

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FAUSTO PINHEIRO DA SILVA

MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE ROTEAMENTO EM ARCOS
CAPACITADOS E PERIÓDICOS COM MÚLTIPLAS TAREFAS

CURITIBA - PR

2024

FAUSTO PINHEIRO DA SILVA

MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE ROTEAMENTO EM ARCOS
CAPACITADOS E PERIÓDICOS COM MÚLTIPLAS TAREFAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, Departamentos de Construção Civil e de Matemática, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Volmir Eugênio Wilhelm

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Silva, Fausto Pinheiro da

Métodos de solução para um problema de roteamento em arcos capacitados e periódicos com múltiplas tarefas / Fausto Pinheiro da Silva. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Volmir Eugênio Wilhelm

1. Arcos – Roteamento. 2. Veículos – Roteamento. 3. Modelagem matemática. 4. Grafos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. III. Wilhelm, Volmir Eugênio. IV. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **FAUSTO PINHEIRO DA SILVA** intitulada: **MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE ROTEAMENTO EM ARCOS CAPACITADOS E PERIÓDICOS COM MÚLTIPLAS TAREFAS**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 17 de Junho de 2024.

Assinatura Eletrônica

09/09/2024 09:54:19.0

VOLMIR EUGÊNIO WILHELM

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

09/09/2024 08:26:24.0

PAULO HENRIQUE SIQUEIRA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

09/09/2024 09:08:45.0

LUIZ CARLOS MATIOLI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

09/09/2024 10:20:33.0

CASSIUS TADEU SCARPIN

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

09/09/2024 08:53:10.0

LEANDRO MAGATÃO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho a minha esposa, minha tia e a todos os professores que de alguma forma contribuíram com minha formação, possibilitando mais esta conquista.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus, por ter me dado o dom da vida, e de ter me proporcionado ter pai e mãe maravilhosos que foram a base da vida, orientando-me e advertindo-me quando necessário, e que têm caminhado ao meu lado em todos os momentos.

À minha esposa Adriana Asbahr, por toda compreensão nos momentos mais difíceis, sempre ao meu lado e que me apoia, dando-me forças e muitas vezes escutando minhas lamentações e sempre torce por mim.

A minha família que é meu porto seguro, o alicerce que me sustenta para enfrentar qualquer desafio, em especial minha tia Aparecida Gonçalves Pinheiro pelas orações.

Ao meu orientador Dr. Volmir Eugênio Wilhelm, que acreditou em mim quando pedi a sua orientação e que tem me auxiliado em todos os momentos que solicitei sua atenção.

A minha instituição de trabalho Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) na figura de seus dirigentes que não mediram esforços para me apoiar.

Aos professores e colegas do PPGMNE por todo ensinamento e troca de conhecimentos durante esse período de muito aprendizado. Aos amigos Diego Venâncio Thomaz, Carlos Alexandre Ribeiro Martins pessoas que me ajudaram a clarear dúvidas que surgiram no decorrer da tese.

Ao amigo Cleverson Gonçalves dos Santos que me chamou para desenvolver um artigo sobre o assunto, estimulando-me a trabalhar no tema desta tese.

Ao secretário Jair Anjos pela sua disponibilidade e auxílio.

*Quando o ser humano está com a razão
Deus é o seu advogado. Ninguém vence o
ser humano quando ele tem razão.*

(Sílvio Santos, a Biografia)

RESUMO

O Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódicos com Múltiplas Tarefas (PCARPMT) é uma variante dos Problemas de Roteamento em Arcos, em que cada arco possui várias demandas, geralmente associada a uma frequência específica ao longo de um horizonte temporal definido. A solução desse problema exige um planejamento que atenda a todas as demandas de maneira otimizada, sem exceder a capacidade dos veículos envolvidos. O objetivo principal desta tese é apresentar métodos de solução para a modelagem matemática aplicada em um problema que envolve a coleta de dados de consumo de energia dos moradores de uma cidade, além da distribuição de panfletos, sendo todas essas tarefas realizadas por leituristas. Embora o problema tenha a essência do clássico PCARP, ele se distingue pelas características inovadoras aqui propostas, como por exemplo, o método de solução em duas fases. Na primeira fase, busca-se minimizar a quantidade de leiturista através de uma penalização pelo uso de cada leiturista, enquanto na segunda fase, o foco é a minimização da distância percorrida pelos leituristas. Ao final de cada fase, ou quando a solução é ótima, realiza-se uma análise para identificar a presença de subciclos. Caso estes existam serão acrescentadas restrições para eliminá-los, garantindo assim uma solução factível. Os subciclos são identificados por algoritmos especialmente desenvolvidos nesta tese. Foram propostos dois métodos de solução e um levantamento bibliográfico foi realizado para comparar o problema abordado nesta tese com os mais semelhantes encontrados na literatura. A implementação do modelo proposto alcançou resultados positivos, com uma melhoria de 95% em relação a solução ótima ou tempo de solução quando o modelo é executado com a penalização adicional pelo uso de cada leiturista. Entre os dois métodos de solução, o segundo que adiciona um grande conjunto de restrições logo na primeira iteração, mostrou-se mais eficiente que o primeiro, que incrementa restrições para eliminar subciclos ao longo do processo. Além disso, foi realizada uma análise do tempo de trabalho dos leiturista e o que este tempo pode influencia na solução do modelo proposto.

Palavras-chave: Problema de Roteamento em Arcos. PCARP e a formação de subciclos. Métodos de Solução do PCARP.

ABSTRACT

The Capacitated and Periodic Arc Routing Problem with Multiple Tasks (PCARPMT) is a variant of Arc Routing Problems, where each arc has multiple demands, typically associated with a specific frequency over a defined time horizon. Solving this problem requires planning that meets all demands in an optimized manner without exceeding the capacity of the vehicles involved. The primary objective of this thesis is to present solution methods for a mathematical model applied to a problem involving the collection of energy consumption data from city residents, in addition to the distribution of pamphlets, all tasks carried out by meter readers. Although the problem retains the essence of the classic PCARP, it is distinguished by innovative features proposed here, such as the two-phases solution method. In the first phase, the goal is to minimize the number of meter readers by penalizing the use of each reader, while in the second phase, the focus shifts to minimizing the distance traveled by the meter readers. At the end of each phase, or when an optimal solution is found, an analysis is conducted to identify the presence of subcycles. If subcycles are detected, constraints are added to eliminate them, thus ensuring a feasible solution. These subcycles are identified using algorithms specifically developed in this thesis. Two solutions methods were proposed, and a literature review was conducted to compare the problem addressed in this thesis with similar problems found in the literature. The implementation of the proposed model achieved positive results, with a 95% improvement in relation to the optimal solution or solution time when the model is executed with the additional penalty for the use of each meter reader. Among the two solutions methods, the second, which adds a large set of constraints in the first iteration, proved more efficient than the first, which incrementally adds constraints to eliminate subcycles throughout the process. Additionally, an analysis was performed on the meter readers' working time and how this time influences the solution of the proposed model.

Keywords: Arc Routing Problem, PCARP subcycle formation, PCARP solution methods.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	- REPRESENTAÇÃO DO GRAFO QUE REPRESENTA O EXEMPLO DA DESCRIÇÃO.....	22
FIGURA 2	- 1ª SOLUÇÃO.....	26
FIGURA 3	- 2ª SOLUÇÃO.....	27
FIGURA 4	- CIDADE DE KÖNINGSBERG - MARGENS DO RIO PREGEL.....	32
FIGURA 5	- TRANSFORMAÇÃO DAS SETE PONTES EM UM GRAFO POR EULER.....	33
FIGURA 6	- PUBLICAÇÃO POR PAÍSES.....	47
FIGURA 7	- PUBLICAÇÃO POR ANO.....	48
FIGURA 8	- PUBLICAÇÃO POR AUTOR.....	48
FIGURA 9	- PUBLICAÇÃO POR AUTOR ATUAL	49
FIGURA 10	- PUBLICAÇÕES POR REVISTA.....	49
FIGURA 11	- SUBCICLO.....	62
FIGURA 12	- FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DE SOLUÇÃO.....	68
FIGURA 13	- REPRESENTAÇÃO DE SUBCICLOS.....	69
FIGURA 14	- LOOPS.....	91

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1	- TEMPO DE TRABALHO DO VEÍCULO.....	80
QUADRO 2	- EXEMPLO SEM PENALIZAÇÃO / INSTÂNCIA NOV_12_2....	83
QUADRO 3	- EXEMPLO COM PENALIZAÇÃO / INSTÂNCIA NOV_12_2...	86

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	- NÚMEROS DE INSTRUMENTOS POR ARESTAS.....	22
TABELA 2	- TEMPO DE LEITURA DOS INSTRUMENTOS	23
TABELA 3	- COMBINAÇÕES DAS TAREFAS 1, 2, 3 e 4	24
TABELA 4	- HABILITAÇÃO DOS APARELHOS.....	24
TABELA 5	- QUANTIDADE DE TAREFAS QUE O LEITURISTA PODE REALIZAR.....	24
TABELA 6	- APARELHOS DISPONÍVEIS.....	25
TABELA 7	- ÍNDICES, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (CHU et al, 2005)	50
TABELA 8	- ÍNDICES, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (SANTOS et al, 2016)	52
TABELA 9	- ÍNDICE, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (TIRKOLAE et al. (2018))	56
TABELA 10	- ÍNDICES, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (MODELO PROPOSTO)	59
TABELA 11	- ANÁLISE DO MODELO EXATO COM E SEM PENALIZAÇÃO	81
TABELA 12	- ANÁLISE DO MODELO EXATO COM E SEM PENALIZAÇÃO COM "t/4".....	89
TABELA 13	- ANÁLISE DE DESEMPENHO DE PARALELISMO	91
TABELA 14	- 1º MÉTODO DE SOLUÇÃO x 2º MÉTODO DE SOLUÇÃO.....	92

LISTA DE ALGORITMOS

ALGORITMO 1 - ARESTAS_VISITADAS.....	70
ALGORITMO 2 - COMEÇAR	70
ALGORITMO 3 - DETERMINAR_VÉRTICE	70
ALGORITMO 4 - PRÓXIMO_VÉRTICE.....	71
ALGORITMO 5 - DETERMINAR_UM_SUBCICLO.....	71
ALGORITMO 6 - DETERMINAR_SUBCICLOS.....	72
ALGORITMO 7 - RESTRIÇÕES_QUE_ELIMINAM_SUBCICLOS.....	73
ALGORITMO 8 - DETERMINAR_TODOS_SUBCICLOS.....	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- CARP - *Capacitated Arc Routing Problem* (Problema de Roteirização em Arcos Capacitados)
- PCARP - *Periodic Capacitated Arc Routing Problem* (Problema de Roteirização Periódico em Arcos Capacitados)
- PCC - Problema do Carteiro Chinês
- ARP - *Arc Routing Problem* (Problema de Roteirização em Arcos)
- NP-hard - Tempo Polinomial não Determinístico
- VRP - *Vehicle Routing Problem* (Problema de Roteirização de Veículo)
- TSP - Problema de Vendedor Ambulante
- TSPLIB - Biblioteca de Problemas do Caixeiro Viajante
- CVRP - Problema de Roteamento de Veículo Capacitado
- ACO - Algoritmo *Ant Colony*
- VRPTW - Problema de Roteamento de Veículo com Janela de Tempo
- MA - Algoritmo Memético
- RM - Fusão de Rotas
- MARM - Algoritmo Memético de Fusão de Rotas
- PVRP - *Periodic Vehicle Routing Problem* (Problema de Roteirização de Veículo Periódico)
- DRPP - Problema do Carteiro Rural Direcionado
- PRPP - Problema Periódico do Carteiro Rural
- ACS - Sistema de Colônia de Formigas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS GERAIS	17
1.1.1	Objetivos Específicos	18
1.2	LIMITAÇÕES	18
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2	DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA	20
2.1	GRAFOS	20
2.2	PCARP COM MÚLTIPLAS TAREFAS E BIOBJETIVO	21
2.3	METODOLOGIA	28
3	REVISÃO DE LITERATURA	32
3.1	PROBLEMAS DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS	35
3.1.1	Minimizar Distância e a Quantidade dos Veículos em Roteamento de Veículos	39
3.2	PROBLEMAS DO ROTEAMENTO EM ARCOS	40
3.2.1	Minimizar Distância e a Quantidade dos Veículos em Roteamento em Arcos	46
3.3	BIBLIOMETRIA	47
3.4	MODELOS CORRELATOS	50
3.4.1	Modelo de Chu, Labadi e Prins (2005)	50
3.4.2	Modelo de Santos, Scarpin e Silva (2016)	52
3.4.3	Modelo de Tirkolae et al. (2018)	55
4	MODELAGEM PROPOSTA NA TESE	59
4.1	SUBCICLO	62
4.2	INOVAÇÕES DO MODELO PROPOSTO	62
4.3	ALGORITMO SOLUÇÃO	68
4.3.1	Algoritmo I	69
4.3.2	Algoritmo II	72
4.3.3	Algoritmo III	75
5	RESULTADOS	78
5.1	ANÁLISE DO 1º MÉTODO DE SOLUÇÃO	79
5.1.1	Tempo Aleatório	88
5.2	ANÁLISE DO 2º MÉTODO DE SOLUÇÃO	90
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	96

1 INTRODUÇÃO

Os problemas de otimização de rotas surgem em diversos contextos práticos, como coleta de lixo, leitura de medidores de água e energia, varredura de ruas, remoção de neve e panfletagem (Konowalenko, 2012). O planejamento e execução eficazes dessas operações podem gerar grandes economias financeiras para governos e empresas. As otimização de rotas é um problema que podem ser resolvidos através dos problemas de roteamento de veículos.

Os problemas de roteamento de veículos se dividem-se em duas classes: roteamento em nós e roteamento em arcos. O roteamento em nós determina rotas onde um veículo visita alguns ou todos os nós de um grafo, representando a localização dos clientes. O roteamento em arcos, por sua vez, determina rotas para realizar serviços em alguns ou todos os arcos ou arestas de um grafo, representando as ruas de uma cidade (Monroy, Amaya, Langevin, 2013).

O planejamento da coleta de lixo urbano para um horizonte de tempo maior que um dia pode ser modelado como um Problema de Roteamento em Arcos Capacitados e Periódicos (PCARP), uma extensão do Problema de Roteamento em Arcos Capacitados (CARP). Lacomme et al. (2005) definem o PCARP como a seleção de um número de tratamentos diários para cada rua, formando rotas diárias de modo que as ruas designadas sejam atendidas. O custo total depende das decisões de designação e de roteamento.

Normalmente, o PCARP é aplicado na minimização das rotas para a coleta de lixo. Santos (2016) aplicou o PCARP na minimização das rotas dos leiturista de uma usina hidrelétrica para monitoramento de instrumentos de auscultação na barragem. Tirkolae et al. (2018) desenvolveram um trabalho visando minimizar a distância percorrida e a quantidade de veículos necessários para a coleta de lixo.

Dada a ampla gama de aplicações do PCARP, será contextualizada sua aplicação em uma empresa que presta serviços de medição de consumo de energia residencial. No entanto, o modelo matemático que desenvolveremos pode ser aplicado tanto à coleta de lixo quanto ao monitoramento de instrumentos instalados em hidrelétricas, em indústrias, ou em qualquer empresa que precise otimizar as rotas de funcionários que executam múltiplas tarefas, minimizando a quantidade de veículos

utilizados e a distância percorrida pelos veículos. É necessário ressaltar que minimizar a distância e a quantidade de veículos é um problema que já foi tratado pelo autor desta tese nos artigos intitulados "*Algoritmo de Solução para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados e Periódicos Aplicado ao Monitoramento de Usinas Hidrelétricas*", "*Algoritmo Completo para Resolução do Problema de Roteirização em Arcos Capacitados com Múltiplas Tarefas*", publicados em 2023 e 2024 respectivamente.

Supondo-se que a empresa em questão é uma terceirizada que realiza as leituras dos medidores de energia de residências em uma cidade e percebeu que poderia aumentar seu faturamento oferecendo o serviço de panfletagem para os empresários locais. Caso alguns empresários desejem divulgar seus produtos e manter a marca presente na mente dos clientes, solicitando entregas de panfletos em dias específicos, logo, este exemplo se encaixa no modelo proposto, que visa minimizar a quantidade de leituristas e a distância percorrida pelos leituristas para realizar múltiplas tarefas em dias predefinidos.

Os modelos matemáticos para o PCARP são de difícil solução, como relatado por Hess (2023). Uma das dificuldades é determinar os subciclos que podem surgir durante a execução do modelo por um software de otimização. Devido a isso, além de desenvolver um modelo que minimiza a quantidade de leituristas e a distância percorrida pelos leituristas, este trabalho também desenvolverá métodos de solução para o modelo proposto.

1.1 OBJETIVOS GERAIS

O objetivo deste trabalho é apresentar métodos de solução para o problema de roteamento em arestas capacitados e periódicos com múltiplas tarefas, adotando um enfoque biobjetivo. Os métodos desenvolvidos para solucionar o modelo que resolver o problema visam diminuir prioritariamente a quantidade dos veículos e secundariamente a distância percorrida por eles.

1.1.1 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Analisar alguns dos principais problemas abordados na literatura sobre roteamento em arcos;
- Propor uma modelagem matemática para o problema de roteamento em arcos capacitados e periódicos com múltiplas tarefas, visando a redução da quantidade de veículos e da distância percorrida pelos veículos;
- Avaliar as inovações introduzidas pelo modelo;
- Analisar e comparar os resultados obtidos com o novo modelo.
- Analisar o tempo de trabalho do veículo e suas implicações na obtenção de uma solução factível.
- Comparar os métodos de solução propostos para o modelo.

1.2 LIMITAÇÕES

O PCARP é um problema proposto por Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif em 2002. No artigo de Hess (2023) que revisa problemas de roteamento de veículos e roteamento em arcos, é relatado que poucos estudos focam no problema de roteamento em arcos. Segundo Hess (2023) o roteamento em arcos que envolvem as coletas e a entregas simultâneas requerem mais estudos, pois planejá-las como parte de uma economia circular é crucial. Isso permite rotas mais eficientes e reduz a quantidade dos veículos nas estradas, resultando em economias de custos e a redução das emissões.

As pesquisas existentes se concentram, principalmente, em propor estratégias heurísticas para resolver problemas de grande porte (reais) em tempo de processamento razoável (CHEN; HAO, 2018). Mesmo não apresentando uma estratégia heurística robusta para resolver problemas reais de grande porte, os avanços apresentados nesta tese consistem na proposta da formulação matemática para a variante do problema ainda não tratada na literatura e na busca dos métodos de resolução do modelo matemático proposto.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura deste trabalho é composta por seis capítulos. O segundo capítulo apresenta uma breve descrição do problema para efeito ilustrativo e melhor entendimento das suas características e os métodos das soluções.

No terceiro capítulo é apresentada uma fundamentação teórica que descreve as evoluções dos problemas dos roteamentos dos veículos e dos arcos, destacando-se a forte característica comum de roteirização. Este capítulo também aborda trabalhos que justificam a busca por um modelo que, além de diminuir as distâncias percorridas, visa reduzir a quantidade dos leituristas e os dias trabalhados.

O modelo proposto é descrito no quarto capítulo, em que serão analisadas as inovações e diferenças em relação aos modelos, anteriormente, apresentados. Além disso, os algoritmos que integram o *Algoritmo Solução* são detalhadamente explicados.

No quinto capítulo, são apresentados os resultados para um conjunto de instâncias implementadas no novo modelo. Esses dados são comparados com os resultados obtidos a partir da adaptação do modelo proposto com os modelos presentes na literatura, avaliando sua validade. Os dois métodos das soluções são analisados e comparados, assim como o impacto do tempo de trabalho do leiturista na solução do modelo.

Finalmente, as conclusões e sugestões para trabalhos futuros encontram-se no sexto capítulo.

2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA

O modelo proposto nesta tese é versátil e pode ser aplicado em várias situações, como: coletas de lixo (Chu et al. (2005)), (Tirkolaee et al.(2018)) e leituras de medidores (Santos (2016)). O exemplo que ilustrará a descrição do problema é de uma empresa que busca minimizar a quantidade dos leituristas e as distâncias percorridas por eles para realizar a leitura do consumo de energia e da entrega de panfletos. E, deste modo, como se utiliza um grafo para representar as ruas de uma cidade, portanto, uma subseção de grafo será apresentada.

Na segunda subseção, serão detalhadas as características do problema. O estudo abordará como gerenciar o intervalo de um dia para a entrega dos panfletos, ou a opção de entrega em três dias consecutivos, considerando-se essas datas como predefinidas. Será feito um comentário sobre a quantidade dos leituristas e a disponibilidade dos equipamentos para todos os leituristas executarem suas tarefas. Essas situações serão destacadas como características que devem ser gerenciadas por meio das restrições, as quais devem contemplar as datas predefinidas, a falta de equipamentos para todos os leituristas, a falta de habilidade de alguns para realizar todas as tarefas, entre outros aspectos relevantes.

Na seção da metodologia serão descritos os métodos das soluções aplicados ao modelo proposto.

2.1 GRAFOS

Em matemática, a cardinalidade de um conjunto se refere ao número de elementos distintos que o conjunto possui. A notação usual para representar a cardinalidade de um conjunto A é $|A|$.

Para otimizar o percurso que um leiturista deve realizar para coletar dados de consumo de energia e distribuir os panfletos, as ruas da cidade podem ser modeladas como um grafo. Um grafo $G = (X, E)$ é composto por um conjunto de nós $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|X|}\}$ e um conjunto de arestas (ou arcos) $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{|E|}\}$. Cada nó (ou

vértice) representa um ponto específico, enquanto as arestas (ou arcos) representam as conexões entre esses pontos.

Uma aresta ou arco conecta dois nós $i \in X$ e $j \in X$ e é geralmente denotada pelo par desses nós. Nesta tese, a notação $(i, j) \in E$ será utilizada para definir uma aresta, enquanto a notação $[i, j]$ será empregada para identificar um arco. As arestas podem ser percorridas em ambos os sentidos, ou seja, a ordem dos nós não altera a aresta, de modo que $(i, j) = (j, i)$. Para os arcos, a ordem dos nós é fundamental, o que permite a existência de um arco $[i, j]$ sem a necessidade de existir o arco $[j, i]$.

Quando o conjunto E é composto por arestas, o grafo é considerado não direcionado, ou seja, a ordem dos nós não influencia a representação (EVANS; MINIEKA, 1992).

2.2 PCARP COM MÚLTIPLAS TAREFAS E BIOBJETIVO

Entre as diversas aplicações do modelo proposto, será contextualizado o caso de uma empresa terceirizada responsável pela medição do consumo de energia em uma cidade. Além de realizar as leituras do consumo, a empresa ampliou seus serviços para incluir a distribuição dos panfletos. Esse serviço adicional foi oferecido aos comerciantes locais e dois deles contrataram o serviço com exigências específicas: o primeiro solicitou a entrega dos panfletos em dois dias por semana, com um intervalo de um dia entre as entregas; o segundo exigiu a entrega em três dias consecutivos.

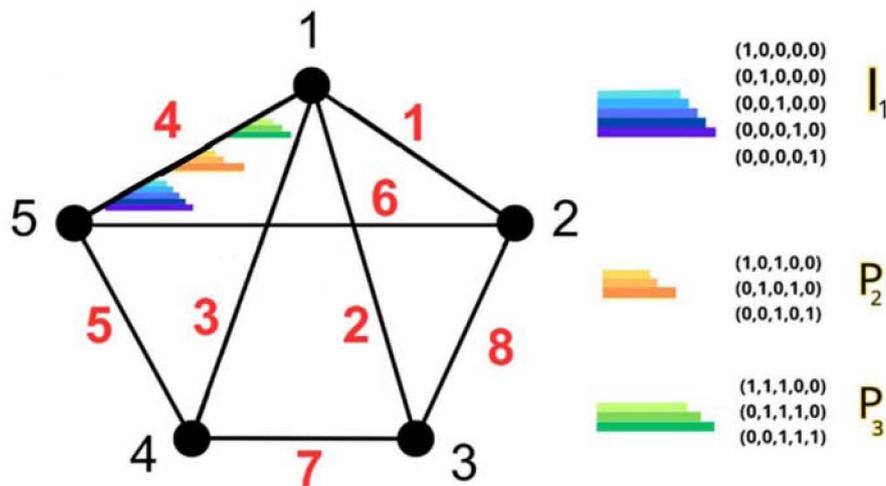
A empresa garantiu que as entregas dos panfletos ocorreriam, conforme as demandas dos comerciantes, ajustando deste modo, a frequência e a sequência das entregas de acordo com as especificações. No entanto, esta informou aos dois empresários que as demandas seriam atendidas, mas as ruas pelas quais os leituristas passariam e quais leituristas seriam alocados para o serviço dependeriam das disponibilidades dos equipamentos necessários à leitura e das sacolas para carregar os panfletos.

Para otimizar a quantidade dos leituristas, o proprietário da empresa estipulou que eles deveriam caminhar a uma velocidade de aproximadamente 0,5 m/s e teriam um tempo específico, para realizar a leitura dos instrumentos, bem como, a entrega dos panfletos. Para determinar as melhores rotas e a quantidade dos leituristas, o

empresário detalhou todas as características relevantes para modelar o problema, conforme descrito abaixo:

Primeiro, criou-se um grafo para representar algumas ruas da cidade, que está representado na Figura 1. Entre um vértice e outro, formam-se as arestas, que denotamos por (i, j) , representando assim as ruas da cidade. Os números sobre as arestas indicam as distâncias em metros entre os vértices, ou seja, o comprimento das arestas.

FIGURA 1: REPRESENTAÇÃO DO GRAFO DE UM PEDAÇO DO BAIRRO DA CIDADE



FONTE: O autor (2024)

Definiu-se que cada aresta (i, j) pode conter até três tipos distintos de tarefas a serem realizadas. Por exemplo, a leitura do consumo de energia é denotada por I_1 ; a entrega de panfletos para a empresa que requisitou o serviço duas vezes por semana é denotada por P_2 ; e a entrega dos panfletos para a segunda empresa que requisitou o serviço três vezes por semana é denotada por P_3 . A Tabela 1 apresenta a quantidade dos instrumentos do tipo I_1 que devem ser lidos e o número de residências em que o serviço de panfletagem devam ser realizados ao longo da aresta (i, j) no período de 5 dias.

TABELA 1: QUANTIDADE DE CADA TIPO DE TAREFA POR ARESTAS.

Arestas	I_1	P_2	P_3	Arestas	I_1	P_2	P_3	Arestas	I_1	P_2	P_3
(1,2)	0	2	2	(1,5)	4	4	4	(3,4)	2	3	3
(1,3)	2	3	3	(2,3)	4	4	4	(4,5)	0	5	5
(1,4)	0	4	4	(2,5)	0	6	6				

FONTE: O autor (2024)

Ao analisar a Figura 1 se observa que ao longo da rua (aresta) que conecta os vértices 1 e 5, é necessário realizar a leitura de quatro instrumentos do tipo I_1 , ou seja, o leitorista precisa fazer a leitura de 4 medidores de energia. Da mesma forma, é preciso entregar o panfleto do tipo P_2 em quatro residências e do tipo P_3 em quatro residências ao percorrer essa aresta, conforme os dados apresentados na Tabela 1.

O trabalho do leitorista é percorrer as arestas fazendo a medição dos instrumentos instalados e entregar os panfletos. A velocidade de caminhada do leitorista será denotada por vm_v . Quando o leitorista encontra um instrumento do tipo I_1 ou P_2 ou P_3 em uma aresta designada para a execução de alguma destas tarefas, ele realiza a tarefa correspondente e continua seguindo o percurso até concluir todas as tarefas previstas no trajeto predefinido.

O tempo necessário para realizar cada tipo de tarefa está especificado na Tabela 2.

TABELA 2: TEMPO PARA REALIZAR CADA TAREFA

Instrumentos	I_1	P_2	P_3
O tempo para realizar cada tipo de tarefa em segundos	35	45	30

FONTE: O autor (2024)

O tempo para realizar cada tarefa será denotado pelo parâmetro γ_i . O ato da leitura do instrumento I_1 ou entrega dos panfletos P_2 ou P_3 é equivalente à realização da tarefa k com k inteiro variando de 1 até 3.

Como a panfletagem requer a entrega com periodicidades diferentes, no horizonte de planejamento de uma semana, de segunda-feira até sexta-feira, por exemplo, P_2 deve ocorrer em dois dias com um intervalo de um dia entre as medições. Assim, a panfletagem P_2 deverá ser realizada na segunda-feira e quarta-feira, ou na terça-feira e quinta-feira ou na quarta-feira e sexta-feira. Denominando-se estes possíveis dias de leitura como combinação. Assim sendo, segunda-feira e quarta-feira são representadas por $(1,0,1,0,0)$ e denotado por 1_{comb_2} , que quer dizer combinação 1 em relação à tarefa 2. Os dias desta combinação será denotado pelos parâmetros $c_{k,n_{comb_k},d}$, em que k representa a tarefa, n_{comb_k} o número da combinação referente à tarefa k , d o dia. Assim, $c_{2,1_{comb_2},0} = 1, c_{2,1_{comb_2},1} = 0, c_{2,1_{comb_2},2} = 1, c_{2,1_{comb_2},3} = 0, c_{2,1_{comb_2},4} = 0$. Na Tabela 3, representam-se as combinações possíveis para as tarefas 1, 2, e 3.

TABELA 3: COMBINAÇÕES DAS TAREFAS 1, 2, e 3

Dias	1	2	3	4	5	Dias	1	2	3	4	5
1_{comb_1}	1	0	0	0	0	1_{comb_2}	1	0	1	0	0
2_{comb_1}	0	1	0	0	0	2_{comb_2}	0	1	0	1	0
3_{comb_1}	0	0	1	0	0	3_{comb_2}	0	0	1	0	1
4_{comb_1}	0	0	0	1	0	1_{comb_3}	1	1	1	0	0
5_{comb_1}	0	0	0	0	1	2_{comb_3}	0	1	1	1	0
						3_{comb_3}	0	0	1	1	1

FONTE: O autor (2024)

A jornada de trabalho, ou seja, o tempo de trabalho do leiturista, será suposto como sendo de 646 segundos por dia e a empresa tem 4 leiturista disponíveis para executar o trabalho.

Escolhendo-se para a aresta (i, j) a combinação 1, para a tarefa 2, necessariamente, algum leiturista terá que passar por esta aresta na segunda-feira e retornar na quarta-feira, isto é, não sendo necessariamente o mesmo leiturista, para realizar a tarefa 2.

Usou-se o parâmetro $p_{v,k}$, para denotar se o leiturista v está habilitado para executar a tarefa k . Assim $p_{v,k}$ assume valor 1 se o leiturista v pode executar a tarefa k , e 0, caso contrário. Sendo assim, as habilidades dos leituristas (veículos) estão descritas na Tabela 4.

TABELA 4: HABILITAÇÃO DOS APARELHOS

Tarefas	I_1	P_2	P_3	Tarefas	I_1	P_2	P_3
Leiturista 1	1	1	1	Leiturista 2	0	1	1
Leiturista 3	1	1	0	Leiturista 4	1	0	0

FONTE: O autor (2024)

A quantidade das tarefas que o leiturista v pode executar será denotada pelo parâmetro cm_v . A Tabela 5 contém a quantidade das possíveis tarefas para cada leiturista.

TABELA 5: QUANTIDADE DAS TAREFAS QUE O LEITURISTA PODE REALIZAR

Leiturista 1	3	Leiturista 2	2
Leiturista 3	2	Leiturista 4	1

FONTE: O autor (2024)

Para quantificar o número de aparelhos disponíveis para proceder a leitura de cada instrumento, usa-se o parâmetro $a_{k,d}$, em que o índice k denota a tarefa a ser realizada e d o dia. A Tabela 6 descreve a quantidade dos aparelhos de leitura ou a quantidade de sacola para transportar os panfletos disponível por dia.

TABELA 6: APARELHOS DISPONÍVEIS

Dias	1	2	3	4	5
Quantidade de aparelhos disponíveis I_1	2	2	2	2	2
Quantidade de sacolas disponíveis P_2	2	2	2	2	2
Quantidade de sacolas disponíveis P_3	3	3	3	3	3

FONTE: O autor (2024)

Outros parâmetros são definidos, por exemplo: N_{ta} número de tarefas distintas.

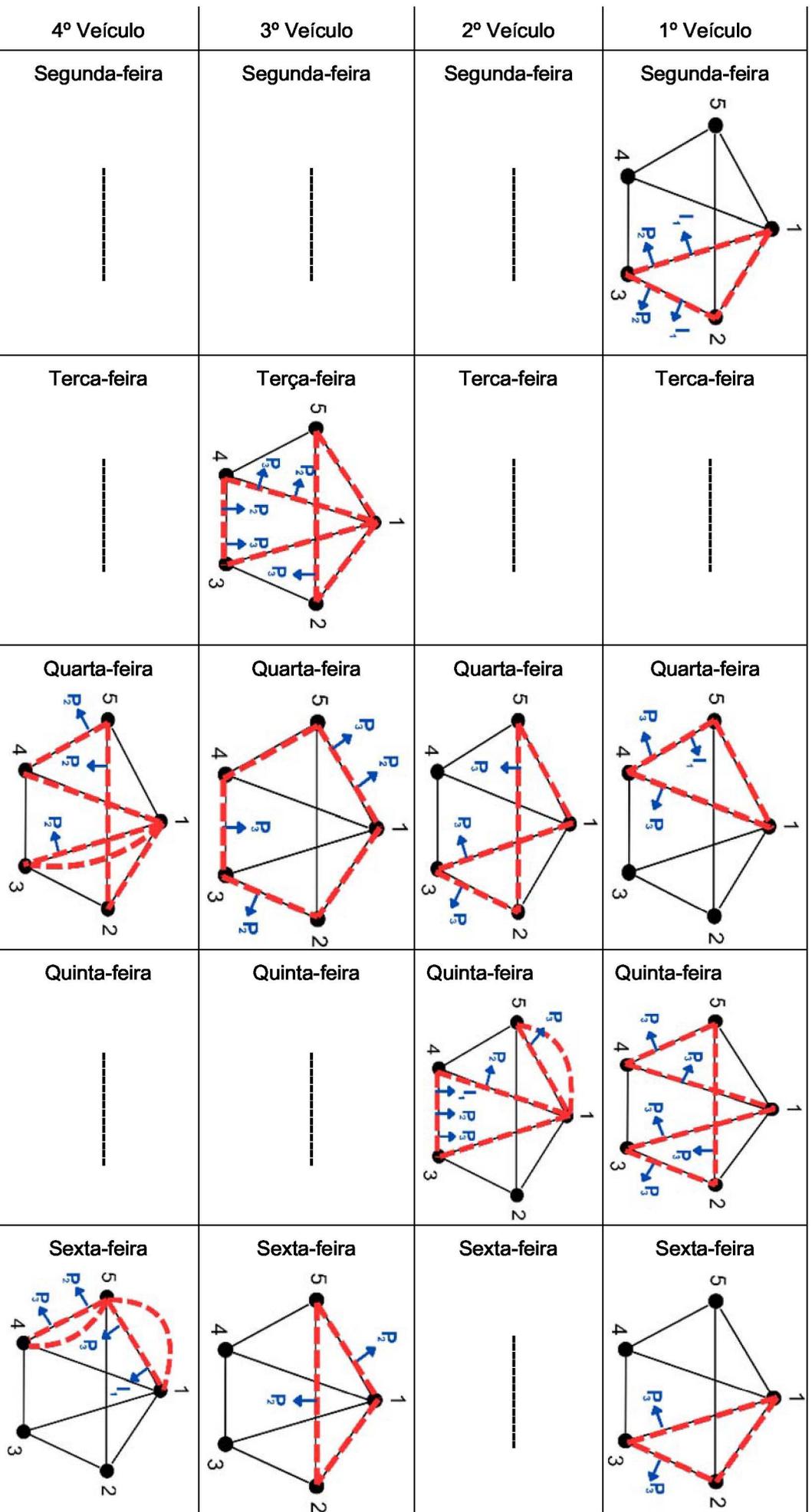
A execução dos serviços sobre a aresta (i, j) pode ser realizada em qualquer um dos dois sentidos das travessias das arestas, isto é, de i para j ou de j para i .

Outras características do problema:

- deve-se escolher quais das combinações serão usadas para executar cada uma das tarefas;
- deve-se determinar quais dos leituristas irão fazer a leitura ou a entrega de panfleto da rota que contém a aresta (i, j) e se será feito a leitura do instrumento ou entrega dos panfletos ou a leitura e entrega dos panfletos;
- o leiturista, necessariamente, terá que passar uma vez executando a tarefa, na aresta designada para ele, contudo poderá ter que passar nas aresta sem executar nenhuma tarefa para manter o fluxo contínuo;
- os leiturista podem não ser habilitados para executar todas as tarefas, por não ter habilidade para realizar a tarefa;
- o leiturista terá que sair do almoxarifado, que representa-se pelo vértice "0" e retornar ao mesmo local no final do dia;
- o tempo para percorrer o caminho do almoxarifado, fazer as leituras dos instrumentos e retornar para o mesmo lugar, não pode exceder a jornada de trabalho do leiturista por dia.

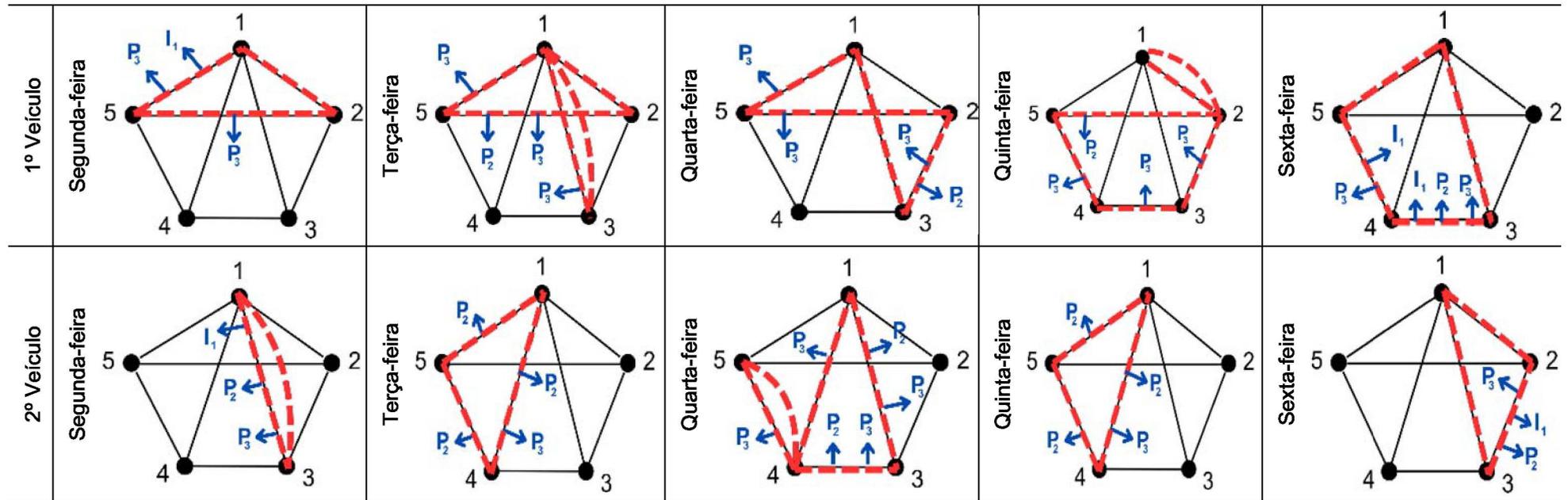
O modelo matemático ainda não foi apresentado, mas duas soluções factíveis para o problema, que respeitem as características mencionadas anteriormente, bem como os dados das tabelas 1, 2, ..., 6, serão apresentadas. Essas soluções foram obtidas através do método de tentativa e erro.

FIGURA 2: 1º Solução



Na 1º solução 4 veículos foram necessários para realizar as tarefas e as distâncias percorridas pelos 4 veículos foi de 194 ms.
 FONTE: O autor (2024)

FIGURA 3: 2ª Solução



FONTE: O autor (2024)

Para a segunda solução 2 veículos foram necessários para realizar todas as tarefas e a distância percorrida foi de 153 metros. Essas soluções ilustram que o modelo matemático, além de atender às características e dados de uma situação-problema, deve focar na redução da quantidade dos leituristas e da distância percorrida por ele. A redução prioritária do número dos leituristas é justificada pelo custo que cada um representa para a empresa.

2.3 METODOLOGIA

A metodologia adotada inclui a formulação de um problema com função biobjetivo, visando minimizar tanto a quantidade como a distância percorrida pelos veículos utilizados. O modelo será resolvido por meio do *software* otimização chamado *Gurobi*, devidamente referenciado. Dado que a resolução do modelo matemático pode não resultar em uma solução factível, considerando a possibilidade dos subciclos na solução determinada pelo modelo, dois métodos de soluções foram desenvolvidos para lidar com essa questão.

Como a função é biobjetiva, ela possui duas somatórias, em que a segunda somatória penaliza o uso dos veículos. Dependendo do valor das penalizações, se forem muito elevadas, o solver interpretará a abordagem como hierarquizada. Nesse caso, a prioridade absoluta será determinar a quantidade mínimo de leiturista, e, em seguida, o modelo tentará minimizar a distância percorrida. Este será o caminho adotado nesta tese.

Devido a essa abordagem, as penalizações elevadas serão aplicadas para garantir que, na primeira fase, o modelo priorize a redução da quantidade de leituristas, enquanto na segunda fase, o foco estará na minimização da distância percorrida. Na segunda fase, apenas a primeira somatória é utilizada para minimizar a distância. A transição entre as fases ocorre somente quando uma solução sem subciclos é encontrada, assegurando uma solução factível com o número mínimo de veículos. No entanto, essa solução pode não ser a mais eficiente em termos de minimização da distância. Por isso, a segunda fase é necessária, com a quantidade mínima de veículos já garantida, para aprimorar a solução obtida na fase anterior.

Esta abordagem será aplicada nos dois métodos de solução que serão apresentados.

1º método 1º passo: O modelo proposto será resolvido utilizando valores elevados de penalização, com um tempo limite de 300 segundos.

2º passo: A solução será analisada para verificar a presença de subciclos utilizando o Algoritmo 1. Se não houver subciclos, proceder-se-á para o 3º passo. Caso existam subciclos, as arestas que os desfazem serão determinadas utilizando o Algoritmo 2. Em seguida,

serão adicionadas as restrições para eliminar os subciclos, e o processo retornará ao 1º passo (O GAP será definido depois da apresentação do modelo proposto na página 77).

3º passo: O modelo será resolvido focando apenas na diminuição da distância percorrida pelos leitores, com um tempo limite de 600 segundos. A solução será analisada para verificar a presença de subciclos utilizando o Algoritmo 1. Se não houver subciclos e $GAP = 0$ então a solução desejada será considerada obtida e finaliza-se o método ou se $GAP \neq 0$ proceder-se-á para o 4º passo. Caso existam subciclos, as arestas que os desfazem serão determinadas utilizando o Algoritmo 2. Em seguida, serão adicionadas as restrições para eliminar os subciclos, e o processo retornará ao 3º passo.

4º passo: O modelo será resolvido focando apenas na diminuição da distância percorrida pelos leitores, com um tempo limite de 1200 segundos. A solução será analisada para verificar a presença de subciclos utilizando o Algoritmo 1. Se não houver subciclos e $GAP = 0$ então a solução desejada será considerada obtida e finaliza-se o método ou se $GAP \neq 0$ proceder-se-á para o 5º passo. Caso existam subciclos, as arestas que os desfazem serão determinadas utilizando o Algoritmo 2. Em seguida, serão adicionadas as restrições para eliminar os subciclos, e o processo retornará ao 4º passo.

5º passo: serão iguais ao 4º passo, mas com o tempo de 1800 segundos.

6º passo: serão iguais ao 5º passo, mas com o tempo de 2400 segundos.

7º passo: serão iguais ao 6º passo, mas com o tempo de 3600 segundos.

8º passo: O modelo será resolvido focando apenas na diminuição da distância percorrida pelos leitores, utilizando o tempo restante dos 21600 segundos estabelecidos como o tempo máximo nos testes para obter a melhor solução factível. Se uma solução for encontrada antes dos 21600 segundos, ela será analisada para verificar a presença de subciclos através do Algoritmo 1. Caso existam subciclos, serão

acrescentadas restrições para desfazê-los, e o 8º passo será executado novamente. Se não houver subciclos, a solução desejada será considerada obtida.

2º método 1º passo: Determinar um conjunto de subciclos e acrescentar as restrições ao modelo que desfazem estes subciclos.

2º passo: O modelo proposto será resolvido utilizando valores elevados de penalização, com um tempo limite de 3600 segundos.

3º passo: A solução será analisada para verificar a presença de subciclos utilizando o Algoritmo 1. Se não houver subciclos, proceder-se-á para o 4º passo. Caso existam subciclos, as arestas que os desfazem serão determinadas utilizando o Algoritmo 2. Em seguida, serão adicionadas restrições para eliminar os subciclos, e o processo retornará ao 2º passo.

4º passo: : O modelo será resolvido focando apenas na diminuição da distância percorrida pelos leituristas, com um tempo limite de 7200 segundos. A solução será analisada para verificar a presença de subciclos utilizando o Algoritmo 1. Se não houver subciclos e $GAP = 0$ então a solução desejada será considerada obtida e finaliza-se o método ou se $GAP \neq 0$ proceder-se-á para o 5º passo. Caso existam subciclos, as arestas que os desfazem serão determinadas utilizando o Algoritmo 2. Em seguida, serão adicionadas as restrições para eliminar os subciclos, e o processo retornará ao 4º passo.

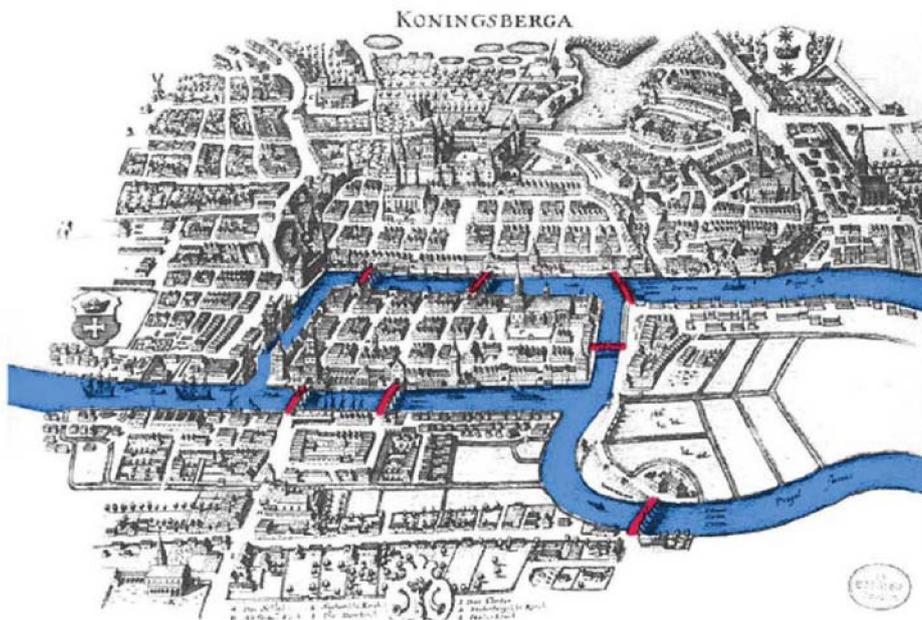
5º passo: O modelo será resolvido focando apenas na diminuição da distância percorrida pelos leituristas, utilizando o tempo restante dos 21600 segundos estabelecidos como o tempo máximo nos testes para obter a melhor solução factível. Se uma solução for encontrada antes dos 21600 segundos, ela será analisada para verificar a presença de subciclos através do Algoritmo 1. Caso existam subciclos serão acrescentadas restrições para desfazê-los, e o 5º passo será executado novamente. Se não houver subciclos, a solução desejada será considerada obtida.

Alguns estudos presentes na literatura tratam algumas situações semelhantes presente aqui na descrição do problema. Devido a este fato, uma breve revisão da literatura será feita no próximo capítulo.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Pelo que consta na literatura, o início da teoria de roteamento em arcos capacitados periódicos remete ao problema proposto por Euler em que seria possível passar uma vez e, uma só, em cada ponte da cidade de KÖNINGSBERG e, posteriormente, voltasse ao ponto de partida. A região que gerou o questionamento pode ser visualizada na Figura 4.

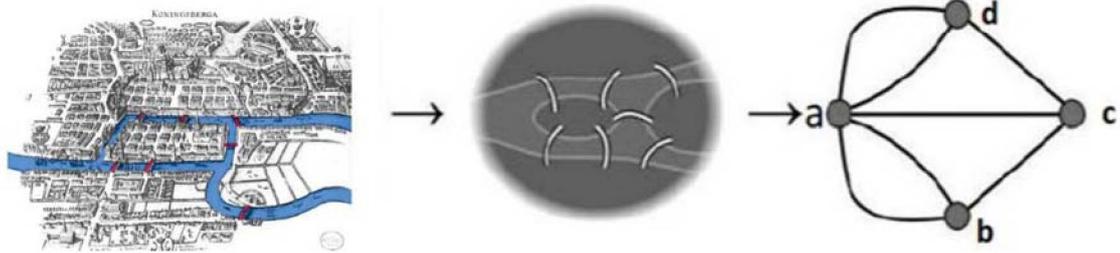
FIGURA 4 - CIDADE DE KÖNINGSBERG - MARGENS DO RIO PREGEL



FONTE: PEREIRA et al. (2010)

O problema deu origem, primeiramente, à teoria dos grafos, pois o mesmo foi modelado como na Figura 5, em que os vértices são as margens do rio Pregel que atravessava a cidade de Königsberg, sendo as ligações dos vértices as pontes. Euler verificou que o passeio fechado que desejavam os habitantes da cidade, era impossível, porque os quatro vértices do grafo tinham grau ímpar (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009).

FIGURA 5 - TRANSFORMAÇÃO DAS SETE PONTES EM UM GRAFO POR EULER



FONTE: Pereira et al. (2010)

Em um grafo não orientado, o grau de um vértice u é o número $d(u)$ de arestas ligadas a ele. Na Figura 5, como exemplo, o vértice “a” tem grau 5. Um grafo é denominado *Conexo* quando podemos atingir todos os vértices do mesmo caminhando sobre as arestas. Se dois vértices não são atingíveis por ligações das arestas consecutivas, então este grafo é chamado de *Desconexo*. Um percurso fechado que utiliza todas as arestas de um grafo, só uma vez é chamado um percurso *Euleriano*, um grafo que possua tal percurso é chamado de *Grafo Euleriano*.

Na resolução do problema proposto por Euler foi formulado o teorema que afirma que um grafo $G(X, E)$, não orientado e conexo, possui um ciclo Euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tiverem grau par. Euler provou uma das implicações do teorema, a condição necessária, enquanto Hierholzer provou a condição suficiente algum tempo depois.

Cabe questionar a razão pela qual ainda se discute este problema, mais de 270 anos depois de sua formulação. Na verdade, se ele servisse apenas para achar passeios em pontes, já estaria há muito esquecido (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009). No entanto, a investigação desse problema entre as pontes implica em facilitar a determinação de uma rota para o caminhão coletor de lixo, para inspeção de fontes de energia e abastecimento de água em residências.

De fato, no trabalho de Konowalenko (2012) a autora descreve alguns exemplos de aplicações similares ao problema da ponte, como: coleta de lixo domiciliar; remoção de neve das vias públicas; serviço das entregas das cartas e encomendas dos correios; das inspeções periódicas em linhas elétricas, das redes de gasodutos ou dos oleodutos e das leituras dos medidores de consumo de água, de energia, de gás, entre outras aplicações.

As aplicações só fazem sentido em grafo de grau par, como Euler provou. Mas nem sempre os grafos que modelam uma aplicação real têm todos os vértices

com grau par. A solução para este problema é dada pelo teorema que afirma que o número mínimo de percursos que particionam o conjunto das arestas de um grafo $G(X, E)$ não orientado e conexo, com 2^k vértices de grau ímpar é k ($k \in \mathbb{N} - \{0\}$) (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009). Este teorema apresenta que, para unirmos os k percursos parciais, teremos de repetir trechos do itinerário: se o grafo não for *Euleriano*, não há como agir de outra forma.

Logo, o objetivo, quando o grafo não é *Euleriano*, é determinar um circuito que passe por todas as arestas e que repita a menor quantidade possível das arestas, este problema é conhecido como Problema do carteiro chinês (PCC) (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009).

Existem várias heurísticas que resolvem o problema do (PCC), mas vamos usar um modelo de Programação Linear Inteira que está presente no artigo de Filho e Junqueira (2006) para exemplificar uma modelagem do problema. Considere um grafo não direcionado G , em que $X = \{i \in \mathbb{N}; i = 1, 2, \dots, \mathbb{N}\}$ é o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas que compõem o grafo e R o conjunto com as distâncias das arestas.

A modelagem segue a seguinte função objetivo e as restrições:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j} \cdot x_{i,j}. \quad (1)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} - \sum_{j=1}^n x_{j,i} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$x_{i,j} + x_{j,i} \geq 1, \forall (i, j) \in A \quad (3)$$

$$x_{i,j} \in \mathbb{Z}_+, \forall (i, j) \in A, c_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall (i, j) \in A \quad (4)$$

A restrição (1) minimiza a distância percorrida, conseqüentemente, diminui o número de repetições do trecho do itinerário. A restrição (2) garante a continuidade do fluxo e a restrição (3), que pelo mesmo uma vez, a aresta será requerida. A restrição (4) garante que só a aresta inteira fará parte da solução como variáveis.

O problema das Pontes de Königsberg foi o primeiro Problema de Roteamento em Arcos, em inglês *Arc Routing Problems* (ARP), estudado em (PEREIRA et al. 2010).

No trabalho de Pearn e Assad (1987) eles descrevem que o Problema de Roteamento de Arco Capacitado pode ser formulado, como um problema de roteamento de veículos. Isso nos permite transformar o roteamento das arestas em problemas de roteamento de nós, e portanto, estabelece a equivalência dessas duas classes de problemas.

Existem diversas maneiras de solucionar o CARP na literatura. Em Longo et al. (2006) os autores solucionam o problema de roteamento em arcos transformando-o em um Problema de Roteamento de Veículos Capacitados, o qual foi inspirado no trabalho de (PEARNS; ASSAD,1987).

Tagmouti et al. (2007), em seu estudo sobre roteamento de arcos com custos dependentes do tempo, os autores destacam a importância de realizar serviços no momento adequado, como a manutenção de rodovias durante o inverno em cidades afetadas pela neve. Considerando a capacidade de carga dos veículos responsáveis pela remoção da neve, eles propõem transformar o Problema de Roteamento em Arcos (ARP) em um problema de roteamento de nós. Essa transformação permite resolver o problema utilizando um esquema de geração de colunas.

Em virtude dessas discussões a próxima seção será dedicada para comentar um pouco sobre o Problema de Roteamento de Veículos, em inglês *Vehicle Routing Problem* (VRP).

3.1 PROBLEMAS DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

O problema do roteamento de veículos surgiu da ideia de determinar uma rota em um grafo que passe uma única vez, e somente uma por cada vértice de um grafo, podendo repetir arestas. O problema apesar de parecer fácil de ser resolvido não é, pois não existe uma condição necessária e suficiente que garanta um percurso abrangente em relação aos vértices, um percurso *hamiltoniano*. Alguns autores, inclusive, duvidam da possibilidade de que alguém encontre uma condição BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ (2009).

O problema apresentado nesta seção que ficou muito conhecido com o nome de Caixeiro Viajante pode ser aplicado aos diversos tipos de situação reais, como coleta de lixo hospitalar de um município, determinar a rota de entrega dos produtos

de uma empresa, a entrega de carta, o itinerário de um ônibus escolar, entre outros, podemos ver nas citações seguintes.

Orloff (1974) define um tipo de problema, chamado *General Routing Problem*, que traduzindo quer dizer Problema Geral de Roteamento, fornecendo um algoritmo para sua solução. O Problema do Vendedor Ambulante Clássico e o Problema do Carteiro Chinês são mostrados, como casos limitantes especiais do Problema Geral de Roteamento. O algoritmo fornece uma abordagem unificada para os problemas de roteamento orientados a nós e arcos e explora propriedades especiais da maioria das redes de transporte reais, como a dispersão da matriz de adjacência associada. Para o problema de roteamento orientado por nó, essa abordagem tende a produzir uma grande redução no tamanho efetivo do problema.

Turner et al. (1974) examinou o problema e desenvolveu uma formulação padrão e apresentou algumas novas abordagens do Problema de Roteamento de Transporte, em que um gerente ou analista deverá programar uma frota existente de veículos, cada um com uma restrição de capacidade, para visitar um conjunto de paradas ou destinos e entregar ou pegar bens ou serviços em cada parada, de modo que um e apenas um veículo visite cada parada. O problema consiste em atribuir a esses veículos às paradas, de modo a minimizar o custo total, que é assumido como sendo diretamente proporcional à distância total percorrida.

Lenstra e Rinnooy Kan (1981) exploram a complexidade computacional dos problemas do roteamento e agendamento dos veículos (VRSP). Os autores investigam várias variantes do VRSP, que envolvem determinar as rotas ótimas para uma frota de veículos que deverá atender um conjunto de clientes com demandas específicas, frequentemente sujeitas às restrições da capacidade e do tempo. O artigo de Lenstra e Rinnooy Kan é fundamental no campo da pesquisa operacional e da otimização, fornecendo uma base teórica para a compreensão da dificuldade dos problemas do roteamento e dos agendamentos dos veículos. A análise de complexidade apresentada pelos autores tem orientado o desenvolvimento dos métodos e dos algoritmos para lidar com esses problemas nas décadas seguintes.

Laporte e Nobert (1987) descrevem o problema de projetar rotas de entrega ideais de um ou mais depósitos, para um conjunto de pontos geograficamente dispersos, das cidades ou dos clientes. As aplicações práticas do VRP são numerosas e abrangem muitas áreas de atividade. O VRP recebeu a atenção de muitos

pesquisadores de operações nas últimas três décadas. Esse interesse não é apenas pela importância prática do problema, mas também pela sua dificuldade intrínseca. Os maiores problemas de qualquer complexidade que foram resolvidos por algoritmos exatos continham aproximadamente 30 pontos. O VRP constitui uma generalização do problema do caixeiro viajante (PCV) que consiste em determinar o circuito ou ciclo mais curto que passa por cada um dos n pontos apenas uma vez. O PCV e o VRP são ambos NP-hard. No entanto, do ponto de vista prático, os VRPs são em geral muito mais difíceis de resolver, do que os PCVs do mesmo tamanho. A solução do PCV na maioria das situações foi obtida usando os métodos exatos; a maioria dos algoritmos para o VRP são heurísticas, refletindo a dificuldade relativa do problema. O artigo apresenta um levantamento de algoritmos exatos para o VRP, enfatizando os resultados recentes.

O artigo de Reinelt (1991) contém a descrição de uma biblioteca dos problemas do caixeiro viajante (TSPLIB), destinada a fornecer aos pesquisadores um amplo conjunto de problemas de teste de várias fontes e com várias propriedades. Para cada problema, é fornecida uma breve descrição juntamente com limites inferiores e superiores conhecidos. Também são fornecidas várias referências aos testes computacionais em alguns dos problemas.

Dror et al. (1994) consideram um relaxamento do problema clássico de roteamento de veículos (VRP), no qual Entregas Fracionadas são permitidas. Primeiro formularam como um problema de programação linear inteiro. Várias novas classes das restrições válidas são derivadas e uma hierarquia entre elas é estabelecida. Um algoritmo de ramificação e limite de relaxamento de restrição para o problema é então descrito. Os resultados computacionais indicam que, usando uma combinação apropriada de restrições, o intervalo entre os limites inferior e superior na raiz da árvore de pesquisa pode ser reduzido consideravelmente.

Teodorović e Pavković (1996) consideram o problema do roteamento dos veículos quando a demanda nos nós é incerta. As quantidades a serem coletadas nos nós são assumidas como sendo apenas aproximadamente conhecidas. Uma rede com um depósito a partir do qual os veículos partem e para onde retornam após a conclusão do serviço é considerada. O artigo desenvolve um modelo para projetar roteamento dos veículos, quando a demanda nos nós é incerta.

Mazzeo e Loiseau (2004) apresentam uma abordagem baseada em algoritmos da colônia de formigas para resolver o problema de roteamento dos veículos com capacidade (CVRP). No CVRP, a tarefa é encontrar rotas eficientes para uma frota de veículos que devam atender a um conjunto de clientes com demandas específicas, sem exceder a capacidade da carga de cada veículo. O objetivo é minimizar a distância total percorrida ou o custo total das rotas. Os autores realizam uma série de experimentos para avaliar a performance do algoritmo em diferentes instâncias do problema CVRP, demonstrando que a abordagem proposta pode produzir soluções competitivas em termos de qualidade e tempo de execução, quando comparada aos outros métodos.

Yu et al. (2010) estudou o *problema de roteamento de localização*. Foi proposta uma heurística baseada em “Simulated Annealing” (SA) para resolver o problema de localização e roteamento dos veículos com capacidade (CLRP). O CLRP é uma extensão do problema de roteamento dos veículos (VRP) que combinam decisões da localização dos depósitos com o roteamento dos veículos que devam atender os clientes com demandas específicas. O objetivo é minimizar o custo total, que incluem os custos da abertura e da operação dos depósitos, bem como os custos do transporte. O artigo contribui com uma abordagem eficiente e robusta para resolver o CLRP, utilizando a heurística de “Simulated Annealing”. Esta abordagem se mostra promissora na obtenção das soluções de alta qualidade, combinando decisões de localização dos depósitos e do roteamento dos veículos de maneira integrada e otimizada.

Yang e Ke (2019) explora o problema do roteamento dos veículos capacitados (CVRP). Este artigo explora um algoritmo heurístico, recentemente, proposto chamado *Algoritmo de Fireworks* (FWA). Os autores realizam uma série de testes usando instâncias de *benchmark* para avaliar a performance do algoritmo aprimorado. Os resultados demonstram que o algoritmo proposto supera o FWA original e outros algoritmos de referência, produzindo soluções de alta qualidade em tempos de execução competitivos.

Foi realizada uma breve revisão dos trabalhos relacionados ao *Problema de Roteamento de Veículos*, uma vez que, conforme mencionado no início desta seção por Pearn e Assad (1987), o Problema de Roteamento de Arco Capacitado pode ser formulado como um problema de roteamento dos veículos. Isso permite transformar o

roteamento das arestas em problemas do roteamento de nós, estabelecendo, assim, a equivalência entre essas duas classes de problemas.

3.1.1 Minimizar Distância e a Quantidade dos Veículos em Roteamento de Veículos

Nesta subseção é feita uma revisão dos problemas de minimização da distância e da quantidade de veículos em roteamento dos veículos, com o intuito de sedimentar o objetivo desta tese que devido aos métodos das soluções primeiro minimiza a quantidade dos veículos e depois a distância percorrida por eles.

Para começar, no trabalho de Harche e Raghavan (1994) considera-se o problema de despachar o número mínimo de veículos de um depósito central para fazer as entregas a um conjunto de clientes com demandas conhecidas. O objetivo é minimizar a distância total percorrida, sujeita aos requisitos da capacidade do veículo. Os autores apresentam um algoritmo heurístico para resolver este problema. O algoritmo é baseado em procedimentos generalizados da pesquisa de troca das arestas e do relaxamento dos requisitos da capacidade. Os resultados computacionais são baseados em problemas de teste padrão com até 249 clientes, indicam que a heurística se compara favoravelmente com heurísticas conhecidas em termos de qualidade da solução.

Prins (2002) aborda o problema do roteamento dos veículos que consistem em calcular um conjunto das rotas de custo total mínimo para entregar quantidades fixas das mercadorias aos clientes com uma frota de veículos idênticos. Este artigo trabalha o caso mais realista, com um número fixo dos veículos de cada tipo e a possibilidade de cada veículo realizar várias viagens. Os autores descrevem várias heurísticas, incluindo uma muito eficiente que, de forma progressiva, combina pequenas rotas iniciais, garantindo que possam ser realizadas pela frota. Esta heurística busca minimizar o número dos veículos necessários como objetivo secundário. Ela supera as heurísticas clássicas do VRP, pode lidar facilmente com várias restrições e oferece soluções iniciais muito boas para o método de busca tabu. É apresentado o caso real aplicado com os dados de um fabricante francês de móveis com 775 lojas de destino.

Para finalizar a subseção, destaca-se o trabalho de Bräysy et al. (2001), que propõem uma extensão do VRP com restrições da capacidade. Os autores

interpretam diretamente o VRPTW como um problema multiobjetivo, no qual as duas dimensões objetivas são o número dos veículos e o do custo total (distância). Um resultado da pesquisa é que o algoritmo genético de otimização multiobjetivo retorna a um conjunto das soluções que consideram, de maneira razoável, essas duas dimensões.

3.2 PROBLEMAS DO ROTEAMENTO EM ARCOS

O objetivo desta seção é mostrar os estudos do problema de roteirização em arcos, que se diferencia dos problemas do roteamento dos veículos, pois os atendimentos ou as tarefas a serem executadas ocorrem ao longo das arestas.

Minieka (1979) examina as técnicas de solução disponíveis para o problema do carteiro chinês, para as redes, totalmente, não direcionadas (quando todas as ruas são de mão dupla) e para as redes, totalmente, direcionadas (quando todas as ruas são ruas de sentido único).

Mendonça et al. (2017) o objetivo do trabalho é apresentar e implementar métodos para resolver o problema da minimização das rotas, juntamente com os instrumentos computacionais necessários para tal. Para contextualizar o problema, utilizou-se o percurso que um carteiro realiza em uma cidade do Paraná. Inicialmente, foi realizado um estudo sobre teoria dos grafos, o Problema do Carteiro Chinês (PCC) e os conceitos básicos de programação linear. No trabalho, foram analisados os algoritmos de Dijkstra e Floyd, bem como os algoritmos do roteamento utilizando programação linear e o algoritmo de Hierholzer. Os softwares Excel e Lingo foram empregados para a implementação desses algoritmos. Constatou-se que o uso dessas tecnologias facilitou a implementação e permitiu otimizar a rota do carteiro.

O artigo de Golden e Wong (1981) aborda os problemas do roteamento de arcos capacitados (CARP), uma classe de problemas de otimização combinatória relacionados ao roteamento dos veículos. Os autores revisaram os métodos heurísticos e exatos disponíveis na época para lidar com os CARPs, incluindo técnicas baseadas em programação linear, heurísticas construtivas e algoritmos de busca local, utilizados para encontrar soluções aproximadas ou ótimas para diferentes instâncias dos problemas. Este trabalho estabeleceu uma base sólida para as pesquisas subsequentes em CARPs, influenciando o desenvolvimento dos novos

modelos matemáticos, as técnicas de solução e aplicações práticas na área de otimização combinatória e logística.

Campos et al. (1983) mostraram os estudos para resolução do problema do carteiro rural direcionado. Ele é um caso geral do Problema do carteiro chinês, em que um subconjunto do conjunto de arcos de um determinado grafo direcionado é 'requerido' para ser percorrido a um custo mínimo. Se este subconjunto não formar um gráfico conectado fracamente, mas formar um número de componentes desconectados, e também, é uma generalização do Problema do vendedor ambulante. O artigo apresenta um algoritmo *branch and bound* para a solução exata do DRPP baseado em limites calculados a partir da Relaxação Lagrangeana (com sub-problemas de arborescência de menor abrangência) e na formação de alguns dos nós da árvore pela solução dos problemas de fluxo de custo mínimo. Os resultados computacionais são dados para grafos de até 80 vértices, 179 arcos e 71 arcos 'requeridos'.

Assad et al. (1987) investigaram o comportamento de um limite inferior baseado em correspondência para o problema do carteiro chinês capacitado (CCPP) e introduziram uma nova técnica de delimitação. Em seguida, recorreram às classes especiais do CCPP que podem ser resolvidas diretamente quando as restrições adequadas se aplicam aos dados do problema e à estrutura da rede.

E. Benavent, V. Campos e A. Corberan (1992) consideraram uma frota dos veículos, baseada em um vértice especificado (o depósito) e com uma capacidade Q , deve atender a um subconjunto das arestas de um grafo, minimizando o custo total e garantindo que a carga atribuída a cada veículo não exceda sua capacidade. Novos limites inferiores foram desenvolvidos para este problema, produzindo resultados pelo menos tão bons quanto os já existentes. Três dos limites inferiores propostos são obtidos a partir da resolução de um problema de pareamento perfeito de custo mínimo. O quarto limite leva em consideração a capacidade do veículo que é calculado usando um algoritmo de programação dinâmica. Resultados computacionais, nos quais esses limites são comparados em um conjunto dos problemas de teste, estão incluídos no trabalho destes autores.

Belenguer e Benavent (1998), estudaram o problema do roteamento de arco capacitado associado ao poliedro, em que um número máximo de veículos k está disponível. O artigo mostra que um subconjunto das facetas do poliedro do CARP

depende apenas das demandas das arestas necessárias e pode ser derivado do estudo do *Generalized Assignment Problem* (GAP), na tradução significa Problema de designação generalizada. As condições para uma classe maior de desigualdades válidas para definir as facetas do poliedro do CARP, ainda dependem das propriedades do poliedro do GAP. Foi introduzido o caso especial do CARP, em que todas as arestas necessárias têm demanda unitária para evitar o problema numérico representado pelo GAP. Isso permitiu fazer um estudo poliédrico em que as condições para que as desigualdades sejam induzidas pelas facetas, sejam facilmente verificáveis. Os autores mostram as condições necessárias e suficientes, para que uma variedade das desigualdades válidas para o CARP, seja uma faceta indutora do problema do roteamento de arco capacitado com demanda unitária. A descrição parcial resultante do poliedro foi usada para desenvolver um algoritmo do plano de corte para o problema do roteamento de arco capacitado. O limite inferior fornecido por este algoritmo superou todos os limites inferiores existentes para o CARP em um conjunto de 34 instâncias retiradas da literatura.

Ghiani e Laporte (2003) retrataram o problema do carteiro rural não dirigido. É um problema linear binário utilizando novas relações de dominância. As propriedades poliedrais são investigadas e um algoritmo de *branch-and-cut* foi apresentado. Os resultados computacionais extensivos indicam que o algoritmo é capaz de resolver instâncias muito maiores do que as relatadas anteriormente.

O artigo Lacomme et al. (2005) investiga a aplicação dos algoritmos evolutivos para resolver problemas do roteamento dos arcos periódicos (PARPs). Esses problemas envolvem a determinação de rotas ótimas para veículos que devem realizar serviços ao longo dos arcos de uma rede em intervalos regulares ao longo de um horizonte de planejamento. Para avaliar a eficácia do algoritmo, os autores conduzem uma série de experimentos computacionais utilizando *benchmarks* padrão da literatura. Eles comparam o desempenho do algoritmo evolutivo com outras abordagens existentes, demonstrando que o algoritmo proposto oferece soluções de alta qualidade em tempos de execução competitivos. Os resultados mostram que o algoritmo evolutivo é capaz de encontrar soluções que minimizam os custos operacionais e atendem às exigências periódicas de serviço.

Em Ghiani et al. (2005) o problema periódico do carteiro rural (PRPP) é estudado. Este problema é uma variante do problema clássico do carteiro rural, cujas

aplicações surgem na coleta do lixo e na limpeza das ruas. No PRPP, cada arco ou aresta necessária de um grafo deve ser visitado em um número determinado de vezes, ao longo de um período de planejamento de m dias, de tal forma que os dias de serviço sejam predefinidos. O PRPP equivale a selecionar uma combinação dos dias de serviço, para cada arco ou aresta necessária e determinar o passeio do carteiro para cada dia do período do planejamento. O objetivo é minimizar a distância total percorrida. Neste artigo é apresentada uma heurística simples, mas eficaz para o PRPP não direcionado. Resultados computacionais indicam que o algoritmo é capaz de fornecer soluções de alta qualidade. Este é o primeiro artigo metodológico dedicado a um problema periódico do roteamento de arco.

Kansou e Yassine (2009) apresentam uma nova abordagem do *Ant Colony System* (ACS) - Colônia de Formigas, para o PCARP em uma rede mista. No problema CARP, o objetivo é encontrar rotas a partir do depósito, de modo que cada arco / aresta necessária (chamada tarefa) seja atendida, que as restrições das capacidades sejam satisfeitas e que o custo total da viagem seja minimizado. O PCARP estende o problema clássico do CARP para um horizonte de planejamento de vários dias. Cada tarefa requer um certo número das visitas dentro desse horizonte de tempo. Assim, o objetivo do problema é escolher os dias de visita para cada tarefa e resolver um CARP para cada dia, a fim de encontrar rotas eficientes ao longo de todo o horizonte. Os autores sugerem uma nova técnica para resolver o problema do PCARP. Foi combinado o algoritmo ACS com uma heurística para inserção das tarefas em uma solução atual. Assim, o ACS é usado para otimizar a ordem das tarefas para inserção e a heurística é usada para inseri-las. Os resultados dos experimentos computacionais realizados sobre o problema retirado da literatura indicam que a abordagem proposta supera os algoritmos existentes na maioria dos casos. Uma comparação com os melhores *algoritmo Memetic* é apresentada e os resultados comprovam a robustez, a rapidez e o desempenho do método.

Para Monroy et al. (2013) o objetivo é apresentar o problema do roteamento periódico de arco capacitado com serviços irregulares. Algumas aplicações podem ser encontradas em operações da manutenção das estradas e da vigilância da rede rodoviária. O problema consiste em determinar um conjunto de rotas para cobrir uma determinada rede ao longo de um horizonte de tempo. As estradas devem ser atendidas várias vezes em sub-períodos, ao longo do horizonte de tempo, de acordo

com uma hierarquia das classes de arco. Os autores apresentaram um modelo matemático e uma abordagem de solução heurística.

O trabalho de Zhang et al. (2017), apresenta um *algoritmo Memetic* com decomposição de rotas para resolver o problema periódico de roteamento de arcos capacitados (PCARP). A proposta central do artigo é um *algoritmo Memetic*, que combina algoritmos genéticos com técnicas de busca local. O algoritmo aproveita a diversificação proporcionada pelos operadores genéticos e a intensificação da busca local para explorar eficientemente o espaço de soluções. Uma característica inovadora do algoritmo é a decomposição de rotas, que divide as rotas em sub-rotas menores e mais manejáveis. Isso facilita a busca local e a recombinação de soluções, melhorando a eficiência do algoritmo na exploração do espaço de soluções. O algoritmo emprega operadores genéticos, como crossover e mutação, adaptados ao contexto do PCARP. Também utiliza operadores de busca local específicos para refinar as soluções, como a realocação de arcos e a troca de sub-rotas. Os autores realizam uma série de experimentos computacionais em instâncias de benchmark para avaliar o desempenho do algoritmo. Os resultados demonstram que o *algoritmo Memetic* com decomposição de rotas produz soluções de alta qualidade e é competitivo com outros métodos de referência na literatura. O artigo conclui que a abordagem proposta é eficaz na resolução do PCARP, oferecendo uma nova estratégia para abordar problemas complexos de roteamento de veículos com múltiplos períodos. A combinação de *algoritmo Memetic* com decomposição de rotas é destacada como uma contribuição significativa para a pesquisa em otimização combinatória.

A eliminação da poeira do transporte das estradas em minas a céu aberto é feita pulverizando periodicamente a água com caminhão-pipa. O objetivo do trabalho de Riquelme-Rodríguez et al. (2016) é apresentar e comparar dois métodos para a localização dos depósitos de água ao longo da rede rodoviária, de modo, que os custos de penalidade pela falta de umidade nas estradas e os custos do roteamento sejam minimizados. Como as demandas estão localizadas nos arcos da rede e os arcos requerem serviço mais de uma vez em um horizonte de tempo, esse problema pertence ao domínio do roteamento de arco capacitado periódico. Os autores compararam dois métodos para encontrar o local inicial do depósito. Em seguida, usaram um algoritmo de troca para modificar a localização inicial e um algoritmo de

busca de vizinhança adaptável para modificar o roteamento inicial dos veículos. Esse método é o primeiro usado para localização dos depósitos em problemas de roteamento periódico de arcos.

Thomaz et al. (2018) apresentaram o problema periódico do roteamento de arco capacitado com janela de tempo, para o caso não direcionado; eles apresentam um modelo matemático que é testado em um conjunto de instâncias geradas. Na modelagem, considerou-se que, durante as rotas, os veículos podem passar ou executar os serviços nas ruas mais lentamente, ou até mesmo estacionar e aguardar a abertura da próxima janela, deixando o problema menos restritivo. Para cada período, os arcos podem ser percorridos no máximo uma vez pelo mesmo veículo. Um algoritmo híbrido (HA) com um modelo matemático alternativo é usado para encontrar uma solução inicial factível para o problema original. Os resultados computacionais mostram que essa abordagem é eficiente em instâncias com até 20 nós.

Batista e Scarpin (2019) descrevem uma variante do Problema de Roteamento de Arco Capacitado Periódico para inspeções em uma rede ferroviária. As inspeções são realizadas por veículos ao longo de um horizonte temporal, no qual alguns trechos necessitam de avaliação mais frequente devido ao seu uso. Cada veículo pode avaliar um trecho por dia sem estar vinculado a um depósito; a cada dia, o turno pode começar e terminar em locais diferentes. Isso caracteriza o problema como o Problema de Roteamento de Arco Capacitado Periódico com Movimentos Contínuos, no qual primeiramente se minimizam os atrasos nos atendimentos e, em segundo lugar, os custos de deslocamento. Os autores apresentam um modelo matemático e um algoritmo de Otimização por Colônia de Formigas para resolver o problema. Os resultados numéricos são promissores, especialmente para situações críticas, em que as necessidades dos arcos estão próximas da capacidade total dos veículos.

Fechando esta seção, destaca-se o trabalho de Porumbel et al. (2024), que aborda o Problema de Roteamento de Arcos Capacitado (CARP) biobjetivo, considerando dois níveis de interpretação da solução: implícitas e explícitas. O CARP biobjetivo busca atender às demandas de um conjunto das arestas necessárias utilizando uma frota de veículos com capacidade limitada, minimizando a distância total percorrida e o comprimento da rota mais longa. Qualquer permutação das arestas

necessárias constitui uma solução implícita de CARP. O decodificador constrói todas as soluções explícitas não dominadas que atendem às arestas na ordem indicada pela permutação. Para obter resultados competitivos no CARP, é essencial reforçar o decodificador com um operador de busca local que atua nas rotas explícitas, podendo alterar a ordem de serviço. Em nove instâncias, o algoritmo resultante conseguiu encontrar um novo limite superior de custo total, melhorando as melhores soluções relatadas na literatura de CARP mono-objetivo. Isso demonstra que algumas das ideias propostas também podem ser úteis na otimização de objetivo único, com o segundo objetivo servindo como um guia para o processo de busca mono-objetivo.

3.2.1 Minimizar Distância e a Quantidade dos Veículos em Roteamento em Arcos

O trabalho de Eglese (1994) descreve o tratamento de estradas que podem ficar escorregadias devido à geada ou à neve, realizado pelas autoridades locais através da aplicação de um agente descongelante, geralmente é o sal. Um veículo de limpeza de inverno percorre a estrada, espalhando sal em ambos os lados. A pesquisa apresenta a formulação de um modelo que considera múltiplos locais de depósito, capacidades limitadas de veículos e diferentes prioridades de estrada (algumas devem ser tratadas dentro de duas horas, outras dentro de quatro). A função objetivo a ser otimizada envolve tanto a distância total percorrida quanto o número e a capacidade dos veículos. O método de solução é um algoritmo heurístico, que inicialmente resolve um Problema do Carteiro Chinês irrestrito para a rede e, em seguida, aplica *Simulated Annealing* ao problema restrito.

O artigo de Tirkolaee et al. (2019) apresenta um novo modelo matemático para o problema robusto do roteamento de arcos capacitado periódico (PCARP), levando-se em consideração múltiplas viagens e o tempo de trabalho dos motoristas e equipes, para estudar a incerteza da demanda. O modelo visa minimizar a distância total percorrida e o custo total de uso dos veículos durante o período de planejamento. Um algoritmo de *Simulated Annealing* híbrido aprimorado (SA), baseado em um algoritmo heurístico e uma equação de resfriamento eficiente é desenvolvido para resolver o problema. Foi demonstrado que o desempenho do algoritmo é aceitável em

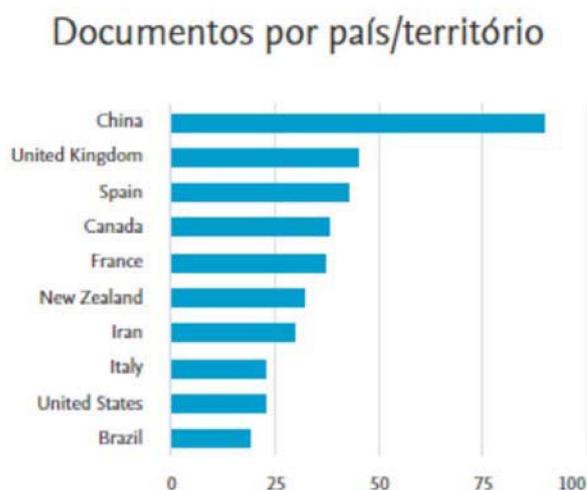
comparação com métodos exatos, embora os testes tenham sido realizados com instâncias de pequeno porte.

Encerrando esta seção, o trabalho de Silva et al. (2024) propõe um algoritmo para o problema de roteamento em arcos com restrições de capacidade e periodicidade com múltiplas tarefas, focando na aplicação prática no monitoramento de usinas hidrelétricas. O método desenvolvido visa otimizar as rotas e a quantidade dos leituristas que realizam inspeções periódicas nas usinas, garantindo eficiência e cumprimento das restrições operacionais. O estudo abrange a formulação matemática do problema, a descrição do algoritmo de solução e a análise dos resultados em estudos de caso, demonstrando melhorias na gestão das rotas e na operacionalidade das inspeções.

3.3 BIBLIOMETRIA

Na análise bibliométrica conduzida no site Scopus se utilizou a maior base de dados de resumos e citações de literatura revisada por pares, que possuem ferramentas bibliométricas para acompanhar, analisar e visualizar pesquisas. A pesquisa foi realizada utilizando a palavra-chave "*Arc Routing Problem*", resultando em um total de 1598 artigos relacionados. Na análise dos dados se observou que a China é o país com o maior número de publicações sobre o tema "problema de roteamento em arcos", conforme ilustrado na Figura 6.

FIGURA 6 - PUBLICAÇÃO POR PAÍSES



FONTE: Site Scopus (2024)

O tipo de publicação preferida para divulgar a pesquisa é o artigo, o qual teve um pico de publicação entre os anos de 2015 e 2019. Isto demonstra o interesse sobre o assunto entre os estudiosos, como pode ser observado no gráfico da Figura 7.

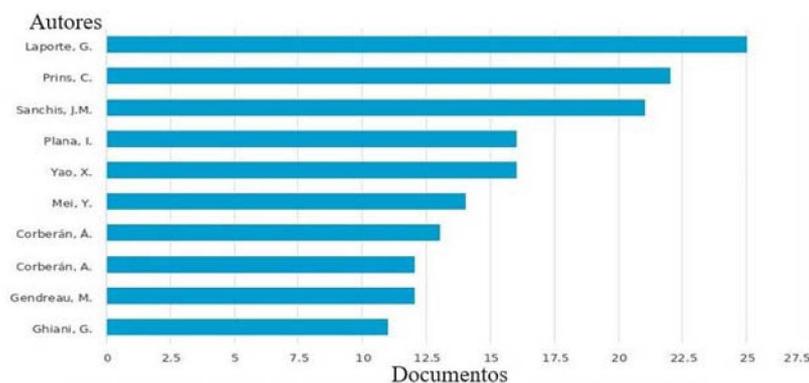
FIGURA 7 - PUBLICAÇÃO POR ANO



FONTE: Site Scopus (2024)

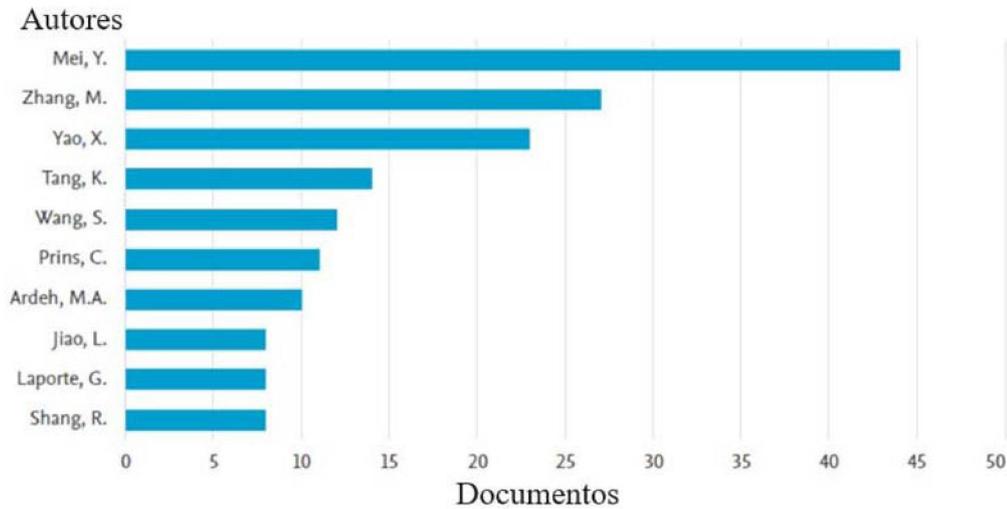
A Figura 8 exibe o gráfico com os maiores autores do assunto de ARP. Alguns destes autores como Prins, que junto com Chu e Labadi escreveram o artigo de 2005 que serviu de base para Santos (2016), este artigo foi o primeiro em relação ao de Santos et al. (2016) que seria o artigo secundário, ou seja, que derivou de Lacomme et al. (2005). A evolução científica pode ser comparada entre a Figura 8 de 2019 com a Figura 9 de 2024. E se observa que em um curto intervalo de tempo Mei, Y e Zhang e Yao, X produziram muitos artigos, fazendo assim com que o topo dos autores sobre as pesquisas "Arc Routing Problem", fosse modificado.

FIGURA 8 – PUBLICAÇÃO POR AUTOR



FONTE: Site Scopus (2019)

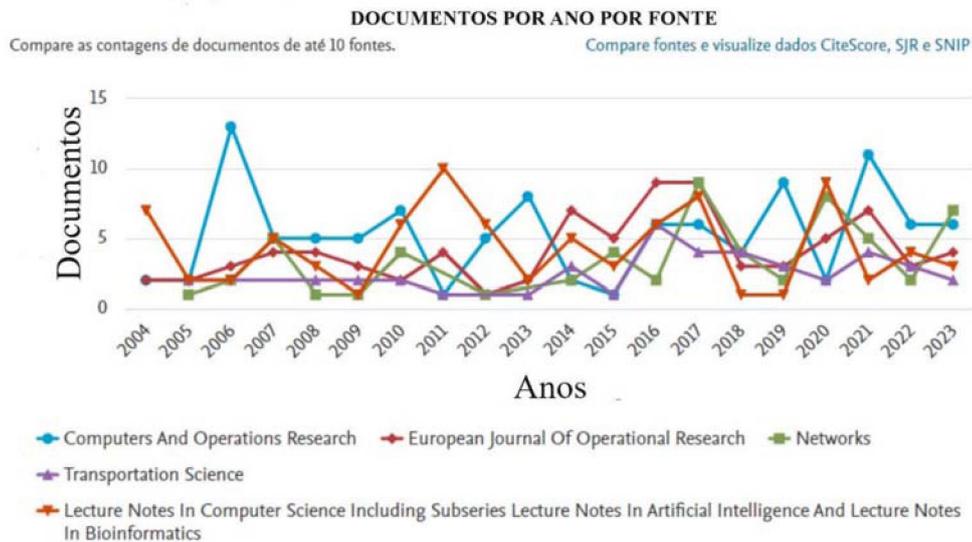
FIGURA 9 - PUBLICAÇÃO POR AUTOR ATUAL



FONTE: Site Scopus (2024)

A Figura 10 exibe um ranque com as revistas que tiveram mais publicações sobre o assunto do ARP nos últimos 20 anos. Destaca-se a revista *Journal International An Networks* que foi a pioneira no assunto. Sendo a primeira a publicar artigo sobre o problema do caixeiro viajante e do carteiro chinês, conforme mostrado em Orloff (1974).

FIGURA 10 – PUBLICAÇÕES POR REVISTA



FONTE: Site Scopus (2024)

3.4 MODELOS CORRELATOS

Entre os modelos matemáticos da teoria do PCARP, como já foram mencionados, serviram de inspiração para este trabalho, destacam-se três de grande importância: Chu et al. (2005), Santos et al. (2016) e Tirkolaee et al. (2018). Ao longo desta seção, cada um desses modelos e suas aplicações serão apresentados.

3.4.1 Modelo de Chu, Labadi e Prins (2005)

O modelo matemático de Chu, Labadi e Prins (2005) é definido em um grafo $G(X, E)$ não direcionado, em que $X = \{i \in \mathbb{N}; i = 1, 2, \dots, N\}$ é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas que compõem o grafo. Vale ressaltar que os autores trabalham com um problema que está inserido num contexto de coleta de lixo, sempre que for enunciado que a aresta está sendo servida é o mesmo que dizer que está coletando o lixo da aresta. Os índices, conjuntos, parâmetros e variáveis que serão utilizados no modelo matemático são apresentados na Tabela 7.

TABELA 7 - ÍNDICES, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (CHU *et al*, 2005)

Simbologia	Descrição	
Índices	i, j, r, s	Nós;
	P	Dia do período;
	v	Veículo;
	k	Combinação permitida;
Conjuntos	P	Conjunto de dias;
	V	Conjunto dos veículos;
	Q	Subconjuntos de vértices que formam os subciclos em relação ao dia ;
Parâmetros	$a_{k,p}$	Assume valor 1, se o dia d pertence a combinação k ou zero caso contrário (elemento de uma matriz bidimensional);
	$c_{i,j}$	Distância entre os nós i e j (elemento de uma matriz bidimensional);
	$Q_{i,j,k,p}$	Quantidade lixo em uma aresta (i, j) para um certo dia p em relação a uma combinação k .
	W	Capacidade de tempo de trabalho do veículo v (elemento de um vetor);
Variáveis	$x_{i,j,v,p}$	Assume valor 1 se a aresta (i, j) é atravessada de i para j pelo veículo v no dia p ;
	$l_{i,j,v,k,p}$	Assume valor 1, se tarefa (i, j) é servida de i para j pelo veículo v no dia p da combinação k ;
	$z_{i,j,k}$	Assume valor 1 se a tarefa executada na aresta (i, j) usa a combinação k .

FONTE: O autor (2024)

Em seguida, o PCARP pode ser formulado como um problema de Programação Linear Inteira (ILP), representado nas expressões (5) a (13), no qual $E_R(S)$ denota o conjunto das arestas necessárias, cujos dois nós finais pertencem a um determinado subconjunto de nós S (subciclo).

A função objetivo (5) é dada por:

$$z = \text{Min} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{v=1}^V \sum_{p=1}^P c_{i,j} (x_{i,j,v,p} + x_{j,i,v,p}) \quad (5)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{k \in \text{comb}(i,j)} z_{i,j,k} = 1, \forall (i,j) \in R; \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in R} x_{i,j,v,p} = \sum_{(j,i) \in R} x_{j,i,v,p}, \forall (i,j) \in R, \forall v = 1, \dots, V, \forall p = 1, \dots, P; \quad (7)$$

$$x_{i,j,v,p} \geq \sum_{k \in \text{comb}(i,j)} l_{i,j,v,k,p}, \forall (i,j) \in R, \forall k \in \text{comb}(i,j), \forall p = 1, \dots, P; \quad (8)$$

$$x_{j,i,v,p} \geq \sum_{k \in \text{comb}(i,j)} l_{j,i,v,k,p}, \forall (i,j) \in R, \forall k \in \text{comb}(i,j), \forall p = 1, \dots, P; \quad (9)$$

$$\sum_{v=1}^V (l_{i,j,v,k,p} + l_{j,i,v,k,p}) = a_{k,p} \cdot z_{i,j,k}, \forall (i,j) \in R, \forall k \in \text{comb}(i,j), \forall p = 1, \dots, P; \quad (10)$$

$$\sum_{(i,j) \in R} \sum_{k \in \text{comb}(i,j)} Q_{i,j,k,p} \cdot (l_{i,j,v,k,p} + l_{j,i,v,k,p}) \leq W, \forall v = 1, \dots, V, \forall p = 1, \dots, P; \quad (11)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{i,j,v,p} \geq l_{r,s,v,k,p} + l_{s,r,v,k,p}, \forall S \subseteq \{2, \dots, n\}, \forall (r,s) \in E_R(S), \quad (12)$$

$$\forall p = 1, \dots, P, \forall k \in \text{comb}(r,s), \forall v = 1, \dots, V;$$

$$l_{i,j,v,k,p}, l_{j,i,v,k,p}, x_{i,j,v,p}, x_{j,i,v,p}, z_{i,j,k} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in R, \forall v = 1, \dots, V, \forall p = 1, \dots, P \quad (13)$$

A função objetivo dada pela equação (5) minimiza o custo total de deslocamento dos veículos. A restrição (6) garante que uma combinação, das combinações possíveis devem ser atribuídas a cada aresta. A restrição (7) assegura a continuidade de fluxo. As restrições (8) e (9) garantem que uma tarefa não pode ser atendida, se a aresta não for percorrida. Na restrição (10), uma tarefa é atendida em um dia p se este dia pertence à combinação selecionada para a tarefa. Além disso, a tarefa é servida por um único veículo em um único sentido. A restrição (11) garante

que a capacidade do veículo é respeitada para cada dia p . A restrição (12) é responsável pela proibição da geração de subciclos isolados. Todas as variáveis são binárias, conforme mostram as condições em (13).

3.4.2 Modelo de Santos, Scarpin e Silva (2016).

A proposta de modelagem está inspirada num problema de monitoramento de instrumentos de auscultação instalados em barragem. Em geral, as barragens seguem um rigoroso plano de monitoramento, do qual os leiturista devem periodicamente percorrer as galerias para coletar os dados dos instrumentos. De forma a estabelecer um critério da padronização das leituras, otimizando o percurso buscou-se por uma formulação de um modelo matemático de programação linear proposto por SANTOS et al. (2016).

Os índices, conjuntos, parâmetros e variáveis que serão utilizados no modelo matemático são apresentados na Tabela 8. Considere um grafo não direcionado, em que $X = \{i \in \mathbb{N}; i = 1, 2, \dots, N\}$ é o conjunto de vértices e E o conjunto das arestas que compõem o grafo.

TABELA 8 - ÍNDICES, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (SANTOS *et al*, 2016)

Simbologia	Descrição
Índices	i, j, r, s Nós;
	d Dia do período;
	k Tarefa;
	v Veículo;
	ψ Combinação permitida;
Conjuntos	D Conjunto de dias;
	N_v Conjunto de vértice do grafo;
	NV Conjunto de veículos;
	N_{TA} Conjunto de tarefas distintas;
	ψ Conjunto de combinações relativo ao instrumento k ;
	Q_d Subconjuntos de vértices que formam os subciclos em relação a tarefa k em relação ao dia d ;
Parâmetros	$a_{d,\psi,k}$ Assume valor 1, se o dia d pertence a combinação ψ em relação ao instrumento k ou zero caso contrário (elemento de uma matriz tridimensional);
	$d_{i,j}$ Distância entre os nós i e j (elemento de uma matriz bidimensional);

	$a_{k,p}$ Número de aparelho existente para coletar os dados do instrumento do tipo k no dia d (elemento de uma matriz bidimensional); $p_{k,v}$ Peso do instrumento k associado ao veículo v (cada tarefa que o leitorista pode executar é atribuído peso 1, caso contrário zero - elemento de uma matriz bidimensional); cl_v Capacidade máxima de carregamento de aparelho pelo veículo v (elemento de um vetor); γ_k Tempo estimado para coletar os dados do instrumento do tipo k (elemento de um vetor); $q_{k,i,j}$ Quantidade de instrumentos do tipo k instalados na aresta (i, j) (elemento de uma matriz tridimensional); vm_v Velocidade média de caminhada do veículo v (elemento de um vetor); $ E $ número de aresta que compõe o grafo; w_v Capacidade de tempo de trabalho do veículo v (elemento de um vetor);
Variáveis	$m_{i,j,\psi,k}$ Assume valor 1 se aresta (i, j) é escolhida na combinação ψ em relação ao instrumento k , caso contrário zero; $w_{i,j,d,k}$ Assume valor 1 se aresta (i, j) é visitada no dia d em relação ao instrumento k ; $l_{i,j,v,k,d}$ Assume valor 1 se a aresta (i, j) é atendida no dia d pelo veículo v para atender a tarefa k , caso contrário zero; $z_{v,d,k}$ Assume valor 1 se o aparelho k é utilizado pelo veículo v no dia d , caso contrário zero; $x_{i,j,v,d}$ Assume valor 1 se a aresta (i, j) é percorrida no dia d pelo veículo v ou zero caso contrário.

FONTE: O autor (2024)

A função objetivo (14) é dada por:

$$z = \min \sum_{i=1}^{N_V} \sum_{j=1}^{N_V} \sum_{v=1}^{N_V} \sum_{d=1}^D d_{i,j} \cdot x_{i,j,v,d} \quad (14)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{\psi=0}^{n_{comb_k}} (m_{i,j,\psi,k} + m_{j,i,\psi,k}) = 1, \forall (i, j) \in R_k, k = 1, \dots, N_{TA} \quad (15)$$

$$w_{i,j,d,k} = \sum_{\psi=0}^{n_{comb_k}} m_{i,j,\psi,k} \cdot a_{d,\psi,k}, \forall (i, j) \in E, d = 1, \dots, D, k = 1, \dots, N_{TA} \quad (16)$$

$$\sum_{v=1}^{NV} z_{v,d,k} \leq a_{k,d}, \quad k = 1, \dots, N_{TA}, \quad d = 1, \dots, D \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{N_{TA}} p_{v,k} \cdot z_{v,d,k} \leq cl_v, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D; \quad (18)$$

$$\sum_{v=1}^{NV} l_{i,j,v,d,k} = w_{i,j,d,k}, \quad \forall (i,j) \in E, \quad d = 1, \dots, D, \quad k = 1, \dots, N_{TA} \quad (19)$$

$$N_{TA} \cdot x_{i,j,v,d} \geq \sum_{k=1}^{N_{TA}} l_{i,j,v,d,k}, \quad \forall (i,j) \in E, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D \quad (20)$$

$$\sum_{i=2}^{N_V} x_{1,i,v,d} \leq 1, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{N_V} x_{j,i,v,d} = \sum_{j=1}^{N_V} x_{i,j,v,d}, \quad i = 1, 2, \dots, N_V, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D \quad (22)$$

$$|E| \cdot z_{v,d,k} \geq \sum_{i=1}^{N_V} \sum_{j=1}^{N_V} l_{i,j,v,d,k}, \quad k = 2, \dots, N_{TA}, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D \quad (23)$$

$$|E| \sum_{j=2}^{N_V} x_{1,j,v,d} \geq \sum_{i=2}^{N_V} \sum_{j=2}^{N_V} x_{i,j,v,d}, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{N_{TA}} \sum_{(i,j) \in E} \gamma_k \cdot q_{k,i,j} \cdot l_{i,j,v,d,k} + \sum_{(i,j) \in E} \frac{d_{i,j}}{vm_v} \cdot x_{i,j,v,d} \leq w_v, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D \quad (25)$$

$$\sum_{r \in Q} \sum_{s \notin Q_d} x_{r,s,v,d} \geq \frac{1}{|Q_d|^2 - |Q_d|} \cdot \sum_{(i,j) \in Q_d} x_{i,j,v,d}, \quad v = 1, \dots, NV, \quad d = 1, \dots, D, \quad (26)$$

$$\forall Q_d \subset \{2, 3, \dots, n\}, |Q_d| \geq 2 \quad (27)$$

$$x_{i,j,v,d} \in \mathbb{Z}_+ \quad (27)$$

$$l_{i,j,v,d,k}; z_{v,d,k}; m_{i,j,\psi,k}; w_{i,j,d,k} \in \{0, 1\} \quad (28)$$

A função objetivo dada na equação (14) busca minimizar as distâncias percorridas pelos veículos.

A restrição (15) garante que somente uma combinação será designada para a leitura do instrumento k instalado na aresta (i, j) . A restrição (16) assegura que, para cada arco (i, j) as leituras ocorram no dia do qual foram designadas, baseadas nas combinações escolhidas.

A restrição (17) garante que a quantidade dos aparelhos do tipo k utilizados por todos os veículos v em um dia d de leitura sejam inferiores às quantidades disponíveis.

A restrição (18) garante que a capacidade do veículo não seja extrapolada, em relação aos aparelhos que carregam para coleta dos dados em um dia de leitura.

A restrição (19) garante que o veículo irá percorrer o arco (i, j) para a coleta dos dados dos instrumentos do tipo k , se o arco estiver alocado para aquele dia, satisfazendo a condição da combinação permitida para o dia.

A restrição (20) assegura que o arco (i, j) será percorrido pelo leiturista v no dia d se ele tem algum aparelho e o arco tenha sido designado para aquele dia.

A restrição (21) garante que o veículo seja utilizado uma única vez durante o dia e, caso tenha outros aparelhos que iniciem o trabalho a partir de um mesmo arco. A restrição (22) garante a continuidade do fluxo. A restrição (23) contabiliza se o aparelho do tipo k será carregado pelo veículo v no dia d . A restrição (24) garante que se algum veículo percorreu algum arco então saiu do escritório. A restrição (25) garante que o tempo para realização das leituras não ultrapasse a jornada de trabalho de cada veículo. A restrição (26) impede a formação de subciclos isolados do depósito. A restrição (27) assegura que a variável é inteira. As restrições em (28) asseguram que as variáveis são binárias.

3.4.3 Modelo de Tirkolae et al. (2018)

O modelo de Tirkolae et al. (2018) propõe minimizar a distância percorrida pelos veículos durante um período de planejamento. Considere um grafo não direcionado G , em que X é o conjunto de vértices, $X = \{i \in \mathbb{N}; i = 1, 2, \dots, N\}$, E o conjunto de arestas que compõem o grafo.

Sendo assim, apresenta-se o modelo matemático de Tirkolae et al. (2018), em que os índices, conjuntos, parâmetros e variáveis que serão utilizados no modelo matemático são apresentados na Tabela 9.

TABELA 9 - ÍNDICES, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (TIRKOLAE et al. (2018))

Simbologia	Descrição
Índices	i, j Nós;
	t Dia do período;
	k Veículos;
	o Viagem;
Conjuntos	V Conjunto de nós na rede de gráficos;
	K Conjunto de veículos;
	E Conjunto de todas as arestas definidas na rede;
	E_R Conjunto de todas as arestas necessárias definidas na rede;
	n Conjunto de nós disponíveis na rede do gráfico;
	T Conjunto de períodos de tempo;
	O Conjunto de viagens;
Parâmetros	S Subconjunto de vértices que formam os subciclos em relação à tarefa em relação ao dia ;
	$dis_{i,j}$ Distância de deslocamento da aresta (i, j);
	$Vel_{i,j,k}$ Velocidade média da k-ésimo veículo para atravessar a aresta (i, j);
	$LW_{i,j,k}$ Tempo de carregamento do k-ésimo veículo na aresta (i, j);
	$d_{i,j,t}$ Demanda incerta por aresta (i, j) no período t;
	$\bar{d}_{i,j,t}$ Demanda média por aresta (i, j) no período t;
	cv_k Custo de uso do k-ésimo veículo;
	W_k Capacidade do k-ésimo veículo em cada viagem;
	T_{max} Tempo máximo disponível para veículos em cada período;
	λ Taxa de conversão de distância para custo;
M Um número opcional muito grande;	
Variáveis	$x_{i,j,k,t,o}$ Assume valor 1 se aresta (i, j) $\in E$ é atravessada pela o-ésimo viagem do veículo k no período t, caso contrário, 0;
	$y_{i,j,k,t,o}$ Assume valor 1 se aresta (i, j) $\in E$ é servida pela o-ésimo viagem do veículo k no período t, caso contrário, 0;
	$s_{k,t}$ Assume valor 1 se o veículo k executa alguma tarefa no dia t ou zero caso contrário.
	$z_{k,t,o}$ Assume valor 1 se o veículo k for usado no período t, caso contrário, 0;
	$h_{k,t,o}^s$ Binária, usando nas restrições que evita sub-ciclos;
	$f_{k,t,o}^s$ Binária, usando nas restrições que evita sub-ciclos.

FONTE: O autor (2024)

A função objetivo (29) é dada por:

$$\text{MinimizaCusto}_{\text{total}} = \lambda \left(\sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K} \sum_{o \in O} \sum_{t \in T} \text{dis}_{i,j} \cdot x_{i,j,k,t,o} \right) + \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \text{cv}_k s_{k,t} \quad (29)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{i,j,k,t,o} = \sum_{(i,j) \in E} x_{j,i,k,t,o}, \forall i \in V, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (30)$$

$$\sum_{k \in K} (y_{i,j,k,t,o} + y_{j,i,k,t,o}) = 1, \forall (i,j) \text{ ou } (j,i) \in E_R, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (31)$$

$$\sum_{(i,j) \in E_R} \bar{d}_{i,j,t} \cdot y_{i,j,k,t,o} + z_{k,t,o} \cdot \Gamma_{k,t,o} + \sum_{(i,j) \in E_R} r_{i,j,k,t,o} \leq W_k, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (32)$$

$$z_{k,t,o} + r_{i,j,k,t,o} \geq \hat{d}_{i,j,t} \cdot E_{i,j,k,t,o}, \forall k \in K, \forall (i,j) \in E_R, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (33)$$

$$-E_{i,j,k,t,o} \leq y_{i,j,k,t,o} \leq E_{i,j,k,t,o}, \forall k \in K, \forall (i,j) \in E_R, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (34)$$

$$y_{i,j,k,t,o} \leq x_{i,j,k,t,o}, \forall k \in K, \forall (i,j) \in E_R, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (35)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} \sum_{o \in O} x_{i,j,k,t,o} \leq M s_{k,t}, \forall k \in K, \forall t \in T; \quad (36)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} \sum_{o \in O} \frac{\text{dis}_{i,j}}{\text{Vel}_{i,j,k}} \cdot x_{i,j,k,t,o} + \sum_{(i,j) \in E_R} \sum_{o \in O} L w_{i,j,k} \cdot y_{i,j,k,t,o} \leq T_{\text{max}}, \forall k \in K, \forall t \in T; \quad (37)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{i,j,k,t,o} \leq 1 + n \cdot h_{k,t,o}^s, \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (38)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \neq S} x_{i,j,k,t,o} \leq 1 + f_{k,t,o}^s, \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (39)$$

$$h_{k,t,o}^s + f_{k,t,o}^s \leq 1, \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (40)$$

$$h_{k,t,o}^s \in \{0,1\}, f_{k,t,o}^s \in \{0,1\}, \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (41)$$

$$x_{i,j,k,t,o} \in \{0,1\}, y_{i,j,k,t,o} \in \{0,1\}, s_{k,t} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in E, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (42)$$

$$E_{i,j,k,t,o}, z_{k,t,o}, r_{i,j,k,t,o} \geq 0, \forall (i,j) \in E, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \quad (43)$$

A função objetivo da equação (29) busca minimizar as distâncias percorridas pelos veículos no período. A restrição (30) são as equações do balanço de fluxo, para cada veículo em cada período. Essas restrições controlam o fluxo de entrada e saída das arestas (ou seja, se um veículo entra em um nó, ele deve necessariamente deixá-lo). A restrição (31) garante que quaisquer arestas necessárias devam ser atendidas em cada período apenas uma vez (mas podem ser percorridas mais de uma vez). As restrições (32) a (34) usam estatísticas para prever a quantidade de lixo na aresta. A restrição (35) expressa que uma aresta requerida será servida pelo veículo que atravessou a aresta (em outras palavras, o veículo pode atravessar a aresta sem

manutenção). A restrição (36) assegura que o k -ésimo veículo será usado, sempre que seu custo de uso for pago. A restrição (37) explica que o tempo de deslocamento total de cada veículo não deve exceder o tempo máximo disponível considerado. As restrições (39) a (40) são de eliminação de subciclo, em que $h_{k,t,o}^s$ e $f_{k,t,o}^s$ são variáveis binárias de não-decisão relevantes usadas em restrições de eliminação de sub-ciclos. O conjunto de restrições (41) – (43) especifica os tipos de variáveis. A diferença deste modelo para o modelo proposto nesta tese é o fato de trabalhar com uma única tarefa e de não ter combinações predefinida para os dias das coletas.

Os três modelos retratam o problema do roteamento em arcos capacitados e periódicos, cada um com suas características. O primeiro modelo considera dias específicos para fazer a coleta de lixo. O segundo permite a realização de várias tarefas ao mesmo tempo, diferenciando-se do primeiro, que só soluciona o problema quando há apenas uma tarefa, no caso, a coleta de lixo. O terceiro modelo visa diminuir a distância percorrida por um veículo que faz a coleta de lixo, bem como a quantidade dos veículos necessários. Sendo assim, analisando a revisão da literatura e bibliométrica, a importância do PCARP e os três modelos, será apresentado no próximo capítulo um modelo que englobará as situações descritas nos três modelos.

4 MODELAGEM PROPOSTA NA TESE

Para iniciar a formulação matemática do modelo proposto neste trabalho considere um grafo não direcionado G , em que X é o conjunto de vértices, E o conjunto das arestas que compõem o grafo, em que R_k é um subgrafo de G . Os índices, conjuntos, parâmetros e variáveis que serão utilizados no modelo matemático são apresentados na Tabela 10.

TABELA 10 - ÍNDICES, CONJUNTOS, PARÂMETROS E VARIÁVEIS - (MODELO PROPOSTO)

Simbologia	Descrição	
Índices	i, j	Nós
	D	Dia
	K	Tarefa
	v	Leiturista
	Ψ	Combinação Permitida
Conjuntos	D	Conjunto de Dias;
	N_v	Conjunto de vértice do grafo;
	NV	Conjunto de leitorista;
	N_{ta}	Conjunto de tarefas distintas;
	n_{comb_k}	Conjunto de combinações relativo ao instrumento k ;
	R_k	Conjunto de arestas em que existe o instrumento do tipo k ;
	G_d	Subconjuntos de vértices que formam os subciclos em relação ao dia d ;
Parâmetros	$c_{k,\Psi,d}$	Assume valor 1, se o dia d pertence a combinação Ψ em relação ao instrumento k ;
	$d_{i,j}$	Distância entre os nós i e j ;
	$a_{k,d}$	Número de aparelho existente para coletar os dados do instrumento do tipo no dia d ;
	$p_{v,k}$	Peso do instrumento k associado ao leitorista v (cada tarefa que o leitorista pode executar é atribuído peso 1; caso contrário, zero);
	cm_v	Capacidade máxima do carregamento de aparelho pelo leitorista v ;
	γ_k	Tempo estimado para coletar os dados do instrumento do tipo k ;
	$q_{k,i,j}$	Quantidade dos instrumentos do tipo k instalados na aresta (i, j) ;
	vm_v	Velocidade média de caminhada do leitorista v ;
	w_v	Tempo de trabalho do leitorista v ;
	$cf_{v,d}$	Pode ser entendido como uma penalização. O valor da penalização do primeiro leitorista será $cf_{1,v} = 1$. O valor do segundo leitorista será $cf_{2,v} = 1000000$. O valor do terceiro leitorista, será o dobro do valor do segundo, e assim por diante;
Variáveis	$m_{i,j,\Psi,k}$	Assume valor 1 se aresta (i, j) é escolhida na combinação Ψ em relação ao instrumento k ;
	$l_{i,j,v,k,d}$	Assume valor 1 se a aresta (i, j) é atendida no dia d pelo leitorista v para atender tarefa k ;
	$z_{v,d,k}$	Assume valor 1 se o aparelho k é utilizado pelo leitorista v no dia d ;
	$s_{v,d}$	Assume valor 1 se o leitorista v é utilizado no dia d ;
	$x_{i,j,v,d}$	Assume valor 1 se a aresta (i, j) é percorrida no dia d pelo leitorista v ;

FONTE: O autor (2024)

A formulação matemática (44) é dada por:

$$z = \min \sum_{i=1}^{|\mathcal{N}_V|} \sum_{j=1}^{|\mathcal{N}_V|} \sum_{v=1}^{|\mathcal{N}_V|} \sum_{d=1}^{|\mathcal{D}|} d_{i,j} \cdot x_{i,j,v,d} + \sum_{v=1}^{|\mathcal{N}_V|} \sum_{d=1}^{|\mathcal{D}|} cf_{v,d} \cdot s_{v,d} \quad (44)$$

Sujeitas às seguintes restrições:

$$\sum_{\psi=0}^{|\mathcal{n}_{comb_k}|} (m_{i,j,\psi,k} + m_{j,i,\psi,k}) = 1, \forall (i,j) \in R_k, \forall k = 1, \dots, |\mathcal{N}_{TA}| \quad (45)$$

$$\sum_{v=1}^{|\mathcal{N}_V|} l_{i,j,v,d,k} = \sum_{\psi=0}^{|\mathcal{n}_{comb_k}|} m_{i,j,\psi,k} \cdot c_{k,\psi,d}, \forall (i,j) \in R_k, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}|, \forall k = 1, \dots, |\mathcal{N}_{TA}| \quad (46)$$

$$|R_k| \cdot z_{v,d,k} \geq \sum_{i=1}^{|\mathcal{N}_V|} \sum_{j=1}^{|\mathcal{N}_V|} l_{i,j,v,d,k}, \forall k = 1, \dots, |\mathcal{N}_{TA}|, \forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}| \quad (47)$$

$$\sum_{v=1}^{|\mathcal{N}_V|} z_{v,d,k} \leq a_{k,d}, \forall k = 1, \dots, |\mathcal{N}_{TA}|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}| \quad (48)$$

$$\sum_{k=1}^{|\mathcal{N}_{TA}|} p_{v,k} \cdot z_{v,d,k} \leq cm_v, \forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}| \quad (49)$$

$$|\mathcal{N}_{TA}| \cdot x_{i,j,v,d} \geq \sum_{k=1}^{|\mathcal{N}_{TA}|} l_{i,j,v,d,k}, \forall (i,j) \in E, \forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}| \quad (50)$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{N}_V|} x_{j,i,v,d} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{N}_V|} x_{i,j,v,d}, \forall i = 2,3, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}| \quad (51)$$

$$\sum_{j=2}^{|\mathcal{N}_V|} x_{1,j,v,d} \geq x_{i,j,v,d}, \forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}|, \forall i = 2,3, \dots, |\mathcal{N}_V|, \quad (52)$$

$$\forall j = 1,2, \dots, |\mathcal{N}_V|$$

$$\sum_{k=1}^{|\mathcal{N}_{TA}|} \sum_{(i,j) \in R_k} \gamma_k \cdot q_{k,i,j} \cdot l_{i,j,v,d,k} + \sum_{(i,j) \in E} \frac{d_{i,j}}{vm_v} \cdot x_{i,j,v,d} \leq w_v, \forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \quad (53)$$

$$\forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}|$$

$$\sum_{k=1}^{|\mathcal{N}_{TA}|} z_{v,d,k} \leq |\mathcal{N}_{TA}| \cdot s_{v,d}, \forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}|, \quad (54)$$

$$\sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{r,s,v,d} + \sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{s,r,v,d} \geq \frac{1}{|G_d|} \cdot \sum_{(i,j) \in G_d} x_{i,j,v,d}, \quad (55)$$

$$\forall v = 1, \dots, |\mathcal{N}_V|, \forall d = 1, \dots, |\mathcal{D}|,$$

$$\forall G_d \subset \{2,3, \dots, n\}, |G_d| \geq 2$$

$$x_{i,j,v,d}, m_{i,j,\psi,k}, z_{v,d,k}, l_{i,j,v,d,k}, s_{v,d} \in \{0,1\} \quad (56)$$

A função objetivo (44), busca minimizar, prioritariamente, o número dos leituristas, e secundariamente, a distância percorrida. Devido aos métodos de solução determinados nesta tese. De fato, são somados a cada dia a distância percorrida pelo leiturista o valor de $cf_{v,d}$, o que faz com que quanto menos leituristas sejam utilizados, reduzirá o valor da função objetivo, haja vista que $cf_{1,d} = 1$, $cf_{2,v} = 1000000$ e $cf_{3,d} = 2cf_{2,d}$ e assim por diante.

Sendo assim o valor de $cf_{v,d}$ funciona como um penalizador na função objetivo. O conjunto das restrições (45) garantem que somente uma combinação será designada em relação ao instrumento k , instalado no arco (i, j) e em um único sentido. O conjunto das restrições (46) assegura que, para cada arco (i, j) , as execuções das tarefas ocorram no dia em que foram designadas devido à multiplicação de $m_{i,j,\psi,k} \cdot c_{k,\psi,d}$, baseada na combinação escolhida.

O conjunto das restrições (47) contabiliza se o aparelho do tipo k será carregado pelo leiturista v no dia d . O conjunto das restrições (48) garante que a quantidade dos aparelhos do tipo k utilizados por todos os leituristas v em um dia d de leitura seja inferior ou igual às quantidades disponíveis. O conjunto das restrições (49) garante que a capacidade de carregamento ou execução de uma tarefa do leiturista não seja extrapolada.

O conjunto das restrições (50) assegura que a aresta (i, j) será percorrida pelo leiturista v no dia d , se existir algum aparelho neste arco para executar uma tarefa de leitura mediante a designação para aquele dia. O conjunto das restrições (51) garante a continuidade do fluxo. O conjunto das restrições (52) assegura que se o leiturista v no dia d percorreu algum arco, de modo que ele deverá ter saído do almoxarifado no dia d . O conjunto das restrições (53) garante que o tempo para execução das tarefas não ultrapasse a jornada de trabalho de cada leiturista.

O conjunto das restrições (54) contabiliza a quantidade dos leituristas v no dia d . O conjunto das restrições (55) impede a formação de subciclos isolados do depósito, sendo G_d as arestas que fazem parte do subciclo. Finalmente, o conjunto das restrições (56) determina as variáveis.

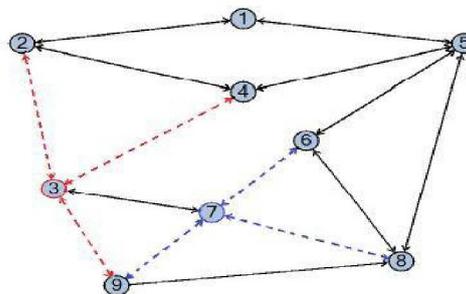
O modelo pode ser resolvido de duas formas: inicialmente, resolve-se o modelo usando a restrição (44) até a restrição (54) e, posteriormente, verifica-se a

existência de subciclos utilizando a restrição (55) e os algoritmos I e II da próxima seção, repetindo esse processo até não haver mais subciclos; ou determinam-se todos os possíveis subciclos usando as restrições (55) e o algoritmo II e III.

4.1 SUBCICLO

Para explicar o conjunto das restrições (55), considere que o modelo (44)-(54) foi resolvido considerando o grafo da Figura 11 e surgiu o subciclo (3,7,3).

FIGURA 11 - SUBCICLO



FONTE: Santos (2016)

Para eliminar este subciclo de acordo com a restrição (55), faz-se necessário usar a seguinte restrição (57), em que $G_d = \{3,7\}$ e $|G_d| = 2$,

$$x_{3,2,v,d} + x_{3,4,v,d} + x_{3,9,v,d} + x_{7,6,v,d} + x_{7,8,v,d} + x_{7,9,v,d} \geq \frac{1}{2}(x_{3,7,v,d} + x_{7,3,v,d}) \quad (57)$$

Isto significa que, se a aresta $x_{3,7,v,d}$ for designada para realização de uma tarefa, logo receberá o valor 1. Portanto, o lado esquerdo da desigualdade deverá assumir valor maior ou igual a 1, isto é, força a alguma das arestas $x_{3,2,v,d}$, $x_{3,4,v,d}$, $x_{3,9,v,d}$, $x_{7,6,v,d}$, $x_{7,8,v,d}$, e $x_{7,9,v,d}$ a assumir o valor 1, e conseqüentemente, o veículo deverá sair dos nó 3 ou 7.

4.2 INOVAÇÕES DO MODELO PROPOSTO

Os quatros modelos apresentados aqui procuram resolver o Problema do roteamento em arcos capacitado e periódico, porém cada modelo tem suas

particularidades que serão detalhadas nessa seção. A análise começará com a avaliação do modelo proposto por Chu et al. (2005).

Chu et al. (2005)

- Função objetivo diferente

$$z = \text{Min} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{v=1}^V \sum_{p=1}^P c_{i,j} (x_{i,j,v,p} + x_{j,i,v,p})$$

- Trabalhador só executa um tipo de tarefa.
- Minimiza distância
- Não assegura que os veículos saiam todos do mesmo vértice.
- As restrições que impedem a formação de subciclos

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{i,j,v,p} \geq l_{r,s,v,k,p} + l_{s,r,v,k,p},$$

$$\forall S \subseteq \{2, \dots, n\}, \forall (r, s) \in E_R(S).$$

Modelo proposto

- Função objetivo diferente

$$z = \min \sum_{i=1}^{|NV|} \sum_{j=1}^{|NV|} \sum_{v=1}^{|NV|} \sum_{d=1}^{|D|} d_{i,j} \cdot x_{i,j,v,d}$$

$$+ \sum_{v=1}^{|NV|} \sum_{d=1}^{|D|} cf_{v,d} \cdot s_{v,d}$$

- O trabalhador pode executar mais de uma tarefa ao mesmo tempo, caso seja habilitado.
- Minimiza a distância e a quantidade dos trabalhadores.
- Assegura que os veículos saiam todos do mesmo vértice.
- As restrições que impedem a formação de subciclos.

$$\sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{r,s,v,d} + \sum_{r \in G_d} \sum_{s \in G_d} x_{s,r,v,d}$$

$$\geq \frac{1}{|G_d|} \cdot \sum_{(i,j) \in G_d} x_{i,j,v,d},$$

$$\forall v = 1, \dots, |NV|, \forall d = 1, \dots, |D|$$

$$\forall G_d \subset \{2, 3, \dots, n\}, |G_d| \geq 2$$

Se for conhecido todos os subciclos, não será necessária a restrição, que garante que todos os veículos saiam do depósito. Mas, o artigo não aborda como obter os mesmos. Agora, será analisado o modelo de Santos et al. (2016), com o modelo proposto.

Santos et al. (2016)

- Função objetivo diferente

$$z = \min \sum_{i=1}^{N_V} \sum_{j=1}^{N_V} \sum_{v=1}^{NV} \sum_{d=1}^D d_{i,j} \cdot x_{i,j,v,d}$$

- Restrição para determinar qual leitorista vai executar a tarefa k em uma aresta (i, j)

$$w_{i,j,d,k} = \sum_{\psi=0}^{n_{\text{comb}_k}} m_{i,j,\psi,k} \cdot a_{d,\psi,k},$$

$$\forall (i, j) \in E, d = 1, \dots, D, k = 1, \dots, N_{TA}$$

$$\sum_{v=1}^{NV} l_{i,j,v,d,k} = w_{i,j,d,k},$$

$$\forall (i, j) \in E, d = 1, \dots, D, k = 1, \dots, N_{TA}$$

- As restrições que evitam a formação de subciclos são diferentes

$$\sum_{r \in Q_d} \sum_{s \notin Q_d} x_{r,s,v,d} \geq \frac{1}{|Q_d|^2 - |Q_d|} \cdot \sum_{(i,j) \in Q_d} x_{i,j,v,d},$$

$$v = 1, \dots, NV, d = 1, \dots, D,$$

$$\forall Q_d \subset \{2, 3, \dots, n\}, |Q_d| \geq 2$$

Modelo proposto

- Função objetivo diferente

$$z = \min \sum_{i=1}^{N_V} \sum_{j=1}^{N_V} \sum_{v=1}^{NV} \sum_{d=1}^D d_{i,j} \cdot x_{i,j,v,d} + \sum_{v=1}^{NV} \sum_{d=1}^D cf_{v,d} \cdot s_{v,d}$$

- Restrição para determinar qual leitorista vai executar a tarefa k em uma aresta (i, j)

$$\sum_{v=1}^{NV} l_{i,j,v,d,k} = \sum_{\psi=0}^{n_{\text{comb}_k}} m_{i,j,\psi,k} \cdot c_{k,\psi,d},$$

$$\forall (i, j) \in R_k, \forall d = 1, \dots, |D|,$$

$$\forall k = 1, \dots, |N_{TA}|$$

- As restrições que evitam a formação de subciclos são diferentes

$$\sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{r,s,v,d} + \sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{s,r,v,d} \geq \frac{1}{|G_d|} \cdot \sum_{(i,j) \in G_d} x_{i,j,v,d},$$

$$\forall v = 1, \dots, |NV|, \forall d = 1, \dots, |D|,$$

$$\forall G_d \subset \{2, 3, \dots, n\}, |G_d| \geq 2$$

- A restrição para assegurar que o veículo saia do depósito são diferentes

$$|E| \sum_{j=2}^{N_V} x_{1,j,v,d} \geq \sum_{j=2}^{N_V} \sum_{j=2}^{N_V} x_{i,j,v,d}$$

$v = 1, 2, \dots, NV, \quad d = 1, 2, \dots, D$

- Restrição que impede o *loop* na origem

$$\sum_{j=2}^{N_V} x_{1,j,v,d} \leq 1,$$

$v = 1, 2, \dots, NV, \quad d = 1, 2, \dots, D$

- Não tem esta restrição.

- A restrição pode contabilizar mais aparelhos do tipo k será carregado pelo leitorista v no dia d do que é o necessário.

$$|E| \cdot z_{v,d,k} \geq \sum_{i=1}^{|N_V|} \sum_{j=1}^{|N_V|} l_{i,j,v,d,k},$$

$\forall k = 1, \dots, |N_{TA}|, \forall v = 1, \dots, |NV|, \forall d = 1, \dots, |D|$

- A restrição para assegurar que o veículo saia do depósito são diferentes

$$\sum_{j=2}^{N_V} x_{1,j,v,d} \geq x_{s,r,v,d},$$

$v = 1, 2, \dots, NV, \quad d = 1, 2, \dots, D,$

$s = 2, \dots, N_V, \quad r = 2, \dots, N_V$

- Não tem no modelo pra não deixar o modelo restritivo.

- A restrições que contabilizam o número dos leitoristas v no dia d

$$\sum_{k=1}^{|N_{TA}|} z_{v,d,k} \leq |N_{TA}| \cdot s_{v,d},$$

$\forall v = 1, \dots, |NV|, \forall d = 1, \dots, |D|,$

- Contabiliza se o aparelho do tipo k será carregado pelo leitorista v no dia d

$$|R_k| \cdot z_{v,d,k} \geq \sum_{i=1}^{|N_V|} \sum_{j=1}^{|N_V|} l_{i,j,v,d,k},$$

$\forall k = 1, \dots, |N_{TA}|, \forall v = 1, \dots, |NV|,$

$\forall d = 1, \dots, |D|$

O terceiro modelo de Tirkolaee et al. (2018) difere do modelo proposto nesta tese em alguns aspectos, os quais serão analisados a seguir.

Tirkolaee et al. (2018)

- Função objetivo diferente

$$\begin{aligned} & \text{MinimizaCusto}_{\text{total}} \\ & = \lambda \left(\sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K} \sum_{o \in O} \sum_{t \in T} \text{dis}_{i,j} \right. \\ & \quad \left. \cdot x_{i,j,k,t,o} \right) + \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} cv_k s_{k,t} \end{aligned}$$

- Trabalhador só executa um tipo de tarefa.
- As restrições de (32) a (34) usam a estatística para prever a quantidade de lixo na aresta

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in E_R} \bar{d}_{i,j,t} \cdot y_{i,j,k,t,o} + z_{k,t,o} \cdot \Gamma_{k,t,o} \\ & \quad + \sum_{(i,j) \in E_R} r_{i,j,k,t,o} \leq W_k, \end{aligned}$$

$$\forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O;$$

$$z_{k,t,o} + r_{i,j,k,t,o} \geq \hat{d}_{i,j,t} \cdot E_{i,j,k,t,o},$$

$$\forall k \in K, \forall (i,j) \in E_R, \forall t \in T, \forall o \in O;$$

$$-E_{i,j,k,t,o} \leq y_{i,j,k,t,o} \leq E_{i,j,k,t,o},$$

$$\forall k \in K, \forall (i,j) \in E_R, \forall t \in T, \forall o \in O;$$

- As restrições que evitam a formação dos subciclos são diferentes

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j \in S} x_{i,j,k,t,o} \leq 1 + n \cdot h_{k,t,o}^s, \\ & \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{i,j,k,t,o} \leq 1 + f_{k,t,o}^s, \\ & \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O; \end{aligned}$$

$$h_{k,t,o}^s + f_{k,t,o}^s \leq 1,$$

$$\forall S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall o \in O;$$

Modelo proposto

- Função objetivo diferente

$$\begin{aligned} z = \min & \sum_{i=1}^{|N_V|} \sum_{j=1}^{|N_V|} \sum_{v=1}^{|NV|} \sum_{d=1}^{|D|} d_{i,j} \cdot x_{i,j,v,d} \\ & + \sum_{v=1}^{|NV|} \sum_{d=1}^{|D|} cf_{v,d} \cdot s_{v,d} \end{aligned}$$

- Cada trabalhador pode ser habilitado para executar uma quantidade diferente das tarefas distintas. Caso seja habilitado.
- Não tem esta restrição

- As restrições que evitam a formação dos subciclos são diferentes

$$\begin{aligned} & \sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{r,s,v,d} + \sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{s,r,v,d} \\ & \geq \frac{1}{|G_d|} \cdot \sum_{(i,j) \in G_d} x_{i,j,v,d}, \end{aligned}$$

$$\forall v = 1, \dots, |NV|, \forall d = 1, \dots, |D|,$$

$$\forall G_d \subset \{2, 3, \dots, n\}, |G_d| \geq 2$$

- A variável que será usada na função objetivo é determinada de forma diferente. Aqui há a necessidade de estipular aleatoriamente um valor para M .

$$\sum_{(i,j) \in E} \sum_{o \in O} x_{i,j,k,t,o} \leq M s_{k,t},$$

$$\forall k \in K, \forall t \in T;$$

- O veículo pode fazer várias viagens durante o dia, haja vista que uma das variáveis do problema é para contabilizar o número de viagem.
- Não assegura que os veículos saiam todos do mesmo vértice.

- Aqui não há a necessidade de estipular um valor para M.

$$\sum_{k=1}^{|N_{TA}|} z_{v,d,k} \leq |N_{TA}| \cdot s_{v,d},$$

$$\forall v = 1, \dots, |NV|, \forall d = 1, \dots, |D|,$$

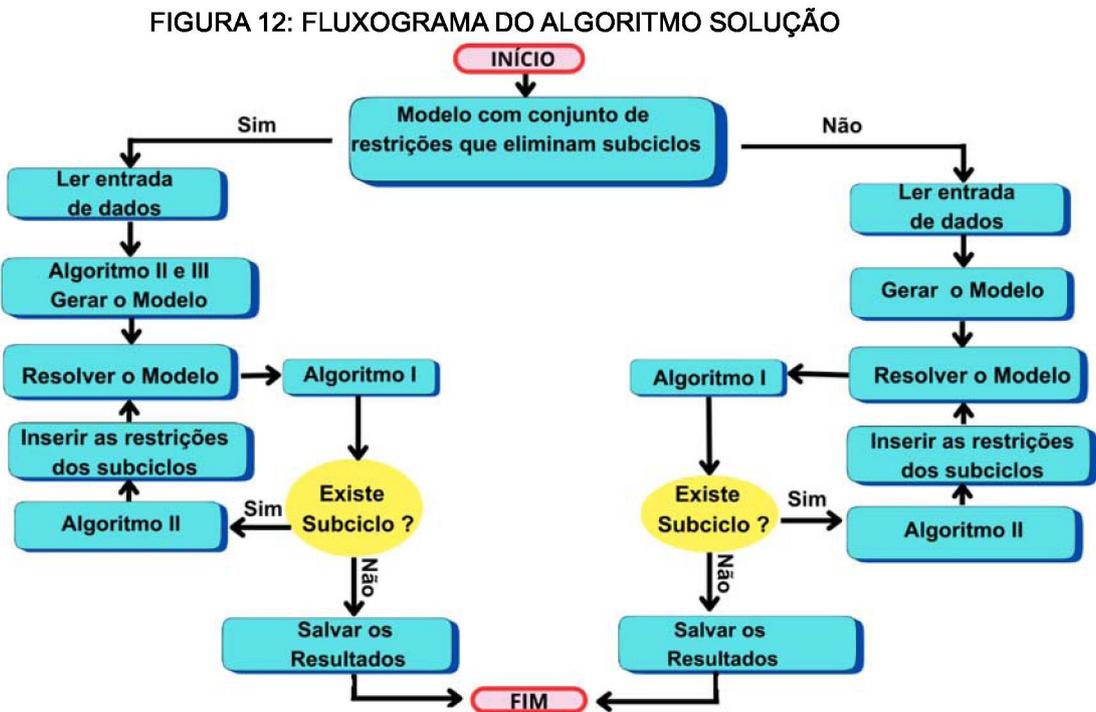
- O veículo só pode fazer uma viagem por dia
- Assegura que os veículos saiam todos do mesmo vértice.

As comparações entre os modelos destacam várias inovações introduzidas pelo modelo proposto, contribuindo com novas abordagens para a teoria do PCARP com múltiplas tarefas e até mesmo no contexto geral do PCARP.

Na próxima seção, um novo algoritmo será apresentado. Embora, o algoritmo de solução seja baseado em *Lazy Constraints*, as inovações dos algoritmos a seguir derivam das adaptações dos *algoritmos de Fleury, Hierholzer* e busca em profundidade.

4.3 ALGORITMO SOLUÇÃO

O algoritmo de solução está ilustrado no fluxograma da Figura 12.



FONTE: O autor (2024).

Esse algoritmo permite três abordagens para determinar a solução do modelo exato, com o auxílio dos algoritmos I, II e III, que serão descritos nesta seção.

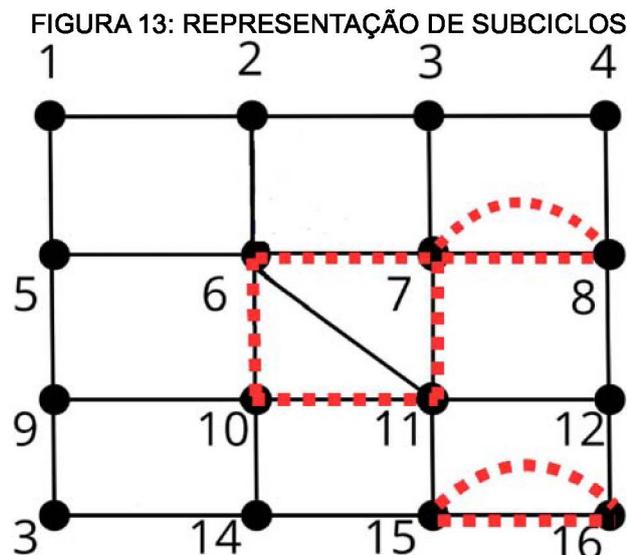
As formas das soluções são as seguintes:

- a) Executar o modelo sem penalização na função objetivo e sem as restrições que eliminem subciclos e, a cada iteração, verificar a existência dos subciclos, adicionando as restrições necessárias para os eliminar até obter uma solução factível;
- b) Executar o modelo com penalização na função objetivo e sem as restrições que eliminem subciclos e, a cada iteração, verificar a existência dos subciclos, adicionando as restrições necessárias para os eliminar até obter uma solução factível;
- c) Executar o modelo com todas as restrições que eliminam os subciclos.

4.3.1 Algoritmo I

Como mencionado, o Algoritmo I permite a identificação de um conjunto de subciclos em um grafo não direcionado, seja ele Euleriano ou não. Ao resolver o modelo, uma das possibilidades é executá-lo sem utilizar a restrição (55) na primeira iteração. Este é um dos métodos de solução que consiste em adicionar as restrições que eliminam os subciclos à medida que eles surgirem. Dependendo da instância, esse processo poderá resultar em muitas iterações. Em cada iteração, se a solução contém subciclos será necessário analisá-la, e realizar essa análise manualmente torna-se inviável. Por isso, foi desenvolvido o Algoritmo I para determinar, a cada iteração, se a solução possui os subciclos.

Para exemplificar o Algoritmo I, que é composto por vários procedimentos, cujo principal é o procedimento *Determinar Subciclos*, utiliza-se a Figura 13 para analisar como é possível determinar um subciclo para um certo dia e um certo veículo.



FONTE: O autor (2024).

Estes subciclos geram a seguinte lista das arestas $A=\{(6,7), (16,15), (7,8), (15,16), (8,7), (7,11), (11,10), (10,6)\}$. De posse dessa lista, o Algoritmo I consegue identificar os dois subciclos, que, junto com o Algoritmo II, possibilitam a utilização da restrição (55) quando há subciclo na solução gerada pelo modelo.

O primeiro procedimento, denominado *Arestas Visitadas*, recebe uma lista de arestas e cria um dicionário em que cada aresta é uma chave e o valor associado é a *string "False"*.

ALGORITMO 1 - Arestas_Visitadas

1:	procedimento Arestas_Visitadas (Arestas)
2:	Lista de dicionários = visitadas
3:	Para arestas em Arestas faça :
4:	visitadas[aresta] = <i>False</i>
5:	Fim
6:	Retorne: visitadas

FONTE: O autor (2024)

O procedimento Começar é responsável por selecionar a primeira aresta com o status "*False*" em um dicionário. Esse procedimento é essencial porque, ao observar a Figura 13, percebe-se que o procedimento Determinar um Subciclo utiliza Começar para identificar o subciclo (6,7,8,7,11,10,6). Para identificar o subciclo (15,16,15), é necessário executar novamente o procedimento Determinar um Subciclo, que precisa de um comando de inicialização fornecido pelo procedimento Começar.

ALGORITMO 2 - Começar

1:	procedimento Começar (Arestas)
2:	next = None
3:	Para aresta, status em Arestas faça :
4:	Se status == <i>False</i> então :
5:	next = aresta
6:	Break
7:	Fim
8:	Fim
9:	Retorne: next

FONTE: O autor (2024)

O procedimento Determinar Vértice é utilizado para indicar em qual vértice a análise está parada.

ALGORITMO 3 - Determinar_Vértice

1:	procedimento Determinar_Vértice (aresta, op)
2:	Se (op == '1') então :
3:	vértice recebe origem da aresta
4:	senão :
5:	vértice recebe extremidade da aresta
6:	Fim
7:	Retorne: vértice

FONTE: O autor (2024)

O procedimento Próximo_Vértice é utilizado para analisar qual a próxima aresta a ser selecionada.

ALGORITMO 4 - Próximo_Vértice

1:	procedimento Próximo_Vértice (vértice, Arestas_Visitadas)
2:	próximo= Nulo
3:	Para aresta em Arestas_Visitadas faça :
4:	Se (vértice == Determinar_Vértice (aresta,'1') ou vértice == Determinar_Vértice (aresta, '2') e Aresta_Visitadas[aresta]==False) então :
5:	próximo = aresta
6:	Break
7:	Fim
8:	Retorne: próximo

FONTE: O autor (2024)

O procedimento Determinar um Subciclo é utilizado para determinar apenas um subciclo. Por exemplo, ele é utilizado para identificar o subciclo [6,7,8,7,11,10,6] e, em uma execução subsequente, identificar o subciclo [15,16,15].

ALGORITMO 5 - Determinar_um_Subciclo

1:	procedimento Determinar_um_Subciclo (Arestas, Vértice_Inicial)
2:	Arestas_Visitadas = Arestas
3:	Vértice_Atual = Vértice_Inicial
4:	Criar uma lista chamada de pilha
5:	Criar uma lista chamada de circuito
6:	próximo = Próximo_Vértice (Vértice_Atual, Arestas_Visitadas)
7:	Pilha.adicionar[Vértice_Atual]
8:	Enquanto len(pilha) > 0 faça :
9:	próximo = Próximo_Vértice (Vértice_Atual, Arestas_Visitadas)
10:	Pilha.adicionar[Vértice_Atual]
11:	Enquanto próximo != Nulo faça :
12:	Arestas_Visitadas [next] = True
13:	v = Determinar_Vértice (next, '1')
14:	Se v == Vértice_Atual então :
15:	Vértice_Atual = Determinar_Vértice (next, '2')
16:	Senão
17:	Vértice Atual = v
18:	Fim
19:	Pilha.adicionar[Vértice Atual]
20:	próximo = Próximo_Vértice (Vértice_Atual, Aresta_Visitadas)

21:	Fim
22:	Remove o último elemento da pilha
23:	Circuito.adicionar[Vértice_Atual]
24:	Vértice_Atual = pilha[len(pilha) - 1]
25:	Remove o último elemento da pilha
26:	Fim
27:	Retorne: circuito, Arestas_Visitadas

FONTE: O autor (2024)

O procedimento *Determinar_Subciclos* é utilizado para determinar uma lista de subciclos. Por exemplo, ao analisar a Figura 13, ele identifica a lista_de_subciclos = [[6,7,8,7,11,10,6], [15,16,15]].

ALGORITMO 6 - *Determinar_Subciclos*

1:	procedimento Determinar Subciclos (Arestas)
2:	visitadas = Arestas_Visitadas (Arestas)
3:	próximo = Começar (visitadas)
4:	Criar uma lista que vai receber os subciclos que chama-se: lista_de_subciclos
5:	Enquanto (próximo != Nulo) faça:
6:	v = Determinar_Vértice (próximo, '1')
7:	subciclo, visitadas = Determinar_um_Subciclo (Arestas, v)
8:	lista_de_subciclos.adicionar[subciclo]
9:	próximo = Começar (visitadas)
10:	Fim
11:	Retorne: lista_de_subciclos, visitadas

FONTE: O autor (2024)

A seguir, apresenta-se o Algoritmo 2, que utiliza os subciclos determinados pelo Algoritmo I para identificar as arestas que desfaz os subciclos.

4.3.2 Algoritmo II

O algoritmo II é composto pelo procedimento *Restrição_que_elimina_subciclos* e é utilizado para identificar os vértices das arestas que estão ligadas aos subciclos, mas que não pertencem a esses subciclos. Por exemplo, na Figura 13, os vértices 2, 3, 4, 12, 15, 14, 9 e 5 são as extremidades das

arestas (6,2), (7,3), (8,4), (8,12), (11,12),(11,15), (10,14), (9,10) e (5,6) que não pertencem ao subciclo (6,7,8,7,11,10,6).

Analisando o algoritmo II, as linhas de 6 a 15 identificam os vértices e arestas já mencionados. No entanto, ao observar a Figura 13, nota-se que a aresta (6,11) também quebra o subciclo, e para identificar essa aresta, utilizam-se as linhas de 15 a 47 do algoritmo II.

O restante das linhas do algoritmo II é utilizado para armazenar, em um dicionário, os vértices que pertencem aos subciclos e seus vértices adjacentes. Por exemplo, Desfaz Subciclos[6] com chave 6 armazena os vértices (2,5), enquanto o dicionário Circuito[6] com chave 6 armazena os vértices (10,7). Posteriormente, utiliza-se as informações presentes em Desfaz Subciclos e Circuito para gerar a matriz que será usada na restrição abaixo:

$$\sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{r,s,v,d} + \sum_{r \in G_d} \sum_{s \notin G_d} x_{s,r,v,d} \geq \frac{1}{|G_d|} \cdot \sum_{(i,j) \in G_d} x_{i,j,v,d}, \quad (58)$$

$$\forall v = 1, \dots, |NV|, \forall d = 1, \dots, |D|,$$

$$\forall G_d \subset \{2,3, \dots, n\}, |G_d| \geq 2$$

Gerando assim a restrição para um certo veículo v e dia d :

$$\begin{pmatrix} x_{6,2,v,d} + x_{2,6,v,d} + x_{7,3,v,d} + x_{3,7,v,d} + \\ x_{4,8,v,d} + x_{8,4,v,d} + x_{8,12,v,d} + x_{12,8,v,d} \\ + x_{11,12,v,d} + x_{12,11,v,d} + x_{11,15,v,d} \\ + x_{15,11,v,d} + x_{10,14,v,d} + x_{14,10,v,d} + \\ + x_{9,10,v,d} + x_{10,9,v,d} + x_{5,6,v,d} + x_{6,5,v,d} \\ + x_{6,11,v,d} + x_{11,6,v,d} \end{pmatrix} \geq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_{6,7,v,d} + x_{7,6,v,d} + x_{7,8,v,d} + \\ x_{8,7,v,d} + x_{7,11,v,d} + \\ + x_{7,11,v,d} + x_{10,11,v,d} + x_{11,10,v,d} \\ x_{6,10,v,d} + x_{10,6,v,d} \end{pmatrix} \quad (59)$$

Este procedimento aplica-se para determinar a equação (59), pois o objetivo é explicar como o algoritmo funciona e como o seu resultado é utilizado na restrição (55) do modelo proposto.

ALGORITMO 7 - Restrição_que_elimina_subciclos

1:	procedimento Restrição_que_elimina_subciclos (subciclo)
2:	Criar um dicionário Ad cuja chave são os vértices do subciclo e os elementos relacionado a cada chaves suas adjacências
3:	Criar uma dicionário Desfaz_Subciclos.

4:	Criar uma dicionário Circuito
5:	Tamanho = comprimento(subciclos)
6:	Para v em subciclo faça:
7:	Para a em Ad[v] faça:
8:	Se a não pertence ao subciclo então:
9:	Se v não for chave de Desfaz_Subciclos então:
10:	Criar a chave v, ou seja, Desfaz_Subciclos[v]
11:	Desfaz_Subciclos[v].adicionar[a]
12:	Senão
13:	Se a não pertence Desfaz_Subciclos[v] então:
14:	Desfaz_Subciclos[v].adicionar[a]
15:	Fim
16:	Senão
17:	Flag = False
18:	Para i em Tamanho faça:
19:	Se i == 0 então:
20:	Se (a==subciclo[1]) ou (a == subciclo[Tamanho-2]) então:
21:	Flag = True
22:	Senão
23:	Se (a==subciclo[i+1]) ou (a == subciclo[i-1]) então:
24:	Flag = True
25:	Fim
26:	Fim
27:	Fim
28:	Se flag == False então:
29:	Se v não pertence Desfaz_Subciclos[v] então:
30:	Criar a chave v, ou seja, Desfaz_Subciclos[v]
31:	Desfaz_Subciclos[v].adicionar[a]
32:	Senão
33:	Se a não pertence Desfaz_Subciclos[v] então:
34:	Desfaz_Subciclos[v].adicionar[a]
35:	Fim

36:	Fim
37:	Senão
38:	Se v não pertence Circuito então:
39:	Criar a chave v, ou seja, Circuito[v]
40:	Circuito[v].adicionar[a]
41:	Senão
42:	Se a não pertence em Circuito[v] então:
43:	Circuito[v].adicionar[a]
44:	Fim
45:	Fim
46:	Fim
47:	Fim
48:	Fim
49:	Fim
50:	Criar uma matriz QB que contenha as aresta que quebra os subciclos usando o dicionário Desfaz_Subciclos
51:	Criar uma matriz SB que contenha as aresta que quebra os subciclos usando o dicionário Circuito
52:	Retorne: QB, SB

FONTE: O autor (2024).

Esses dois algoritmos são utilizados em conjunto com o modelo proposto como um dos métodos de solução para o modelo.

4.3.3 Algoritmo III

Uma maneira de reduzir o número de iterações necessárias para resolver o modelo é identificar os possíveis subciclos que podem surgir durante a resolução do modelo. Isso implica em detectar todos os subciclos que podem estar presentes em um grafo e incorporar as restrições que eliminam esses subciclos no modelo, possibilitando assim alcançar uma solução em apenas uma iteração.

No entanto, determinar os subconjuntos " G_d " de vértices que formam os subciclos não é uma tarefa simples devido à grande quantidade dos subciclos que podem surgir. Por exemplo: supondo-se que os vértices 6, 7, 8, 7, 11, 10 e 6 formam

um subciclo com 6 arestas, ou seja, o subciclo [6,7,8,7,11,10,6], que podem ser representados de 12 formas diferentes, mas representam o mesmo ciclo. Portanto, identificar um subciclo distinto não é uma tarefa simples, especialmente quando os subciclos contêm mais de 10 arestas. Para abordar esse desafio foi desenvolvido o Algoritmo III, que visa determinar todos os subciclos que podem surgir a partir de um grafo.

No Algoritmo III, o valor de "n" representa o número de arestas que compõem o subciclo. Ao analisar o grafo representado na Figura 13, observa-se que quando $n = 2$, existem 15 subciclos distintos com 2 arestas, enquanto quando $n = 3$, nenhum subciclo distinto com 3 arestas é formado. Considerando que o grafo possui 24 arestas e 2 arestas estão conectadas aos vértices de origem, é possível determinar os subciclos com até 26 arestas. No entanto, determinar todos os subciclos de um grafo pode se tornar um problema NP completo, dependendo do número das vértices e arestas do grafo em questão.

Conforme mencionado anteriormente, o processo de determinar todos os subciclos de um grafo pode ser demorado devido à quantidade de subciclos distintos que podem surgir. Uma estratégia para mitigar esse problema é utilizar o paralelismo. Uma abordagem eficiente é abrir "n" janelas de execução, em que o Algoritmo III é utilizado para determinar subciclos com 2 arestas, e assim sucessivamente até subciclos com "n" arestas. Todas essas janelas podem ser executadas em paralelo, o que acelera significativamente o processo de identificação dos subciclos do grafo.

Outra maneira de empregar o paralelismo é dividir o Algoritmo III em três partes e executar a segunda e terceira partes em paralelo. Na primeira parte, gera-se uma lista de caminhos que são transformados em subciclos pela segunda parte. Esta segunda parte é executada em paralelo, aproveitando ao máximo os núcleos do computador.

Após a geração de todos os subciclos, a terceira parte do algoritmo é empregada para determinar quais são distintos, sendo processada simultaneamente (em Paralelo).

O Algoritmo III é composto pelo procedimento *Determinar_todos_Subciclos*.

ALGORITMO 8 - Determinar_todos_Subciclos

1:	procedimento Determinar_todos_Subciclos (Matriz de Distância)
2:	w=comprimento(Matriz_de_Distância)
3:	- Determine lista de adjacência dos vértices diferente "0" que não contenha o zero.
4:	- Criar uma lista P
5:	- Criar uma lista S
6:	Para i_1 in (1, w) faça:
7:	Para i_2 adjacentes de i_1 faça:
8:	⋮
9:	Faça i_{n+1} adjacentes de i_n faça:
10:	Se i_1 == i_{(n+1)} faça:
11:	P.adicionar [[i_1, i_2, ..., i_{(n+1)}]]
12:	Para i em P faça:
13:	Para k em (1, n-1) faça:
14:	Para m em (2, n) faça:
15:	Se (i_k, i_{(k+1)}) != (i_m, i_{(m+1)}) então:
16:	S.adicionar[i]
17:	Para cada subciclo de S faça:
18:	- Marque o subciclo como false:
19:	Para cada subciclo de S faça:
20:	Se o subciclo estiver marcado como True então:
21:	Continue:
22:	Senão:
23:	Se o subciclo estiver marcado como False então:
24:	- Compare o subciclo com os subciclos restantes de S, se algum subciclo restante for igual ao que estamos comparando, troque a marcação e os restantes iguais por True.
25:	Retorne: Retorne os subciclos de S marcados como False:

FONTE: O autor (2024).

Na próxima seção, os testes realizados com os dois métodos de solução serão apresentados e aplicados ao modelo proposto, juntamente com uma análise detalhada desses testes. Além disso, será realizada uma avaliação comparativa para determinar qual método de solução é mais eficaz.

5 RESULTADOS

Neste capítulo, pretende-se validar o modelo proposto por meio de comparações entre o modelo exato com a penalização e o modelo exato sem a ela. Esta abordagem permitirá uma avaliação mais precisa das melhorias e das adaptações introduzidas pelo novo modelo, particularmente em termos de eficiência e eficácia na solução dos problemas da roteirização. Haja vista que a versão sem a penalização semelhante existente na literatura possui muitas restrições diferentes, como evidenciado pela subsecção das inovações apresentadas, o que torna difícil uma comparação precisa entre os dois modelos, especialmente nos quesitos de diminuição da quantidade de veículos e à distância percorrida.

Em relação à eficiência e à eficácia cabe definirmos os tipos das soluções:

- *Solução factível*: instância resolvida até a otimalidade, ou seja, $GAP = 0$, representa a melhor solução factível. No entanto, quando a otimalidade não foi comprovada dentro do tempo máximo de processamento, ou seja, $GAP \neq 0$, a solução ainda pode ser considerada factível, desde que não apresente subciclos em ambas as situações.

O GAP é calculado da seguinte forma:

$$GAP = 100 \cdot \frac{FO - LI}{FO}, \quad (60)$$

em que na equação (60) é definido por FO o valor para a função objetivo durante o tempo de processamento e LI o limitante inferior calculado por um *software* de otimização.

- *Solução não factível*: instância em que não fora encontrada uma solução factível durante o tempo máximo de processamento, ou seja, uma solução com subciclos.

No artigo de Silva et al. (2023) os resultados obtidos são apresentados ao comparar o modelo proposto com e sem a penalização. Os resultados indicam que, em 81% dos casos, houve uma diminuição da distância percorrida pelos leitores ao utilizar o modelo da presente tese, sem que houvesse aumento da distância em nenhum percurso. Além disso, o GAP melhorou em 95% das instâncias e o número das iterações foi menor em 76% dos casos. A análise foi realizada considerando que o algoritmo parava ao obter uma solução factível dentro do limite de 1.200 segundos,

com o objetivo de minimizar a distância percorrida e a quantidade de veículos utilizados.

O tempo de trabalho do leitorista pode ser um fator crucial na determinação de uma solução factível. Com base nisso, propõe-se a geração de novas instâncias em que o tempo de trabalho do leitorista seja calculado por um método aplicável a qualquer instância. Além disso, uma análise dos resultados será realizada, comparando-se o tempo de trabalho do leitorista quando é "t", "t/2" e o que ocorre quando o tempo é aleatório.

5.1 ANÁLISE DO 1º MÉTODO DE SOLUÇÃO

Para avaliar o desempenho do Algoritmo de Solução, foram geradas 22 instâncias com características distintas, conforme apresentadas na Tabela 11, e adaptadas ao modelo proposto nesta tese. A principal diferença entre as instâncias reside no tempo de trabalho dos leitoristas, embora os grafos utilizados nessas instâncias sejam os mesmos dos artigos de Monroy et al. (2013), Santos et al. (2016) e Mendonça et al. (2017).

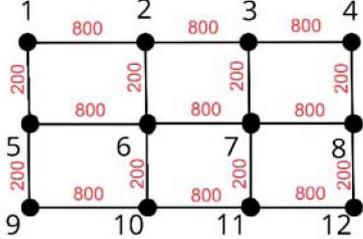
As 22 instâncias foram divididas em dois grupos, de 11 instâncias cada. No primeiro grupo, o tempo de trabalho do leitorista é calculado da seguinte forma: soma-se o tempo necessário para percorrer todos os arcos, multiplica-se este tempo por cinco, adiciona-se o tempo necessário para executar todas as tarefas e divide-se a soma total por cinco, determinando o tempo "t" de trabalho do leitorista por dia. No segundo grupo, o tempo "t" é dividido por dois.

Para contextualizar o cálculo "t", será apresentado um exemplo prático. Considera-se um veículo que deve percorrer o grafo ilustrado no Quadro 1, realizando dois tipos distintos de tarefas.

A Tarefa 1 deve ser realizada uma vez por semana nas arestas correspondentes, utilizando uma das seguintes combinações por arestas: ((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)).

Já a Tarefa 2 precisa ser realizada duas vezes por semana nas arestas designadas, utilizando um das combinações: ((1,0,0,1,0),(0,1,0,0,1)).

QUADRO 1 – TEMPO DE TRABALHO DO VEÍCULO

 <p style="text-align: center;">Grafo</p>	<p>Soma da Distância</p> $SD = (800+800+800+800+800+800+200+200+200 +200+200+200+200+200+800+800+800+800+800 +800+200+200+200+200+200+200+200+200+200+800 +800+800+ 800+800+800) = 17600$ <p>Supondo-se que veículo se movimente a uma velocidade de 0,5 m/s, então são necessários 8800 segundos para percorrer todos os arcos.</p>																																																																																																																																																																																																
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>40</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>40</td><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tarefa 1</p>	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	0	0	<p>Tempo total para realizar todas as tarefas do tipo 1.</p> $TT1 = (40 \cdot 35 + 38 \cdot 35 + 35 \cdot 35 + 24 \cdot 35 + 14 \cdot 35 + 4 \cdot 35 + 20 \cdot 35 + 44 \cdot 35 + 41 \cdot 35) = 9100$
0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tarefa 2</p>	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	<p>Tempo total para realizar todas as tarefas do tipo 2.</p> $TT2 = (22 \cdot 40 + 18 \cdot 40 + 2 \cdot 40 + 24 \cdot 40 + 2 \cdot 40 + 32 \cdot 40 + 2 \cdot 40 + 20 \cdot 40) = 4880$
0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
22	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	18	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																		
<p>Tempo de Trabalho do Veículo = $\frac{(5 \cdot 8800 + TT1 + 2 \cdot TT2)}{5} = 15572$</p>																																																																																																																																																																																																	

FONTE: O autor (2024).

O Algoritmo de Solução foi desenvolvido em Python 3.12.4, utilizando como solver o *software* GUROBI 11.0.2 com parâmetro padrão, em um computador Intel Core i7-7700k com 4.20 GHz de processamento, 32 GB de memória RAM e sistema operacional de 64 bits.

Na Tabela 11, as colunas 4 a 8 apresentam os dados obtidos pelo modelo exato com penalização, enquanto as colunas 9 a 13 exibem os dados obtidos pelo modelo exato sem a penalização. As primeiras onze linhas da tabela esboçam os dados obtidos com o tempo "t", e as linhas subsequentes apresentam os dados com

o tempo "t/2". Na primeira coluna, os nomes das instâncias indicam a quantidade de vértices do grafo, enquanto o segundo número se refere à quantidade das tarefas distintas que uma mesma aresta do grafo pode conter.

TABELA 11 - ANÁLISE DO MODELO EXATO COM E SEM A PENALIZAÇÃO

Instâncias		Gap_Modelo_1	Tempo_1	Z_Modelo_1	Veículos	Dias	Gap_Modelo_2	Tempo_2	Z_Modelo_2	Veículos	Dias
1	Nov_5_4	0%	9555	176	2	8	4%	21600	176	2	8
2	Nov_6_3	0%	19	443	1	5	0%	2849	443	1	5
3	Nov_8_4	0%	10	269	1	5	0%	755	269	2	6
4	Nov_9_4	0%	9	9856	1	4	0%	1550	9856	1	4
5	Nov_10_2	0%	128	154	1	5	6%	21600	154	2	5
6	Nov_11_3	0%	3431	630	1	5	4%	21600	617	2	5
7	Nov_12_2	0%	167	14000	1	4	0%	3784	13600	2	3
8	Nov_13_4	0%	1050	316	1	5	4%	21600	316	1	5
9	Nov_15_3	0%	45	1388	1	5	0%	6368	1354	3	5
10	Nov_16_4	0%	50	13050	1	4	0%	6883	13050	1	4
11	Nov_20_3	0%	5778	15170	1	4	6%	21600	15170	1	4
12	Nov_5_4	11%	21600	205	3	11	20%	21600	210	3	12
13	Nov_6_3	10%	21600	663	2	10	29%	21600	673	3	10
14	Nov_8_4	0%	631	281	2	10	1%	21600	281	3	10
15	Nov_9_4	4%	21600	13456	2	9	19%	21600	13456	3	9
16	Nov_10_2	17%	21600	215	2	10	33%	21600	216	2	10
17	Nov_11_3	34%	21600	825	2	10	--	-----	---	---	--
18	Nov_12_2	0%	4716	22000	1	5	29%	21600	21600	2	5
19	Nov_13_4	16%	21600	364	2	10	23%	21600	365	3	10
20	Nov_15_3	4%	21600	2135	2	9	14%	21600	1610	3	9
21	Nov_16_4	0%	1858	13050	1	4	0%	1911	13050	1	4
22	Nov_20_3	--	-----	---	---	--	28%	21600	8530	2	4

FONTE: O autor (2024).

Como essas instâncias possuem características diferentes, torna-se inviável descrever todas as instâncias detalhadamente, visto que cada uma difere na quantidade das combinações para realizar cada tarefa, no tempo disponível para

realizar a leitura de cada instrumento, no tempo de trabalho de cada leitorista, na quantidade dos aparelhos disponíveis para realizar a leitura, nas habilidades de cada leitorista, na quantidade dos equipamentos que cada leitorista pode carregar, na quantidade dos aparelhos instalados que devem ser lidos por tarefa nas arestas e no valor da penalização.

O objetivo da comparação apresentada na Tabela 11, juntamente com os exemplos dos Quadros 2 e 3 a seguir, é analisar a eficiência de minimizar, primeiramente, a quantidade dos leitoristas, e posteriormente, a distância percorrida por eles, em comparação com a abordagem que busca apenas a minimização da distância percorrida.

Analisando a tabela:

- O GAP é menor em 64% dos casos testados quando se utiliza o modelo proposto com a penalização, desconsiderando os casos em que ambos os cenários apresentaram GAP zero.
- Em 64% dos casos, houve uma redução no tempo necessário para encontrar uma solução ao comparar o modelo proposto com penalização com o modelo sem a penalização, desconsiderando os casos em que ambos os cenários atingiram o tempo máximo de execução estipulado de 21.600 segundos.
- Quando considera-se GAP ou Tempo de Execução em 95% dos casos houve uma melhora para se chegar a uma solução factível ao comparar o modelo proposto com a penalização em relação ao modelo sem a penalização.
- A cor vermelha indica que uma solução factível foi alcançada, mas não foi possível aprimorar essa solução. Já o traço preto indica que não foi possível encontrar uma solução factível dentro do tempo limite de 21.600 segundos.
- Quando o tempo de trabalho do leitorista foi reduzido pela metade, ou seja, para " $t/2$ ", houve uma maior dificuldade em encontrar a melhor solução factível dentro do limite de 21.600 segundos. Considerando o GAP ou o tempo de execução, o modelo com penalização foi melhor em 91% dos casos testado.
- Quando o tempo foi estabelecido como " t ", observou-se que em algumas instâncias, em que se esperava a utilização de apenas um leitorista, dois deles foram necessários devido à forma como os tempos de trabalho foram estipulados. Isso ocorreu nas instâncias Nov_8_4, Nov_10_2, Nov_11_3, Nov_12_2 e Nov_15_3, quando não se aplicou a penalização. Em todas as

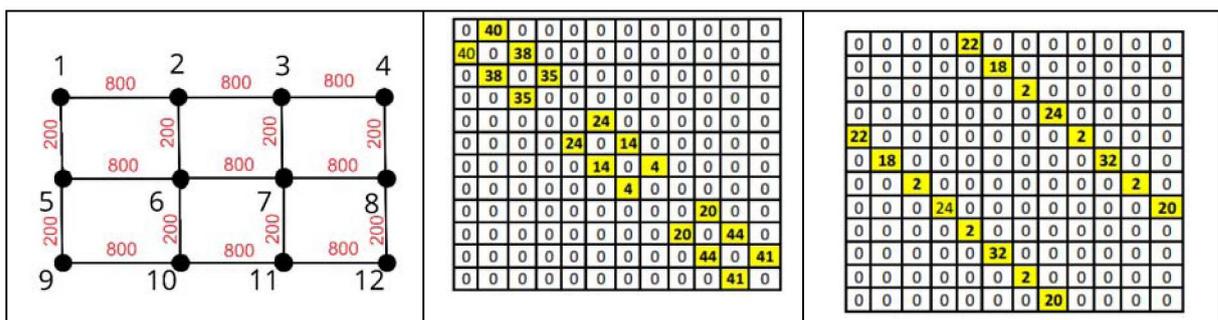
instâncias com o tempo “t” e a aplicação de penalização, obteve-se um gap zero. Por outro lado, quando o tempo foi reduzido para “t/2”, percebeu-se que em algumas instâncias, em que se esperava a necessidade de dois leituristas, apenas um fora suficiente, alcançando os resultados mais rápidos e melhores com a aplicação da penalização, como observado na instância Nov_16_4.

- Em quatro instâncias específicas (Nov_12_2, Nov_11_3, Nov_15_3, Nov_12_2), ou seja, 18% do total. O modelo sem a penalização resultou em uma distância percorrida menor em comparação ao modelo com a penalização. No entanto, esse resultado só seria economicamente vantajoso se o custo total para a empresa, caso considerasse o pagamento ao leiturista por distância percorrida e o valor das diárias, e este fosse menor quando a solução fosse obtida pelo modelo sem penalização.

A diferença na distância percorrida entre o modelo com a penalização e o modelo sem penalização será detalhada nos Quadros 2 e 3. Esses quadros analisam os resultados obtidos para a instância Nov_12_3, considerando o tempo de trabalho do leiturista como “t”.

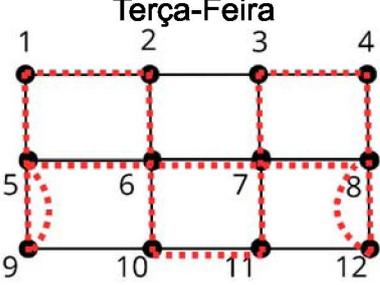
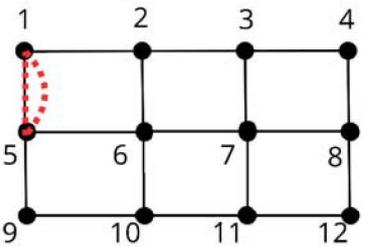
A análise destacará a importância de maximizar a capacidade de trabalho dos leituristas, uma vez que, conforme discutido na Seção 2 do Capítulo 2, o aumento no número dos leituristas resulta em maiores custos para a empresa terceirizada. Portanto, a otimização dos custos operacionais passa pela utilização mínima dos leituristas e pela redução da distância percorrida. Integrar essas duas abordagens em um único modelo — que minimize tanto a quantidade dos leituristas quanto a distância percorrida — é possível em pelo menos 82% dos casos, como indicado pelos dados da Tabela 11. Nos casos em que isso não é possível, os Quadros 2 e 3 serão usados para explorar as razões por trás dessas exceções.

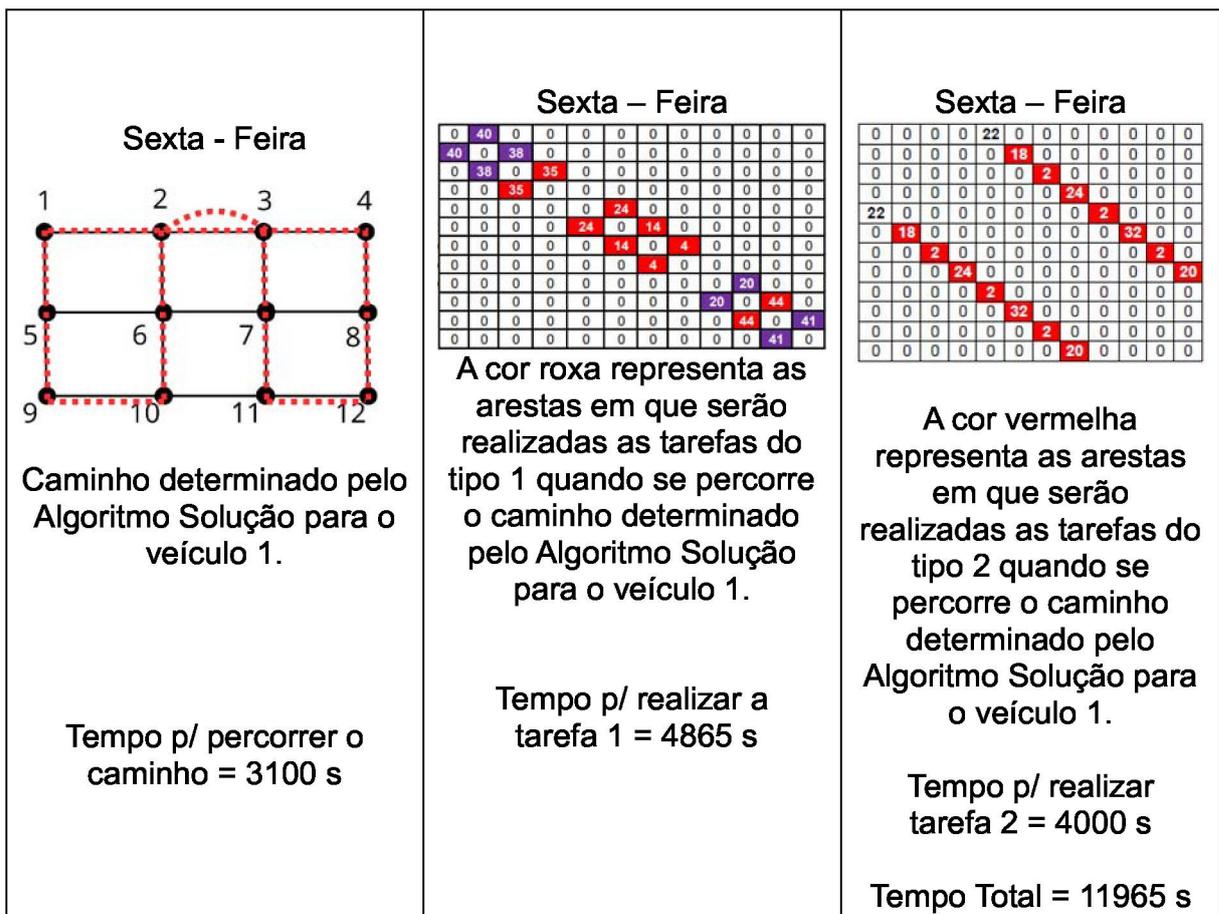
QUADRO 2 – EXEMPLO SEM PENALIZAÇÃO / INSTÂNCIA NOV_12_2



QUADRO 3 – EXEMPLO COM PENALIZAÇÃO / INSTÂNCIA NOV_12_2

<p>Grafo da instância Nov_12_2</p> <p>Velocidade de caminhada é de 0,5 m/s.</p> <p>Tempo de trabalho leitorista é de 12572 segundos por dia</p> <p>A cor amarela representa que ainda não foi realizada nenhuma tarefa.</p>	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>40</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>40</td><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>Quantidade de tarefas do tipo 1 a ser realizada por arestas.</p> <p>Tempo para realizar a tarefa 1 é de 35 segundos</p> <p>Combinação possível para se realizar a tarefa do tipo 1</p> <table border="1"> <tr><td>C_1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>C_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>C_3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>C_4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>C_5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_1	1	0	0	0	0	C_2	0	1	0	0	0	C_3	0	0	1	0	0	C_4	0	0	0	1	0	C_5	0	0	0	0	1	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>Quantidade de tarefas do tipo 2 a ser realizada por arestas.</p> <p>Tempo para realizar a tarefa 1 é de 40 segundos</p> <p>Combinação possível para se realizar a tarefa do tipo 2</p> <table border="1"> <tr><td>C_1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>C_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_1	1	0	0	1	0	C_2	0	1	0	0	1
0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
C_1	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
C_2	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
C_3	0	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
C_4	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
C_5	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
C_1	1	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
C_2	0	1	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
<p>Segunda - Feira</p> <p>Caminho determinado pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p>Tempo p/ percorrer o caminho = 200 s</p>	<p>Segunda – Feira</p> <table border="1"> <tr><td>0</td><td>40</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>40</td><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>Nenhuma tarefa do tipo 1 foi designada pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p>Tempo p/ realizar a tarefa 1 = 0 s</p>	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<p>Segunda - Feira</p> <table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>A cor azul representa a aresta que será realizada a tarefa do tipo 2 quando se percorre o caminho determinado pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p>Tempo p/ realizar a tarefa 2 = 880 s</p> <p>Tempo Total = 1080 s</p>	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																										
0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									

<p style="text-align: center;">Terça-Feira</p>  <p>Caminho determinado pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p style="text-align: center;">Tempo p/ percorrer o caminho = 3400 s</p>	<p style="text-align: center;">Terça-Feira</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>40</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>40</td><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>A cor vermelha representa as arestas em que serão realizadas as tarefas do tipo 1 quando se percorre o caminho determinado pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p style="text-align: center;">Tempo p/ realizar a tarefa 1 = 4235</p>	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	<p style="text-align: center;">Terça-Feira</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>A cor vermelha representa as arestas em que serão realizadas as tarefas do tipo 2 quando se percorre o caminho determinado pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p style="text-align: center;">Tempo p/ realizar a tarefa 2 = 4000</p> <p style="text-align: center;">Tempo Total = 11635 s</p>	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0
0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
<p style="text-align: center;">Quarta-Feira</p> <p style="text-align: center;">-----</p>	<p style="text-align: center;">Quarta-Feira</p> <p style="text-align: center;">-----</p>	<p style="text-align: center;">Quarta-Feira</p> <p style="text-align: center;">-----</p>																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
<p style="text-align: center;">Quinta-Feira</p>  <p>Caminho determinado pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p style="text-align: center;">Tempo p/ percorrer o caminho = 200 s</p>	<p style="text-align: center;">Quinta-Feira</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>40</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>40</td><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>38</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>35</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>44</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>41</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>Nenhuma tarefa do tipo 1 foi designada pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p style="text-align: center;">Tempo p/ realizar a tarefa 1 = 0 s</p>	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0	<p style="text-align: center;">Quinta-Feira</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>32</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p>A cor azul representa a aresta em que será realizada a tarefas do tipo 2 quando se percorre o caminho determinado pelo Algoritmo Solução para o veículo 1.</p> <p style="text-align: center;">Tempo p/ realizar a tarefa 2 = 880 s</p> <p style="text-align: center;">Tempo Total = 1080 s</p>	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0
0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
40	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	38	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	24	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	14	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	44	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	41	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			



FONTE: O autor (2024).

O quadro 2 e 3, ilustra como a não utilização máxima de um veículo no contexto do PCARP pode gerar custos desnecessários dependendo de quanto é pago pela diária do veículo e pelo km rodado.

5.1.1 Tempo Aleatório

Conforme mencionado anteriormente, o tempo de trabalho do leitorista pode ser um fator crucial na determinação de uma solução factível. Observou-se que, ao reduzir o tempo de trabalho do leitorista pela metade, houve maior dificuldade em encontrar uma solução factível, conforme demonstrado na Tabela 11. Isso levanta a seguinte questão: o que acontece quando o tempo de trabalho do leitorista é aleatório?

Antes de responder a essa pergunta, será realizado mais um teste, agora dividindo o tempo de trabalho “t” por 4.

Vale destacar que o tempo de trabalho do leitorista, denotado por “t”, foi calculado somando-se o tempo necessário para percorrer todos os arcos,

multiplicando o resultado por cinco, adicionando o tempo requerido para a execução de todas as tarefas, e dividindo essa soma total por cinco. Isso determina o tempo "t" de trabalho do leiturista por dia. Os dados apresentados na Tabela 12 foram obtidos considerando o tempo de trabalho do leiturista como sendo $\frac{1}{4}$ de "t".

TABELA 12 - ANÁLISE DO MODELO EXATO COM E SEM PENALIZAÇÃO COM " $\frac{1}{4}$ "

Instâncias		Gap_Modelo_1	Tempo_1	Z_Modelo_1	Veículos	Dias	Gap_Modelo_2	Tempo_2	Z_Modelo_2	Veículos	Dias
1	Nov_5_4	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
2	Nov_6_3	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
3	Nov_8_4	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
4	Nov_9_4	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
5	Nov_10_2	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
6	Nov_11_3	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
7	Nov_12_2	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
8	Nov_13_4	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--
9	Nov_15_3	47%	21600	2791	5	20	52%	21600	2936	5	21
10	Nov_16_4	35%	21600	19000	3	11	--	-----	----	--	--
11	Nov_20_3	--	-----	----	--	--	--	-----	----	--	--

FONTE: O autor (2024).

Observa-se uma relação direta entre o número de veículos e o tempo de trabalho disponível para os leituristas. À medida que o tempo de trabalho diminui, torna-se necessário aumentar o número dos veículos para alcançar uma solução factível. Na Tabela 11, os dados indicam que, quando o tempo de trabalho dos leituristas era "t", a maioria das soluções exigiu apenas um veículo, mesmo havendo seis veículos disponíveis. Com a redução do tempo de trabalho para " $\frac{t}{2}$ ", a maioria dos casos demandou dois veículos para uma solução factível, apesar de estarem disponíveis oito veículos. Já na Tabela 12, mesmo com 12 veículos disponíveis, em 81% dos casos não foi possível encontrar uma solução factível, evidenciando a dificuldade de resolver o problema, quando o tempo de trabalho dos leituristas é mais restrito.

Portanto, se o tempo de trabalho do leiturista for aleatório e maior que "t", a chance de obter uma solução factível com GAP zero é maior. Se o tempo aleatório

estiver entre " t " e " $t/2$ ", é possível encontrar uma solução factível, embora talvez não com GAP zero. Quando o tempo aleatório estiver entre " $t/2$ " e " $t/4$ ", a probabilidade de se chegar a uma solução factível é muito pequena, e se o tempo for menor que " $t/4$ ", a obtenção de uma solução factível torna-se praticamente impossível, conforme demonstram os dados das Tabelas 11 e 12.

5.2 ANÁLISE DO 2º MÉTODO DE SOLUÇÃO

Como observado na seção anterior, a redução do tempo de trabalho do leitorista pela metade dificultou a obtenção da melhor solução factível. Para tentar resolver este problema, foi desenvolvido o algoritmo 3, que determina todos os possíveis subciclos das instâncias. Em vez de adicionar as restrições que eliminam os subciclos a cada iteração, todas as restrições que eliminam os subciclos são acrescentadas na primeira iteração.

Vale mencionar que, embora o trabalho de Chu (2005), que foi um dos artigos que serviram de base para este estudo, não aborde diretamente a questão, não há consenso na literatura sobre qual abordagem é melhor: eliminar os subciclos à medida que surgem ou eliminá-los todos na primeira iteração.

No entanto, gerar todos os subciclos de uma instância não é uma tarefa fácil e pode demandar muito tempo. Para mitigar esse problema, podemos utilizar a técnica de paralelismo mencionada anteriormente. A Tabela 13 exemplifica como o uso do paralelismo pode ajudar na determinação dos subciclos e na redução do tempo necessário para essa tarefa.

A tabela apresenta dados das duas instâncias que mais demoraram para determinar todos os subciclos, demonstrando a redução de tempo obtida com o uso do paralelismo. É importante notar que o computador utilizado possui 4 núcleos, com a possibilidade de expansão para mais 4, totalizando 8 núcleos. Atualmente, há computadores pessoais disponíveis no mercado com até 96 núcleos, mas em *clusters* este número pode ser muito superior, indicando um potencial significativo para a otimização de processos por meio do paralelismo.

TABELA 13: ANÁLISE DE DESEMPENHO DE PARALELISMO

Nome	Tempo usando Paralelismo	Tempo sem Paralelismo
Nov_13_4	1234	4080
Nov_20_3	2973	5334

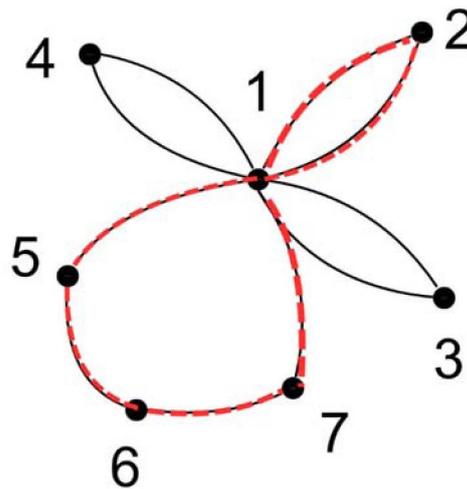
FONTE: O autor (2024)

Para analisar qual abordagem é mais eficaz (eliminar os subciclos à medida que surgem ou eliminá-los todos na primeira iteração) foram gerados os dados apresentados na Tabela 14.

Nas colunas 4, 5, 6,7 e 8 estão os resultados obtidos quando, na primeira iteração, é inserido um grande conjunto de restrições que eliminam o surgimento destes subciclos. Nas colunas 9, 10, 11, 12 e 13, são apresentados os dados obtidos quando os subciclos são eliminados à medida que vão surgindo.

Quando mencionado um grande conjunto de restrições, refere-se ao seguinte fato: o algoritmo 3 determina todos os subciclos. Alguns desses subciclos possuem mais de um loop. Por exemplo, a Figura 14 o subciclo [1,2,1,3,1,4,1,5,6,7,1] possui 4 loops. Os subciclos da Tabela 13, foram considerados subciclos com até dois loops.

FIGURA 14: LOOPS



FONTE: O autor (2024)

A 14ª coluna da tabela indica o tempo gasto para determinar todos os subciclos de cada instância com até 2 loops, e a 15ª coluna mostra a quantidade de loops.

A Tabela 14 detalha esses dados e ilustra a comparação entre as duas abordagens:

Tabela 14 – 1º MÉTODO DE SOLUÇÃO x 2º MÉTODO DE SOLUÇÃO

	Nome	GAP	Tempo	F.O	Veículos	Dias	GAP	Tempo	F.O	Veículos	Dias	Tempo para gerar os subcícios	Quantidade de subcícios total
1	Nov_5_4	0%	1848	176	2	9	0%	9555	176	2	8	2	9
2	Nov_6_3	0%	11	443	1	5	0%	19	443	1	5	3	86
3	Nov_8_4	0%	7	269	1	5	0%	10	269	1	5	3	24
4	Nov_9_4	0%	12	9856	1	4	0%	9	9856	1	4	4	88
5	Nov_10_2	0%	279	154	1	5	0%	128	154	1	5	9	261
6	Nov_11_3	7%	21600	630	1	5	0%	3431	630	1	5	365	7229
7	Nov_12_2	0%	97	14000	1	4	0%	167	14000	1	4	15	758
8	Nov_13_4	71%	21600	551	2	6	0%	1050	316	1	5	1234	34982
9	Nov_15_3	0%	43	1388	1	5	0%	45	1388	1	5	12	110
10	Nov_16_4	0%	331	13050	1	4	0%	50	13050	1	4	26	744
11	Nov_20_3	--	-----	---	---	--	0%	5778	15170	1	4	2973	9266
12	Nov_5_4	10%	21600	204	3	12	11%	21600	205	3	11	2	9
13	Nov_6_3	6%	21600	663	2	10	10%	21600	663	2	10	3	86
14	Nov_8_4	0%	152	281	2	10	0%	631	281	2	10	3	24
15	Nov_9_4	0%	6262	13456	2	9	4%	21600	13456	2	9	4	88
16	Nov_10_2	36%	21600	219	2	10	17%	21600	215	2	10	9	261
17	Nov_11_3	29%	21600	808	2	10	34%	21600	825	2	10	365	7229
18	Nov_12_2	0%	3076	22000	1	5	0%	4716	22000	1	5	15	758
19	Nov_13_4	44%	21600	430	3	11	16%	21600	364	2	10	1234	34892
20	Nov_15_3	4%	21600	2135	2	9	4%	21600	1610	2	9	12	110
21	Nov_16_4	0%	151	13050	1	4	0%	1858	13050	1	4	26	744
22	Nov_20_3	--	-----	---	---	--	--	-----	---	---	--	2973	9266

FONTE: O autor (2024)

Esta tabela permite avaliar o segundo método de solução. Observa-se:

- Ao incluir um grande conjunto de restrições na primeira iteração, o segundo método foi mais eficiente em 54% dos casos, levando em consideração o GAP e o tempo de solução e a distância percorrida pelos veículos.
- As instâncias Nov_11_3, Nov_12_2, Nov_15_3 quando o tempo de trabalho do leiturista era "t" o valor da distância percorrida pelos leituristas na Tabela 11 apresentaram valores menores do que o valor presente nesta Tabela 14, mas isto ocorreu na situação em que o objetivo era só minimizar a distância e não se preocupava com a minimização da quantidade de veículos, haja visto que para se chegar nestes valores foram necessários utilizar mais veículos.

É importante destacar que dois artigos com resultados preliminares desta tese já foram publicados. O primeiro, intitulado "Algoritmo de Solução para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados e Periódicos Aplicado ao Monitoramento de Usinas Hidrelétricas" 2023, faz uma análise do modelo matemático presente nesta tese e explora os resultados com e sem penalização. O segundo artigo, intitulado "Algoritmo Completo para Resolução do Problema de Roteirização em Arcos Capacitados com Múltiplas Tarefas" 2024 aborda o segundo método de solução. Embora ambos os artigos utilizem métodos descritos nesta tese, as técnicas para se obter a solução diferem. A principal diferença nesta tese em relação aos artigos reside na utilização da função objetivo. Nos dois métodos das soluções apresentados, na primeira fase, a segunda somatória, que penaliza a utilização dos veículos, prevalece sobre a primeira somatória devido aos valores da penalização. Na segunda fase, utiliza-se apenas a primeira somatória. No artigo os valores da penalização são obtidos de forma diferente e só tem uma fase.

Portanto, esta tese produz novos resultados ao aplicar técnicas de solução aqui apresentadas, além de diferenças no tempo de execução para alcançar a primeira solução factível e do tempo total para se obter os dados das tabelas.

Com esses últimos resultados, obtemos a resposta para a questão levantada ao longo deste trabalho: qual método é superior e o que pode acontecer com a solução, quando o tempo de trabalho do leiturista é aleatório. E por fim, apresentaremos as considerações finais e sugestões para os estudos futuros que envolvam Problema de Roteamento em Arcos Capacitados e Periódicos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo matemático desenvolvido pode ser aplicado a diversas áreas, como coleta de lixo, monitoramento dos instrumentos em hidrelétricas, indústrias, ou em qualquer empresa que precisa otimizar as rotas de funcionários que realizam múltiplas tarefas, com o objetivo de minimizar, primeiramente, a quantidade de veículos, e posteriormente, a distância percorrida.

Os modelos matemáticos para o PCARP são conhecidos por sua complexidade, conforme relatado por Hess (2023). Uma das principais dificuldades é a determinação dos subciclos que podem surgir durante a execução do modelo em *softwares* de otimização. Para superar essa barreira, foram desenvolvidos algoritmos que identificam subciclos em uma solução e introduzem as restrições que eliminam esses subciclos, garantindo assim uma solução factível para o modelo proposto. No contexto descrito, isso resulta em uma solução eficaz para o gestor da empresa, permitindo expandir suas operações enquanto reduz os custos, utilizando a quantidade mínima necessária de trabalhadores.

Este trabalho apresenta uma proposta de modelo matemático que generaliza o PCARP para resolver um problema ainda não abordado na literatura: minimizar a quantidade de veículos e a distância percorrida pelos mesmos para realizar múltiplas tarefas. Além disso, foi desenvolvido um Algoritmo Solução proporcionando uma solução factível sem os subciclos para o modelo proposto.

Uma das contribuições do Algoritmo Solução é o Algoritmo 1, que pode identificar subciclos em um grafo não direcionado. Essa capacidade é crucial quando se lida com grafos com muitos vértices, pois verificar manualmente a presença de subciclos na solução apresentada pelo modelo exato seria inviável.

Analisando a descrição do problema e os dados da Tabela 11, bem como os resultados apresentados nas outras tabelas, fica evidente que a preocupação com a minimização da quantidade dos veículos pode trazer diversos benefícios além da determinação de uma quantidade mínima dos veículos e uma rota mínima. Essa abordagem não só ajuda a reduzir o tempo necessário para obter uma solução, como também pode contribuir para a diminuição dos custos.

Outro ponto crucial a ser considerado é o tempo de trabalho do leitorista. Dependendo da duração da jornada de trabalho, a determinação de uma solução

factível pode se tornar bastante desafiadora. Com base nos resultados apresentados nas Tabelas 11 e 12, foi realizada uma análise para identificar em quais situações há maior ou menor probabilidade de se obter uma solução factível. Além disso, o segundo método de solução se mostrou mais eficiente ao resolver o modelo proposto em duas fases: na primeira, busca-se minimizar a quantidade dos veículos, e na segunda, a distância percorrida por esses veículos.

O Algoritmo 3 também é uma contribuição relevante, pois cria os subciclos em um grafo e pode ser utilizado para encontrar os caminhos que passam pela origem, iniciando pelo vértice "0" em vez de "1". Essa característica é útil na determinação de heurísticas, permitindo a identificação de vários caminhos que passam pela origem e a seleção dos melhores, ou seja, os caminhos mais curtos que contemplem todas as características e que satisfaçam todas as condições do problema a ser resolvido.

Para trabalhos futuros, a ideia da heurística apresentada no parágrafo anterior é uma sugestão promissora para novas pesquisas sobre o tema. Pois, uma solução factível pode se tornar inviável, quando o tempo de trabalho do leitorista é muito curto em comparação com o tamanho do grafo modelado, quando tenta-se achar a solução pelo modelo exato. Outra possibilidade para novos trabalhos seria dividir o grafo em regiões, onde cada região representaria uma tarefa, dado que o problema envolve múltiplas tarefas.

REFERÊNCIAS

- ASSAD, A. A.; PEARN, W.; GOLDEN, B. L. The Capacitated Chinese Postman Problem: Lower Bounds and Solvable Cases. **American Journal of Mathematical and Management Sciences**, v. 7, n. 1–2, 1987.
- BARRAGENS, COMITÊ BRASILEIRO DE GRANDES. Auscultação e Instrumentação de Barragens no Brasil. II **Simpósio sobre instrumentação de Barragens**, v. 1, 1996.
- BATISTA, G. V.; SCARPIN, C. T. Comparison between two mathematical models for problems in monitoring and inspection of arcs. **International Referred Journal of Engineering and Science**, v. 3, n. 6, p. 19–24, 2014.
- BATISTA, G. V. O problema de Roteamento Periódico e Capacitado em Arcos com Movimentos Contínuos, Tese (Doutorado) – **Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná**, Curitiba, 2018.
- BATISTA, G. V.; SCARPIN, C. T.; PÉCORA, J. E; RUIZ, A. A New Ant Colony Optimization Algorithm to Solve the Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Continuous Moves. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2019, p.1-12, 2019.
- BELENGUER, J. M.; BENAVENT, E. The capacitated arc routing problem: Valid inequalities and facets. **Computational Optimization and Applications**, v. 10, n. 2, p. 165–187, 1998.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. The Price of Robustness. **Operations Research**, v. 52, n. 1, p. 35–53, 2004.
- BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. **Grafos: introdução e prática**. 1º ed. São Paulo: Blucher, 2009.
- BRASIL. Lei no 12.334 de 20 de setembro de 2010. Altera a redação do art. 35 da lei no 9.433, de 8 de janeiro de 1997, e do art. 4o da lei no 9.984, de 17 de julho de 2000. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 20 de Setembro 2010. --
- BRÄYSY, O; GENDREAU, M. Genetic algorithms for the vehicle routing problem with time windows. **Arpakannus**, (1), p. 33-38, 2001.
- CAMPOS, V.; CHRISTOFIDES, N.; CORBERÁN, Á.; MOTA, E. ALGORITHM FOR THE RURAL POSTMAN PROBLEM ON A DIRECTED GRAPH. **Mathematical Programming Study**, v. 26, p. 155–166, 1983.
- CARMO, J. S. A. DO. **Grandes barragens: vulnerabilidades e riscos**, 2014.
- CHEN, Y.; HAO, J. K. Two phased hybrid local search for the periodic capacitated arc routing problem. **European Journal of Operational Research**, v.264, p.55-65, 2018.
- CHU, F.; LABADI, N.; PRINS, C. The Periodic Capacitated Arc Routing Problem linear programming model, metaheuristic and lower bounds. **Journal of Systems Science and Systems Engineering**, v. 13, n. 4, p. 423–435, 2004.

CHU, F.; LABADI, N.; PRINS, C. Heuristics for the periodic capacitated arc routing problem. **Journal of Intelligent Manufacturing**, v. 16, n. 2, p. 243–251, 2005.

DROR, M.; LAPORTE, G.; TRUDEAU, P. Vehicle routing with split deliveries. **Discrete Applied Mathematics**, v. 50, n. 3, p. 239–254, 1994.

E. BENAVENT, V. CAMPOS, A. CORBERAN, E. M. The Capacitated Arc Routing Problem: Lower bounds. **Networks**, v. 22, n. 7, p. 669–690, 1992.

EISELT, H. A.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G. Arc Routing Problems, Part II: The Rural Postman Problem. **Operations Research**, v. 43, n. 3, p. 399–414, 2008.

EGLESE, R. W. Problem Routeing winter gritting vehicles. **Discrete Applied Mathematics**, v. 48, n. 3, p. 231–244, 1994.

EVANS, J. R.; MINIEKA, E. **Optimization Algorithms for Networks and Graphs**. New York, 1992.

FILHO, J. G. **Desempenho de Obras Geotécnicas**. Editora Universitária UFPE, 2006.

FILHO, M. G.; JUNQUEIRA, R. DE À. R. Problema do Carteiro Chinês: escolha de métodos de solução e análise de tempos computacionais. **Production**, v. 16, p. 538–551, 2006.

FONTENELLE, A. DE S. **Relatório Anual de Segurança de Barragens - Riscos e Inspeções - 2007/2008**. Fortaleza, 2008.

GHIANI, G.; LAPORTE, G. A branch-and-cut algorithm for the Undirected Rural Postman Problem. **Mathematical Programming**, v. 87, n. 3, p. 467–481, 2003.

GHIANI, G.; MUSMANNO, R.; PALETTA, G.; TRIKI, C. A heuristic for the periodic rural postman problem. **Computers and Operations Research**, v. 32, n. 2, p. 219–228, 2005.

GOLDEN, B. L.; WONG, R. T. Capacitated arc routing problems. **Networks**, v. 11, n. 3, p. 305–315, 1981.

Gurobi Optimization, LLC. (2024). **Gurobi Optimizer Reference Manual**. Disponível em: < <https://www.gurobi.com> > Acesso em: 01/07/2024

SANTOS, C. G.; SCARPIN, Cassius Tadeu. **A mathematical modeling proposal for a Multiple Tasks Periodic Capacitated Arc Routing Problem**. International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA), v. 5, p. 26–36, 2015.

HARCHE, F.; RAGHAVAN, P. A generalized exchange heuristic for the capacitated vehicle routing problem. **International Journal of Systems Science**, v. 25, n. 11, p. 1911–1920, 1994.

HESS, Christina et al. Waste collection routing: a survey on problems and methods. **Central European Journal of Operations Research**, p. 1–36, 2023.

KANSOU, A.; YASSINE, A. Ant colony system for the periodic capacitated arc routing problem'. **Proceedings of International Network Optimization Conference (INOC 2009)**, p. 1–7, 2009.

KONOWALENKO, F. Problema Do Carteiro Chinês Não-Orientado E Misto Para a Otimização De Rotas Na Cidade De Irati / Pr, Dissertação (Mestrado) – **Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná**, Curitiba, 2012.

LACOMME, P.; PRINS, C.; RAMDANE-CHÉRIF, W. Evolutionary Algorithms for Multiperiod Arc Routing Problems. **9th Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based systems**, p. 1–8, 2002.

LACOMME, P.; PRINS, C.; RAMDANE-CHÉRIF, W. Evolutionary Algorithms for Periodic Arc Routing Problems. **European Journal of Operational Research**, v. 165, p. 535–553, 2005.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y. Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem. **North-Holland Mathematics Studies**, v. 132, n. C, p. 147–184, 1987.

LENSTRA, J. K.; RINNOOY KAN, A. H. G. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. **Networks**, v. 11, n. 2, p. 221–227, 1981.

LONGO, H.; DE ARAGÃO, M. P.; UCHOA, E. Solving capacitated arc routing problems using a transformation to the CVRP. **Computers and Operations Research**, v. 33, n. 6, p. 1823–1837, 2006.

MAZZEO, S.; LOISEAU, I. An Ant Colony Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 18, p. 181–186, 2004.

MENDONÇA, P. F.; SILVA, F. P. DA; KESTRING, F. B. F. Um Estudo sobre Algoritmos para Roteirização. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**, v. Edição Esp, p. 1–23, 2017.

MINIEKA, E. The Chinese Postman Problem for Mixed Networks. **Management Science**, v. 25, n. 7, p. 609–707, 1979.

MONROY, I. M.; AMAYA, C. A.; LANGEVIN, A. The periodic capacitated arc routing problem with irregular services. **Discrete Applied Mathematics**, v. 161, n. 4–5, p. 691–701, 2013. Elsevier B.V.

ORLOFF, C. S. A fundamental problem in vehicle routing. **Networks**, v. 4, n. 1, p. 35–64, 1974.

PEARN, W. L.; ASSAD, A.; GOLDEN, B. L. Transforming arc routing into node routing problems. **Computers & operations research**, v. 14, n. 4, p. 285–288, 1987.

PEREIRA, L. W. L.; GOMES, F. J. N.; PALHANO, A. W. DE C.; et al. O problema do carteiro chinês, algoritmos exatos e um ambiente MVI para análise de suas instâncias: sistema XNÊS. **Pesquisa Operacional**, v. 29, n. 2, p. 323–363, 2010.

PIASENTIN, C. Considerações sobre a importância das observações visuais na auscultação de barragens. **COMITÊ BRASILEIRO DE BARRAGENS - XXV SEMINÁRIO NACIONAL DE GRANDES BARRAGENS - SALVADOR**, 2003.

PRINS, C. Efficient Heuristics for the Heterogeneous Fleet Multitrip VRP with Application to a Large-Scale Real Case. **Journal of Mathematical Modelling and**

Algorithms, v. 1, n. 2, p. 135–150, 2002.

PORUMBEL, D; COELHO, I M.; TALBI, E. Using an exact bi-objective decoder in a memetic algorithm for arc-routing (and other decoder-expressible) problems. **European Journal of Operational Research**, v. 313, n. 1, p. 25–43, 2024.

Python Software Foundation. (2023). **concurrent.futures — Launching parallel tasks**. Disponível em:< <https://docs.python.org/3/library/concurrent.futures.html>> Acesso em: 28/06/2024

REINELT, G. TSPLIB. A traveling salesman problem library. **ORSA journal on computing**, v. 3, n. 4, p. 376–384, 1991.

RIQUELME-RODRÍGUEZ, J. P.; GAMACHE, M.; LANGEVIN, A. Location arc routing problem with inventory constraints. **Computers and Operations Research**, v. 76, p. 84–94, 2016. Elsevier.

SANTOS, C. G. Uma Proposta de Modelagem Matemática para um Problema de Roteirização Periódica em Arcos Capacitados com Múltiplas Tarefas. Tese (Doutorado) – **Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.**

SANTOS, C. G; SCARPIN, C. T; DA SILVA, F. P. Mathematical modeling for periodic capacitated arc routing problem. **International Journal of Engineering**, v. 8, n. 02, p. 8269, 2016.

SILVA, F, P; WILHELM, V, E; SANDMANN, A. Algoritmo de Solução para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados e Periódicos Aplicado ao Monitoramento de Usinas Hidrelétricas. **Revista de Gestão Social e Ambiental**, v. 2, pág. e04511-e04511, 2023.

Silva, F, P; Wilhelm, V, E; Santos, C, G; Thomaz, D,V; Sandmann, A.;Júnior, M, A. Algoritmo de Solução para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados e Periódicos Aplicados ao Monitoramento de Usinas Hidrelétricas. **Revista de Gestão Social e Ambiental**, v. 4, pág. e07440-e07440, 2024.

SILVEIRA, J. F. A. **Instrumentação e Comportamento de Fundações de Barragens de Concreto**. 1 ed. São Paulo:Oficina de Textos, 2003.

SILVEIRA, J. F. A. **Instrumentação e Segurança de Barragens de Terra e Encoramento**. 1º ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2006.

TAGMOUTI, M.; GENDREAU, M.; POTVIN, J. Y. Arc routing problems with time-dependent service costs. **European Journal of Operational Research**, v. 181, n. 1, p. 30–39, 2007.

TEODOROVIĆ, D.; PAVKOVIĆ, G. The fuzzy set theory approach to the vehicle routing problem when demand at nodes is uncertain. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 82, n. 3, p. 307–317, 1996.

THOMAZ, D., LOCH, G., SCARPIN, C., & SCHENEKEMBERG, C. (2018). A mathematical model for the periodic capacitive arc routing problem with time window.

IEEE Latin America Transactions, 16 (10), 2567-2573.

TIRKOLAEI, E. B.; MAHDAVI, I.; ESFAHANI, M. M. S. A robust periodic capacitated arc routing problem for urban waste collection considering drivers and crew's working time. **Waste Management**, v. 76, p. 138-146, 2018.

TURNER, W. C.; GHARE, P. M.; FOURDS, L. R. Transportation routing problem—a survey. **AIIE Transactions**, v. 6, n. 4, p. 288–301, 1974.

YANG, W.; KE, L. An improved fireworks algorithm for the capacitated vehicle routing problem. **Frontiers of Computer Science**, v. 13, n. 3, p. 552–564, 2019.

YU, V. F.; LIN, S. W.; LEE, W.; TING, C. J. A simulated annealing heuristic for the capacitated location routing problem. **Computers and Industrial Engineering**, 2010.

ZHANG, Y.; MEI, Y.; TANG, K.; JIANG, K. Memetic algorithm with route decomposing for periodic capacitated arc routing problem. **Applied Soft Computing Journal**, v. 52, p. 1130–1142, 2017. Elsevier B.V.