



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fernanda de Oliveira de Jesus

**Modelagem matemática da hemodinâmica
em válvulas aórticas bicúspides**

Curitiba

2024

Fernanda de Oliveira de Jesus

Modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
à Universidade Federal do Paraná como re-
quisito necessário para obtenção do grau de
Bacharel em Matemática.

Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Matemática
Graduação em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elías Alfredo Gudiño Rojas

Curitiba
2024

Agradecimentos

Antes dos agradecimentos, gostaria da oportunidade de contextualizar o que essa finalização significa para mim.

Quando criança, sempre no fim de cada mês, lembro da minha mãe, Rosângela, sentada na mesa da cozinha fazendo o cálculo de todas as despesas. Na sua agenda, operações básicas de adição e subtração encantavam meus olhinhos. Foi lá, exatamente naqueles momentos, que ela despertou em mim o interesse pela Matemática. Portanto, à minha mãe, irmãs (Keteriane, Kescilin, Bruna e Isadora), meu padrasto (Jota) e sobrinhos (Vinicius e Bernardo), gostaria de dedicar inteiramente essa conquista de finalizar a graduação em uma universidade pública. Isso é por nós e para nós! Serei eternamente grata por tudo que fazem por mim.

À minha amada Carolina, expresso minha gratidão por todo o apoio, incentivo e compreensão ao longo deste último ano. Sou grata por todo o amor e dedicação, e por sempre me motivar.

Aos meus amigos, agradeço pelos momentos de aprendizado, pela compreensão, amor e todo apoio até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Elías, agradeço pelo comprometimento, dedicação e paciência para me ensinar. Agradeço também por ser uma inspiração para seguir na carreira acadêmica.

Aos docentes do Departamento de Matemática e a todos os outros que passaram pela minha vida na Educação Básica, agradeço pelos aprendizados e inspiração, seja nas aulas, nas orientações, nos projetos de extensão, etc.

Aos profissionais da universidade que me auxiliaram ao longo da graduação (em particular, à minha psicóloga, a Lúcia), agradeço imensamente por toda atenção e cuidados dispensados a mim.

Por fim, expresso minha gratidão à Universidade Federal do Paraná (UFPR) por me acolher e proporcionar um ambiente de aprendizado e crescimento. Esta instituição não apenas me ensinou acadêmica e profissionalmente, mas também me permitiu descobrir quem sou e o que sou capaz de alcançar. Viva à universidade pública!

Resumo

A partir da motivação do uso da modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides (*VAB*) como uma ferramenta complementar para o planejamento de intervenções clínicas para pacientes com *VAB*, uma patologia cardíaca congênita, este estudo buscou compreender o comportamento do escoamento sanguíneo (considerado como um fluido newtoniano) e os aspectos da sua interação com estruturas sólidas, como as paredes e cúspides aórticas.

Baseando-se nisso, com o auxílio do software *COMSOL Multiphysics*, realizamos algumas simulações numéricas de um escoamento laminar incompressível de um fluido newtoniano em uma geometria retangular para compreender de modo geral os aspectos da modelagem matemática. Para isso, foi considerado o escoamento nos estados estacionário e transiente.

Por fim, o principal objetivo deste estudo é produzir uma simulação numérica da hemodinâmica em uma válvula aórtica bicúspide considerando uma geometria idealizada (simétrica) para que, futuramente, seja expandida à criação e análise de casos de pacientes fictícios com essa condição cardíaca.

Palavras-chave: modelagem matemática, hemodinâmica, simulação numérica, interação fluido-estrutura, válvulas aórticas bicúspides.

Abstract

From the motivation behind using mathematical modeling of hemodynamics in bicuspid aortic valves (*BAV*) as a complementary tool for clinical intervention planning for patients with *BAV*, a congenital heart pathology, this study aimed to understand the behavior of blood flow (considered as a newtonian fluid) and aspects of its interaction with solid structures, such as aortic walls and cusps.

Based on this, with the assistance of *COMSOL Multiphysics* software, we conducted several numerical simulations of incompressible laminar flow of a Newtonian fluid in a rectangular geometry to generally understand aspects of mathematical modeling. For this purpose, both steady-state and transient flows were considered.

Finally, the main objective of this study is to produce a numerical simulation of hemodynamics in a bicuspid aortic valve considering an idealized (symmetric) geometry so that, in the future, it can be expanded to the creation and analysis of cases of fictitious patients with this cardiac condition.

Keywords: mathematical modeling, hemodynamics, numerical simulation, fluid-structure interaction, bicuspid aortic valves.

Lista de tabelas

Tabela 1 – Fluxo de massa em um VC	28
Tabela 2 – Fluxo da quantidade de movimento linear em um VC	29
Tabela 3 – Parâmetros para a simulação numérica de um escoamento no estado estacionário.	53
Tabela 4 – Informações das malhas computacionais para o escoamento no estado estacionário.	57
Tabela 5 – Erro residual para parâmetros temporais diferentes.	61
Tabela 6 – Erro relativo entre os parâmetros temporais: $P1 - P2$ (parâmetros 1 e 2) e $P1 - P3$ (parâmetros 1 e 3).	61
Tabela 7 – Parâmetros para a simulação numérica do escoamento sanguíneo (<i>Torrado et al.</i> , 2015, p. 32).	62
Tabela 8 – Propriedades das paredes e cúspides aórticas (<i>Torrado et al.</i> , 2015, p. 36).	65
Tabela 9 – Informações das malhas computacionais.	66
Tabela 10 – Erro residual considerando o refinamento da malha computacional.	67
Tabela 11 – Erro relativo entre as malhas $M1 - M2$ e $M1 - M3$	67
Tabela 12 – Erro residual obtido na simulação com parâmetros temporais diferentes.	67
Tabela 13 – Erro relativo entre os parâmetros temporais $P1 - P2$ e $P1 - P3$	68

Lista de ilustrações

Figura 1 – Válvulas cardíacas.	17
Figura 2 – (a) Componentes da válvula aórtica. (b) Componentes da raiz aórtica.	19
Figura 3 – Diferença entre uma válvula aórtica tricúspide (normal) e uma válvula aórtica bicúspide.	19
Figura 4 – Anatomia de uma válvula aórtica bicúspide.	20
Figura 5 – Classificação de uma VAB de acordo com q fusão das cúspides e número de raphes.	20
Figura 6 – Forças de superfície sobre a superfície de um volume de controle.	25
Figura 7 – Fluxo de massa de um fluido em um volume de controle.	26
Figura 8 – Forças de superfície σ_{ij}	30
Figura 9 – Forças de superfície na direção y	31
Figura 10 – Escoamento laminar entre superfícies fixas e paralelas.	35
Figura 11 – Deslocamento de uma partícula material.	37
Figura 12 – (a) Representação de uma partição de um domínio discretizado em elementos finitos. (b) Representação de um elemento finito (triângulo).	43
Figura 13 – Geometria retangular que representa o canal rígido do escoamento.	54
Figura 14 – (a) Fluxo zero para a pressão em todo $\partial\Omega$. (b) Fluxo zero para a velocidade em $\Gamma_{out} \subset \partial\Omega$	56
Figura 15 – (a) Velocidade de entrada em $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega$. (b) Velocidade do fluido é nula em $\Gamma_{wall} \subset \partial\Omega$	57
Figura 16 – Refinamento das malhas.	58
Figura 17 – Convergência das soluções com relação ao refinamento da malha.	58
Figura 18 – (a) Distribuição da velocidade em um corte transversal considerando o refinamento da malha. (b) Corte transversal centrado em $x = \frac{L}{2}$ do domínio discretizado pela malha 1.	59
Figura 19 – Magnitude da velocidade considerando três parâmetros temporais no ponto $(L/2,0)$ do domínio computacional.	61
Figura 20 – Magnitude da velocidade (a) e pressão (b).	62
Figura 21 – Geometria idealizada da válvula aórtica bicúspide.	63
Figura 22 – (a) Domínio computacional do sangue. (b) Condição de não deslizamento nas paredes aórticas.	63
Figura 23 – Perfil fisiológico de pressão transvalvar correspondente a dois ciclos cardíacos de 0.8 s cada (<i>Torrado et al.</i> , 2015, p. 37).	64
Figura 24 – (a) Condição de entrada descrita por $p = 0$ Pa. (b) Condição de saída descrita pelo perfil fisiológico de pressão p_{out}	64

Figura 25 – (a) Domínio computacional das paredes aórticas. (b) Domínio computacional das cúspides aórticas.	65
Figura 26 – Restrição fixa aplicada ao contorno externo das paredes aórticas.	65
Figura 27 – Acoplamento multifísico no contorno do domínio computacional do fluido.	66
Figura 28 – Refinamento da malha computacional no domínio da válvula aórtica bicúspide.	66
Figura 29 – Magnitude da velocidade no ponto $(2.44, 0)$ do domínio computacional considerando o refinamento da malha.	67
Figura 30 – Hemodinâmica numa VAB no instante 0.1 s do ciclo cardíaco.	69
Figura 31 – Hemodinâmica numa VAB no instante 0.25 s do ciclo cardíaco.	70
Figura 32 – Hemodinâmica numa VAB no instante 0.4 s do ciclo cardíaco.	70
Figura 33 – Hemodinâmica numa VAB no instante 0.6 s do ciclo cardíaco.	71
Figura 34 – Hemodinâmica numa VAB no instante 0.8 s do ciclo cardíaco.	71

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	VÁLVULAS AÓRTICAS BICÚSPIDES	17
2.1	Coração humano	17
2.1.1	Ciclo cardíaco	17
2.1.2	Raiz aórtica	18
2.2	Válvula aórtica bicúspide	19
2.2.1	Classificação das VAB	20
3	ANÁLISE DIFERENCIAL DO ESCOAMENTO	23
3.1	Conceitos fundamentais	23
3.1.1	Fluido como um meio contínuo	23
3.1.2	Campos de velocidade e aceleração	23
3.1.3	Campo de tensão	24
3.1.4	Viscosidade	26
3.2	Equações diferenciais de um escoamento	26
3.2.1	Princípio da conservação de massa	27
3.2.2	Princípio da conservação da quantidade de movimento linear	29
3.3	Equações de governo	33
3.3.1	Equação da continuidade	33
3.3.2	Equações de Navier-Stokes	33
3.3.3	Velocidade de entrada	34
3.3.4	Condição de contorno na fronteira	36
4	INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	37
4.1	Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária	37
4.1.1	Teorema de Transporte de Reynolds	38
4.1.2	Conservação de massa	40
4.1.3	Conservação da quantidade de movimento linear	41
5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	43
5.1	Equações do fluido	44
5.2	Equações da estrutura	44
5.2.1	Condições de contorno	46
5.2.1.1	Condição de contorno de Dirichlet	46
5.2.1.2	Condição de contorno de Neumann	47

5.3	Formulação fraca	47
5.4	Discretização da equação do movimento da estrutura	48
5.4.1	Discretização espacial	48
5.4.2	Discretização temporal	49
5.4.2.1	Aceleração média	49
5.4.2.2	Aceleração variando linearmente em Δt	50
6	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	53
6.1	Estado estacionário	53
6.1.1	Parâmetros	53
6.1.2	Geometria	53
6.1.3	Formulação fraca	54
6.1.4	Valores iniciais e fluxo zero	56
6.1.5	Condições de contorno	56
6.1.6	Sensibilidade da malha	56
6.2	Estado transiente	59
6.2.1	Parâmetros, geometria e sensibilidade da malha	59
6.2.2	Formulação fraca	59
6.2.3	Condições de contorno e iniciais	60
6.2.4	Parâmetro temporal	60
6.3	Simulação numérica da válvula aórtica bicúspide	62
6.3.1	Parâmetros	62
6.3.2	Construção da geometria	62
6.3.3	Física	63
6.3.3.1	Fluxo laminar	63
6.3.3.2	Sólido mecânico	64
6.3.3.3	Acoplamento multifísico	65
6.3.4	Suavização da malha	65
6.3.5	Sensibilidade dos parâmetros	66
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	69
8	CONCLUSÕES	73
	REFERÊNCIAS	75

1 Introdução

A válvula aórtica bicúspide (*VAB*), patologia cardíaca congênita, afeta aproximadamente entre 1 e 2% da população geral, em que cerca de 33% desses diagnósticos têm tendência a desenvolver complicações cardiovasculares, como estenose aórtica e insuficiência aórtica (*Otto; Bonow, 2014*).

Para intervenções clínicas, embora seja fundamental a utilização de técnicas de processamento de imagens, a dificuldade reside em monitorar adequadamente a função da válvula e avaliar as possíveis complicações que podem surgir ao longo do tratamento. Devido a isso, a modelagem matemática pode ser vista como uma ferramenta complementar que possibilita informações detalhadas sobre a hemodinâmica da condição.

A modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides, utilizando as equações de Navier-Stokes para descrever o movimento do sangue e um modelo linear elástico para a dinâmica da estrutura das válvulas, resolvidas numericamente, permite uma compreensão mais profunda da relação entre a hemodinâmica e as complicações associadas.

Além disso, a simulação numérica, especialmente com o uso do Método dos Elementos Finitos, desempenha um papel importante nesse contexto, permitindo uma análise mais detalhada das interações fluido-estrutura e possibilitando diferentes abordagens para o planejamento de tratamentos para pacientes com essa condição.

2 Válvulas aórticas bicúspides

2.1 Coração humano

O coração humano é o órgão responsável por bombear o sangue através do sistema circulatório, localizado na parte central da caixa torácica pouco inclinado para a esquerda e que possui quatro subdivisões: dois átrios (câmaras cardíacas superiores) e dois ventrículos (câmaras cardíacas inferiores).

As válvulas cardíacas são responsáveis por regular o fluxo sanguíneo através das quatro câmaras do coração. São classificadas de acordo com a sua localização: as *válvulas atrioventriculares* — válvula mitral ou bicúspide e válvula tricúspide — localizadas na transição entre o átrio e ventrículo esquerdo e átrio e ventrículo direito, respectivamente; e as *válvulas semilunares* — válvula pulmonar e válvula aórtica — localizadas na transição do ventrículo direito para a artéria pulmonar e do ventrículo esquerdo para a aorta, respectivamente.

O sangue presente no coração flui entre as câmaras cardíacas através da abertura das válvulas, que são periodicamente abertas e fechadas no processo do ciclo cardíaco.

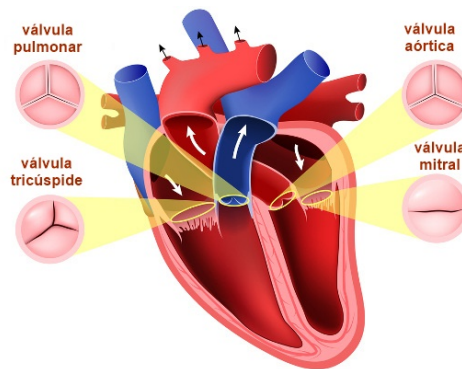


Figura 1 – Válvulas cardíacas.¹

2.1.1 Ciclo cardíaco

O ciclo cardíaco é um processo contínuo que ocorre com o objetivo de bombear o sangue pelo corpo em um intervalo entre um batimento e outro. Esse ciclo consiste na sístole e na diástole, que são divididas em fases.

¹ Disponível em: <<https://www.hospitaldaluz.pt/pt/dicionario-de-saude/valvulas-cardiacas-e-valvulopatias>>. Acesso em: 14 nov. 2020.

1. Sístole atrial

Nesta fase, os átrios contraem-se forçando a abertura das válvulas atrioventriculares e permitindo a passagem do sangue para o interior dos ventrículos. Conforme diminui a pressão atrial, essas válvulas se fecham.

2. Contração isovolumétrica

Na segunda fase do ciclo cardíaco, enquanto as válvulas atrioventriculares e semilunares permanecem fechadas, os ventrículos se contraem, o que gera um aumento na pressão intraventricular.

3. Ejeção ventricular

Nesse período do ciclo cardíaco, a pressão intraventricular excede a pressão nos troncos arteriais e faz com que as válvulas semilunares sejam abertas de modo forçado, enquanto as válvulas atrioventriculares continuam fechadas. Essa abertura permite que o sangue flua do ventrículo esquerdo para a aorta e do ventrículo direito para a artéria pulmonar. A ejeção ventricular finaliza a sístole.

4. Relaxamento isovolumétrico

Conforme a pressão intraventricular diminui progressivamente, as válvulas semilunares se fecham. Nesse momento, todas as válvulas cardíacas ficam fechadas. Essa fase é a diástole.

5. Enchimento ventricular

Ao passo que os átrios se enchem novamente, a pressão atrial supera a intraventricular e, conseqüentemente, as válvulas atrioventriculares se abrem, permitindo a passagem do sangue para os ventrículos.

Desse ponto, retoma-se a primeira fase do ciclo cardíaco, em um novo intervalo de batimento.

2.1.2 Raiz aórtica

A raiz aórtica é uma estrutura que conecta a via de saída do ventrículo esquerdo à aorta ascendente, que possui os seguintes componentes: cúspides, anel aórtico, seios aórticos de Valsalva, triângulos intervalvares, junção sinotubular e aortoventricular.

As *cúspides aórticas* (ou folhetos aórticos) são estruturas fibrosas que interagem entre si em forma de corpo. Essas cúspides são inseridas no *anel aórtico*, onde formam três comissuras no ponto de junção mais alto entre elas e três *seios aórticos de Valsalva*, que são dilatações saculares da raiz aórtica. Em cada comissura encontra-se um dos triângulos intervalvares, que são como extensões triangulares da via de saída do ventrículo esquerdo.

Cada componente é responsável por contribuir para uma transmissão unidirecional do sangue do ventrículo esquerdo para a aorta através de um caminho que permite manter um fluxo laminar, com o mínimo de resistência.

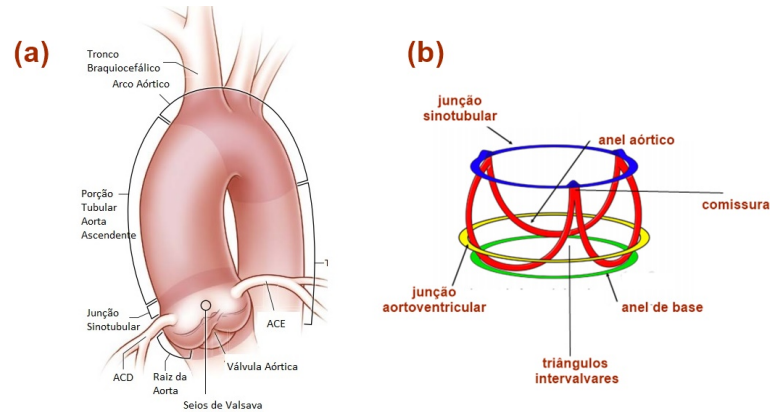


Figura 2 – (a) Componentes da válvula aórtica.² (b) Componentes da raiz aórtica.³

2.2 Válvula aórtica bicúspide

A válvula aórtica bicúspide (VAB) é uma patologia cardíaca congênita, prevalente entre 1 e 2% da população geral.

Ao contrário de uma válvula aórtica normal (tricúspide), uma VAB possui exatamente duas cúspides, que possuem tamanhos desiguais e uma delas é o resultado da fusão de duas outras.

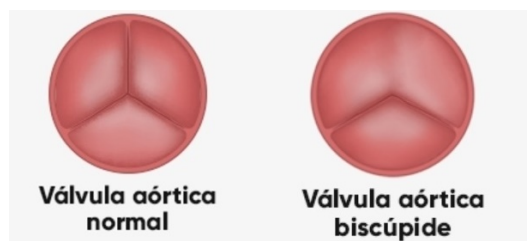


Figura 3 – Diferença entre uma válvula aórtica tricúspide (normal) e uma válvula aórtica bicúspide.⁴

Esse é um defeito que surge durante a fase embrionária e suas causas não foram totalmente esclarecidas. Isso também pode estar associado a outras doenças cardíacas, como a aortopatia e a calcificação aórtica.

Na anatomia de uma VAB, a cúspide maior apresenta um raphe central, que é uma área conjunta das duas cúspides subdesenvolvidas. Além disso, tratando-se de uma

² Disponível em: <https://www.researchgate.net/figure/Subdivision-of-proximal-aortic-involvement-in-BAV-aortopathy-Reproduced-with-permission_fig2_326491704>. Acesso em: 25 nov. 2020.

³ Disponível em: <https://www.researchgate.net/figure/Schematic-drawing-describes-the-anatomic-arrangement-of-the-aortic-valve-leaflets_fig9_280536308>. Acesso em: 25 nov. 2020.

⁴ Disponível em: <<https://www.tuasaude.com/valvula-aortica-bicuspid/>>. Acesso em: 26 nov. 2020.

válvula normal, as cúspides são nomeadas como coronária direita, coronária esquerda e não-coronária.

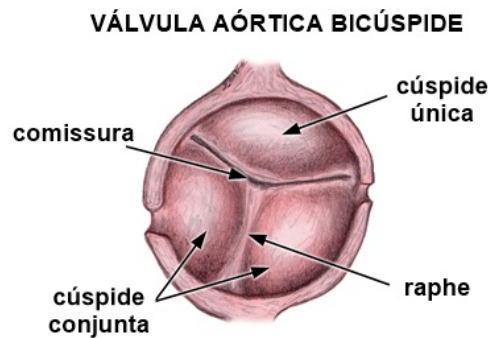


Figura 4 – Anatomia de uma válvula aórtica bicúspide.⁵

2.2.1 Classificação das VAB

As classificações da VAB são baseadas na descrição da posição da cúspide, o seu tamanho, características do seio aórtico, posição da comissura e as características do raphe. Devido a simplicidade e praticidade, a classificação de Sievers e Schmidtke é uma das mais utilizadas, que possui três tipos:

- *TIPO 0*: consiste em duas cúspides sem a presença de raphe;
- *TIPO 1*: consiste um único raphe devido à fusão da cúspide coronária esquerda com a coronária direita ou a não-coronária;
- *TIPO 2*: consiste em duas raphes devido à fusão da cúspide coronária esquerda tanto com a coronária direita quanto com a não-coronária.

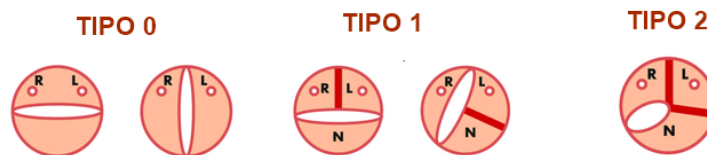


Figura 5 – Classificação de uma VAB de acordo com a fusão das cúspides e números de raphes.⁶

Observações empíricas baseadas em estudos clínicos mostram que os padrões morfológicos da VAB variam de acordo com a fusão das cúspides. Notam-se os seguintes padrões:

⁵ Fonte: Torrado et al., Analysis of Hemodynamic Indicators in Bicuspid Aortic Valves Using a Computational Mathematical Model (2015, p. 12).

⁶ Disponível em: <https://www.researchgate.net/figure/The-Sievers-and-Schmidtke-classification-system-for-bicuspid-aortic-valve-Adapted-from_fig2_326488556>. Acesso em: 22 nov. 2020.

- Entre 70 e 86% dos casos apresentam a fusão das cúspides coronárias esquerda e direita, o que pode estar associado a coartação da aorta;
- A fusão das cúspides coronária direita e a não-coronária ocorre entre 15 e 30% dos casos, que pode estar associado a estenose aórtica;
- Em 3% dos casos, ocorre a fusão das cúspides esquerda e a não-coronária.

Esses padrões apresentam algumas diferenças entre si, como a dimensão da raiz aórtica. No padrão mais comum (fusão das cúspides coronárias esquerda e direita), nota-se a produção de um fluxo sistólico excêntrico direcionado para o lado direito. Além disso, a fusão das cúspides coronária direita com a não-coronária produz um fluxo excêntrico direcionado para o lado esquerdo, possivelmente explicando o aumento do arco aórtico.

Para intervenções clínicas, embora seja fundamental a utilização de técnicas de processamento de imagens, a dificuldade reside em monitorar adequadamente a função da válvula e avaliar as possíveis complicações que podem surgir ao longo do tratamento. Devido a isso, a modelagem matemática da hemodinâmica de válvulas aórticas bicúspides, que consiste, por exemplo, no estudo do gradiente de pressão através da válvula e o comportamento do fluxo sanguíneo, além de possibilitar diferentes abordagens para a intervenção clínica, permite compreender a relação entre a hemodinâmica em termos de complicações e riscos associados.

3 Análise diferencial do escoamento

O objetivo desta seção é estabelecer leis básicas que governam o movimento do fluido e características do escoamento a ser analisado.

3.1 Conceitos fundamentais

Ao estudar um problema de dinâmica dos fluidos, o primeiro passo é definir o sistema que será analisado. Neste caso, vamos considerar um *volume de controle (VC) infinitesimal*, dado por um volume arbitrário no espaço onde o fluido está escoando e com fronteira denominada *superfície de controle (SC)*.

3.1.1 Fluido como um meio contínuo

Como base da mecânica dos fluidos clássica, considerar um fluido como um contínuo significa dizer que suas propriedades (massa específica ρ e velocidade V , por exemplo) são funções contínuas no espaço e tempo, isto é, terão um valor definido em cada ponto no espaço em um determinado instante.

3.1.2 Campos de velocidade e aceleração

A velocidade é uma função vetorial que varia no espaço e no tempo. Sendo assim, a forma cartesiana do **campo vetorial de velocidade** \mathbf{V} é dada por

$$\begin{aligned} V(x,y,z,t) &= (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)) \\ &= u(x,y,z,t)\mathbf{i} + v(x,y,z,t)\mathbf{j} + w(x,y,z,t)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

em que u, v e w são componentes locais da velocidade nas direções x, y e z , respectivamente.

Para obter o **campo vetorial da aceleração** \mathbf{A} , basta calcular a derivada do campo vetorial da velocidade em relação ao tempo, isto é,

$$\begin{aligned} A(x,y,z,t) &= \frac{dV(x,y,z,t)}{dt} \\ &= \frac{du(x,y,z,t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv(x,y,z,t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dw(x,y,z,t)}{dt}\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

No entanto, como as componentes do campo de velocidade são funções vetoriais definidas no espaço e tempo, podemos utilizar a regra da cadeia para calcular a derivada

temporal de cada uma. Assim, temos que

$$\frac{du(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}, \quad (3.2)$$

$$\frac{dv(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}, \quad (3.3)$$

$$\frac{dw(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (3.4)$$

Por definição, dx/dt , dy/dt e dz/dt são as componentes da velocidade local u , v e w , respectivamente. Dessa forma, as equações (3.2) – (3.4) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\frac{du(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w,$$

$$\frac{dv(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w,$$

$$\frac{dw(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w,$$

ou ainda,

$$\frac{du(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (V \cdot \nabla)u \quad (3.5)$$

$$\frac{dv(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (V \cdot \nabla)v \quad (3.6)$$

$$\frac{dw(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (V \cdot \nabla)w. \quad (3.7)$$

Substituindo as equações (3.5) – (3.7) em (3.1), obtemos que

$$A(x,y,z,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial t} \mathbf{k} \right) + [(V \cdot \nabla)u \mathbf{i} + (V \cdot \nabla)v \mathbf{j} + (V \cdot \nabla)w \mathbf{k}].$$

Portanto, o campo vetorial de aceleração é dado por

$$A(x,y,z,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V, \quad (3.8)$$

em que o primeiro termo à direita da igualdade é uma **aceleração local** e o segundo é uma **aceleração convectiva**.

3.1.3 Campo de tensão

Existem dois tipos de força que agem sobre partículas fluidas: *forças de campo* e *forças de superfície*. Essas forças de campo, como, por exemplo, a gravidade, agem através das partículas, enquanto que as forças de superfície, tais como pressão e atrito, geram tensões no meio fluido.

Sejam ∂A a superfície de uma partícula fluida em um ponto P arbitrário e ∂F uma força agindo sobre essa superfície.

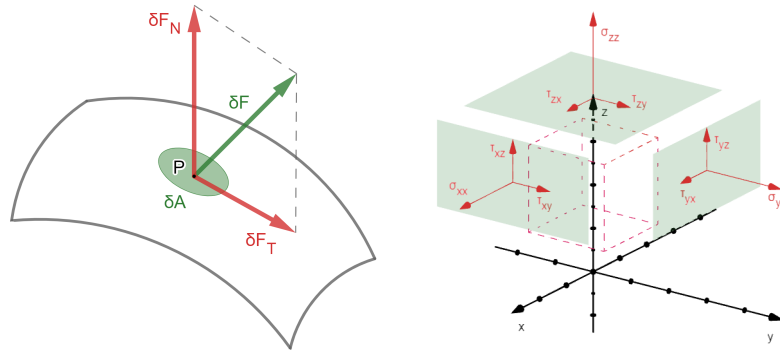


Figura 6 – Forças de superfície sobre a superfície de um volume de controle.⁷

Decompondo a força ∂F , obtemos uma componente ∂F_N normal e outra componente ∂F_T tangente à ∂A , que são chamadas de *tensão normal* σ e *tensão de cisalhamento* τ , respectivamente. A tensão de cisalhamento é gerada pela atuação de uma força paralela ao movimento em uma superfície à qual o fluido está limitado.

De modo geral, o estado de tensão em P pode ser descrito pela especificação das tensões em três planos quaisquer ortogonais entre si que passam por P , isto é, a tensão nesse ponto será definida por nove componentes:

$$\sigma = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Observação 3.1.1. Dizemos que σ é o tensor tensão de Cauchy.

Esse tensor relaciona um vetor normal unitário n com o vetor tensão $T^{(n)}$ sobre uma superfície imaginária perpendicular a n de modo que

$$T_j^{(n)} = \sigma_{ij} \cdot n_i,$$

ou matricialmente,

$$\begin{bmatrix} T_x^{(n)} & T_y^{(n)} & T_z^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Além disso, pela simetria do tensor, podemos usar a *notação de Voigt* para representar σ como um vetor de seis componentes da seguinte forma:

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T.$$

⁷ Adaptada de: Fox; McDonald; Pritchard. *Introdução à mecânica dos fluidos* (2001, p. 51-52).

3.1.4 Viscosidade

Resumidamente, a *viscosidade* é a propriedade que caracteriza a resistência do fluido ao escoamento. Em um escoamento viscoso, as tensões de cisalhamento (ou *tensões viscosas*) são decorrentes dessa propriedade.

Assim, uma partícula fluida, submetida à tensão de cisalhamento, experimenta uma *taxa de deformação* $\frac{d\alpha}{dt}$, que relaciona a velocidade em que o fluido escoo no eixo x e sua deformação no eixo y , isto é,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}.$$

Se as tensões de cisalhamento são diretamente proporcionais às taxas de deformação, então dizemos que o fluido é *newtoniano*. Dessa forma, a lei de Newton para um escoamento unidimensional (quando o campo de velocidade é uma função de uma coordenada), temos que

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}, \quad (3.9)$$

em que a constante de proporcionalidade é a *viscosidade dinâmica* μ .

3.2 Equações diferenciais de um escoamento

Para deduzir as equações básicas do escoamento, considere que o volume de controle (VC) é um cubo infinitesimal com lados de comprimento dx , dy e dz .

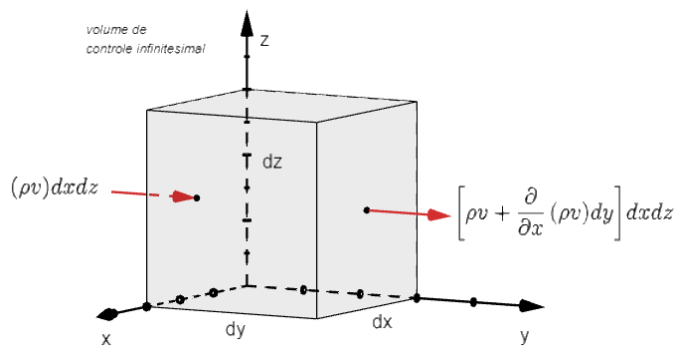


Figura 7 – Fluxo de massa de um fluido em um volume de controle.⁸

Seja N uma propriedade arbitrária de um fluido com quantidade associada ao VC . Definimos a taxa de variação de N da seguinte maneira:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \eta \rho dV \right) + \int_{SC} \eta \rho (V \cdot n) dA, \quad (3.10)$$

⁸ Adaptada de: White. Mecânica dos Fluidos (2004, p. 240).

em que $\eta = \frac{dN}{dm}$ é uma propriedade intensiva correspondente desse fluido, m é a massa do fluido, \mathcal{V} é o volume do VC , n é o vetor normal para fora na SC e A é a área da SC . Essa equação é conhecida como o *Teorema de Transporte de Reynolds*, que descreve, de modo geral, como a propriedade varia ao longo do tempo em um fluido em movimento.

A partir desse teorema, todas as análises que faremos para chegar nas equações que governam o problema consideram a *vazão volumétrica* Q ou a *vazão em massa* \dot{m} .

A vazão volumétrica Q através da SC , definida como

$$Q = \int_{SC} (V \cdot n) dA,$$

representa basicamente a quantidade de fluido que passa através do VC ao longo do tempo. Agora, a vazão em massa \dot{m} , caso a massa específica sofra variação sobre a SC , é dada por

$$\dot{m} = \int_{SC} \rho(V \cdot n) dA.$$

Por outro lado, se for constante, sua aproximação unidimensional é

$$\dot{m} = \rho AV. \quad (3.11)$$

Resumidamente, a vazão em massa representa a quantidade total de massa do fluido que está sendo transportada através do VC .

3.2.1 Princípio da conservação de massa

Sejam $N = m$ e $\eta = 1$. Como há conservação de massa, temos que a taxa de variação de N é nula, isto é,

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

De acordo com a *Figura 7*, o VC possui finitos números de entradas e saídas unidimensionais. Sendo assim, por (3.10) e (3.11), segue que

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= 0 \\ &= \left(\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} \right) + \int_{SC} \rho(V \cdot n) dA \\ &= \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{sai} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{ent}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{sai} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{ent} = 0. \quad (3.12)$$

Observe que o VC considerado é tão pequeno de modo que a integral de volume pode ser aproximada a um termo diferencial

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Além disso, embora a *Figura 7* mostre os fluxos de massa somente nas faces y , esses fluxos ocorrem em todas: faces x (frente e atrás), faces y (direita e esquerda) e nas faces z (inferior e superior).

Na tabela abaixo, temos os seguintes fluxos de massa de entrada e saída no VC :

Face	Fluxo na entrada	Fluxo na saída
x	$\rho u dy dz$	$[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx] dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy] dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dz] dx dy$

Tabela 1 – Fluxo de massa em um VC .

Agora, substituindo a aproximação da integral de volume e os valores dos fluxos da tabela acima em (3.12), obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{sai} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{ent} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right] dy dz + \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy \right] dx dz \\ &\quad + \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dz \right] dx dy - \rho u dy dz - \rho v dx dz - \rho w dx dy \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dx dy dz \\ &= \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

O volume elementar $d\mathcal{V} = dx dy dz$ que acompanha cada termo dessa soma se cancela, o que resulta na equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (3.13)$$

chamada de **equação da continuidade**, ou ainda, na sua forma compacta,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) expressa o resultado que queríamos: a conservação de massa para um volume de controle infinitesimal.

3.2.2 Princípio da conservação da quantidade de movimento linear

Sejam $N = mV$ a quantidade de movimento e $\eta = V$. Pela segunda lei de Newton, a taxa de variação em relação ao tempo da quantidade de movimento é igual à força resultante que age sobre o VC , isto é,

$$\frac{d}{dt}(mV) = \sum F.$$

Assim, tomando a *Figura 7* como base para analisar o fluxo da quantidade de movimento e as equações (3.10) e (3.11), temos que

$$\begin{aligned} \sum F &= \frac{d}{dt}(mV) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} V \rho d\mathcal{V} \right) + \sum (\dot{m}_i V_i)_{sai} - \sum (\dot{m}_i V_i)_{ent}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} V \rho d\mathcal{V} \right) + \sum (\dot{m}_i V_i)_{sai} - \sum (\dot{m}_i V_i)_{ent}. \quad (3.15)$$

Como o volume de controle é consideravelmente pequeno, a primeira parcela da soma pode ser aproximada a um termo diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} (V \rho d\mathcal{V}) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) dx dy dz.$$

Da mesma forma que anteriormente, temos a seguinte tabela com os fluxos de quantidade de movimento nas entradas e saídas das faces.

Face	Fluxo na entrada	Fluxo na saída
x	$\rho u V dy dz$	$[\rho u V + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u V) dx] dy dz$
y	$\rho v V dx dz$	$[\rho v V + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v V) dy] dx dz$
z	$\rho w V dx dy$	$[\rho w V + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w V) dz] dx dy$

Tabela 2 – Fluxo da quantidade de movimento linear em um VC .

Substituindo a aproximação e os valores da tabela na equação (3.15), temos que

$$\begin{aligned} \sum F &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) dx dy dz + \left[(\rho u V) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u V) dx \right] dy dz \\ &+ \left[(\rho v V) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v V) dy \right] dx dz + \left[(\rho w V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w V) dz \right] dx dy \\ &- (\rho u V) dy dz - (\rho v V) dx dz - (\rho w V) dx dy \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u V) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w V) \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos entre colchetes, note que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u V) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w V) \\
&= \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} V + \rho \frac{\partial V}{\partial t} \right] + \left[(Vu) \frac{\partial \rho}{\partial x} + (\rho u) \frac{\partial V}{\partial x} + (\rho V) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\
&+ \left[(Vv) \frac{\partial \rho}{\partial y} + (\rho v) \frac{\partial V}{\partial y} + (\rho V) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \left[(Vw) \frac{\partial \rho}{\partial z} + (\rho w) \frac{\partial V}{\partial z} + (\rho V) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\
&= V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
&= V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) \right) + \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
&= V \cdot 0 + \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) \\
&= \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right).
\end{aligned}$$

Mas, note que a expressão entre parênteses representa a *aceleração total* e, portanto, temos que

$$\sum F = \rho \frac{dV}{dt} dx dy dz. \quad (3.16)$$

A equação acima sugere que a força resultante (de *campo* e de *superfície*) sobre o *VC* considerado deve ser de tamanho diferencial e proporcional ao volume do elemento.

Em relação à força de campo, vamos considerar apenas a gravidade. A força de gravidade sobre a massa diferencial $\rho dx dy dz$ dentro do volume de controle é dada por

$$dF_{grav} = (\rho g) dx dy dz, \quad (3.17)$$

em que g pode ter uma orientação arbitrária em relação ao sistema de coordenadas.

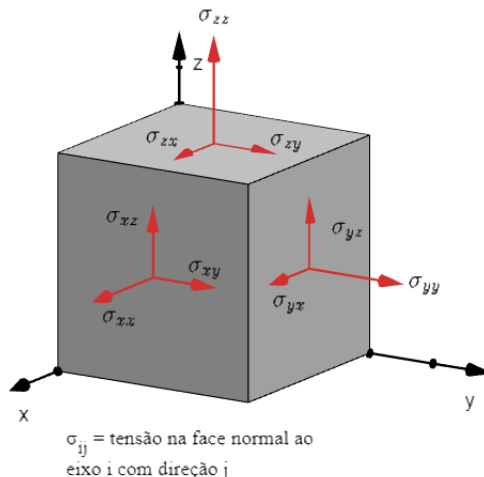


Figura 8 – Forças de superfície σ_{ij} .⁹

Por outro lado, as forças de superfícies (σ_{ij}) decorrem das tensões sobre os lados da SC . Essas tensões são a soma da pressão (p) mais as tensões de cisalhamento (τ_{ij}) que surgem do movimento com gradientes de velocidade, isto é,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix}.$$

Agora, considere um VC fixo e cartesiano que mostra as forças de superfície que atuam na direção y .

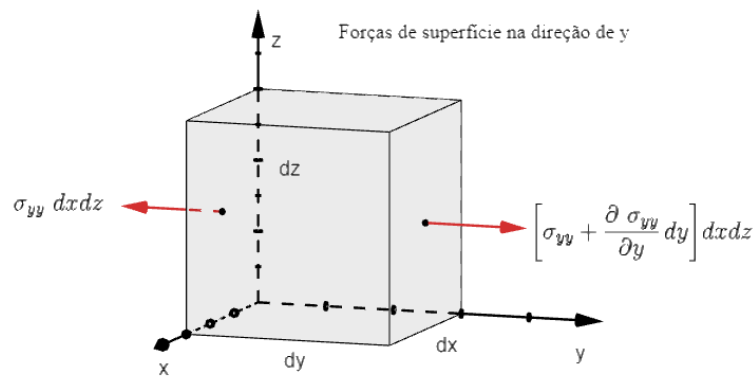


Figura 9 – Forças de superfície na direção y .¹⁰

Nas faces direita e esquerda, as forças σ_{yy} se equilibram, resultando na força líquida $\left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right) dx dy dz$, orientada para a direita na face direita (pode-se concluir isso por meio da soma das tensões nessas faces). O mesmo ocorre nas outras faces.

Dessa forma, a força de superfície resultante na direção y é dada por

$$dF_{y,sup} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zy}) \right] dx dy dz \quad (3.18)$$

Note que esses termos são elementos da segunda linha da matriz σ_{ij} . Assim, podemos reescrever (3.18) com relação à pressão e à tensão de cisalhamento de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dF_y}{dV} &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zy}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (-p + \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy}) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy}). \end{aligned}$$

⁹ Adaptada de: Adaptada de: White. Mecânica dos Fluidos (2004, p. 247).

¹⁰ Adaptada de: White. Mecânica dos Fluidos (2004, p. 248).

Analogamente, as forças de superfície nas direções x e z são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned}\frac{dF_x}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}), \\ \frac{dF_z}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}).\end{aligned}$$

Logo, obtemos o vetor força de superfície

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma_{ij} &= \left(\frac{dF}{dV}\right)_{sup} \\ &= \frac{dF_x}{dV} + \frac{dF_y}{dV} + \frac{dF_z}{dV} \\ &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x}i + \frac{\partial p}{\partial y}j + \frac{\partial p}{\partial z}k\right) + \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)i\right. \\ &\quad \left.+ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)k\right] \\ &= -\nabla p + \left(\frac{dF}{dV}\right)_{viscosa},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \sigma_{ij} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij}. \quad (3.19)$$

Portanto, a força de superfície é a soma do gradiente de pressão e do divergente do tensor de tensão de cisalhamento.

Finalmente, substituindo as equações (3.17) e (3.19) em (3.16), temos que

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{dV}{dt}. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) é chamada de **equação diferencial da quantidade de movimento linear** para um volume infinitesimal.

Em outras palavras, a força gravitacional por unidade de volume mais a força causada pela pressão por unidade de volume e força viscosa por unidade de volume é igual ao produto da densidade do fluido pela aceleração.

Observação 3.2.1. *Essa é uma equação vetorial, em que cada componente contém nove termos, como a seguir.*

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.21)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.22)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.23)$$

3.3 Equações de governo

Nesta seção, vamos apresentar as duas equações de governo de um escoamento bidimensional laminar incompressível: a da *continuidade* e a de *quantidade de movimento linear*.

Observação 3.3.1. *Sendo um escoamento bidimensional (em \mathbb{R}^2), vamos desconsiderar w e a componente z .*

3.3.1 Equação da continuidade

Definição 3.3.1. *Dizemos que um escoamento é laminar quando o número adimensional de Reynolds for menor que aproximadamente 2.100. Esse número é dado por*

$$Re = \frac{\rho LV_0}{\mu},$$

em que V_0 e L são valores de referência de velocidade e comprimento, respectivamente, e μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

Definição 3.3.2. *Dizemos que um escoamento é incompressível quando as variações da densidade são desprezíveis, isto é, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$.*

Sendo assim, por (3.14), a equação da continuidade é dada por

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.24)$$

3.3.2 Equações de Navier-Stokes

Anteriormente, vimos que as forças de superfícies (σ) decorrem das tensões sobre a SC , ou seja, são descritas pela pressão (p) mais as tensões de cisalhamento (τ) de modo que

$$\sigma = \tau - pI, \quad (3.25)$$

em que I é o tensor identidade.

Além disso, para um fluido newtoniano, o tensor de cisalhamento τ é uma função linear em termos da taxa de deformação, isto é,

$$\tau = 2\mu D(V), \quad (3.26)$$

em que $D(V) = \frac{1}{2}(\nabla V + \nabla V^T)$.

Daí, por (3.25) e (3.26), obtemos a lei constitutiva para o tensor *tensão de Cauchy*:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\mu D(V) - pI \quad (\text{lei de Stokes}) \\ &= \mu (\nabla V + \nabla V^T) - pI. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agora, de (3.20), desconsiderando os efeitos da gravidade, note que

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \frac{dV}{dt} - \nabla \cdot \sigma \\ &= \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V \right) + \nabla p - \mu \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V \cdot \nabla)V + \nabla p - \mu \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T) = 0. \quad (3.28)$$

Portanto, as **equações de Navier-Stokes** para fluidos incompressíveis são dadas por:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V \cdot \nabla)V + \nabla p - \mu \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T) = 0 \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot V = 0. \quad (3.30)$$

Observação 3.3.2. *Abaixo, temos as componentes das equações acima descritas.*

Em x :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.32)$$

Em y :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.34)$$

3.3.3 Velocidade de entrada

Considere um escoamento entre placas paralelas fixas (separadas por uma distância $2h$) e axial de modo que $u \neq 0$ e $v = 0$.

Observe que, por (3.24),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.35)$$

e, portanto, $u = u(y)$. Isso quer dizer que existe uma única componente de velocidade axial não nula que varia somente através do canal.

¹¹ Adaptada de: White. Mecânica dos Fluidos (2004, p. 277).

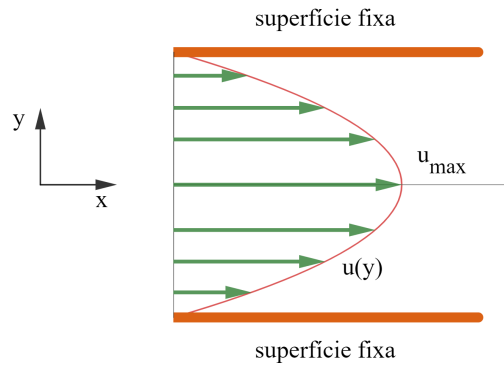


Figura 10 – Escoamento laminar entre superfícies fixas e paralelas.¹¹

Assim, considerando $u = u(y)$ na componente x da equação de Navier-Stokes, temos que

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (3.36)$$

Analogamente, considerando o fato de que $v = 0$, na componente y em (3.33), obtemos que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

e, conseqüentemente, $p = p(x)$.

Portanto, o **gradiente de pressão** em (3.36) é o gradiente total:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} = \text{constante} < 0. \quad (3.37)$$

Observação 3.3.3. *A constante deve ser negativa porque a pressão deve diminuir na direção do escoamento de modo a superar a resistência da tensão de cisalhamento na parede.*

Agora, integrando duas vezes (3.37), obtemos o perfil de velocidade $u(y)$, que deve ter curvatura negativa em todos os pontos.

Note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}u(y) &= \int \frac{d^2}{dy^2}u(y) dy \\ &= \int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} dy \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \int dy \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1.\end{aligned}$$

Integrando novamente, temos

$$\begin{aligned}u(y) &= \int \frac{d}{dy}u(y) dy \\ &= \int \left(\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1 \right) dy \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2,\end{aligned}$$

onde as constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de não escorregamento em cada parede.

Assim, o **perfil de velocidade** em virtude de um gradiente de pressão é dado por

$$u(y) = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (3.38)$$

Na linha de centro $y = 0$ é onde a velocidade máxima acontece e é dada por

$$u_{max} = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu}. \quad (3.39)$$

Neste caso, o escoamento forma uma *parábola de Poiseuille*, com curvatura negativa constante.

3.3.4 Condição de contorno na fronteira

A condição de Dirichlet é prescrita para a velocidade $V(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t)) = (0,0)$ na fronteira fixa devido a condição de não deslizamento, isto é, as partículas de um fluido viscoso se aderem à parede.

4 Interação Fluido-Estrutura

Um problema de interação entre fluido e estrutura traz diversos desafios, como, por exemplo, o acoplamento de descrições matemáticas distintas. Para contornar esse desafio, podemos fazer o uso da *Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária*.

4.1 Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária

No estudo da interação fluido-estrutura, podem-se notar duas descrições matemáticas na mecânica dos fluidos: a Lagrangiana e Euleriana. A *descrição lagrangiana*, indicada para caracterizar o movimento do sólido, consiste em acompanhar o movimento de cada partícula ao longo do tempo por meio de sua trajetória. Por outro lado, a *descrição euleriana*, indicada para caracterizar o movimento do fluido, consiste em focar em um domínio espacial fixo do contínuo, verificando as velocidades em cada ponto ao longo do tempo.

Para acoplar essas duas descrições, faz-se o uso da Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (em inglês, a sigla *ALE* significa "Arbitrary Lagrangian-Eulerian"), a qual combina as vantagens dessas descrições cinemáticas clássicas e minimiza suas desvantagens. Com isso, podemos modelar o escoamento de um fluido por meio de uma transformação matemática.

Para isso, considere dois domínios: um *referencial* Ω_0 (não deformado) e um *contínuo no tempo final* Ω_t (deformado).

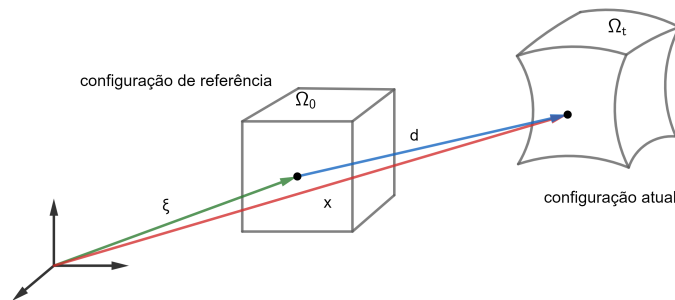


Figura 11 – Deslocamento de uma partícula material.

Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ a posição inicial de uma partícula material de fluido no instante $t = 0$. Em um determinado tempo posterior a t , essa mesma partícula encontra-se em $x = (x_1, x_2, x_3)$ no domínio de referência, cujas componentes $x_i = x_i(t, \xi)$ são dadas em função do tempo e da posição inicial, para $i = 1, 2, 3$. Sua trajetória é representada por uma curva $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada em t e a velocidade da partícula ao longo dessa curva é

dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t,\xi) &= w(t,x(t,\xi)) \\ &= (w_1, w_2, w_3).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Essa equação sugere uma relação entre a descrição lagrangiana (lado esquerdo) e a euleriana (lado direito), na qual a velocidade está definida em uma região fixa do espaço.

Observação 4.1.1. *As coordenadas iniciais ξ_i e as coordenadas x_i são, respectivamente, lagrangianas e eulerianas.*

Definição 4.1.1. *Seja $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar ou vetorial diferenciável que representa alguma grandeza física do fluido por unidade de volume. Então, sua derivada total é*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t,\xi)) &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} \\ &= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (w \cdot \nabla)\varphi \right](t,x(t,\xi))\end{aligned}\tag{4.2}$$

A derivada material de φ em $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega_0$ é dada por

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (w \cdot \nabla)\varphi,\tag{4.3}$$

em que $\partial\varphi/\partial t$ é o termo temporal e $(w \cdot \nabla)\varphi$ é o termo convectivo, que representa o transporte de uma propriedade do fluido.

Em outras palavras, podemos dizer que a derivada material é a taxa de variação de uma propriedade do fluido transportado e que está sujeito a um campo de velocidade que varia no espaço e no tempo.

Para deduzirmos as equações que descrevem as leis físicas que regem o escoamento na descrição *ALE*, faremos o uso do *Teorema de Transporte de Reynolds*.

4.1.1 Teorema de Transporte de Reynolds

Sejam $\varphi(t,x)$ a função definida acima e Ω_t um volume fechado de partículas materiais do fluido que variam ao longo do tempo t .

Definimos um mapeamento dado por

$$\Phi(t) = \int_{\Omega_t} \varphi(t,x) dx\tag{4.4}$$

tal que sua derivada temporal é dada por

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi(t,x) dx\tag{4.5}$$

Em palavras, esse mapeamento $\Phi(t)$ fornece uma medida total da quantidade da grandeza física considerando a distribuição espacial das partículas materiais do fluido no volume Ω_t no tempo t . Também, a derivada temporal indica como essa quantidade total está variando com o tempo, levando em conta as mudanças no volume Ω_t .

Além disso, considerando que há regularidade na fronteira de Ω_t , temos que:

1. $x(t, \xi)$ é diferenciável enquanto função de t e ξ ;
2. O mapeamento $\Phi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ dado por $\Phi(\xi) = x(t, \xi) = x$, o qual atribui a cada $\xi \in \Omega_0$ um ponto $x \in \Omega_t$, é uma bijeção e, portanto, Φ^{-1} existe e é definido por $\Phi^{-1} : \Omega_t \rightarrow \Omega_0$, também diferenciável.

O lado direito da equação (4.5) pode ser simplificado se fizermos uma mudança de variável de modo a manter o domínio de integração fixo. É exatamente isso que a descrição *ALE* propõe: um mapeamento da configuração de referência Ω_0 para a configuração atual Ω_t . Essa mudança de configuração se dá por meio do *determinante* da matriz jacobiana $J(t, \xi)$, dado por

$$|J(t, \xi)| = \det(A),$$

sendo $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ e $a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$, $\forall i, j = 1, 2, 3$.

Das condições de regularidade na fronteira de Ω_t , podemos afirmar que o jacobiano da transformação nunca se anula, indicando a existência de um mapeamento inverso. Além disso, para $t = 0$ e para qualquer ponto $\xi \in \Omega_0$, temos que o determinante da matriz jacobiana $J(0, \xi)$ permanece constante e igual a 1. Essa condição garante a estabilidade e a coerência da transformação em toda a extensão de Ω_t .

Sendo assim, temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi(t, x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \varphi(t, x(t, \xi)) |J(t, \xi)| d\xi. \quad (4.6)$$

Com isso, podemos passar a derivada temporal para dentro do sinal de integração e utilizar a regra da derivada do produto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \varphi(t, x(t, \xi)) |J(t, \xi)| d\xi &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} [\varphi(t, x(t, \xi)) |J(t, \xi)| d\xi] \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{d\varphi}{dt} |J(t, \xi)| + \varphi \frac{d}{dt} |J(t, \xi)| \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como a função determinante $|J|$ é multilinear, temos que sua derivada temporal é dada por

$$\frac{d}{dt} |J(t, \xi)| = (\nabla \cdot w) |J(t, \xi)|. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.7), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left[\frac{d}{dt} \varphi(t, x(t, \xi)) |J(t, \xi)| + \varphi(t, x(t, \xi)) \frac{d}{dt} |J(t, \xi)| \right] d\xi &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{D\varphi}{Dt} |J| + \varphi(\nabla \cdot w) |J| \right] d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi(\nabla \cdot w) \right] |J| d\xi. \end{aligned}$$

Retornando ao domínio de integração original, obtemos o resultado abaixo, que é conhecido como o *Teorema de Transporte de Reynolds*:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi(t, x) dx \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi(\nabla \cdot w) \right] dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.1.2 Conservação de massa

Considere a densidade ρ do fluido. A massa total desse fluido em uma região material Ω_t é dada por

$$m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(t, x) dx,$$

tal que sua taxa de variação no tempo é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(t, x) dx \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot w) \right] dx. \end{aligned}$$

Assim, segue do princípio de conservação de massa, da arbitrariedade de Ω_t e da continuidade do integrando que

$$\frac{d}{dt} m(t) = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot w) \right] dx = 0,$$

ou seja,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot w) = 0. \quad (4.10)$$

Considerando que esse estudo tem como foco um escoamento incompressível, o volume da região Ω_t é dado por

$$V_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} dx.$$

Sabendo que o volume é constante, pelo teorema de transporte de Reynolds, obtemos a taxa de variação desse volume ao longo do tempo t :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} V_{\Omega_t} \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} |J(t, \xi)| d\xi \\
 &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} |J(t, \xi)| d\xi \\
 &= \int_{\Omega_0} (\nabla \cdot w) |J(t, \xi)| d\xi \\
 &= \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot w) dx.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\nabla \cdot w = 0. \quad (4.11)$$

4.1.3 Conservação da quantidade de movimento linear

Pela segunda Lei de Newton, sabemos que a resultante das forças que agem sobre um determinado corpo pode ser definida como a taxa de variação da quantidade de movimento linear dentro de um intervalo de tempo. Sendo assim, para um domínio material, considere q a quantidade de movimento linear das partículas em Ω_t tal que

$$q(t) = \int_{\Omega_t} \rho V dx,$$

em que ρ e V são a densidade e o campo de velocidade do fluido, respectivamente.

Logo, pelo teorema de transporte de Reynolds, a resultante das forças que agem sobre esse domínio material será

$$\begin{aligned}
 F(t, x) &= \frac{d}{dt} q(t) \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho V dx \\
 &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{D(\rho V)}{Dt} + (\rho V) (\nabla \cdot w) \right] dx.
 \end{aligned}$$

Novamente, pela continuidade do integrando e a arbitrariedade da escolha de Ω_t ,

fazendo uso das equações (4.10) e (4.11), temos que

$$\begin{aligned}
 F(t,x) &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{D(\rho V)}{Dt} + (\rho V)(\nabla \cdot w) \right] dx \\
 &= \frac{D(\rho V)}{Dt} \\
 &= \rho \frac{DV}{Dt} + \frac{D\rho}{Dt} V \\
 &= \rho \frac{DV}{Dt} + [-\rho(\nabla \cdot w)] V \\
 &= \rho \frac{DV}{Dt} - \rho(\nabla \cdot w) V \\
 &= \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla \cdot V) \right) - \rho(\nabla \cdot w) V.
 \end{aligned}$$

Sendo F a força resultante, segue que

$$\begin{aligned}
 F(t,x) &= \rho g - \nabla p + \mu(\nabla V + \nabla V^T) \\
 &= \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla \cdot V) \right) - \rho(\nabla \cdot w) V,
 \end{aligned}$$

ou seja, desconsiderando os efeitos da gravidade, a equação da conservação da quantidade de movimento linear na descrição *ALE* é dada por

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla \cdot V) \right) + \nabla p - \mu(\nabla V + \nabla V^T) = \rho(\nabla \cdot w) V. \quad (4.12)$$

Observação 4.1.2. Quando a velocidade da malha w for nula, obtemos uma descrição euleriana. Neste caso, a velocidade da malha (ou domínio discretizado) não afeta a descrição do movimento do fluido. Por outro lado, na descrição lagrangiana, quando $w = V$, a descrição do movimento (do sólido ou do fluido) é feita em relação a essa malha móvel.

5 Método dos Elementos Finitos

O *Método de Elementos Finitos (MEF)* é um procedimento numérico que discretiza um problema contínuo para um determinado domínio a fim de se obter uma solução aproximada.

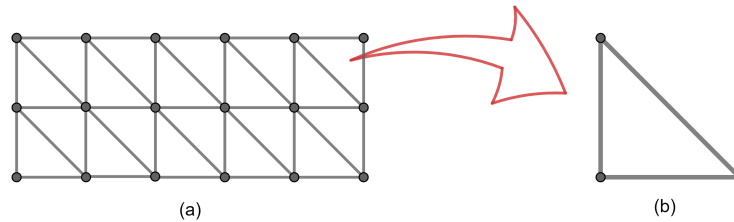


Figura 12 – (a) Representação de uma partição de um domínio discretizado em elementos finitos. (b) Representação de um elemento finito (triângulo).

Frequentemente, em problemas bidimensionais, os elementos finitos são representados por triângulos, em que seus vértices são pontos onde as propriedades físicas e condições do problema são avaliadas e aproximadas para a solução do sistema global de equações.

De modo geral, para obter a solução aproximada de um problema físico, seguimos os seguintes passos:

1. **Discretização do domínio:** divisão do domínio em elementos finitos (triângulos, quadriláteros, etc.);
2. **Formulação fraca:** reescrita das equações diferenciais do problema em forma de integral, que será aproximada sobre cada elemento finito;
3. **Aproximação da solução:** a solução é aproximada em cada elemento finito a partir de funções que representam a variação da solução em cada elemento do domínio discretizado;
4. **Sistema global de equações:** após definir as soluções aproximadas em cada elemento finito, um sistema de equações é montado para representar o problema por completo;
5. **Resolução do sistema de equações:** o sistema de equações obtido no passo anterior é resolvido numericamente para encontrar a solução aproximada do problema original.

5.1 Equações do fluido

Na configuração euleriana, quando $w = 0$, as equações do fluido são:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V (\nabla \cdot V) \right) + \nabla p - \mu (\nabla V + \nabla V^T) = 0 \quad em \quad \Omega_t \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad em \quad \Omega_t. \quad (5.2)$$

Para resolver o sistema formado por essas equações, precisamos impor condições iniciais e de fronteira apropriadas. Seja $\partial\Omega_t = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{wall} \cup \Gamma_{out}$ a fronteira de Ω_t . Assim, temos as seguintes condições:

$$p = p_0, \quad [\mu (\nabla V + \nabla V^T)] \cdot n = 0 \quad em \quad \Gamma_{in}, \quad (5.3)$$

$$[-pI \cdot (\nabla V + \nabla V^T)] \cdot n = -\tilde{p}_0 \cdot n \quad em \quad \Gamma_{out}, \quad (5.4)$$

$$V = 0 \quad em \quad \Gamma_{wall}. \quad (5.5)$$

Na entrada, foi imposto um valor para a pressão e ausência de tensão viscosa, onde n é o vetor normal unitário externo a Γ_{in} . Na saída, temos que $\tilde{p}_0 \leq p_0$ e n é o vetor normal unitário externo a Γ_{out} . Por fim, nas paredes Γ_{wall} , foi imposto esse valor para o campo de velocidade devido à condição de não deslizamento, ou seja, as partículas do fluido viscoso se aderem à parede.

5.2 Equações da estrutura

Como vimos anteriormente, a dinâmica da estrutura será descrita em uma abordagem lagrangiana na configuração de referência, enquanto que a dinâmica do fluido será em uma abordagem euleriana na configuração atual.

Na *Figura 11*, temos que ξ é a coordenada do ponto material na configuração de referência Ω_0 , x é a coordenada na configuração atual Ω_t e $d(\xi) = x - \xi$ é o deslocamento desse ponto material, associado à abordagem lagrangiana. Em particular, $d : \Omega_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mapeamento que descreve o movimento da estrutura.

Definição 5.2.1. *Definimos o tensor gradiente de deslocamento $\nabla_{\xi}d$ como uma medida que descreve como as distâncias entre as partículas variam quando o material está submetido a uma deformação. Esse tensor é gerado pela derivada parcial do deslocamento em relação às coordenadas da configuração de referência Ω_0 e dado por*

$$\nabla_{\xi}d = \frac{\partial d}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial d_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial d_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial d_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial d_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial d_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial d_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial d_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial d_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}.$$

Mas, como

$$\frac{\partial d_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial(x_i - \xi_i)}{\partial \xi_j} = \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_i} - 1, & i = j \\ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, & i \neq j \end{cases},$$

temos que

$$\nabla_{\xi} d = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - 1 & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - 1 & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$\nabla_{\xi} d = F(\xi) - I, \quad (5.6)$$

em que I é o tensor identidade e F o tensor gradiente de deformação, definido por

$$F(\xi) = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}.$$

Observação 5.2.1. *O tensor gradiente de deformação pode ser resumido a uma medida das deformações sofridas por um material devido ao movimento e à mudança de forma das partículas. Além disso, em termos do deslocamento d , temos*

$$F(d) = \frac{\partial d}{\partial \xi} + I. \quad (5.7)$$

Definição 5.2.2. *Considere um volume infinitesimal $dV_0 = \det(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ na configuração de referência Ω_0 . A transformação do elemento infinitesimal de volume é dada de forma que $dV = \det(x_1, x_2, x_3)$. Mas, como F descreve como os vetores $d\xi_i$ em Ω_0 são transformados nos vetores dx_i em Ω_t , para $i = 1, 2, 3$, temos que*

$$\begin{aligned} \det(x_1, x_2, x_3) &= \det(Fd\xi_1, Fd\xi_2, Fd\xi_3) \\ &= \det(F) \det(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3), \end{aligned}$$

ou seja,

$$dV = \det(F) dV_0. \quad (5.8)$$

Logo, a transformação do elemento infinitesimal de volume é feita pelo jacobiano da deformação

$$J = \det(F) = \frac{dV}{dV_0}. \quad (5.9)$$

Essa expressão fornece informações sobre como as deformações estão ocorrendo em diferentes direções.

Definição 5.2.3. O segundo tensor de Piola-Kirchhoff S é simétrico ($S = S^T$) e dado por

$$S(d) = JF(d)^{-1}\sigma F(d)^{-T}. \quad (5.10)$$

Esse tensor descreve tensões em um material submetido a deformações, considerando a mudança de volume associada a essa deformação.

Para uma malha estacionária, isto é, quando $w = 0$, a partir dessas definições e considerando um modelo linear elástico para descrever a dinâmica da estrutura, a equação da estrutura é

$$\rho \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \nabla \cdot (F(d)S(d)) = 0 \quad \text{em } \Omega_0. \quad (5.11)$$

Observação 5.2.2. Resumidamente, o modelo linear elástico presume que o comportamento do material é puramente elástico de modo que as deformações são proporcionais às tensões aplicadas, ou ainda, que são reversíveis. Então, descrever a dinâmica da estrutura a partir desse modelo, que obedece a Lei de Hooke, simplifica a análise do problema, além de ser computacionalmente eficiente.

5.2.1 Condições de contorno

Seja Ω_0 o domínio material da estrutura com fronteira $\partial\Omega_0 = \Gamma$ tal que

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \text{ e } \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset,$$

sendo Γ_D a partição da fronteira associada à condição de Dirichlet e Γ_N associada à condição de Neumann.

5.2.1.1 Condição de contorno de Dirichlet

Quando a fronteira for fixa, a condição de Dirichlet é prescrita para o deslocamento d tal que

$$d(x,t) = 0 \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (5.12)$$

o que indica que não há movimento em Γ_D .

5.2.1.2 Condição de contorno de Neumann

Na condição de contorno de Neumann, a tensão (forças de superfície) é prescrita em Γ_N como

$$F(d)S(d)n_0 = 0 \quad em \quad \Gamma_N, \quad (5.13)$$

sendo n_0 o vetor unitário normal ao elemento de área da fronteira Γ_N , o que significa que não há fluxo de força na direção normal de Γ_N .

Esse nosso problema de interação fluido-estrutura, formado pelas equações (5.1) – (5.5) e (5.11) – (5.13), é fechado por condições de interface apropriadas entre Ω_0 e Ω_t para garantir a continuidade das velocidades e componentes normais das tensões.

5.3 Formulação fraca

Considere os seguintes espaços:

$$P = [H^1(\Omega_0)]^s, \\ P_0 = [H_{\Gamma_D}^1(\Omega_0)]^s \equiv \{w \in P; w = 0 \quad em \quad \Gamma_D\},$$

em que $s \in \{2,3\}$, P é o espaço das velocidades e P_0 é o espaço das velocidades que se anulam na fronteira Γ_D .

A fim de obter uma formulação fraca da equação de movimento da estrutura, vamos multiplicá-la por uma função teste $w \in P_0$ e integrar sobre o domínio Ω_0 . Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} \left[\rho \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \nabla \cdot (F(d)S(d)) \right] \cdot w d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \cdot w - \nabla \cdot (F(d)S(d)) \cdot w d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \cdot w d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (F(d)S(d)) \cdot w d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \cdot w d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} (F(d)S(d)) : (\nabla_\xi w) d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} (F(d)S(d)) \cdot n_0 w dA_0. \end{aligned}$$

Mas, pelas condições de contorno impostas, note que

$$\int_{\partial\Omega_0} (F(d)S(d)) : n_0 w dA_0 = \int_{\Gamma_D} (F(d)S(d)) \cdot n_0 w dA_0 + \int_{\Gamma_N} (F(d)S(d)) \cdot n_0 w dA_0 = 0.$$

Logo, nosso problema se resume em encontrar $d(t) \in P$ tal que

$$\int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \cdot w d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} (F(d)S(d)) : (\nabla_\xi w) d\Omega_0 = 0, \quad \forall w \in P_0. \quad (5.14)$$

5.4 Discretização da equação do movimento da estrutura

O método dos elementos finitos nos permite discretizar um problema contínuo, isto é, particionar o contínuo, a fim de obter uma solução de uma equação diferencial com finitos graus de liberdade.

O problema estudado neste trabalho depende do espaço e do tempo. Logo, precisaremos fazer uma discretização espacial e temporal do contínuo.

5.4.1 Discretização espacial

Considere o espaço discreto de dimensão finita $P_h \subset P$ com funções polinomiais por partes.

Sejam $\phi_i \in P_h$ funções base dependentes de ξ , para $i = 1, \dots, N_S$, de modo que qualquer elemento de P_h é escrito de modo único como uma combinação linear dessas funções, ou seja, uma base para o espaço das velocidades P_h é

$$B = \{\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \dots, \phi_{N_S}(\xi)\}.$$

A aproximação por elementos finitos consiste no seguinte problema: precisamos encontrar $d_h(t) \in P_h$, com $d_h = 0$ em Γ_D , de modo que

$$\int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 d_h}{\partial t^2} \cdot w_h d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} (F(d_h)S(d_h)) : (\nabla_{\xi} w_h) d\Omega_0 = 0, \quad \forall w_h \in P_h. \quad (5.15)$$

Para cada $d_h \in P_h$, podemos escrevê-lo como uma única combinação linear da função base ϕ_i , ou seja,

$$d_h(t, \xi) = \sum_{i=1}^{N_S} d_i(t) \phi_i(\xi),$$

em que N_S é a quantidade de graus de liberdade e d_i são coeficientes reais dependentes do tempo.

Substituindo essa combinação linear na formulação fraca e considerando que a função teste é tal que $w_h = \phi_j(\xi) \in P_h$, vejamos cada termo da equação (5.15). Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 d_h}{\partial t^2} \cdot w_h d\Omega_0 &= \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 d_h}{\partial t^2} \cdot \phi_j(\xi) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \rho \sum_{i=1}^{N_S} \frac{\partial^2}{\partial t^2} d_i(t) \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\Omega_0 \end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega_0} (F(d_h)S(d_h)) : (\nabla_{\xi} w_h) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} (F(d_h)S(d_h)) : \nabla_{\xi} \phi_j(\xi) d\Omega_0.$$

Dessa forma, o vetor solução $d_S(t) = [d_1(t), \dots, d_{N_S}(t)]^T$ é solução da equação de movimento discretizada dada por

$$M_S \ddot{d}_S + K_S(d_S) = 0, \quad (5.16)$$

onde a matriz de massa e o termo de rigidez não linear são, respectivamente,

$$(M_S)_{ij} = \int_{\Omega_0} \rho \phi_i \phi_j$$

e

$$(K_S(d_S))_j = \int_{\Omega_0} (F(d_h)S(d_h)) : \nabla_{\xi} \phi_j(\xi)$$

para $i, j = 1, \dots, N_S$.

Observação 5.4.1. *A matriz de massa M descreve como a massa está distribuída ao longo do domínio da estrutura. Por outro lado, o termo de rigidez não linear K , formulado a partir da Lei de Hooke, leva em consideração as mudanças nas propriedades mecânicas do material à medida que as deformações aumentam ao longo do tempo.*

5.4.2 Discretização temporal

A discretização temporal, aplicada em problemas que envolvem evolução ao longo do tempo, consiste em dividir o tempo em intervalos finitos onde as equações diferenciais são resolvidas em cada intervalo.

Os métodos de integração direta nos ajudam a resolver a equação diferencial sem manipulações adicionais. Em particular, esse método será útil para resolver diretamente a equação de movimento do problema discreto. Neste estudo, faremos o uso do *Método de Newmark* – β .

Considere o intervalo de tempo $\Delta t = t^n - t^{n-1}$ de modo que $t^n = n\Delta t$, para $n = 1, \dots, N_T$ e com $N_T = \frac{T}{\Delta t}$. Para encontrarmos as equações generalizadas de Newmark, usaremos dois métodos: da aceleração média e da aceleração linear.

5.4.2.1 Aceleração média

Seja \ddot{d}_S a aceleração no intervalo Δt dada pela média entre a aceleração no início e no fim do intervalo, isto é,

$$\ddot{d}_S(\tilde{t}) = \frac{1}{2} \left(\ddot{d}_S^n + \ddot{d}_S^{n-1} \right) = \frac{d}{d\tilde{t}} \dot{d}_S, \quad (5.17)$$

em que \tilde{t} é uma variável de tempo auxiliar dentro do intervalo Δt .

Integrando duas vezes a equação (5.17) em relação à \tilde{t} , obtemos

$$\begin{aligned} \dot{d}_S^n(\tilde{t}) &= \int_0^{\tilde{t}} \ddot{d}_S(\tilde{t}) \, d\tilde{t} \\ &= \int_0^{\tilde{t}} \frac{1}{2} (\ddot{d}_S^n + \ddot{d}_S^{n-1}) \, d\tilde{t} \\ &= \dot{d}_S^{n-1} + \frac{1}{2} (\ddot{d}_S^n + \ddot{d}_S^{n-1}) \tilde{t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_S^n(\tilde{t}) &= \int_0^{\tilde{t}} \dot{d}_S^n(\tilde{t}) \, d\tilde{t} \\ &= \int_0^{\tilde{t}} \left(\dot{d}_S^{n-1} + \frac{1}{2} (\ddot{d}_S^n + \ddot{d}_S^{n-1}) \tilde{t} \right) d\tilde{t} \\ &= d_S^{n-1} + \dot{d}_S^{n-1} \tilde{t} + \frac{1}{4} (\ddot{d}_S^n + \ddot{d}_S^{n-1}) \tilde{t}^2. \end{aligned}$$

Por fim, arrumando a notação de modo que $\tilde{t} = \Delta t$, temos que

$$\begin{aligned} \dot{d}_S^n &= \dot{d}_S^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{d}_S^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \ddot{d}_S^{n-1}, \\ d_S^n &= d_S^{n-1} + \dot{d}_S^{n-1} \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4} \ddot{d}_S^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) (\Delta t)^2 \ddot{d}_S^{n-1}. \end{aligned}$$

5.4.2.2 Aceleração variando linearmente em Δt

Agora, considere a aceleração variando linearmente no intervalo Δt dada por

$$\ddot{d}_S(\tilde{t}) = \ddot{d}_S^{n-1} + (\ddot{d}_S^n - \ddot{d}_S^{n-1}) \frac{\tilde{t}}{\Delta t} = \frac{d}{d\tilde{t}} \dot{d}_S. \quad (5.18)$$

Integrando a equação (5.18) duas vezes em relação à \tilde{t} , obtemos

$$\begin{aligned} \dot{d}_S^n(\tilde{t}) &= \int_0^{\tilde{t}} \ddot{d}_S(\tilde{t}) \, d\tilde{t} \\ &= \int_0^{\tilde{t}} \left(\ddot{d}_S^{n-1} + (\ddot{d}_S^n - \ddot{d}_S^{n-1}) \frac{\tilde{t}}{\Delta t} \right) d\tilde{t} \\ &= \dot{d}_S^{n-1} + \ddot{d}_S^{n-1} \tilde{t} + (\ddot{d}_S^n - \ddot{d}_S^{n-1}) \frac{\tilde{t}^2}{2\Delta t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_S^n(\tilde{t}) &= \int_0^{\tilde{t}} \dot{d}_S^n(\tilde{t}) \, d\tilde{t} \\ &= \int_0^{\tilde{t}} \left(\dot{d}_S^{n-1} + \ddot{d}_S^{n-1} \tilde{t} + (\ddot{d}_S^n - \ddot{d}_S^{n-1}) \frac{\tilde{t}^2}{2\Delta t} \right) d\tilde{t} \\ &= d_S^{n-1} + \dot{d}_S^{n-1} \tilde{t} + \frac{\tilde{t}^2}{2} \ddot{d}_S^{n-1} + (\ddot{d}_S^n - \ddot{d}_S^{n-1}) \frac{\tilde{t}^3}{6\Delta t}. \end{aligned}$$

Novamente, tomando $\tilde{t} = \Delta t$ e reorganizando os resultados, temos que

$$\begin{aligned} \dot{d}_S^n &= \dot{d}_S^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \ddot{d}_S^{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{d}_S^n, \\ d_S^n &= d_S^{n-1} + \Delta t \dot{d}_S^{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) (\Delta t)^2 \ddot{d}_S^{n-1} + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \ddot{d}_S^n. \end{aligned}$$

Esses dois métodos podem ser generalizados pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{d}_S^n = \dot{d}_S^{n-1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{d}_S^{n-1} + \gamma \Delta t \ddot{d}_S^n \\ d_S^n = d_S^{n-1} + \Delta t \dot{d}_S^{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (\Delta t)^2 \ddot{d}_S^{n-1} + \beta (\Delta t)^2 \ddot{d}_S^n \end{cases}, \quad (5.19)$$

em que γ e β são os parâmetros de Newmark. Se $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta \geq \frac{1}{4}$, o método é incondicionalmente estável.

Em resumo, o método de *Newmark* – β corresponde a uma discretização pelo método dos elementos finitos na variável t , utilizando elementos finitos de segunda ordem.

O modelo local de elementos finitos no instante t^n , dado por

$$M_S \ddot{d}_S^n + K_S (d_S^n) = 0, \quad (5.20)$$

em conjunto com as condições iniciais $d_S^{(0)}$ e $\dot{d}_S^{(0)}$, define a solução temporal que procuramos.

Finalmente, de (5.19), vamos isolar \ddot{d}_S^n e, em seguida, substituir em (5.20). Para isso, note que

$$\ddot{d}_S^n = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} d_S^n - \underbrace{\left[\frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \left(d_S^{n-1} + \Delta t \dot{d}_S^{n-1} \right) + \left(\frac{1 - 2\beta}{2\beta} \right) \ddot{d}_S^{n-1} \right]}_{\zeta^n}, \quad (5.21)$$

ou seja,

$$\ddot{d}_S^n = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} d_S^n - \zeta^n. \quad (5.22)$$

Logo, substituindo em (5.20), obtemos a discretização temporal da equação (5.16) é dada por

$$\frac{1}{\beta (\Delta t)^2} M_S d_S^n - M_S \zeta^n + K_S (d_S^n) = 0. \quad (5.23)$$

6 Simulação numérica

A implementação computacional do nosso estudo será realizada com o software *COM-SOL Multiphysics*. No entanto, antes de avançar para a simulação do escoamento sanguíneo em uma geometria mais complexa (uma válvula aórtica bicúspide), iniciaremos este capítulo com simulações de um escoamento em estados estacionário e transiente em uma geometria mais simples (retangular) para introduzir o estudo da sensibilidade da malha, parâmetro do tempo, etc.

6.1 Estado estacionário

Um escoamento em estado estacionário é aquele cuja velocidade em cada ponto do domínio do fluido $\Omega \in \mathbb{R}^2$ permanece constante ao longo do tempo, isto é, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$. Nesse caso, as equações de governo do fluido são

$$\rho(V \cdot \nabla)V + \nabla p - \mu \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T) = 0 \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot V = 0. \quad (6.2)$$

A seguir, vejamos com detalhe a construção dessa simulação no estado estacionário.

6.1.1 Parâmetros

No módulo *Parameters*, iniciamos a implementação computacional inserindo os valores fixos que utilizaremos para as simulações, como, por exemplo, a densidade e a viscosidade dinâmica do sangue. Os valores da tabela abaixo foram inseridos.

PARÂMETROS		
Nome	Expressão	Descrição
L	20 [mm]	Largura
H	1.5 [mm]	Altura
u_0	0.2 [m/s]	Termo de resistência viscosa
ρ	1010 [kg/m ³]	Densidade do sangue
μ	0.0035 [Pa * s]	Viscosidade dinâmica do sangue

Tabela 3 – Parâmetros para a simulação numérica de um escoamento no estado estacionário.

6.1.2 Geometria

As simulações do escoamento sanguíneo nos estados estacionário e transiente serão feitas em uma geometria retangular de dimensões $L \times 2H$ e com a base posicionada no

canto em $(0, -H)$, como mostra a figura abaixo.



Figura 13 – Geometria retangular que representa o canal rígido do escoamento.

6.1.3 Formulação fraca

Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^2 com fronteira $\partial\Omega$. Definimos os espaços de velocidade e de pressão, respectivamente, por

$$X = H_0^1(\Omega) \equiv \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ em } \partial\Omega\}, \quad (6.3)$$

$$Q = L_0^2 \equiv \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q dx = 0\}. \quad (6.4)$$

A fim de obter a formulação fraca das equações de Navier-Stokes, vamos multiplicar as equações (6.1) e (6.2) por funções testes em X e Q , respectivamente, e integrar sobre Ω .

Para a equação (6.1), considere a função teste $w = (w_1, w_2) \in X$. Temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\rho(V \cdot \nabla)V + \nabla p - \mu \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T)) w dx \\ &= \int_{\Omega} (\rho(V \cdot \nabla)V) w dx + \int_{\Omega} (\nabla p) w dx - \int_{\Omega} \mu (\nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T)) w dx. \end{aligned}$$

Aplicando integração por partes e o teorema da divergência:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho ((V \cdot \nabla)V) w dx &= \rho ((V \cdot \nabla)V, w); \\ \int_{\Omega} (\nabla p) w dx &= - \int_{\Omega} p (\nabla w) dx = -(pI, \nabla w); \\ - \int_{\Omega} \mu (\nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T)) w dx &= \int_{\Omega} \mu (\nabla V + \nabla V^T) (\nabla w) dx = \mu (\nabla V + \nabla V^T, \nabla w). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\rho ((V \cdot \nabla)V, w) - (pI, \nabla w) + \mu (\nabla V + \nabla V^T, \nabla w) = 0.$$

Analogamente, considerando a função teste $q(x, y) \in Q$ para a equação (6.2),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot V) q dx \\ &= (\nabla \cdot V, q) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} q + \frac{\partial v}{\partial y} q. \end{aligned}$$

Dessa forma, o problema se resume em encontrar $(V, p) \in X \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \rho((V \cdot \nabla)V, w) - (pI, \nabla w) + \mu(\nabla V + \nabla V^T, \nabla w) &= 0, \\ (\nabla \cdot V, q) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos desenvolver o produto interno das equações anteriores:

$$\begin{aligned} \rho((V \cdot \nabla)V, w) &= \rho \left(\begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \rho \left[w_1 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]; \\ -(pI, \nabla w) &= - \left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} & \frac{\partial w_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right) \\ &= -p \frac{\partial w_1}{\partial x} - p \frac{\partial w_2}{\partial y}; \\ \mu(\nabla V + \nabla V^T, \nabla w) &= \mu \left(\begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} & \frac{\partial w_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right) \\ &= \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Portanto, a **formulação fraca** das equações de Navier-Stokes é

$$\begin{aligned} &\rho \left[w_1 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - p \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right] \\ &+ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} q + \frac{\partial v}{\partial y} q = 0. \quad (6.6)$$

No *COMSOL*, abrimos dois módulos *weak form PDE*: um para a formulação fraca da equação da conservação da quantidade de movimento linear (equação (6.5)), tipo de função de forma Lagrange e ordem dos elementos quadrática; e outro para a formulação fraca da equação que garante a condição de incompressibilidade (equação (6.6)), também do tipo de função de forma Lagrange e ordem dos elementos linear.

6.1.4 Valores iniciais e fluxo zero

Os valores iniciais para a velocidade e pressão são, respectivamente, $V_0 = (0,0)$ (isto é, $u(x,y) = v(x,y) = 0$) e $p = 0$.

Além disso, para a pressão, o fluxo zero está definido em toda a fronteira $\partial\Omega$, enquanto que, para a velocidade, está definido somente em $\Gamma_{out} \subset \partial\Omega$.

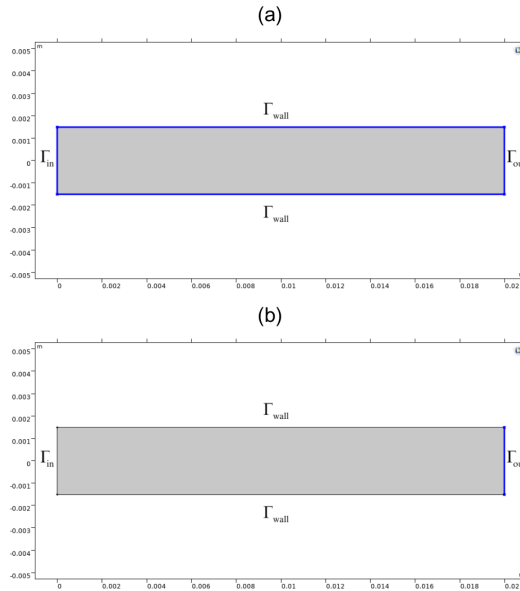


Figura 14 – (a) Fluxo zero para a pressão em todo $\partial\Omega$. (b) Fluxo zero para a velocidade em $\Gamma_{out} \subset \partial\Omega$.

6.1.5 Condições de contorno

No módulo *weak form* do campo de velocidade, definimos duas condições de contorno de Dirichlet.

Como vimos, o perfil de velocidade é descrito pela parábola de Poiseuille. Assim, em $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega$, a velocidade de entrada é dada por $V_{in} = \left(u_0 \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right), 0 \right)$. Outra condição de contorno de Dirichlet é imposta nas partições $\Gamma_{wall} \subset \partial\Omega$ para $V = 0$.

6.1.6 Sensibilidade da malha

A partir da definição do domínio computacional da geometria de interesse, fazemos a sua discretização, isto é, dividimos esse domínio em subdomínios onde buscamos as soluções aproximadas das equações de governo do problema.

Para a nossa geometria, o domínio computacional foi recoberto por uma malha com elementos triangulares. Além disso, sabendo que a precisão dessas soluções depende do número de elementos (triângulos) e da distribuição na malha, visando buscar soluções independentes do refinamento da malha e do menor custo computacional, é necessário

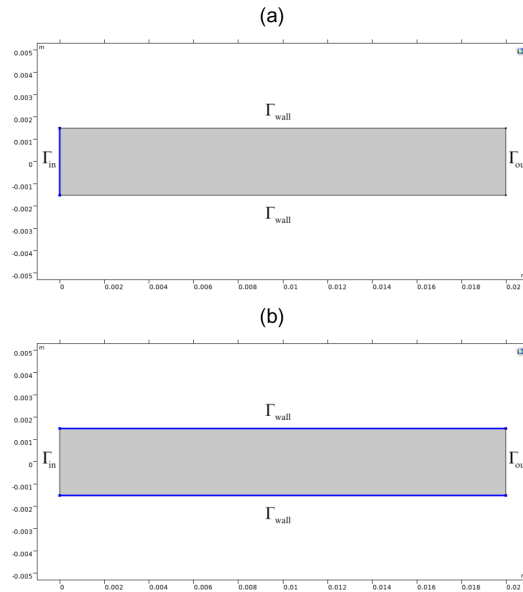


Figura 15 – (a) Velocidade de entrada em $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega$. (b) Velocidade do fluido é nula em $\Gamma_{wall} \subset \partial\Omega$.

fazer o estudo de sensibilidade da malha. Espera-se que quanto maior a quantidade de elementos, seja maior também a precisão das soluções.

Nesse análise, consideramos cinco malhas: malha 1 (extremamente fina), malha 2 (extrafina), malha 3 (mais fina), malha 4 (fina) e malha 5 (normal). Abaixo, seguem os dados a respeito de cada uma.

Malha	Número total de graus de liberdade resolvidos	Número de elementos	Qualidade média do elemento
1	17777	3822	0.9352
2	4865	1016	0.9142
3	1400	276	0.8797
4	806	154	0.8886
5	534	98	0.7964

Tabela 4 – Informações das malhas computacionais para o escoamento no estado estacionário.

Observação 6.1.1. *A qualidade média dos elementos finitos refere-se à uniformidade e precisão da discretização espacial, e geralmente é calculada com base em métricas como a relação entre a área (para uma simulação em 2D) e a forma do elemento. Assim, quanto mais uniforme e próxima de 1 for a qualidade média dos elementos finitos, melhor será a discretização espacial e mais precisas serão as soluções.*

Como já vimos, o *MEF* é um procedimento numérico usado para buscar soluções aproximadas de problemas que envolvem equações diferenciais parciais (EDP). Sendo

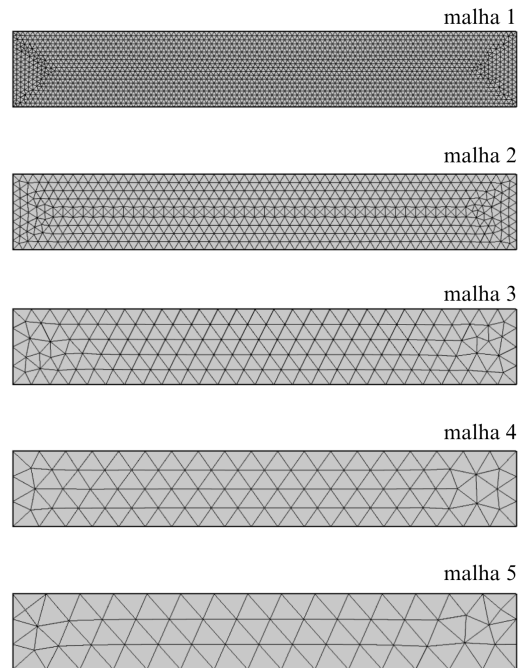


Figura 16 – Refinamento das malhas.

assim, a solução encontrada por esse método vai gerar um erro em relação à solução verdadeira da EDP.

Ao computar a solução do estado estacionário para cada uma das cinco malhas, obtivemos dados sobre a convergência das soluções, como, por exemplo, o número de iterações e erro residual. O *número de iterações* é a quantidade de vezes que o solver iterou sobre o sistema de equações para encontrar uma solução convergente. Agora, o *erro residual* é uma medida da diferença entre os valores computados e os valores esperados. Isso significa que, quanto menor é esse erro, mais próxima a solução numérica está da solução exata.

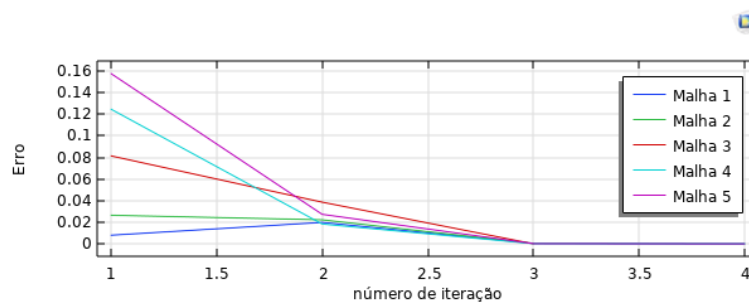


Figura 17 – Convergência das soluções com relação ao refinamento da malha.

Uma convergência adequada é aquela em que o erro residual diminui ao longo das iterações e o número de iterações fique em um valor constante. Dessa forma, analisando esses dados em cada uma das malhas, nota-se que o erro residual produzido na simulação com a malha 1 diminui ao longo das iterações, o que pode indicar a consistência e estabilidade da solução.

Além disso, tomando um corte transversal em $x = \frac{L}{2}$, os valores do campo de velocidade não sofreram muita alteração a partir do refinamento da malha. Neste caso, optamos por utilizar a malha 1 para seguir com a simulação do estado transiente, já que apresenta ser uma solução consistente e estável.

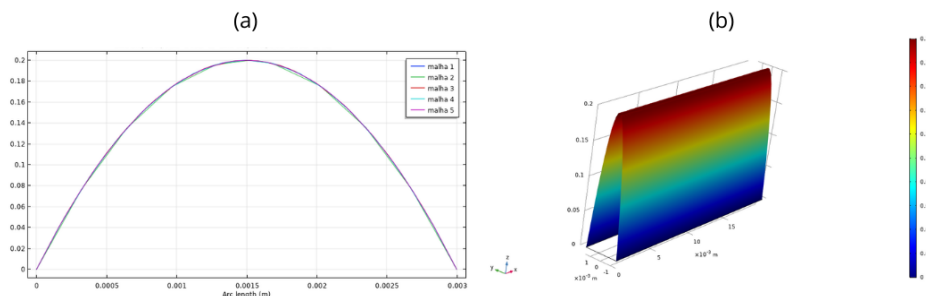


Figura 18 – (a) Distribuição da velocidade em um corte transversal considerando o refinamento da malha. (b) Corte transversal centrado em $x = \frac{L}{2}$ do domínio discretizado pela malha 1.

6.2 Estado transiente

Em cada ponto do domínio do fluido $\Omega \in \mathbb{R}^2$, quando a velocidade e a pressão variam ao longo do tempo, dizemos que o escoamento está em estado transiente. Desta forma, temos que $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$, e as equações de governo são dadas por

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V \cdot \nabla)V + \nabla p - \mu \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T) = 0 \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot V = 0. \quad (6.8)$$

6.2.1 Parâmetros, geometria e sensibilidade da malha

A geometria utilizada permanece a mesma para a simulação do escoamento em estado transiente. No entanto, o termo de resistência viscosa agora é descrito por

$$u_{in}(t) = 0,1(1 + \cos(6t)), \quad t \in [0,1]. \quad (6.9)$$

6.2.2 Formulação fraca

No caso transiente, temos o acréscimo de um termo comparado à formulação fraca do caso estacionário. Neste caso, dadas as funções teste $w = (w_1, w_2) \in X$ e $q(x, y) \in Q$, o

problema se resume em encontrar $(V, p) \in X \times Q$ tal que

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t}, w \right) + \rho ((V \cdot \nabla)V, w) - (pI, \nabla w) + \mu (\nabla V + \nabla V^T, \nabla w) = 0,$$

$$(\nabla \cdot V, q) = 0.$$

Desenvolvendo o produto interno, expressão da **formulação fraca** das equações de Navier-Stokes é dada por

$$\rho \left[w_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w_2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - p \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right]$$

$$+ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right] = 0 \quad (6.10)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} q + \frac{\partial v}{\partial y} q = 0. \quad (6.11)$$

Agora, abrimos dois módulos *weak form PDE*: um para a formulação fraca da equação da conservação da quantidade de movimento linear (equação (6.10)) e outro para a formulação fraca da condição de incompressibilidade (equação (6.11)).

6.2.3 Condições de contorno e iniciais

As condições de fluxo zero e de não deslizamento em Γ_{wall} permanecem as mesmas do estudo anterior. No entanto, agora a velocidade de entrada será $V_{in} = \left(u_{in}(t) \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right), 0 \right)$ em Γ_{in} . Além disso, o estudo do caso estacionário será a condição inicial para a simulação do caso transiente.

6.2.4 Parâmetro temporal

O parâmetro temporal representa a discretização do tempo que determina intervalos de tempo onde as equações que descrevem o comportamento do fluido são resolvidas.

Tal como fizemos para analisar a sensibilidade da malha na seção 6.1.6, aqui vamos fazer o estudo da sensibilidade desse parâmetro porque a escolha apropriada afeta a precisão e a eficiência da simulação. Como o escoamento pode mudar significativamente entre os intervalos de tempo discretos, ao escolher um parâmetro temporal grande, a precisão da solução pode ser reduzida. Por outro lado, a escolha de um parâmetro muito pequeno pode aumentar o custo computacional.

Para o nosso estudo, escolhemos três parâmetros para fazer essa análise: 0.001, 0.01 e 0.1.

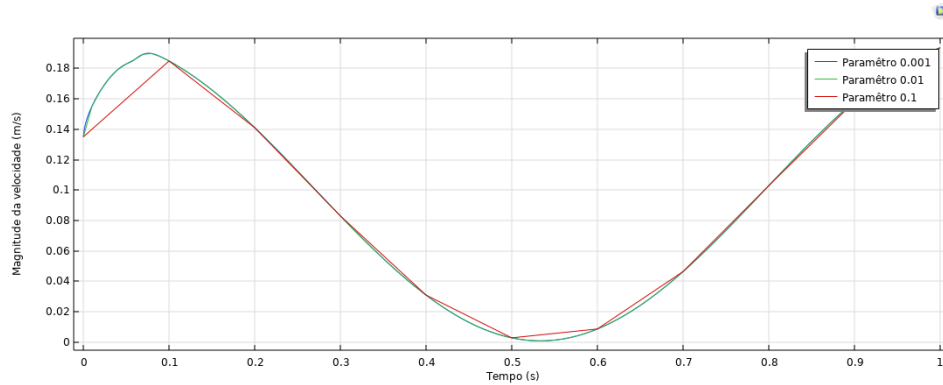


Figura 19 – Magnitude da velocidade considerando três parâmetros temporais no ponto $(L/2,0)$ do domínio computacional.

Ao computar solução para cada um desses parâmetros numa faixa de tempo de 0 a 1 segundo, notamos que o campo de velocidade é sensível a esse parâmetro de simulação, como, por exemplo, nos instantes 0.45 e 0.53 s.

Tempo (s)	$P1$ (0.001)	$P2$ (0.01)	$P3$ (0.1)
0.45	$2 \cdot 10^{-15}$	$1.9 \cdot 10^{-15}$	$3.5 \cdot 10^{-15}$
0.53	$3.1 \cdot 10^{-14}$	$2.7 \cdot 10^{-14}$	$3.4 \cdot 10^{E-14}$

Tabela 5 – Erro residual para parâmetros temporais diferentes.

Para determinar a escolha do melhor parâmetro temporal, analisamos o erro residual ($LinRes$) obtido na simulação numérica com cada um dos três parâmetros (*Tabela 5*) e os comparamos dois a dois por meio do erro relativo (*Tabela 6*).

O objetivo de analisar esse erro relativo é verificar a precisão das soluções. Quanto menor for esse percentual, mais próxima a solução aproximada está da solução esperada.

Neste caso, observamos que os melhores resultados foram obtidos pelos parâmetros temporais $P1$ e $P2$, com erros relativos entre 5% e 12,9%. Assim, optamos por utilizar o parâmetro temporal $P1$ (0.001).

Tempo (s)	$P1 - P2$	$P1 - P3$
0.45	5%	75%
0.53	12,9%	9,6%

Tabela 6 – Erro relativo entre os parâmetros temporais: $P1 - P2$ (parâmetros 1 e 2) e $P1 - P3$ (parâmetros 1 e 3).

Por fim, após toda essa análise, obtivemos a superfície do campo de velocidade e de pressão na forma de um mapa de cores, que permite compreender a distribuição desses valores dentro do domínio de simulação.

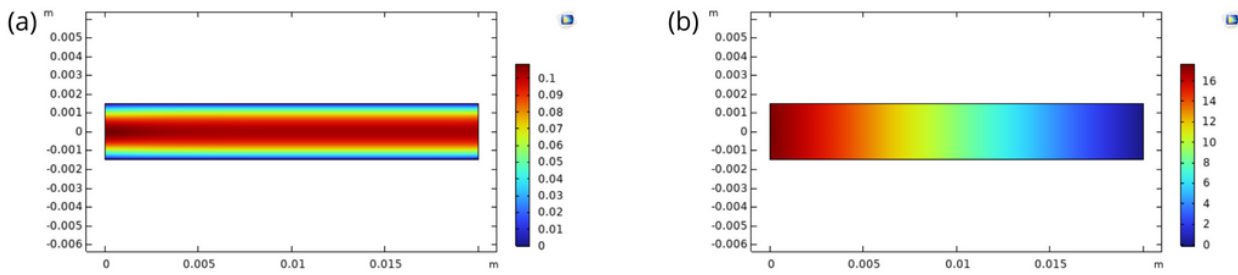


Figura 20 – Magnitude da velocidade (a) e pressão (b).

6.3 Simulação numérica da válvula aórtica bicúspide

Para esta simulação, tomamos o trabalho de *Torrado et al. (2015)* como referência.

6.3.1 Parâmetros

No módulo *Parameters*, inserimos os dados do canal rígido do escoamento (largura e altura) e também as características físicas do sangue (densidade e viscosidade dinâmica), como segue na tabela abaixo.

PARÂMETROS		
Nome	Expressão	Descrição
L	6.11 [cm]	Largura
H	1.2 [cm]	Altura
ρ	1010 [kg/m ³]	Densidade do sangue
μ	0.0035 [Pa * s]	Viscosidade dinâmica do sangue

Tabela 7 – Parâmetros para a simulação numérica do escoamento sanguíneo (*Torrado et al., 2015, p. 32*).

6.3.2 Construção da geometria

Com base nas dimensões indicadas em *Torrado et al., 2015, p. 35*, no módulo *Geometry*, usamos um retângulo de dimensões $L \times 2H$ com base posicionada no canto em $(0, -H)$ para representar o canal rígido do escoamento.

Para os seios aórticos de Valsalva, desenhamos a partir de uma curva paramétrica posicionada em $(1,5; 1,2)$ e dada por $\left(s; (1,385) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi s}{3}\right)\right)$, com $s \in [0,3]$. Posteriormente, essa curva foi levemente ajustada para se encaixar com a geometria final.

Para a espessura da parede aórtica, usamos segmentos e, na região dos seios aórticos, a curva paramétrica $\left(s; (1,385) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi s}{3}\right) + 0,1\right)$, com $s \in [0,3]$. A espessura da parede ficou aproximadamente 0.1 cm.

As cúspides aórticas foram criadas a partir de Curvas de Bézier, com espessura de 0,1 cm na sua base e aproximadamente 0,02 cm na extremidade. Além disso, a distância entre as extremidades das cúspides ficou aproximadamente 0,34 cm.

A fim de construir uma geometria idealizada, usamos de outros recursos do *COMSOL*, como transformações geométricas (girar, espelhar, etc.) e operações virtuais (ignorar vértices e segmentos).

Dessa forma, o domínio computacional corresponde a uma válvula aórtica bicúspide simétrica, tal como a figura abaixo. Em particular, vale notar que temos cinco domínios, sendo um do fluido, dois das paredes aórticas e os outros dois das cúspides.

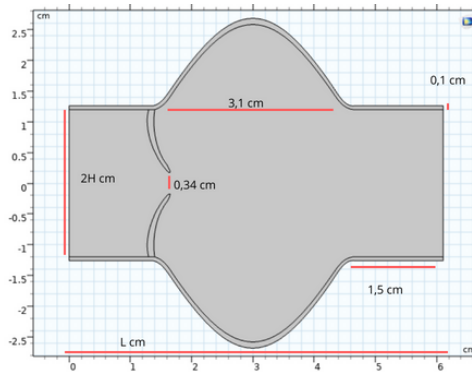


Figura 21 – Geometria idealizada da válvula aórtica bicúspide.

6.3.3 Física

No módulo *Physics*, selecionamos fluxos laminares, sólidos mecânicos e adicionamos o acoplamento multifísico.

6.3.3.1 Fluxo laminar

Em propriedades do fluido, inserimos os valores da densidade e viscosidade dinâmica do sangue, assim como na *Tabela 7*. Definimos os valores iniciais para o campo de velocidade e pressão, respectivamente, como $V = (0,0)$ e $p = 0$.

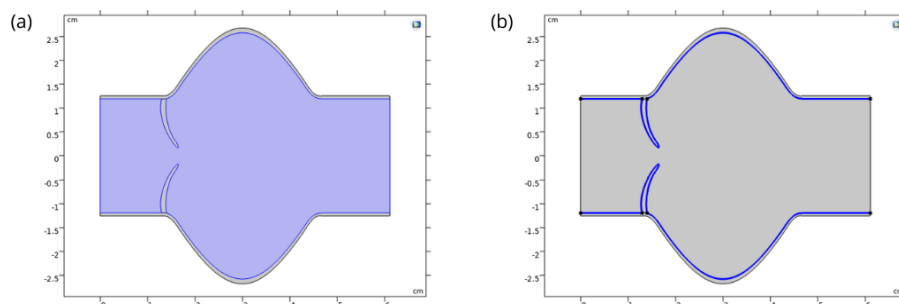


Figura 22 – (a) Domínio computacional do sangue. (b) Condição de não deslizamento nas paredes aórticas.

Nas paredes aórticas, temos a condições de não deslizamento (*Figura 22 (b)*). Agora, as condições de entrada e saída foram definidas em razão da pressão. Para a entrada, uma pressão estática constante $p_0 = 0$ Pa e, na saída, a pressão estática será definida pelo perfil fisiológico de pressão correspondente a dois ciclos cardíacos de 0.8 s cada. No *COMSOL*, em *definitions*, abrimos uma função de interpolação e incluímos esses dados.

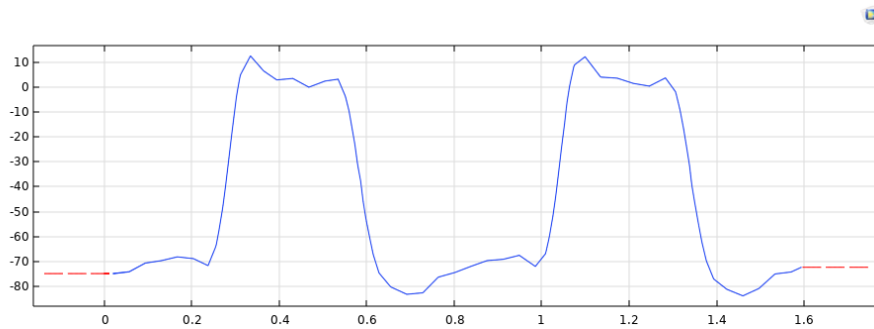


Figura 23 – Perfil fisiológico de pressão transvalvar correspondente a dois ciclos cardíacos de 0.8 s cada (*Torrado et al.*, 2015, p. 37).

Observação 6.3.1. Para obter os dados que caracterizam esse perfil, utilizamos o *Web Plot Digitizer*.

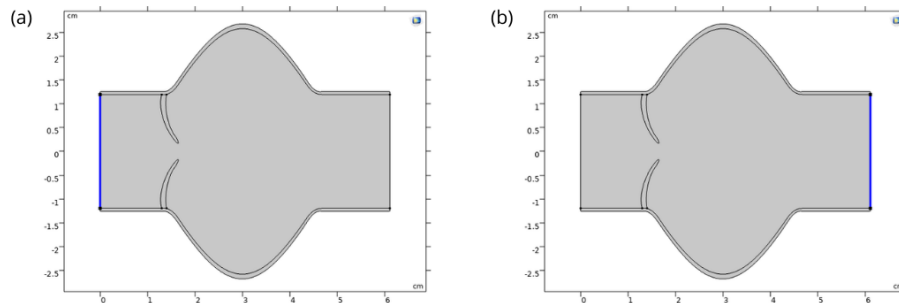


Figura 24 – (a) Condição de entrada descrita por $p = 0$ Pa. (b) Condição de saída descrita pelo perfil fisiológico de pressão p_{out} .

6.3.3.2 Sólido mecânico

As paredes e cúspides aórticas foram modeladas como materiais lineares elásticos isotrópicos, isto é, consideramos que respondem de maneira proporcional às forças aplicadas e que suas propriedades são consistentes em todas as direções. Sendo assim, selecionamos cada domínio computacional do sólido e especificamos suas propriedades como na *Tabela 8*.

Resumidamente, o módulo de Young é uma medida da rigidez de um material quando submetido a uma força. Quanto maior for esse módulo, o material será mais rígido e resistente a deformações. Já o coeficiente de Poisson é uma medida que descreve como um material se comporta quando comprimido ou distendido.

Propriedade	Paredes aórticas	Cúspides aórticas
Densidade (kg/m^3)	2000	1200
Coefficiente de Poisson	0.3	0.49
Módulo de Young (MPa)	2	0.37

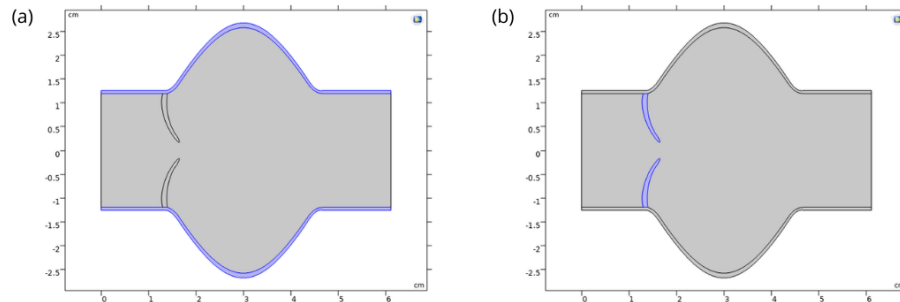
Tabela 8 – Propriedades das paredes e cúspides aórticas (*Torrado et al.*, 2015, p. 36).

Figura 25 – (a) Domínio computacional das paredes aórticas. (b) Domínio computacional das cúspides aórticas.

Além disso, adicionamos uma restrição fixa ao contorno externo das paredes aórticas, ou seja, essas partes serão fixas em relação aos deslocamentos.

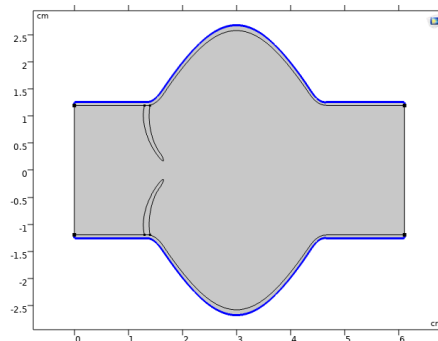


Figura 26 – Restrição fixa aplicada ao contorno externo das paredes aórticas.

6.3.3.3 Acoplamento multifísico

Neste módulo, a funcionalidade *Interação Fluido-Estrutura* no contorno do domínio computacional do fluido permite simular o acoplamento entre o comportamento do sangue e também das paredes e cúspides aórticas que interagem com esse fluido.

6.3.4 Suavização da malha

A interface *Moving Mesh* permite a adaptação dinâmica da malha computacional para acompanhar o movimento ou a deformação de algum objeto. Assim, selecionamos o domínio do fluido para modelar o movimento e a deformação das válvulas à medida que o sangue flui através delas.

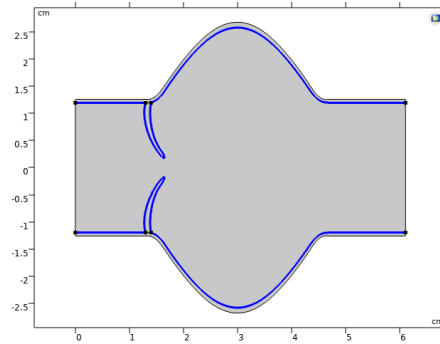


Figura 27 – Acoplamento multifísico no contorno do domínio computacional do fluido.

Neste caso, a suavização da malha é do tipo Yeoh, com fator de rigidez não linear $C_2 = 100$.

6.3.5 Sensibilidade dos parâmetros

Para o estudo da sensibilidade da malha, consideramos três: malha 1 (extremamente fina), malha 2 (extrafina) e malha 3 (mais fina).

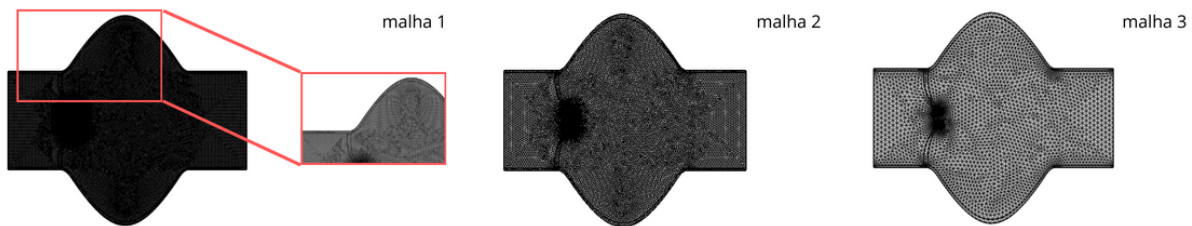


Figura 28 – Refinamento da malha computacional no domínio da válvula aórtica bicúspide.

A fim de se obter uma solução mais precisa, computamos as soluções numéricas com a medida de *tolerância relativa* de 0.005. Essa configuração determina o critério de convergência para o solver, ou seja, quão próximo a solução numérica deve estar da solução exata em cada passo de tempo.

Malha	Número total de graus de liberdade resolvidos	Número de elementos	Qualidade média do elemento
1	66468	24277	0.8947
2	66313	24215	0.895
3	22081	7674	0.8511

Tabela 9 – Informações das malhas computacionais.

Aproximadamente entre 0.4 e 0.6 s após o início do ciclo cardíaco ocorre transição da fase de contração ventricular (sístole) para a fase de relaxamento ventricular (diástole). Durante esse período, a pressão na aorta supera a pressão no ventrículo esquerdo, levando ao fechamento das válvulas aórticas, o que explica a diminuição da velocidade.

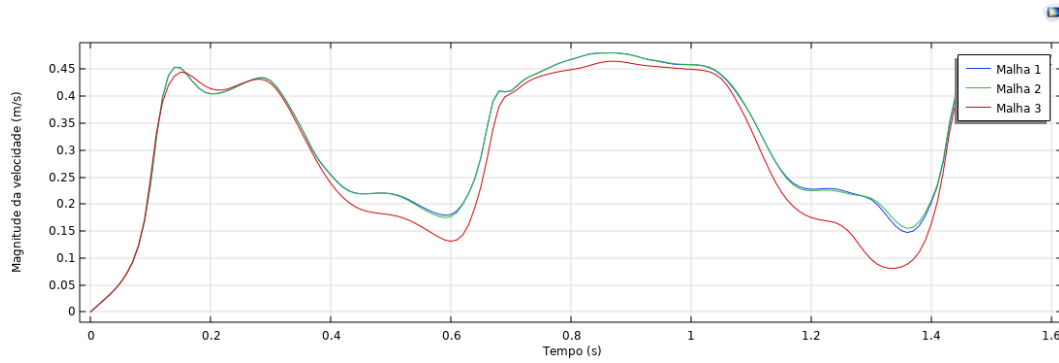


Figura 29 – Magnitude da velocidade no ponto $(2.44, 0)$ do domínio computacional considerando o refinamento da malha.

A partir do gráfico da magnitude da velocidade (*Figura 29*), nos instantes 0.55, 0.6, 1.2 e 1.3 s, analisamos o erro residual considerando as três malhas.

Tempo (s)	Malha 1	Malha 2	Malha 3
0.55	$3.6 \cdot 10^{-15}$	$3.8 \cdot 10^{-15}$	$2.4 \cdot 10^{-15}$
0.6	$2.6 \cdot 10^{-15}$	$2.4 \cdot 10^{-15}$	$3.1 \cdot 10^{-15}$
1.2	$1.6 \cdot 10^{-15}$	$1.6 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{-15}$
1.3	$1.7 \cdot 10^{-15}$	$1.8 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-15}$

Tabela 10 – Erro residual considerando o refinamento da malha computacional.

Certamente, os melhores resultados para essa simulação foram obtidos a partir de malhas que possuem mais graus de liberdade (*M1* e *M2*), com erros relativos entre aproximadamente 5,5% e 7,6%. Portanto, a malha computacional adequada para esse estudo é a *M1*.

Tempo (s)	<i>M1</i> – <i>M2</i>	<i>M1</i> – <i>M3</i>
0.55	5,5%	33,3%
0.6	7,6%	19,2%
1.2	0%	87,5%
1.3	5,9%	17,6%

Tabela 11 – Erro relativo entre as malhas *M1* – *M2* e *M1* – *M3*.

Analogamente, para determinar o parâmetro temporal mais adequado, fizemos a análise do erro residual e relativo nesses mesmos instantes para três parâmetros: 0.001, 0.01 e 0.1.

Tempo (s)	<i>P1</i> (0.001)	<i>P2</i> (0.01)	<i>P3</i> (0.1)
0.55	$1.7 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-15}$	$1.7 \cdot 10^{-15}$
0.6	$3.1 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{-15}$	$3.4 \cdot 10^{-15}$
1.2	$1.9 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-14}$	$2.1 \cdot 10^{-14}$
1.3	$2.6 \cdot 10^{-15}$	$2.5 \cdot 10^{-15}$	$3.2 \cdot 10^{-15}$

Tabela 12 – Erro residual obtido na simulação com parâmetros temporais diferentes.

Note que os parâmetros que apresentam um melhor resultado são aqueles que discretizam o tempo do problema em intervalos menores, ou seja, neste caso, *P1* e *P2*, com erros

relativos entre 3,2% e 11,7% (*Tabela 13*). Assim, o parâmetro temporal escolhido para a nossa simulação numérica foi 0.01.

Tempo (s)	$P1 - P2$	$P1 - P3$
0.55	11,7%	0%
0.6	3,2%	6,4%
1.2	5,2%	10,5%
1.3	3,8%	23,1%

Tabela 13 – Erro relativo entre os parâmetros temporais $P1 - P2$ e $P1 - P3$.

7 Resultados e discussões

Neste capítulo, apresentamos os resultados da simulação numérica da hemodinâmica em uma válvula aórtica bicúspide em instantes específicos do ciclo cardíaco. A simulação foi realizada utilizando o software *COMSOL Multiphysics*, permitindo uma análise do comportamento da válvula aórtica, bem como da pressão transvalvar e da velocidade do sangue em diferentes momentos do ciclo cardíaco.

Optamos por examinar quatro momentos cruciais do ciclo cardíaco: o início e o pico da sístole ventricular, bem como o final da sístole e o início da diástole ventricular. Esses instantes foram selecionados devido à sua importância fisiológica e à influência direta sobre o funcionamento da válvula aórtica e o fluxo sanguíneo associado.

No início da sístole ventricular, por volta de 0.1 s após o início do ciclo cardíaco, a pressão transvalvar na válvula aórtica começa a aumentar à medida que a pressão no ventrículo esquerdo supera a pressão na aorta. Isso resulta na abertura da válvula aórtica para permitir o fluxo de sangue para a aorta. Simultaneamente, a velocidade sanguínea aumenta rapidamente à medida que o sangue é ejetado do ventrículo esquerdo para a aorta. A tensão de von Mises nos tecidos valvares aumenta à medida que a válvula se abre para acomodar o fluxo sanguíneo crescente (ver *Figura 30*).

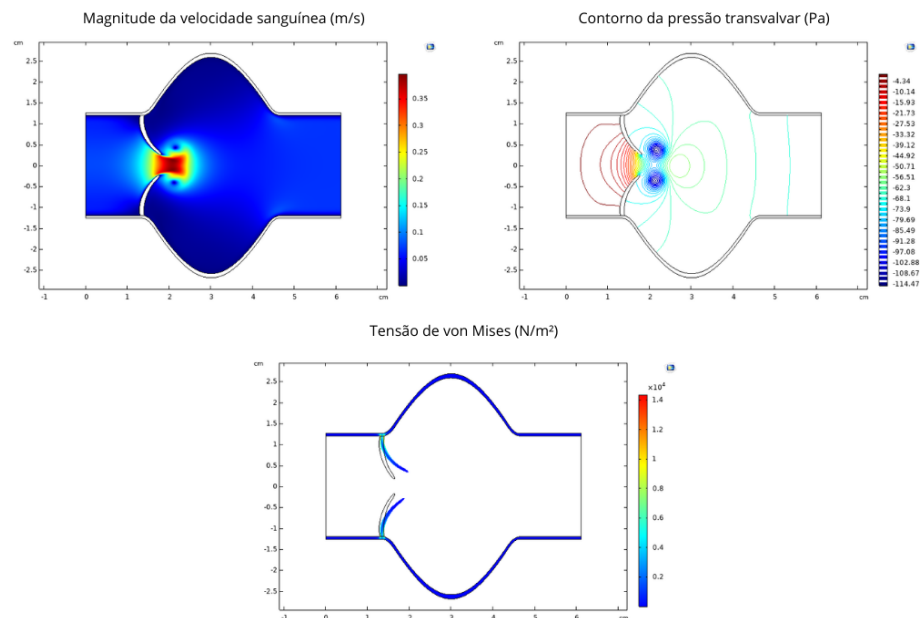


Figura 30 – Hemodinâmica numa VAB no instante 0.1 s do ciclo cardíaco.

No pico da sístole ventricular, entre 0.2 e 0.3 s, a pressão transvalvar atinge seu valor máximo, garantindo um fluxo sanguíneo eficiente e rápido. A velocidade sanguínea atinge seu ponto mais alto à medida que o sangue é ejetado rapidamente do ventrículo esquerdo

para a aorta. A tensão de von Mises nos tecidos valvares pode aumentar ainda mais devido à maior pressão e velocidade do fluxo sanguíneo (ver *Figura 31*).

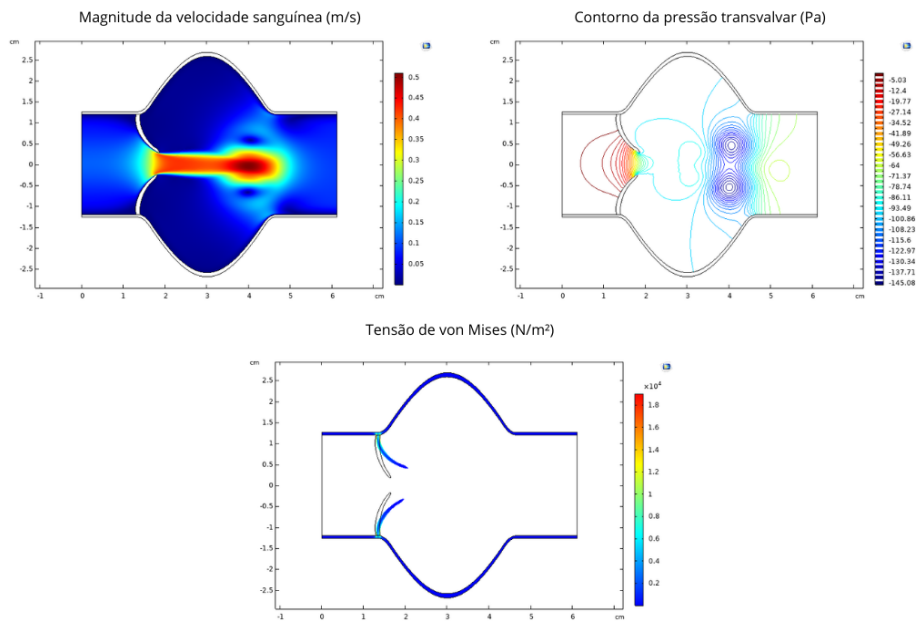


Figura 31 – Hemodinâmica numa *VAB* no instante 0.25 s do ciclo cardíaco.

No final da sístole ventricular, em aproximadamente 0.4 s, a pressão transvalvar começa a diminuir à medida que a pressão no ventrículo esquerdo diminui, mas permanece acima da pressão na aorta para manter a válvula aórtica aberta. A velocidade sanguínea diminui à medida que o fluxo de sangue do ventrículo esquerdo diminui. A tensão de von Mises nos tecidos valvares pode diminuir à medida que a pressão e a velocidade do fluxo sanguíneo diminuem (ver *Figura 32*).

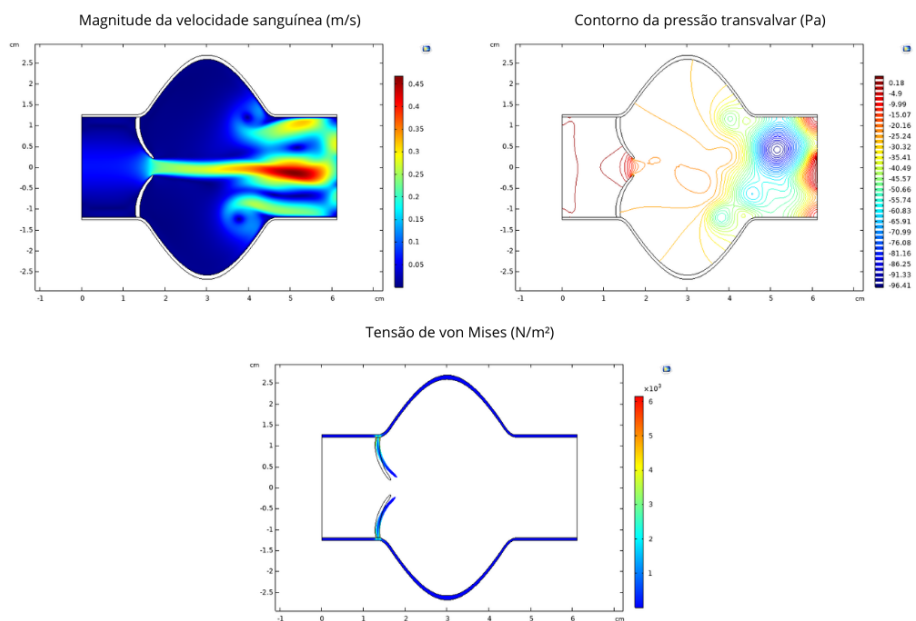


Figura 32 – Hemodinâmica numa *VAB* no instante 0.4 s do ciclo cardíaco.

Por fim, no início da diástole ventricular, em aproximadamente 0.6 s, a pressão na aorta excede a do ventrículo esquerdo, resultando no fechamento da válvula aórtica para evitar o refluxo sanguíneo (ver *Figura 33*).

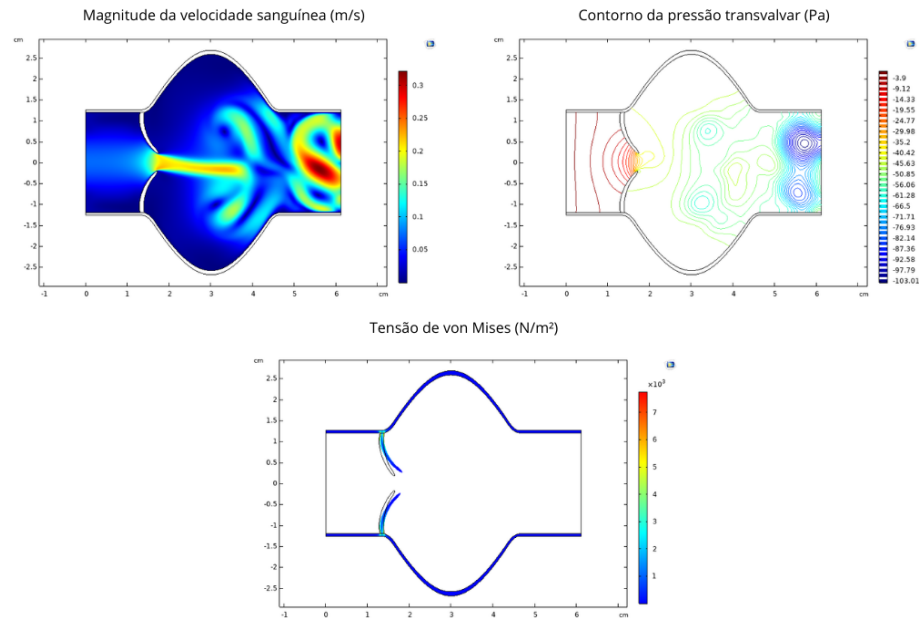


Figura 33 – Hemodinâmica numa *VAB* no instante 0.6 s do ciclo cardíaco.

A pressão transvalvar se torna negativa, indicando a pressão maior na aorta. A velocidade sanguínea diminui ainda mais à medida que o fluxo de sangue da aorta para o sistema circulatório sistêmico diminui. A tensão de von Mises nos tecidos valvares pode diminuir ainda mais à medida que a válvula se fecha e o fluxo sanguíneo cessa.

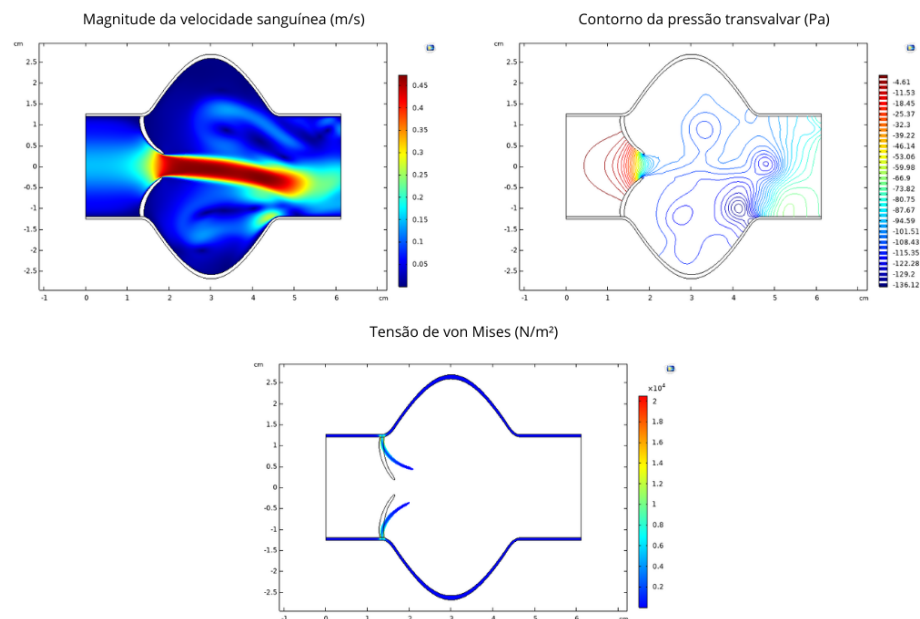


Figura 34 – Hemodinâmica numa *VAB* no instante 0.8 s do ciclo cardíaco.

8 Conclusões

O presente estudo buscou investigar o comportamento da válvula aórtica bicúspide por meio de simulação numérica em uma geometria idealizada, com foco na compreensão da interação fluido-estrutura e do comportamento ao longo do ciclo cardíaco. A análise detalhada dos resultados revelou informações sobre a dinâmica do fluxo sanguíneo através da válvula aórtica e as tensões experimentadas pelos tecidos valvares em diferentes momentos do ciclo cardíaco.

A avaliação da pressão transvalvar, velocidade sanguínea e tensão de von Mises nos instantes específicos, como o início, pico e final da sístole ventricular, proporcionou uma visão aprofundada do funcionamento dessa estrutura vital do coração. Essas descobertas são essenciais para a compreensão dos mecanismos envolvidos na função normal da válvula aórtica e para identificar possíveis alterações patológicas que possam ocorrer.

É importante ressaltar que este estudo é parte de um esforço contínuo na pesquisa cardiovascular e se baseia em trabalhos anteriores que estabeleceram as bases para este estudo. Futuras pesquisas devem se concentrar em ampliar a análise para incluir casos de pacientes fictícios, considerando variações na geometria e nas propriedades dos tecidos valvares. Isso permitirá uma compreensão mais abrangente das diferentes manifestações da válvula aórtica bicúspide e seu impacto na saúde cardiovascular.

Referências

- CHANDRA, S.; RAJAMANNAN, N. M.; SUCOSKY, P. Computational assessment of bicuspid aortic valve wall-shear stress: implications for calcific aortic valve disease. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, Springer, v. 11, p. 1085–1096, 2012.
- CONTI, C. A. et al. Biomechanical implications of the congenital bicuspid aortic valve: a finite element study of aortic root function from in vivo data. *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*, Elsevier, v. 140, n. 4, p. 890–896, 2010.
- ELMAN, H. C.; SILVESTER, D. J.; WATHEN, A. J. *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2014.
- FERNANDES, J. W. D. *Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016.
- FONSECA, F. T. da. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do Método dos Elementos Finitos. Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- FORMAGGIA, L.; QUARTERONI, A.; VENEZIANI, A. *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 1.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. Introdução à mecânica dos fluidos, 5ª edição. LTC Editora, 2001.
- HART, J. D. et al. A two-dimensional fluid–structure interaction model of the aortic valve. *Journal of Biomechanics*, Elsevier, v. 33, n. 9, p. 1079–1088, 2000.
- HUNTLEY, G. D. et al. Comparative study of bicuspid vs. tricuspid aortic valve stenosis. *European Heart Journal-Cardiovascular Imaging*, Oxford University Press, v. 19, n. 1, p. 3–8, 2018.
- JACKSON, V. et al. Aortic dimensions in patients with bicuspid and tricuspid aortic valves. *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*, Elsevier, v. 146, n. 3, p. 605–610, 2013.
- JERMIHOV, P. N. et al. Effect of geometry on the leaflet stresses in simulated models of congenital bicuspid aortic valves. *Cardiovascular Engineering and Technology*, Springer, v. 2, p. 48–56, 2011.
- JESUS, E. F. d. Simulação numérica das equações de Navier-Stokes pelo método de diferenças finitas para um escoamento incompressível. Universidade Federal do Pampa, 2017.
- JOHN, V. *Finite element methods for incompressible flow problems*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 51.

- KUAN, M. Y.; ESPINO, D. M. Systolic fluid–structure interaction model of the congenitally bicuspid aortic valve: assessment of modelling requirements. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Taylor & Francis, v. 18, n. 12, p. 1305–1320, 2015.
- LARSON, M. G.; BENGZON, F. *The Finite Element Method: theory, implementation, and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 10.
- MAROM, G. *Fluid-structure Interaction Modeling of Native Aortic Valve with Root Replacement and Asymmetric Configuration*. [S.l.]: Tel Aviv University, 2013.
- MAROM, G. et al. Fully coupled fluid–structure interaction model of congenital bicuspid aortic valves: effect of asymmetry on hemodynamics. *Medical & Biological Engineering & Computing*, Springer, v. 51, p. 839–848, 2013.
- OTTO, C. M.; BONOW, R. O. Valvular heart disease: a companion to Braunwald’s heart disease. 4 th. *Philadelphia, PA: Saunders*, 2014.
- PASKIN, L. Solução computacional das equações de Navier-Stokes com uma formulação penalizada de elementos finitos. *Projeto de graduação, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro–RJ, Brasil*, 2016.
- PORTELLA, P. E. Equações de Navier-Stokes pelo método dos elementos finitos. 1984.
- SANCHES, R. A. K. *Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- SIEVERS, H.-H.; SCHMIDTKE, C. A classification system for the bicuspid aortic valve from 304 surgical specimens. *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*, Elsevier, v. 133, n. 5, p. 1226–1233, 2007.
- SIU, S. C.; SILVERSIDES, C. K. Bicuspid aortic valve disease. *Journal of the American College of Cardiology*, American College of Cardiology Foundation Washington, DC, v. 55, n. 25, p. 2789–2800, 2010.
- SOUZA, M. M. d. Solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis via elementos finitos. 2013.
- TORRADO, A. et al. *Analysis of Hemodynamic Indicators in Bicuspid Aortic Valves Using a Computational Mathematical Model*. 2015.
- VIEIRA, L. C. L. M. et al. Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas. Universidade Federal de Alagoas, 2004.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2004.