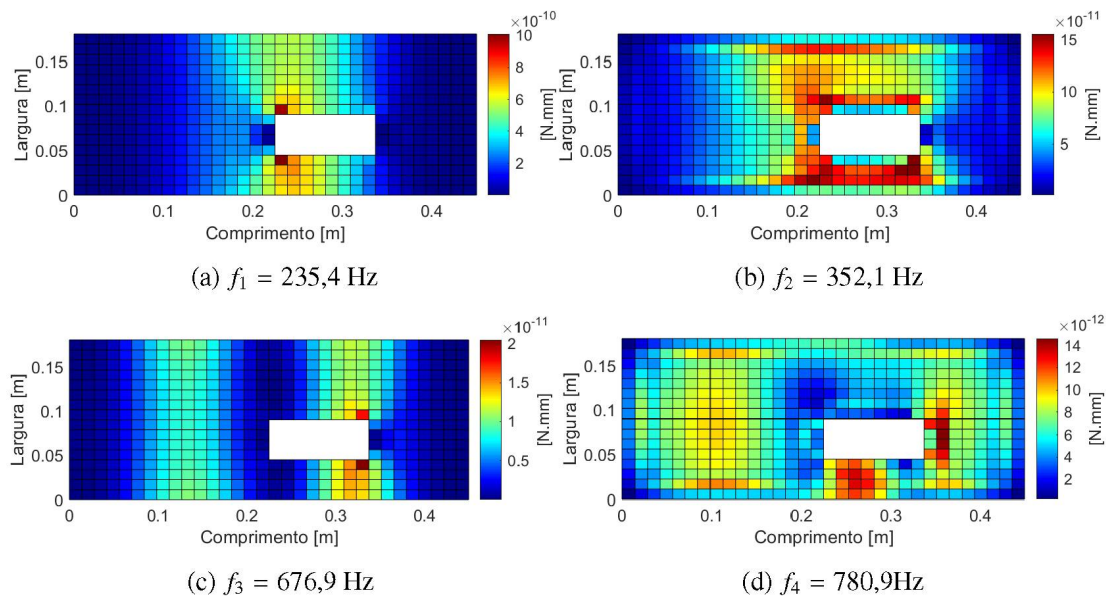
FIGURA 64 – MODOS DE VIBRAR PARA A PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO SOB CONDIÇÕES DE CONTORNO TOTALMENTE LIVRE



FONTE: A autora (2024).

assemelha muito à FRF gerada experimentalmente, afirmando que o modelo numérico está muito bem ajustado aos parâmetros geométricos e de material da estrutura. Novamente, uma pequena discrepância nas amplitudes dos picos da FRF do modelo obtido no Abaqus pode ser notada, possivelmente devido à consideração de um único valor de fator de amortecimento modal para todos os modos.

FIGURA 65 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO MODAL ELEMENTAR PARA A PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO



FONTE: A autora (2024).

6.2.2 Resultado da otimização para faixa de frequências que compreende o primeiro modo de vibrar, para valores de $\alpha = 100$ e de $P_{r_{cr}} = 20\%$

Nesta seção, um resultado da otimização controlando uma faixa de frequências que compreende o primeiro modo de vibrar para um $P_{r_{cr}} = 20\%$ e um $\alpha = 100$ para a placa com furo excêntrico é apresentado. Novamente, deseja-se simular uma situação na qual não há controle de *checkerboard*. A solução encontrada para este problema está apresentada na FIGURA 68, a qual apresenta um perímetro igual a 3227,2 mm. A FRF e a curva de convergência estão apresentadas na FIGURA 69, onde o valor da função objetivo é igual a $5,5635 \cdot 10^3$.

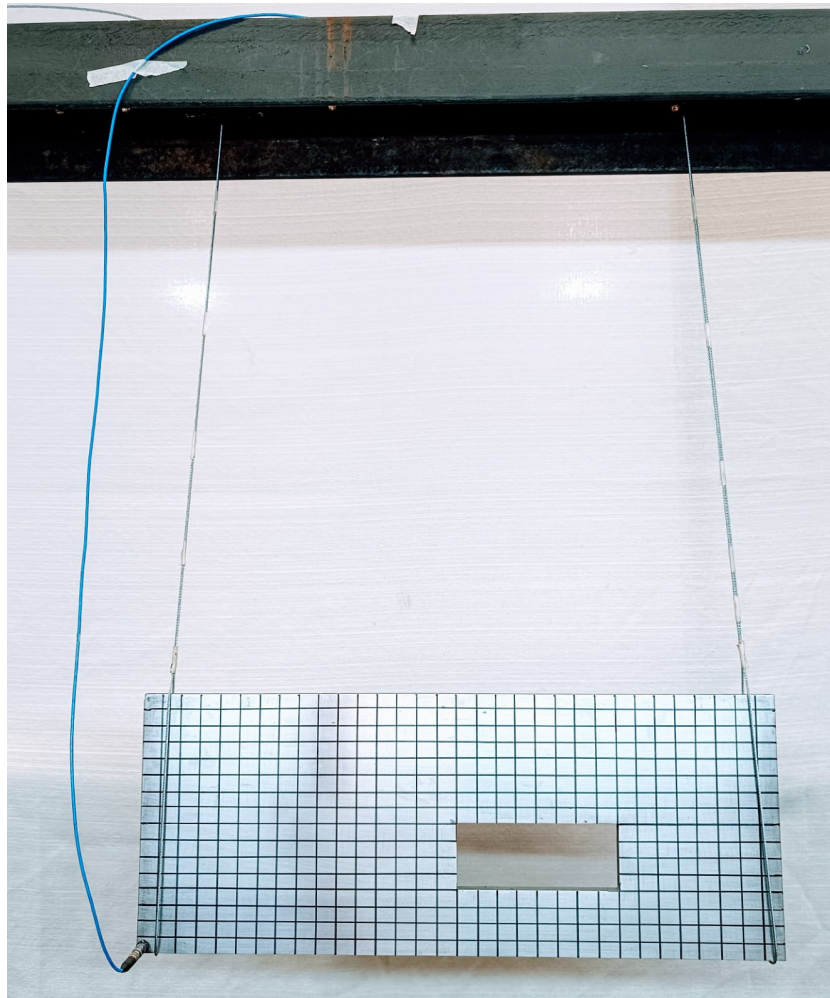
Novamente, a solução encontrada apresenta uma complexidade que torna a sua fabricação inviável. Na sequência, os resultados com controle de perímetro são apresentados para diferentes faixas de frequências e com eles é possível observar que a técnica de controle de perímetro evita o fenômeno de *checkerboard*.

6.2.3 Resultados da otimização para faixas de frequência que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, individualmente, para valores de $\alpha = 1,8$ e de $P_{r_{cr}} = 20\%$

Nesta seção, são apresentados as soluções ótimas encontradas para o controle de vibrações em faixas de frequências que abrangem do primeiro ao quarto modo de vibrar, individualmente. Os resultados obtidos foram encontrados considerando um perímetro de referência de 540 mm e um α igual a 1,8, resultando em um perímetro limite igual a 972,0 mm.

O primeiro caso analisado nesta seção, se refere ao controle de uma faixa de frequências que compreende o primeiro modo de vibrar, a qual é 200 a 300 Hz. A solução ótima obtida está apresentada na FIGURA 70 (a). Nesta mesma figura, no item (b) é mostrada a solução gerada

FIGURA 66 – PLACA COM FURO QUADRADO NA CONDIÇÃO LIVRE PARA ANÁLISE EXPERIMENTAL



FONTE: A autora (2024).

via MSE. Na FIGURA 71 (a) estão apresentadas as FRFs para cada uma das configurações consideradas em conjunto com a FRF do sistema primário. Na FIGURA 71 (b) estão apresentadas as curvas de convergência para os valores médio e mínimo da função objetivo. Observa-se que a solução ótima encontrada para esta situação foi resultou em uma redução de 35 dB na amplitude do pico da FRF.

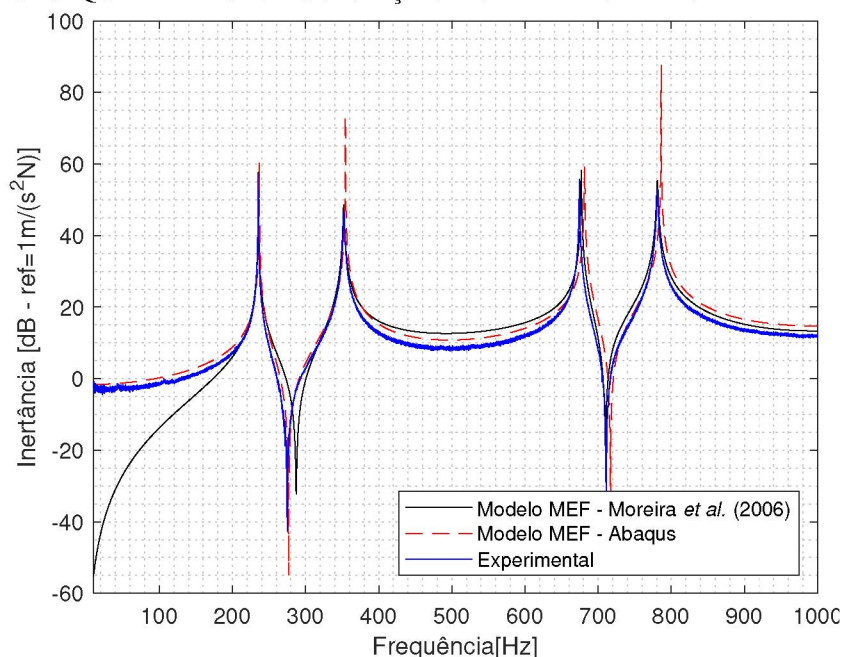
TABELA 15 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O PRIMEIRO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$1,4244 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	720	$5,0421 \cdot 10^3$
CR definida via AG	747,9	$2,4673 \cdot 10^3$

FONTE: A autora (2024).

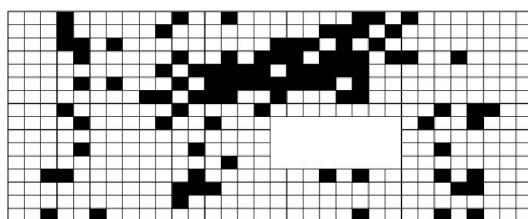
Na segunda análise, foi considerada uma faixa de frequências em torno do segundo modo de vibrar, dada entre 300 e 400 Hz. Para este caso, a solução ótima está apresentada na

FIGURA 67 – FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SISTEMA PRIMÁRIO DA PLACA COM FURO QUADRADO NA CONDIÇÃO TOTALMENTE LIVRE



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 68 – CONFIGURAÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 100$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 72 (a) em conjunto com a configuração obtida pelo método MSE, FIGURA 72 (b), com os respectivos valores de perímetro. Na FIGURA 73, as FRFs são plotadas, e é possível notar que a solução ótima gerou uma redução de 18 dB na amplitude do pico da inertância. Os valores das funções objetivo para cada solução obtida, está apresentada na TABELA 16.

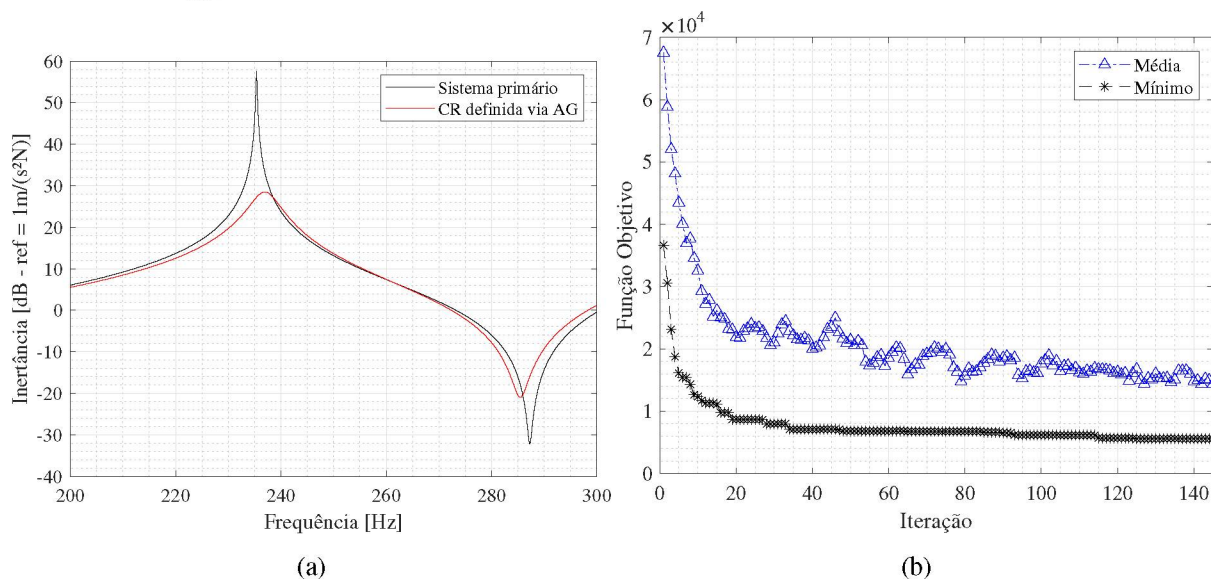
TABELA 16 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O SEGUNDO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$1,6029 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	751,1	$3,9855 \cdot 10^4$
CR definida via AG	1335,8	$1,9706 \cdot 10^4$

FONTE: A autora (2024).

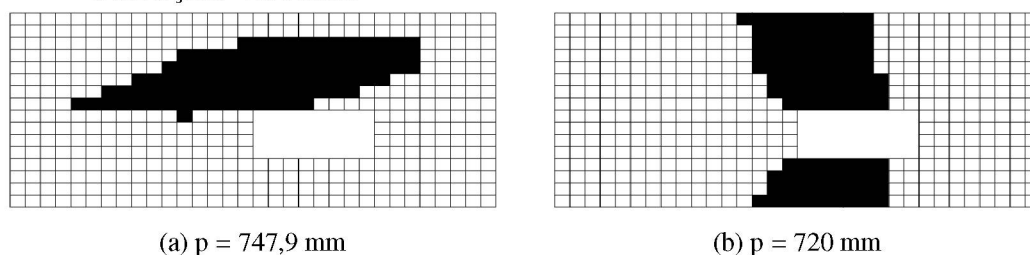
Na análise de uma faixa de frequências que abrange o terceiro modo, de 600 a 700 Hz, a

FIGURA 69 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIA EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO, COM $\alpha = 100$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 70 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

configuração ótima obtida está apresentada na FIGURA 74 (a). Por sua vez, na FIGURA 74 (b), é exibida a configuração obtida via MSE. As FRFs estão na FIGURA 75 (a). Para a configuração ótima é observada uma redução na amplitude do pico da inertância de 32 dB.

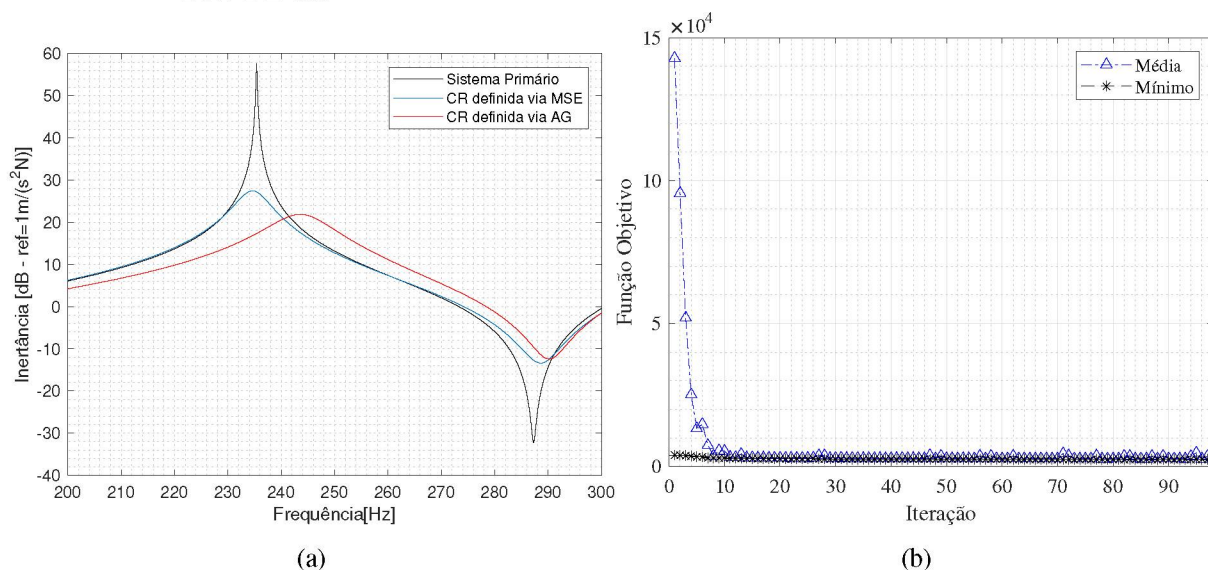
TABELA 17 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O TERCEIRO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$5,6037 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	953,5	$3,52645 \cdot 10^4$
CR definida via AG	1094,3	$1,1192 \cdot 10^4$

FONTE: A autora (2024).

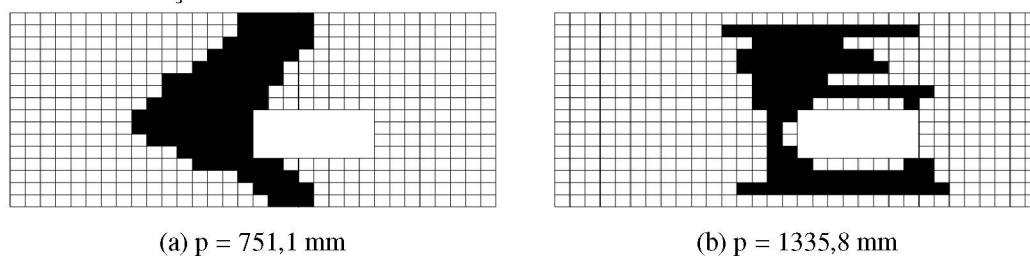
O último caso de análise desta seção, compreende uma faixa de frequências de 720 a 820 Hz, a qual contém o quarto modo de vibrar. A solução ótima obtida está apresentada

FIGURA 71 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 72 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

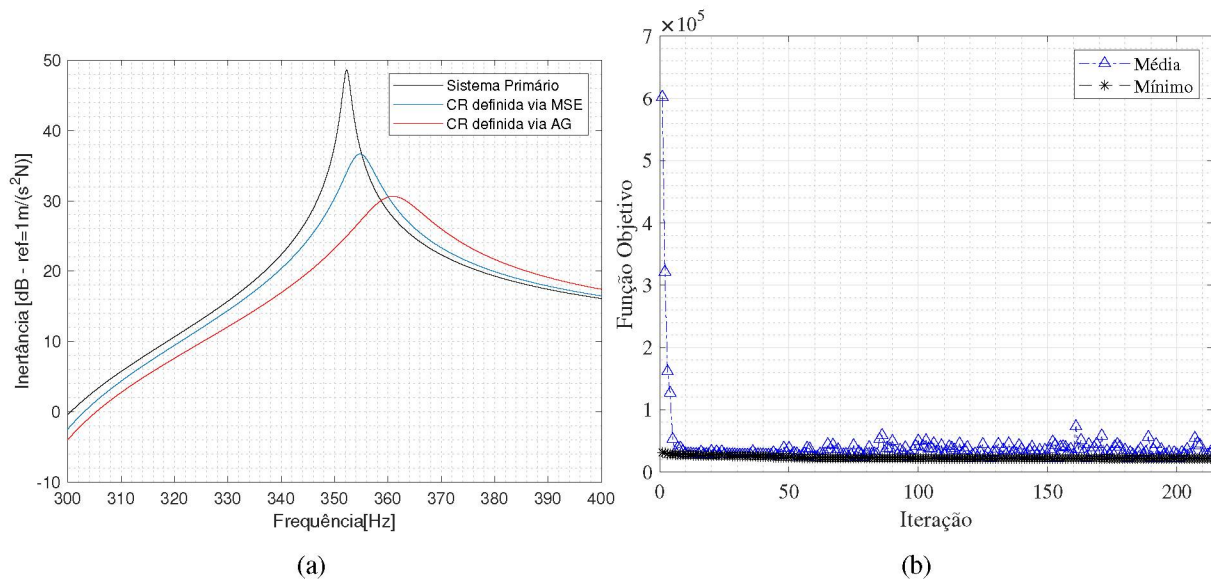
na FIGURA 76 (a) e solução obtida via MSE está na FIGURA 76 (b). As FRFs são exibidas na FIGURA 77 (a), em conjunto com as curvas de convergência, FIGURA 77 (b). Por fim, na TABELA 18 são mostrados os valores da função objetivo para o sistema primário e para as duas soluções obtidas. A redução no valor da amplitude do pico da inertância é de 20 dB.

TABELA 18 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE O QUARTO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$8,4600 \cdot 10^5$
CR definida via MSE	863,2	$1,5639 \cdot 10^5$
CR definida via AG	1513,5	$4,9710 \cdot 10^4$

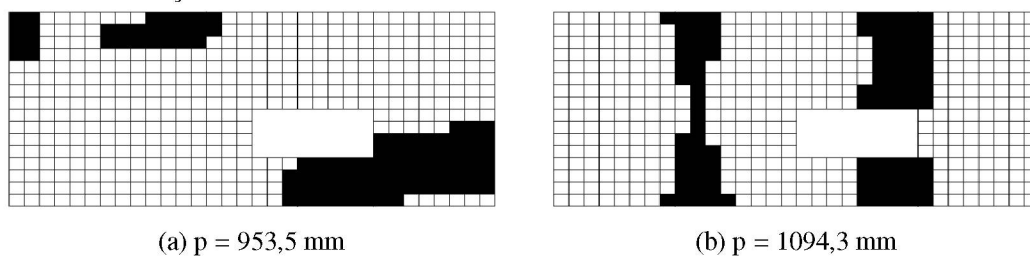
FONTE: A autora (2024).

FIGURA 73 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O SEGUNDO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 74 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



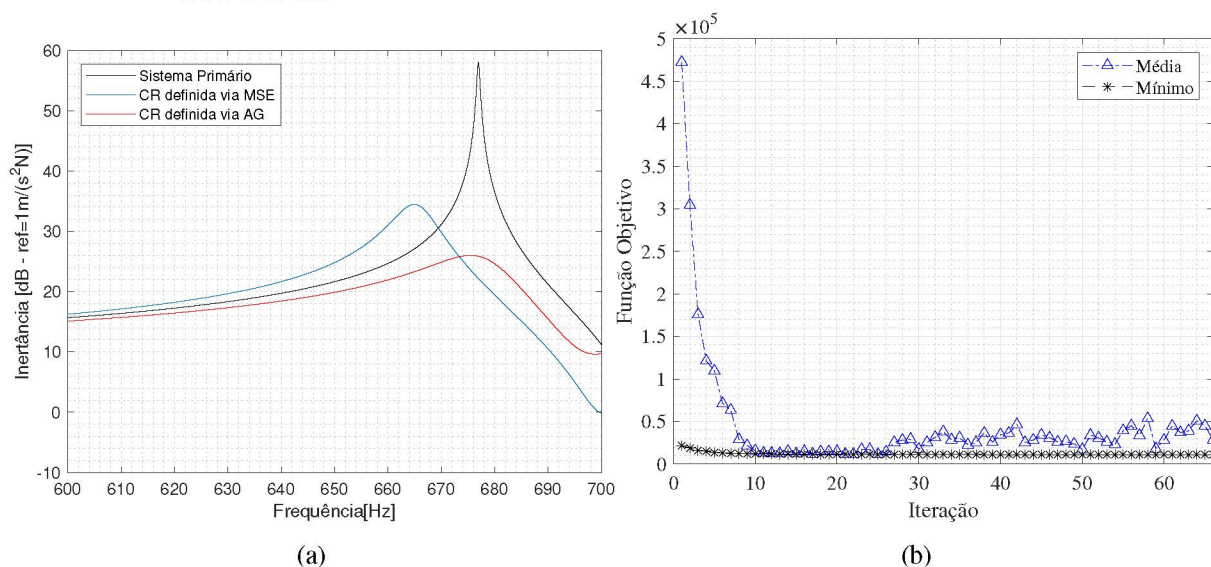
FONTE: A autora (2024).

Observa-se que as configurações ótimas obtidas para a placa retangular com furo excêntrico apresentam uma complexidade maior do que as configurações ótimas obtidas para a placa retangular. Isso pode estar associado à complexidade da estrutura e também ao valor do perímetro limite ser maior. Um valor de perímetro limite elevado gera um espaço de busca maior para o algoritmo determinar a solução ótima, podendo causar maior complexidade nas configurações ótimas encontradas (YANG *et al.*, 2002; ZHANG; DUYSINX, 2003).

6.2.4 Resultado da otimização para faixa de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, simultaneamente, para $\alpha = 1,8$ e $P_{r_{cr}} = 20\%$

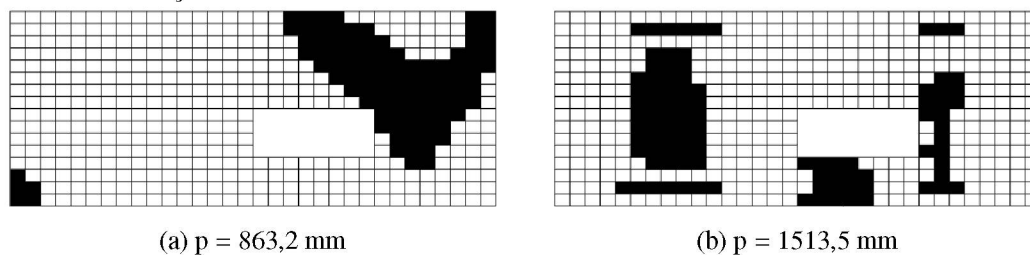
Nesta seção, a solução ótima para o controle de uma faixa de frequências que abrange desde o primeiro modo de vibrar até o quarto modo de vibrar é apresentada. A faixa de frequências considerada é de 100 a 900 Hz.

FIGURA 75 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O TERCEIRO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 76 – SOLUÇÕES PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO VIA MSE



FONTE: A autora (2024).

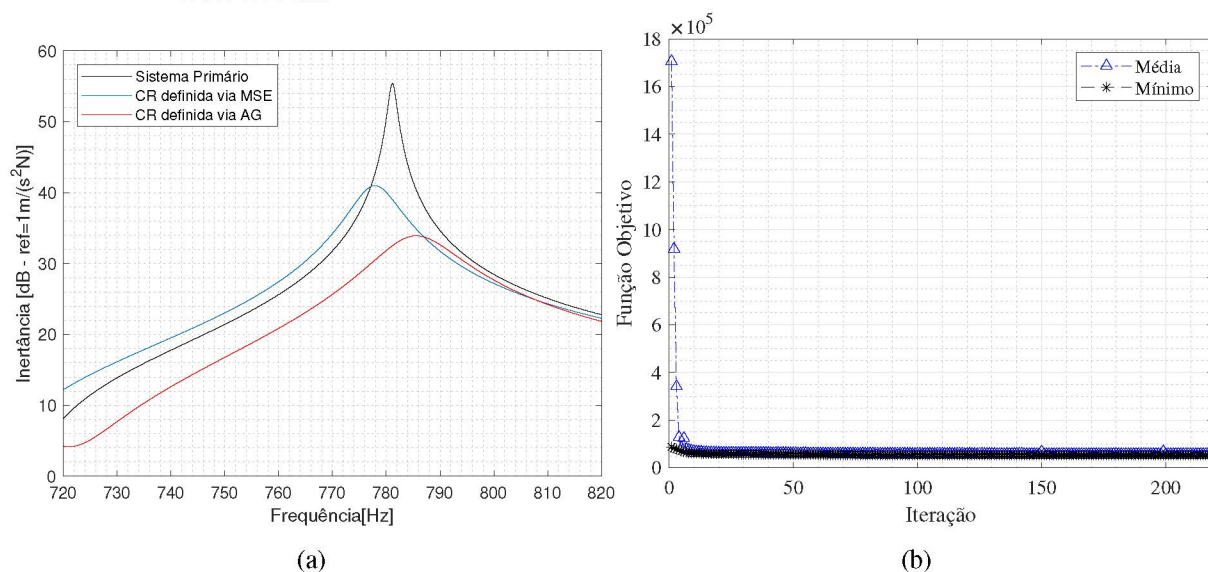
A solução ótima obtida é apresentada na FIGURA 78, a qual possui um valor de perímetro de 776,2 mm. As FRFs e as curvas de convergência são exibidas nas FIGURAS 79 (a) e 79 (b), respectivamente. Em relação à FRF do sistema primário, a solução obtida pelo AG foi capaz de reduzir a amplitude do pico da FRF em 25 dB para o primeiro modo, 15 para o segundo modo, 28 dB para o terceiro modo e 20 dB para o quarto modo.

TABELA 19 – VALORES DO PERÍMETRO E DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS CONSIDERANDO 20% DE CR E $\alpha = 1,8$ PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO

Condição	Perímetro (mm)	Valor da função objetivo ($[m/s^2N]$)
Sistema primário	-	$1,7572 \cdot 10^6$
CR definida via AG	776,2	$1,3015 \cdot 10^5$

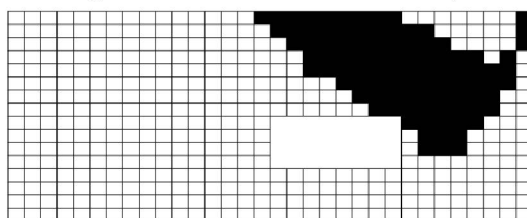
FONTE: A autora (2024).

FIGURA 77 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 78 – SOLUÇÃO ÓTIMA PARA UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR

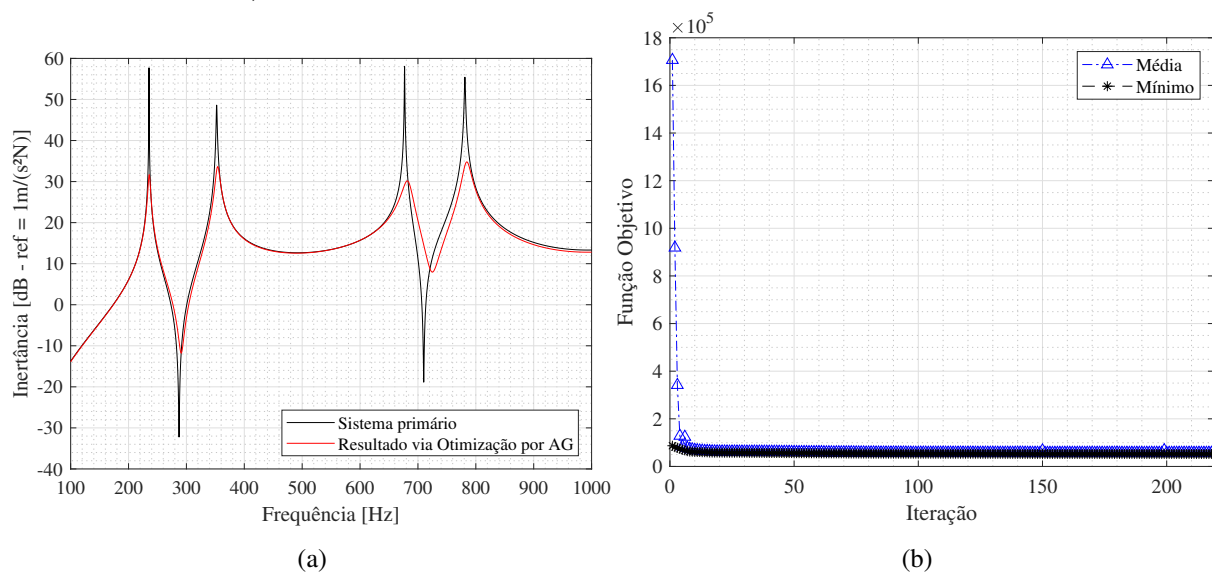


FONTE: A autora (2024).

6.2.5 Realizações experimentais das configurações obtidas para faixas de frequências que compreende o primeiro e o segundo modo de vibrar, individualmente

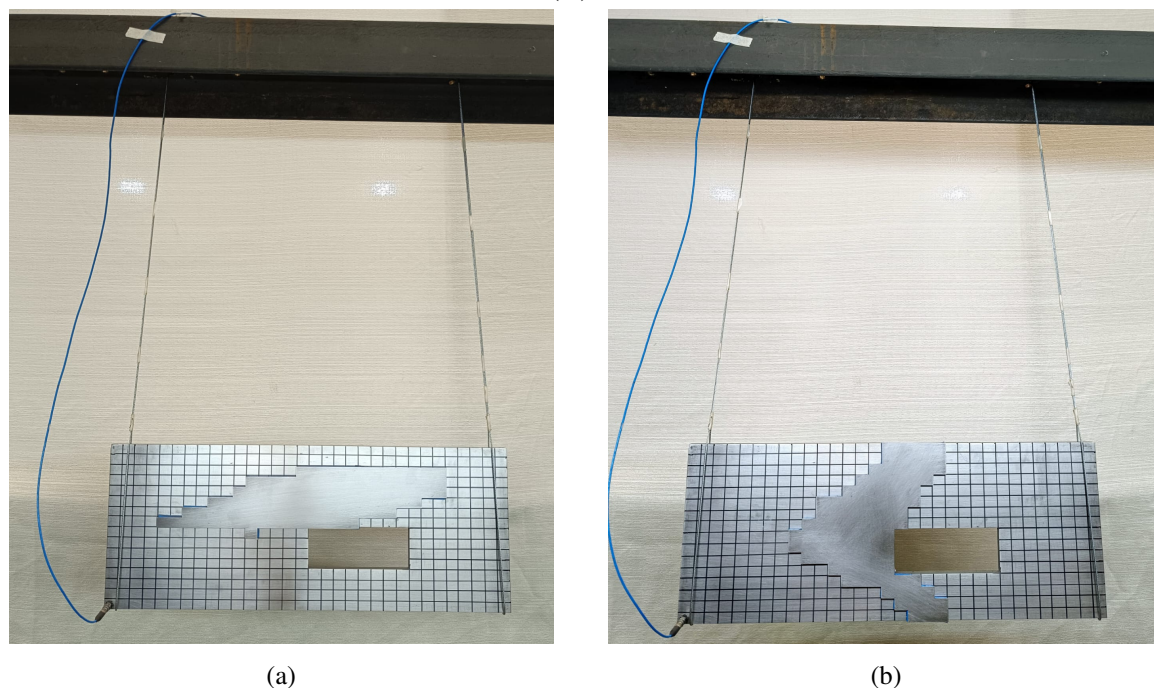
As validações experimentais das configurações ótimas obtidas para controle do primeiro e do segundo modo de vibrar, são apresentadas. Na FIGURA 81, as FRFs para o sistema primário (numérica) e para a solução ótima (numérica e experimental) estão apresentadas. Para o caso do controle do primeiro modo, a diferença entre a amplitude do pico da curva experimental e da curva numérica foi de apenas 2 dB. Já para o caso de controle do segundo modo, esta diferença é de apenas 4 dB. Esses valores mostram que os parâmetros utilizados na metodologia e as soluções ótimas obtidas, conseguem representar o comportamento real da estrutura e gerar amortecimentos significativos.

FIGURA 79 – (A) FRF E (B) CURVA DE CONVERGÊNCIA PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM UMA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE ABRANGE DO PRIMEIRO AO QUARTO MODO DE VIBRAR PARA PLACA RETANGULAR COM FURO EXCÊNTRICO PARA $\alpha = 1,8$ E 20% DE CR



FONTE: A autora (2024).

FIGURA 80 – SOLUÇÕES ÓTIMAS PARA CONTROLE DE FAIXAS DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO (A) E DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR

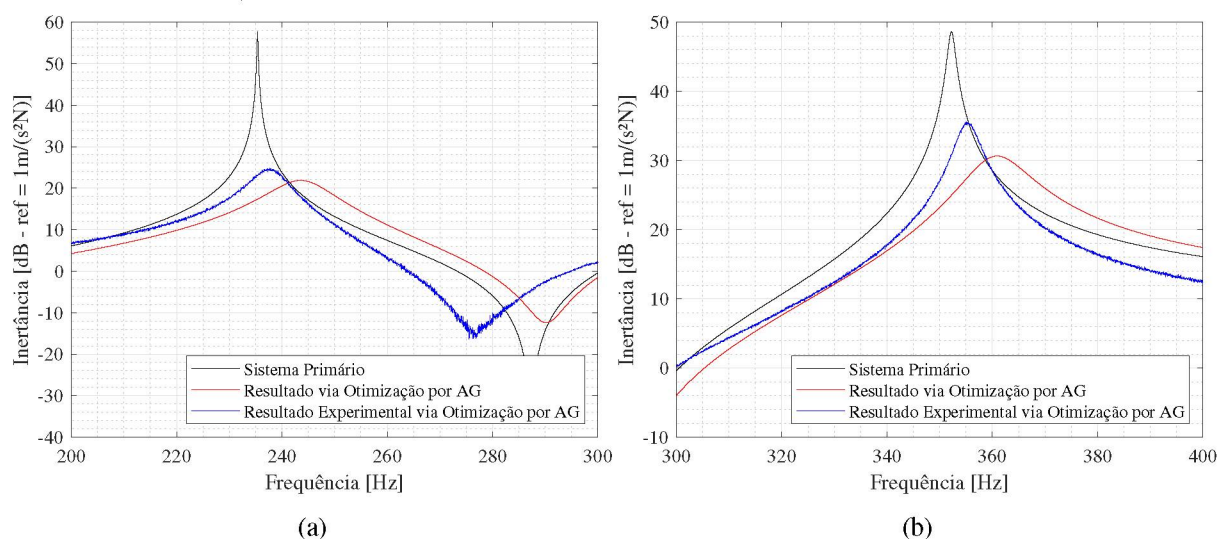


FONTE: A autora (2024).

6.3 DISCUSSÕES GERAIS

Colocar CR nas regiões que apresentam maiores níveis de energia de deformação modal pode parecer uma maneira fácil e simples de reduzir os níveis de vibração em modos específicos

FIGURA 81 – FRF PARA AS SOLUÇÕES ÓTIMAS OBTIDAS PARA O CONTROLE DE FAIXAS DE FREQUÊNCIAS EM TORNO DO PRIMEIRO MODO (A) E DO SEGUNDO MODO DE VIBRAR



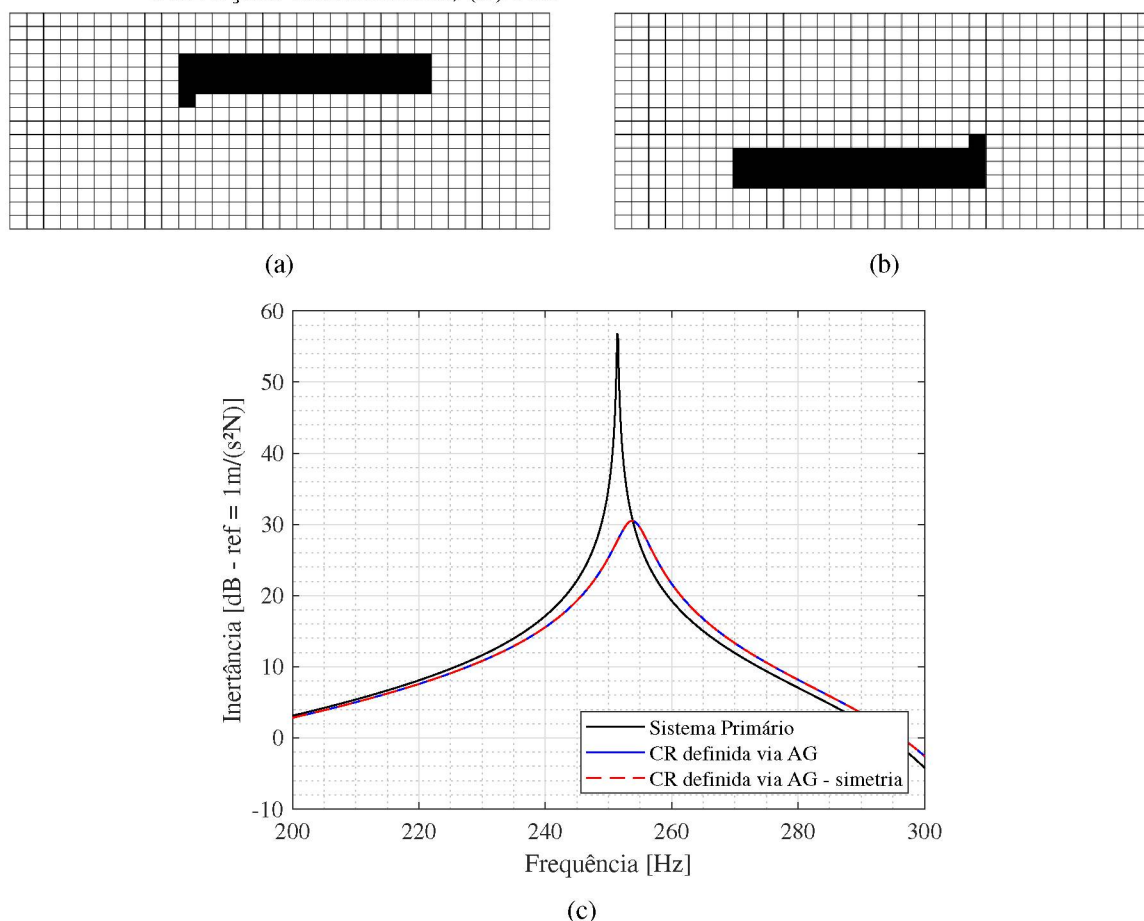
FONTE: A autora (2024).

(KIM *et al.*, 2013). Entretanto, quando se trata de obter soluções menos complexas, fáceis de serem reproduzidas e, principalmente, que apresentam maior eficiência em reduzir os níveis de vibração, essa pode não ser a melhor escolha. Isso pode ser comprovado com os resultados apresentados ao longo deste trabalho, onde as soluções encontradas por meio da otimização topológica apresentaram maiores níveis de redução da vibração e geometrias menos complexas. As soluções geradas pelo método MSE, podem não gerar uma redução tão significativa na função objetivo quanto as soluções encontradas pela otimização topológica. Os autores Kim *et al.* (2013) analisaram situações semelhantes às estudadas neste trabalho. No trabalho citado, a estrutura de análise foi uma estrutura do tipo casca com amortecimento irrestrito. Os autores compararam os fatores de perda modal por três técnicas diferentes: (1) baseado na forma do modo vibrar, (2) baseado na distribuição de energia de deformação modal e (3) utilizando otimização topológica. Para essa última técnica, a função objetivo utilizada foi a maximização do fator de perda modal, para um modo em específico e sujeito a restrição de máxima área de cobertura. Com isso, os autores mostraram que, geralmente, técnicas de otimização topológica fornecem soluções ótimas que causam maior efeito de amortecimento do que as outras duas abordagens.

Outro ponto importante a ser ressaltado é devido à simetria da placa retangular, das condições de contorno e, principalmente, da matriz de inertância, onde as soluções ótimas encontradas possuem outra solução ótima, dada pela simetria do problema. Para que isso fique mais claro, deve-se lembrar que a função objetivo utilizada se baseia no cálculo da função inertância, e essa por sua vez é dada por uma matriz simétrica. Com isso, ao obter uma solução ótima, podemos ter duas soluções ótimas. Isso é comprovado pela FIGURA 82, onde a solução do controle de uma faixa de frequência que compreende o primeiro modo de vibrar, para $\alpha = 1,5$ e $PR_{cr} = 10\%$, é apresentada com sua respectiva solução simétrica. Na FIGURA 82 (c) as FRFs

para as duas soluções estão apresentadas.

FIGURA 82 – SOLUÇÕES PARA FAIXA DE FREQUÊNCIAS QUE COMPREENDE O PRIMEIRO MODO DE VIBRAR PARA $\alpha = 1,5$ E $PR_{cr} = 10\%$. (A) SOLUÇÃO ÓTIMA; (B) SOLUÇÃO SIMÉTRICA; (C) FRF



FONTE: A autora (2024).

Algumas soluções sem o controle de *checkerboard* foram apresentadas para evidenciar que o uso do controle de perímetro gerou soluções livres de *checkerboard* e fáceis de serem fabricadas. Contudo, em alguns resultados foi observada a presença de alguns elementos "soltos", como nas FIGURAS 52, 74 e 76. Tal fenômeno pode ter ocorrido, porque para o controle daquela faixa de frequência em questão, o valor do perímetro limite poderia ter sido menor do que aquele valor utilizado e assim, evitaria estes elementos "soltos". Alguns trabalhos dos autores Yang *et al.* (2002) e Zhang e Duysinx (2003) realizam discussões sobre os valores dos perímetros limites. No entanto, pode-se afirmar que a restrição de perímetro se mostra eficiente em controlar o tamanho, o número de vazios e possibilita controlar a complexidade das CRs otimizadas, tornando-o uma técnica eficiente no controle de *checkerboard* (PETERSSON, 1999; SHUKLA *et al.*, 2013).

De forma geral, com os resultados apresentados foi possível evidenciar que ao utilizar o controle de perímetro gerou-se soluções livres de *checkerboard*, com pouca complexidade e possíveis de serem fabricadas. Além disso, ao serem apresentados os resultados para diferentes valores de α foi possível visualizar que a complexidade das soluções encontradas são dependentes

deste parâmetro que controla o valor do perímetro limite.

7 CONCLUSÕES

7.1 CONCLUSÕES GERAIS

No presente trabalho, foi apresentada uma metodologia de otimização topológica aplicada ao controle passivo de vibrações via CR em estruturas do tipo placa. A metodologia teve como objetivo determinar as posições ótimas de CR com o intuito de reduzir a vibração da estrutura sob uma restrição de máxima área de cobertura e uma restrição que limita o perímetro das CRs. Para isso, a função objetivo utilizada foi uma aproximação da norma Euclidiana da função inertância e as variáveis de projeto foram as posições das CRs. Estas últimas, foram definidas no processo de otimização como variáveis discretas e binárias (0 e 1). Um algoritmo genético foi utilizado no processo de otimização das CRs e a restrição que limita o perímetro foi adicionada ao processo de otimização, com o intuito de mitigar o fenômeno de *checkerboard*.

Toda a metodologia de otimização topológica foi desenvolvida no *software* Matlab e foi aplicada à duas estruturas do tipo placa semiespessas retangulares, sendo que uma delas havia um furo retangular excêntrico. Para isso, foi considerado o controle de faixas de frequências que abrangem desde o primeiro ao quarto modo de vibrar, individualmente e simultaneamente, para ambas as placas, na condição totalmente livre. Para isso, diferentes valores de percentuais de CR e de perímetros limites foram analisados.

Além da metodologia de otimização, também foi desenvolvida uma nova técnica de mutação para melhorar os indivíduos gerados randomicamente pelo AG. Esta técnica se baseia no conceito de análise de melhoria (AM), a qual consiste em avaliar o quanto cada elemento finito recebendo CR isoladamente é capaz de alterar a função objetivo. Assim, os elementos são classificados com base em sua eficiência em reduzir a vibração e essa classificação é dada pelo índice de melhoria. O índice de melhoria é determinado pela diferença entre as normas Euclidiana da função inertância do sistema sem amortecimento (sistema primário) e da função inertância do sistema para cada EF com CR. Ou seja, para um dado indivíduo genérico, os genes classificados pela AM como mais eficientes, são randomicamente escolhidos para fazer parte desse indivíduo genérico, bem como os menos eficientes são randomicamente escolhidos para serem retirados. O intuito da utilização dessa nova técnica de mutação é melhorar um indivíduo em termos de eficiência na redução de vibração e mitigar o fenômeno de *checkerboard*.

Para validar a formulação de elementos finitos e a FRF do sistema primário, experimentos físicos foram realizados. Isso foi realizado por meio da comparação da FRF do sistema primário, obtida numericamente, com a FRF obtida experimentalmente. A partir desta validação, foi possível concluir que o modelo de elementos finitos utilizado é capaz de representar fielmente o comportamento da estrutura real.

Para validar a metodologia de otimização topológica utilizando AG com controle *checkerboard*, experimentos físicos também foram realizados. Para isso, os resultados numéricos dos sistemas compostos obtidos para o controle de vibração, foram confrontados, por meio

da FRF obtida numericamente com a FRF obtida experimentalmente. As FRFs dos modelos numéricos revelaram uma semelhança muito grande com o modelo experimental, apresentando diferenças nas amplitudes dos picos das FRFs de apenas 4dB. Com isso, é possível afirmar que o modelo de elementos finitos e o método de obtenção da FRF do sistema composto utilizados são capazes de representar muito bem o comportamento da estrutura composta.

Em relação ao controle de vibração da estrutura, para os casos que compreendem faixas de frequências de modos específicos, ao se utilizar 10% de cobertura por CR foi possível reduzir em até 25 dB a amplitude do pico da FRF. O percentual de massa adicionado para esse caso em específico foi de 1,5%. Já para o controle de faixas de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, com 10% de cobertura, a redução na amplitude do pico da FRF pôde chegar em até 15 dB. Para os resultados considerando 20% de cobertura, para o controle de modos isoladamente foi possível reduzir em até 30 dB a amplitude do pico da FRF. Já para faixas de frequências que compreendem do primeiro ao quarto modo de vibrar, cerca de 20 dB de redução na amplitude do pico da FRF foi encontrada. Nesse caso, o percentual de massa adicionada foi de 3%. A metodologia utilizada foi capaz de reduzir efetivamente a vibração das estruturas, tanto em pequenas faixas de frequências quanto em banda larga utilizando um pequeno percentual de cobertura por CR (10%) e um pequeno acréscimo de massa à estrutura (1,5%).

Em relação ao controle de *checkerboard*, pode-se afirmar que a técnica de controle de perímetro utilizada cumpriu com seu papel, visto que as configurações encontradas não apresentam *checkerboard*, além de possuírem pouca complexidade. Portanto, podem ser fabricadas com relativa facilidade. Algumas soluções obtidas tiveram alguns elementos "soltos". Essa característica, provavelmente, ocorreu porque, para o controle daquela faixa de frequências em específico, o perímetro limite poderia ter sido menor.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir do desenvolvimento desta tese e dos conceitos teóricos utilizados, algumas sugestões podem ser feitas:

- Aplicar a metodologia apresentada a estruturas do tipo casca, permitindo uma aplicação mais ampla da técnica apresentada;
- Aplicar e implementar a metodologia apresentada para uma faixa de temperaturas de trabalho, ao invés de uma temperatura fixa. Isso provavelmente irá gerar topologias diferentes daquelas obtidas neste trabalho, mesmo que para faixas de frequências iguais às utilizadas;
- Aplicar a metodologia para diferentes funções objetivos, a fim de determinar a sensibilidade da distribuição de CR;

- Investigar a possibilidade de otimização das espessuras do material viscoelástico e da camada restritora como uma etapa posterior à otimização topológica das CRs utilizando AG;
- Utilizar geometrias mais complexas;
- Utilizar malhas de elementos finitos não uniformes, possibilitando gerar solução com contorno de CR mais suaves.

REFERÊNCIAS

- ABRATE, S.; SCIUVA, M. D. Equivalent single layer theories for composite and sandwich structures: A review. **Composite Structures**, v. 179, p. 482–494, 2017.
- AGLIETTI, G.; LANGLEY, R.; ROGERS, E.; GABRIEL, S. Model building and verification for active control of microvibrations with probabilistic assessment of the effects of uncertainties. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 218, n. 4, p. 389–399, 2004.
- AKOUSSAN, K.; BOUDAUD, H.; DAYA, E.-M.; CARRERA, E. Vibration modeling of multilayer composite structures with viscoelastic layers. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 22, n. 1-2, p. 136–149, 2015.
- AL-AJMI, M. A. **Homogenization and Structural Topology Optimization of Constrained Layer Damping Treatments**. Tese (Doutorado) — University of Maryland, College Park, Department of Mechanical Engineering, 2004.
- AL-AJMI, M. A.; BOURISLI, R. I. Optimum design of segmented passive-constrained layer damping treatment through genetic algorithms. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 15, n. 3-4, p. 250–257, 2008.
- AMBROSIO, L.; BUTTAZZO, G. An optimal design problem with perimeter penalization. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 1, n. 1, p. 55–69, 1993.
- ANSARI, M.; KHAJEPOUR, A.; ESMAILZADEH, E. Application of level set method to optimal vibration control of plate structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, n. 4, p. 687–700, 2013.
- ARAUJO, M. V. O.; LAGES, E. N.; CAVALCANTE, M. A. A. Checkerboard free topology optimization for compliance minimization applying the finite-volume theory. **Mechanics Research Communications**, v. 108, 2020.
- ARI, M.; FAAL, R. Passive vibration suppression of plate using multiple optimal dynamic vibration absorbers. **Archive of Applied Mechanics**, v. 90, n. 2, p. 235–274, 2020.
- ARORA, J. **Introduction to Optimum Design**. 4. ed. [S.l.: s.n.], 2017.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, v. 27, n. 3, p. 201–210, 1983.
- BALAMURUGAN, R.; RAMAKRISHNAN, C.; SWAMINATHAN, N. Integrated optimal design of structures under multiple loads for topology and shape using genetic algorithm. **Engineering Computations**, v. 23, n. 1, p. 57–83, 2006.
- BARBOSA, H. J.; LEMONGE, A. C. A new adaptive penalty scheme for genetic algorithms. **Information Sciences**, v. 156, n. 3-4, p. 215–251, 2003.
- BARBOSA, H. J.; LEMONGE, A. C. An Adaptive penalty method for genetic algorithms in constrained optimization problems. In: **Frontiers in Evolutionary Robotics**. [S.l.: s.n.], 2008. cap. 2, p. 9–34.
- BAZ, A. M. **Active and Passive Vibration Damping**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2019.

BECKERS, M. Topology optimization using a dual method with discrete variables. **Structural Optimization**, v. 17, p. 14–24, 1999.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989.

BENDSØE, M. P.; DÍAZ, A.; KIKUCHI, N. Topology and generalized layout optimization of elastic structures. In: **Topology Design of Structures**. [S.l.: s.n.], 1993. p. 159–205.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2004.

BHASKAR, K.; VARADAN, T. **Plates: Theories and Applications**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2021.

BISWAL, D. K.; MOHANTY, S. C. Free vibration study of multilayer sandwich spherical shell panels with viscoelastic core and isotropic/laminated face layers. **Composites Part B: Engineering**, v. 159, p. 72–85, 2019.

BLAAUWENDRAAD, J. **Plates and FEM**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2012.

BORRVAL, T.; PETERSSON, J. Topology optimization using regularized intermediate density control. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 37-38, p. 4911–4928, 2001.

BOURDIN, B. Filters in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 9, p. 2143–2158, 2001.

BRINSON, H. F.; BRINSON, L. C. *et al.* **Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2008.

BRUGGI, M. On the solution of the checkerboard problem in mixed-fem topology optimization. **Computers & Structures**, v. 86, n. 19-20, p. 1819–1829, 2008.

BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 26-27, p. 3443–3459, 2001.

BUHL, T.; PEDERSEN, C. B.; SIGMUND, O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, n. 2, p. 93–104, 2000.

CALIRI, M. F.; FERREIRA, A. J.; TITA, V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the finite element method. **Composite Structures**, v. 156, p. 63–77, 2016.

CAO, X.; TANNER, G.; CHRONOPOULOS, D. Active vibration control of thin constrained composite damping plates with double piezoelectric layers. **Wave Motion**, v. 92, 2020.

CASSEL, K. W. **Variational Methods With Applications in Science and Engineering**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.

- CHAARI, R.; HADDAR, M.; DJEMAL, F.; CHAARI, F.; HADDAR, M. Passive vibration absorber effect on the machining surface quality of a flexible workpiece. **Comptes Rendus Mécanique**, v. 347, n. 12, p. 903–911, 2019.
- CHEN, D.; ZI, H.; LI, Y.; LI, X. Low frequency ship vibration isolation using the band gap concept of sandwich plate-type elastic metastructures. **Ocean Engineering**, v. 235, p. 109460, 2021.
- CHEN, R.; LUO, H.; WANG, H.; ZHOU, W. Topology optimization of partial constrained layer damping treatment on plate for maximizing modal loss factors. **Composites and Advanced Materials**, v. 30, 2021.
- CHEN, W.; LIU, S. Microstructural topology optimization of viscoelastic materials for maximum modal loss factor of macrostructures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, n. 1, p. 1–14, 2016.
- CHRISTIANSEN, A. N.; BÆRENTZEN, J. A.; NOBEL-JØRGENSEN, M.; AAGE, N.; SIGMUND, O. Combined shape and topology optimization of 3d structures. **Computers & Graphics**, v. 46, p. 25–35, 2015.
- CHU, D. N.; XIE, Y.; HIRA, A.; STEVEN, G. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 21, n. 4, p. 239–251, 1996.
- CUI, M.; WANG, J.; LI, P.; PAN, M. Topology optimization of plates with constrained layer damping treatments using a modified guide-weight method. **Journal of Vibration Engineering & Technologies**, v. 10, n. 1, p. 19–36, 2022.
- CUNHA-FILHO, A.; LIMA, A. D.; DONADON, M.; LEÃO, L. Flutter suppression of plates using passive constrained viscoelastic layers. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 79, p. 99–111, 2016.
- DIAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural Optimization**, v. 10, n. 1, p. 40–45, 1995.
- DITARANTO, R.; BLASINGAME, W. Composite loss factors of selected laminated beams. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 40, n. 1, p. 187–194, 1966.
- ESPÍNDOLA, J. J. D.; BAVASTRI, C. A.; LOPES, E. M. de O. Design of optimum systems of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the fractional calculus model. **Journal of Vibration and Control**, v. 14, n. 9-10, p. 1607–1630, 2008.
- ESPÍNDOLA, J. J. D.; NETO, J. M. da S.; LOPES, E. M. A generalized fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. **Applied Mathematics and Computation**, v. 164, n. 2, p. 493–506, 2005.
- FANG, Z.; YAO, L.; TIAN, S.; HOU, J. Microstructural topology optimization of constrained layer damping on plates for maximum modal loss factor of macrostructures. **Shock and Vibration**, p. 1–13, 2020.
- FANG, Z.; ZHENG, L. Topology optimization for minimizing frequency response of constrained layer damping plates. **Journal of Vibroengineering**, v. 17, n. 6, p. 2763–2780, 2015.

FANG, Z.; ZHENG, L. Topology optimization for minimizing the resonant response of plates with constrained layer damping treatment. **Shock and Vibration**, v. 2015, 2015.

FERNANDES, P.; GUEDES, J. M.; RODRIGUES, H. Topology optimization of three-dimensional linear elastic structures with a constraint on “perimeter”. **Computers & Structures**, v. 73, n. 6, p. 583–594, 1999.

FERRY, J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. 3. ed. [S.l.: s.n.], 1980.

FINDLEY, W. N.; DAVIS, F. A. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials**. [S.l.: s.n.], 2013.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2007.

FLOODY, S. E.; ARENAS, J. P.; ESPINDOLA, J. J. D. Modelling metal-elastomer composite structures using a finite-element-method approach. **Strojniski Vestnik**, v. 53, n. 2, p. 66–77, 2007.

FLOODY, S. E. P. **Dinâmica de Estruturas Compostas Metal/Elastômero: Uma Abordagem Generalizada**. 115 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2010.

GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, v. 61, n. 2, p. 238–254, 2004.

GUO, Y.; NAGY, A. P.; GÜRDAL, Z. A layerwise theory for laminated composites in the framework of isogeometric analysis. **Composite Structures**, v. 107, p. 447–457, 2014.

GUTIERREZ-LEMINI, D. **Engineering Viscoelasticity**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2014.

HABER, R. B.; JOG, C. S.; BENDSØE, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. **Structural Optimization**, v. 11, n. 1, p. 1–12, 1996.

HAMBRIC, S. A.; SUNG, S. H.; NEFSKE, D. J. **Engineering Vibroacoustic Analysis: Methods and Applications**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2016.

HAN, H.; GUO, Y.; CHEN, S.; LIU, Z. Topological constraints in 2d structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, n. 1, p. 39–58, 2021.

HANGXING, L.; SHAOQING, W.; QIANG, C.; QINGGUO, F. Design of dynamic absorbers to control the flexural resonant vibration of structures characterized by multiple natural modes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 513, p. 116415, 2021.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. **Practical Genetic Algorithms**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2004.

HU, S.-B.; CHEN, L.-P.; ZHANG, Y.-Q.; YANG, J.; WANG, S.-T. A crossing sensitivity filter for structural topology optimization with chamfering, rounding, and checkerboard-free patterns. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, n. 5, p. 529–540, 2009.

HU, W.; GAO, Y.; YANG, B. Semi-active vibration control of two flexible plates using an innovative joint mechanism. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 130, p. 565–584, 2019.

HUANG, X.; XIE, M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2010.

HUANG, X.; XIE, Y. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 43, n. 14, p. 1039–1049, 2007.

IRFAN, S.; SIDDIQUI, F. A review of recent advancements in finite element formulation for sandwich plates. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 32, n. 4, p. 785–798, 2019.

JIANG, F.; LI, L.; LIAO, W.-H.; ZHANG, D. Vibration control of a rotating hub-plate with enhanced active constrained layer damping treatment. **Aerospace Science and Technology**, v. 118, p. 107081, 2021.

JOG, C. S.; HABER, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 130, n. 3-4, p. 203–226, 1996.

JOHNSON, C. D.; KIENHOLZ, D. A. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. **AIAA journal**, v. 20, n. 9, p. 1284–1290, 1982.

KANDASAMY, R. *et al.* A review of vibration control methods for marine offshore structures. **Ocean Engineering**, v. 127, p. 279–297, 2016.

KANKE, F. **Otimização Topológica de Camadas Restritoras Aplicada ao Controle de Vibrações em Placas Semi-Espessas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Curitiba, 2017.

KANKE, F.; LANHI, S.; PEREIRA, J. T. Controle passivo de vibrações em placas via otimização de topologia de camadas restritas. In: **XI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. [S.l.]: CONEM, 2022.

KATSOURINIS, S.; KONTOU, E. Fractional viscoelastic models for interconverting linear viscoelastic functions of various polymeric structures. **Rheologica Acta**, v. 58, n. 5, p. 307–320, 2019.

KERWIN, E. M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 31, n. 7, p. 952–962, 1959.

KHANDAN, R.; NOROOZI, S.; SEWELL, P.; VINNEY, J. The development of laminated composite plate theories: a review. **Journal of Materials Science**, v. 47, n. 16, p. 5901–5910, 2012.

KHENNANE, A. **Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus**. [S.l.: s.n.], 2021.

KIM, H.; QUERIN, O.; STEVEN, G.; XIE, Y. A method for varying the number of cavities in an optimized topology using evolutionary structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, p. 140–147, 2000.

KIM, S. Y.; MECHEFSKE, C. K.; KIM, I. Y. Optimal damping layout in a shell structure using topology optimization. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, p. 2873–2883, 2013.

- KLUTHCOVSKY, S. C.; SILVA, F. E. d. C.; PEREIRA, J. T.; BAVASTRI, C. A. Dynamic coupling of multi-degrees of freedom constrained-layer vibration neutralizers: A new methodology. **Journal of Vibration and Control**, p. 10775463231200516, 2023.
- KOLK, M. van der; VEEN, G. J. van der; VREUGD, J. de; LANGELAAR, M. Multi-material topology optimization of viscoelastically damped structures using a parametric level set method. **Journal of Vibration and Control**, v. 23, n. 15, p. 2430–2443, 2017.
- KREJA, I. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. **Open Engineering**, v. 1, n. 1, p. 59–80, 2011.
- KUDAL, A. R.; CICIRELLO, A. Constrained layer damping treatment: Analysis of multi-strip application on thin plates. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1106, n. 1, p. 012025, 2018.
- KULKARNI, P.; DHOBLE, A.; PADOLE, P. A review of research and recent trends in analysis of composite plates. **Sādhanā**, v. 43, n. 6, p. 1–20, 2018.
- LAMBE, A. B.; CZEKANSKI, A. Topology optimization using a continuous density field and adaptive mesh refinement. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 113, n. 3, p. 357–373, 2018.
- LI, D. Layerwise theories of laminated composite structures and their applications: a review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 28, n. 2, p. 577–600, 2021.
- LI, D.; KIM, I. Y. Multi-material topology optimization for practical lightweight design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 58, n. 3, p. 1081–1094, 2018.
- LI, H. *et al.* Robust topology optimization of thermoelastic metamaterials considering hybrid uncertainties of material property. **Composite Structures**, v. 248, p. 112477, 2020.
- LI, Q.; STEVEN, G.; XIE, Y. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, n. 3, p. 230–239, 2001.
- LIEW, K.; PAN, Z.; ZHANG, L. An overview of layerwise theories for composite laminates and structures: Development, numerical implementation and application. **Composite Structures**, v. 216, p. 240–259, 2019.
- LING, Z. *et al.* Topology optimization of a constrained layer damping plate coupled with an acoustical cavity. **International Journal of Acoustics & Vibration**, v. 21, n. 4, 2016.
- LING, Z.; RONGLU, X.; YI, W.; EL-SABBAGH, A. Topology optimization of constrained layer damping on plates using method of moving asymptote (MMA) approach. **Shock and Vibration**, v. 18, n. 1, 2, p. 221–244, 2011.
- LIU, G.-R.; QUEK, S. S. **The Finite Element Method: A Practical Course**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2014.
- LIU, Q.; RUAN, D.; HUANG, X. Topology optimization of viscoelastic materials on damping and frequency of macrostructures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 337, p. 305–323, 2018.

- LIU, S.; XU, Y.; SHI, X.; DENG, Q.; LI, Y. Distribution optimization of constrained damping materials covering on typical panels under random vibration. **International Journal of Acoustics & Vibration**, v. 23, n. 3, 2018.
- LIU, X.; YI, W.-J.; LI, Q.; SHEN, P.-S. Genetic evolutionary structural optimization. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 64, n. 3, p. 305–311, 2008.
- LIU, Y.; YANG, C.; WEI, P.; ZHOU, P.; DU, J. An ODE-driven level-set density method for topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 387, 2021.
- LUO, H.; CHEN, R.; GUO, S.; FU, J. Topology optimization of hard-coating thin plate for maximizing modal loss factors. **Coatings**, v. 11, n. 7, 2021.
- MA, R.; BI, K.; HAO, H. Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review. **Engineering Structures**, v. 243, p. 112655, 2021.
- MADEIRA, J.; ARAÚJO, A. L.; SOARES, C. M.; SOARES, C. M. Multiobjective optimization for vibration reduction in composite plate structures using constrained layer damping. **Computers & Structures**, v. 232, p. 105810, 2020.
- MADEIRA, J.; ARAÚJO, A. L.; SOARES, C. M. M. Multiobjective optimization of constrained layer damping treatments in composite plate structures. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 24, n. 5, p. 427–436, 2017.
- MAINARDI, F. **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models**. [S.l.: s.n.], 2022.
- MANOHARAN, R.; VASUDEVAN, R.; SUDHAGAR, P. E. Semi-active vibration control of laminated composite sandwich plate-an experimental study. **Archive of Mechanical Engineering**, v. 63, n. 3, 2016.
- MEAD, D.; MARKUS, S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 10, n. 2, p. 163–175, 1969.
- MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 8, n. 47, p. 589–597, 1904.
- MOITA, J.; ARAÚJO, A.; MARTINS, P.; SOARES, C. M.; SOARES, C. M. A finite element model for the analysis of viscoelastic sandwich structures. **Computers & Structures**, v. 89, n. 21-22, p. 1874–1881, 2011.
- MOREIRA, R.; RODRIGUES, J. D. A layerwise model for thin soft core sandwich plates. **Computers & Structures**, v. 84, n. 19-20, p. 1256–1263, 2006.
- MOREIRA, R.; RODRIGUES, J. D.; FERREIRA, A. A generalized layerwise finite element for multi-layer damping treatments. **Computational Mechanics**, v. 37, n. 5, p. 426–444, 2006.
- MURARO, L. O. R.; LANHI, S.; PEREIRA, J. T.; GONÇALVES, S. d. F. T. Numerical evaluation of iterative methods for calculating frequency response functions of dynamic structures composed of viscoelastic materials. In: **27th International Congress of Mechanical Engineering**. [S.l.]: COBEM, 2023.

NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J. **Topological Derivatives in Shape Optimization**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2012.

OU, J.; LONG, X.; LI, Q.; XIAO, Y. Vibration control of steel jacket offshore platform structures with damping isolation systems. **Engineering Structures**, v. 29, n. 7, p. 1525–1538, 2007.

PARK, J.; SUTRADHAR, A.; SHAH, J. J.; PAULINO, G. H. Design of complex bone internal structure using topology optimization with perimeter control. **Computers in Biology and Medicine**, v. 94, p. 74–84, 2018.

PEDERSEN, C. G.; LUND, J. J.; DAMKILDE, L.; KRISTENSEN, A. S. A. Topology optimization-improved checker-board filtering with sharp contours. In: **Proceedings of the 19th Nordic Seminar on Computational Mechanics**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 182–185.

PEIKKHOSH, S. P.; DARDEL, M.; GHASEMI, M. H. Enhancing bandwidth of metamaterial plate with linear and nonlinear passive absorbers. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 135, p. 103769, 2021.

PEREIRA, J. T. **Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições Sobre o Critério de Falha Material**. 217 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2001.

PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 1, p. 50–66, 2004.

PERMOON, M. R.; FARSADI, T. Free vibration of three-layer sandwich plate with viscoelastic core modelled with fractional theory. **Mechanics Research Communications**, v. 116, p. 103766, 2021.

PETERSSON, J. Some convergence results in perimeter-controlled topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 171, n. 1-2, p. 123–140, 1999.

PETERSSON, J.; SIGMUND, O. Slope constrained topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 41, n. 8, p. 1417–1434, 1998.

PETYT, M. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2010.

POULSEN, T. A. A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 24, n. 5, p. 396–399, 2002.

PRITZ, T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. **Journal of Sound and Vibration**, v. 195, n. 1, p. 103–115, 1996.

QIN, Y.; SONG, Q.; LIU, Z.; SHI, J. Dynamic response analysis of a thin plate with partially constrained layer damping optimization under moving loads for various boundary conditions. **Applied Sciences**, v. 11, n. 7, p. 3282, 2021.

QIU, K.; ZHANG, W.; DOMASZEWSKI, M.; CHAMORET, D. Topology optimization of periodic cellular solids based on a superelement method. **Engineering Optimization**, v. 41, n. 3, p. 225–239, 2009.

QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm. **Engineering Computations**, v. 15, n. 8, p. 1031–1048, 1998.

RAO, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2019.

REDDY, J. On refined theories of composite laminates. **Meccanica**, v. 25, n. 4, p. 230–238, 1990.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2003.

REDDY, J. N. **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2007.

REN, S.; ZHAO, G. A four-node quadrilateral element for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic core. **Journal of Sandwich Structures & Materials**, v. 21, n. 3, p. 1072–1118, 2019.

REN, S.; ZHAO, G.; ZHANG, S. A layerwise finite element formulation for vibration and damping analysis of sandwich plate with moderately thick viscoelastic core. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 27, n. 14, p. 1201–1212, 2020.

ROZVANY, G. Stress ratio and compliance based methods in topology optimization- A critical review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 109–119, 2001.

SAHU, N. K.; BISWAL, D. K.; JOSEPH, S. V.; MOHANTY, S. C. Vibration and damping analysis of doubly curved viscoelastic-FGM sandwich shell structures using FOSDT. **Structures**, v. 26, p. 24–38, 2020.

SHENG, M.; GUO, Z.; QIN, Q.; HE, Y. Vibration characteristics of a sandwich plate with viscoelastic periodic cores. **Composite Structures**, v. 206, p. 54–69, 2018.

SHUKLA, A.; MISRA, A.; KUMAR, S. Checkerboard problem in finite element based topology optimization. **International Journal of Advances in Engineering & Technology**, v. 6, n. 4, p. 1769–1774, 2013.

SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Journal of Structural Mechanics**, v. 25, n. 4, p. 493–524, 1997.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 4, p. 401–424, 2007.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, n. 4, p. 471–475, 2012.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 6, p. 1031–1055, 2013.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998.

- SILVA, C. W. D. **Vibration damping, control, and design**. [S.l.: s.n.], 2007.
- SILVA, F. E. d. C.; BAVASTRI, C. A. A methodology for an optimal design of physical parameters, positions, and viscoelastic materials of simple dynamic absorbers for passive vibration control. **Journal of Vibration and Control**, v. 25, n. 6, p. 1133–1147, 2019.
- SIVANANDAM, S. N.; DEEPA, S. N. **Introduction to Genetic Algorithms**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2008.
- SOUSA, T. L. D.; KANKE, F.; PEREIRA, J. T.; BAVASTRI, C. A. Property identification of viscoelastic solid materials in nomograms using optimization techniques. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 55, n. 4, p. 1285–1297, 2017.
- SUMATHI, S.; HAMSAPRIYA, T.; SUREKHA, P. **Evolutionary intelligence: an introduction to theory and applications with Matlab**. [S.l.: s.n.], 2008.
- SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods**. 1. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- TAKEZAWA, A. *et al.* Topology optimization of damping material for reducing resonance response based on complex dynamic compliance. **Journal of Sound and Vibration**, v. 365, p. 230–243, 2016.
- UNGAR, E. E.; KERWIN, E. M. Loss factors of viscoelastic systems in terms of energy concepts. **The Journal of the acoustical Society of America**, v. 34, n. 7, p. 954–957, 1962.
- VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T.; CARRERA, E. Thin plates and shells: theory, analysis, and applications. **Applied Mechanics Reviews**, v. 55, n. 4, p. B72–B73, 2002.
- WANG, H.; LEE, H. P.; DU, C. Analysis and optimization of damping properties of constrained layer damping structures with multilayers. **Shock and Vibration**, v. 2021, 2021.
- WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 1-2, p. 227–246, 2003.
- WANG, Q.; ZHOU, J.; XU, D.; OUYANG, H. Design and experimental investigation of ultra-low frequency vibration isolation during neonatal transport. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 139, p. 106633, 2020.
- WILSON, J. F. **Dynamics of Offshore Structures**. [S.l.: s.n.], 2003.
- WU, F.; XUE, P. *et al.* Dynamic topology optimization of constrained damping plates considering frequency and temperature characteristics based on an efficient strategy. **Shock and Vibration**, v. 2024, 2024.
- XIA, Q.; WANG, M. Y.; SHI, T. Topology optimization with pressure load through a level set method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 283, p. 177–195, 2015.
- XIE, X.; ZHENG, H.; JONCKHEERE, S.; PLUYMERS, B.; DESMET, W. A parametric model order reduction technique for inverse viscoelastic material identification. **Computers & Structures**, v. 212, p. 188–198, 2019.

- XIE, Y.; STEVEN, G. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. **Computers & Structures**, v. 58, n. 6, p. 1067–1073, 1996.
- XU, C.; LIN, S.; YANG, Y. Optimal design of viscoelastic damping structures using layerwise finite element analysis and multi-objective genetic algorithm. **Computers & Structures**, v. 157, p. 1–8, 2015.
- XU, K.; CHEN, Z.; SUN, W. Optimization of position, size and thickness of viscoelastic damping patch for vibration reduction of a cylindrical shell structure. **Composite Structures**, v. 276, 2021.
- XU, P.; LIU, T.; PAN, S.; ZHOU, Z. Numerical analysis for micro-vibration isolation of jointed sandwich plates with mass blocks. **Materials Today Communications**, v. 17, p. 341–354, 2018.
- XU, X.; GUO, B.; JIN, M. A new bilateral density filter with cross template for structural topology optimization. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 232, n. 21, p. 3823–3832, 2018.
- YAMAMOTO, T.; YAMADA, T.; IZUI, K.; NISHIWAKI, S. Topology optimization of free-layer damping material on a thin panel for maximizing modal loss factors expressed by only real eigenvalues. **Journal of Sound and Vibration**, v. 358, p. 84–96, 2015.
- YAMASAKI, S. *et al.* A level set based topology optimization method using the discretized signed distance function as the design variables. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 685–698, 2010.
- YAN, K.; CHENG, G. D.; WANG, B. P. Topology optimization of damping layers in shell structures subject to impact loads for minimum residual vibration. **Journal of Sound and Vibration**, v. 431, p. 226–247, 2018.
- YANG, C.; JIN, G.; ZHANG, Y.; LIU, Z. A unified three-dimensional method for vibration analysis of the frequency-dependent sandwich shallow shells with general boundary conditions. **Applied Mathematical Modelling**, v. 66, p. 59–76, 2019.
- YANG, K. H. Material Laws and Properties. In: **Basic Finite Element Method as Applied to Injury Biomechanics**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 231–256.
- YANG, X.-Y.; XIE, Y.-M.; LIU, J.-S.; PARKS, G.; CLARKSON, P. Perimeter control in the bidirectional evolutionary optimization method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 24, p. 430–440, 2002.
- YE, K.; JI, J.; BROWN, T. Design of a quasi-zero stiffness isolation system for supporting different loads. **Journal of Sound and Vibration**, v. 471, p. 115198, 2020.
- YUN, K.-S.; YOUN, S.-K. Multi-material topology optimization of viscoelastically damped structures under time-dependent loading. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 123, p. 9–18, 2017.
- YUN, K.-S.; YOUN, S.-K. Topology optimization of viscoelastic damping layers for attenuating transient response of shell structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 141, p. 154–165, 2018.
- ZHAI, Y.; LI, Y.; LIANG, S. Free vibration analysis of five-layered composite sandwich plates with two-layered viscoelastic cores. **Composite Structures**, v. 200, p. 346–357, 2018.

ZHANG, B.-L.; HAN, Q.-L.; ZHANG, X.-M. Recent advances in vibration control of offshore platforms. **Nonlinear Dynamics**, v. 89, n. 2, p. 755–771, 2017.

ZHANG, D.; QI, T.; ZHENG, L. A hierarchical optimization strategy for position and thickness optimization of constrained layer damping/plate to minimize sound radiation power. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 10, n. 10, 2018.

ZHANG, D.; WU, Y.; CHEN, J.; WANG, S.; ZHENG, L. Sound radiation analysis of constrained layer damping structures based on two-level optimization. **Materials**, v. 12, n. 19, 2019.

ZHANG, D.; WU, Y.; LU, X.; ZHENG, L. Topology optimization of constrained layer damping plates with frequency-and temperature-dependent viscoelastic core via parametric level set method. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 29, n. 1, p. 1–17, 2021.

ZHANG, D.; ZHENG, L. Vibration characteristics analysis of CLD/plate based on the multi-objective optimization. **Journal of Vibroengineering**, v. 17, n. 1, p. 309–329, 2015.

ZHANG, H.; DING, X.; LI, H.; XIONG, M. Multi-scale structural topology optimization of free-layer damping structures with damping composite materials. **Composite Structures**, v. 212, p. 609–624, 2019.

ZHANG, J.; CHEN, Y.; ZHAI, J.; HOU, Z.; HAN, Q. Topological optimization design on constrained layer damping treatment for vibration suppression of aircraft panel via improved evolutionary structural optimization. **Aerospace Science and Technology**, v. 112, p. 106619, 2021.

ZHANG, W.; DUYSINX, P. Dual approach using a variant perimeter constraint and efficient sub-iteration scheme for topology optimization. **Computers & Structures**, v. 81, n. 22-23, p. 2173–2181, 2003.

ZHANG, Z.; CHEN, W. An approach for topology optimization of damping layer under harmonic excitations based on piecewise constant level set method. **Journal of Computational Physics**, v. 390, p. 470–489, 2019.

ZHENG, H.; CAI, C.; TAN, X. Optimization of partial constrained layer damping treatment for vibrational energy minimization of vibrating beams. **Computers & Structures**, v. 82, n. 29-30, p. 2493–2507, 2004.

ZHENG, W.; LEI, Y.; LI, S.; HUANG, Q. Topology optimization of passive constrained layer damping with partial coverage on plate. **Shock and Vibration**, v. 20, n. 2, p. 199–211, 2013.

ZHENG, W.; YANG, T.; HUANG, Q.; HE, Z. Topology optimization of PCLD on plates for minimizing sound radiation at low frequency resonance. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, n. 6, p. 1231–1242, 2016.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1-3, p. 309–336, 1991.

ZHOU, M.; SHYY, Y.; THOMAS, H. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 152–158, 2001.

ZHU, Q.; HAN, Q.; LIU, J. Topological optimization design on constrained layer damping treatment for vibration suppression of thin-walled structures via improved BESO method. **Aerospace Science and Technology**, v. 142, p. 108600, 2023.

ZHU, X.; CHEN, Z.; JIAO, Y. Optimizations of distributed dynamic vibration absorbers for suppressing vibrations in plates. **Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control**, v. 37, n. 4, p. 1188–1200, 2018.

APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS PARA LAMINADO DE TRÊS CAMADAS

Este apêndice tem como objetivo discutir o campo de deslocamentos segundo a teoria de placas laminadas proposta por Moreira *et al.* (2006), considerando o caso específico de três camadas. O campo de deslocamentos genérico da equação (3.66) é colocado no formato explícito para a primeira, a segunda e a terceira camadas de um laminado. Esse procedimento é realizado, pois tal teoria é utilizada neste trabalho para discretização da estrutura de CR. O processo de deformação respeita a hipótese de Reissner-Mindlin.

Reescrevendo a equação (3.66), a qual é definida para um número total genérico de camadas k . Esta equação é obtida a partir do modelo cinemático visualizado na FIGURA 17 e é dada por

$$\mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} u_k(x,y,z_k) \\ v_k(x,y,z_k) \\ w_k(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^x + \sum_{j=2}^{k-1} h_j\beta_j^x + \frac{h_k}{2}\beta_k^x + z_k\beta_k^x \\ v_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j\beta_j^y + \frac{h_k}{2}\beta_k^y + z_k\beta_k^y \\ w_0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

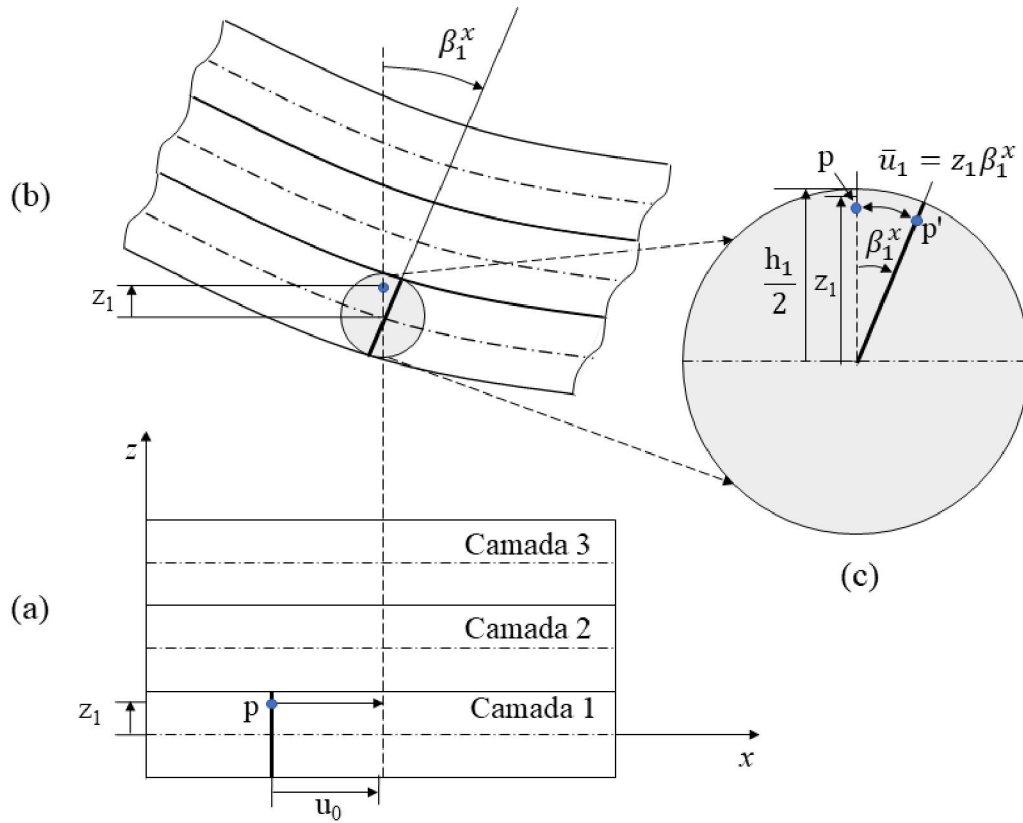
sendo que $u_0 = u_0(x,y)$, $v_0 = v_0(x,y)$ e $w_0 = w_0(x,y)$ são os deslocamentos translacionais de um dado ponto (x, y) posicionado na superfície média da camada de referência ($k = 1$), $\beta_k^y = \beta_k^y(x,y)$ e $\beta_k^x = \beta_k^x(x,y)$ são as rotações de um filamento material definido na direção normal à superfície média em torno dos eixos x e y , respectivamente, h_k é a espessura da k -ésima camada, e z_k é a componente vertical do vetor posição de uma camada k . Deve-se ressaltar que a equação (A.1) é válida para k ($k = 1, 2, 3, \dots$) e j ($j = 2, \dots, k - 1$).

Para a obtenção do campo de deslocamentos de um ponto qualquer p posicionado na primeira camada do laminado (FIGURA 83 (a)), é realizada uma análise geométrica da mesma. Inicialmente, supõe-se que um ponto p está na posição (x, y, z_1) na primeira camada do laminado. Por este ponto passa uma normal perpendicular à superfície média da camada 1. Quando esta camada sofre deformação (FIGURA 83 (b)), o ponto p e a normal que passa por ele, sofrem uma rotação β_1^x e um deslocamento translacional de u_0 , que o levam à posição p' (FIGURA 83 (c)). O deslocamento do ponto p devido a rotação β_1^x é $\bar{u}_1$. Esse deslocamento, $\bar{u}_1$, é a medida do arco entre os pontos p e p' . A componente de deslocamento na direção x , $\bar{u}_1$, está vinculada ao quanto a normal rotaciona e à posição do ponto ao longo da espessura, por isso a dependência de z_1 . Desta forma, o vetor de deslocamentos $\mathbf{u}_1$ de um ponto p qualquer pertencente a primeira camada é dado por

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1(x,y,z_1) \\ v_1(x,y,z_1) \\ w_1(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + z_1\beta_1^x \\ v_0 + z_1\beta_1^y \\ w_0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Os termos $u_0 = u_0(x,y)$, $v_0 = v_0(x,y)$ e $w_0 = w_0(x,y)$ são os deslocamentos translacionais de um ponto localizado na superfície média desta camada ($x, y, z_1 = 0$). $z_1 \in [-h_1/2, h_1/2]$ é a componente vertical do vetor posição do ponto p em relação à superfície média. $\beta_1^y(x,y)$ e $\beta_1^x(x,y)$ são as rotações de uma normal perpendicular à superfície média da camada 1, em relação aos eixos x e y , respectivamente.

FIGURA 83 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS DA PRIMEIRA CAMADA DO LAMINADO NO PLANO X-Z



FONTE: A autora (2024).

LEGENDA: Parcela do laminado nas configurações (a) indeformada e (b) deformada. (c) Representação geométrica do deslocamento sofrido pelo p devido à rotação do vetor normal da camada 1.

A partir da equação (A.2) o campo de deslocamentos generalizados pode ser definido para a primeira camada, ou para um laminado de apenas uma camada, como um vetor de dimensão 5×1 e posto na forma

$$\mathbf{d}_1^e = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \beta_1^x \quad \beta_1^y\}^T. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a equação (A.2), na equação (3.25), as deformações podem ser determinadas:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{xx}^1 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z_1 \frac{\partial \beta_1^x}{\partial x} \\
\tilde{\varepsilon}_{yy}^1 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \beta_1^y}{\partial y} \\
\tilde{\gamma}_{xy}^1 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z_1 \frac{\partial \beta_1^x}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x} \\
\tilde{\gamma}_{xz}^1 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_1^x \\
\tilde{\gamma}_{yz}^1 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_1^y.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Reescrevendo a equação (A.4) na forma matricial, tem-se

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_1 \mathbf{d}_1^e, \tag{A.5}$$

onde a matriz de deformações-deslocamentos para a primeira camada é dada por

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z_1 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & z_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z_1 \frac{\partial}{\partial y} & z_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

Rearranjando a equação (A.6) conforme a equação (3.75), tem-se

$$\mathcal{B}_1 = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & z_1 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & z_1 \frac{\partial}{\partial y} & z_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{array} \right], \tag{A.7}$$

sendo que a primeira sub-matriz é referente aos termos de membrana-acoplamento, a segunda aos termos de flexão e a última aos termos de cisalhamento.

O campo de deslocamentos da segunda camada, $\mathbf{u}_2$ é obtido realizando uma análise geométrica da FIGURA 84. Neste caso, um ponto qualquer q está posicionado em (x, y, z_2) . Uma normal perpendicular às superfícies médias das camadas 1 e 2, sai da superfície inferior da camada 1 e vai até o ponto q , localizado na camada 2. Quando o laminado se deforma este ponto vai de sua posição original q à posição q' . Devido a esse movimento, o ponto e a parcela da normal que está na camada 2, sofrem uma rotação β_2^x . O deslocamento do ponto q gerado por esta rotação é a medida do arco entre os dois pontos, $z_2\beta_2^x$. Este termo, está vinculado ao quanto a normal rotaciona e à sua posição ao longo da espessura, por isso a dependência de z_2 , sendo que $z_2 \in [-h_2/2, h_2/2]$. A parcela da normal que passa pela camada 1 também sofre uma rotação devido à deformação β_1^x . A parcela do deslocamento devido à esta rotação é calculado na superfície superior da camada 1 e é dada por $\bar{u}_1 = \frac{h_1}{2}\beta_1^x$. O deslocamento translacional u_0 devido à camada 1 também deve ser considerado. Desta forma, o campo de deslocamentos para um ponto qualquer q posicionado na camada 2 pode ser determinado por:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_2(x, y, z_2) \\ v_2(x, y, z_2) \\ w_2(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^x + \frac{h_2}{2}\beta_2^x + z_2\beta_2^x \\ v_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^y + \frac{h_2}{2}\beta_2^y + z_2\beta_2^y \\ w_0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

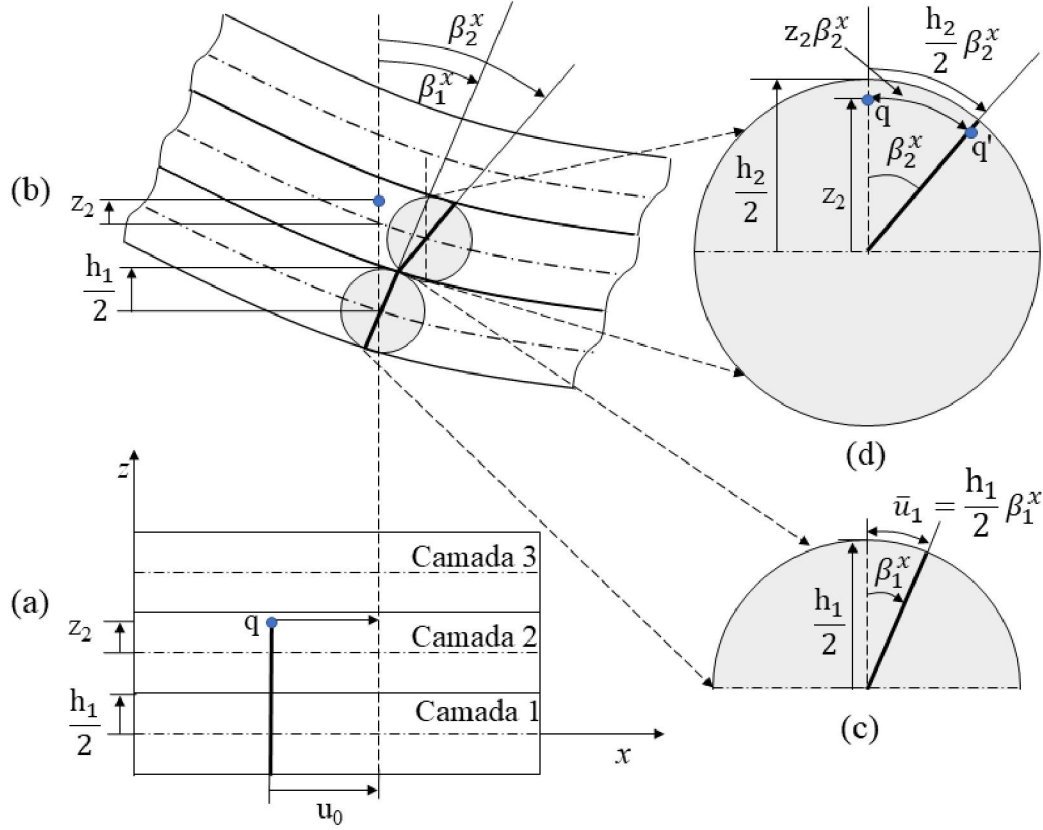
sendo que h_1 e h_2 são as espessuras das camadas 1 e 2, respectivamente, z_2 é a componente vertical do vetor posição do ponto q em relação à superfície média da segunda camada, a qual assume valores do intervalo $\left[-\frac{h_2}{2}, \frac{h_2}{2}\right]$. β_2^x e β_2^y são as rotações de uma normal perpendicular à superfície média da segunda camada, em relação ao eixo y e ao eixo x , respectivamente. Deve-se notar, que na equação (A.8) há um termo referente ao deslocamento ocorrido pela normal quando está passa pela superfície média da camada 2. Esse termo é responsável por manter a continuidade entre os deslocamentos da camada 1 e 2, e também entre a camada 2 e uma possível terceira camada.

Nesse caso, o vetor de deslocamentos generalizados para um laminado com duas camadas é dado por

$$\mathbf{d}_2^e = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \beta_1^x \quad \beta_1^y \quad \beta_2^x \quad \beta_2^y\}^T. \quad (\text{A.9})$$

As deformações, podem ser obtidas aplicando a equação (A.8) na equação (3.25), conforme:

FIGURA 84 – REPRESENTAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS DA SEGUNDA CAMADA DO LAMINADO NO PLANO X-Z



FONTE: A autora (2024).

LEGENDA: (a) Laminado indeformado. (b) Laminado sob deformação. (c) Dimensão $\bar{u}_1$ e (d) Representação geométrica do deslocamento sofrido pelo q devido a deformação da camada 2.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^2 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \beta_2^x}{\partial x} + z_2 \frac{\partial \beta_2^x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy}^2 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial y} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \beta_2^y}{\partial y} + z_2 \frac{\partial \beta_2^y}{\partial y} \\
 \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial \beta_1^x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x} \right) + \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \beta_2^x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2^y}{\partial x} \right) + z_2 \left(\frac{\partial \beta_2^x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2^y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz}^2 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_2^x \\
 \gamma_{yz}^2 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_2^y
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

A matriz de deformações-deslocamentos para a segunda camada do laminado é dada por:

$$\tilde{\mathcal{B}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \left(\frac{h_2}{2} + z_2\right) \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \left(\frac{h_2}{2} + z_2\right) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \left(\frac{h_2}{2} + z_2\right) \frac{\partial}{\partial y} & \left(\frac{h_2}{2} + z_2\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Rearranjando a equação de deformações-deslocamentos em submatrizes, conforme a equação (A.6), tem-se

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 \frac{\partial}{\partial y} & z_2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Por fim, é realizada a análise geométrica da terceira camada do laminado da FIGURA 85. Considera-se um ponto r que está posicionado em (x, y, z_3) . Por este ponto, passa uma normal perpendicular às superfícies médias das três camadas. Esta, sai da superfície inferior da camada 1 e vai até o ponto r . Quando o laminado sofre deformação, o ponto r se desloca e assume a posição r' . A parcela da normal que está na camada 3 e que passa pelo ponto, sofre uma rotação β_3^x . O deslocamento devido à esta rotação é a medida do arco entre os pontos r e r' , dada por $z_3 \beta_3^x$. Contudo, as parcelas da normal que passam pelas camadas 1 e 2 também sofrem rotações. A parcela da normal que passa pela camada 2, sofre uma rotação β_2^x . O deslocamento devido à esta rotação é $h_2 \beta_2^x$, o qual é calculado na superfície superior desta camada. A parcela da normal que passa pela na primeira camada, sofre uma rotação β_1^x . O seu respectivo deslocamento é $\frac{h_1}{2} \beta_1^x$, que

é calculado na superfície superior desta camada. Além disso, na camada 1, a normal sofre um deslocamento translacional u_0 . Desta forma, o campo de deslocamentos para a terceira camada pode ser obtido pela equação:

$$\mathbf{u}_3 = \begin{Bmatrix} u_3(x,y,z_3) \\ v_3(x,y,z_3) \\ w_3(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^x + h_2\beta_2^x + \frac{h_3}{2}\beta_3^x + z_3\beta_3^x \\ v_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^y + h_2\beta_2^y + \frac{h_3}{2}\beta_3^y + z_3\beta_3^y \\ w_0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

sendo que o termo h_3 é a espessura da terceira camada, β_3^x e β_3^y são as rotações de uma normal perpendicular à superfície média da terceira camada, em relação aos eixos y e x respectivamente, e z_3 é a componente vertical do vetor posição do ponto r em relação à superfície média da terceira camada, o qual pertence à $\left[-\frac{h_3}{2}, \frac{h_3}{2}\right]$. Este campo de deslocamentos também pode ser obtido substituindo o número de camadas, $k = 3$, na equação (A.1). Vale notar, que na equação (A.13) há um termo referente ao deslocamento ocorrido pela normal quando esta passa pela superfície média da camada 3. Esse termo é responsável por manter a continuidade entre os campos de deslocamentos entre a camada 2 e 3 e também entre uma possível quarta camada.

O campo de deslocamentos generalizados para um laminado de três camadas é

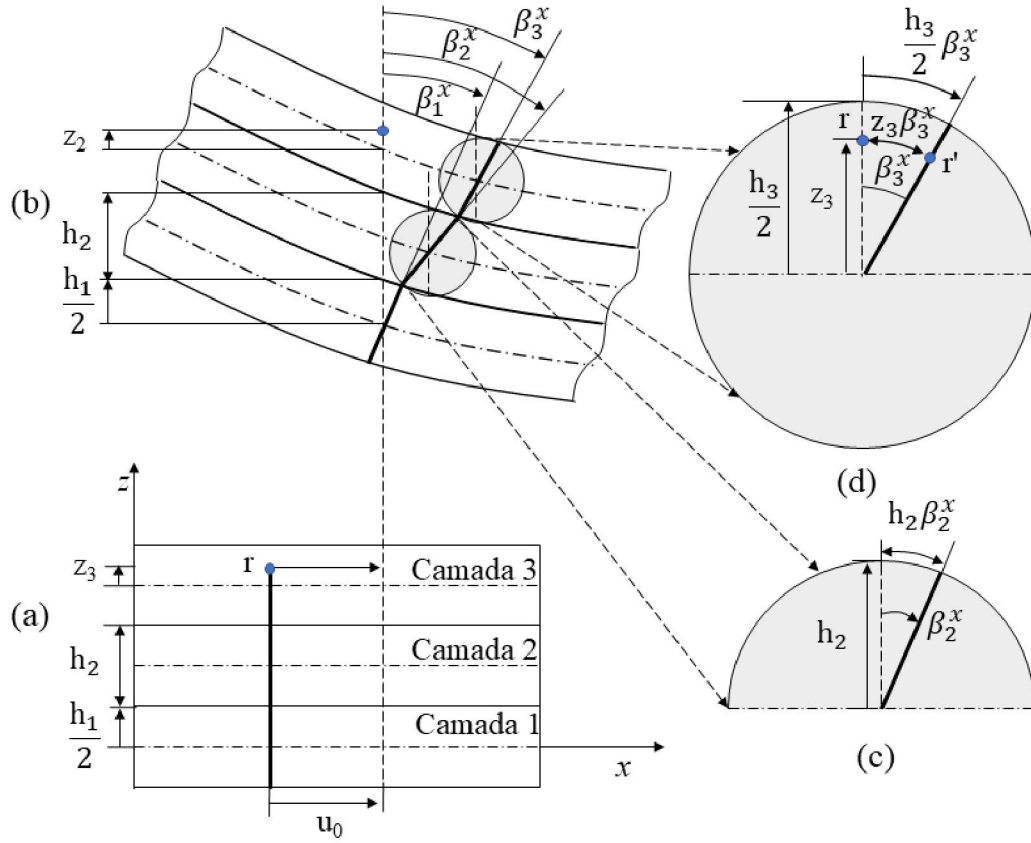
$$\mathbf{d}_3^e = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \beta_1^x \quad \beta_1^y \quad \beta_2^x \quad \beta_2^y \quad \beta_3^x \quad \beta_3^y\}^T. \quad (\text{A.14})$$

As deformações podem ser calculadas, substituindo a equação (A.13) na equação (3.25), quais resultam em:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^3 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial x} + h_2 \frac{\partial \beta_2^x}{\partial x} + \frac{h_3}{2} \frac{\partial \beta_3^x}{\partial x} + z_3 \frac{\partial \beta_3^x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^3 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial y} + h_2 \frac{\partial \beta_2^y}{\partial y} + \frac{h_3}{2} \frac{\partial \beta_3^y}{\partial y} + z_3 \frac{\partial \beta_3^y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^3 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial \beta_1^x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x} \right) + h_2 \left(\frac{\partial \beta_2^x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2^y}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_3}{2} + z_3 \right) \left(\frac{\partial \beta_3^x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_3^y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz}^3 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_3^x \\ \gamma_{yz}^3 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_3^y. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Na forma matricial, a matriz de deformações-deslocamentos para a terceira camada é dada por

FIGURA 85 – REPRESENTAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS DA TERCEIRA CAMADA DO LAMINADO NO PLANO X-Z



FONTE: A autora (2024).

LEGENDA: Parcela do laminado nas configuração (a) indeformada e (b) deformada. (c) Representação geométrica do deslocamento sofrido pelo r devido à rotação do vetor normal da camada 3.

$$\tilde{\mathcal{B}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & h_2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \left(\frac{h_3}{2} + z_3\right) \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & h_2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \left(\frac{h_3}{2} + z_3\right) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & h_2 \frac{\partial}{\partial y} & h_2 \frac{\partial}{\partial x} & \left(\frac{h_3}{2} + z_3\right) \frac{\partial}{\partial y} & \left(\frac{h_3}{2} + z_3\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Rearranjando a equação (A.16) na forma de submatrizes, a matriz de deformações fica

$$\mathcal{B}_3 = \left[\begin{array}{ccccccccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & h_2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_3}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & h_2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{h_3}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & h_2 \frac{\partial}{\partial y} & h_2 \frac{\partial}{\partial x} & \frac{h_3}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \frac{\partial}{\partial y} & z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (\text{A.17})$$

APÊNDICE B – DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PLACA QUADRILATERAL (Q4) DE REISSNER-MINDLIN PARA UMA PLACA LAMINADA COM TRÊS CAMADAS SOB VIBRAÇÃO

Este apêndice visa apresentar o desenvolvimento de algumas equações de EFs para uma placa laminada de três camadas. As equações serão apresentadas segundo a teoria de placas laminadas proposta por Moreira *et al.* (2006) para um elemento quadrilátero de quatro nós.

Reescrevendo a equação do campo de deslocamentos, equação (3.82), para a primeira camada de uma placa laminada, onde $k = 1$

$$\mathbf{u}_1^e = \mathcal{N}_1 \mathbf{N}_1^e \mathbf{d}^e, \quad (\text{B.1})$$

sendo que $\mathbf{N}_1$ é a matriz de funções de forma, $\mathcal{N}_1$ é uma matriz dos termos referentes às espessuras da camada e $\mathbf{d}^e$ é o vetor composto pelos deslocamentos nodais generalizados do elemento. Este último pode ser colocado da seguinte maneira

$$\mathbf{d}^e = \left\{ u_0^{(1)} \quad v_0^{(1)} \quad w_0^{(1)} \quad \beta_1^{x,(1)} \quad \beta_1^{y,(1)} \quad \cdots \quad u_0^{(4)} \quad v_0^{(4)} \quad w_0^{(4)} \quad \beta_1^{x,(4)} \quad \beta_1^{y,(4)} \right\}^T. \quad (\text{B.2})$$

Na equação acima, os termos u_0, v_0 e w_0 se referem aos deslocamentos translacionais de um ponto no plano de referência ($k = 1$), β^x e β^y são as rotações em torno dos eixos y e x , respectivamente. Os sobrescritos 1 e 4 se referem aos nós do elemento, para o qual $N_{no} = 1, 2, 3, 4$. O vetor de deslocamentos nodais generalizados $\mathbf{d}^e$, da primeira camada, tem dimensão de $N_{GLE} \times 1$, sendo que N_{GLE} é o número de graus de liberdade para um elemento da primeira camada e que é igual a 20.

A matriz de funções de forma em dimensão de $N_{GLNO} \times N_{GLE}$, sendo que N_{GLNO} é o número de graus de liberdade de cada nó, neste caso é igual a 5. Assim, a matriz de funções de forma para a primeira camada é apresentada como

$$\mathbf{N}_1^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N_4^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_4^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & N_4^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^e & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Como último termo a ser definido para a equação (B.1), a matriz $\mathcal{N}_1$ é dada por

$$\mathcal{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

A dimensão da matriz $\mathcal{N}_1$ é $3 \times N_{GLNO}$.

Aplicando as equações (B.4), (B.3) e (B.2) na equação (B.1) obtém-se o campo de deslocamentos para o elemento, conforme

$$\mathbf{u}_1^e = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i u_0^{(i)} + z_1 \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_1^{x,(i)} \\ \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i v_0^{(i)} + z_1 \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_1^{y,(i)} \\ \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i w_0^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Outra equação importante para o desenvolvimento da formulação de elementos finitos é a equação de inércia $\mathbf{J}_k^e$ (equação (3.92)). Para a primeira camada de uma placa laminada, é dada por

$$\mathbf{J}_1^e = \mathcal{N}_1^T \mathbf{I}_1^e \mathcal{N}_1, \quad (\text{B.6})$$

onde $\mathbf{I}_1^e$ é matriz de densidades elementar ρ_1^e do material da primeira camada, de dimensão 3×3 e pode ser definida como

$$\mathbf{I}_1^e = \begin{bmatrix} \rho_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1^e & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Realizando a multiplicação de matrizes da equação (B.6) tem-se que a matriz de inércia $\mathbf{J}_1^e$ é obtida como sendo

$$\mathbf{J}_1^e = \rho_1^e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & z_1^2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 & z_1^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

O mesmo procedimento é realizado para obtenção do campo de deslocamentos (equação (3.82)) para a segunda camada da placa laminada, o qual pode ser escrito como

$$\mathbf{u}_2^e = \mathcal{N}_2 \mathbf{N}_2^e \mathbf{d}^e, \quad (\text{B.9})$$

sendo que $\mathbf{N}_2$ é a matriz de funções de forma, $\mathcal{N}_2$ é uma matriz dos termos referentes às espessuras das camadas e $\mathbf{d}^e$ é o vetor composto pelos deslocamentos nodais generalizados do elemento. Este último pode ser colocado da seguinte maneira

$$\mathbf{d}^e = \left\{ \begin{matrix} u_0^{(1)} & v_0^{(1)} & w_0^{(1)} & \beta_1^{x,(1)} & \beta_1^{y,(1)} & \beta_2^{x,(1)} & \beta_2^{y,(1)} & \dots \\ \dots & u_0^{(4)} & v_0^{(4)} & w_0^{(4)} & \beta_1^{x,(4)} & \beta_1^{y,(4)} & \beta_2^{x,(4)} & \beta_2^{y,(4)} \end{matrix} \right\}^T. \quad (\text{B.10})$$

Para qual foram inseridas as rotações referentes à $\beta_2^{x,(i)}$ e à $\beta_2^{y,(i)}$ da segunda camada da placa laminada. Assim, cada nó tem 7 ($N_{GLNO} = 7$) graus de liberdade e cada elemento possui 28 ($N_{GLE} = 28$) graus de liberdade. Para esse caso, a matriz de funções de forma tem dimensão igual a $N_{GLNO} \times N_{GLE}$ e é dada por:

$$\mathbf{N}_2^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_4^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_4^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^e & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^e & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4^e \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

A matriz $\mathbf{N}_2$ tem dimensão de $3 \times N_{GLNO}$ e é dada por

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \frac{h_2}{2} + z_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \frac{h_2}{2} + z_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Sendo que os termos h_1 e h_2 se referem às espessuras da primeira e da segunda camada, respectivamente, e o termo z_2 é a distância da superfície média da segunda camada até a superfície superior/inferior da mesma.

Substituindo as equações (B.11) e (B.12) na equação do campo de deslocamentos, equação (B.9), tem-se o campo de deslocamentos para qualquer ponto dentro do EF é dado pela equação

$$\mathbf{u}_2^e = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i u_0^{(i)} + \frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_1^{x,(i)} + \left(\frac{h_2}{2} + z_2 \right) \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_2^{x,(i)} \\ \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i v_0^{(i)} + \frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_1^{y,(i)} + \left(\frac{h_2}{2} + z_2 \right) \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_2^{y,(i)} \\ \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i w_0^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

A matriz de inércia para esse caso é dada por

$$\mathbf{J}_2^e = \rho_2^e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & J_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & \frac{h_1^2}{4} & 0 & \frac{h_1}{2}J_1 & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & \frac{h_1^2}{4} & 0 & \frac{h_1}{2}J_1 \\ J_1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}J_1 & 0 & J_1^2 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}J_1 & 0 & J_1^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

onde $J_1 = \left(\frac{h_2}{2} + z_2\right)$.

Reescrevendo a equação para o campo de deslocamentos dentro do elemento e considerando a terceira camada, tem-se

$$\mathbf{u}_3^e = \mathcal{N}_3 \mathbf{N}_3^e \mathbf{d}^e, \quad (\text{B.15})$$

sendo que o vetor de deslocamentos generalizados é dada por

$$\mathbf{d}^e = \left\{ \begin{matrix} u_0^{(1)} & v_0^{(1)} & w_0^{(1)} & \beta_1^{x,(1)} & \beta_1^{y,(1)} & \beta_2^{x,(1)} & \beta_2^{y,(1)} & \beta_3^{x,(1)} & \beta_3^{y,(1)} & \cdots \\ \cdots & u_0^{(4)} & v_0^{(4)} & w_0^{(4)} & \beta_1^{x,(4)} & \beta_1^{y,(4)} & \beta_2^{x,(4)} & \beta_2^{y,(4)} & \beta_3^{x,(4)} & \beta_3^{y,(4)} \end{matrix} \right\}^T, \quad (\text{B.16})$$

de dimensão $N_{GLE} \times 1$, onde $N_{GLE} = 36$. A matriz de funções de forma tem dimensão igual a $N_{GLNO} \times N_{GLE}$, onde $N_{GLNO} = 9$. A matriz $\mathcal{N}_3$ possui dimensão de $3 \times N_{GLNO}$ e é dada por

$$\mathcal{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_2 & 0 & \frac{h_3}{2} + z_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_2 & 0 & \frac{h_3}{2} + z_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Substituindo as equações (B.17), (B.16) e a matriz de funções de forma na equação (B.15) tem-se

$$\mathbf{u}_3^e = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i u_0^{(i)} + \frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_1^{x,(i)} + h_2 \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_2^{x,(i)} + \left(\frac{h_3}{2} + z_3\right) \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} \beta_3^{x,(i)} \\ \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i v_0^{(i)} + \frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_1^{y,(i)} + h_2 \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i \beta_2^{y,(i)} + \left(\frac{h_3}{2} + z_3\right) \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} \beta_3^{y,(i)} \\ \sum_{i=1}^{N_{GLNO}} N_i w_0^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Por fim, a matriz de inércia da terceira camada é dada por

$$\mathbf{J}_3^e = \rho_3^e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_2 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_2 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & \frac{h_1^2}{4} & 0 & \frac{h_1 h_2}{2} & 0 & \frac{h_1}{2} J_2 & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & \frac{h_1^2}{4} & 0 & \frac{h_1 h_2}{2} & 0 & \frac{h_1}{2} J_2 \\ h_2 & 0 & 0 & \frac{h_1 h_2}{2} & 0 & h_2^2 & 0 & h_2 J_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & \frac{h_1 h_2}{2} & 0 & h_2^2 & 0 & h_2 J_2 \\ J_2 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} J_2 & 0 & h_2 J_2 & 0 & J_2^2 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} J_2 & 0 & h_2 J_2 & 0 & J_2^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

onde $J_2 = \left(\frac{h_3}{2} + z_3\right)$ e os termos h_1 , h_2 e h_3 são as espessuras da primeira, segunda e terceira camadas, respectivamente.