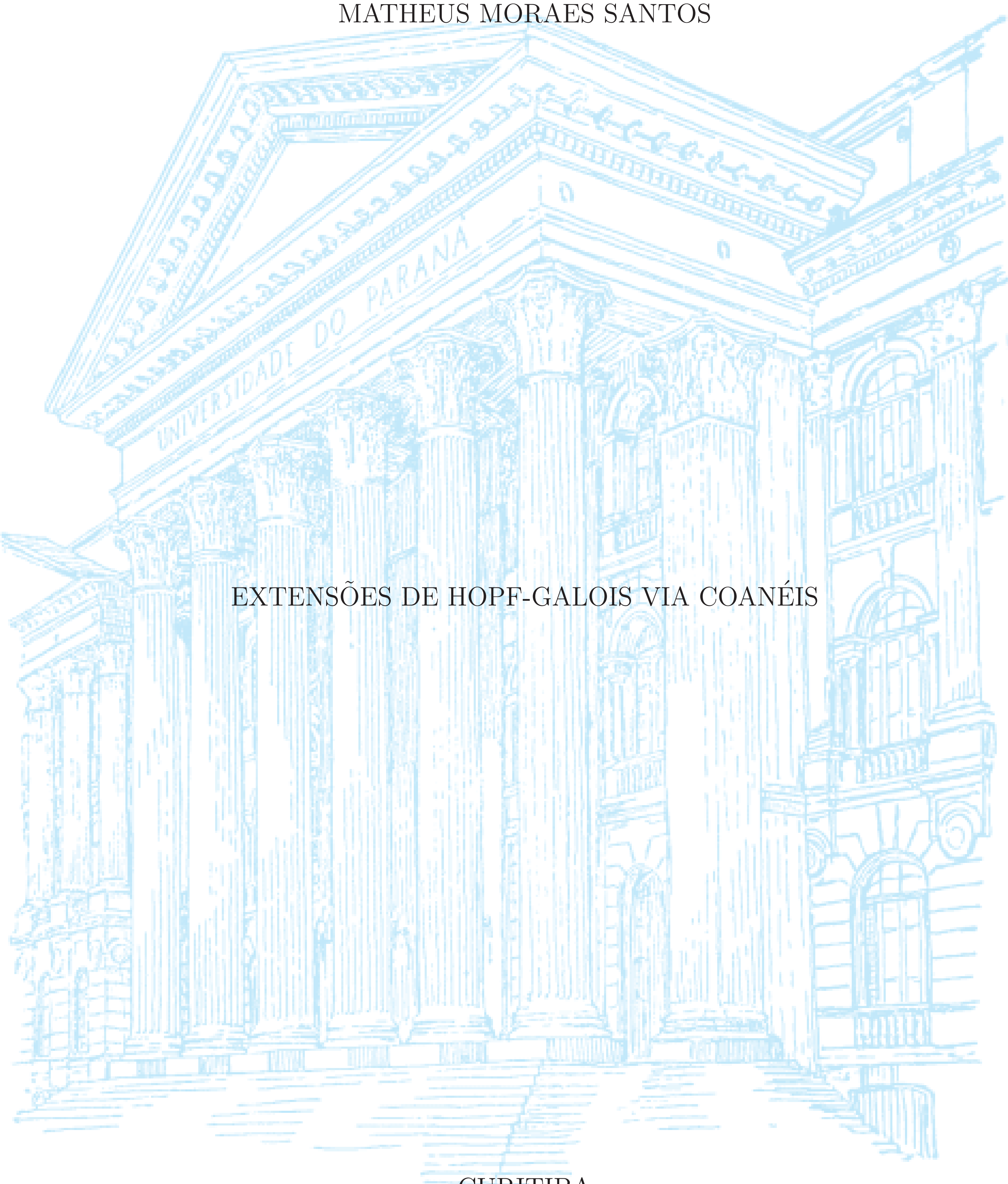
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MATHEUS MORAES SANTOS



EXTENSÕES DE HOPF-GALOIS VIA COANÉIS

CURITIBA

2024

MATHEUS MORAES SANTOS

EXTENSÕES DE HOPF-GALOIS VIA COANÉIS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

CURITIBA
2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Santos, Matheus Moraes
Extensões de Hopf-Galois via coanéis. / Matheus Moraes Santos. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

1. Hopf-Galois, Extensões de. 2.Anéis - Álgebra. 3. Contexto de Morita. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Alves, Marcelo Muniz Silva. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **MATHEUS MORAES SANTOS** intitulada: **Extensões de Hopf-Galois via coanéis**, sob orientação do Prof. Dr. MARCELO MUNIZ SILVA ALVES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 13 de Agosto de 2024.

Assinatura Eletrônica
14/08/2024 11:03:28.0
MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
14/08/2024 11:24:12.0
OLIVIER BRAHIC
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
14/08/2024 11:12:22.0
ELIEZER BATISTA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e compaixão para com a minha alma.

À minha família, pelo apoio e amor incondicional, em especial aos meus pais Carlos e Rosemeri, e ao meu irmão Thiago.

Aos amigos que me acompanharam durante essa jornada, ora como um apoio nos estudos, ora tornando os dias mais leves e divertidos.

À todos os professores e funcionários do PPGM, que me proporcionaram uma excelente formação acadêmica e um espaço agradável para evoluir.

Ao meu orientador, professor Marcelo, por me acolher como aluno desde a graduação e me incentivar a cursar o mestrado, mantendo presença constante durante a minha formação, sempre com bons conselhos.

À banca examinadora, por aceitar fazer parte do meu trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho, investigamos extensões de Galois através da linguagem de coanéis. Especificamente, demonstramos como extensões de Hopf-Galois podem ser caracterizadas usando a teoria de coanéis, estabelecendo importantes resultados de equivalência. Com esse intuito, apresentamos fundamentos de biálgebras e álgebras de Hopf, além de uma visão geral da teoria dos coanéis, destacando os coanéis de Galois. Também exploramos o clássico Teorema de *faithfully flat descent* para um morfismo de anéis, cuja prova é desenvolvida em termos do coanel de Sweedler associado.

Palavras-chave: Extensão de Hopf-Galois; Extensão de Galois; Teoria de coanéis; Teoria dos antecessores; Contexto de Morita.

ABSTRACT

In this work, we investigate Galois extensions through the framework of corings. Specifically, we show how Hopf-Galois extensions can be characterized using coring theory, establishing significant equivalence results. With this aim, we introduce the fundamental concepts of bialgebras and Hopf algebras, along with an overview of coring theory, highlighting Galois corings. We also explore the classical Theorem of faithfully flat descent for a ring morphism, whose proof is developed in terms of the associated Sweedler coring.

Keywords: Hopf-Galois extension; Galois extension; Coring theory; Descent theory; Morita context.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A teoria de coanéis emerge como um campo relativamente novo e dinâmico na matemática contemporânea, cujas raízes se encontram no estudo pioneiro de Moss Sweedler de 1975, conforme descrito no artigo [24]. Nele o autor considera uma extensão de anéis $i : B \to A$, não necessariamente comutativos, e introduz o que hoje é conhecido como o coanel (de Sweedler) da extensão. Quando B e A são anéis de divisão, Sweedler obtém uma correspondência entre quocientes do coanel da extensão e anéis de divisão intermediários da extensão, e com isso deduz o Teorema de Jacobson-Bourbaki [14], o qual permite estender a teoria de Galois para extensões de corpos não necessariamente separáveis. Em outro sentido, os coanéis surgem naturalmente como uma generalização do conceito de coálgebras sobre um anel comutativo, nesse caso o anel base é arbitrário e as construções ocorrem na categoria dos bimódulos. Concretamente, um coanel sobre um anel A consiste num A-bimódulo $\mathcal{C}$ junto de morfismos de A-bimódulos $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}$ e $\varepsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to A$, satisfazendo condições de coassociatividade e de counitalidade:

$$(\Delta_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = (I_{\mathcal{C}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}},$$

$$(I_{\mathcal{C}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = I_{\mathcal{C}} = (\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}}.$$

Nos anos que seguiram à sua criação, os coanéis não tiveram grande notoriedade, em parte pela falta de exemplos concretos que genuinamente generalizavam coálgebras, como apontam Brzeziński e Wisbauer [7, p. vii]. No entanto, ao final do século XX houve um ressurgimento no interesse por coanéis, impulsionado pela descoberta de Mitsuhiro Takeuchi de como uma estrutura de compatibilidade entre álgebras e coálgebras, chamada de *estrutura entrelaçada* (*entwining structure*), pode ser realizada usando coanéis. Esse avanço colocou a teoria de coanéis em destaque, revelando-se uma ferramenta unificadora para várias construções na teoria de biálgebras e álgebras de Hopf, como módulos de Hopf relativos, módulos de Yetter-Drinfeld e módulos de Hopf-Doi-Koppinen, pois cada uma destas corresponde a um *módulo entrelaçado*, que por sua vez é um comódulo sobre um coanel apropriado. Além disso, os coanéis encontraram amplas aplicações em áreas diversas da matemática, incluindo anéis não comutativos, teoria de categorias, álgebras de Hopf e geometria não comutativa.

Nesta dissertação, estudamos como a teoria de coanéis se aplica em duas áreas distintas: nas teorias de extensões de Galois e na teoria dos antecessores (*descent theory*) em anéis arbitrários. No primeiro cenário investigamos algumas conexões entre cinco teorias de extensões de Galois, contempladas em ordem crescente de generalização no contexto de corpos, anéis, álgebras de Hopf, coálgebras e finalmente em coanéis. Apresentamos um panorama histórico para a abordagem dada a esse tema, elucidada por [20].

Sejam E/F uma extensão finita de corpos e $G = \mathrm{Gal}(E/F) = \mathrm{Aut}_F(E)$ o grupo de F-automorfismos de E, isto é,

$$G = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(E) \mid \varphi(x) = x,\ \forall\ x \in F\}.$$

Classicamente, dizemos que E/F é uma *extensão de Galois* se F coincide com E^G, os invariantes para a ação do grupo G em E. Existem diversas condições equivalentes para a definição dada anteriormente, em particular, toda extensão de corpos E/F em que o grupo $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ age em E, dá origem a uma nova estrutura algébrica, a *álgebra de grupo skew* $E * G$, definida como o E-espaço vetorial de base $\{v_g \mid g \in G\}$ e com multiplicação dada por

$$(xv_g)(yv_h) = xg(y)v_{gh},$$

para todos $x, y \in E$ e $g, h \in G$. Também temos um morfismo de álgebras entre $E * G$ e a álgebra de F-endomorfismos de E, à dizer $\varphi : E * G \to \mathrm{End}_F(E)$ definido por $\varphi(xv_g)(y) = xg(y)$, para todos $x, y \in E$, $g \in G$ e nessas condições mostra-se que uma extensão finita de corpos E/F é de Galois se, e somente se, φ é bijetor. Em 1960, Auslander e Goldman [3] introduziram a noção de extensão de Galois para anéis comutativos $A \supseteq B$, em que B é um subanel e G um subgrupo finito de $\mathrm{Aut}_B(A)$. Nesse contexto, A é dito uma *extensão de Galois* de B se A é projetivo finitamente gerado como B-módulo e o morfismo de álgebras $\varphi : A * G \to \mathrm{End}_B(A)$ descrito anteriormente é bijetor. Com o passar dos anos, essa teoria progrediu significativamente e foi generalizada em várias direções, como apontado por Paques [20], abrangendo tanto casos particulares de anéis quanto o campo de anéis não comutativos. Ao final da década de 60, Chase e Sweedler [11] substituíram o papel do grupo finito de automorfismos por coações de álgebras de Hopf em álgebras comutativas, dando origem à primeira noção de extensão de Hopf-Galois. Desde então, as generalizações da teoria de Hopf-Galois de Chase e Sweedler frequentemente fazem uso de uma *aplicação canônica*, que conecta, no caso citado anteriormente por exemplo, a álgebra base da extensão com a estrutura de coação dada por uma álgebra de Hopf. No início da década de 80, Kreimer e Takeuchi [17] estudaram coações de Hopf em álgebras arbitrárias, tornando mais abrangente o conceito de extensão de Hopf-Galois. Como será detalhado no Capítulo 1, essa teoria abrange tanto extensões de corpos quanto, como indicado por Paques [20], extensões de anéis. No final dos anos 90, Brzeziński e Hajac [6], motivados pelo conceito emergente de estrutura entrelaçada, estudaram o ponto de vista de extensões de Galois de álgebras por coálgebras, como uma generalização imediata das extensões de Hopf-Galois e por outro lado estabelecendo conexões com a teoria de calibre para espaços homogêneos quânticos, na área de geometria não comutativa. Finalmente, em 2002 Brzeziński [5] estabeleceu diversos resultados de estrutura para coanéis e seus comódulos, em particular deu origem a noção de *coanel de Galois*, que por sua vez abrange o caso de estruturas entrelaçadas e extensões de coálgebras estabelecidas anteriormente.

A outra temática desse trabalho diz respeito ao estudo da teoria dos antecessores (*descent theory*) formulada sob a ótica da teoria de coanéis. Dado um morfismo de anéis $i : B \to A$, todo B-módulo à direita N dá origem a um A-módulo à direita M pelo produto tensorial $M = N \otimes_B A$. O problema dos antecessores é caracterizar os A-módulos que são obtidos desta forma e recuperar o B-módulo original. Como veremos no Capítulo 2, o problema dos antecessores para um morfismo de anéis $i : B \to A$ pode ser resolvido elegantemente em termos da categoria de comódulos sobre o coanel de Sweedler $A \otimes_B A$ associado ao morfismo i.

O desenvolvimento central do texto segue a abordagem apresentada por Caenepeel em [8]. Essencialmente, dividimos o trabalho em quatro momentos: iniciamos estabelecendo preliminares, em seguida introduzimos coanéis, por meio de diversos exemplos, logo depois exploramos a estrutura de Galois nesses objetos e finalmente aplicamos os resultados da teoria desenvolvida anteriormente para o caso do coanel associado a uma extensão de Hopf-Galois.

O Capítulo 1 constitui um compêndio de resultados e definições essenciais em álgebras de Hopf, incluindo o estudo de certas propriedades e de exemplos de álgebras, coálgebras, módulos e comódulos. Em particular, exploramos a teoria de extensões de Hopf-Galois, com exemplos motivadores, como também apresentamos fundamentos da teoria de Morita para anéis.

No Capítulo 2 abordamos a teoria geral de coanéis, bem como exploramos a notável estrutura de coanéis providos de elementos grouplike. Enfatizamos o tratamento dado ao conceito de dualidade para essa estrutura, resultando num funtor entre as categorias de coanéis e anéis sobre uma dada álgebra. Por fim, enunciamos o Teorema de *faithfully flat descent* para um morfismo de anéis $i : B \to A$ e o demonstramos, por meio da teoria de coanéis.

O Capítulo 3 investiga a estrutura de Galois em coanéis. Nesse sentido é descrito um contexto de Morita canônico para coanéis com grouplike e por fim enunciamos um teorema de equivalências para a estrutura de Galois em um coanel.

O último capítulo unifica diversas teorias de Galois, estabelecidas na linguagem comum de coanéis. Aplicamos o teorema de equivalências para a estrutura de Galois em coanéis desenvolvida no capítulo anterior, decrescendo em generalidade. Mais claramente, dissertamos sobre coanéis de Galois no contexto de extensões de coálgebras, extensões de Hopf-Galois e extensões de anéis.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Nesse capítulo apresentamos definições, exemplos e alguns resultados da teoria de álgebras de Hopf, culminando nas extensões de Hopf-Galois. Também discorremos sobre alguns tópicos auxiliares para o decorrer do texto, como a teoria de Morita.

Ao longo do texto, salvo indicação contrária, k denota um anel comutativo com unidade 1_k, I o morfismo identidade, usualmente indexado pelo domínio e todo produto tensorial $\otimes$ não adornado é considerado sobre k. Observamos que o tratamento dado à esse capítulo é meramente introdutório, para mais detalhes os livros [2], [12] e [13] podem ser consultados.

1.1 Álgebras, coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf

Introduzimos os conceitos necessários para o estudo das álgebras de Hopf. As principais referências para essa seção são [12] e [13].

Definição 1.1.1. *Uma k-**álgebra** é uma tripla $A = (A, m, u)$, com A um k-módulo e $m : A \otimes A \to A$, $u : k \to A$ morfismos de k-módulos satisfazendo os diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes I_A"] \arrow[d, "I_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[d, "m"] & \\ A \otimes k \arrow[ur, "I_A \otimes u"] \arrow[r, "l_A"'] & A & k \otimes A \arrow[ul, "u \otimes I_A"'] \arrow[l, "r_A"] \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$m \circ (m \otimes I_A) = m \circ (I_A \otimes m), \tag{1.1}$$

$$m \circ (I_A \otimes u) = l_A \quad e \quad m \circ (u \otimes I_A) = r_A, \tag{1.2}$$

em que l_A e r_A denotam os isomorfismos canônicos de k-módulos.

Definição 1.1.2. *Sejam $A = (A, m_A, u_A)$ e $B = (B, m_B, u_B)$ duas k-álgebras. Uma aplicação k-linear $f : A \to B$ é um **morfismo de k-álgebras** se satisfaz os diagramas*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[d, "u_A"'] \arrow[dr, "u_B"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$m_B \circ (f \otimes f) = f \circ m_A,$$

$$f \circ u_A = u_B.$$

Exemplo 1.1.3. *Seja G um grupo arbitrário. A **álgebra de grupo** kG é o k-módulo livre de base G, isto é, $kG = \oplus_{g \in G} k v_g$, com multiplicação e unidade*

$$m : kG \otimes kG \to kG, \quad u : k \to kG$$

descritas por

$$m(\sum_{g \in G} a_g v_g \otimes \sum_{g \in G} b_g v_g) = \sum_{g \in G} c_g v_g,$$

em que $c_g = \sum_{hl=g} a_h b_l$ e

$$u(\lambda) = \lambda v_e,$$

com "e" o elemento neutro do grupo G, para todos $\sum_{g \in G} a_g v_g, \sum_{g \in G} b_g v_g \in kG$ e $\lambda \in k$.

Definição 1.1.4. *Uma k-**coálgebra** é uma tripla $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ com C um k-módulo e $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to k$ morfismos de k-módulos, satisfazendo os diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes I_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "I_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "l_C^{-1}"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "r_C^{-1}"] & \\ C \otimes k & C \otimes C \arrow[l, "I_C \otimes \varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon \otimes I_C"'] & k \otimes C \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$(\Delta \otimes I_C) \circ \Delta = (I_C \otimes \Delta) \circ \Delta, \tag{1.3}$$

$$(I_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = l_C^{-1} \quad e \quad (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta = r_C^{-1}. \tag{1.4}$$

em que l_C^{-1} *e* r_C^{-1} *denotam os isomorfismos canônicos de* k*-módulos. O primeiro diagrama é chamado de coassociatividade de* C *e o segundo de counitalidade.*

Observação 1.1.5. *Adotamos a seguinte notação de Sweedler-Heyneman para descrever a imagem de um elemento* $c \in \mathcal{C}$ *pela aplicação* Δ*:*

$$\Delta_{\mathcal{C}}(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)},$$

com $c_{(1)}, c_{(2)} \in C$ *e o lado direito da igualdade acima representando um somatório dado em termos de* c*.*

Definição 1.1.6. *Sejam* $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *e* $D = (D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ *duas* k*-coálgebras. Uma aplicação* k*-linear* $f : C \to D$ *é um **morfismo de*** k***-coálgebras*** *se satisfaz os diagramas*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ k & \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C,$$

$$\varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C.$$

Exemplo 1.1.7. *Seja* G *um grupo arbitrário. Então a álgebra de grupo* $kG = (kG, m, u)$ *do Exemplo 1.1.3 é uma* k*-coálgebra, pondo*

$$\Delta : kG \to kG \otimes kG, \quad \varepsilon : kG \to k$$

por

$$\Delta(v_g) = v_g \otimes v_g \quad e \quad \varepsilon(v_g) = 1_k,$$

para todo $v_g \in kG$*.*

Estruturas de álgebra e coálgebra em um mesmo k-módulo possuem condições de compatibilidade, no seguinte sentido:

Proposição 1.1.8. *Sejam H um k-módulo tal que (H, m, u) é uma k-álgebra e (H, Δ, ε) uma k-coálgebra. São equivalentes:*

(i) As aplicações m e u são morfismos de k-coálgebras.

(ii) As aplicações Δ e ε são morfismos de k-álgebras.

Demonstração. Veja [12, Proposition 4.1.1] □

Agora estamos de condições de definir a estrutura de biálgebra.

Definição 1.1.9. *Uma k-**biálgebra** é uma quíntupla $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$, tal que (B, m, u) é uma k-álgebra e (B, Δ, ε) uma k-coálgebra, satisfazendo as condições equivalentes da Proposição 1.1.8.*

Exemplo 1.1.10. *Seja G um grupo arbitrário. Então a álgebra de grupo $kG = (kG, m, u)$ do Exemplo 1.1.3 junto da estrutura de coálgebra $(kG, \Delta, \varepsilon)$ do Exemplo 1.1.7 define uma k-biálgebra $(kG, m, u, \Delta, \varepsilon)$.*

Sejam $A = (A, m, u)$ uma k-álgebra e $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ uma k-coálgebra. Definimos um produto (de *convolução*) no k-módulo $\mathrm{Hom}(C, A)$ por,

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

para todos $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$, ou ainda, em um elemento $c \in C$ por

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Mostra-se que $\mathrm{Hom}(C, A)$ munido do *produto de convolução* descrito acima é uma k-álgebra, cuja unidade é o morfismo $(u \circ \varepsilon) : C \to A$ (veja [12, Section 4.2]).

Definição 1.1.11. *Seja $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma k-biálgebra. Dizemos que H é uma k-**álgebra de Hopf** se a aplicação identidade I_H é invertível em $\mathrm{Hom}(H, H)$ com o produto de convolução $*$. O inverso de I_H é chamado de **antípoda** para H e, usualmente, denotado por S.*

Em termos da notação de Sweedler, o morfismo antípoda $S : H \to H$ satisfaz as seguintes igualdades

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(1)}S(h_{(2)}),$$

para todo $h \in H$.

Exemplo 1.1.12. *Seja G um grupo e $H = kG$ a k-biálgebra do Exemplo 1.1.10. Então $H = kG$ é uma k-álgebra de Hopf com antípoda $S : kG \to kG$ dada por*

$$S(v_g) = v_{g^{-1}},$$

para todo $v_g \in H$.

O morfismo antípoda presente na estrutura de uma álgebra de Hopf dispõe de várias propriedades, em especial é um antimorfismo de álgebras e um antimorfismo de coálgebras, como indicado na proposição a seguir.

Proposição 1.1.13. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então:*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$.

(ii) $S(1_H) = 1_H$.

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$.

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração. Veja [12, Proposition 4.2.6]. □

Seja $\iota_M : M^* \otimes M^* \to (M \otimes M)^*$ o morfismo injetor de k-módulos dado por $\iota_M(f \otimes g)(m \otimes m') = f(m)g(m')$ e $\Phi : k \to k^*$ o isomorfismo canônico de k-módulos. O funtor $\mathrm{Hom}(-, k) = (-)^*$ transforma uma estrutura de k-coálgebra em uma k-álgebra, bem como toda k-álgebra projetiva e finitamente gerada (dimensão finita se k é corpo) em uma k-coálgebra. Mais claramente,

Proposição 1.1.14. *Se $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ é uma k-coálgebra, então (C^*, m, u) é uma k-álgebra, com $m = \Delta^* \circ \iota_C$ e $u = \varepsilon^* \circ \Phi$.*

Demonstração. Veja [13, Proposição 2.2.1]. □

Proposição 1.1.15. *Se uma k-álgebra $A = (A, m, u)$ é um k-módulo projetivo e finitamente gerado (para k corpo, uma k-álgebra de dimensão finita), então $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ é uma k-coálgebra, com $\Delta = \iota_A^{-1} \circ m^*$ e $\varepsilon = \Phi^{-1} \circ u^*$.*

Demonstração. Veja [13, Proposição 2.2.1]. □

Exemplo 1.1.16. *Sejam G um grupo finito, $H = kG$ a álgebra de Hopf descrita acima e $\{p_g \mid g \in G\} \subseteq H^*$ o conjunto das projeções canônicas nas componentes de kG, isto é, $p_g(v_h) = \delta_{g,h}$ para todo $v_h \in kG$. Como H é projetiva e finitamente gerada sobre k, segue das Proposições 1.1.14 e 1.1.15 que H^* é uma k-biálgebra. Mais ainda, $H^* = ((kG)^*, m^*, u^*, \Delta^*, \varepsilon^*, S^*)$ é k-álgebra de Hopf, com aplicações descritas por*

$$\begin{array}{rccc} m^* : & (kG)^* \otimes (kG)^* & \to & (kG)^* \\ & p_g \otimes p_h & \mapsto & \delta_{g,h} p_g, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} u^* : & k & \to & (kG)^* \\ & \lambda & \mapsto & (v_g \mapsto \lambda), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Delta^* : & (kG)^* & \to & (kG)^* \otimes (kG)^* \\ & p_g & \mapsto & \sum_{h \in G} p_h \otimes p_{h^{-1}g}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon^* : & (kG)^* & \to & k \\ & p_g & \mapsto & \delta_{g,e}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S^* : & (kG)^* & \to & (kG)^* \\ & p_g & \mapsto & p_{g^{-1}}, \end{array}$$

para todos $p_g \in (kG)^*$ e $\lambda \in k$.

É possível tomar o dual da álgebra de Hopf $(kG)^*$, ou seja o bidual $(kG)^{**}$, que é naturalmente isomorfo à kG como álgebra de Hopf. Apresentamos essa estrutura no exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.17. *Seja G um grupo finito e H a álgebra de Hopf $H = kG$. Consideremos o conjunto $\{f_g \mid g \in G\} \subseteq H^{**}$ dos elementos duais das projeções p_g, isto é, $f_g(p_h) = \delta_{g,h}$, para todo $p_h \in (kG)^*$. Então $H^{**} = ((kG)^{**}, m^{**}, u^{**}, \Delta^{**}, \varepsilon^{**}, S^{**})$ é álgebra de Hopf, com aplicações descritas por*

$$\begin{array}{rccc} m^{**} : & (kG)^{**} \otimes (kG)^{**} & \to & (kG)^{**} \\ & f_g \otimes f_h & \mapsto & f_{gh}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} u^{**} : & k & \to & (kG)^{**} \\ & \lambda & \mapsto & \lambda f_e, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Delta^{**} : & (kG)^{**} & \to & (kG)^{**} \otimes (kG)^{**} \\ & f_g & \mapsto & f_g \otimes f_g, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon^{**} : & (kG)^* & \to & k \\ & f_g & \mapsto & 1_k, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S^{**} : & (kG)^{**} & \to & (kG)^{**} \\ & f_g & \mapsto & f_{g^{-1}}, \end{array}$$

1.2 Módulos e comódulos

Nessa seção reunimos alguns resultados, definições e exemplos da teoria de módulos sobre álgebras e da teoria de comódulos sobre coálgebras, relevantes para os demais capítulos. As principais referências são [2], [12], [16] e [18].

Primeiramente, recordamos a definição de módulo sobre uma k-álgebra.

Definição 1.2.1. *Seja $A = (A, m, u)$ uma k-álgebra. Um A-**módulo à direita** é um par (M, μ_M), em que M é um k-módulo e $\mu_M : M \otimes A \to M$ uma aplicação k-linear* *satisfazendo os diagramas comutativos*

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu_M \otimes I_A"] \arrow[d, "I_M \otimes m"'] & M \otimes A \arrow[d, "\mu_M"] \\
M \otimes A \arrow[r, "\mu_M"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes A \arrow[d, "\mu_M"'] & \\
M & M \otimes k \arrow[l, "l_M"] \arrow[ul, "I_M \otimes u"']
\end{tikzcd}
$$

isto é, são válidas as equações

$$\mu_M \circ (\mu_M \otimes I_A) = \mu_M \circ (I_M \otimes m), \tag{1.5}$$

$$\mu_M \circ (I_M \otimes u) = l_M. \tag{1.6}$$

A imagem de um elemento $m \otimes a$ pela aplicação de estrutura de μ_M será denotada por $m \cdot a$, ou simplesmente ma. De forma análoga define-se módulos à esquerda.

Um k-módulo M que possui estrutura de módulo à esquerda e à direita sobre k-álgebras A e B, respectivamente, satisfazendo a compatibilidade

$$(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (m \cdot b)$$

para todos $a \in A$, $b \in B$ e $m \in M$, é dito um (A, B)-*bimódulo.*

Definição 1.2.2. *Sejam (M, μ_M) e (N, μ_N) dois A-módulos à direita. Uma aplicação k-linear $f : M \to N$ é um **morfismo de A-módulos à direita** se satisfaz*

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes A \arrow[r, "f \otimes I_A"] \arrow[d, "\mu_M"'] & N \otimes A \arrow[d, "\mu_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Dadas duas k-álgebras A e B, denotamos as categorias de A-módulos à esquerda, B-módulos à direita e de (A, B)-bimódulos, respectivamente por ${}_A\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_B$ e ${}_A\mathcal{M}_B$. Quando necessário, adornamos módulos $M \in {}_A\mathcal{M}$, $N \in \mathcal{M}_B$ com os subíndices ${}_AM$ e N_B. O mesmo ocorre para conjunto de morfismos entre dois módulos, isto é, se $M, M' \in {}_A\mathcal{M}$ e $N, N' \in \mathcal{M}_B$, denotamos ${}_A\operatorname{Hom}(M, M')$ e $\operatorname{Hom}_B(N, N')$.

No decorrer do texto faremos uso do conceito de *sequência exata*, o qual definimos abaixo.

Definição 1.2.3. *Uma sequência de A-módulos e aplicações A-lineares*

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

é dita ***exata em*** M_i *se* $\mathrm{Im}(f_{i+1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$*. A sequência é dita* ***exata*** *se satisfaz essa igualdade para todo índice* i*.*

A seguir definimos o conceito de morfismo *puro* entre dois módulos.

Definição 1.2.4. *Um morfismo de A-módulos à direita $f : M \to N$ é dito* ***puro*** *se o morfismo de grupos abelianos*

$$f \otimes_A I_L : M \otimes_A L \to N \otimes_A L$$

é injetor, para todo A-módulo à esquerda L.

Definição 1.2.5. *Um morfismo de A-módulos à esquerda $f : M \to N$ é dito* ***puro*** *se o morfismo de grupos abelianos*

$$I_L \otimes_A f : L \otimes_A M \to L \otimes_A N$$

é injetor, para todo A-módulo à direita L.

Definição 1.2.6. *Um A-módulo à direita M é dito* ***fiel*** *se o anulador de M*

$$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \mid ma = 0,\ \forall\ m \in M\}$$

é o ideal nulo.

Definição 1.2.7. *Um A-módulo à direita L é dito* ***plano*** *se para toda sequência exata de A-módulos à esquerda*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

a sequência induzida

$$0 \longrightarrow L \otimes_A M \xrightarrow{I_L \otimes_A f} L \otimes_A N$$

também é exata. Equivalentemente, L é plano se o funtor $L \otimes_A -$ é exato.

Definição 1.2.8. *Sejam L um A-módulo à direita e $f : M \to N$ um morfismo de A-módulos à esquerda. Então L é dito* ***fielmente plano*** *caso a sequência de A-módulos à esquerda*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

é exata se, e somente se, a sequência induzida

$$0 \longrightarrow L \otimes_A M \xrightarrow{I_L \otimes_A f} L \otimes_A N$$

também é exata, para todos A-módulos à esquerda M, N.

Observação 1.2.9. *Seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis. Toda estrutura de A-módulo à direita (à esquerda) carrega uma estrutura natural de B-módulo à direita (à esquerda), induzida por i. Com efeito, se $M \in \mathcal{M}_A$ e $N \in {}_A\mathcal{M}$ então $M \in \mathcal{M}_B$ e $N \in {}_B\mathcal{M}$ com ações*

$$m \cdot b = m \cdot i(b) \quad e \quad b \cdot n = i(b) \cdot n,$$

para todos $m \in M$, $n \in N$ e $b \in B$.

A proposição a seguir detalha como induzir estruturas de módulos em um conjunto de morfismos.

Proposição 1.2.10. *Sejam A e B duas k-álgebras. Então,*

(i) Para ${}_AM_B$ e N_B, $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ é um A-módulo à direita com ação $(f \cdot a)(m) = f(am)$, para todos $a \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_B(M, N)$ e $m \in M$.

(ii) Para ${}_AM_B$ e ${}_AN$, ${}_A\mathrm{Hom}(M, N)$ é um B-módulo à esquerda com ação $(b \cdot f)(m) = f(mb)$, para todos $b \in B$, $f \in {}_A\mathrm{Hom}(M, N)$ e $m \in M$.

(iii) Para ${}_AM$ e ${}_AN_B$, ${}_A\mathrm{Hom}(M, N)$ é um B-módulo à direita com ação $(f \cdot b)(m) = f(m)b$, para todos $b \in B$, $f \in {}_A\mathrm{Hom}(M, N)$ e $m \in M$.

(iv) Para M_B e ${}_AN_B$, $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ é um A-módulo à esquerda com ação $(a \cdot f)(m) = af(m)$, para todos $a \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_B(M, N)$ e $m \in M$.

Em particular,

(v) Para ${}_AM$, ${}^*M = {}_A\mathrm{Hom}(M, A)$ é um A-módulo à direita com ação $(f \cdot a)(m) = f(m)a$, para todos $a \in A$, $f \in {}_A\mathrm{Hom}(M, A)$ e $m \in M$.

(vi) Para N_B, $N^* = \mathrm{Hom}_B(N, B)$ é um B-módulo à esquerda com ação $(b \cdot f)(n) = bf(n)$, para todos $b \in B$, $f \in \mathrm{Hom}_B(N, B)$ e $n \in N$.

Demonstração. Veja [2, Lemme 5.2]. □

Definição 1.2.11. *Um A-módulo à direita M é* ***finitamente gerado*** *se admite um conjunto gerador finito, isto é, um conjunto $\{m_i \mid i \in I\}$ finito tal que para todo $m \in M$ existem $a_i \in A$ satisfazendo*

$$m = \sum_{i \in I} m_i a_i.$$

Definição 1.2.12. *Um A-módulo à direita P é dito **projetivo** se dados um epimorfismo $f : M \to N$ e um morfismo $g : P \to N$ arbitrários, existe um morfismo $h : P \to M$ satisfazendo o diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Os teoremas abaixo fornecem outras caracterizações para módulos projetivos.

Teorema 1.2.13. *Um A-módulo P é projetivo se, e somente se, é somando direito de um A-módulo livre.*

Demonstração. Veja [2, Théorème 2.4]. □

Teorema 1.2.14. *Um A-módulo à direita P é projetivo se, e somente se, existem famílias $\{p_i \in P \mid i \in I\}$ de elementos de P e $\{\xi_i \in P^* \mid i \in I\}$ de elementos do módulo dual $P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A)$ tais que, para todo $p \in P$ é válido $\xi_i(p) = 0$, exceto para um número finito de índices, bem como*

$$p = \sum_{i \in I} p_i \xi_i(p).$$

Demonstração. Veja [16, Proposition 3.11]. □

Observação 1.2.15. *O par de famílias $\{p_i \in P \mid i \in I\}$, $\{\xi_i \in P^* \mid i \in I\}$ descritos no teorema acima é chamado uma **base dual** para o A-módulo P. Para fins de notação, usualmente denotaremos uma base dual como uma família de pares:*

$$\{(p_i, \xi_i) \mid p_i \in P, \xi_i \in P^*\}.$$

Além disso, se P é um A-módulo projetivo e finitamente gerado, a base dual pode ser tomada finita. Vale o resultado análogo do Teorema 1.2.14 para A-módulos à esquerda, substituindo P^* por ${}^*P$.

Dado um A-módulo à esquerda M, pela Proposição 1.2.10 é possível considerar o A-módulo à direita ${}^*M$ e também o A-módulo à esquerda $({}^*M)^* = \mathrm{Hom}_A({}_A\mathrm{Hom}(M, A), A)$, o "bidual" de M. Notoriamente, temos uma aplicação de avaliação $\mathsf{ev} : M \to ({}^*M)^*$, definida nos elementos $m \in M$ e $f \in {}^*M$ por

$$\mathsf{ev}(m)(f) = f(m).$$

Observemos que, por construção, o bidual dá origem a um endofuntor na categoria ${}_A\mathcal{M}$, nesse sentido ev pode ser realizada como uma transformação natural entre o funtor identidade e o funtor bidual. Em outros termos, para cada morfismo de A-módulos à esquerda $f : M \to N$, temos um diagrama comutativo de A-módulos à esquerda

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathsf{ev}_M"] \arrow[d, "f"'] & ({}^*M)^* \arrow[d, "({}^*f)^*"] \\ N \arrow[r, "\mathsf{ev}_N"'] & ({}^*N)^* \end{tikzcd}$$

Com efeito, dados $m \in M$ e $h : {}^*N \to A$, temos

$$\begin{aligned} ((({}^*f)^* \circ \mathsf{ev}_M)(m))(h) &= (({}^*f)^*(\mathsf{ev}_M(m)))(h) \\ &= \mathsf{ev}_M(m)({}^*f(h)) \\ &= ({}^*f(h))(m) \\ &= h(f(m)) \\ &= (\mathsf{ev}_N(f(m)))(h) \\ &= ((\mathsf{ev}_N \circ f)(m))(h). \end{aligned}$$

O próximo lema nos confere uma condição suficiente para que a aplicação de avaliação discutida acima seja bijetora.

Lema 1.2.16. *Seja M um A-módulo à esquerda. Se M é projetivo e finitamente gerado então a aplicação de avaliação* $\mathsf{ev} : M \to ({}^*M)^*$ *é bijetora.*

Demonstração. Veja [18, Corollary 2.10]. □

Lema 1.2.17. *Sejam M e N dois k-módulos. Se M é projetivo e finitamente gerado, então temos um isomorfismo de k-módulos*

$$\mathrm{Hom}(M, N) \cong M^* \otimes N,$$

com $M^* = \mathrm{Hom}(M, k)$.

Demonstração. Se M é projetivo e finitamente gerado, admite uma base dual finita

$$\{(m_i, \xi_i) \mid i = 1, \ldots, t\}.$$

Assim considere as aplicações,

$$\varphi : \mathrm{Hom}(M, N) \to M^* \otimes N,$$

dada por

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{t} \xi_i \otimes f(m_i),$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ e

$$\theta : M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}(M, N),$$

dada por

$$\theta(g \otimes n)(m) = g(m)n,$$

para todo $g \otimes n \in M^* \otimes N$.

Verifica-se facilmente que φ e θ são bem definidas e k-lineares. Vejamos que são mutuamente inversas:

$$\begin{aligned}
((\theta \circ \varphi)(f))(m) &= (\theta(\varphi(f)))(m) \\
&= (\theta(\sum_{i=1}^{t} \xi_i \otimes f(m_i)))(m) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \xi_i(m) f(m_i) \\
&= f(m),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \theta)(g \otimes n) &= \varphi(\theta(g \otimes n)) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \xi_i \otimes \theta(g \otimes n)(m_i) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \xi_i \otimes g(m_i)n \\
&= \sum_{i=1}^{t} \xi_i g(m_i) \otimes n \\
&= g \otimes n.
\end{aligned}$$

□

Observação 1.2.18. *O lema anterior possui uma versão para álgebras não necessariamente comutativas, isto é, dada A uma k-álgebra e M, N dois A-módulos à direita, existe um isomorfismo de k-módulos*

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong N \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, A).$$

Definição 1.2.19. *Um A-módulo à direita M é dito* ***gerador*** *se existe um conjunto Λ e um morfismo sobrejetor de A-módulos $f : M^{(\Lambda)} \to A$.*

Definição 1.2.20. *Um A-módulo M é dito um A-**progerador** se é projetivo, finitamente gerado e gerador.*

Lema 1.2.21. *Sejam A uma k-álgebra e M um k-módulo. Se M é k-progerador, então $A \otimes M$ é um A-progerador à esquerda.*

Demonstração. Como M é um k-módulo finitamente gerado, existe $n \in \mathbb{N}$ e um epimorfismo de k-módulos $k^{(n)} \to M$ que cinde, pois M é projetivo. Logo existe um k-submódulo N de $k^{(n)}$ tal que $k^{(n)} \cong M \oplus N$. Agora note que

$$\begin{aligned} A^{(n)} &\cong (A \otimes k)^{(n)} \\ &\cong A \otimes k^{(n)} \\ &\cong A \otimes (M \oplus N) \\ &\cong (A \otimes M) \oplus (A \otimes N), \end{aligned}$$

deste modo $A \otimes M$ é somando direto de $A^{(n)}$ e pelo Teorema 1.2.13 é projetivo sobre A, em particular temos um epimorfismo de A-módulos à esquerda $A^{(n)} \to A \otimes M$, portanto $A \otimes M$ também é um A-módulo finitamente gerado.

Por fim resta verificar que $A \otimes M$ é A-gerador, para isso basta mostrar que existe um morfismo sobrejetor $(A \otimes M)^{(\Lambda)} \to A$, para algum conjunto Λ. De fato, como M é k-gerador e finitamente gerado, existe $n \in \mathbb{N}$ e um morfismo sobrejetor $\varphi : M^{(n)} \to k$, assim temos o morfismo

$$I_A \otimes \varphi : (A \otimes M)^{(n)} \cong A \otimes M^{(n)} \to A \otimes k \cong A,$$

que é sobrejetor, pois o funtor $A \otimes -$ é exato à direita. $\square$

Dualmente definimos comódulos sobre coálgebras.

Definição 1.2.22. *Seja $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ uma k-coálgebra. Um C-**comódulo à direita** é um par (V, ρ_V), com V um k-módulo e $\rho_V : V \to V \otimes C$ uma aplicação k-linear satisfazendo os diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_V"] \arrow[d, "\rho_V"'] & V \otimes C \arrow[d, "\rho_V \otimes I_C"] \\ V \otimes C \arrow[r, "I_V \otimes \Delta"'] & V \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "\rho_V"'] \arrow[dr, "l_V^{-1}"] & \\ V \otimes C \arrow[r, "I_V \otimes \varepsilon"'] & V \otimes k \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$(\rho_V \otimes I_C) \circ \rho_V = (I_V \otimes \Delta) \circ \rho_V, \tag{1.7}$$

$$(I_V \otimes \varepsilon) \circ \rho_V = l_V^{-1}. \tag{1.8}$$

De forma simétrica define-se C-comódulos à esquerda. Também utilizamos uma notação de Sweedler-Heyneman para a aplicação de estrutura de comódulos, mais claramente, dado um C-comódulo (V, ρ_V) e $v \in V$, denotamos

$$\rho_V(v) = v_{[0]} \otimes v_{[1]},$$

em que $v_{[0]} \in V$, $v_{[1]} \in C$ e o lado direito representa um somatório em termos de v.

Definição 1.2.23. *Sejam C uma coálgebra e $(V, \rho_V), (W, \rho_W)$ dois C-comódulos à direita. Uma aplicação k-linear $f : V \to W$ é um **morfismo** de C-comódulos se o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_V"'] & W \arrow[d, "\rho_W"] \\ V \otimes C \arrow[r, "f \otimes I"'] & W \otimes C \end{tikzcd}$$

Denotamos as categorias de C-comódulos à esquerda e de C-comódulos à direita, respectivamente por ${}^C\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^C$.

1.3 Ações e coações por álgebras de Hopf

Nesta seção estudamos ações e coações de álgebras de Hopf em uma álgebra qualquer e descrevemos a construção do produto smash. As principais referências são [12] e [13].

Definição 1.3.1. *Dizemos que uma k-álgebra de Hopf H age à esquerda numa k-álgebra A, ou que A é uma H**-módulo álgebra à esquerda**, se as condições abaixo são satisfeitas:*

(i) A é H-módulo à esquerda, com ação $H \otimes A \to A$ dada por $h \otimes a \mapsto h \cdot a$.

(ii) $h \cdot (ab) = (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$, para todos $h \in H$ e $a, b \in A$.

(iii) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$, para todo $h \in H$.

De forma simétrica define-se H-módulo álgebras à direita:

Definição 1.3.2. *Dizemos que uma k-álgebra de Hopf H age à direita numa k-álgebra A, ou que A é uma H**-módulo álgebra à direita**, se as condições abaixo são satisfeitas:*

(i) A é H-módulo à direita, com ação $A \otimes H \to A$ dada por $a \otimes h \mapsto a \cdot h$.

(ii) $(ab) \cdot h = (a \cdot h_{(1)})(b \cdot h_{(2)})$, *para todos* $h \in H$ *e* $a, b \in A$.

(iii) $1_A \cdot h = \varepsilon(h)1_A$, *para todo* $h \in H$.

Definição 1.3.3. *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Os* ***invariantes de** H* ***em*** *A consistem na subálgebra*

$$A^H = \{a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h)a, \ \forall\ h \in H\}.$$

Perceba que A^H é de fato uma subálgebra de A, pois dados $\lambda \in k$ e $a, b \in A^H$, temos

$$h \cdot (\lambda a) = \lambda(h \cdot a) = \lambda\varepsilon(h)a = \varepsilon(h)(\lambda a)$$

para todo $h \in H$, logo $\lambda a \in A^H$ e portanto A^H é k-submódulo de A. Também,

$$\begin{aligned} h \cdot (ab) &= (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b) \\ &= \varepsilon(h_{(1)})a\varepsilon(h_{(2)})b \\ &= \varepsilon(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}))ab \\ &= \varepsilon(h)ab, \end{aligned}$$

para todo $h \in H$, assim $ab \in A^H$.

Exemplo 1.3.4. *Toda álgebra de Hopf H age em si mesma pela ação adjunta, definida por*

$$h \cdot l = (\operatorname{ad} h)l = h_{(1)}lS(h_{(2)})$$

para todos $h, l \in H$ (veja [12, Example 6.1.13 (4)]). Nesse caso a álgebra de invariantes consiste no centro de H, isto é

$$A^H = Z(H) = \{h \in H \mid hg = gh, \ \forall\ g \in H\}.$$

Exemplo 1.3.5. *Seja G um grupo finito agindo por k-automorfismos em uma k-álgebra A. Denotando $H = kG$ a álgebra de Hopf do Exemplo 1.1.12, então A é uma H-módulo álgebra à esquerda com $\mu_A : H \otimes A \to A$ dada por $\mu_A(v_g \otimes a) = g(a)$. Com efeito, μ_A claramente define uma estrutura de H-módulo à esquerda em A. Agora, dados $v_g \in H$ e $a, b \in A$ temos*

$$\begin{aligned} v_g \cdot (ab) &= g(ab) \\ &= g(a)g(b) \\ &= (v_g \cdot a)(v_g \cdot b) \\ &= ((v_g)_{(1)} \cdot a)((v_g)_{(2)} \cdot b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_g \cdot 1_A &= g(1_A) \\ &= 1_A \\ &= 1_k 1_A \\ &= \varepsilon(v_g) 1_A. \end{aligned}$$

Finalmente, a álgebra de invariantes de H em A é

$$\begin{aligned} A^H &= \{a \in A \mid v_g \cdot a = \varepsilon(v_g)a, \ \forall \ v_g \in H\} \\ &= \{a \in A \mid g(a) = a, \ \forall \ g \in G\} \\ &= A^G, \end{aligned}$$

ou seja, A^H consiste nos elementos invariantes para a ação do grupo G em A.

A proposição a seguir descreve condições para que um H-módulo à esquerda seja uma H-módulo álgebra.

Proposição 1.3.6. *Seja $A = (A, m_A, u_A)$ uma k-álgebra que também é um H-módulo à esquerda. Então A é uma H-módulo álgebra se, e somente se, $m_A : A \otimes A \to A$ é morfismo de H-módulos, com a ação de H em $A \otimes A$ dada por $h \cdot (a \otimes b) = h_{(1)} \cdot a \otimes h_{(2)} \cdot b$.*

Demonstração. Veja [12, Proposition 6.1.4]. □

Como veremos a seguir, ações de álgebras de Hopf em álgebras permitem definir um novo objeto: o produto smash.

Definição 1.3.7. *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. O **produto smash à esquerda de A e H** é o k-módulo $A\#H = A \otimes H$, munido da operação de multiplicação entre dois elementos dada por*

$$(a\#h)(b\#g) = a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g,$$

para todos $a, b \in A$ e $h, g \in H$, em que $a\#h$ e $b\#g$ denotam os elementos $a \otimes h$ e $b \otimes g$, respectivamente.

Classicamente o produto smash é construído para ações de álgebras de Hopf à esquerda, entretanto há uma estrutura análoga para ações à direita.

Definição 1.3.8. *Seja A uma H-módulo álgebra à direita. O **produto smash à direita de A e H** é o k-módulo $H\#A = H \otimes A$, munido da operação de multiplicação entre dois elementos dada por*

$$(h\#a)(g\#b) = hg_{(1)}\#(a \cdot g_{(2)})b$$

para todos $a, b \in A$ e $h, g \in H$, em que $h\#a$ e $g\#b$ denotam os elementos $h \otimes a$ e $g \otimes b$, respectivamente.

Proposição 1.3.9. *Sejam* $H = (m_H, u_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ *uma álgebra de Hopf sobre* k *e* $A = (A, m_A, u_A)$ *uma* k*-álgebra.*

(i) Se A *é uma* H*-módulo álgebra à esquerda munida de* $\mu_A : H \otimes A \to A$*, então o produto smash* $A\#H$ *é uma* k*-álgebra com multiplicação*

$$m_{A\#H} : (A\#H) \otimes (A\#H) \to A\#H$$

definida por

$$(a\#h)(b\#g) = a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g,$$

para todos $a, b \in A$ *e* $h, g \in H$.

(ii) Se A *é uma* H*-módulo álgebra à direita munida de* $\mu_A : A \otimes H \to A$*, então o produto smash* $H\#A$ *é uma* k*-álgebra com multiplicação*

$$m_{H\#A} : (H\#A) \otimes (H\#A) \to H\#A$$

definida por

$$(h\#a)(g\#b) = hg_{(1)}\#(a \cdot g_{(2)})b$$

para todos $a, b \in A$ *e* $h, g \in H$.

Demonstração. (i) Primeiramente, a multiplicação em $A\#H$ é bem definida, visto que pode ser descrita como a composição de aplicações k-lineares

$$\begin{tikzcd}
A \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[r, "I_A \otimes \Delta_H \otimes I_{A\otimes H}"] \arrow[dd, dashed, "m_{A\#H}"'] & A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[d, "I_{A\otimes H} \otimes \tau_{H,A} \otimes I_H"] \\
 & A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[d, "I_A \otimes \mu_A \otimes m_H"] \\
A \otimes H & A \otimes A \otimes H \arrow[l, "m_A \otimes I_H"]
\end{tikzcd}$$

em que $\tau_{H,A} : H \otimes A \to A \otimes H$ é a aplicação *twist* definida por $\tau_{H,A}(h \otimes A) = a \otimes h$.

Agora, a associatividade segue de

$$\begin{aligned}
((a\#h)(b\#g))(c\#l) &= (a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g)(c\#l) \\
&= a(h_{(1)} \cdot b)((h_{(2)}g_{(1)}) \cdot c)\#h_{(3)}g_{(2)}l \\
&= a(h_{(1)} \cdot (b(g_{(1)} \cdot c))\#h_{(2)}g_{(2)}l \\
&= (a\#h)(b(g_{(1)} \cdot c)\#g_{(2)}l \\
&= (a\#h)((b\#g)(c\#l)).
\end{aligned}$$

E a unidade é o elemento $1_A\#1_H$, pois

$$\begin{aligned}
(a\#h)(1_A\#1_H) &= a(h_{(1)} \cdot 1_A)\#h_{(2)}1_H \\
&= a\varepsilon(h_{(1)})1_A\#h_{(2)} \\
&= a\#\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \\
&= a\#h,
\end{aligned}$$

bem como $(1_A\#1_H)(a\#h) = (a\#h)$.

(ii) Basta verificar que $m_{H\#A}$ é bem definida, uma vez que a associatividade e unidade são completamente análogas ao item anterior. Perceba que a multiplicação em $H\#A$ é a composição das aplicacões k-lineares

$$\begin{tikzcd}
H \otimes A \otimes H \otimes A \arrow[rr, "I_{H\otimes A} \otimes \Delta_H \otimes I_A"] \arrow[dd, dashed, "m_{H\#A}"'] & & H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes A \arrow[d, "I_H \otimes \tau_{A,H} \otimes I_{H\otimes A}"] \\
& & H \otimes H \otimes A \otimes H \otimes A \arrow[d, "m_H \otimes \mu_A \otimes I_A"] \\
H \otimes A & & H \otimes A \otimes A \arrow[ll, "I_H \otimes m_A"]
\end{tikzcd}$$

logo está bem definida.

□

Temos “inclusões” das álgebras A e H no produto smash $A\#H$.

Proposição 1.3.10. *Sejam A uma H-comódulo álgebra à esquerda e $A\#H$ o produto smash com multiplicação definida acima. Então as aplicações k-lineares*

$$\iota_A : A \to A\#H, \quad \iota_H : H \to A\#H$$

definidas por

$$\iota_A(a) = a\#1_H \quad e \quad \iota_H(h) = 1_A\#h$$

para todos $a \in A$ e $h \in H$, são morfismos injetores de k-álgebras.

Demonstração. Veja [12, Proposition 6.1.7]. $\square$

Dualmente, temos o conceito de coação de álgebras de Hopf em álgebras.

Definição 1.3.11. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma k-álgebra. Então A é uma **H-comódulo álgebra à direita** se satisfaz as seguintes condições*

(i) A é um H-comódulo à direita com $\rho_A : A \to A \otimes H$, dada por $\rho_A(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$.

(ii) $\rho_A(ab) = a_{[0]}b_{[0]} \otimes a_{[1]}b_{[1]}$ para todos $a, b \in A$.

(iii) $\rho_A(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

O próximo resultado exprime caracterizações equivalentes para uma k-álgebra de Hopf coagir em uma k-álgebra.

Proposição 1.3.12. *Sejam H uma k-álgebra de Hopf e A uma k-álgebra com uma estrutura de H-comódulo à direita $\rho_A : A \to A \otimes H$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) A é uma H-comódulo álgebra.

(ii) ρ_A é um morfismo de k-álgebras.

(iii) A multiplicação $m_A : A \otimes A \to A$ e a unidade $u_A : k \to A$ da álgebra A são morfismos de H-comódulos à direita, em que a estrutura de H-comódulo em $A \otimes A$ é dada por $a \otimes b \mapsto a_{[0]} \otimes b_{[0]} \otimes a_{[1]}b_{[1]}$.

Demonstração. Veja [12, Proposition 6.2.2]. $\square$

Uma coação de H em A dá origem a uma subálgebra de A:

Definição 1.3.13. *Seja A uma H-comódulo álgebra à direita com $\rho_A : A \to A \otimes H$. Os **coinvariantes de H em A** consistem na subálgebra*

$$A^{\mathrm{co}\,H} = \{a \in A \mid \rho_A(a) = a \otimes 1_H\}.$$

É fácil ver que $1_A \in A^{\mathrm{co}\,H}$. Agora, dados $a, b \in A^{\mathrm{co}\,H}$ temos

$$\begin{aligned}\rho_A(ab) &= a_{[0]}b_{[0]} \otimes a_{[1]}b_{[1]} \\ &= ab \otimes 1_H 1_H \\ &= ab \otimes 1_H,\end{aligned}$$

logo $ab \in A^{\mathrm{co}\,H}$ e segue que $A^{\mathrm{co}\,H}$ é de fato uma subálgebra de A.

Exemplo 1.3.14. *Toda álgebra de Hopf H é uma comódulo álgebra sobre si mesma, com $\Delta : H \to H \otimes H$. Com efeito, pela Proposição 1.3.12 basta notar que Δ é morfismo de k-álgebras. Agora a subálgebra de coinvariantes é o conjunto*

$$H^{\mathrm{co}\,H} = \{h \in H \mid \Delta(h) = h \otimes 1_H\}.$$

Aplicando o morfismo $\varepsilon \otimes I$ em ambos os lados da equação acima, temos

$$\begin{aligned} h &= (\varepsilon \otimes I)(\Delta(h)) \\ &= (\varepsilon \otimes I)(h \otimes 1_H) \\ &= \varepsilon(h)1_H, \end{aligned}$$

logo $H^{\mathrm{co}\,H} \subseteq k1_H$ e como a inclusão contrária é trivialmente satisfeita, temos

$$H^{\mathrm{co}\,H} = k1_H.$$

Exemplo 1.3.15. *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então o produto smash $A\#H$ possui uma estrutura de H-comódulo álgebra à direita, com*

$$\rho : A\#H \to A\#H \otimes H$$

dada por

$$\rho(a\#h) = a\#h_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

Com efeito, pela Proposição 1.3.12 basta verificar que ρ define um morfismo de k-álgebras. Dados $a\#h, b\#g \in A\#H$, temos

$$\begin{aligned} \rho((a\#h)(b\#g)) &= \rho(a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g) \\ &= a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g_{(1)} \otimes h_{(3)}g_{(2)} \\ &= (a\#h_{(1)} \otimes h_{(2)})(b\#g_{(1)} \otimes g_{(2)}) \\ &= \rho(a\#h)\rho(b\#g) \end{aligned}$$

e

$$\rho(1_A\#1_H) = 1_A\#1_H \otimes 1_H.$$

Nesse caso a álgebra de coinvariantes de H em $A\#H$ é

$$(A\#H)^{\mathrm{co}\,H} = \{a\#h \in A\#H \mid \rho(a\#h) = a\#h \otimes 1_H\}.$$

Por um raciocínio análogo ao do exemplo anterior, mostra-se que

$$(A\#H)^{\mathrm{co}\,H} = A\#k1_H \cong A.$$

Exemplo 1.3.16. *Sejam G um grupo arbitrário e A uma k-álgebra graduada por G, isto é, $A = \oplus_{g\in G} A_g$ soma direta de k-módulos com $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$. Vejamos que A possui uma estrutura natural de kG-comódulo álgebra à direita. Todo elemento $a \in A$ se escreve de forma única como uma soma finita $a = \sum_{g\in G} a_g$ com $a_g \in G$, logo definimos $\rho : A \to A \otimes kG$ por*

$$\rho(a) = \sum_{g\in G} a_g \otimes v_g,$$

para todo $a \in A$. Reciprocamente, se A é uma kG-comódulo álgebra à direita munida com $\rho : A \to A \otimes kG$, então A é uma k-álgebra G-graduada. Com efeito, basta considerar os k-módulos

$$A_g = \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes v_g\},$$

então mostra-se que $A = \oplus_{g\in G} A_g$ e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$ (para mais detalhes consulte [13, Exemplo 5.5.7]).

No caso em que H é uma álgebra de Hopf projetiva e finitamente gerada como k-módulo (ou de dimensão finita se k é corpo) temos uma correspondência entre ações e coações de H. Antes de enunciar esse resultado, exploremos um lema auxiliar, adaptado de [7, Theorem 42.10].

Lema 1.3.17. *Sejam M, N dois k-módulos em que M é projetivo finitamente gerado. Então dados $n_i \in N$ e $m_i \in M$, temos*

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \otimes m_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i f(m_i) = 0, \quad \forall\ f \in M^*.$$

Demonstração. Dado $f \in M^*$, denotamos por $I_N \otimes f : N \otimes M \to N$ a aplicação k-linear definida por $(I_N \otimes f)(\sum_{i=1}^{r} n_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^{r} n_i f(m_i)$. Se $\{(x_j, \xi_j) \mid j = 1, \dots, t\}$ é uma base dual de M então temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} n_i \otimes m_i &= \sum_{i=1}^{r} n_i \otimes \sum_{j=1}^{t} \xi_j(m_i) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{r} n_i \xi_j(m_i) \otimes x_j \\
&= \sum_{j=1}^{t} (I_N \otimes \xi_j)(\sum_{i=1}^{r} n_i \otimes m_i) \otimes x_j,
\end{aligned}$$

e a tese segue da última igualdade. □

Proposição 1.3.18. *Seja H uma álgebra de Hopf, projetiva e finitamente gerada como k-módulo e A uma k-álgebra. Então A é uma H-comódulo álgebra à direita se, e somente* *se, A é uma H^*-módulo álgebra à esquerda. Mais ainda, nesse caso temos $A^{H^*} = A^{\operatorname{co} H}$.*

Demonstração. Indicamos apenas a correspondência entre as estruturas, para mais detalhes veja [12, Proposition 6.2.4]. Se A é uma H-comódulo álgebra à direita com $\rho_A : A \to A \otimes H$, dada por $\rho_A(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$, então definimos uma ação à esquerda de H^* em A por

$$f \cdot a = f(a_{[1]})a_{[0]},$$

para todos $f \in H^*$ e $a \in A$. Reciprocamente, se A é uma H^*-módulo álgebra à esquerda com $\mu_A : H^* \otimes A \to A$ dada por $\mu_A(f \otimes a) = f \cdot a$, e $\{(h_i, \xi_i) \mid h_i \in H, \xi_i \in H^*, i = 1, \dots, n\}$ uma base dual finita para H, então definimos uma coação $\rho : A \to A \otimes H$ por

$$\rho(a) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot a \otimes h_i,$$

para todo $a \in A$. Por fim, vejamos que $A^{H^*} = A^{\operatorname{co} H}$. Dado $a \in A^{H^*}$ temos

$$f \cdot a = \varepsilon_{H^*}(f)a = f(1_H)a,$$

logo

$$\begin{aligned} (I_A \otimes f)(a_{[0]} \otimes a_{[1]}) &= f(a_{[1]})a_{[0]} \\ &= f(1_H)a \\ &= (I_A \otimes f)(a \otimes 1_H) \end{aligned}$$

e então

$$(I_A \otimes f)(a_{[0]} \otimes a_{[1]} - a \otimes 1_H) = 0,$$

para todo $f \in H^*$. Pelo Lema 1.3.17 segue que

$$a_{[0]} \otimes a_{[1]} = a \otimes 1_H,$$

isto é, $a \in A^{\operatorname{co} H}$. Por outro lado, dado $a \in A^{\operatorname{co} H}$, temos $\rho(a) = a \otimes 1_H$ assim $f \cdot a = f(1_H)a$, para todo $f \in H^*$, ou seja, $a \in A^{H^*}$. $\square$

1.4 Extensões de Hopf-Galois

Nessa seção apresentamos as extensões de Hopf-Galois e exploramos como essa estrutura generaliza a teoria clássica de extensões de Galois para corpos. A principal referência é [12].

Sejam H uma álgebra de Hopf, A uma H-comódulo álgebra à direita com estrutura dada por $\rho : A \to A \otimes H$ e $A^{\operatorname{co} H}$ a subálgebra de coinvariantes de H em A. Definimos a aplicação canônica para a extensão de álgebras $A \supseteq A^{\mathrm{co}H}$ como

$$\mathsf{can} : A \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} A \to A \otimes H$$

dada por

$$\mathsf{can}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a) = (a' \otimes 1_H)\rho(a) = a' a_{[0]} \otimes a_{[1]},$$

para todos $a' \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a \in A \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} A$.

Observação 1.4.1. *A aplicação canônica definida acima é morfismo de A-módulos à esquerda e de H-comódulos à direita, em que as estruturas de H-comódulo em $A \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} A$ e $A \otimes H$ são dadas, respectivamente, por $I_A \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} \rho$ e $I_A \otimes \Delta$. Com efeito,*

$$\begin{aligned}
\mathsf{can}(a' \cdot (1_A \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a)) &= \mathsf{can}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a) \\
&= a' \rho(a) \\
&= a' \cdot \mathsf{can}(1_A \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I_A \otimes \Delta)(\mathsf{can}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a)) &= (I_A \otimes \Delta)(a' a_{[0]} \otimes a_{[1]}) \\
&= a' a_{[0]} \otimes a_{[1](1)} \otimes a_{[1](2)} \\
&= a' a_{[0,0]} \otimes a_{[0,1]} \otimes a_{[1]} \\
&= (\mathsf{can} \otimes I_H)(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a_{[0]} \otimes a_{[1]}) \\
&= (\mathsf{can} \otimes I_H)((I_A \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} \rho)(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}H}} a)).
\end{aligned}$$

Nessas condições definimos o conceito de extensão de Hopf-Galois.

Definição 1.4.2. *Sejam H uma k-álgebra de Hopf e A uma H-comódulo álgebra à direita. Dizemos que A é uma* ***H-extensão de Galois à direita****, ou que a extensão $A \supseteq A^{\mathrm{co}H}$ é de Galois, se a aplicação canônica* can *é bijetora.*

Vejamos que a teoria clássica de Galois para corpos é um caso particular de extensão de Hopf-Galois. No que segue adotamos as seguintes convenções:

- uma extensão de corpos $E \supseteq k$ é denotada por E/k;
- o índice de E em k é $[E : k] = \dim_k(E)$;
- o grupo de Galois de uma extensão E/k é o conjunto

  $$\mathrm{Gal}(E/k) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}_k(E) \mid \varphi(x) = x, \ \forall\, x \in k\}$$

  munido da operação de composição de funções.

Exemplo 1.4.3. *Seja G um grupo finito agindo por k-automorfismos no corpo $E \supseteq k$. Pelo Exemplo 1.3.5 temos que E possui uma estrutura de kG-módulo álgebra à esquerda,* *ou ainda, pela Proposição 1.3.18, E é $(kG)^*$-comódulo álgebra à direita. Por simplicidade, denotamos $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ a base do k-módulo livre kG e $\{p_1, \dots, p_n\} \subset (kG)^*$ sua base dual. Assim, a coação $\rho : E \to E \otimes (kG)^*$ é dada por*

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x \otimes p_i = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \otimes p_i.$$

A álgebra de coinvariantes para a coação de $(kG)^*$ em E coincide, pela Proposição 1.3.18, com a álgebra de invariantes de kG em E, que por sua vez corresponde aos invariantes para a ação do grupo G em E, isto é

$$E^{\mathrm{co}\,(kG)^*} = E^{kG} = E^G.$$

Sendo E^G o subcorpo de G-invariantes, temos que E é $(kG)^*$-extensão de Galois à direita se a aplicação canônica

$$\mathsf{can} : E \otimes_{E^G} E \to E \otimes (kG)^*$$

dada por

$$\mathsf{can}(x \otimes_{E^G} y) = \sum_{i=1}^{n} x g_i(y) \otimes p_i$$

para todo $x \otimes_{E^G} y \in E \otimes_{E^G} E$, é bijetora.

Por outro lado, E/k é dita uma extensão de Galois no sentido clássico se, e somente se, $k = E^G$, com $G = \mathrm{Gal}(E/k)$ o grupo de Galois associado à extensão.

Vejamos que a comódulo álgebra E descrita anteriormente ***sempre*** *é uma $(kG)^*$-extensão de Galois, em particular, concluí-se que as extensões de Hopf-Galois generalizam as extensões de Galois clássicas, isto é, quando $k = E^G$. Para isso faremos uso do Lema de Dedekind (veja [15, p. 291]), o qual garante que qualquer conjunto de elementos distintos de $\mathrm{Aut}(E)$ são linearmente independentes sobre E como funções de E em E.*

Se $|G| = n$, considere $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de E como E^G-espaço vetorial. Um elemento arbitrário $w \in E \otimes_{E^G} E$ se escreve como $w = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes_{E^G} u_j$, com $x_j \in E$. Se w pertence ao núcleo de can, então

$$0 = \mathsf{can}(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j (g_i \cdot u_j) \otimes p_i,$$

no entanto as projeções p_i formam um conjunto linearmente independente sobre k, assim temos que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (g_i \cdot u_j) = 0, \tag{1.9}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Suponha por contradição que $x_j \neq 0$ para algum j. A equação (1.9), para todo $i = 1, \ldots, n$, pode ser vista como um sistema linear homogêneo nas indeterminadas x_j e cuja matriz de coeficientes é $(g_i \cdot u_j)_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(E)$. Como algum x_j é não nulo, as linhas, ou equivalentemente as colunas da matriz $(g_i \cdot u_j)_{i,j}$, são linearmente dependentes sobre E, assim existem $y_i \in E$ tais que $\sum_{i=1}^n y_i(g_i \cdot u_j) = 0$ para cada $j = 1, \ldots, n$, ou ainda

$$\sum_{i=1}^{n} y_i g_i = 0$$

como uma função de E em E, visto que os elementos u_j formam uma E^G-base de E, o que contradiz o Lema de Dedekind, uma vez que os elementos de $G \subseteq \mathrm{Aut}(E)$ são todos distintos. Assim $w = 0$ e can *é injetora. Por outro lado, da igualdade $[E : E^G] = |G|$ segue que*

$$\begin{aligned}
\dim_k(E \otimes_{E^G} E) &= [E : E^G]^2 [E^G : k] \\
&= [E : k][E : E^G] \\
&= [E : k]|G| \\
&= \dim_k(E \otimes (kG)^*).
\end{aligned}$$

Agora, can *é uma aplicação k-linear injetora entre dois k-espaços vetoriais de mesma dimensão, logo também é sobrejetora, o que conclui a bijetividade.*

O exemplo a seguir assegura que toda álgebra de Hopf pode ser vista como uma extensão de Hopf-Galois.

Exemplo 1.4.4. *Seja H uma álgebra de Hopf sobre k. Do exemplo 1.3.14 sabemos que H é uma comódulo álgebra sobre si mesma com $\Delta : H \to H \otimes H$ e cuja álgebra de coinvariantes é $H^{\mathrm{co}H} = k1_H \cong k$. Vejamos que a extensão H/k é de Galois, isto é, que aplicação canônica*

$$\mathsf{can} : H \otimes H \to H \otimes H$$

definida em $h \otimes g$ por

$$\mathsf{can}(h \otimes g) = hg_{(1)} \otimes g_{(2)}$$

é bijetora. Com efeito, can *possui uma inversa* $\mathsf{can}^{-1} : H \otimes H \to H \otimes H$ *definida por*

$$\mathsf{can}^{-1}(h \otimes g) = hS(g_{(1)}) \otimes g_{(2)}.$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}
\mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(h \otimes g)) &= \mathsf{can}(hS(g_{(1)}) \otimes g_{(2)}) \\
&= hS(g_{(1)})g_{(2)} \otimes g_{(3)} \\
&= h\varepsilon(g_{(1)})1_H \otimes g_{(2)} \\
&= h \otimes \varepsilon(g_{(1)})g_{(2)} \\
&= h \otimes g,
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathsf{can}^{\text{-}1}(\mathsf{can}(h \otimes g)) &= \mathsf{can}^{\text{-}1}(hg_{(1)} \otimes g_{(2)}) \\
&= hg_{(1)}S(g_{(2)}) \otimes g_{(3)} \\
&= h\varepsilon(g_{(1)})1_H \otimes g_{(2)} \\
&= h \otimes \varepsilon(g_{(1)})g_{(2)} \\
&= h \otimes g.
\end{aligned}$$

Por fim, apresentamos outra família de exemplos de extensões de Hopf-Galois: o produto smash.

Exemplo 1.4.5. *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda e $A\#H$ o produto smash com a estrutura de H-comódulo álgebra à direita $\rho : A\#H \to A\#H \otimes H$ descrita por*

$$\rho(a\#h) = a\#h_{(1)} \otimes h_{(2)}$$

no Exemplo 1.3.15. Vejamos que $A\#H$ é uma H-extensão de Galois de seus coinvariantes $(A\#H)^{\mathrm{co}H} \cong A$. Observamos que $A\#H$ é um A-módulo à direta induzido pelo morfismo de k-álgebras $\iota_A : A \to A\#H$, $\iota_A(a) = a\#1_H$, logo a aplicação canônica é descrita por

$$\begin{array}{rccc}
\mathsf{can}: & A\#H \otimes_A A\#H & \to & A\#H \otimes H \\
& a\#h \otimes_A b\#g & \mapsto & a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g_{(1)} \otimes g_{(2)}.
\end{array}$$

Verifiquemos que can *admite uma inversa* $\mathsf{can}^{\text{-}1}$ *dada por*

$$\begin{array}{rccc}
\mathsf{can}^{\text{-}1}: & A\#H \otimes H & \to & A\#H \otimes_A A\#H \\
& a\#h \otimes g & \mapsto & a\#hS(g_{(1)}) \otimes_A 1_A\#g_{(2)}.
\end{array}$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{can}(\mathsf{can}^{\text{-}1}(a\#h \otimes g)) &= \mathsf{can}(a\#hS(g_{(1)}) \otimes_A 1_A\#g_{(2)}) \\
&= a((hS(g_{(1)}))_{(1)} \cdot 1_A)\#(hS(g_{(1)}))_{(2)}g_{(2)} \otimes g_{(3)} \\
&= a\varepsilon(h_{(1)}S(g_{(2)}))1_A\#h_{(2)}S(g_{(1)})g_{(3)} \otimes g_{(4)} \\
&= a\varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(S(g_{(2)}))\#h_{(2)}S(g_{(1)})g_{(3)} \otimes g_{(4)} \\
&= a\varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(g_{(2)})\#h_{(2)}S(g_{(1)})g_{(3)} \otimes g_{(4)} \\
&= a\varepsilon(h_{(1)})\#h_{(2)}S(\varepsilon(g_{(2)})g_{(1)})g_{(3)} \otimes g_{(4)} \\
&= a\varepsilon(h_{(1)})\#h_{(2)}S(g_{(1)})g_{(2)} \otimes g_{(3)} \\
&= a\#\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\varepsilon(g_{(1)})1_H \otimes g_{(2)} \\
&= a\#h \otimes \varepsilon(g_{(1)})g_{(2)} \\
&= a\#h \otimes g.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathsf{can}^{-1}(\mathsf{can}(a\#h \otimes_A b\#g)) &= \mathsf{can}^{-1}(a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g_{(1)} \otimes g_{(2)}) \\
&= a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}g_{(1)}S(g_{(2)}) \otimes_A 1_A\#g_{(3)} \\
&= a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}\varepsilon(g_{(1)}) \otimes_A 1_A\#g_{(2)} \\
&= a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)} \otimes_A 1_A\#\varepsilon(g_{(1)})g_{(2)} \\
&= (a\#h) \cdot \iota_A(b) \otimes_A 1_A\#g \\
&= a\#h \otimes_A b\#g.
\end{aligned}$$

1.5 Contexto de Morita

Nessa seção definimos a noção de contexto de Morita para um par de anéis e apresentamos um exemplo chave para ilustrar esse conceito. Também enunciamos, sem demonstração, os dois principais resultados da teoria de Morita. As principais referências para essa seção são [16] e [18].

Definição 1.5.1. *Dois anéis A e B são ditos **Morita equivalentes** se existe uma equivalência de categorias $F : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$.*

Perceba que a equivalência descrita na definição acima leva em conta as categorias de módulos *à direita* sobre A e B, entretanto mostra-se (veja [18, Proposition 18.32]) que se $F : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ é equivalência, então existe $F' : {}_A\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{M}$ também equivalência.

Uma abordagem mais geral para estudar se dois anéis são Morita equivalentes, diz respeito à uma coleção de dados chamado *conjunto de pré-equivalência*, ou ainda, um *contexto de Morita*.

Definição 1.5.2. *Um **contexto de Morita** é uma sêxtupla (A, B, M, N, τ, μ), com A e B anéis, $M = {}_AM_B$ um (A, B)-bimódulo, $N = {}_BN_A$ um (B, A)-bimódulo e morfismos $\tau : M \otimes_B N \to A$, $\mu : N \otimes_A M \to B$ de A-bimódulos e B-bimódulos, respectivamente, tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
N \otimes_A M \otimes_B N \arrow[r, "I_N \otimes \tau"] \arrow[d, "\mu \otimes I_N"'] & N \otimes_A A \arrow[d, "\cong"] \\
B \otimes_B N \arrow[r, "\cong"'] & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_B N \otimes_A M \arrow[r, "I_M \otimes \mu"] \arrow[d, "\tau \otimes I_M"'] & M \otimes_B B \arrow[d, "\cong"] \\
A \otimes_A M \arrow[r, "\cong"'] & M
\end{tikzcd}$$

No exemplo a seguir, descrevemos um contexto canônico associado a um B-módulo à esquerda, mais precisamente, entre a álgebra de endomorfismos oposta do módulo e seu anel base.

Exemplo 1.5.3. *Sejam k um anel comutativo, B uma k-álgebra, M um B-módulo à esquerda e denote $S = {}_B\operatorname{End}(M)^{\mathrm{op}}$. Primeiramente, note que é possível munir M com uma estrutura de (B,S)-bimódulo e ${}_B\operatorname{Hom}(M,B)$ com uma estrutura de (S,B)-bimódulo, por meio das ações*

$$b \triangleright m \triangleleft s = b \triangleright s(m)$$

e

$$(s \blacktriangleright f \blacktriangleleft b)(m) = f(s(m))b,$$

para todos $b \in B$, $m \in M$, $s \in S$ e $f \in {}_B\operatorname{Hom}(M,B)$. Também é possível verificar que as aplicações

$$\varphi : M \otimes_S {}_B\operatorname{Hom}(M,B) \to B$$

e

$$\psi : {}_B\operatorname{Hom}(M,B) \otimes_B M \to S$$

descritas por

$$\varphi(m \otimes_S f) = f(m) \quad e \quad \psi(f \otimes_B m)(n) = f(n) \triangleright m$$

para todos $m,n \in M$ e $f \in {}_B\operatorname{Hom}(M,B)$, são bem definidas, bem como φ é morfismo de B-bimódulos e ψ é morfismo de S-bimódulos. Vejamos que a sêxtupla

$$(B, S, M, {}_B\operatorname{Hom}(M,B), \varphi, \psi)$$

define de fato um contexto de Morita, isto é, são comutativos os diagramas

$$\begin{tikzcd}
{}_B\operatorname{Hom}(M,B) \otimes_B M \otimes_S {}_B\operatorname{Hom}(M,B) \arrow[r, "I_{{}_B\operatorname{Hom}(M,B)} \otimes_B \varphi"] \arrow[d, "\psi \otimes_S I_{{}_B\operatorname{Hom}(M,B)}"'] & {}_B\operatorname{Hom}(M,B) \otimes_B B \arrow[d, "\blacktriangleleft"] \\
S \otimes_S {}_B\operatorname{Hom}(M,B) \arrow[r, "\blacktriangleright"'] & {}_B\operatorname{Hom}(M,B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_S {}_B\mathrm{Hom}(M,B) \otimes_B M \arrow[r, "I_M \otimes_S \psi"] \arrow[d, "\varphi \otimes_B I_M"'] & M \otimes_S S \arrow[d, "\triangleleft"] \\
B \otimes_B M \arrow[r, "\triangleright"'] & M
\end{tikzcd}$$

Suponha $m, n \in M$ e $f, g \in {}_B\mathrm{Hom}(M,B)$. Para o primeiro diagrama, temos

$$\begin{aligned}
(f \blacktriangleleft \varphi(m \otimes_S g))(n) &= (f \blacktriangleleft g(m))(n) \\
&= f(n)g(m) \\
&= g(f(n) \triangleright m) \\
&= g(\psi(f \otimes_B m)(n)) \\
&= (\psi(f \otimes_B m) \blacktriangleright g)(n),
\end{aligned}$$

logo $f \blacktriangleleft \varphi(m \otimes_S g) = \psi(f \otimes_B m) \blacktriangleright g$ e vale a comutatividade. Analogamente para o segundo diagrama,

$$\begin{aligned}
m \triangleleft \psi(f \otimes_B n) &= \psi(f \otimes_B n)(m) \\
&= f(m) \triangleright n \\
&= \varphi(m \otimes_S f) \triangleright n.
\end{aligned}$$

Definição 1.5.4. *Um contexto de Morita (A, B, M, N, τ, μ) é **estrito** se as aplicações τ e μ são sobrejetoras.*

Os próximos dois resultados conectam os conceitos de equivalência de Morita entre dois anéis e a existência de um contexto de Morita estrito.

Teorema 1.5.5 (Morita I)**.** *Seja (A, B, M, N, τ, μ) um contexto de Morita estrito. Então*

(i) ${}_AM$, M_B, ${}_BN$ e N_A são progeradores.

(ii) τ e μ são isomorfismos.

(iii) Existem isomorfismos de anéis $B \cong {}_A\mathrm{End}(M)^{\mathrm{op}}$, $A \cong \mathrm{End}_B(M)$, $A \cong {}_B\mathrm{End}(N)^{\mathrm{op}}$ e $B \cong \mathrm{End}_A(N)$.

(iv) O par de funtores $- \otimes_A M$ e $- \otimes_B N$ define uma equivalência entre as categorias de módulos $\mathcal{M}_A$ e $\mathcal{M}_B$. Analogamente, $N \otimes_A -$ e $M \otimes_B -$ definem uma equivalência entre as categorias ${}_A\mathcal{M}$ e ${}_B\mathcal{M}$.

Demonstração. Veja [16, Morita I, Section 3.12]. □

Teorema 1.5.6 (Morita II)**.** *Sejam A e B dois anéis Morita equivalentes. Então,* *(i) Existem bimódulos* ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ *e um contexto de Morita* (A, B, M, N, τ, μ) *estrito. Em particular,* $B \cong \mathrm{End}_A(N)$ *e* $A \cong \mathrm{End}_B(M)$*, com* $N \in \mathcal{M}_A$, $M \in \mathcal{M}_B$ *progeradores.*

(ii) Se (F, G) *é um par de funtores definindo uma equivalência entre as categorias* $\mathcal{M}_A$ *e* $\mathcal{M}_B$*, então* F *é naturalmente isomorfo a* $- \otimes_A M$ *e* G *é naturalmente isomorfo a* $- \otimes_B N$*, em que* ${}_AM$, ${}_BN$ *são progeradores.*

Demonstração. Veja [16, Morita II, Section 3.15]. □

Exemplo 1.5.7. *Sejam* A *uma* k*-álgebra e* $n \in \mathbb{N}$ *um natural qualquer. Então os anéis* A *e* $\mathrm{Mat}_n(A)$ *são Morita equivalentes (veja [2, Corollaire 3.3]).*

Capítulo 2

COANÉIS

Nesse capítulo apresentamos uma introdução à teoria de coanéis, estrutura que generaliza os conceitos de álgebra e coálgebra. Ao longo das seções desenvolvemos resultados de dualidade, exploramos a rica estrutura dos coanéis com grouplike e, em especial, evidenciamos como essa teoria resolve problema dos antecessores (ou *descent problem*) para extensões de anéis. As principais referências para esse capítulo são [7], [8] e [22].

2.1 Definições iniciais

Definição 2.1.1. *Seja A uma k-álgebra. Um A-coanel é uma tripla $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$, com $\mathcal{C}$ um A-bimódulo e $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}$, $\varepsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to A$ morfismos de A-bimódulos satisfazendo os diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\Delta_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}"] \\
\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "I_{\mathcal{C}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[dl, "l_{\mathcal{C}}^{-1}"'] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "r_{\mathcal{C}}^{-1}"] & \\
\mathcal{C} \otimes_A A & \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \arrow[l, "I_{\mathcal{C}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}"] \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}"'] & A \otimes_A \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$(\Delta_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = (I_{\mathcal{C}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}}, \tag{2.1}$$

$$(I_{\mathcal{C}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = l_{\mathcal{C}}^{-1} \quad e \quad (\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = r_{\mathcal{C}}^{-1}. \tag{2.2}$$

Convencionamos que a estrutura de A-bimódulo em um A-coanel $\mathcal{C}$ qualquer, será denotada por "concatenação", isto é, as ações à esquerda e à direita de $a \in A$ em $c \in \mathcal{C}$ são escritas, respectivamente, como "ac" e "ca". Também observamos que em (2.2) é usual substituir os isomorfismos canônicos pelo morfismo identidade $I_{\mathcal{C}}$.

Observação 2.1.2. *Note que um A-coanel nada mais é do que uma coálgebra na categoria dos A-bimódulos.*

Ao decorrer do texto adotamos a notação de Sweedler-Heyneman para a aplicação $\Delta_{\mathcal{C}}$, isto é, ao invés de descrever explicitamente a imagem de um elemento $c \in \mathcal{C}$ por $\Delta_{\mathcal{C}}$ como

$$\Delta_{\mathcal{C}}(c) = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes_A \tilde{c}_i,$$

em que $c_i, \tilde{c}_i \in \mathcal{C}$, denotamos

$$\Delta_{\mathcal{C}}(c) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)},$$

com $c_{(1)}, c_{(2)} \in \mathcal{C}$ e o lado direito da igualdade acima representando um somatório dado em termos de c.

Vejamos alguns exemplos de coanéis.

Exemplo 2.1.3. *Todo anel A é um coanel sobre si mesmo, bastando definir o coproduto como o isomorfismo canônico de A-módulos à esquerda $\Delta_A = r_A^{-1} : A \to A \otimes_A A$ e a counidade como a aplicação identidade $\varepsilon_A = I_A : A \to A$. O coanel $A = (A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ é chamado de **coanel trivial**.*

Exemplo 2.1.4. *Se k é um anel comutativo, então toda k-coálgebra $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ é um k-coanel.*

Observe que os Exemplos 2.1.3 e 2.1.4 evidenciam que a estrutura de coanel generaliza as estruturas de anel e de coálgebra.

Exemplo 2.1.5. *Seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis. A partir da estrutura natural de B-bimódulo induzida por i em A, considere o A-bimódulo $\mathcal{D} = A \otimes_B A$. Vejamos que $\mathcal{D}$ é um A-coanel, chamado de **coanel canônico**, ou **coanel de Sweedler**, associado ao morfismo $i : B \to A$. Definimos o coproduto e a counidade como os morfismos de A-bimódulos*

$$\Delta_{\mathcal{D}} : A \otimes_B A \to (A \otimes_B A) \otimes_A (A \otimes_B A) \quad e \quad \varepsilon_{\mathcal{D}} : A \otimes_B A \to A$$

descritos por

$$\Delta_{\mathcal{D}}(a' \otimes_B a) = a' \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A \otimes_B a, \quad \varepsilon_{\mathcal{D}}(a' \otimes_B a) = a'a$$

para todos $a' \otimes_B a \in \mathcal{D}$. Verifiquemos as equações (2.1) e (2.2) para a tripla $(\mathcal{D}, \Delta_{\mathcal{D}}, \varepsilon_{\mathcal{D}})$.

Dado $a' \otimes_B a \in \mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned}((\Delta_{\mathcal{D}} \otimes_A I_{\mathcal{D}}) \circ \Delta_{\mathcal{D}})(a' \otimes_B a) &= (\Delta_{\mathcal{D}} \otimes_A I_{\mathcal{D}})(\Delta_{\mathcal{D}}(a' \otimes_B a))\\ &= (\Delta_{\mathcal{D}} \otimes_A I_{\mathcal{D}})(a' \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A \otimes_B a)\\ &= a' \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A \otimes_B a\\ &= (I_{\mathcal{D}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{D}})(a' \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A \otimes_B a)\\ &= (I_{\mathcal{D}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{D}})(\Delta_{\mathcal{D}}(a' \otimes_B a))\\ &= ((I_{\mathcal{D}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{D}}) \circ \Delta_{\mathcal{D}})(a' \otimes_B a)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}((I_{\mathcal{D}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{D}}) \circ \Delta_{\mathcal{D}})(a' \otimes_B a) &= (I_{\mathcal{D}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{D}})(\Delta_{\mathcal{D}}(a' \otimes_B a))\\ &= (I_{\mathcal{D}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{D}})(a' \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A \otimes_B a)\\ &= a' \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A a\\ &= a' \otimes_B a \otimes_A 1_A\\ &= l_{\mathcal{D}}^{-1}(a' \otimes_B a),\end{aligned}$$

como também

$$((\varepsilon_{\mathcal{D}} \otimes_B I_{\mathcal{D}}) \circ \Delta_{\mathcal{D}})(a' \otimes_B a) = r_{\mathcal{D}}^{-1}(a' \otimes_B a).$$

Observamos que, pelo isomorfismo de A-bimódulos

$$(A \otimes_B A) \otimes_A (A \otimes_B A) \cong A \otimes_B A \otimes_B A,$$

é comum descrever a aplicação $\Delta_{\mathcal{D}}$ por $\Delta_{\mathcal{D}}(a' \otimes_B a) = a' \otimes_B 1_A \otimes_B a$, para todo $a' \otimes_B a \in A \otimes_B A$.

Exemplo 2.1.6. *Sejam k um anel comutativo, G um grupo finito e A uma G-módulo álgebra, isto é, G age em A por automorfismos de k-álgebras. Tome $\mathcal{C} = \oplus_{g \in G} A v_g$ o A-módulo à esquerda livre de base G e $p_g : \mathcal{C} \to A$ a projeção canônica na componente Av_g, definida por $p_g(\sum_{h \in G} a_h v_h) = a_g$ para todo $\sum_{h \in G} a_h v_h \in \mathcal{C}$. Definimos uma ação à direita de A em $\mathcal{C}$ por*

$$v_g \triangleleft a = g(a) v_g,$$

para todos $a \in A$ e $v_g \in \mathcal{C}$. Mais ainda, as ações à esquerda e à direita de A em $\mathcal{C}$ comutam, logo $\mathcal{C}$ é um A-bimódulo. Com efeito, dados $a', a \in A$ temos

$$\begin{aligned}(a' \triangleright v_g) \triangleleft a &= (a' v_g) \triangleleft a\\ &= a' g(a) v_g\\ &= a' \triangleright (v_g \triangleleft a).\end{aligned}$$

Por fim, definimos morfismos de A-bimódulos

$$\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \quad e \quad \varepsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to A$$

por

$$\Delta_{\mathcal{C}}(v_g) = \sum_{h \in G} v_h \otimes_A v_{h^{-1}g}, \quad \varepsilon_{\mathcal{C}} = p_e$$

para todo $v_g \in \mathcal{C}$ *e estendidos por A-linearidade à esquerda, em que* p_e *é a projeção na componente do elemento neutro "e" do grupo G. Vejamos que os morfismos* $\Delta_{\mathcal{C}}$ *e* $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ *satisfazem as equações (2.1) e (2.2):*

$$\begin{aligned}
((\Delta_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}})(v_g) &= (\Delta_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}})(\sum_{h \in G} v_h \otimes_A v_{h^{-1}g}) \\
&= \sum_{h \in G} \Delta_{\mathcal{C}}(v_h) \otimes_A v_{h^{-1}g} \\
&= \sum_{h \in G} \sum_{t \in G} v_t \otimes_A v_{t^{-1}h} \otimes_A v_{h^{-1}g} \\
&= \sum_{h,t \in G} v_t \otimes_A v_{t^{-1}h} \otimes_A v_{h^{-1}g} \\
&= \sum_{\substack{r,s,u \in G \\ rsu = g}} v_r \otimes_A v_s \otimes_A v_u, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
((I_{\mathcal{C}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}})(v_g) &= (I_{\mathcal{C}} \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}})(\sum_{h \in G} v_h \otimes_A v_{h^{-1}g}) \\
&= \sum_{h \in G} v_h \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}(v_{h^{-1}g}) \\
&= \sum_{h \in G} v_h \otimes_A (\sum_{t \in G} v_t \otimes_A v_{t^{-1}h^{-1}g}) \\
&= \sum_{h,t \in G} v_h \otimes_A v_t \otimes_A v_{(ht)^{-1}g}) \\
&= \sum_{\substack{r,s,u \in G \\ rsu = g}} v_r \otimes_A v_s \otimes_A v_u, \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

em que as igualdades (2.3) e (2.4) seguem da igualdade entre os conjuntos de índices dos somatórios, isto é

$$\begin{aligned}
\{(t, t^{-1}h, h^{-1}g) \mid h, t \in G\} &\overset{(2.3)}{=} \{(r, s, u) \mid rsu = g, \ r, s, u \in G\} \\
&\overset{(2.4)}{=} \{(h, t, (ht)^{-1}g) \mid h, t \in G\}.
\end{aligned}$$

Para a counitalidade de $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ *temos*

$$\begin{aligned}((\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}})(v_g) &= (\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes_A I_{\mathcal{C}})(\sum_{h \in G} v_h \otimes_A v_{h^{-1}g}) \\ &= \sum_{h \in G} \varepsilon_{\mathcal{C}}(v_h) \otimes_A v_{h^{-1}g}) \\ &= 1_A \otimes_A v_g \\ &= r_{\mathcal{C}}^{-1}(v_g),\end{aligned}$$

e de forma análoga mostra-se $((I_{\mathcal{C}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}})(v_g) = l_{\mathcal{C}}^{-1}(v_g)$, *assim* $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ *é um* A*-coanel.*

Exemplo 2.1.7. *Sejam* G *um grupo arbitrário e* A *uma* k*-álgebra graduada por* G*, isto é,* $A = \oplus_{g \in G} A_g$ *soma direta de* k*-módulos com* $A_g A_h \subseteq A_{gh}$*, para todos* $g, h \in G$*. Considere* $\mathcal{C} = \oplus_{g \in G} A v_g$ *o* A*-módulo à esquerda livre de base* G*. Definimos uma ação à direita de* A *em* $\mathcal{C}$ *por*

$$v_g \triangleleft a = \sum_{h \in G} a_h v_{gh},$$

para todos $a \in A$*,* $v_g \in \mathcal{C}$ *e em que* $a = \sum_{g \in G} a_g$*, com* $a_g \in G$ *quase todos nulos. Claramente as ações comutam, logo* $\mathcal{C}$ *é munido de uma estrutura de* A*-bimódulo. Por fim considere as aplicações*

$$\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \quad e \quad \varepsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to A,$$

definidas por

$$\Delta_{\mathcal{C}}(v_g) = v_g \otimes_A v_g, \quad \varepsilon_{\mathcal{C}}(v_g) = 1_A$$

para todo $v_g \in \mathcal{C}$ *e estendidas por linearidade à esquerda. Evidentemente,* $\Delta_{\mathcal{C}}$ *e* $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ *satisfazem as equações (2.1) e (2.2), resta verificar a* A*-linearidade à direita: dado* $a \in A$

temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{C}}(v_g \triangleleft a) &= \Delta_{\mathcal{C}}(\sum_{h\in G} a_h v_{gh}) \\
&= \sum_{h\in G} a_h \Delta_{\mathcal{C}}(v_{gh}) \\
&= \sum_{h\in G} a_h (v_{gh} \otimes_A v_{gh}) \\
&= \sum_{h\in G} (a_h v_{gh}) \otimes_A v_{gh} \\
&= \sum_{h\in G} (v_g \triangleleft a_h) \otimes_A v_{gh} \\
&= \sum_{h\in G} v_g \otimes_A a_h v_{gh} \\
&= v_g \otimes_A (\sum_{h\in G} a_h v_{gh}) \\
&= v_g \otimes_A (v_g \triangleleft a) \\
&= (v_g \otimes_A v_g) \triangleleft a \\
&= \Delta_{\mathcal{C}}(v_g) \triangleleft a
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathcal{C}}(v_g \triangleleft a) &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(\sum_{h\in G} a_h v_{gh}) \\
&= \sum_{h\in G} a_h \varepsilon_{\mathcal{C}}(v_{gh}) \\
&= \sum_{h\in G} a_h 1_A \\
&= a \\
&= \varepsilon_{\mathcal{C}}(v_g) \triangleleft a,
\end{aligned}$$

logo $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ *é um* A*-coanel.*

Exemplo 2.1.8. *Sejam* $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *uma* k*-biálgebra e* A *uma* H*-comódulo álgebra à direita com estrutura* $\rho_A : A \to A \otimes H$*, dada por* $\rho_A(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$*, para todo* $a \in A$*. Definimos uma estrutura de* A*-coanel em* $\mathcal{C} = A \otimes H$*. Naturalmente, o morfismo de* k*-álgebras* $\rho_A : A \to A \otimes H$ *induz uma estrutura de* A*-módulo à direita em* $A \otimes H$ *por* $(b \otimes h) \triangleleft a = (b \otimes h)\rho_A(a)$*, logo temos* $\mathcal{C}$ *um* A*-bimódulo com*

$$a' \triangleright (b \otimes h) \triangleleft a = a' b a_{[0]} \otimes h a_{[1]},$$

para todos $a, a' \in A$ *e* $b \otimes h \in A \otimes H$*. Por fim, definimos o coproduto de* $\mathcal{C}$ *como a composição de* $I_A \otimes \Delta$ *com o isomorfismo de* A*-módulos à esquerda* $(A \otimes H) \otimes_A (A \otimes H) \cong A \otimes H \otimes H$ *e a counidade de* $\mathcal{C}$ *como a composição de* $I_A \otimes \varepsilon$ *com o isomorfismo de* k*-*

módulos $A \otimes k \cong A$, isto é

$$\Delta_{\mathcal{C}} : A \otimes H \to (A \otimes H) \otimes_A (A \otimes H) \quad e \quad \varepsilon_{\mathcal{C}} : A \otimes H \to A$$

são descritas por

$$\Delta_{\mathcal{C}}(b \otimes h) = a \otimes h_{(1)} \otimes_A 1_A \otimes h_{(2)}, \quad \varepsilon_{\mathcal{C}}(b \otimes h) = b\varepsilon(h).$$

A menos de isomorfismos, temos $\Delta_{\mathcal{C}} = I_A \otimes \Delta$ e $\varepsilon_{\mathcal{C}} = I_A \otimes \varepsilon$, logo a coassociatividade de $\Delta_{\mathcal{C}}$ e a counitalidade de $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ (equações (2.1) e (2.2)) seguem do fato que Δ e ε satisfazem essas propriedades para a biálgebra H e que $A \otimes -$ é funtor, logo preserva composições. Resta verificar que o coproduto e a counidade de $\mathcal{C}$ são morfismos de A-bimódulos: dados $a, a' \in A$ e $b \otimes h \in A \otimes H$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{C}}(a' \triangleright (b \otimes h) \triangleleft a) &= \Delta_{\mathcal{C}}(a'ba_{[0]} \otimes ha_{[1]}) \\
&= a'ba_{[0]} \otimes (ha_{[1]})_{(1)} \otimes_A 1_A \otimes (ha_{[1]})_{(2)} \\
&= a'ba_{[0]} \otimes h_{(1)}a_{[1](1)} \otimes_A 1_A \otimes h_{(2)}a_{[1](2)} \qquad (2.5) \\
&= a'ba_{[0]} \otimes h_{(1)}a_{[1]} \otimes_A 1_A \otimes h_{(2)}a_{[2]} \qquad (2.6) \\
&= a' \triangleright (b \otimes h_{(1)}) \triangleleft a_{[0]} \otimes_A 1_A \otimes h_{(2)}a_{[1]} \\
&= a' \triangleright (b \otimes h_{(1)}) \otimes_A a_{[0]}1_A \otimes h_{(2)}a_{[1]} \\
&= a' \triangleright (b \otimes h_{(1)}) \otimes_A (1_A \otimes h_{(2)}) \triangleleft a \\
&= a' \triangleright \Delta_{\mathcal{C}}(b \otimes h) \triangleleft a
\end{aligned}$$

em que (2.5) segue de Δ ser morfismo de álgebras e (2.6) da propriedade (1.7) de A como H-comódulo. Agora, para a counidade

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathcal{C}}(a' \triangleright (b \otimes h) \triangleleft a) &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(a'ba_{[0]} \otimes ha_{[1]}) \\
&= a'ba_{[0]}\varepsilon(ha_{[1]}) \\
&= a'ba_{[0]}\varepsilon(h)\varepsilon(a_{[1]}) \qquad (2.7) \\
&= a'b\varepsilon(h)a_{[0]}\varepsilon(a_{[1]}) \\
&= a'b\varepsilon(h)a \qquad (2.8) \\
&= a' \triangleright \varepsilon_{\mathcal{C}}(b \otimes h) \triangleleft a,
\end{aligned}$$

onde em (2.7) foi usado que ε é morfismo de álgebras e em (2.8) a propriedade (1.8) de A como H-comódulo.

Exemplo 2.1.9. *Toda estrutura entrelaçada entre uma k-álgebra e uma k-coálgebra dá origem a um coanel (veja [8, Example 1.6]). Mais ainda, vários dos exemplos apresentados anteriormente são casos particulares dessa construção. Discutiremos esse exemplo com* *detalhes no Capítulo 4, Proposição 4.1.2.*

Definição 2.1.10. *Sejam $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ e $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \Delta_{\mathcal{D}}, \varepsilon_{\mathcal{D}})$ dois A-coanéis arbitrários e $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um morfismo de A-bimódulos. Então ϕ é dito **morfismo de A-coanéis** se satisfaz os diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{D}}"] \\ \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "\phi \otimes_A \phi"'] & \mathcal{D} \otimes_A \mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varepsilon_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{D} \arrow[dl, "\varepsilon_{\mathcal{D}}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$\Delta_{\mathcal{D}} \circ \phi = (\phi \otimes_A \phi) \circ \Delta_{\mathcal{C}}, \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{D}} \circ \phi = \varepsilon_{\mathcal{C}}. \tag{2.10}$$

Exemplo 2.1.11. *Sejam $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ um A-coanel arbitrário e $A = (A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ o A-coanel trivial do Exemplo 2.1.3. Vejamos que $\varepsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to A$ é, na realidade, um morfismo entre os A-coanéis $\mathcal{C}$ e A. Com efeito,*

$$\begin{aligned} (\Delta_A \circ \varepsilon_{\mathcal{C}})(c) &= \Delta_A(\varepsilon_{\mathcal{C}}(c)) \\ &= 1_A \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}(c) \\ &= 1_A \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}(\varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(1)})c_{(2)}) \\ &= 1_A \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(1)})\varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(2)}) \\ &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(1)}) \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(2)}) \\ &= ((\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}})(c), \end{aligned}$$

para todo $c \in \mathcal{C}$ e evidentemente,

$$\varepsilon_A \circ \varepsilon_{\mathcal{C}} = I_A \circ \varepsilon_{\mathcal{C}} = \varepsilon_{\mathcal{C}}.$$

De forma dual, podemos considerar a estrutura de A-anel, isto é

Definição 2.1.12. *Um A-anel é uma tripla $R = (R, m_R, u_R)$, com R um A-bimódulo e $m_R : R \otimes_A R \to R$, $u_R : A \to R$ morfismos de A-bimódulos satisfazendo os diagramas* *comutativos*

$$\begin{tikzcd} R \otimes_A R \otimes_A R \arrow[r, "m_R \otimes_A I_R"] \arrow[d, "I_R \otimes_A m_R"'] & R \otimes_A R \arrow[d, "m_R"] \\ R \otimes_A R \arrow[r, "m_R"'] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & R \otimes_A R \arrow[d, "m_R"] & \\ R \otimes_A A \arrow[ur, "I_R \otimes_A u_R"] \arrow[r, "l_R"'] & R & A \otimes_A R \arrow[ul, "u_R \otimes_A I_R"'] \arrow[l, "r_R"] \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$m_R \circ (m_R \otimes_A I_R) = m_R \circ (I_R \otimes_A m_R), \tag{2.11}$$

$$m_R \circ (I_R \otimes_A u_R) = l_R \quad e \quad m_R \circ (u_R \otimes_A I_R) = r_R. \tag{2.12}$$

Definição 2.1.13. *Sejam (R, m_R, u_R) e (S, m_S, u_S) dois A-anéis e $\phi : R \to S$ um morfismo de A-bimódulos. Então ϕ é dito **morfismo de A-anéis** se satisfaz os diagramas*

$$\begin{tikzcd} R \otimes_A R \arrow[r, "f \otimes_A f"] \arrow[d, "m_R"'] & S \otimes_A S \arrow[d, "m_S"] \\ R \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "u_R"'] \arrow[dr, "u_S"] & \\ R \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$m_S \circ (f \otimes_A f) = f \circ m_R,$$

$$f \circ u_R = u_S.$$

Observação 2.1.14. *Pontuamos que os A-anéis são simplesmente álgebras na categoria dos A-bimódulos. Para mais detalhes sobre A-anéis, consulte [1].*

De forma análoga à coálgebras, podemos definir uma estrutura de comódulo sobre um coanel.

Definição 2.1.15. *Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ um A-coanel. Um **$\mathcal{C}$-comódulo à direita** é um par (V, ρ_V), com V um A-módulo à direita e $\rho_V : V \to V \otimes_A \mathcal{C}$ uma aplicação A-linear à* *direita satisfazendo os diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_V"] \arrow[d, "\rho_V"'] & V \otimes_A \mathcal{C} \arrow[d, "\rho_V \otimes_A I_{\mathcal{C}}"] \\ V \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "I_V \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}"'] & V \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "\rho_V"'] \arrow[dr, "l_V^{-1}"] & \\ V \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "I_V \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}"'] & V \otimes_A A \end{tikzcd}$$

isto é, são válidas as equações

$$(\rho_V \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \rho_V = (I_V \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}) \circ \rho_V, \tag{2.13}$$

$$(I_V \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ \rho_V = l_V^{-1}. \tag{2.14}$$

Analogamente define-se $\mathcal{C}$-comódulos à esquerda e $\mathcal{C}$-bicomódulos (ver [7, p. 181]). A menos de menção contrária, todo $\mathcal{C}$-comódulo será considerado à direita.

Fixado um A-coanel $\mathcal{C}$, o conjunto de $\mathcal{C}$-comódulos à direita e os morfismos entre eles formam uma categoria, denotada por $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$.

Exemplo 2.1.16. *Todo A-coanel $\mathcal{C}$ é um $\mathcal{C}$-comódulo, com estrutura dada por $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}$.*

A seguir apresentamos descrições para a categoria dos comódulos à direita sobre alguns dos coanéis apresentados anteriormente.

Exemplo 2.1.17. *Como esperado, um comódulo sobre o A-coanel trivial A, nada mais é que um A-módulo à direita.*

Exemplo 2.1.18. *A categoria dos comódulos à direita sobre o A-coanel de Sweedler $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ associado a um morfismo de anéis $i : B \to A$ é isomorfa a categoria de* ***descent data*** *de A para B, como veremos detalhadamente na Seção 2.4.*

Exemplo 2.1.19. *Sejam $\mathcal{C} = \oplus_{g \in G} A v_g$ o A-coanel associado a um grupo finito G agindo por automorfismos de k-álgebras em A e (M, ρ_M) um $\mathcal{C}$-comódulo à direita. Dado $m \in M$, escrevemos*

$$\begin{aligned} \rho_M(m) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_A \sum_{g \in G} a_g v_g \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_A a_g v_g \\ &= \sum_{g \in G} (\sum_{i=1}^{n} m_i) a_g \otimes_A v_g \\ &= \sum_{g \in G} m_g \otimes_A v_g. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}$ é o A-módulo livre sobre $\{v_g \mid g \in G\}$, a aplicação $\overline{g} : M \to M$ dada por $\overline{g}(m) = m_g$ é bem definida (basta notar que $\overline{g} = l_M \circ (I_M \otimes_A p_g) \circ \rho_M$, com $p_g : \mathcal{C} \to A$ a projeção da componente Av_g). Além disso, de $(I_M \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ \rho_M = I_M$ segue que $m_e = \overline{e}(m) = m$. Agora, pela equação (2.13), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} \rho_M(m_g) \otimes_A v_g &= (\rho_M \otimes I_{\mathcal{C}})(\sum_{g\in G} m_g \otimes_A v_g) \\
&= (\rho_M \otimes I_{\mathcal{C}})(\rho(m)) \\
&= (I_M \otimes \Delta_{\mathcal{C}})(\rho(m)) \\
&= \sum_{g,h\in G} m_g \otimes_A v_h \otimes_A v_{h^{-1}g} \\
&= \sum_{g,h\in G} m_{hg} \otimes_A v_h \otimes_A v_g,
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\rho(m_g) = \sum_{h\in G} m_{hg} \otimes_A v_h,$$

logo $\overline{h}(\overline{g}(m)) = m_{hg} = \overline{hg}(m)$ e segue que G age por k-automorfismos em M. Mais ainda, como ρ_M é A-linear à direita, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} \overline{g}(ma) \otimes_A v_g &= \rho_M(ma) \\
&= \rho_M(m)a \\
&= \sum_{g\in G} \overline{g}(m) \otimes_A v_g a \\
&= \sum_{g\in G} \overline{g}(m) \otimes_A g(a) v_g \\
&= \sum_{g\in G} \overline{g}(m) g(a) \otimes_A v_g,
\end{aligned}$$

*assim $\overline{g}(ma) = \overline{g}(m)g(a)$, ou seja, $\overline{g}$ é A-**semilinear à direita**. Reciprocamente, se G age como um grupo de k-automorfismos A-semilineares à direita em M, então a aplicação $\rho_M : M \to M \otimes_A \mathcal{C}$ descrita por*

$$\rho_M(m) = \sum_{g\in G} \overline{g}(m) \otimes_A v_g$$

para cada $m \in M$, define uma estrutura de $\mathcal{C}$-comódulo à direita em M.

Exemplo 2.1.20. *Sejam G um grupo arbitrário, A uma k-álgebra G-graduada e $\mathcal{C} = \oplus_{g\in G} Av_g$ o A-coanel do Exemplo 2.1.7. A categoria dos $\mathcal{C}$-comódulos à direita coincide com a categoria dos A-módulos à direita G-graduados, isto é, A-módulos à direita M que* *admitem uma decomposição $M = \oplus_{g \in G} M_g$ de A-módulos à direita, tais que*

$$M_g A_h \subseteq M_{gh}.$$

Veja [8, Example 1.4] para mais detalhes.

Exemplo 2.1.21. *Seja $\mathcal{C} = A \otimes H$ o A-coanel associado a uma biálgebra H e uma H-comódulo álgebra A. Mostra-se que a categoria dos $\mathcal{C}$-comódulos à direita é isomorfa a categoria dos (A, H)-módulos de Hopf relativos à direita $\mathcal{M}_A^H$, isto é, k-módulos M munidos de uma A-ação à direita e uma H-coação à direita $\rho_M : M \to M \otimes H$ tais que*

$$\rho_M(ma) = m_{[0]} a_{[0]} \otimes m_{[1]} a_{[1]}$$

para todos $m \in M$ e $a \in A$. Veja [8, Example 1.5] para mais detalhes.

Observação 2.1.22. *Também adotamos uma notação de Sweedler-Heyneman para a aplicação de estrutura de um $\mathcal{C}$-comódulo. Mais especificamente, dado $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e $v \in V$, escrevemos*

$$\rho_V(v) = v_{[0]} \otimes_A v_{[1]},$$

com $v_{[0]} \in V$ e $v_{[1]} \in \mathcal{C}$. Note que a notação de Sweedler-Heyneman para o coproduto utiliza índices adornados de parênteses, enquanto para os comódulos usa-se colchetes.

Ao decorrer do texto o coanel de Sweedler associado a um morfismo de anéis $i : B \to A$, bem como os comódulos sobre ele, terão um papel de destaque. Assim, para evitar qualquer dúvida sobre a notação para a aplicação de um comódulo adotada acima, atentamos ao seguinte: sejam $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ o A-coanel de Sweedler associado ao morfismo $i : B \to A$ e $V = (V, \rho_V)$ um $\mathcal{D}$-comódulo à direita. A ação à direita de A em V permite reescrever elementos arbitrários de $V \otimes_A \mathcal{D}$ como

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} v_i \otimes_A a_j \otimes_B b_k = \sum_{i,j,k=1}^{n} v_i a_j \otimes_A 1_A \otimes_B b_k,$$

com $v_i \in V$ e $a_j, b_k \in A$. Mais ainda, temos um isomorfismo de A-módulos à direita $V \otimes_A \mathcal{D} \cong V \otimes_B A$, dessa forma adotamos a seguinte convenção

$$\rho_V(v) = v_{[0]} \otimes_B v_{[1]},$$

com $v_{[0]} \in V$ e $v_{[1]} \in A$.

Definição 2.1.23. *Sejam $\mathcal{C}$ um A-coanel, $V = (V, \rho_V)$ e $W = (W, \rho_W)$ dois $\mathcal{C}$-comódulos à direita. Uma aplicação A-linear à direita $f : V \to W$ é um* ***morfismo de $\mathcal{C}$-comódulos***

se satisfaz o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_V"'] & W \arrow[d, "\rho_W"] \\ V \otimes_A C \arrow[r, "f \otimes_A I_{\mathcal{C}}"'] & W \otimes_A C \end{tikzcd}$$

Definição 2.1.24. *Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ um A-coanel. Um elemento $x \in \mathcal{C}$ é dito* ***grouplike*** *se satisfaz $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = x \otimes_A x$ e $\varepsilon_{\mathcal{C}}(x) = 1_A$. Denotamos por $G(\mathcal{C})$ o conjunto de todos os elementos grouplike de $\mathcal{C}$.*

Considere $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um morfismo de A-coanéis e $x \in \mathcal{C}$ um elemento grouplike. Averiguemos que a imagem de x por ϕ é um elemento grouplike de $\mathcal{D}$, isto é, morfismos de coanéis preservam grouplikes. Com efeito,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{D}}(\phi(x)) &= (\Delta_{\mathcal{D}} \circ \phi)(x) \\ &= ((\phi \otimes_A \phi) \circ \Delta_{\mathcal{C}})(x) \\ &= (\phi \otimes_A \phi)(x \otimes_A x) \\ &= \phi(x) \otimes_A \phi(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathcal{D}}(\phi(x)) &= (\varepsilon_{\mathcal{D}} \circ \phi)(x) \\ &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(x) \\ &= 1_A. \end{aligned}$$

Um A-coanel $\mathcal{C}$ possui elementos grouplike, se e somente se, A possui uma estrutura de comódulo à esquerda ou à direita sobre $\mathcal{C}$ (veja a Proposição 2.3.1).

2.2 Dualidade

Nessa seção apresentamos o conceito de dualidade para a estrutura de coanel e exploramos algumas de suas propriedades.

Definição 2.2.1. *Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ um A-coanel. Definimos o* ***dual à esquerda*** *e o* ***dual à direita*** *de $\mathcal{C}$, respectivamente como os conjuntos*

$${}^*\mathcal{C} = {}_A\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, A)$$

e

$$\mathcal{C}^* = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, A).$$

Nesse texto toda estrutura dual associada à coanéis será tomada à esquerda.

Observação 2.2.2. *Tratando o coanel $\mathcal{C}$ apenas como um A-módulo à esquerda, temos que o dual à esquerda ${}^*\mathcal{C}$ possui uma estrutura de A-módulo à direita, como descrito na Proposição 1.2.10 (v). Por outro lado, realizando $\mathcal{C}$ como A-módulo à direita, o item (ii) da mesma proposição garante uma estrutura de A-módulo à esquerda em ${}^*\mathcal{C}$. Mais ainda, as duas estruturas são compatíveis, isto é, ${}^*\mathcal{C}$ é A-bimódulo. Com efeito, dados $a, a' \in A$, $f \in {}^*\mathcal{C}$ e $c \in \mathcal{C}$, temos*

$$\begin{aligned}((a \cdot f) \cdot a')(c) &= (a \cdot f)(c)a' \\ &= f(ca)a' \\ &= (f \cdot a')(ca) \\ &= (a \cdot (f \cdot a'))(c).\end{aligned}$$

Vejamos que as demais estruturas presentes em um coanel permitem munir seu dual à esquerda com a estrutura de anel.

Proposição 2.2.3. *Seja $\mathcal{C}$ um A-coanel. Então o dual à esquerda ${}^*\mathcal{C}$ é um anel, com unidade $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ e multiplicação definida por*

$$f \bullet g = g \circ l_{\mathcal{C}}^{-1} \circ (I_{\mathcal{C}} \otimes_A f) \circ \Delta_{\mathcal{C}},$$

para todos $f, g \in {}^*\mathcal{C}$ e cuja expressão em um elemento $c \in \mathcal{C}$ é

$$(f \bullet g)(c) = g(c_{(1)} f(c_{(2)})).$$

Demonstração. Vejamos que a operação descrita acima é bem definida, associativa e tem como unidade o morfismo $\varepsilon_{\mathcal{C}}$. Como as aplicações envolvidas no produto são A-lineares à esquerda e a composição preserva linearidade, a operação é bem definida. Agora, dados $f, g, h \in {}^*\mathcal{C}$ e $c \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}(f \bullet (g \bullet h))(c) &= (g \bullet h)(c_{(1)} f(c_{(2)})) \\ &= h((c_{(1)} f(c_{(2)}))_{(1)} g((c_{(1)} f(c_{(2)}))_{(2)})) \\ &= h(c_{(1)} g(c_{(2)} f(c_{(3)}))) \\ &= h(c_{(1)} (f \bullet g)(c_{(2)})) \\ &= ((f \bullet g) \bullet h)(c),\end{aligned}$$

pois $\Delta_{\mathcal{C}}(c_{(1)}f(c_{(2)})) = \Delta_{\mathcal{C}}(c_{(1)})f(c_{(2)}) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)}f(c_{(3)})$. Para a unidade temos,

$$\begin{aligned}(f \bullet \varepsilon_{\mathcal{C}})(c) &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(1)}f(c_{(2)})) \\ &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(1)})f(c_{(2)}) \\ &= f(\varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(1)})c_{(2)}) \\ &= f(c),\end{aligned}$$

por outro lado

$$(\varepsilon_{\mathcal{C}} \bullet f)(c) = f(c_{(1)}\varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{(2)})) = f(c).$$

□

Os exemplos a seguir apresentam descrições úteis do dual à esquerda de alguns coanéis.

Exemplo 2.2.4. *Seja $A = (A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ o A-coanel trivial do Exemplo 2.1.3. Vejamos que o dual à esquerda do coanel A coincide com o anel A. Primeiramente observe que, devido à A-linearidade, a expressão para o produto de dois morfismos $f, g \in {}^*A$ se reduz a*

$$\begin{aligned}(f \bullet g)(a) &= (g \circ l_A^{-1} \circ (I_A \otimes_A f) \circ \Delta_A)(a) \\ &= g(1_A f(a)) \\ &= f(a)g(1_A) \\ &= af(1_A)g(1_A).\end{aligned}$$

Assim considere os morfismos de anéis

$$\varphi : {}_A\mathrm{Hom}(A, A) \to A \quad e \quad \psi : A \to {}_A\mathrm{Hom}(A, A),$$

definidos por

$$\varphi(f) = f(1_A) \quad e \quad \psi(a)(a') = a'a,$$

para todos $a, a' \in A$ e $f \in {}_A\mathrm{Hom}(A, A)$. Uma verificação corriqueira nos garante que φ e ψ são mutuamente inversos, logo ${}^*A = {}_A\mathrm{Hom}(A, A) \cong A$.

Exemplo 2.2.5. *Seja $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ o A-coanel de Sweedler. Então temos um isomorfismo de anéis*

$${}^*\mathcal{D} \cong {}_B\mathrm{End}(A)^{\mathrm{op}}.$$

Por definição ${}^*\mathcal{D} = {}_A\mathrm{Hom}(A \otimes_B A, A)$, logo considere as aplicações:

$$\alpha : {}^*\mathcal{D} \to {}_B\mathrm{End}(A)^{\mathrm{op}}$$

dada por

$$\alpha(f)(a) = f(1_A \otimes_B a),$$

para todos $f \in {}^*\mathcal{D}$, $a \in A$ *e*

$$\beta : {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}} \to {}^*\mathcal{D}$$

definida por

$$\beta(s)(a' \otimes_B a) = a's(a),$$

para todos $s \in \operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}$ *e* $a' \otimes_B a \in A \otimes_B A$. *Certifiquemos que* α *e* β *são morfismos de anéis. Dados* $a, a' \in A$, $f, g \in {}^*\mathcal{D}$ *e* $r, s \in {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}$, *temos*

$$\begin{aligned}
\alpha(f \bullet g)(a) &= (f \bullet g)(1_A \otimes_B a) \\
&= g((1_A \otimes_B 1_A)f(1_A \otimes_B a)) \\
&= g(1_A \otimes_B f(1_A \otimes_B a)) \\
&= g(1_A \otimes_B \alpha(f)(a)) \\
&= \alpha(g)(\alpha(f)(a)) \\
&= (\alpha(g) \circ \alpha(f))(a) \\
&= (\alpha(f) \circ_{\mathrm{op}} \alpha(g))(a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta(r \circ_{\mathrm{op}} s)(a' \otimes_B a) &= a'(r \circ_{\mathrm{op}} s)(a) \\
&= a's(r(a)) \\
&= \beta(s)(a' \otimes_B r(a)) \\
&= \beta(s)((a' \otimes_B 1_A)\beta(r)(1_A \otimes_B a)) \\
&= (\beta(r) \bullet \beta(s))(a' \otimes_B a).
\end{aligned}$$

Por fim, basta verificar que α *e* β *são mutuamente inversas:*

$$\begin{aligned}
((\alpha \circ \beta)(s))(a) &= \alpha(\beta(s))(a) \\
&= \beta(s)(1_A \otimes_B a) \\
&= 1_A s(a) \\
&= s(a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((\beta \circ \alpha)(f))(a' \otimes_B a) &= \beta(\alpha(f))(a' \otimes_B a) \\
&= a'\alpha(f)(a) \\
&= a'f(1_A \otimes_B a) \\
&= f(a' \otimes_B a),
\end{aligned}$$

como queríamos.

Vejamos que é possível considerar o dual de aplicações entre coanéis, e que essas são morfismos de anéis.

Proposição 2.2.6. *Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um morfismo entre dois A-coanéis quaisquer. Então a **aplicação dual à esquerda** de ϕ, à dizer ${}^*\phi : {}^*\mathcal{D} \to {}^*\mathcal{C}$, definida por*

$$^*\phi(f)(c) = (f \circ \phi)(c)$$

para todos $f \in {}^*\mathcal{D}$ e $c \in \mathcal{C}$, é morfismo de anéis e de A-bimódulos.

Demonstração. Primeiramente, ${}^*\phi$ é bem definida, uma vez que dados $f \in {}^*\mathcal{D}$, $c \in \mathcal{C}$ e $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} ^*\phi(f)(ac) &= (f \circ \phi)(ac) \\ &= f(\phi(ac)) \\ &= f(a\phi(c)) \\ &= a(f \circ \phi)(c) \\ &= a\, {}^*\phi(f)(c), \end{aligned}$$

logo ${}^*\phi(f)$ é A-linear à esquerda. Observamos que ${}^*\phi$ também é morfismo de A-bimódulos, visto que para todos $a, a' \in A$ e $f \in {}^*\mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned} ^*\phi(a' \cdot f \cdot a)(c) &= (a' \cdot f \cdot a)(\phi(c)) \\ &= f(\phi(c)a')a \\ &= f(\phi(ca'))a \\ &= {}^*\phi(f)(ca')a \\ &= (a' \cdot {}^*\phi(f) \cdot a)(c). \end{aligned}$$

Convencionamos a seguinte notação para o produto entre dois morfismos f, g em ${}^*\mathcal{D}$:

$$f \odot g = g \circ l_{\mathcal{D}}^{-1} \circ (I_{\mathcal{D}} \otimes_A f) \circ \Delta_{\mathcal{D}}.$$

Vejamos que ${}^*\phi$ é de fato morfismo de anéis. Dados $f, g \in {}^*\mathcal{D}$ e $c \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned} ^*\phi(f \odot g)(c) &= ((f \odot g) \circ \phi)(c) \\ &= (f \odot g)(\phi(c)) \\ &= g(\phi(c)_{(1)} f(\phi(c)_{(2)})) \\ &\overset{(1)}{=} g(\phi(c_{(1)}) f(\phi(c_{(2)}))) \\ &= g(\phi(c_{(1)} f(\phi(c_{(2)})))) \\ &= (g \circ \phi)(c_{(1)} (f \circ \phi)(c_{(2)})) \\ &= {}^*\phi(g)(c_{(1)}\, {}^*\phi(f)(c_{(2)})) \\ &= ({}^*\phi(f) \bullet {}^*\phi(g))(c) \end{aligned}$$

e

$$^*\phi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}} \circ \phi \overset{(2)}{=} \varepsilon_{\mathcal{D}},$$

em que (1) e (2) são consequências de ϕ ser morfismo de A-coanéis. $\square$

À luz da Observação 2.2.2 e das Proposições 2.2.3 e 2.2.6, descrevemos um funtor contravariante entre a categoria dos A-coanéis e a categoria dos A-anéis, à dizer

$$_A\operatorname{Hom}(-, A) : A\text{-Corings} \to A\text{-Rings} \tag{2.15}$$

definido para todo A-coanel $\mathcal{C}$ por $_A\operatorname{Hom}(\mathcal{C}, A) = {}^*\mathcal{C}$ e para morfismos de A-coanéis $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ por $_A\operatorname{Hom}(\phi, A) = {}^*\phi : {}^*\mathcal{D} \to {}^*\mathcal{C}$. De fato, o funtor $_A\operatorname{Hom}(-, A)$ é bem definido entre a categoria de A-coanéis e a categoria de conjuntos, entretanto a Observação 2.2.2 e a Proposição 2.2.6 garantem que a imagem de $_A\operatorname{Hom}(-, A)$ está contida na categoria dos A-bimódulos, deste modo resta verificar que ${}^*\mathcal{C}$ é um A-anel, para todo A-coanel $\mathcal{C}$. O produto "$\bullet$" é claramente bilinear e A-balanceado, uma vez que dados $a \in A$ e $f, g \in {}^*\mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}
((f \cdot a) \bullet g)(c) &= g(c_{(1)}(f \cdot a)(c_{(2)})) \\
&= g(c_{(1)}f(c_{(2)})a) \\
&= (a \cdot g)(c_{(1)}f(c_{(2)})) \\
&= (f \bullet (a \cdot g))(c).
\end{aligned}$$

Logo, existe uma aplicação de grupos abelianos bem definida $m_{^*\mathcal{C}} : {}^*\mathcal{C} \otimes_A {}^*\mathcal{C} \to {}^*\mathcal{C}$ descrita por

$$m_{^*\mathcal{C}}(f \otimes_A g) = g \circ l_{\mathcal{C}}^{-1} \circ (I_{\mathcal{C}} \otimes_A f) \circ \Delta_{\mathcal{C}}.$$

Mais ainda, $m_{^*\mathcal{C}}$ se estende naturalmente a um morfismo de A-bimódulos, isto é, dados $a, a' \in A$, $f, g \in {}^*\mathcal{C}$ e $c \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}
m_{^*\mathcal{C}}(a \cdot f \otimes_A g \cdot a')(c) &= (g \cdot a')(c_{(1)}(a \cdot f)(c_{(2)})) \\
&= g(c_{(1)}f(c_{(2)}a))a' \\
&= g((ca)_{(1)}f((ca)_{(2)}))a' \\
&= (m_{^*\mathcal{C}}(f \otimes_A g)(ca))a' \\
&= (a \cdot m_{^*\mathcal{C}}(f \otimes_A g) \cdot a')(c).
\end{aligned}$$

Por outro lado, a unidade de ${}^*\mathcal{C}$ é o morfismo de anéis $u_{^*\mathcal{C}} = {}^*\varepsilon_{\mathcal{C}} : A \to {}^*\mathcal{C}$, em que empregamos o isomorfismo de anéis ${}^*A \cong A$ descrito no Exemplo 2.2.4. Agora, as condições de associatividade (2.11) e unidade (2.12) do A-anel ${}^*\mathcal{C} = ({}^*\mathcal{C}, m_{^*\mathcal{C}}, u_{^*\mathcal{C}})$ seguem diretamente da Proposição 2.2.3. Por fim, a Proposição 2.2.6, adaptada para a linguagem de A-anéis descrita acima, garante que a aplicação dual à esquerda de um morfismo de A-coanéis é morfismo de A-anéis, logo o funtor $_A\operatorname{Hom}(-, A)$ é bem definido.

Observação 2.2.7. *Ao longo dos próximos capítulos a unidade* $u_{^*\mathcal{C}} : A \to {}^*\mathcal{C}$ *do* A*-anel* ${}^*\mathcal{C}$ *terá grande serventia, assim, para fins de notação denotamos* $\chi = u_{^*\mathcal{C}}$*, o morfismo definido por*

$$\chi(a)(c) = u_{^*\mathcal{C}}(a)(c) = \varepsilon_{\mathcal{C}}(c)a \tag{2.16}$$

para todos $a \in A$ *e* $c \in \mathcal{C}$*. Como* χ *é a unidade de* ${}^*\mathcal{C}$ *como* A*-anel, temos expressões conhecidas para a multiplicação entre um elemento arbitrário de* ${}^*\mathcal{C}$ *e* $\chi(a)$*, em que* $a \in A$*. De fato, dado* $f \in {}^*\mathcal{C}$ *temos*

$$(f \bullet \chi(a))(c) = (f \cdot a)(c) = f(c)a,$$

como também

$$(\chi(a) \bullet f)(c) = (a \cdot f)(c) = f(ca).$$

Em especial, para o A*-coanel de Sweedler* $\mathcal{D} = A \otimes_B A$*, temos*

$$(f \bullet \chi(a))(a' \otimes_B a'') = a' f(1_A \otimes_B a'')a$$

e

$$(\chi(a) \bullet f)(a' \otimes_B a'') = a' f(1_A \otimes_B a''a),$$

para todos $a, a', a'' \in A$ *e* $f \in {}^*\mathcal{D}$*.*

Observação 2.2.8. *O processo de se tomar o anel dual de um coanel* $\mathcal{C}$*, nos permite transformar qualquer* $\mathcal{C}$*-comódulo à direita em um* ${}^*\mathcal{C}$*-módulo à direita. Esse processo é conhecido e também ocorre para coálgebras (veja [12, Proposition 2.2.1]), entretanto no último caso é preciso considerar módulos à esquerda sobre a coálgebra dual. Em contra partida, ao se considerar um anel base* A*, possivelmente não comutativo, não é obrigatório que todo* $\mathcal{C}$*-comódulo à direita seja também um* A*-módulo à esquerda. Nesse caso, dado um* $\mathcal{C}$*-comódulo à direita* (V, ρ_V)*, define-se uma ação à direita de* ${}^*\mathcal{C}$ *em* V *por*

$$v \cdot f = v_{[0]} f(v_{[1]}),$$

para todos $v \in V$ *e* $f \in {}^*\mathcal{C}$*. Mais ainda, esse processo é funtorial, isto é, temos um funtor*

$$T : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_{^*\mathcal{C}}$$

definido nos objetos pela regra acima e nos morfismos de forma trivial. Pode-se mostrar que se $\mathcal{C}$ *é projetivo e finitamente gerado como* A*-módulo à esquerda, então* T *é um isomorfismo de categorias (veja [8, p. 5]). Nesse caso, o funtor inverso* $T^{-1} : \mathcal{M}_{^*\mathcal{C}} \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ *leva um* ${}^*\mathcal{C}$*-módulo à direita* M *no* $\mathcal{C}$*-comódulo à direita* (M, ρ_M)*, com* $\rho_M : M \to M \otimes_A \mathcal{C}$

dado por

$$\rho_M(m) = \sum_{i=1}^{n} (m \cdot f_i) \otimes_A c_i$$

em que $\{(c_i, f_i) \mid c_i \in \mathcal{C}, f_i \in {}^*\mathcal{C}, i = 1, \ldots, n\}$ *é uma base dual finita para* $\mathcal{C}$ *como* A*-módulo à esquerda.*

2.3 Coanéis com grouplike

Nessa seção exploramos coanéis providos de uma característica notável: a existência de elementos grouplike. Como veremos, tais estruturas induzem um par adjunto de funtores entre a categoria de módulos sobre certo anel de coinvariantes e a categoria de comódulos sobre o coanel.

Vejamos que há uma bijeção entre estruturas de $\mathcal{C}$-comódulo à direita em A e elementos grouplike em $\mathcal{C}$.

Proposição 2.3.1. *Um* A*-coanel* $\mathcal{C}$ *possui elemento grouplike se, e somente se,* A *é um* $\mathcal{C}$*-comódulo à direita (ou à esquerda).*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha A um $\mathcal{C}$-comódulo à direita via

$$\rho_A : A \to A \otimes_A \mathcal{C} \cong_A \mathcal{C}.$$

Como a aplicação ρ_A é A-linear à direita, temos que é completamente determinada pela imagem de 1_A, logo denotamos $\rho_A(1_A) = x \in \mathcal{C}$. Vejamos que x é um elemento grouplike de $\mathcal{C}$. Pela coassociatividade da estrutura de $\mathcal{C}$-comódulo em A temos

$$\begin{aligned} 1_A \otimes_A x \otimes_A x &= (\rho_A \otimes_A I_{\mathcal{C}})\rho_A(1_A) \\ &= (I_A \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}})\rho_A(1_A) \\ &= (I_A \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}})(1_A \otimes_A x) \\ &= 1_A \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}(x) \end{aligned}$$

e o isomorfismo $A \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \cong \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}$ garante que $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = x \otimes_A x$. Agora pela counidade, segue que

$$\varepsilon_{\mathcal{C}}(x) = (I_A \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}})(1_A \otimes_A x) = 1_A,$$

portanto $x \in G(\mathcal{C})$. Reciprocamente, se $x \in \mathcal{C}$ é um elemento grouplike, então a aplicação A-linear à direita $\rho_A : A \to \mathcal{C}$ determinada por $\rho_A(1_A) = x$, define uma estrutura de $\mathcal{C}$-comódulo à direita em A por meio de composição com o isomorfismo de A-módulos à direita $r_{\mathcal{C}}^{-1} : \mathcal{C} \to A \otimes_A \mathcal{C}$, isto é, $\rho_A : A \to A \otimes_A \mathcal{C}$ é descrita por $\rho_A(a) = 1_A \otimes_B xa$. $\square$

Até o final da seção fixamos um A-coanel $\mathcal{C}$ com um elemento grouplike x e o denotamos por $(\mathcal{C}, x)$. Vejamos que essa estrutura permite definir coinvariantes para comódulos sobre $\mathcal{C}$.

Definição 2.3.2. *Seja $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike fixado e $V = (V, \rho_V)$ um $\mathcal{C}$-comódulo à direita. Definimos o conjunto dos $\mathcal{C}$-coinvariantes de V como*

$$V^{\mathrm{co}\mathcal{C}} = \{v \in V \mid \rho_V(v) = v \otimes_A x\}.$$

Do mesmo modo que morfismos entre coanéis preservam grouplikes, morfismos entre $\mathcal{C}$-comódulos preservam coinvariantes.

Proposição 2.3.3. *Sejam $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike, (V, ρ_V) e (W, ρ_W) dois $\mathcal{C}$-comódulos à direita e $f : V \to W$ um morfismo de $\mathcal{C}$-comódulos. Então f preserva coinvariantes.*

Demonstração. Suponha $v \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$, então temos

$$\begin{aligned} \rho_W(f(v)) &= (\rho_W \circ f)(v) \\ &= ((f \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ \rho_V)(v) \\ &= (f \otimes_A I_{\mathcal{C}})(\rho_V(v)) \\ &= (f \otimes_A I_{\mathcal{C}})(v \otimes_A x) \\ &= f(v) \otimes_A x, \end{aligned}$$

logo $f(v) \in W^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$, como queríamos. □

Temos uma descrição particular para os $\mathcal{C}$-coinvariantes do A-comódulo (A, ρ_A), com ρ_A a estrutura induzida por x:

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{co}\mathcal{C}} &= \{a \in A \mid \rho_A(a) = a \otimes_A x\} \\ &= \{a \in A \mid \rho_A(a) = ax\} \\ &= \{a \in A \mid xa = ax\}, \end{aligned}$$

pois $\rho_A(a) = \rho_A(1_A)a = xa$. Vejamos que $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ é um subanel de A. Evidentemente $1_A \in A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$. Agora dados $a, b \in A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$, temos

$$\begin{aligned} x(ab) &= (xa)b \\ &= (ax)b \\ &= a(xb) \\ &= a(bx) \\ &= (ab)x, \end{aligned}$$

logo $ab \in A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$, como queríamos. Por outro lado, para um $\mathcal{C}$-comódulo V arbitrário, o conjunto dos $\mathcal{C}$-coinvariantes $V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ é apenas um subgrupo abeliano, isto é, não possui necessariamente a estrutura de A-submódulo à direita. Com efeito, se $v \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ e $a \in A$ então

$$\rho_V(va) = \rho_V(v)a = v \otimes_A xa$$

e não podemos concluir $\rho_V(va) = va \otimes_A x$. Entretanto, sempre é possível munir $V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ com a estrutura de $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$-módulo à direita. De fato, se $v \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ e $a \in A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ então

$$\begin{aligned}\rho_V(va) &= \rho_V(v)a \\ &= v \otimes_A xa \\ &= v \otimes_A ax \\ &= va \otimes_A x,\end{aligned}$$

logo $va \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$.

O argumento acima é um caso particular do seguinte fato: seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis. Então i se fatora pelo anel dos coinvariantes $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ se, e somente se,

$$bx = xb$$

para todo $b \in B$, onde as ações de B em $\mathcal{C}$ são induzidas pelo morfismo i, isto é, bx denota $i(b)x$. Nessas condições, definimos o seguinte subconjunto de grouplikes de $\mathcal{C}$:

$$G(\mathcal{C})^B = \{x \in G(\mathcal{C}) \mid bx = xb,\ \forall\ b \in B\}.$$

Assim, se $x \in G(\mathcal{C})^B$ então o conjunto $V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ possui uma estrutura natural de B-módulo à direita, induzida pelo morfismo i.

Nas condições discutidas anteriormente, isto é, dados $i : B \to A$ um morfismo de anéis e $x \in G(\mathcal{C})^B$, existe uma profunda relação entre estruturas de B-módulo à direita e $\mathcal{C}$-comódulo à direita. Mais precisamente, temos um par adjunto de funtores

$$F = - \otimes_B A : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad G = (\ \ )^{\mathrm{co}\mathcal{C}} : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_B,$$

com F definido nos objetos $M \in \mathcal{M}_B$ por

$$F(M) = (M \otimes_B A, I_M \otimes_B \rho_A)$$

e nos morfismos $f : M \to N$ por

$$F(f) = f \otimes_B I_A : M \otimes_B A \to N \otimes_B A,$$

tal como G definido nos objetos $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ por

$$G(V) = V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$$

e nos morfismos $g : V \to W$ por

$$G(g) = \overline{g} : V^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \to W^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$$

dado por

$$\overline{g}(v) = g(v)$$

para todo $v \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$.

Observação 2.3.4. *Note que a estrutura de $\mathcal{C}$-comódulo em $F(M) = M \otimes_B A$ é induzida por ρ_A, logo é fácil ver que F está bem definido. Também segue da Proposição 2.3.3 que G é bem definido nos morfismos.*

Os funtores F e G são denominados *funtor de comparação* e *funtor de restrição aos coinvariantes*, respectivamente. Vejamos que formam um par adjunto.

Proposição 2.3.5. *Os funtores $F = - \otimes_B A : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e $G = (\ \ )^{\mathrm{co}\mathcal{C}} : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_B$ formam um par adjunto (F, G), cuja unidade e counidade são, respectivamente*

$$\vartheta_M : M \to (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{C}},$$

com $M \in \mathcal{M}_B$ e dada por

$$\vartheta_M(m) = m \otimes_B 1_A,$$

para todo $m \in M$, e

$$\zeta_V : V^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \otimes_B A \to V,$$

com $V \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e dada por

$$\zeta_V(v \otimes_B a) = va,$$

para todo $v \otimes_B a \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \otimes_B A$.

Demonstração. Primeiramente verifiquemos que ϑ e ζ são aplicações naturais. No primeiro caso é necessário que, para todo morfismo de B módulos à direita $f : M \to N$, seja válida a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\vartheta_M"] \arrow[d, "f"'] & (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \arrow[d, "\overline{f \otimes_B I_A}"] \\ N \arrow[r, "\vartheta_N"'] & (N \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}((\overline{f \otimes_B I_A}) \circ \vartheta_M)(m) &= (\overline{f \otimes_B I_A})(m \otimes_B 1_A) \\ &= f(m) \otimes_B 1_A \\ &= \vartheta_N(f(m)) \\ &= (\vartheta_N \circ f)(m),\end{aligned}$$

para todo $m \in M$. Agora para a naturalidade de ζ, dado um morfismo de $\mathcal{C}$-comódulos à direita $g : V \to W$ temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} V^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \otimes_B A \arrow[r, "\zeta_V"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & V \arrow[d, "g"] \\ W^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \otimes_B A \arrow[r, "\zeta_W"'] & W \end{tikzcd}$$

que é comutativo, pois

$$\begin{aligned}(g \circ \zeta_V)(v \otimes_B a) &= g(va) \\ &= g(v)a \\ &= \zeta_W(g(v) \otimes_B a) \\ &= (\zeta_W \circ \overline{g})(v \otimes_B a),\end{aligned}$$

para todo $v \otimes_B a \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \otimes_B A$.

Por fim vejamos que ϑ e ζ satisfazem os diagramas da unidade e counidade (veja o Teorema B.6):

$$\begin{tikzcd} G(V) \arrow[r, "\vartheta_{G(V)}"] \arrow[dr, equal] & GFG(V) \arrow[d, "G(\zeta_V)"] \\ & G(V) \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(\vartheta_M)"] \arrow[dr, equal] & FGF(M) \arrow[d, "\zeta_{F(M)}"] \\ & F(M) \end{tikzcd}$$

De fato, para todos $v \in G(V) = V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ e $m \otimes_B a \in F(M) = M \otimes_B A$, temos

$$\begin{aligned}(G(\zeta_V) \circ \vartheta_{G(V)})(v) &= G(\zeta_V)(v \otimes_B 1_A)\\ &= \zeta_V(v \otimes_B 1_A)\\ &= v1_A\\ &= v\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\zeta_{F(M)} \circ F(\vartheta_M))(m \otimes_B a) &= \zeta_{F(M)}((\vartheta_M \otimes_B I_A)(m \otimes_B a))\\ &= \zeta_{F(M)}((m \otimes_B 1_A) \otimes_B a)\\ &= m \otimes_B a.\end{aligned}$$

□

Atentamos ao fato que o par adjunto descrito acima é do tipo “Hom-Tensor”, isto é, o funtor de restrição as coinvariantes de um A-coanel $\mathcal{C}$ com grouplike x, é naturalmente isomorfo ao funtor $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_B$. Com efeito, mostra-se (veja [7, Proposition 28.4]) que para cada $\mathcal{C}$-comódulo à direita (V, ρ_V) temos um isomorfismo de B-módulos à direita

$$\theta_V : \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(A, V) \to V^{\mathrm{co}\mathcal{C}},$$

dado por

$$\theta_V(h) = h(1_A).$$

Mais ainda, essa aplicação é natural: para cada $(V, \rho_V), (W, \rho_W) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ temos o diagrama de B-módulos à direita

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(A, V) \arrow[r, "\theta_V"] \arrow[d, "f_*"'] & V^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(A, W) \arrow[r, "\theta_W"'] & W^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

cuja comutatividade segue de

$$\begin{aligned}(\overline{f} \circ \theta_V)(h) &= \overline{f}(\theta_V(h))\\ &= \overline{f}(h(1_A))\\ &= f(h(1_A))\\ &= (f \circ h)(1_A)\\ &= (\theta_W \circ f_*)(h).\end{aligned}$$

Observação 2.3.6. *Convencionamos que para o coanel de Sweedler $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ associado* *a um morfismo de anéis $i : B \to A$, o grouplike fixado é $x = 1_A \otimes_B 1_A$. Nesse caso o anel dos coinvariantes é*

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{co}\mathcal{D}} &= \{a \in A \mid a \cdot (1_A \otimes_B 1_A) = (1_A \otimes_B 1_A) \cdot a\} \\ &= \{a \in A \mid a \otimes_B 1_A = 1_A \otimes_B a\} \end{aligned}$$

e é fácil ver que i se fatora por $A^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$. Assim, os funtores de comparação e de restrição aos coinvariantes estão bem definidos e serão denotados, respectivamente, por

$$K = - \otimes_B A : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\mathcal{D}} \quad e \quad R = (\ \ )^{\mathrm{co}\mathcal{D}} : \mathcal{M}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{M}_B,$$

bem como a unidade e counidade da adjunção por

$$\eta_M : M \to (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{D}}, \tag{2.17}$$

$$\varepsilon_V : V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A \to V, \tag{2.18}$$

descritas por

$$\eta_M(m) = m \otimes_B 1_A \quad e \quad \varepsilon_V(v \otimes_B a) = va,$$

para todos $m \in M$, $v \otimes_B a \in V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A$.

2.4 Teoria dos antecessores

Seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis, não necessariamente comutativos. É conhecido que todo B-módulo à direita N dá origem a um A-módulo à direita M a partir do produto tensorial $M = N \otimes_B A$. O problema central da teoria dos antecessores (*descent theory*) é uma pergunta no sentido contrário:

Dado um A-módulo à direita M, quando existe um B-módulo à direita N tal que $M \cong N \otimes_B A$ como A-módulos à direita? No caso afirmativo, como encontrar esse módulo?

Nessa seção apresentamos uma formulação para esse problema, o Teorema de *faithfully flat descent* (Teorema 2.4.4) enunciado em [22, Theorem 4.5.2], bem como demonstramos, por meio da teoria de coanéis, uma versão equivalente: o Teorema 2.4.10.

Definição 2.4.1. *Seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis. Um **descent datum (à direita) de** A **para** B é um par (M, θ_M), em que $M = (M, \mu_M)$ é um A-módulo à direita e $\theta_M : M \to M \otimes_B A$ é um morfismo de A-módulos à direita, satisfazendo os* *diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "\theta_M"'] & M \otimes_B A \arrow[d, "\theta_M \otimes_B I_A"] \\ M \otimes_B A \arrow[r, "I_M \otimes_B i \otimes_B I_A"'] & M \otimes_B A \otimes_B A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\theta_M"'] \arrow[dr, equal] & \\ M \otimes_B A \arrow[r, "\overline{\mu_M}"'] & M \end{tikzcd}$$

com $\overline{\mu_M}$ o morfismo induzido pela estrutura de A-módulo em M, isto é, $\overline{\mu_M}(m \otimes_B a) = ma$. De outro modo, são válidas as igualdades

$$(\theta_M \otimes_B I_A) \circ \theta_M = (I_M \otimes_B i \otimes_B I_A) \circ \theta_M, \tag{2.19}$$

$$\overline{\mu_M} \circ \theta_M = I_M. \tag{2.20}$$

Definição 2.4.2. *Sejam $i : B \to A$ um morfismo de anéis e (M, θ_M), (N, θ_N) dois descent data de A para B. Um* ***morfismo de descent data*** *$f : (M, \theta_M) \to (N, \theta_N)$ é um morfismo de A-módulos à direita $f : M \to N$ satisfazendo o diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_M"'] & N \arrow[d, "\theta_N"] \\ M \otimes_B A \arrow[r, "f \otimes_B I_A"'] & N \otimes_B A \end{tikzcd}$$

isto é,

$$\theta_N \circ f = (f \otimes_B I_A) \circ \theta_M.$$

Fixado um morfismo de anéis $i : B \to A$, a família de todos os *"descent data"* de A para B e os morfismos entre eles formam uma categoria (de *descent data*), denotada por $\mathbb{D}(A \downarrow B)$.

Observemos que, todo B-módulo à direita N possui um *descent datum* de A para B canonicamente associado. De fato, considere o A-módulo à direita $N \otimes_B A$ junto do morfismo de A-módulos $\theta : N \otimes_B A \to N \otimes_B A \otimes_B A$, definido por $\theta(n \otimes_B a) = n \otimes_B 1_A \otimes_B a$, para todo $n \otimes_B a \in N \otimes_B A$. Vejamos que θ satisfaz as equações (2.19) e (2.20). Dado

$n \otimes_B a \in N \otimes_B A$, temos

$$
\begin{aligned}
((\theta \otimes_B I_A) \circ \theta)(n \otimes_B a) &= (\theta \otimes_B I_A)(n \otimes_B 1_A \otimes_B a) \\
&= n \otimes_B 1_A \otimes_B 1_A \otimes_B a \\
&= (I_{N \otimes_B A} \otimes_B i \otimes_B I_A)(n \otimes_B 1_A \otimes_B a) \\
&= ((I_{N \otimes_B A} \otimes_B i \otimes_B I_A) \circ \theta)(n \otimes_B a)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\overline{\mu_{N \otimes_B A}} \circ \theta)(n \otimes_B a) &= \overline{\mu_{N \otimes_B A}}(n \otimes_B 1_A \otimes_B a) \\
&= n \otimes_B a \\
&= I_{N \otimes_B A}(n \otimes_B a).
\end{aligned}
$$

A construção acima nos permite definir um funtor entre $\mathcal{M}_B$ e $\mathbb{D}(A \downarrow B)$.

Proposição 2.4.3. *Existe um funtor canônico $J : \mathcal{M}_B \to \mathbb{D}(A \downarrow B)$, definido em $N \in \mathcal{M}_B$ por $J(N) = (N \otimes_B A, \theta)$, em que $\theta : N \otimes_B A \to N \otimes_B A \otimes_B A$ é o morfismo de A-módulos à direita descrito por $\theta(n \otimes_B a) = n \otimes_B 1_A \otimes_B a$ e nos morfismos de B-módulos à direita $f : N \to N'$ por $J(f) = f \otimes_B I_A : N \otimes_B A \to N' \otimes_B A$.*

Antes de enunciar o Teorema de *faithfully flat descent*, vejamos que o funtor J nos fornece um meio para responder as perguntas citadas no início da seção. Por um lado, a imagem de um B-módulo à direita N pelo funtor J é o A-módulo à direita $N \otimes_B A$, junto de uma aplicação θ satisfazendo as condições de um *descent datum* à direita de A para B, ou seja, todo A-módulo à direita M contido na imagem de J admite um B-módulo à direita N, satisfazendo $M \cong N \otimes_B A$. Por outro lado, se J é uma equivalência de categorias, temos uma descrição completa dos A-módulos à direita com a propriedade desejada: *os descent data de A para B.* Mais ainda, é possível recuperar o B-módulo N satisfazendo as condições anteriores por meio da equivalência inversa.

Teorema 2.4.4 (Faithfully flat descent)**.** *Seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis. Então A é fielmente plano como B-módulo à esquerda se, e somente se, o funtor $J : \mathcal{M}_B \to \mathbb{D}(A \downarrow B)$ é uma equivalência de categorias. Nesse caso a equivalência inversa leva um descent datum (M, θ_M) no B-módulo à direita*

$$M^{\theta_M} = \{m \in M \mid \theta_M(m) = m \otimes_B 1_A\}.$$

Como veremos a seguir, a categoria de *descent data* associada a um morfismo de anéis $i : B \to A$ nada mais é que a categoria de comódulos sobre um coanel adequado, em outras palavras o coanel de Sweedler $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ associado a i.

Teorema 2.4.5. *Existe um isomorfismo de categorias*

$$\mathbb{D}(A \downarrow B) \cong \mathcal{M}^{\mathcal{D}}.$$

Demonstração. Considere os funtores

$$T : \mathbb{D}(A \downarrow B) \to \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$$

definido nos objetos $(M, \theta_M) \in \mathbb{D}(A \downarrow B)$ por $T(M, \theta_M) = (M, \rho_M)$, em que ρ_M é a composição de θ_M com o isomorfismo de A-módulos à direita $M \otimes_A \mathcal{D} \cong M \otimes_B A$, isto é, se $\theta_M(m) = m_{\langle 0 \rangle} \otimes_B m_{\langle 1 \rangle}$, então

$$\rho_M(m) = m_{\langle 0 \rangle} \otimes_A 1_A \otimes_B m_{\langle 1 \rangle},$$

e

$$U : \mathcal{M}^{\mathcal{D}} \to \mathbb{D}(A \downarrow B),$$

definido nos objetos $(M, \rho_M) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ como $U(M, \rho_M) = (M, \theta_M)$, em que θ_M é, de modo similar, a composição de ρ_M com o isomorfismo de A-módulos à direita $M \otimes_B A \cong M \otimes_A \mathcal{D}$.

Basta verificar a boa definição de T e U, uma vez que as aplicações são claramente inversas. Supondo que (M, θ_M) é um *descent datum* à direita de A para B, vejamos que $T(M, \theta_M) = (M, \rho_M)$ define uma estrutura de $\mathcal{D}$-comódulo à direita. Para isso considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, "\theta_M"] \arrow[dr, equal] \arrow[ddd, "\theta_M"'] & \arrow[r, phantom, "1"] & & M \otimes_B A \arrow[dl, dash, "\cong"'] \arrow[ddd, "\theta_M \otimes_B I_A"] \\
\arrow[d, phantom, "4"] & M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] \arrow[dr, phantom, "5"] & M \otimes_A \mathcal{D} \arrow[d, "\rho_M \otimes_A I_{\mathcal{D}}"] & \arrow[d, phantom, "2"] \\
& M \otimes_A \mathcal{D} \arrow[r, "I_M \otimes_A \Delta_{\mathcal{D}}"'] \arrow[dl, dash, "\cong"] & M \otimes_A \mathcal{D} \otimes_A \mathcal{D} \arrow[dr, dash, "\cong"] & \\
M \otimes_B A \arrow[rrr, "I_M \otimes_B i \otimes_B I_A"'] & \arrow[r, phantom, "3"] & & M \otimes_B A \otimes_B A
\end{tikzcd}$$

Por hipótese o quadrado externo é comutativo, logo para que 5 também comute basta verificar a comutatividade dos demais diagramas. Os quadrados 1 e 4 são satisfeitos por definição e 2 é evidente. Agora em 3, dado $m \otimes_B a \in M \otimes_B A$ temos

$$\begin{aligned}
(I_M \otimes_A \Delta_{\mathcal{D}})(m \otimes_A 1_A \otimes_B a) &= m \otimes_A 1_A \otimes_B 1_A \otimes_A 1_A \otimes_B a \\
&\cong m \otimes_B 1_A \otimes_B a \\
&= (I_M \otimes_B i \otimes_B I_A)(m \otimes_B a).
\end{aligned}$$

De forma análoga prova-se a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, equal] \arrow[ddd, "\theta_M"'] & & & \\
& M \arrow[d, "\rho_M"'] \arrow[dr, "r_M^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "6"', shift right=3] & & \\
& M \otimes_A \mathcal{D} \arrow[r, "I_M \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{D}}"'] \arrow[dl, dash, "\cong"] \arrow[l, phantom, "8"] & M \otimes_A A \arrow[dr, "r_M"] \arrow[d, phantom, "7"] & \\
M \otimes_B A \arrow[rrr, "\overline{\mu_M}"'] & & & M
\end{tikzcd}$$

logo os funtores T e U são bem definidos e satisfazem

$$T \circ U = I_{\mathcal{M}^{\mathcal{D}}} \ \text{ e } \ U \circ T = I_{\mathbb{D}(A \downarrow B)},$$

ou ainda, as categorias $\mathbb{D}(A \downarrow B)$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ são isomorfas, como queríamos. $\square$

As proposições seguintes apresentam descrições equivalentes para que os funtores de comparação e restrição aos coinvariantes ($K = - \otimes_B A$ e $R = (\ \ )^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$) sejam fiéis e plenos. Antes disso é necessário um lema:

Lema 2.4.6. *O morfismo de B-módulos à esquerda $i : B \to A$ é puro se, e somente se, $\eta_M : M \to (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$ é injetor para todo B-módulo à direita M.*

Demonstração. Primeiramente, note que $I_M \otimes_B i$ se fatora por η_M

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_B B \arrow[r, "I_M \otimes_B i"] \arrow[d, "\cong"'] & M \otimes_B A \\
M \arrow[r, "\eta_M"'] & (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

em que j denota a inclusão canônica. Com efeito, dados $m \in M$ e $b \in B$ temos

$$\begin{aligned}
j(\eta_M(m \cdot b)) &= \eta_M(m \cdot b) \\
&= (m \cdot b) \otimes_B 1_A \\
&= m \otimes_B b \cdot 1_A \\
&= m \otimes_B i(b) \\
&= (I_M \otimes_B i)(m \otimes_B b).
\end{aligned}$$

Assim, i é puro se, e somente se, $I_M \otimes_B i$ é injetor para todo $M \in \mathcal{M}_B$, o que ocorre se, e somente se, $j \circ \eta_M$ é injetor para todo $M \in \mathcal{M}_B$, ou ainda, que η_M seja injetor, visto que j o é. $\square$

Proposição 2.4.7. *O funtor de comparação K é fiel e pleno se, e somente se, $i : B \to A$ é puro como morfismo de B-módulos à esquerda.*

Demonstração. Pela Proposição B.9 o funtor K é fiel e pleno se, e somente se, η_M é bijetor para todo $M \in \mathcal{M}_B$. Agora pelo Lema 2.4.6, basta concluir que a condição de i ser puro como morfismo de B-módulos à esquerda implique em η_M sobrejetor para todo $M \in \mathcal{M}_B$.

Seja $M \otimes_B A$ o $\mathcal{D}$-comódulo à direita com $\rho = I_M \otimes_B \rho_A$ e tome um coinvariante de $M \otimes_B A$ arbitrário $x = \sum_{i=1}^n m_i \otimes_B a_i \in (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$, logo por definição temos que $\rho(x) = x \otimes_B 1_A$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= (I_M \otimes_B \rho_A)(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_B a_i) \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \otimes_B \rho_A(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \otimes_B 1_A \otimes_B a_i.
\end{aligned}$$

Assim,

$$x \otimes_B 1_A = \sum_{i=1}^n m_i \otimes_B 1_A \otimes_B a_i. \tag{2.21}$$

Vejamos que o conúcleo da aplicação η_M é zero, para isso considere o B-módulo à direita $N = (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{D}}/\eta_M(M)$ e a projeção canônica $\pi : (M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \to N$. Aplicando o morfismo de B-módulos $\pi \otimes_B I_A$ em (2.21), temos

$$\begin{aligned} \pi(x) \otimes_B 1_A &= \sum_{i=1}^{n} \pi(m_i \otimes_B 1_A) \otimes_B a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi(\eta_M(m_i)) \otimes_B a_i \\ &= 0 \in N \otimes_B A. \end{aligned}$$

Resta concluir que $\pi(x) = 0$, assim teremos $x \in \eta_M(M)$ e $N = 0$, isto é, $(M \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{D}} = \eta_M(M)$. Por hipótese i é morfismo puro de B-módulos à esquerda, portanto $I_N \otimes_B i$ é injetor. Agora pelo isomorfismo de B-módulos à direita $N \cong N \otimes_B B$ temos

$$\begin{aligned} (I_N \otimes_B i)(\pi(x) \otimes_B 1_B) &= \pi(x) \otimes_B i(1_B) \\ &= \pi(x) \otimes_B 1_A \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica $\pi(x) = 0$. □

O resultado a seguir emprega o conceito de equalizador, cuja definição encontra-se no Apêndice A.9.

Proposição 2.4.8. *O funtor R de restrição aos coinvariantes é fiel e pleno se, e somente se, K preserva o equalizador de ρ_V e $I_V \otimes_B i$, para todo $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$. Em particular, se A é plano como B-módulo à esquerda, então R é fiel e pleno.*

Demonstração. Primeiramente, note que $V^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$ é o equalizador de ρ_V e $I_V \otimes_B i$:

$$V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \xrightarrow{\ j\ } V \underset{I_V \otimes_B i}{\overset{\rho_V}{\rightrightarrows}} V \otimes_B A$$

De fato,

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Eq}(\rho_V, I_V \otimes_B i) &\Leftrightarrow \rho_V(v) = (I_V \otimes_B i)(v \otimes_B 1_B) \\ &\Leftrightarrow \rho_V(v) = v \otimes_B i(1_B) \\ &\Leftrightarrow \rho_V(v) = v \otimes_B 1_A \\ &\Leftrightarrow v \in V^{\mathrm{co}\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Suponha que o funtor R é fiel e pleno, ou ainda, que a counidade ε_V da adjunção é bijetora para todo $V \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ (veja a Proposição B.9). Vejamos que $V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A$ é o equalizador dos morfismos $\rho_V \otimes_B I_A$ e $I_V \otimes_B i \otimes_B I_A$, ou equivalentemente, que $V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A$ coincide com o núcleo de $f = \rho_V \otimes_B I_A - I_V \otimes_B i \otimes_B I_A$. Para isso mostramos que a sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A \xrightarrow{j \otimes_B I_A} V \otimes_B A \xrightarrow{\quad f \quad} V \otimes_B A \otimes_B A$$

é exata. Seja $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i \in V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A$ tal que

$$(j \otimes_B I_A)(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i = 0 \in V \otimes_B A.$$

Pondo $v = \varepsilon_V(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \in V$ temos

$$\begin{aligned} \rho_V(v) &= \rho_V(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \rho_V(v_i) a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i \\ &= 0 \in V \otimes_B A, \end{aligned}$$

assim

$$v = v_{[0]} v_{[1]} = 0$$

e como $\varepsilon_V : V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A \to V$ é bijetora, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i = \varepsilon_V{}^{-1}(v) = 0 \in V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A.$$

Para a exatidão em $V \otimes_B A$, consideremos os morfismos de grupos abelianos

$$\sigma = (\rho_V - I_V \otimes_B i) : V \to V \otimes_B A$$

e

$$\sigma' = (\rho_V - I_V \otimes_B i) : V \to \mathrm{Im}(\sigma).$$

Vimos anteriormente que $V^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$ é o equalizador de ρ_V e $I_V \otimes_B i$, ou ainda, o núcleo de σ', logo temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \xrightarrow{\quad j \quad} V \xrightarrow{\quad \sigma' \quad} \mathrm{Im}(\sigma) \longrightarrow 0$$

e aplicando o funtor K obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A \arrow[r, "j \otimes_B I_A"] \arrow[d, equal] & V \otimes_B A \arrow[r, "\sigma' \otimes_B I_A"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Im}(\sigma) \otimes_B A \arrow[r] \arrow[d, hook, "j' \otimes_B I_A"] & 0 \\
V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A \arrow[r, "j \otimes_B I_A"] & V \otimes_B A \arrow[r, "\sigma \otimes_B I_A"] & V \otimes_B A \otimes_B A &
\end{tikzcd}$$

em que $j' : \mathrm{Im}(\sigma) \to V \otimes_B A$ denota a inclusão. Observe que a primeira linha do diagrama é exata, visto que K é exato à direita. Vejamos agora que a segunda linha é exata em $V \otimes_B A$. Dado $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i \in V \otimes_B A$, temos

$$\begin{aligned}
&(\sigma \otimes_B I_A)(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &((j' \otimes_B I_A) \circ (\sigma' \otimes_B I_A))(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(\sigma' \otimes_B I_A)(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i \in \mathrm{Im}(j \otimes_B I_A),
\end{aligned}$$

como queríamos.

Reciprocamente, suponha que K preserva o equalizador de ρ_V e $I_V \otimes_B i$, para todo $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$. Então $(V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A, j \otimes_B I_A)$ é o equalizador:

$$\begin{tikzcd}
V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A \arrow[r, "j \otimes_B I_A"] & V \otimes_B A \arrow[r, shift left, "\rho_V \otimes_B I_A"] \arrow[r, shift right, "I_V \otimes_B i \otimes_B I_A"'] & V \otimes_B A \otimes_B A
\end{tikzcd}$$

Pela coassociatividade de ρ_V, temos

$$\begin{aligned}
((\rho_V \otimes_B I_A) \circ \rho_V)(v) &= ((I_V \otimes_B \Delta_{\mathcal{D}}) \circ \rho_V)(v) \\
&= (I_V \otimes_B \Delta_{\mathcal{D}})(\rho_V(v)) \\
&= (I_V \otimes_B \Delta_{\mathcal{D}})(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B 1_A \otimes_B a_i \\
&= (I_V \otimes_B i \otimes_B I_A)(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes_B a_i) \\
&= ((I_V \otimes_B i \otimes_B I_A) \circ \rho_V)(v),
\end{aligned}$$

isto é, o par (V, ρ_V) satisfaz a propriedade universal A.9.(ii) do equalizador dos morfismos $\rho_V \otimes_B I_A$ e $I_V \otimes_B i \otimes_B I_A$, logo existe um único morfismo de grupos abelianos $\omega_V : V \to V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A$, tal que

$$\rho_V = (j \otimes_B I_A) \circ \omega_V.$$

Vejamos que ε_V é bijetora, com inversa ω_V, para todo $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$. Por um lado, dado $v \in V$ temos

$$\begin{aligned}(\varepsilon_V \circ \omega_V)(v) &= (\varepsilon_V \circ (j \otimes_B I_A) \circ \omega_V)(v)\\ &= (\varepsilon_V \circ \rho_V)(v)\\ &= \varepsilon_V(v_{[0]} \otimes_B v_{[1]})\\ &= v_{[0]}v_{[1]}\\ &= v,\end{aligned}$$

assim $\varepsilon_V \circ \omega_V = I_V$. Por outro lado, dado $v \otimes_B a \in V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A$ temos

$$\begin{aligned}(\omega_V \circ \varepsilon_V)(v \otimes_B a) &= \omega_V(va)\\ &= \rho_V(va)\\ &= \rho_V(v)a\\ &= (v \otimes_B 1_A)a\\ &= v \otimes_B a,\end{aligned}$$

ou seja, $\omega_V \circ \varepsilon_V = I_{V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A}$.

Por fim observamos que, se A é plano como B-módulo à esquerda, então o funtor K é exato e, em particular, preserva equalizadores. □

Observação 2.4.9. *No caso em que A e B são anéis comutativos e supondo $i : B \to A$ puro como morfismo de B-módulos, mostra-se que o funtor R é fiel e pleno (veja [8, p. 8]). O caso não comutativo desse resultado, enunciado em [8, Proposition 2.3], é falso sem a hipótese extra de $i(B) \subset Z(A)$, como explicitado em [9, p. 196].*

O Teorema a seguir é enunciado e demonstrado em [8, Proposition 2.5], com a hipótese adicional: "*A plano como B-módulo à esquerda*". Como veremos em breve, essa hipótese não é necessária, uma vez que em uma equivalência de categorias abelianas os funtores são exatos (veja a Observação B.7). Em particular, $K = - \otimes_B A$ exato implica $A \in {}_B\mathcal{M}$ plano.

Teorema 2.4.10. *Seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis. Então (K, R) é uma equivalência de categorias se, e somente se, A é fielmente plano como B-módulo à esquerda.*

Demonstração. Suponha que (K, R) é uma equivalência de categorias e seja

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \tag{2.22}$$

uma sequência de B-módulos à direita tal que a sequência

$$0 \longrightarrow K(L) \xrightarrow{K(f)} K(M) \xrightarrow{K(g)} K(N) \longrightarrow 0 \tag{2.23}$$

é exata.

Vejamos que (2.22) é exata para todo B-módulo à direita M, ou seja, que A é fielmente plano como B-módulo à esquerda. Aplicando o funtor R em (2.23) e usando o isomorfismo natural η (2.17), temos o seguinte diagrama comutativo de B-módulos à direita.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_M"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & RK(L) \arrow[r, "RK(f)"] & RK(M) \arrow[r, "RK(g)"] & RK(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como a última linha é exata, visto que (K, R) é uma equivalência então R é exato, e as colunas são isomorfismos, segue que a primeira linha também é exata.

Reciprocamente, suponha que A é fielmente plano como B-módulo à esquerda. Pela Proposição 2.4.8 temos que R é fiel e pleno, logo resta concluir que K também é fiel e pleno, ou equivalentemente, pela Proposição 2.4.7 basta mostrar que i é puro como morfismo de B-módulos à esquerda.

Dado um B-módulo à direita M, vejamos que o morfismo de grupos abelianos

$$I_M \otimes_B i \otimes_B I_A : M \otimes_B B \otimes_B A \to M \otimes_B A \otimes_B A$$

é injetor. Como a multiplicação $m_A : A \times A \to A$ do anel A é uma aplicação B-balanceada, temos um morfismo de grupos abelianos bem definido $\overline{m_A} : A \otimes_B A \to A$ dado por $\overline{m_A}(a \otimes_B a') = aa'$. Agora note que para todo $\sum_{i=1}^n m_i \otimes_B 1_B \otimes_B a_i \in M \otimes_B B \otimes_B A$ temos

$$((I_M \otimes_B \overline{m_A}) \circ (I_M \otimes_B i \otimes_B I_A))(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_B 1_B \otimes_B a_i) =$$

$$= (I_M \otimes_B \overline{m_A})(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_B 1_A \otimes_B a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \otimes_B a_i,$$

ou seja, $I_M \otimes_B i \otimes_B I_A$ possui uma inversa à esquerda, logo é injetor e como A é fielmente plano segue que $I_M \otimes_B i$ é injetor para todo $M \in \mathcal{M}_B$. $\square$

Em conclusão, vejamos como a teoria de coanéis resolve o problema dos antecessores. Notemos que o funtor $J : \mathcal{M}_B \to \mathbb{D}(A \downarrow B)$ se fatora pelo funtor de comparação K. De fato, em virtude do isomorfismo de categorias $T : \mathbb{D}(A \downarrow B) \to \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ descrito no Teorema 2.4.5, escrevemos

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_B \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, "J"'] & & \mathcal{M}^{\mathcal{D}} \\
& \mathbb{D}(A \downarrow B) \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$K = T \circ J,$$

assim K é uma equivalência de categorias se, e somente se, J também é. Nesse sentido o Teorema 2.4.10 demonstrado acima é claramente equivalente ao Teorema 2.4.4 e permite a seguinte interpretação do problema dos antecessores via a linguagem de coanéis:

Corolário 2.4.11. *Dado um A-módulo à direita M, então existe um B-módulo à direita N tal que $M \cong N \otimes_B A$ como A-módulos à direita se, e somente se, M possui uma estrutura de $\mathcal{D}$-comódulo. Nesse caso o B-módulo N é recuperado pelo funtor de restrição aos coinvariantes, isto é, $N = M^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$.*

Capítulo 3

COANÉIS DE GALOIS

Neste capítulo exploramos a estrutura de Galois em coanéis. Em particular, investigamos a relação entre um coanel arbitrário $\mathcal{C}$ com grouplike fixado e o coanel de Sweedler associado a extensão de anéis $A \supseteq A^{co\mathcal{C}}$. Por fim, descrevemos um contexto de Morita canônico para coanéis de Galois e apresentamos um *teorema de equivalências* para essa estrutura. As principais referências para esse capítulo são [8] e [10].

3.1 Coanéis de Galois

Vimos no Capítulo 1 que a estrutura de Galois para extensões de corpos pode ser caracterizada por meio de uma aplicação "canônica". Exploramos o mesmo caminho para os coanéis.

Definição 3.1.1. *Sejam $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike, $A^{co\mathcal{C}}$ o subanel de coinvariantes e $i : A^{co\mathcal{C}} \to A$ a inclusão. O morfismo de A-coanéis*

$$\mathsf{can} : \mathcal{D} = A \otimes_{A^{co\mathcal{C}}} A \to \mathcal{C},$$

definido por

$$\mathsf{can}(a' \otimes_{A^{co\mathcal{C}}} a) = a'xa$$

*para todo $a' \otimes_{A^{co\mathcal{C}}} a \in A \otimes_{A^{co\mathcal{C}}} A$, é chamado de **aplicação canônica** associada ao coanel $\mathcal{C}$.*

Vejamos que a aplicação canônica é de fato um morfismo de A-coanéis. É fácil ver que can é morfismo de A-bimódulos. Por outro lado, dado $a' \otimes_{A^{co\mathcal{C}}} a \in A \otimes_{A^{co\mathcal{C}}} A$, temos

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{\mathcal{C}} \circ \mathsf{can})(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a) &= \Delta_{\mathcal{C}}(\mathsf{can}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a)) \\
&= \Delta_{\mathcal{C}}(a'xa) \\
&= a'\Delta_{\mathcal{C}}(x)a \\
&= a'(x \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} x)a \\
&= (a'x1_A) \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} (1_A xa) \\
&= \mathsf{can}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} 1_A) \otimes_A \mathsf{can}(1_A \otimes a) \\
&= ((\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can}) \circ \Delta_{\mathcal{D}})(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon_{\mathcal{C}} \circ \mathsf{can})(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a) &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(\mathsf{can}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a)) \\
&= \varepsilon_{\mathcal{C}}(a'xa) \\
&= a'\varepsilon_{\mathcal{C}}(x)a \\
&= a'1_A a \\
&= a'a \\
&= \varepsilon_{\mathcal{D}}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a),
\end{aligned}
$$

como queríamos.

Dado um morfismo de anéis $i : B \to A$ que se fatora pelos coinvariantes $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$, a Proposição 2.3.5 revelou a existência de um par adjunto de funtores (F, G) entre as categorias $\mathcal{M}_B$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$. Exploremos algumas de suas propriedades.

Proposição 3.1.2. *Sejam $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike, $i : B \to A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ um morfismo de anéis e (F, G) o par adjunto apresentado na Proposicão 2.3.5.*

(i) Se F é fiel e pleno, então $i : B \to A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ é um isomorfismo de anéis.

(ii) Se G é fiel e pleno, então $\mathsf{can} : \mathcal{D} = A \otimes_B A \to \mathcal{C}$ é um isomorfismo de A-coanéis.

Demonstração. (i) Se F é fiel e pleno, então a unidade ϑ da adjunção é um isomorfismo natural, logo para o B-módulo B temos

$$\vartheta_B : B \xrightarrow{\sim} (B \otimes_B A)^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \cong A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$$

dado por

$$\vartheta_B(b) = b \cdot 1_A = i(b),$$

isto é, $i = \vartheta_B$ é um isomorfismo.

(ii) Seja $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}})$ o $\mathcal{C}$-comódulo do Exemplo 2.1.16. Se G é fiel e pleno, então ζ é isomorfismo natural e para o $\mathcal{C}$-comódulo $\mathcal{C}$ temos

$$\zeta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \otimes_B A \xrightarrow{\sim} \mathcal{C},$$

dado por $\zeta_{\mathcal{C}}(c \otimes_B a) = ca$. Considere a aplicação

$$f : A \to \mathcal{C}^{\mathrm{co}\mathcal{C}},$$

definida por

$$f(a) = ax.$$

Vejamos que f é um isomorfismo de (A, B)-bimódulos. Primeiramente é bem definido:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{C}}(f(a)) &= \Delta_{\mathcal{C}}(ax) \\
&= a\Delta_{\mathcal{C}}(x) \\
&= ax \otimes_A x \\
&= (ax) \otimes_A x \\
&= f(a) \otimes_A x,
\end{aligned}$$

assim $f(a) \in \mathcal{C}^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$, para todo $a \in A$. Agora como f é A-linear à esquerda, basta verificar a B-linearidade à direita:

$$\begin{aligned}
f(a \cdot b) &= f(ai(b)) \\
&= (ai(b))x \\
&= a(i(b)x) \\
&= a(xi(b)) \\
&= axb \\
&= f(a)b,
\end{aligned}$$

para todos $a \in A$ e $b \in B$. Construímos uma inversa para f, a partir do morfismo de (A, B)-bimódulos $\varepsilon_{\mathcal{C}}$, mais especificamente, considere

$$\overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}} : \mathcal{C}^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \to A$$

a restrição de $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ em $\mathcal{C}^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
(\overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}} \circ f)(a) &= \overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}}(f(a)) \\
&= \overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}}(ax) \\
&= a\overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}}(x) \\
&= a1_A \\
&= a.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $c \in \mathcal{C}^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ então $\Delta_{\mathcal{C}}(c) = c \otimes_A x$, logo

$$\begin{aligned}(f \circ \overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}})(c) &= f(\overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}}(c)) \\ &= \overline{\varepsilon_{\mathcal{C}}}(c)x \\ &= c.\end{aligned}$$

Para concluir a tese, observamos que $f \otimes_B I_A : A \otimes_B A \to \mathcal{C}^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \otimes_B A$ é um isomorfismo de A-bimódulos, visto que f e I_A são isomorfismos. Além disso, can se fatora pelos isomorfismos de A-bimódulos $\zeta_{\mathcal{C}}$ e $f \otimes_B I_A$. De fato,

$$\begin{aligned}(\zeta_{\mathcal{C}} \circ (f \otimes_B I_A))(a' \otimes_B a) &= \zeta_{\mathcal{C}}(f(a') \otimes_B a) \\ &= f(a')a \\ &= a'xa \\ &= \mathsf{can}(a' \otimes_B a),\end{aligned}$$

portanto can é isomorfismo, como queríamos.

□

Definição 3.1.3. *Sejam $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike e $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ o subanel de coinvariantes. Dizemos que $(\mathcal{C}, x)$ é um* ***coanel de Galois*** *se o morfismo canônico de coanéis $\mathsf{can} : \mathcal{D} = A \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} A \to \mathcal{C}$, dado por $\mathsf{can}(a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a) = a'xa$, é um isomorfismo.*

Sejam $i : B \to A$ um morfismo de anéis e $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike tal que $x \in G(\mathcal{C})^B$, portanto i se fatora por $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$. Tome $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ o coanel de Sweedler associado ao morfismo i e também $\mathcal{D}' = A \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} A$ o coanel associado à inclusão $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \hookrightarrow A$. Note que, temos uma aplicação bem definida $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, dada por $T(a' \otimes_B a) = a' \otimes_{A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}} a$, mais ainda, T é um morfismo de A-coanéis. Assim é possível "estender" a aplicação canônica de $\mathcal{C}$, isto é, consideramos a composição dos morfismos de A-coanéis can e T:

$$\widehat{\mathsf{can}} = \mathsf{can} \circ T : \mathcal{D} \to \mathcal{C},$$

definida por $\widehat{\mathsf{can}}(a' \otimes_B a) = a'xa$ para todo $a' \otimes_B a \in A \otimes_B A$. Nessas condições é possível definir um funtor entre as categorias $\mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$. Com efeito, seja $\Gamma : \mathcal{M}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ o funtor definido nos objetos $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ por

$$\Gamma(V, \rho_V) = (V, \widehat{\rho_V}),$$

com $\widehat{\rho_V} = (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) \circ \rho_V$ e nos morfismos de forma trivial. Vejamos que Γ é bem definido, em outros termos, que $\widehat{\rho_V}$ define uma estrutura de $\mathcal{C}$-comódulo à direita em V.

Para a coassociatividade, considere o diagrama de A-módulos à direita

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "\rho_V"] \arrow[dr, equal] \arrow[ddd, "\rho_V"'] \arrow[dddr, phantom, "\textcircled{4}"] & & & V \otimes_A \mathcal{D} \arrow[dl, "I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}"'] \arrow[ddd, "\rho_V \otimes_A I_{\mathcal{D}}"] \\
& V \arrow[r, "\widehat{\rho_V}"] \arrow[d, "\widehat{\rho_V}"'] \arrow[ur, phantom, "\textcircled{1}"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{5}"] & V \otimes_A \mathcal{C} \arrow[d, "\widehat{\rho_V} \otimes_A I_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{2}"] & \\
& V \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "I_V \otimes_A \Delta_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{3}"] & V \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} & \\
V \otimes_A \mathcal{D} \arrow[ur, "I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}"'] \arrow[rrr, "I_V \otimes_A \Delta_{\mathcal{D}}"'] & & & V \otimes_A \mathcal{D} \otimes_A \mathcal{D} \arrow[ul, "I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}} \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}"']
\end{tikzcd}$$

Por hipótese $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$, logo o quadrado externo comuta. Para concluir a coassociatividade de $(V, \widehat{\rho_V}) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$, isto é, a comutatividade de (5), é necessário que os demais diagramas também comutem. A comutatividade de (1) e (4) segue diretamente da definição de $\widehat{\rho_V}$. Em (2), temos

$$\begin{aligned}
(\widehat{\rho_V} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) &= (((I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) \circ \rho_V) \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) \\
&= (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ (\rho_V \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) \\
&= (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}} \otimes_A I_{\mathcal{C}}) \circ (\rho_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) \\
&= (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}} \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) \circ (\rho_V \otimes_A I_{\mathcal{D}})
\end{aligned}$$

e (3) é consequência de $\widehat{\mathsf{can}}$ ser morfismo de coanéis.

Agora para a propriedade da counidade de $\widehat{\rho_V}$ considere o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, equal] \arrow[ddd, "\rho_V"'] & & & \\
& V \arrow[d, "\widehat{\rho_V}"'] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[from=2-2, to=4-1, phantom, "8"] & & \\
& V \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "I_V \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}"'] \arrow[from=3-2, to=2-3, phantom, "6"] & V \otimes_A A \arrow[dr, equal] \arrow[from=3-3, to=4-2, phantom, "7"] & \\
V \otimes_A \mathcal{D} \arrow[ur, "I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}"'] \arrow[rrr, "I_V \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{D}}"'] & & & V \otimes_A A
\end{tikzcd}
$$

Por hipótese o triângulo externo é comutativo, logo para 6 também ser, basta verificar a comutatividade de 7 e 8. Novamente, 8 é apenas a definição de $\widehat{\rho_V}$. Agora em 7 temos,

$$(I_V \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ (I_V \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) = I_V \otimes_A (\varepsilon_{\mathcal{C}} \circ \widehat{\mathsf{can}}) = I_V \otimes_A \varepsilon_{\mathcal{D}},$$

em que a última igualdade segue de $\widehat{\mathsf{can}}$ ser morfismo de A-coanéis.

Observação 3.1.4. *Perceba que o funtor de comparação $F = - \otimes_B A : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ se fatora por Γ. Com efeito, vejamos que*

$$F = \Gamma \circ K.$$

Primeiramente, observemos que nessa situação existem dois A-coanéis distintos envolvidos: $(\mathcal{C}, x)$ e $(\mathcal{D}, 1_A \otimes_B 1_A)$. Denote as estruturas de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ comódulo em A, induzidas pelos grouplikes x e $1_A \otimes_B 1_A$, respectivamente por $(A, \rho_A) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e $(A, \sigma_A) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$. Dado $(M, \mu_M) \in \mathcal{M}_B$, temos

$$F(M) = (M \otimes_B A, I_M \otimes_B \rho_A) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}},$$

por outro lado

$$\Gamma(K(M)) = (M \otimes_B A, I_M \widehat{\otimes_B \sigma_A}) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}},$$

em que $I_M \widehat{\otimes_B \sigma_A} = (I_{M \otimes_B A} \otimes_A \widehat{\mathsf{can}}) \circ (I_M \otimes_B \sigma_A)$. Agora, as duas estruturas de $\mathcal{C}$-

comódulo em $M \otimes_B A$ coincidem, pois dado $m \otimes_B a \in M \otimes_B A$, temos

$$\begin{aligned}(\widehat{I_M \otimes_B \sigma_A})(m \otimes_B a) &= (I_{M\otimes_B A} \otimes_A \widehat{\mathsf{can}})((I_M \otimes_B \sigma_A)(m \otimes_B a)) \\ &= (I_{M\otimes_B A} \otimes_A \widehat{\mathsf{can}})(m \otimes_B \sigma_A(a)) \\ &= (I_{M\otimes_B A} \otimes_A \widehat{\mathsf{can}})(m \otimes_B 1_A \otimes_B a) \\ &= m \otimes_B \widehat{\mathsf{can}}(1_A \otimes_B a) \\ &= m \otimes_B xa \\ &= (I_M \otimes_B \rho_A)(m \otimes_B a).\end{aligned}$$

Proposição 3.1.5. *Sejam $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike e $B = A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$. Se $(\mathcal{C}, x)$ é coanel de Galois, então $\Gamma : \mathcal{M}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ é um isomorfismo de categorias. Em especial, o funtor R (respectivamente K) é fiel e pleno se, e somente se, o funtor G (respectivamente F) o for.*

Demonstração. Por hipótese $(\mathcal{C}, x)$ é A-coanel de Galois, logo $\mathsf{can} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é isomorfismo. Agora como o anel B coincide com $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$, temos que o funtor $\Gamma : \mathcal{M}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ é definido nos objetos $(V, \sigma_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ simplesmente por

$$\Gamma(V, \sigma_V) = (V, (I_V \otimes_A \mathsf{can}) \circ \sigma_V).$$

De forma análoga podemos definir um funtor inverso $\Theta : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ por

$$\Theta(V, \rho_V) = (V, (I_V \otimes_A \mathsf{can}^{-1}) \circ \rho_V),$$

para todo $(V, \rho_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$. É fácil ver que Θ é bem definido e satisfaz

$$\Gamma \circ \Theta = I_{\mathcal{M}^{\mathcal{C}}} \ \text{ e } \ \Theta \circ \Gamma = I_{\mathcal{M}^{\mathcal{D}}},$$

portanto Γ é um isomorfismo de categorias. Também, nessas condições temos que K é fiel e pleno se, e somente se, F o é, pois $\Gamma \circ K = F$ como vimos na Observação 3.1.4. Por fim, note que se Γ é um isomorfismo de categorias, então preserva coinvariantes. De fato, dado $(V, \sigma_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ e $v \in V^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$ temos que

$$(I_V \otimes_A \mathsf{can})(\sigma_V(v)) = (I_V \otimes_A \mathsf{can})(v \otimes_A 1_A \otimes_B 1_A) = v \otimes_A x,$$

então $v \in V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ e como as categorias $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ são isomorfas, segue que $V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} = V^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$. Por fim, basta observar que a counidade das adjunções (F, G) e (K, R) coincidem, isto é, para todo $(V, \sigma_V) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ temos

$$\varepsilon_V = \zeta_V : V^{\mathrm{co}\mathcal{D}} \otimes_B A \to V,$$

deste modo ε_V é bijetor se, e somente se, ζ_V o for, ou ainda, pela Proposição B.9 temos que R é fiel e pleno se, e somente se, G também é. □

3.2 Teoria de Morita para coanéis

Ao longo dos próximos resultados desenvolvemos as ferramentas necessárias para construir um contexto de Morita entre o anel dos coinvariantes $B = A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ de um A-coanel $(\mathcal{C}, x)$ e o seu dual à esquerda ${}^*\mathcal{C}$. A partir desses resultados e dos tópicos abordados anteriormente, apresentamos um teorema de equivalências para a estrutura de Galois em um A-coanel $\mathcal{C}$.

De início, observamos que a estrutura de Galois em um coanel $(\mathcal{C}, x)$ pode ser descrita em termos da aplicação dual de can, isto é, ${}^*\mathsf{can} : {}^*\mathcal{C} \to {}^*\mathcal{D}$.

Proposição 3.2.1. *Se $(\mathcal{C}, x)$ é um A-coanel de Galois, então ${}^*\mathsf{can}$ é um isomorfismo de anéis. A recíproca é válida se $\mathcal{C}$ e A são módulos à esquerda projetivos e finitamente gerados sobre A e B, respectivamente.*

Demonstração. Se $(\mathcal{C}, x)$ é coanel de Galois, então can é um isomorfismo de A-coanéis. Assim, como funtores preservam isomorfismo, temos que ${}^*\mathsf{can} = {}_A\mathrm{Hom}(\mathsf{can}, A)$ também é isomorfismo (ver (2.15)) .

Reciprocamente, suponha $\mathcal{C}$ um A-módulo à esquerda projetivo e finitamente gerado, A um B-módulo à esquerda projetivo e finitamente gerado e ${}^*\mathsf{can}$ um isomorfismo. Em particular temos que $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ é projetivo e finitamente gerado à esquerda sobre A. De fato, seja $\{(a_i, \xi_i) \mid a_i \in A, \xi_i : A \to B, 1 \leq i \leq n\}$ uma base dual para A como B-módulo à esquerda. Afirmamos que o conjunto formado pelos elementos $1_A \otimes_B a_i$ e pelos morfismos

$$\gamma_i : A \otimes_B A \to A,$$

dados por $\gamma_i(a' \otimes_B a) = a'\xi_i(a)$, é uma base dual finita para $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ como A-módulo à esquerda. É evidente que os morfismos γ_i são bem definidos e A-lineares à esquerda, uma vez que

$$\gamma_i = m_A \circ (I_A \otimes_B i) \circ (I_A \otimes_B \xi_i).$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
a' \otimes_B a &= a' \otimes_B \sum_{i=1}^{n} \xi_i(a) a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a' \xi_i(a) \otimes_B a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a' \xi_i(a)(1_A \otimes_B a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(a' \otimes_B a)(1_A \otimes_B a_i),
\end{aligned}
$$

como queríamos. Agora pelo Lema 1.2.16, temos isomorfismos de A-módulos à esquerda

$$\mathsf{ev}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to ({}^*\mathcal{C})^*$$

e

$$\mathsf{ev}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to ({}^*\mathcal{D})^*.$$

Assim, temos um diagrama comutativo de A-módulos à esquerda

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\mathsf{can}"] \arrow[d, "\mathsf{ev}_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\mathsf{ev}_{\mathcal{C}}"] \\
({}^*\mathcal{D})^* \arrow[r, "({}^*\mathsf{can})^*"'] & ({}^*\mathcal{C})^*
\end{tikzcd}
$$

tal que, se ${}^*\mathsf{can}$ é isomorfismo então $({}^*\mathsf{can})^*$ também o é, o que garante can isomorfismo. $\square$

Os lemas subsequentes descrevem a construção de um contexto de Morita entre os anéis $B = A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ e ${}^*\mathcal{C}$. Primeiramente definimos os bimódulos desse contexto.

Lema 3.2.2. *O anel A é um $(B, {}^*\mathcal{C})$-bimódulo com ações*

$$b \triangleright a = ba \quad e \quad a \triangleleft f = f(xa),$$

para todos $a \in A$, $b \in B$ e $f \in {}^*\mathcal{C}$.

Demonstração. A estrutura de B-módulo à esquerda em A é meramente a multiplicação do anel, bem como as ações claramente comutam. Por completude vejamos que a ação à direita é associativa e unital. Dados $a \in A$ e $f, g \in {}^*\mathcal{C}$ temos

$$\begin{aligned}
(a \triangleleft f) \triangleleft g &= f(xa) \triangleleft g \\
&= g(xf(xa)) \\
&= g((xa)_{(1)} f((xa)_{(2)})) \\
&= (f \bullet g)(xa) \\
&= a \triangleleft (f \bullet g)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a \triangleleft \varepsilon_{\mathcal{C}} &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(xa) \\
&= \varepsilon_{\mathcal{C}}(x)a \\
&= 1_A a \\
&= a.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.3. *O subgrupo abeliano* $Q = \{q \in {}^*\mathcal{C} \mid c_{(1)} q(c_{(2)}) = q(c)x, \ \forall \ c \in \mathcal{C}\}$ *de* ${}^*\mathcal{C}$ *é um* $(\mathcal{C}^*, B)$*-bimódulo com as ações*

$$(f \blacktriangleright q)(c) = (f \bullet q)(c)$$

e

$$(q \blacktriangleleft b)(c) = q(c)b,$$

para todos $f \in {}^*\mathcal{C}$*,* $b \in B$ *e* $c \in \mathcal{C}$*.*

Demonstração. Primeiramente, vejamos que as a ações são bem definidas. Sejam $f \in {}^*\mathcal{C}$, $q \in Q$, $b \in B$ e $c \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
c_{(1)}(f \blacktriangleright q)(c_{(2)}) &= c_{(1)}(f \bullet q)(c_{(2)}) \\
&= c_{(1)} q(c_{(2)} f(c_{(3)})) \\
&\overset{(1)}{=} (c_{(1)} f(c_{(2)}))_{(1)} q((c_{(1)} f(c_{(2)}))_{(2)}) \\
&= q(c_{(1)} f(c_{(2)}))x \\
&= (f \bullet q)(c)x \\
&= (f \blacktriangleright q)(c)x,
\end{aligned}$$

logo $f \blacktriangleright q \in Q$. Em (1) usamos o fato que $\Delta(c_{(1)} f(c_{(2)})) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)} f(c_{(3)})$. Agora para a ação à direita temos,

$$\begin{aligned}
c_{(1)}(q \blacktriangleleft b)(c_{(2)}) &= c_{(1)}(q(c_{(2)})b) \\
&= (c_{(1)}q(c_{(2)}))b \\
&= q(c)xb \\
&\overset{(2)}{=} q(c)bx \\
&= (q \blacktriangleleft b)(c)x,
\end{aligned}$$

logo $q \blacktriangleleft b \in Q$, como queríamos. A igualdade (2) é justificada por b pertencer ao anel dos coinvariantes $B = A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$. Por fim, a ação à esquerda provém da multiplicação do anel ${}^*\mathcal{C}$, assim é associativa e unital. Já para a ação à direita, é fácil ver que satisfaz as mesmas propriedades, além de comutarem entre si. □

Observação 3.2.4. *Por definição os elementos do bimódulo Q são morfismos A-lineares à esquerda $q : \mathcal{C} \to A$, satisfazendo $c_{(1)}q(c_{(2)}) = q(c)x$, para todo $c \in \mathcal{C}$. Essa propriedade nos permite concluir que a imagem $\mathrm{Im}(q)$ de um morfismo $q \in Q$ possui interseção com o anel dos coinvariantes $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$. Mais especificamente,*

$$q(xa) \in A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$$

para todo $a \in A$. De fato, por um lado temos

$$\Delta_{\mathcal{C}}(xa) = x \otimes_A xa.$$

Portanto

$$xq(xa) = (xa)_{(1)}q((xa)_{(2)}) = q(xa)x.$$

A proposição a seguir (veja [10, Proposition 4.6.10]) nos permite descrever o bimódulo Q do Lema 3.2.3 apenas em termos de elementos de ${}^*\mathcal{C}$, esse resultado nos será útil futuramente.

Proposição 3.2.5. *Considere os conjuntos*

$$Q = \{q \in {}^*\mathcal{C} \mid c_{(1)}q(c_{(2)}) = q(c)x, \ \forall\ c \in \mathcal{C}\}$$

e

$$Q' = \{q \in {}^*\mathcal{C} \mid q \bullet f = q \bullet \chi(f(x)), \ \forall\ f \in {}^*\mathcal{C}\},$$

em que $\chi : A \to {}^*\mathcal{C}$ é o morfismo de anéis $\chi(a)(c) = \varepsilon_{\mathcal{C}}(c)a$ definido em (2.16). Temos $Q \subset Q'$ e se $\mathcal{C}$ é projetivo e finitamente gerado como A-módulo à esquerda, então $Q = Q'$.

Demonstração. Seja $q \in Q$, logo $c_{(1)}q(c_{(2)}) = q(c)x$, para todo $c \in \mathcal{C}$. Assim temos,

$$\begin{aligned}
(q \bullet f)(c) &= f(c_{(1)}q(c_{(2)})) \\
&= f(q(c)x) \\
&= q(c)f(x) \\
&= (q \bullet \chi(f(x)))(c),
\end{aligned}$$

em que a última igualdade segue da Observação 2.2.7, logo $q \in Q'$. Agora suponha que $\mathcal{C}$ é projetivo e finitamente gerado como A-módulo à esquerda, e tome $\{(c_i, \xi_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ uma base dual. Se $q \in Q'$, então temos

$$\begin{aligned}
c_{(1)}q(c_{(2)}) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(c_{(1)}q(c_{(2)}))c_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (q \bullet \xi_i)(c)c_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (q \bullet \chi(\xi_i(x)))(c)c_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} q(c)\xi_i(x)c_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(q(c)x)c_i \\
&= q(c)x,
\end{aligned}$$

o que implica $q \in Q$ e portanto $Q = Q'$. □

Resta definir as aplicações que constituem o contexto de Morita:

Lema 3.2.6. *A aplicação $\tau : A \otimes_{^*\mathcal{C}} Q \to B$, dada por*

$$\tau(a \otimes_{^*\mathcal{C}} q) = q(xa)$$

é um morfismo bem definido de B-bimódulos.

Demonstração. Primeiramente, vejamos que τ é um morfismo de grupos abelianos bem definido. Considere a aplicação $\tau' : A \times Q \to B$, dada por $\tau'(a, q) = q(xa)$, para todos $(a, q) \in A \times Q$. É fácil ver que essa aplicação é linear em cada entrada, resta ver que é

${}^*\mathcal{C}$-balanceada. Dados $(a, q) \in A \times Q$ e $f \in {}^*\mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\tau'(a \triangleleft f, q) &= q(x(a \triangleleft f)) \\
&= q(xf(xa)) \\
&= (f \bullet q)(xa) \\
&= \tau'(a, f \blacktriangleright q).
\end{aligned}$$

Assim, pela propriedade universal do produto tensorial $A \otimes_{{}^*\mathcal{C}} Q$, a aplicação τ dada por $\tau(a \otimes_{{}^*\mathcal{C}} q) = q(xa)$ é um morfismo bem definido de grupos abelianos. Resta verificar a B-linearidade à esquerda, uma vez que τ é claramente B-linear à direita.

$$\begin{aligned}
\tau(b \triangleright a \otimes_{{}^*\mathcal{C}} q) &= q(x(b \triangleright a)) \\
&= q(x(ba)) \\
&= q((xb)a) \\
&= q((bx)a) \\
&= bq(xa) \\
&= b\tau(a \otimes_{{}^*\mathcal{C}} q).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.7. *A aplicação $\mu : Q \otimes_B A \to {}^*\mathcal{C}$, dada por*

$$\mu(q \otimes_B a) = q \bullet \chi(a)$$

é um morfismo bem definido de ${}^*\mathcal{C}$-bimódulos.

Demonstração. De forma análoga ao lema anterior mostra-se, via a propriedade universal do produto tensorial $Q \otimes_B A$ e do fato $(q \bullet \chi(ba))(c) = ((q \blacktriangleleft b) \bullet \chi(a))(c) = q(c)ba$, a boa definição do morfismo μ. Agora para a ${}^*\mathcal{C}$-linearidade de μ, observemos que a ação à esquerda de ${}^*\mathcal{C}$ em Q ($\blacktriangleright$) coincide com a multiplicação em ${}^*\mathcal{C}$, logo está resolvido. Por outro lado, para a ação à direita, temos

$$
\begin{aligned}
\mu(q \otimes_B a \triangleleft f)(c) &= \mu(q \otimes_B f(xa))(c) \\
&= (q \bullet \chi(f(xa)))(c) \\
&= \chi(f(xa))(c_{(1)} q(c_{(2)})) \\
&\overset{(*)}{=} \chi(f(xa))(q(c)x) \\
&= \varepsilon_{\mathcal{C}}(q(c)x) f(xa) \\
&= q(c) f(xa) \\
&= f(q(c)xa) \\
&\overset{(*)}{=} f(c_{(1)} q(c_{(2)}) a) \\
&= f(c_{(1)} \varepsilon_{\mathcal{C}}(q(c_{(2)})x) a) \\
&= f(c_{(1)} \chi(a)(q(c_{(2)})x)) \\
&\overset{(*)}{=} f(c_{(1)} \chi(a)(c_{(2)} q(c_{(3)}))) \\
&= f(c_{(1)} (q \bullet \chi(a))(c_{(2)})) \\
&= ((q \bullet \chi(a)) \bullet f)(c) \\
&= (\mu(q \otimes_B a) \bullet f)(c),
\end{aligned}
$$

como queríamos. As igualdades indicadas com $(*)$ sinalizam o uso da definição de q pertencer ao bimódulo Q. $\square$

Finalmente, os lemas anteriores convergem no seguinte teorema.

Teorema 3.2.8. *Sejam $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike, $B = A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ o anel dos coinvariantes, ${}^*\mathcal{C}$ o dual à esquerda de $\mathcal{C}$, A o $(B, {}^*\mathcal{C})$-bimódulo do Lema 3.2.2, $Q = \{q \in {}^*\mathcal{C} \mid c_{(1)} q(c_{(2)}) = q(c)x, \ \forall\ c \in \mathcal{C}\}$ o $({}^*\mathcal{C}, B)$-bimódulo do Lema 3.2.3 e as aplicações $\tau : A \otimes_{{}^*\mathcal{C}} Q \to B$ e $\mu : Q \otimes_B A \to {}^*\mathcal{C}$, dos Lemas 3.2.6 e 3.2.7. Então a sêxtupla $(B, {}^*\mathcal{C}, A, Q, \tau, \mu)$, define um contexto de Morita.*

Demonstração. Pelos lemas anteriores, resta verificar a comutatividade dos diagramas abaixo

$$
\begin{tikzcd}
Q \otimes_B A \otimes_{{}^*\mathcal{C}} Q \arrow[r, "I_Q \otimes_B \tau"] \arrow[d, "\mu \otimes_{{}^*\mathcal{C}} I_Q"'] & Q \otimes_B B \arrow[d, "\blacktriangleleft"] \\
{}^*\mathcal{C} \otimes_{{}^*\mathcal{C}} Q \arrow[r, "\blacktriangleright"'] & Q
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_{^*\mathcal{C}} Q \otimes_B A \arrow[r, "I_A \otimes_{^*\mathcal{C}} \mu"] \arrow[d, "\tau \otimes_B I_A"'] & A \otimes_{^*\mathcal{C}} {^*\mathcal{C}} \arrow[d, "\triangleleft"] \\
B \otimes_B A \arrow[r, "\triangleright"'] & A
\end{tikzcd}
$$

Sejam $a, a' \in A$, $q, q' \in Q$ e $c \in \mathcal{C}$. Para o primeiro diagrama temos

$$
\begin{aligned}
(I_Q(q) \blacktriangleleft \tau(a \otimes_{^*\mathcal{C}} q'))(c) &= (q \blacktriangleleft q'(xa))(c) \\
&= q(c)q'(xa) \\
&= q'(q(c)xa) \\
&= q'(c_{(1)}q(c_{(2)})a) \\
&= q'(c_{(1)}\varepsilon_{\mathcal{C}}(q(c_{(2)})x)a) \\
&= q'(c_{(1)}\chi(a)(c_{(2)}q(c_{(3)}))) \\
&= q'(c_{(1)}(q \bullet \chi(a))(c_{(2)})) \\
&= (q \bullet \chi(a) \bullet q')(c) \\
&= (\mu(q \otimes_B a) \bullet q')(c) \\
&= (\mu(q \otimes_B a) \blacktriangleright I_Q(q'))(c)
\end{aligned}
$$

e para o segundo,

$$
\begin{aligned}
I_A(a) \triangleleft \mu(q \otimes_B a') &= a \triangleleft (q \bullet \chi(a')) \\
&= (q \bullet \chi(a'))(xa) \\
&= \chi(a')((xa)_{(1)}q((xa)_{(2)})) \\
&= \chi(a')(xq(xa)) \\
&= \varepsilon_{\mathcal{C}}(xq(xa))a' \\
&= q(xa)a' \\
&= q(xa) \triangleright a' \\
&= \tau(a \otimes_{^*\mathcal{C}} q) \triangleright I_A(a').
\end{aligned}
$$

□

Esse contexto será designado como o *contexto canônico* associado ao coanel $(\mathcal{C}, x)$. Um primeiro e importante exemplo do contexto apresentado acima é referente ao A-coanel de Sweedler associado ao morfismo de anéis $i : B \to A$:

Proposição 3.2.9. *Seja $i : B \to A$ um morfismo de anéis, e assuma que i é puro como morfismo de B-módulos à esquerda. Então o contexto de Morita associado ao coanel $(\mathcal{D}, 1_A \otimes_B 1_A)$ é o contexto canônico associado a A como B-módulo à esquerda (veja o Exemplo 1.5.3).*

Demonstração. Prosseguiremos mostrando uma equivalência entre o contexto de Morita canônico associado ao A-coanel $(\mathcal{D}, 1_A \otimes_B 1_A)$, isto é $(B, {}^*\mathcal{D}, A, Q, \tau, \mu)$, e o contexto associado a A como B-módulo à esquerda: $(B, {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}, A, {}_B\operatorname{Hom}(A,B), \varphi, \psi)$. Em outros termos, veremos que os anéis, bimódulos e aplicações dos contextos coincidem, a menos de isomorfismo.

Por hipótese $i : B \to A$ é puro como morfismo de B-módulos à esquerda, e claramente se fatora pelo anel de coinvariantes $A^{\mathrm{co}\mathcal{D}} = \{a \in A \mid 1_A \otimes_B a = a \otimes_B 1_A\}$, visto que A é B-bimódulo com ações induzidas por i. Nessas condições a Proposição 2.4.7 garante que o funtor K é fiel e pleno, logo pela Proposição 3.1.2 (i) temos um isomorfismo de anéis $B \cong A^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$.

Relembramos que as aplicações α e β, definidas no Lema 2.2.5

$$\alpha : {}^*\mathcal{D} \to {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}, \quad \beta : {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}} \to {}^*\mathcal{D}$$

e descritas por

$$\alpha(f)(a) = f(1_A \otimes_B a), \quad \beta(s)(a' \otimes_B a) = a's(a),$$

para todos $f \in {}^*\mathcal{D}$, $a \in A$, $s \in \operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}$ e $a' \otimes_B a \in A \otimes_B A$, descrevem um isomorfismo de anéis

$${}^*\mathcal{D} = {}_A\operatorname{Hom}(A \otimes_B A, A) \cong {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}.$$

Vejamos que α e β induzem um isomorfismo $Q \cong {}_B\operatorname{Hom}(A,B)$. Por definição,

$$Q = \{q \in {}^*\mathcal{D} \mid d_{(1)}q(d_{(2)}) = q(d)(1_A \otimes_B 1_A),\ \forall\, d \in \mathcal{D}\},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} Q &= \{q \in {}^*\mathcal{D} \mid (a' \otimes_B 1_A)q(1_A \otimes_B a) = q(a' \otimes_B a)(1_A \otimes_B 1_A),\ \forall\, a' \otimes_B a \in \mathcal{D}\} \\ &= \{q \in {}^*\mathcal{D} \mid a' \otimes_B q(1_A \otimes_B a) = q(a' \otimes_B a) \otimes_B 1_A,\ \forall\, a' \otimes_B a \in \mathcal{D}\}. \end{aligned}$$

Assim, tomando $1_A \otimes_B a \in \mathcal{D}$, temos

$$1_A \otimes_B q(1_A \otimes_B a) = q(1_A \otimes_B a) \otimes_B 1_A$$

ou melhor,

$$1_A \otimes_B \alpha(q)(a) = \alpha(q)(a) \otimes_B 1_A,$$

logo $\alpha(q)(a) \in B$, para todo $a \in A$ e portanto $\alpha(q) \in {}_B\operatorname{Hom}(A,B)$. Por outro lado, supondo $f \in {}_B\operatorname{Hom}(A, B)$ e $a', a \in A$, temos

$$\begin{aligned} & a' \triangleright (1_A \otimes_B f(a)) = a' \triangleright (f(a) \otimes_B 1_A) \\ \Leftrightarrow\ & a' \otimes_B f(a) = a' f(a) \otimes_B 1_A \\ \Leftrightarrow\ & a' \otimes_B \beta(f)(1_A \otimes_B a) = \beta(f)(a' \otimes_B a) \otimes_B 1_A \\ \Leftrightarrow\ & (a' \otimes_B 1_A) \triangleleft \beta(f)(1_A \otimes_B a) = \beta(f)(a' \otimes_B a) \triangleright (1_A \otimes_B 1_A), \end{aligned}$$

portanto $\beta(f) \in Q$, o que conclui o isomorfismo.

Por fim, vejamos que as aplicações $\tau : A \otimes_{{}^*\mathcal{D}} Q \to B$ e $\mu : Q \otimes_B A \to {}^*\mathcal{D}$ dadas por

$$\tau(a \otimes_{{}^*\mathcal{D}} q) = q(1_A \otimes_B a) \ \text{ e } \ \mu(q \otimes_B a)(a' \otimes_B a'') \overset{(*)}{=} a' q(1_A \otimes_B a'')a,$$

para todos $a \in A$ e $q \in Q$ ($(*)$ veja a Observação 2.2.7), correspondem, respectivamente, às seguintes aplicações do Exemplo 1.5.3:

$$\varphi : A \otimes_S {}_B\operatorname{Hom}(A, B) \to B \ \text{ e } \ \psi : {}_B\operatorname{Hom}(A, B) \otimes_B A \to S$$

com $S = {}_B\operatorname{End}(A)^{\text{op}}$, descritas por

$$\varphi(a \otimes_S f) = f(a) \ \text{ e } \ \psi(f \otimes_B a)(a') = f(a') \triangleright a$$

para todos $a, a' \in A$ e $f \in {}_B\operatorname{Hom}(A, B)$. Mais precisamente, iremos verificar as seguintes igualdades entre operadores:

$$\tau = \varphi \circ (I_A \otimes_S \alpha)$$

e

$$\mu = \beta \circ \psi \circ (\alpha \otimes_B I_A).$$

Dados $a, a', a'' \in A$ e $q \in Q$, temos

$$\begin{aligned} (\varphi \circ (I_A \otimes_S \alpha))(a \otimes_{{}^*\mathcal{D}} q) &= \varphi(a \otimes_S \alpha(q)) \\ &= \alpha(q)(a) \\ &= q(1_A \otimes_B a) \\ &= \tau(a \otimes_{{}^*\mathcal{D}} q) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\beta\circ\psi\circ(\alpha\otimes_B I_A))(q\otimes_B a)(a'\otimes_B a'') &= \beta(\psi\circ(\alpha\otimes_B I_A)(q\otimes_B a))(a'\otimes_B a'')\\
&= a'\psi((\alpha\otimes_B I_A)(q\otimes_B a))(a'')\\
&= a'\psi(\alpha(q)\otimes_B a)(a'')\\
&= a'\alpha(q)(a'')a\\
&= a'q(1_A\otimes_B a'')a\\
&= \mu(q\otimes_B a)(a'\otimes_B a''),
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

Observação 3.2.10. *Pela Proposição 3.2.1, se $(\mathcal{C}, x)$ é um A-coanel de Galois então ${}^*\mathsf{can} : {}^*\mathcal{C} \to {}^*\mathcal{D}$ é isomorfismo de anéis. Em particular, também temos um isomorfismo de anéis $A^{\mathrm{co}\mathcal{C}} \cong A^{\mathrm{co}\mathcal{D}}$ e portanto o contexto de Morita canônico associado a $\mathcal{C}$ é isomorfo ao contexto canônico associado a $\mathcal{D}$, o qual descrevemos na proposição acima.*

Segundo Paques [20], a teoria clássica desenvolvida por Évariste Galois pode ser sintetizada em dois teoremas:

- um teorema de caracterização, que lista uma série de condições equivalentes que caracterizam a noção de extensão de Galois; e
- um teorema de correspondência, que expõe uma bijeção entre os subcorpos de uma extensão de corpos E/F e o conjunto de todos os subgrupos do grupo $\mathrm{Gal}(E/F)$.

O próximo teorema, resultado principal desse capítulo, é uma generalização do teorema de caracterização para extensões de Galois, agora no âmbito da teoria de coanéis. Como veremos, nele são descritas caracterizações equivalentes para a estrutura de Galois em um coanel. Neste trabalho estudaremos com detalhes algumas das interpretações mais importantes deste resultado em contextos específicos, incluindo o de extensões de Hopf-Galois fielmente k-planas; essas interpretações unificam resultados aparentemente distintos em diferentes teorias de Galois e são o tema do próximo capítulo. Uma demonstração deste teorema encontra-se em [8, Theorem 4.7].

Teorema 3.2.11. *Seja $(\mathcal{C}, x)$ um A-coanel com grouplike fixado e assuma que $\mathcal{C}$ é um A-progerador. Sejam também B' um subanel de $B = A^{\mathrm{co}\mathcal{C}}$ e*

$$\mathsf{can}' : \mathcal{D}' = A\otimes_{B'} A \to \mathcal{C}$$

o morfismo de coanéis dado por

$$\mathsf{can}'(a'\otimes_{B'} a) = a'xa.$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1) *(a)* $\mathsf{can}' : \mathcal{D}' = A \otimes_{B'} A \to \mathcal{C}$ *é um isomorfismo de A-coanéis;*

(b) *A é fielmente plano como B'-módulo à esquerda.*

2) *(a)* ${}^*\mathsf{can}' : {}^*\mathcal{C} \to {}^*\mathcal{D}'$ *é um isomorfismo de anéis;*

(b) *A é um B'-progerador à esquerda.*

3) *(a)* $B = B'$*;*

(b) *o contexto de Morita $(B, {}^*\mathcal{C}, A, Q, \tau, \mu)$ é estrito.*

4) *(a)* $B = B'$*;*

(b) *o par de funtores $(F = - \otimes_B A, G = (-)^{\mathrm{co}\mathcal{C}})$ é uma equivalência entre a categoria de B-módulos à direita e a categoria de $\mathcal{C}$-comódulos à direita.*

Fazemos alguns apontamentos acerca da interpretação desse resultado.

Observação 3.2.12. *Os itens 1) e 2) possuem, em geral, verificação mais prática e conferem caracterizações relevantes para o coanel $\mathcal{C}$ e seu dual à esquerda ${}^*\mathcal{C}$. Já os itens 3) e 4) fornecem informações mais profundas acerca dos objetos envolvidos no estudo do coanel $\mathcal{C}$, mais claramente, o contexto de Morita estrito presente em 3) implica na equivalência entre as categorias de módulos sobre B e ${}^*\mathcal{C}$, dada (para módulos à direita) pelo funtor $U = - \otimes_B A$, induzido pelo ${}^*\mathcal{C}$-progerador A. Já o item 4) garante uma equivalência entre as categorias $\mathcal{M}_B$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$, dada pelo par adjunto (F, G). Recordamos o funtor $T : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_{{}^*\mathcal{C}}$ descrito na Observação 2.2.8 e o fato que se o coanel $\mathcal{C}$ é projetivo e finitamente gerado como A-módulo à esquerda, então T é um* ***isomorfismo de categorias****. Nas condições do Teorema 3.2.11, supomos $\mathcal{C}$ um A-progerador à esquerda, em particular projetivo e finitamente gerado sobre A, portanto temos um diagrama comutativo de funtores:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_B \arrow[rr, shift left, "F"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] \arrow[dr, "U = - \otimes_B A"'] & & \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \arrow[ll, shift left, "G"] \arrow[dl, shift right, "T"'] \\
& \mathcal{M}_{{}^*\mathcal{C}} \arrow[ur, shift right, "T^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Com efeito, U é definido em $M \in \mathcal{M}_B$ por $U(M) = M \otimes_B A$, com a ${}^*\mathcal{C}$-ação à direita induzida por A (veja o Lema 3.2.2), isto é,

$$(m \otimes_B a) \cdot f = m \otimes_B f(xa),$$

para todos $m \otimes_B a \in M \otimes_B A$ e $f \in {}^*\mathcal{C}$. Por outro lado, $(T \circ F)(M) = M \otimes_B A$, com

${}^*\mathcal{C}$-ação à direita dada por

$$
\begin{aligned}
(m \otimes_B a) \cdot f &= (m \otimes_B a)_{[0]} f((m \otimes_B a)_{[1]}) \\
&= (m \otimes_B 1_A) f(xa) \\
&= m \otimes_B f(xa)
\end{aligned}
$$

e as ações coincidem.

Capítulo 4

EXTENSÕES DE HOPF-GALOIS VIA COANÉIS

Nesse último capítulo desenvolvemos a teoria de Galois apresentada no Capítulo 3, para o caso do coanel associado a uma extensão de Hopf-Galois, ou ainda, exploramos um caso mais abrangente: as extensões de Galois de coálgebras. Por fim, fazemos um paralelo entre a teoria de Galois para coanéis desenvolvida até aqui com duas outras teorias de extensão: em anéis não comutativos e no caso de Hopf-Galois. As principais referências para esse capítulo são [5], [6], [7], [8], [10] e [20].

4.1 Coanel associado a uma estrutura entrelaçada

Nesta seção exploramos um caso particular de coanel, proveniente de uma *estrutura entrelaçada* entre uma álgebra e uma coálgebra, cuja definição encontra-se abaixo.

Definição 4.1.1. *Sejam k um anel comutativo, $A = (A, m, u)$ uma k-álgebra e $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ uma k-coálgebra. Uma* ***estrutura entrelaçada*** *consiste numa tripla (A, C, ψ), com $\psi : C \otimes A \to A \otimes C$ um morfismo de k-módulos satisfazendo o seguinte diagrama* *comutativo*

$$
\begin{tikzcd}
 & C \otimes A \otimes A \arrow[ddl, "\psi \otimes I_A"'] \arrow[drr, "I_C \otimes m"] & & & & C \otimes C \otimes A \arrow[ddr, "I_C \otimes \psi"] & \\
 & & & C \otimes A \arrow[urr, "\Delta \otimes I_A"] \arrow[dr, "\varepsilon \otimes I_A"] \arrow[dd, "\psi"] & & & \\
A \otimes C \otimes A \arrow[ddr, "I_A \otimes \psi"'] & & C \arrow[ur, "I_C \otimes u"] \arrow[dr, "u \otimes I_C"'] & & A & & C \otimes A \otimes C \arrow[ddl, "\psi \otimes I_C"] \\
 & & & A \otimes C \arrow[ur, "I_A \otimes \varepsilon"'] \arrow[drr, "I_A \otimes \Delta"'] & & & \\
 & A \otimes A \otimes C \arrow[urr, "m \otimes I_C"'] & & & & A \otimes C \otimes C &
\end{tikzcd}
$$

isto é, são válidas as igualdades de operadores

$$\psi \circ (I_C \otimes m) = (m \otimes I_C) \circ (I_A \otimes \psi) \circ (\psi \otimes I_A), \tag{4.1}$$

$$\psi \circ (I_C \otimes u) = u \otimes I_C, \tag{4.2}$$

$$(\psi \otimes I_C) \circ (I_C \otimes \psi) \circ (\Delta \otimes I_A) = (I_A \otimes \Delta) \circ \psi, \tag{4.3}$$

$$\varepsilon \otimes I_A = (I_A \otimes \varepsilon) \circ \psi. \tag{4.4}$$

Adotamos a seguinte notação (*alpha notation*) para elementos no contradomínio de ψ: dado $c \otimes a \in C \otimes A$ escrevemos

$$\psi(c \otimes a) = a_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)},$$

com o somatório subentendido e $a_{(\alpha)}$, $c^{(\alpha)}$ elementos em A e C, respectivamente. Observe que os índices são letras gregas, adornadas de parênteses e empregadas alfabeticamente.

Com essa notação as equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), avaliadas em elementos $a, b \in A$ e $c \in C$, se reescrevem como

$$(ab)_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)} = a_{(\alpha)} b_{(\beta)} \otimes c^{(\alpha\beta)}, \tag{4.5}$$

$$(1_A)_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)} = 1_A \otimes c, \tag{4.6}$$

$$a_{(\alpha)} \otimes {c^{(\alpha)}}_{(1)} \otimes {c^{(\alpha)}}_{(2)} = a_{(\alpha\beta)} \otimes {c_{(1)}}^{(\beta)} \otimes {c_{(2)}}^{(\alpha)}, \tag{4.7}$$

$$\varepsilon(c^{(\alpha)}) a_{(\alpha)} = \varepsilon(c) a. \tag{4.8}$$

Seja (A, C, ψ) uma estrutura entrelaçada e considere o k-módulo $\mathcal{C} = A \otimes C$.

Podemos munir $\mathcal{C}$ com uma estrutura de A-bimódulo, dada por

$$b' \triangleright (a \otimes c) \triangleleft b = b'ab_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)},$$

para todos $a \otimes c \in \mathcal{C}$ e $b, b' \in A$. Com efeito, a estrutura de A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$ é trivial, agora para a estrutura de A-módulo à direita, dados $b, b' \in A$, temos

$$\begin{aligned} ((a \otimes c) \triangleleft b) \triangleleft b' &= (ab_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)}) \triangleleft b' \\ &= ab_{(\alpha)}b'_{(\beta)} \otimes c^{(\alpha\beta)} \\ &\overset{(4.5)}{=} a(bb')_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)} \\ &= (a \otimes c) \triangleleft (bb') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (a \otimes c) \triangleleft 1_A &= a(1_A)_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)} \\ &\overset{(4.6)}{=} a1_A \otimes c \\ &= a \otimes c. \end{aligned}$$

Também observamos que as ações claramente comutam. Agora pelo isomorfismo de k-módulos $A \otimes C \otimes_A A \otimes C \cong A \otimes C \otimes C$, consideramos as aplicações k-lineares

$$\Delta_{\mathcal{C}} = I_A \otimes \Delta : A \otimes C \to A \otimes C \otimes C,$$

$$\varepsilon_{\mathcal{C}} = I_A \otimes \varepsilon : A \otimes C \to A \otimes k \cong A$$

definidas por

$$\Delta_{\mathcal{C}}(a \otimes c) = a \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{\mathcal{C}}(a \otimes c) = \varepsilon(c)a.$$

Proposição 4.1.2. *A tripla $\mathcal{C} = (A \otimes C, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ descrita acima define um A-coanel, denominado como o coanel associado à estrutura entrelaçada (A, C, ψ).*

Demonstração. Como vimos anteriormente, $\mathcal{C} = A \otimes C$ é um A-bimódulo com as ações

$$b' \triangleright (a \otimes c) \triangleleft b = b'ab_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)},$$

para todos $a \otimes c \in \mathcal{C}$ e $b, b' \in A$. Vejamos que $\Delta_{\mathcal{C}}$ e $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ são morfismos de A-bimódulos.

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{C}}(b' \triangleright (a \otimes c) \triangleleft b) &= \Delta_{\mathcal{C}}(b'ab_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)}) \\ &= b'ab_{(\alpha)} \otimes \Delta(c^{(\alpha)}) \\ &= b'ab_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)}{}_{(1)} \otimes c^{(\alpha)}{}_{(2)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
b' \triangleright \Delta_{\mathcal{C}}(a \otimes c) \triangleleft b &= b' \triangleright (a \otimes c_{(1)} \otimes_A 1_A \otimes c_{(2)}) \triangleleft b \\
&= b' \triangleright (a \otimes c_{(1)} \otimes_A (1_A \otimes c_{(2)}) \triangleleft b) \\
&= b' \triangleright (a \otimes c_{(1)} \otimes_A b_{(\alpha)} \otimes {c_{(2)}}^{(\alpha)}) \\
&\cong b' \triangleright ((a \otimes c_{(1)}) \triangleleft b_{(\alpha)} \otimes {c_{(2)}}^{(\alpha)}) \\
&= b' \triangleright (ab_{(\alpha\beta)} \otimes {c_{(1)}}^{(\beta)} \otimes {c_{(2)}}^{(\alpha)}) \\
&= b' \triangleright (a \triangleright (b_{(\alpha\beta)} \otimes {c_{(1)}}^{(\beta)} \otimes {c_{(2)}}^{(\alpha)})) \\
&= b'a \triangleright (b_{(\alpha\beta)} \otimes {c_{(1)}}^{(\beta)} \otimes {c_{(2)}}^{(\alpha)}) \\
&\overset{(4.7)}{=} b'a \triangleright (b_{(\alpha)} \otimes {c^{(\alpha)}}_{(1)} \otimes {c^{(\alpha)}}_{(2)}) \\
&= b'ab_{(\alpha)} \otimes {c^{(\alpha)}}_{(1)} \otimes {c^{(\alpha)}}_{(2)},
\end{aligned}$$

como queríamos. De forma análoga, para $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathcal{C}}(b' \triangleright (a \otimes c) \triangleleft b) &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(b'ab_{(\alpha)} \otimes c^{(\alpha)}) \\
&= b'ab_{(\alpha)} \otimes \varepsilon(c^{(\alpha)}) \\
&\cong b'a\varepsilon(c^{(\alpha)})b_{(\alpha)} \\
&\overset{(4.8)}{=} b'a\varepsilon(c)b \\
&= b' \triangleright \varepsilon_{\mathcal{C}}(a \otimes c) \triangleleft b.
\end{aligned}$$

Por fim, observamos que $\Delta_{\mathcal{C}}$ é coassociativo, visto que Δ o é, bem como $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ é counital, em virtude de ε também ser. □

A construção de um coanel associado a uma estrutura entrelaçada, como descrita acima, engloba diversos exemplos, em especial os Exemplos 2.1.6, 2.1.7 e 2.1.8 podem ser vistos como casos particulares. Indicamos brevemente a conexão entre essas construções (veja [8, Example 1.6]):

Exemplo 4.1.3. *(i) (Exemplo 2.1.6) Seja $\mathcal{C} = (\oplus_{g\in G} Av_g, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ o A-coanel associado a um grupo finito G. Considere a coálgebra $C = (kG)^* \cong \oplus_{g\in G} kv_g$ e $\{p_g \mid g \in G\}$ o conjunto de projeções canônicas nas componentes de G. É fácil ver que $A \otimes C \cong \mathcal{C}$ como k-módulos, então basta definir a aplicação k-linear $\psi : C \otimes A \to A \otimes C$ por*

$$\psi(p_g \otimes a) = g(a) \otimes v_g.$$

Mostra-se que a tripla (A, C, ψ) define uma estrutura entrelaçada, além disso, que o A-coanel associado é isomorfo a $\mathcal{C}$.

(ii) (Exemplo 2.1.7) Temos $\mathcal{C} = (\oplus_{g\in G} Av_g, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ o A-coanel associado a um grupo arbitrário G. Tome a coálgebra $C = kG = \oplus_{g\in G} kv_g$ e a aplicação $\psi : C\otimes A \to A\otimes C$

como

$$\psi(v_g \otimes a) = \sum_{h\in G} a_h \otimes v_{gh},$$

em que $a = \sum_{h\in G} a_h$.

(iii) (Exemplo 2.1.8) Para o A*-coanel* $\mathcal{C} = (A\otimes H, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ *associado a uma biálgebra* H *e uma* H*-comódulo álgebra à direita* (A, ρ_A)*, basta tomar* $C = H$ *e* $\psi : C\otimes A \to A\otimes C$ *como*

$$\psi(h \otimes a) = a_{[0]} \otimes ha_{[1]}.$$

4.2 Extensões de Galois de coálgebras

Nesta seção, apresentamos as extensões de Galois de coálgebras, que generalizam as extensões de Hopf-Galois, como também exploramos a conexão desse conceito com a teoria de coanéis de Galois.

Definição 4.2.1. *Sejam* $i : B \to A$ *um morfismo de* k*-álgebras e* C *uma* k*-coálgebra. Então* A *é dita uma* C***-extensão de Galois de*** B *se:*

(i) A *é* C*-comódulo à direita com* $\rho_A : A \to A\otimes C$*, dado por* $\rho_A(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$.

(ii) O morfismo $\mathsf{can} : A\otimes_B A \to A\otimes C$ *dado por* $\mathsf{can}(a' \otimes_B a) = a'a_{[0]} \otimes a_{[1]}$ *é bijetor.*

(iii) $B = \{a \in A \mid \rho_A(a) = a\rho_A(1_A)\}$.

Observação 4.2.2. *O conceito de extensão de Galois de coálgebras foi introduzido por T. Brzeziński e P. Hajac em [6], por um lado como uma generalização natural de extensões de Hopf-Galois e por outro como uma ferramenta no contexto da teoria de calibre para espaços homogêneos quânticos, como as esferas de Pódles quânticas.*

Um exemplo concreto para o conceito de extensão de Galois de coálgebras, diz respeito a uma construção associada a *subálgebra coideal* de uma álgebra de Hopf, como descrito em [7, Seção 34.2].

As extensões de Galois de álgebras estão em "bijeção" com coanéis de Galois, advindos de estruturas entrelaçadas, isto é

Proposição 4.2.3. *Sejam* $i : B \to A$ *um morfismo de* k*-álgebras e* C *uma* k*-coálgebra. Então* A *é* C*-extensão de Galois de* B *se, e somente se, existe uma estrutura entrelaçada* (A, C, ψ) *e* $x \in G(A\otimes C)$ *tais que* $A^{\mathrm{co}\,A\otimes C} = B$ *e* $(A\otimes C, x)$ *é coanel de Galois.*

Demonstração. Suponha que (A, C, ψ) é uma estrutura entrelaçada e que existe $x \in G(A\otimes C)$ tal que $A^{\mathrm{co}\,A\otimes C} = B$ e $(A\otimes C, x)$ é coanel de Galois. Então fixando o grouplike x, A possui uma estrutura de comódulo sobre o coanel $A\otimes C$, a dizer

$$\rho_A : A \to A\otimes_A A\otimes C \cong A\otimes C,$$

dada por $\rho_A(a) = xa$. Portanto o par (A, ρ_A) é um comódulo à direita sobre a coálgebra C, visto que equações (1.7) e (1.8) da estrutura de comódulo sobre C equivalem, por meio do isomorfismo em questão, às equações (2.13) e (2.14), respectivamente.

Para concluir que a aplicação $\mathsf{can} : A \otimes_B A \to A \otimes C$ dada por $\mathsf{can}(a' \otimes_B a) = a' a_{[0]} \otimes a_{[1]}$ é bijetora, basta notar que ela coincide com a aplicação canônica do coanel de Galois $(A \otimes C, x)$, isto é

$$\begin{aligned}\mathsf{can}(a' \otimes_B a) &= a' a_{[0]} \otimes a_{[1]} \\ &= a' \rho_A(a) \\ &= a' x a.\end{aligned}$$

Por fim, é imediato que

$$\begin{aligned}B &= A^{\mathrm{co}\, A \otimes C} \\ &= \{a \in A \mid xa = ax\} \\ &= \{a \in A \mid \rho_A(a) = a\rho_A(1_A)\}.\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que A é uma C-extensão de Galois de B. Como a aplicação canônica $\mathsf{can} : A \otimes_B A \to A \otimes C$ é bijetora, o A-coanel $\mathcal{D} = A \otimes_B A$ induz uma estrutura de A-coanel em $\mathcal{C} = A \otimes C$. Primeiramente, $A \otimes C$ é A-bimódulo com ações dadas por

$$b' \triangleright (a \otimes c) = b'a \otimes c \quad \text{e} \quad (a \otimes c) \triangleleft b = \mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(a \otimes c)b),$$

para todos $a \otimes c \in A \otimes C$ e $b, b' \in A$. Com efeito, a ação à esquerda é trivial. Vejamos que ação à direita é associativa e unital. Dados $a \otimes c \in A \otimes C$ e $b, b' \in A$, temos

$$\begin{aligned}((a \otimes c) \triangleleft b) \triangleleft b' &= (\mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(a \otimes c)b)) \triangleleft b' \\ &= \mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(\mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(a \otimes c)b))b') \\ &= \mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(a \otimes c)bb') \\ &= (a \otimes c) \triangleleft (bb')\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(a \otimes c) \triangleleft 1_A &= \mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(a \otimes c)1_A) \\ &= a \otimes c.\end{aligned}$$

O coproduto e counidade do A-coanel $\mathcal{D}$ induzem em $\mathcal{C}$ os seguintes morfismos de A-bimódulos

$$\Delta_{\mathcal{C}} = (\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can}) \circ \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathsf{can}^{-1} : A \otimes C \to A \otimes C \otimes_A A \otimes C$$

e

$$\varepsilon_{\mathcal{C}} = \varepsilon_{\mathcal{D}} \circ \mathsf{can}^{-1} : A \otimes C \to A.$$

Vejamos que $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ é de fato um A-coanel, associado a uma estrutura entrelaçada. Para isso será útil outra descrição para as aplicações $\Delta_{\mathcal{C}}$ e $\varepsilon_{\mathcal{C}}$: como can é bijetora, dado $a \otimes c \in A \otimes C$, existem $a_i, b_i \in A$ com $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$\mathsf{can}(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_B b_i) = a \otimes c,$$

assim

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{C}}(a \otimes c) &= ((\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can}) \circ \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathsf{can}^{-1})(a \otimes c) \\
&= ((\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can}) \circ \Delta_{\mathcal{D}})(\mathsf{can}^{-1}(a \otimes c)) \\
&= (\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can})(\Delta_{\mathcal{D}}(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_B b_i)) \\
&= (\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can})(\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes_B 1_A) \otimes_A (1_A \otimes_B b_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{can}(a_i \otimes_B 1_A) \otimes_A \mathsf{can}(1_A \otimes_B b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i (1_A)_{[0]} \otimes (1_A)_{[1]} \otimes_A 1_A (b_i)_{[0]} \otimes (b_i)_{[1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i (1_A)_{[0]} \otimes (1_A)_{[1]}) \triangleleft (b_i)_{[0]} \otimes_A 1_A \otimes (b_i)_{[1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(a_i (1_A)_{[0]} \otimes (1_A)_{[1]})(b_i)_{[0]}) \otimes_A 1_A \otimes (b_i)_{[1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{can}(a_i\, \mathsf{can}^{-1}((1_A)_{[0]} \otimes (1_A)_{[1]})(b_i)_{[0]}) \otimes_A 1_A \otimes (b_i)_{[1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{can}(a_i (1_A \otimes_B 1_A)(b_i)_{[0]}) \otimes_A 1_A \otimes (b_i)_{[1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{can}(a_i \otimes_B (b_i)_{[0]}) \otimes_A 1_A \otimes (b_i)_{[1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i)_{[0]} \otimes (b_i)_{[1]} \otimes_A 1_A \otimes (b_i)_{[2]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i)_{[0]} \otimes (b_i)_{[1](1)} \otimes_A 1_A \otimes (b_i)_{[1](2)} \\
&= a \otimes c_{(1)} \otimes_A 1_A \otimes c_{(2)},
\end{aligned}$$

logo, por meio do isomorfismo $A \otimes C \otimes_A A \otimes C \cong A \otimes C \otimes C$, podemos identificar $\Delta_{\mathcal{C}} = I_A \otimes \Delta$. De forma análoga,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathcal{C}}(a\otimes c) &= (\varepsilon_{\mathcal{D}}\circ \mathsf{can}^{-1})(a\otimes c)\\
&= \varepsilon_{\mathcal{D}}(\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes_B b_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i)_{[0]}\varepsilon((b_i)_{[1]})\\
&= a\varepsilon(c),
\end{aligned}
$$

logo $\varepsilon_{\mathcal{C}} = I_A\otimes\varepsilon$ e concluímos trivialmente a coassociatividade de $\Delta_{\mathcal{C}}$ e a propriedade da counidade de $\varepsilon_{\mathcal{C}}$.

Por fim, tomando $\psi : C\otimes A\to A\otimes C$ dada por

$$
\psi(c\otimes a) = (1_A\otimes c)\triangleleft a = \mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(1_A\otimes c)a),
$$

a tripla (A, C, ψ) define uma estrutura entrelaçada, associada ao A-coanel $\mathcal{C} = (A\otimes C, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$. Por completude, vejamos que as equações (4.7) e (4.8) da estrutura entrelaçada entre A e C são satisfeitas (para mais detalhes veja [7, Seção 32.6]). Em (4.7) temos,

$$
\begin{aligned}
(aa')_{(\alpha)}\otimes c^{(\alpha)} &= \psi(c\otimes aa')\\
&= (1_A\otimes c)\triangleleft (aa')\\
&= ((1_A\otimes c)\triangleleft a)\triangleleft a'\\
&= (a_{(\alpha)}\otimes c^{(\alpha)})\triangleleft a'\\
&= a_{(\alpha)}\triangleright (1_A\otimes c^{(\alpha)})\triangleleft a'\\
&= a_{(\alpha)}\triangleright (a'_{(\beta)}\otimes c^{(\alpha\beta)})\\
&= a_{(\alpha)}a'_{(\beta)}\otimes c^{(\alpha\beta)}
\end{aligned}
$$

e para (4.8),

$$
\begin{aligned}
(1_A)_{(\alpha)}\otimes c^{(\alpha)} &= \psi(c\otimes 1_A)\\
&= (1_A\otimes c)\triangleleft 1_A\\
&= 1_A\otimes c,
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

Observação 4.2.4. *Perceba que, dado um elemento grouplike g da coálgebra C, temos que $x = 1_A\otimes g\in$ é um elemento grouplike para o coanel $\mathcal{C} = A\otimes C$. Com efeito,*

$$
\Delta_{\mathcal{C}}(x) = 1_A\otimes\Delta(g) = 1_A\otimes g\otimes g \cong 1_A\otimes g\otimes_A 1_A\otimes g
$$

e
$$\varepsilon_{\mathcal{C}}(x) = 1_A \otimes \varepsilon(g) = 1_A \otimes 1_k \cong 1_A.$$

Até o final da seção fixamos $\mathcal{C} = (A \otimes C, 1 \otimes g)$ um A-coanel com grouplike.

O próximo lema será útil ao descrever o contexto de Morita associado ao coanel descrito por uma estrutura entrelaçada.

Lema 4.2.5. *Existe um isomorfismo de k-módulos*

$$_A\operatorname{Hom}(A \otimes C, A) \cong \operatorname{Hom}(C, A).$$

Demonstração. Basta tomar as aplicações

$$\varphi : {}_A\operatorname{Hom}(A \otimes C, A) \to \operatorname{Hom}(C, A)$$

dada por
$$\varphi(f)(c) = f(1_A \otimes c),$$
para todos $f \in {}_A\operatorname{Hom}(A \otimes C, A)$ e $c \in C$, e

$$\theta : \operatorname{Hom}(C, A) \to {}_A\operatorname{Hom}(A \otimes C, A)$$

dada por
$$\theta(h)(a \otimes c) = ah(c),$$
para todos $h \in \operatorname{Hom}(C, A)$ e $a \otimes c \in A \otimes C$. Verifica-se que φ e θ são bem definidas, k-lineares e mutuamente inversas. □

Observe que o dual à esquerda de $\mathcal{C}$, isto é, o anel ${}^*\mathcal{C} = {}_A\operatorname{Hom}(A \otimes C, A)$, induz pelo isomorfismo do lema acima uma estrutura natural de anel no k-módulo $\operatorname{Hom}(C, A)$, isto é, definimos um produto

$$\diamond : \operatorname{Hom}(C, A) \times \operatorname{Hom}(C, A) \to \operatorname{Hom}(C, A)$$

por
$$f \diamond g = \varphi \circ (\theta(f) \bullet \theta(g)),$$

cuja expressão em $c \in \mathcal{C}$ é dada por

$$\begin{aligned}
(f \diamond g)(c) &= \varphi(\theta(f) \bullet \theta(g))(c) \\
&= \varphi(\theta(g) \circ (I_A \otimes I_C \otimes_A \theta(f)) \circ (I_A \otimes \Delta_C))(c) \\
&= \theta(g)((I_A \otimes I_C \otimes_A \theta(f))(1_A \otimes c_{(1)} \otimes_A 1_A \otimes c_{(2)})) \\
&= \theta(g)((1_A \otimes c_{(1)}) \triangleleft f(c_{(2)})) \\
&= \theta(g)(f(c_{(2)})_{(\alpha)} \otimes {c_{(1)}}^{(\alpha)}) \\
&= f(c_{(2)})_{(\alpha)} g({c_{(1)}}^{(\alpha)}),
\end{aligned}$$

para todos $f, g \in \operatorname{Hom}(C, A)$ e $c \in C$.

Lema 4.2.6. *O k-módulo $\operatorname{Hom}(C, A)$ munido do produto $\diamond$ descrito acima é uma k-álgebra, cuja unidade é $\varphi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}}(1_A \otimes -)$.*

Demonstração. A associatividade e unidade seguem diretamente da estrutura de anel em ${}^*\mathcal{C}$: dados $f, g, h \in \operatorname{Hom}(C, A)$ e $c \in C$, temos

$$\begin{aligned}
f \diamond (g \diamond h) &= f \diamond \varphi(\theta(g) \bullet \theta(h)) \\
&= \varphi(\theta(f) \bullet \theta(\varphi(\theta(g) \bullet \theta(h)))) \\
&= \varphi(\theta(f) \bullet (\theta(g) \bullet \theta(h))) \\
&= \varphi((\theta(f) \bullet \theta(g)) \bullet \theta(h)) \\
&= \varphi(\theta(\varphi((\theta(f) \bullet \theta(g)))) \bullet \theta(h)) \\
&= \varphi((\theta(f) \bullet \theta(g)) \diamond h \\
&= (f \diamond g) \diamond h
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\varphi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) \diamond f)(c) &= f(c_{(2)})_{(\alpha)} \varphi(\varepsilon_{\mathcal{C}})({c_{(1)}}^{(\alpha)}) \\
&= f(c_{(2)})_{(\alpha)} \varepsilon_{\mathcal{C}}(1_A \otimes {c_{(1)}}^{(\alpha)}) \\
&= f(c_{(2)})_{(\alpha)} \varepsilon({c_{(1)}}^{(\alpha)}) \\
&\overset{(4.8)}{=} f(c_{(2)}) \varepsilon(c_{(1)}) \\
&= f(c_{(2)} \varepsilon(c_{(1)})) \\
&= f(c),
\end{aligned}$$

logo $\varphi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) \diamond f = f$. Analogamente prova-se que $f \diamond \varphi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) = f$. □

Observação 4.2.7. *Denotamos por $\#(C, A)$ a k-álgebra $\operatorname{Hom}(C, A)$ munida do produto $\diamond$ descrito acima.*

Perceba que o Lema 4.2.5 garante um isomorfismo k-linear entre os k-módulos ${}_A\operatorname{Hom}(A \otimes C, A)$ e $\#(C, A)$. Por outro lado, a estrutura de anel presente no segundo módulo provém do primeiro, assim sendo podemos concluir que

Lema 4.2.8. *Existe um isomorfismo de k-álgebras*

$$\varphi : {}_A\mathrm{Hom}(A \otimes C, A) \to \mathrm{Hom}(C, A)$$

descrito por

$$\varphi(f)(c) = f(1_A \otimes c),$$

para todos $f \in {}_A\mathrm{Hom}(A \otimes C, A)$ e $c \in C$.

À luz do isomorfismo acima podemos reescrever o morfismo de k-álgebras

$$\chi : A \to {}^*\mathcal{C},$$

discutido na Seção 2.2, como

$$\chi : A \to \#(C, A),$$

sendo definido por

$$\chi(a)(c) = \varepsilon(c)a$$

para todos $a \in A$ e $c \in C$.

Reunindo os resultados discutidos nesta seção, estamos em condições de descrever o contexto de Morita apresentado no Teorema 3.2.8, para o caso do A-coanel associado à estrutura entrelaçada (A, C, ψ), isto é, $\mathcal{C} = (A \otimes C, x)$ em que $x = 1 \otimes g$, com $g \in C$ um elemento grouplike da coálgebra C:

(i) O anel dos coinvariantes é

$$\begin{aligned} B &= A^{\mathrm{co}\, A \otimes C} \\ &= \{b \in A \mid bx = xb\} \\ &= \{b \in A \mid b \otimes g = b_{(\alpha)} \otimes g^{(\alpha)}\}. \end{aligned}$$

(ii) O dual à esquerda ${}^*\mathcal{C} = {}_A\mathrm{Hom}(A \otimes C, A)$ é caracterizado via o isomorfismo do Lema 4.2.8 por ${}^*\mathcal{C} \cong \#(C, A)$.

(iii) O anel A é $(B, \#(C, A))$-bimódulo com ações

$$b \triangleright a = ba \quad \text{e} \quad a \triangleleft f = f(xa) = a_{(\alpha)} f(g^{(\alpha)}),$$

para todos $a \in A$, $b \in B$ e $f \in \#(C, A)$.

(iv) O $(\#(C, A), B)$-bimódulo $\hat{Q}$ é descrito por

$$\hat{Q} = \{q \in \#(C, A) \mid q(c_{(2)})_{(\alpha)} \otimes {c_{(1)}}^{(\alpha)} = q(c) \otimes g, \ \forall\ c \in C\},$$

com ações dadas por

$$(f \blacktriangleright q)(c) = f(c_{(2)})_{(\alpha)} q({c_{(1)}}^{(\alpha)}) \quad \text{e} \quad (q \blacktriangleleft b)(c) = q(c)b,$$

para todos $f \in \#(C, A)$, $q \in Q$, $b \in B$ e $c \in C$.

(v) A aplicação $\hat{\tau} : A \otimes_{\#(C,A)} Q \to B$ é definida por

$$\hat{\tau}(a \otimes_{\#(C,A)} q) = a_{(\alpha)} q(g^{(\alpha)})$$

para todo $a \otimes_{\#(C,A)} q \in A \otimes_{\#(C,A)} Q$.

(vi) A aplicação $\hat{\mu} : Q \otimes_B A \to \#(C, A)$ é definida por

$$\hat{\mu}(q \otimes_B a)(c) = q(c)a,$$

visto que, para todos $q \otimes_B a \in Q \otimes_B A$ e $c \in C$ temos

$$\begin{aligned}
(q \diamond \chi(a))(c) &= q(c_{(2)})_{(\alpha)} \chi(a)({c_{(1)}}^{(\alpha)}) \\
&= q(c_{(2)})_{(\alpha)} \varepsilon({c_{(1)}}^{(\alpha)}) a \\
&= \varepsilon({c_{(1)}}^{(\alpha)}) q(c_{(2)})_{(\alpha)} a \\
&\overset{(4.8)}{=} \varepsilon(c_{(1)}) q(c_{(2)}) a \\
&= q(\varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)}) a \\
&= q(c)a.
\end{aligned}$$

Finalmente, enunciamos

Corolário 4.2.9. *A sêxtupla $(B, \#(C, A), A, \hat{Q}, \hat{\tau}, \hat{\mu})$ define um contexto de Morita. Mais ainda, é o contexto canônico associado ao A-coanel $(A \otimes C, x)$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.2.8. □

4.3 Extensões de Hopf-Galois

Nesta seção descrevemos o contexto de Morita associado ao A-coanel $(A \otimes H, 1_A \otimes 1_H)$ do Exemplo 2.1.8, bem como elucidamos como a teoria de coanéis generaliza resultados de equivalência para o caso das extensões de Hopf-Galois.

Ao longo da seção considere H uma álgebra de Hopf, A uma H-comódulo álgebra à direita com $\rho_A : A \to A \otimes H$ e suponha que H é um k-progerador.

Como vimos na Proposição 1.3.18, A é H^*-módulo álgebra à esquerda, ou ainda, uma $(H^*)^{\mathrm{op}}$-módulo álgebra à direita, com ação dada por

$$a \triangleleft h^* = \langle h^*, a_{[1]}\rangle a_{[0]},$$

para todos $a \in A$ e $h^* \in (H^*)^{\mathrm{op}}$, em que $\langle\,,\rangle : H^* \times H \to k$ denota a função de avaliação, isto é, $\langle h^*, h\rangle = h^*(h)$ para $h^* \in H^*$ e $h \in H$.

Nessas condições construímos o produto smash $(H^*)^{\mathrm{op}}\# A$, em que a multiplicação entre dois elementos $h^*\# a$, $g^*\# b$ é dada por

$$(h^*\# a)(g^*\# b) = h^* *_{\mathrm{op}} g^*_{(1)}\#\langle g^*_{(2)}, a_{[1]}\rangle a_{[0]}b = g^*_{(1)} * h^*\#\langle g^*_{(2)}, a_{[1]}\rangle a_{[0]}b. \tag{4.9}$$

O lema a seguir fornece uma descrição útil para o dual à esquerda do A-coanel $A \otimes H$.

Lema 4.3.1. *Seja $\gamma : (H^*)^{\mathrm{op}}\# A \to {}_A\mathrm{Hom}(A \otimes H, A)$ a composição dos isomorfismos k-lineares descritos nos Lemas 1.2.17 e 4.2.5, ou seja,*

$$\gamma(h^*\# a)(a' \otimes l) = \langle h^*, l\rangle a'a.$$

Então γ é um isomorfismo de k-álgebras.

Demonstração. Basta mostrar que γ é multiplicativa e preserva unidade.

$$\begin{aligned}\gamma((h^*\# a)(g^*\# b))(a' \otimes l) &= \gamma(g^*_{(1)} * h^*\#\langle g^*_{(2)}, a_{[1]}\rangle a_{[0]}b)(a' \otimes l)\\ &= \langle g^*_{(1)} * h^*, l\rangle\langle g^*_{(2)}, a_{[1]}\rangle a'a_{[0]}b\\ &= \langle g^*_{(1)}, l_{(1)}\rangle\langle h^*, l_{(2)}\rangle\langle g^*_{(2)}, a_{[1]}\rangle a'a_{[0]}b\\ &= \langle g^*_{(1)}, l_{(1)}\rangle\langle g^*_{(2)}, a_{[1]}\rangle\langle h^*, l_{(2)}\rangle a'a_{[0]}b\\ &= \langle g^*, l_{(1)}a_{[1]}\rangle\langle h^*, l_{(2)}\rangle a'a_{[0]}b.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\gamma(h^*\# a) \bullet \gamma(g^*\# b))(a' \otimes l) &= \gamma(g^*\# b)((a' \otimes l_{(1)}) \triangleleft \gamma(h^*\# a)(1_A \otimes l_{(2)}))\\ &= \gamma(g^*\# b)((a' \otimes l_{(1)}) \triangleleft \langle h^*, l_{(2)}\rangle a)\\ &= \gamma(g^*\# b)(\langle h^*, l_{(2)}\rangle a'a_{[0]} \otimes l_{(1)}a_{[1]})\\ &= \langle h^*, l_{(2)}\rangle\langle g^*, l_{(1)}a_{[1]}\rangle a'a_{[0]}b\\ &= \langle g^*, l_{(1)}a_{[1]}\rangle\langle h^*, l_{(2)}\rangle a'a_{[0]}b.\end{aligned}$$

Por fim, vejamos que o morfismo γ leva a unidade de $(H^*)^{\mathrm{op}}\# A$ na unidade de

${}_A\operatorname{Hom}(A\otimes H, A)$.
$$\begin{aligned}\gamma(\varepsilon_H\#1_A)(a'\otimes l) &= \langle \varepsilon_H, l\rangle a' 1_A\\ &= \varepsilon_H(l)a'\\ &= \varepsilon_{A\otimes H}(a'\otimes l),\end{aligned}$$
como queríamos. $\square$

Denotando $B = A^{\operatorname{co} A\otimes H}$, a aplicação canônica do coanel $A\otimes H$
$$\mathsf{can} : A\otimes_B A \to A\otimes H$$
é descrita por
$$\mathsf{can}(a'\otimes_B a) = a' a_{[0]}\otimes a_{[1]},$$
para todo $a'\otimes_B a\in A\otimes_B A$, logo construímos sua dual à esquerda
$$^*\mathsf{can} : {}_A\operatorname{Hom}(A\otimes H, A) \to {}_A\operatorname{Hom}(A\otimes_B A, A) \cong {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}$$
dada por
$$^*\mathsf{can}(f)(a) = f(xa) = f(a_{[0]}\otimes a_{[1]}),$$
para todos $f\in {}_A\operatorname{Hom}(A\otimes H, A)$ e $a\in A$. O isomorfismo de k-álgebras $\gamma : (H^*)^{\mathrm{op}}\#A\to {}_A\operatorname{Hom}(A\otimes H, A)$ do Lema 4.3.1 nos permite caracterizar a dual à esquerda de can como a aplicação
$$\widetilde{^*\mathsf{can}} = {}^*\mathsf{can}\circ\gamma : (H^*)^{\mathrm{op}}\#A \to {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}$$
dada por
$$\begin{aligned}\widetilde{^*\mathsf{can}}(h^*\#a)(a') &= ({}^*\mathsf{can}\circ\gamma)(h^*\#a)(a')\\ &= \gamma(h^*\#a)(a'_{[0]}\otimes a'_{[1]})\\ &= \langle h^*, a'_{[1]}\rangle a'_{[0]}a,\end{aligned}$$
para todos $h^*\#a\in (H^*)^{\mathrm{op}}\#A$ e $a'\in A$. Nessas condições, os elementos do contexto de Morita canônico associado à $(A\otimes H, 1_A\otimes 1_H)$ são:

(i) O anel dos coinvariantes é
$$\begin{aligned}B &= A^{\operatorname{co} A\otimes H}\\ &= \{b\in A \mid b(1_A\otimes 1_H) = (1_A\otimes 1_H)b\}\\ &= \{b\in A \mid b\otimes 1_H = b_{[0]}\otimes b_{[1]}\}\\ &= \{b\in A \mid \rho_A(b) = b\otimes 1_H\}\\ &= A^{\operatorname{co} H}.\end{aligned}$$

(ii) O dual à esquerda ${}^*\mathcal{C} = {}_A\operatorname{Hom}(A\otimes H, A)$ é caracterizado via o isomorfismo do Lema

4.3.1 por ${}^*\mathcal{C} \cong (H^*)^{\mathrm{op}} \# A$, cuja multiplicação é descrita em (4.9).

(iii) O anel A é $(B, (H^*)^{\mathrm{op}} \# A)$-bimódulo com ações

$$b \triangleright a = ba \quad \text{e} \quad a \triangleleft (h^* \# a') = \langle h^*, a_{[1]} \rangle a_{[0]} a',$$

para todos $a \in A$, $b \in B$ e $h^* \# a' \in (H^*)^{\mathrm{op}} \# A$.

(iv) Vejamos a descrição do bimódulo $\hat{Q} = \gamma^{-1}(Q)$, como um subconjunto de $(H^*)^{\mathrm{op}} \# A$. Pela Proposição 3.2.5, temos que

$$Q = Q' = \{q \in {}^*\mathcal{C} \mid q \bullet f = q \bullet \chi(f(x)), \ \forall\ f \in {}^*\mathcal{C}\}.$$

Assim, dado $y = \sum_{i=1}^n h_i^* \# a_i \in (H^*)^{\mathrm{op}} \# A$ segue que

$$\begin{aligned} y \in \hat{Q} &\Leftrightarrow \gamma(y) \in Q \\ &\Leftrightarrow \gamma(y) \bullet f = \gamma(y) \bullet \chi(f(x)), \ \forall\ f \in {}^*\mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \gamma^{-1}(\gamma(y) \bullet f) = \gamma^{-1}((\gamma(y) \bullet \chi(f(x))), \ \forall\ f \in {}^*\mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow y\gamma^{-1}(f) = y\gamma^{-1}(\chi(f(x))), \ \forall\ f \in {}^*\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assuma que $\gamma^{-1}(f) = h^* \# a'$, logo

$$f(x) = \gamma(h^* \# a')(1_A \otimes 1_H) = \langle h^*, 1_H \rangle a'$$

e temos que

$$y \in \hat{Q} \Leftrightarrow y(h^* \# 1_A) = \langle h^*, 1_H \rangle y, \ \forall\ h^* \in (H^*)^{\mathrm{op}}, \tag{4.10}$$

pois

$$\begin{aligned} & y(h^* \# a') = y(\varepsilon \# \langle h^*, 1_H \rangle a') \\ \Leftrightarrow\ & (\sum_{i=1}^n h_i^* \# a_i)(h^* \# a') = (\sum_{i=1}^n h_i^* \# a_i)(\varepsilon \# \langle h^*, 1_H \rangle a') \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^n h_{(1)}^* * h_i^* \# \langle h_{(2)}^*, a_{i[1]} \rangle a_{i[0]} a' = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{(1)} * h_i^* \# \langle \varepsilon_{(2)}, a_{i[1]} \rangle a_{i[0]} \langle h^*, 1_H \rangle a' \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^n h_{(1)}^* * h_i^* \# \langle h_{(2)}^*, a_{i[1]} \rangle a_{i[0]} a' = \sum_{i=1}^n \varepsilon * h_i^* \# \langle h^*, 1_H \rangle \langle \varepsilon, a_{i[1]} \rangle a_{i[0]} a' \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^n h_{(1)}^* * h_i^* \# \langle h_{(2)}^*, a_{i[1]} \rangle a_{i[0]} a' = \sum_{i=1}^n h_i^* \# \langle h^*, 1_H \rangle a_i a' \\ \Leftrightarrow\ & y(h^* \# a') = \langle h^*, 1_H \rangle y(\varepsilon \# a'), \ \forall\ h^* \# a' \in (H^*)^{\mathrm{op}} \# A \\ \Leftrightarrow\ & y(h^* \# 1_A)(\varepsilon \# a') = \langle h^*, 1_H \rangle y(\varepsilon \# a'), \ \forall\ h^* \# a' \in (H^*)^{\mathrm{op}} \# A \\ \Leftrightarrow\ & y(h^* \# 1_A) = \langle h^*, 1_H \rangle y, \ \forall\ h^* \in (H^*)^{\mathrm{op}}, \end{aligned}$$

donde a última equivalência segue, por um lado tomando $a' = 1_A$, e por outro multiplicando ambos os membros da última equação à direita por $\varepsilon\#a' \in (H^*)^{\mathrm{op}}\#A$. Portanto,

$$\hat{Q} = \{y \in (H^*)^{\mathrm{op}}\#A \mid y(h^*\#1_A) = \langle h^*, 1_H\rangle y,\ \forall\ h^* \in (H^*)^{\mathrm{op}}\}$$

com estrutura de $((H^*)^{\mathrm{op}}\#A, B)$-bimódulo dada em $y = \sum_{i=1}^n h_i\#a_i \in \hat{Q}$ por

$$(h^*\#a) \blacktriangleright y = (h^*\#a)(\sum_{i=1}^n h_i\#a_i) \ \text{ e } \ y \blacktriangleleft b = \sum_{i=1}^n h_i\#a_i b,$$

para todos $h^*\#a \in (H^*)^{\mathrm{op}}\#A$ e $b \in B$.

(v) A aplicação $\hat{\tau} = \tau \circ (I_A \otimes \gamma) : A \otimes_{(H^*)^{\mathrm{op}}\#A} \hat{Q} \to B$ é definida por

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(a \otimes_{(H^*)^{\mathrm{op}}\#A} y) &= \gamma(y)(xa)\\ &=^* \widetilde{\mathsf{can}}(y)(a),\end{aligned}$$

para todo $a \otimes_{(H^*)^{\mathrm{op}}\#A} y \in A \otimes_{(H^*)^{\mathrm{op}}\#A} Q$.

(vi) A aplicação $\hat{\mu} = \gamma^{-1} \circ \mu \circ (\gamma \otimes I_A) : \hat{Q} \otimes_B A \to (H^*)^{\mathrm{op}}\#A$ é definida por

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(y \otimes_B a) &= \gamma^{-1}(\mu(\gamma(y) \otimes_B a))\\ &= \gamma^{-1}(\gamma(y) \bullet \chi(a))\\ &= y(\varepsilon\#a),\end{aligned}$$

para todos $y \otimes_B a \in \hat{Q} \otimes_B A$.

Sumarizando a discussão acima, o Corolário 4.2.9 toma a seguinte forma:

Corolário 4.3.2. *A sêxtupla $(B, (H^*)^{\mathrm{op}}\#A, A, \hat{Q}, \hat{\tau}, \hat{\mu})$ define um contexto de Morita. Mais ainda, é o contexto canônico associado ao A-coanel $(A \otimes H, 1_A \otimes 1_H)$.*

Observemos que, pelo Lema 1.2.21, se H é um k-progerador e A uma H-comódulo álgebra à direita, então o A-coanel $\mathcal{C} = A \otimes H$ é um A-progerador à esquerda. Nas condições acima reescrevemos o Teorema 3.2.11 como o seguinte corolário:

Corolário 4.3.3. *Seja H uma k-álgebra de Hopf e suponha que H é um progerador como k-módulo. Sejam A uma H-comódulo álgebra à direita, $B = A^{\mathrm{co}H}$ e $B' \subset B$ um subanel. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) (a) $\mathsf{can}' : \mathcal{D}' = A \otimes_{B'} A \to A \otimes H$, dada por $\mathsf{can}(a' \otimes_{B'} a) = a'a_{[0]} \otimes a_{[1]}$ é bijetora;

(b) A é fielmente plano como B'-módulo à esquerda.

2) *(a)* $\widetilde{{}^*\mathsf{can}'} : (H^*)^{\mathrm{op}}\#A \to {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}$, *dada por* $\widetilde{{}^*\mathsf{can}'}(h^*\#a)(a') = \langle h^*, a'_{[1]}\rangle a'_{[0]}a$ *é um isomorfismo de* k*-álgebras;*

(b) A *é um* B'*-progerador à esquerda.*

3) *(a)* $B = B'$*;*

(b) *o contexto de Morita* $(B, (H^*)^{\mathrm{op}}\#A, A, \hat{Q}, \hat{\tau}, \hat{\mu})$ *é estrito.*

4) *(a)* $B = B'$*;*

(b) *o par adjunto de funtores* $(F = -\otimes_B A, G = (-)^{\mathrm{co}\,H})$ *é uma equivalência entre as categorias* $\mathcal{M}_B$ *e* $\mathcal{M}_A^H$*.*

Vejamos como esse resultado se relaciona com outros dois teoremas de equivalências para a estrutura de Hopf-Galois: o clássico teorema de Schneider [23, Theorem I] que caracteriza extensões de Hopf-Galois fielmente planas; e o resultado de Paques [20, Theorem 4.6] que contempla uma revisão bibliográfica de vários resultados da área, obtidos durante as décadas de 80 e 90. Antes de enunciá-los, relembramos o conceito de *integral* em uma álgebra de Hopf H. Um elemento $t \in H$ é dito uma *integral à direita* (resp. *à esquerda*) se $th = \varepsilon(h)t$ (resp. $ht = \varepsilon(h)t$) para todo $h \in H$. O conjunto de todas as integrais à direita (resp. à esquerda) de H é um submódulo de H, denotado por $\int_H^r$ (resp. $\int_H^l$).

Teorema 4.3.4 ([23, Theorem I])**.** *Sejam* k *um corpo,* H *uma* k*-álgebra de Hopf com antípoda bijetora,* A *uma* H*-comódulo álgebra à direita e* $B = A^{\mathrm{co}\,H}$*. Então as afirmações são equivalentes:*

1) *(a)* A *é injetivo como* H*-comódulo à direita.*

(b) $\mathsf{can} : A \otimes_B A \to A \otimes H$ *é sobrejetor.*

2) $\mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A^H$, $M \mapsto M \otimes_B A$ *é uma equivalência.*

3) $\mathcal{M}_B \to {}_A\mathcal{M}^H$, $M \mapsto A \otimes_B M$ *é uma equivalência.*

4) *(a)* A *é fielmente plano como* B*-módulo à esquerda.*

(b) can *é um isomorfismo.*

5) *(a)* A *é fielmente plano como* B*-módulo à direita.*

(b) can *é um isomorfismo.*

Teorema 4.3.5 ([20, Theorem 4.6])**.** *Sejam* H *uma* k*-álgebra de Hopf,* A *uma* H*-módulo álgebra à esquerda e suponha que* H *é projetivo e finitamente gerado como* k*-módulo. Então as afirmações são equivalentes:*

(a) A *é uma* H^**-extensão de Galois de* A^H*.*

(b) Existem elementos $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in A$ *e* $T \in \int_{H^*}^r$ *tais que*

$$\sum_{1 \leq i \leq m} x_i(h \cdot y_i) = T(h)1_A,$$

para todo $h \in H$.

(c) A *é projetivo e finitamente gerado como* A^H*-módulo à direita e a aplicação* $\varphi : A\#H \to \mathrm{End}_{A^H}(A)$*, dada por* $\varphi(a\#h)(x) = a(h \cdot x)$*, para todos* $a, x \in A$ *e* $h \in H$*, é um isomorfismo de* k*-álgebras.*

(d) Para todo $A\#H$*-módulo à esquerda* M*, a aplicação* $\mu : A \otimes_{A^H} M^H \to M$*, dada por* $\mu(a \otimes m) = a \cdot m$*, para todos* $a \in A$ *e* $m \in M$*, é um isomorfismo de* $A\#H$*-módulos à esquerda.*

(e) Se $0 \neq t \in \int_H^l$*, então a aplicação* $[\,,] : A \otimes_{A^H} A \to A\#H$*, dada por* $[a, b] = atb$*, é sobrejetora.*

(f) A *é um gerador na categoria de todos os* $A\#H$*-módulos à esquerda.*

Inicialmente observamos que as hipóteses do Corolário 4.3.3 e dos Teoremas 4.3.4 e 4.3.5 diferem alguns pontos:

- em 4.3.3 e 4.3.5, k denota um anel comutativo arbitrário, já em 4.3.4 k é um corpo;
- em 4.3.3 e 4.3.4 a álgebra de Hopf H realiza uma *coação* em uma álgebra A, e estuda-se quando A é uma H-extensão de Galois de $B = A^{\mathrm{co}H}$. Já em 4.3.5 H realiza uma *ação* em A, e se estabelece condições equivalentes para A ser uma H^*-extensão de Galois de $A^{\mathrm{co}H^*} = A^H$;
- em 4.3.3 a k-álgebra de Hopf H é um k-progerador, em 4.3.5 apenas um k-módulo projetivo finitamente gerado. Já em 4.3.4 pede-se somente que a antípoda de H seja bijetora.

Agora comparamos itens dos três teoremas de equivalências, os quais possuem interpretações similares em seus respectivos contextos.

- Os itens (1a)[4.3.3], (4b),(5b)[4.3.4] e (a)[4.3.5] exprimem a definição de extensão de Hopf-Galois.
- Os resultados de Caenepeel e Schneider apresentam extensões de Hopf-Galois fielmente planas, como indicado nos itens (1b)[4.3.3] e (4a),(5a)[4.3.4]
- (2)[4.3.3] e (c)[4.3.5] são condições equivalentes.

- Os itens (4)[4.3.3] e (2),(3)[4.3.4] discorrem sobre uma equivalência entre a categoria dos B-módulos à direita e a categoria dos (A, H)-módulos de Hopf relativos. Uma condição mais fraca se encontra em (d)[4.3.5] e se traduz no fato da counidade da adjunção (F, G) ser bijetora.

Em conclusão, observamos que o Corolário 4.3.3, desenvolvido por meio da teoria de coanéis, estende parcialmente o Teorema 4.3.4 de Schneider, visto que se k é corpo, então a álgebra de Hopf H é de dimensão finita e portanto possui antípoda bijetora. Por outro lado, diversas das condições equivalentes descritas no Teorema 4.3.5 também são contempladas pelo Corolário 4.3.3.

4.4 Teoria de Galois para anéis

Nessa seção detalhamos a aplicação do Corolário 4.3.3 para o caso da teoria de extensões de Galois em anéis (não necessariamente comutativos). Mais especificamente, estudamos condições para que uma extensão de anéis $A \supseteq B$, na qual um grupo finito G age por automorfismos de anéis em A tal que $B = A^G$, seja considerada de Galois. Isso engloba o tratamento dado a teoria clássica de Galois via a passagem para uma extensão de Hopf-Galois tomando uma coação da álgebra de Hopf $H = (kG)^*$ (veja o Exemplo 1.4.3).

Sejam G um grupo finito e A uma G-módulo álgebra, ou equivalentemente, A uma kG-módulo álgebra à esquerda com estrutura $\mu_A : kG \otimes A \to A$ dada por $\mu_A(v_g \otimes a) = g(a)$ (veja [13, Exemplo 5.1.3]). Definimos uma coação à direita de $(kG)^*$ em A

$$\rho_A : A \to A \otimes (kG)^*$$

para cada $a \in A$ por

$$\rho_A(a) = \sum_{g \in G} g(a) \otimes p_g.$$

Com efeito, considerando a estrutura de álgebra de Hopf em kG e $(kG)^*$ apresentadas nos Exemplos 1.1.12 e 1.1.16, temos

$$\begin{aligned}((\rho_A \otimes I_{(kG)^*}) \circ \rho_A)(a) &= (\rho_A \otimes I_{(kG)^*})(\sum_{g \in G} g(a) \otimes p_g) \\ &= \sum_{g \in G}(\sum_{h \in G} h(g(a)) \otimes p_h) \otimes p_g \\ &= \sum_{g,h \in G} (hg)(a) \otimes p_h \otimes p_g.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
((I_A \otimes \Delta^*) \circ \rho_A)(a) &= (I_A \otimes \Delta^*) \circ \rho_A)(\sum_{g \in G} g(a) \otimes p_g) \\
&= \sum_{g \in G} g(a) \otimes \Delta^*(p_g) \\
&= \sum_{g \in G} g(a) \otimes (\sum_{h \in G} p_h \otimes p_{h^{-1}g}) \\
&= \sum_{g,h \in G} g(a) \otimes p_h \otimes p_{h^{-1}g} \\
&= \sum_{g,h \in G} (hg)(a) \otimes p_h \otimes p_g,
\end{aligned}
$$

em que a última igualdade segue por uma mudança de índices, logo (A, ρ_A) satisfaz (1.7). Para a equação (1.8), temos

$$
\begin{aligned}
((I_A \otimes \varepsilon^*) \circ \rho_A)(a) &= (I_A \otimes \varepsilon^*)(\sum_{g \in G} g(a) \otimes p_g) \\
&= \sum_{g \in G} g(a) \otimes \varepsilon^*(p_g) \\
&= \sum_{g \in G} g(a) \otimes \delta_{e,g} \\
&= a \otimes 1_k \\
&= l_A^{-1}(a).
\end{aligned}
$$

Na realidade, ρ_A define uma estrutura de $(kG)^*$-**comódulo álgebra** em A, visto que

$$
\begin{aligned}
\rho_A(ab) &= \sum_{g \in G} g(ab) \otimes p_g \\
&= \sum_{g \in G} g(a)g(b) \otimes p_g \\
&= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} g(a)h(b) \otimes \delta_{h,g} p_g \\
&= (\sum_{g \in G} g(a) \otimes p_g)(\sum_{h \in G} h(b) \otimes p_h) \\
&= \rho_A(a)\rho_A(b)
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}\rho_A(1_A) &= \sum_{g\in G} g(1_A)\otimes p_g\\ &= \sum_{g\in G} 1_A\otimes p_g\\ &= 1_A\otimes \sum_{g\in G} p_g\\ &= 1_A\otimes 1_{(kG)^*}.\end{aligned}$$

Como indicado no Exemplo 4.1.3, existe um isomorfismo de A-coanéis

$$\phi : \bigoplus_{g\in G} Av_g \to A\otimes (kG)^*$$

definido em v_g por

$$\phi(v_g) = 1_A\otimes p_g.$$

Com efeito, mostra-se que ϕ é isomorfismo de k-módulos, também é claramente A-linear à esquerda e à direita. Vejamos que ϕ é morfismo de A-coanéis. Fixando notações, denotamos $\mathcal{C} = (\oplus_{g\in G} Av_g, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ o A-coanel do Exemplo 2.1.6 e $\underline{\mathcal{C}} = (A\otimes (kG)^*, \Delta_{\underline{\mathcal{C}}}, \varepsilon_{\underline{\mathcal{C}}})$ o A-coanel do Exemplo 2.1.8, com $H = (kG)^*$. As equações (2.9) e (2.10) tomam a forma

$$\begin{aligned}(\Delta_{\underline{\mathcal{C}}}\circ\phi)(v_g) &= \Delta_{\underline{\mathcal{C}}}(1_A\otimes p_g)\\ &= \sum_{h\in G}(1_A\otimes p_h)\otimes_A (1_A\otimes p_{h^{-1}g})\\ &= (\phi\otimes_A\phi)(\sum_{h\in G} v_h\otimes_A v_{h^{-1}g})\\ &= ((\phi\otimes_A\phi)\circ\Delta_{\mathcal{C}})(v_g)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{\underline{\mathcal{C}}}\circ\phi)(v_g) &= \varepsilon_{\underline{\mathcal{C}}}(1_A\otimes p_g)\\ &= 1_A\delta_{e,g}\\ &= p_e(v_g)\\ &= \varepsilon_{\mathcal{C}}(v_g).\end{aligned}$$

Uma vez estabelecido o isomorfismo entre os A-coanéis $\mathcal{C}$ e $\underline{\mathcal{C}}$, exploramos a descrição da aplicação canônica e do contexto de Morita descritos na Seção 4.3. A unidade de $(kG)^*$ é o elemento $1_{(kG)^*} = \sum_{g\in G} p_g$, logo fixamos o grouplike $1_A\otimes\sum_{g\in G} p_g$ do A-coanel $\underline{\mathcal{C}} = A\otimes (kG)^*$ e $B = A^{\mathrm{co}\underline{\mathcal{C}}}$ o anel dos coinvariantes. Nessas condições, a aplicação canônica

$$\mathsf{can} : A\otimes_B A \to A\otimes (kG)^*$$

é dada por

$$\begin{aligned}\mathsf{can}(a' \otimes_B a) &= a' a_{[0]} \otimes a_{[1]}\\ &= a' \sum_{g\in G} g(a) \otimes p_g\\ &= \sum_{g\in G} a' g(a) \otimes p_g.\end{aligned}$$

A aplicação dual de can,

$$^{*}\widetilde{\mathsf{can}} : ((kG)^{**})^{\mathrm{op}} \# A \to {}_B\operatorname{End}(A)^{\mathrm{op}}$$

é descrita por

$$\begin{aligned}^{*}\widetilde{\mathsf{can}}(f_g \# a)(a') &= \sum_{h\in G} f_g(p_h) h(a') a\\ &= \sum_{h\in G} \delta_{g,h} h(a') a\\ &= g(a') a,\end{aligned}$$

em que $f_g \in ((kG)^{**})^{\mathrm{op}}$ é o elemento definido por $f_g(p_h) = \delta_{g,h}$ para todo $p_h \in (kG)^*$ (veja o Exemplo 1.1.17). Agora apresentamos os elementos do contexto de Morita:

(i) O anel dos coinvariantes é

$$\begin{aligned}B &= A^{\mathrm{co}\, A\otimes (kG)^*}\\ &= \{b \in A \mid b(1_A \otimes \sum_{g\in G} p_g) = (1_A \otimes \sum_{g\in G} p_g) b\}\\ &= \{b \in A \mid \sum_{g\in G} b \otimes p_g = \sum_{g\in G} g(b) \otimes p_g\}\\ &= \{b \in A \mid g(b) = b,\ \forall\, g \in G\}\\ &= A^G.\end{aligned}$$

(ii) O dual à esquerda $^{*}\mathcal{C} = {}_A\operatorname{Hom}(A \otimes (kG)^*, A)$ é caracterizado via o isomorfismo do Lema 4.3.1 por $^{*}\mathcal{C} \cong ((kG)^{**})^{\mathrm{op}} \# A$, e cujo produto é dado por

$$\begin{aligned}(f_g \# a)(f_h \# a') &= (f_h)_{(1)} * f_g \# (f_h)_{(2)}(a_{[1]}) a_{[0]} a'\\ &= f_h * f_g \# \sum_{t\in G} f_h(p_t) t(a) a'\\ &= f_{hg} \# \sum_{t\in G} \delta_{h,t} t(a) a'\\ &= f_{hg} \# h(a) a'.\end{aligned}$$

(iii) O anel A é $(B,((kG)^{**})^{\mathrm{op}}\# A)$-bimódulo com ações

$$b\triangleright a = ba \ \text{ e } \ a\triangleleft (f_g\# a') = \sum_{h\in G} f_g(p_h)h(a)a' = g(a)a',$$

para todos $a\in A$, $b\in B$ e $f_g\# a'\in (kG)^{**})^{\mathrm{op}}\# A$.

(iv) Vejamos a descrição do bimódulo

$$\hat{Q} = \{y\in ((kG)^{**})^{\mathrm{op}}\# A \mid y(f_h\# 1_A) = \langle f_h, 1_{(kG)^*}\rangle y, \ \forall\ h\in G\}.$$

Seja $y=\sum_{g\in G} f_g\# a_g$ um elemento arbitrário de $((kG)^{**})^{\mathrm{op}}\# A$. Então temos,

$$\begin{aligned}
&(\sum_{g\in G} f_g\# a_g)(f_h\# 1_A) = f_h(1_{(kG)^*})(\sum_{g\in G} f_g\# a_g), \ \forall\ h\in G\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{g\in G}(f_g\# a_g)(f_h\# 1_A) = 1_k(\sum_{g\in G} f_g\# a_g), \ \forall\ h\in G\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{g\in G} f_{hg}\# h(a_g) = \sum_{g\in G} f_g\# a_g, \ \forall\ h\in G\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{h^{-1}g\in G} f_g\# h(a_{h^{-1}g}) = \sum_{g\in G} f_g\# a_g, \ \forall\ h\in G,\\
\Leftrightarrow\ &f_g\# h(a_{h^{-1}g}) = f_g\# a_g, \ \forall\ h,g\in G,\\
\Leftrightarrow\ &h(a_{h^{-1}g}) = a_g, \ \forall\ h,g\in G,
\end{aligned}$$

em particular, para $h=g$ temos $g(a_e)=a_g$, logo

$$y=\sum_{g\in G} f_g\# g(a_e)$$

e portanto $\hat{Q}$ é definido simplesmente por

$$\hat{Q} = \{\sum_{g\in G} f_g\# g(a)\in ((kG)^{**})^{\mathrm{op}}\# A \mid a\in A\}.$$

Observamos que $\hat{Q}$ admite outra caracterização, mais familiar. Com efeito, temos um isomorfismo k-linear

$$\theta : A\to \hat{Q}$$

dado em $a\in A$ por

$$\theta(a) = \sum_{h\in G} f_h\# h(a).$$

Na realidade, a estrutura de $(((kG)^{**})^{\mathrm{op}}\# A, B)$-bimódulo em $\hat{Q}$ pode ser transportada para A, tornando θ um isomorfismo de bimódulos. A ação à direita de B em

A é apenas a multiplicação $a \blacktriangleleft b = ab$, para todos $a \in A$ e $b \in B$. Agora para a ação à esquerda temos

$$\begin{aligned}(f_g \# a') \blacktriangleright (\sum_{h\in G} f_h \# h(a)) &= (f_g \# a')(\sum_{h\in G} f_h \# h(a))\\ &= \sum_{h\in G} f_{hg} \# h(a')h(a)\\ &= \sum_{h\in G} f_{hg} \# h(a'a)\\ &= \sum_{h\in G} f_h \# h(g^{-1}(a'a)),\end{aligned}$$

logo

$$(f_g \# a') \blacktriangleright a = g^{-1}(a'a).$$

(v) A aplicação $\hat{\tau} : A \otimes_{((kG)^{**})^{\mathrm{op}} \# A} A \to B$ é definida por

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(a \otimes_{(H^*)^{\mathrm{op}} \# A} a') &= {}^*\widetilde{\mathsf{can}}(\sum_{h\in G} f_h \# h(a'))(a)\\ &= \sum_{h\in G} h(a)h(a')\\ &= \sum_{h\in G} h(aa'),\end{aligned}$$

para todo $a \otimes_{((kG)^{**})^{\mathrm{op}} \# A} a', \in A \otimes_{((kG)^{**})^{\mathrm{op}} \# A} A$.

(vi) A aplicação $\hat{\mu} : A \otimes_B A \to (H^*)^{\mathrm{op}} \# A$ é definida por

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(a \otimes_B a') &= (\sum_{h\in G} f_h \# h(a))(\varepsilon^* \# a')\\ &= \sum_{h\in G} \varepsilon^*_{(1)} * f_h \# \sum_{l\in G} \varepsilon^*_{(2)}(p_l) l(h(a))a'\\ &= \sum_{h\in G} \varepsilon^* * f_h \# \sum_{l\in G} \varepsilon^*(p_l) l(h(a))a'\\ &= \sum_{h\in G} f_h \# \sum_{l\in G} \delta_{l,e}\ l(h(a))a'\\ &= \sum_{h\in G} f_h \# h(a)a',\end{aligned}$$

para todo $a \otimes_B a \in A \otimes_B A$.

Finalmente, o Corolário 4.3.3 toma a seguinte forma

Corolário 4.4.1. *Sejam G um grupo finito e A uma G-módulo álgebra. Denote $B = A^G$ e $B' \subset B$ um subanel. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) (a) $\mathsf{can}' : A \otimes_{B'} A \to A \otimes (kG)^*$, *dada por* $\mathsf{can}(a' \otimes_B a) = \sum_{g \in G} a' g(a) \otimes p_g$ *é bijetora;*

   (b) *A é fielmente plano como B'-módulo à esquerda.*

2) (a) ${}^*\widetilde{\mathsf{can}} : ((kG)^{**})^{\mathrm{op}} \# A \to {}_B\mathrm{End}(A)^{\mathrm{op}}$, *dada por* ${}^*\widetilde{\mathsf{can}}(f_g \# a)(a') = g(a')a$ *é um isomorfismo de k-álgebras;*

   (b) *A é um B'-progerador à esquerda.*

3) (a) $B = B'$;

   (b) *o contexto de Morita* $(B, ((kG)^{**})^{\mathrm{op}} \# A, A, \hat{Q}, \hat{\tau}, \hat{\mu})$ *é estrito.*

4) (a) $B = B'$;

   (b) *o par adjunto de funtores* $(F = - \otimes_B A, G = (-)^G)$ *é uma equivalência entre a categoria de B-módulos à direita e a categoria de A-módulos à direita em que G age como grupo de automorfismos A-semilineares à direita.*

Em conclusão, enunciamos o Teorema 4.2 de [20], o qual descreve condições equivalentes, no caso de uma extensão de anéis $A \supseteq B$, para A ser uma *extensão de Galois de B com respeito a um grupo G.*

Teorema 4.4.2. *Seja $A \supseteq B$ uma extensão de anéis e G um grupo finito agindo por automorfismos de anéis em A tal que $A^G = B$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) *A aplicação* $\psi : A \otimes_B A \to \prod_{g \in G} A$, *dada por* $\psi(x \otimes y) = (xg(y))_{g \in G}$, *é um isomorfismo de A-módulos à esquerda.*

(b) *Existem elementos* $x_i, y_i \in A$, *com* $1 \leq i \leq n$, *tais que* $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i g(y_i) = \delta_{1,g} 1_A$, *para todo* $g \in G$.

(c) *A é projetivo finitamente gerado como B-módulo à direita e a aplicação* $\varphi : A * G \to \mathrm{End}_B(A)$, *dada por* $\varphi(xu_g)(y) = xg(y)$, *é um isomorfismo de A-módulos à esquerda e B-módulos à direita.*

(d) *Para cada $A * G$-módulo à esquerda M a aplicação* $\mu : A \otimes_B M^G \to M$, *dada por* $\mu(x \otimes m) = xm$ *é um isomorfismo de A-módulos à esquerda.*

(e) *A aplicação* $\delta : A \otimes_B A \to A * G$, *dada por* $\delta(x \otimes y) = \sum_{g \in G} xg(y)u_g$, *é um epimorfismo de $A * G$-bimódulos.*

(f) $AtA = A * G$, *em que* $t = \sum_{g \in G} u_g$.

(g) *A é um gerador para a categoria de todos os $A * G$-módulos à esquerda.*

Apêndice A

Resultados em teoria de categorias

Nesta seção reunimos um apanhado de definições e exemplos da teoria de categorias. Estes resultados se encontram em [19] e [21].

Definição A.1. *Uma categoria* $\mathcal{C}$ *é uma tripla* $\mathcal{C} = (\operatorname{Ob}\mathcal{C}, \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}, \circ)$ *definida por:*

(i) *Uma classe* $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$*, chamada classe de objetos de* $\mathcal{C}$*.*

(ii) *Para cada par* (X, Y) *de objetos de* $\mathcal{C}$*, um conjunto* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$*, cujos elementos são morfismos de* X *para* Y*. Ademais, para cada objeto* X *de* $\mathcal{C}$ *um morfismo* $1_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$*, chamado identidade em* X*.*

(iii) *Para cada tripla de objetos* (X, Y, Z) *de* $\mathcal{C}$*, uma aplicação*

$$\circ : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

cuja imagem em um par (g, f) *de morfismos é denotada por* $g \circ f$*, ou simplesmente* gf*, chamada* ***composição de morfismos*** *e satisfazendo as duas condições a seguir:*

(C_1*)* *Se* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$*,* $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ *e* $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$*, então*

$$h(gf) = (hg)f.$$

(C_2*)* *Para cada* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *as composições* $f1_X$ *e* $1_Y f$ *são iguais a* f*, isto é*

$$f1_X = f \quad e \quad 1_Y f = f.$$

Observação A.2. *Dada uma categoria* $\mathcal{C}$ *qualquer e objetos* X, Y *em* $\mathcal{C}$*, adotamos a seguinte notação para o conjunto de morfismos de* X *para* Y*:*

$$\mathcal{C}(X, Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Alguns exemplos de categorias.

Exemplo A.3. *A categoria* Sets *tem por objetos conjuntos, por morfismos funções e a composição usual.*

Exemplo A.4. *Seja k um anel comutativo. A categoria* $\mathrm{Alg}\, k$ *das k-álgebras tem como morfismos os morfismos de k-álgebras e a composição usual.*

Exemplo A.5. *Seja A um anel. A categoria ${}_A\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_A$) de A-módulos à esquerda (à direita) tem como morfismos as aplicações A-lineares à esquerda (à direita) e a composição usual.*

Exemplo A.6. *Sejam A um anel e $\mathcal{C}$ um coanel sobre A. A categoria $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ (${}^{\mathcal{C}}\mathcal{M}$) dos $\mathcal{C}$-comódulos à direita (à esquerda) tem como morfismos os morfismos de $\mathcal{C}$-comódulos à direita (à esquerda) e a composição usual.*

Exemplo A.7. *Seja A um anel. A família de todos os A-coanéis e os morfismos entre eles formam uma categoria, denotada por* A-Corings.

Exemplo A.8. *Seja A um anel. A família de todos os A-anéis e os morfismos entre eles formam uma categoria, denotada por* A-Rings.

Definição A.9. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f, g : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{C}$. Um* ***equalizador de** f **e** g é um par (E, h), em que E é um objeto de $\mathcal{C}$ e $h : E \to X$ um morfismo satisfazendo:*

(i) $fh = gh$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(ii) Se $h' : E' \to X$ é um morfismo tal que $fh' = gh'$, então existe um único morfismo $k : E' \to E$ tal que $h' = hk$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ E' \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h'"'] & & \end{tikzcd}$$

O equalizador de um par de morfismos f, g também é denotado por $\mathrm{Eq}(f, g)$. No caso em que $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana, o equalizador $\mathrm{Eq}(f, g)$ coincide com o núcleo da diferença entre f e g, isto é, $\mathrm{Eq}(f, g) = \mathrm{Ker}(f - g)$.

Definição A.10. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ duas categorias.*

(*i*) *Um* ***funtor covariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *é uma aplicação que associa a cada objeto* X *de* $\mathcal{C}$ *um objeto* $F(X)$ *ou* FX *de* $\mathcal{D}$ *e para cada morfismo* $f : X \to Y$ *de* $\mathcal{C}$ *um morfismo* $F(f)$ *ou* $Ff : FX \to FY$ *de* $\mathcal{D}$ *tal que*

(F_1) *se* gf *é definido em* $\mathcal{C}$, *então* $F(g)F(f)$ *é definido em* $\mathcal{D}$ *e* $F(gf) = F(g)F(f)$;

(F_2) *para todo objeto* X *de* $\mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{FX}$.

(*ii*) *Um* ***funtor contravariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *é uma aplicação que associa a cada objeto* X *de* $\mathcal{C}$ *um objeto* $F(X)$ *ou* FX *de* $\mathcal{D}$ *e para cada morfismo* $f : X \to Y$ *de* $\mathcal{C}$ *um morfismo* $F(f)$ *ou* $Ff : FY \to FX$ *de* $\mathcal{D}$ *tal que*

(F_1) *se* gf *é definido em* $\mathcal{C}$, *então* $F(f)F(g)$ *é definido em* $\mathcal{D}$ *e* $F(gf) = F(f)F(g)$;

(F_2) *para todo objeto* X *de* $\mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{FX}$.

Exemplo A.11. *Se* $\mathcal{C} = \mathcal{M}_A$ *existe um funtor* $U : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$, *chamado* ***funtor esquecimento***, *que associa a cada* A*-módulo à direita seu conjunto correspondente e a cada morfismo a função correspondente.*

Exemplo A.12. *Sejam* $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ *três categorias e* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *e* $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *dois funtores. O funtor composto* $G \circ F$ *ou* GF *de* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{E}$ *é definido por* $(GF)(X) = G(F(X))$ *para todo objeto* X *de* $\mathcal{C}$ *e* $(GF)(f) = G(F(f))$ *para todo morfismo* f *de* $\mathcal{C}$.

Exemplo A.13. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria e* X *um objeto de* $\mathcal{C}$. *O funtor covariante* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ *associa a cada objeto* Y *de* $\mathcal{C}$ *o conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *e a cada morfismo* $f : Y \to Z$ *a aplicação*

$$f_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

dada por $f_*(g) = fg$.

Exemplo A.14. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria e* X *um objeto de* $\mathcal{C}$. *O funtor contravariante* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ *associa a cada objeto* Y *de* $\mathcal{C}$ *o conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ *e a cada morfismo* $f : Y \to Z$ *a aplicação*

$$f^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

dada por $f^*(g) = gf$.

Exemplo A.15. *Sejam* k *um anel comutativo,* A *e* B *duas* k*-álgebras e* ${}_BM_A$ *um* (B, A)*-bimódulo. Então definimos o funtor tensor* $F = - \otimes_B M : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A$ *para cada* B*-módulo* L *por*

$$F(L) = L \otimes_B M,$$

e para cada e morfismo de B-módulos $f : L \to L'$ por

$$F(f) = f \otimes_B I_M : L \otimes_B M \to L' \otimes_B M.$$

Abaixo enunciamos algumas caracterizações úteis para funtores.

Definição A.16. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ considere a aplicação*

$$F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FX, FY),$$

definida por

$$F_{X,Y}(f) = Ff,$$

para todo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Então o funtor F é dito

(i) ***fiel*** *se $F_{X,Y}$ é injetor para todos $X, Y \in \mathcal{C}$;*

(ii) ***pleno*** *se $F_{X,Y}$ é sobrejetor para todos $X, Y \in \mathcal{C}$;*

(iii) ***fiel e pleno*** *se $F_{X,Y}$ é bijetor para todos $X, Y \in \mathcal{C}$;*

(iv) ***essencialmente sobrejetivo*** *se para todo $A \in \mathcal{D}$ existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong A$.*

Definição A.17. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores covariantes. Um **morfismo funtorial**, ou **transformação natural**, $\varphi : F \to G$ consiste numa família de morfismos $\varphi_X : FX \to GX$ de $\mathcal{D}$, com $X \in \mathcal{C}$, tais que, se $f : X \to Y$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então $\varphi_Y \circ Ff = Gf \circ \varphi_X$, ou seja, o seguinte quadrado é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\varphi_Y"'] & GY \end{tikzcd}$$

Exemplo A.18. *Dado $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$, definimos a transformação natural*

$$f_{**} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$$

para cada morfismo $h : Z \to X$ por $f_{**}(h) = fh$.

Exemplo A.19. *Dado $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$, definimos a transformação natural*

$$f^{**} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, -) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$$

para cada morfismo $h : Y \to Z$ por $f^{**}(h) = hf$.

Dados funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, denota-se por $\mathrm{Nat}(F, G)$ a família das transformações naturais de F para G.

Teorema A.20 (Lema de Yoneda)**.** *Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ um funtor e $X \in \mathcal{C}$ um objeto. Então existe uma bijeção*

$$\mathcal{Y} : \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(X, -), F) \to FX,$$

dada em cada transformação natural $\alpha : \mathcal{C}(X, -) \to F$ por $\alpha_X(I_X)$.

Demonstração. Veja [19, p. 61]. □

Apêndice B

Isomorfismo, equivalência e adjunção de categorias

Nesta seção apresentamos os conceitos de isomorfismo, equivalência e adjunção entre categorias. Em especial desenvolvemos formulações equivalentes do conceito de adjunção entre dois funtores. Estes resultados se encontram em [19] e [21].

Definição B.1. *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito um* ***isomorfismo de categorias****, se existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que são válidas as igualdades*

$$FG = I_{\mathcal{D}} \quad e \quad GF = I_{\mathcal{C}}.$$

Definição B.2. *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito uma* ***equivalência de categorias****, se existem um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais*

$$FG \cong I_{\mathcal{D}} \quad e \quad GF \cong I_{\mathcal{C}}.$$

Perceba que um *isomorfismo* de categorias é mais restritivo que uma *equivalência*, visto que no primeiro caso são válidas *igualdades* entre funtores, já no segundo apenas *isomorfismos naturais*. Vejamos agora outra descrição para o conceito de equivalência entre categorias.

Teorema B.3. *Um funtor definindo uma equivalência de categorias é fiel, pleno e essencialmente sobrejetivo. Assumindo o axioma da escolha, todo funtor com essas propriedades define uma equivalência de categorias.*

Demonstração. Veja [21, Theorem 1.5.9]. □

Definição B.4. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Uma* ***adjunção de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$*** *é uma tripla (F, G, φ), com $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores e φ uma aplicação que associa a cada par $X \in \mathcal{C}$ e $A \in \mathcal{D}$ uma bijeção*

$$\varphi = \varphi_{X,A} : \mathcal{D}(FX, A) \to \mathcal{C}(X, GA) \tag{B.1}$$

natural em X e A, isto é, satisfaz os diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(FX,A) \arrow[r, "\varphi_{X,A}"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathcal{C}(X,GA) \arrow[d, "(Gf)_*"] \\
\mathcal{D}(FX,B) \arrow[r, "\varphi_{X,B}"'] & \mathcal{C}(X,GB)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(FY,A) \arrow[r, "\varphi_{Y,A}"] \arrow[d, "(Fh)^*"'] & \mathcal{C}(Y,GA) \arrow[d, "h^*"] \\
\mathcal{D}(FX,A) \arrow[r, "\varphi_{X,A}"'] & \mathcal{C}(X,GA)
\end{tikzcd}$$

para todos $f \in \mathcal{D}(A,B)$ e $h \in \mathcal{C}(X,Y)$, ou ainda, são válidas as igualdades

$$(Gf)_* \circ \varphi_{X,A} = \varphi_{X,B} \circ f_*, \tag{B.2}$$

$$\varphi_{X,A} \circ (Fh)^* = h^* \circ \varphi_{Y,A}. \tag{B.3}$$

Observação B.5. *Ao descrever uma adjunção (F,G,φ) é comum fazer referência apenas aos funtores envolvidos. Neste caso dizemos que F é um **adjunto à esquerda** de G, ou ainda, que (F,G) formam um **par adjunto**.*

O próximo resultado (veja [19, Theorem IV.1.1; Theorem IV.1.2]) nos permite descrever adjunções através de um par de transformações naturais: a *unidade* e a *counidade*.

Teorema B.6. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Se (F,G,φ) é uma adjunção de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$, então existem transformações naturais*

$$\eta : I_{\mathcal{C}} \to GF \ \textit{(unidade)}$$

e

$$\varepsilon : FG \to I_{\mathcal{D}} \ \textit{(counidade)}$$

satisfazendo os diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
& F
\end{tikzcd} \tag{B.4}$$

Reciprocamente, dadas transformações naturais $\eta : I_{\mathcal{C}} \to GF$ e $\varepsilon : FG \to I_{\mathcal{D}}$ satisfazendo os diagramas (B.4), temos que (F,G) formam um par adjunto.

Demonstração. Suponha que (F,G,φ) é uma adjunção de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$. Fixando $A = FX \in$

$\mathcal{D}$ em (B.1), temos uma transformação natural bijetora

$$\varphi_{X,FX} : \mathcal{D}(FX, FX) \to \mathcal{C}(X, GFX),$$

deste modo construímos uma transformação natural $\eta : I_{\mathcal{C}} \to GF$ pondo

$$\eta_X = \varphi_{X,FX}(1_{FX}) : X \to GFX,$$

para cada $X \in \mathcal{C}$. Vejamos que η é de fato natural: dado $h \in \mathcal{C}(X, Y)$ temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "h"'] & GFX \arrow[d, "GFh"] \\
Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & GFX
\end{tikzcd}$$

cuja comutatividade segue de

$$\begin{aligned}
(GFh) \circ \eta_X &= (GFh) \circ \varphi_{X,FX}(1_{FX}) \\
&= ((GFh)_* \circ \varphi_{X,FX})(1_{FX}) \\
&\overset{(B.2)}{=} (\varphi_{X,FY} \circ (Fh)_*)(1_{FX}) \\
&= \varphi_{X,FY}(Fh) \\
&= \varphi_{X,FY}(1_{FY} \circ Fh) \\
&= (\varphi_{X,FY} \circ (Fh)^*)(1_{FY}) \\
&\overset{(B.3)}{=} (h^* \circ \varphi_{Y,FY})(1_{FY}) \\
&= h^*(\varphi_{Y,FY}(1_{FY})) \\
&= \eta_Y \circ h. \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}$$

Observamos que φ pode ser descrita em termos da transformação natural η: dado $f \in \mathcal{D}(FX, A)$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \varphi_{X,A}(f) \\
&= \varphi_{X,A}(f \circ 1_{FX}) \\
&= (\varphi_{X,A} \circ f_*)(1_{FX}) \qquad \text{(B.6)} \\
&\overset{(B.2)}{=} ((Gf)_* \circ \varphi_{X,FX})(1_{FX}) \\
&= Gf \circ \eta_X.
\end{aligned}$$

Analogamente, pondo $X = GA \in \mathcal{C}$ em (B.1), temos uma bijeção natural

$$\varphi_{GA,A}{}^{-1} : \mathcal{C}(GA, GA) \to \mathcal{D}(FGA, A).$$

Logo, produzimos uma transformação natural $\varepsilon : FG \to I_{\mathcal{D}}$, pondo

$$\varepsilon_A = \varphi_{GA,A}{}^{-1}(1_{GA}) : FGA \to A$$

para cada $A \in \mathcal{D}$. Também evidenciamos que φ^{-1} pode ser caracterizada por meio de ε, isto é, dado $g \in \mathcal{C}(X, GA)$ temos

$$\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_A \circ Fg. \tag{B.7}$$

Vejamos que os diagramas (B.4) são satisfeitos, isto é, para cada $X \in \mathcal{C}$ e $A \in \mathcal{D}$ verificamos a comutatividade de

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "\eta_{GA}"] \arrow[dr, equal] & GFGA \arrow[d, "G\varepsilon_A"] \\ & GA \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F\eta_X"] \arrow[dr, equal] & FGFX \arrow[d, "\varepsilon_{FX}"] \\ & FX \end{tikzcd}$$

Para o primeiro,

$$\begin{aligned} G\varepsilon_A \circ \eta_{GA} &\overset{(B.6)}{=} \varphi(\varepsilon_A) \\ &= \varphi_{GA,A}(\varphi_{GA,A}{}^{-1}(1_{GA})) \\ &= 1_{GA} \end{aligned}$$

e para o segundo,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{FX} \circ F\eta_X &\overset{(B.7)}{=} \varphi^{-1}(\eta_X) \\ &= \varphi_{X,FX}{}^{-1}(\varphi_{X,FX}(1_{FX})) \\ &= 1_{FX}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $\eta : I_{\mathcal{C}} \to GF$ e $\varepsilon : FG \to I_{\mathcal{D}}$ são transformações naturais satisfazendo os diagramas (B.4). Definimos aplicações

$$\Gamma = \Gamma_{X,A} : \mathcal{D}(FX, A) \to \mathcal{C}(X, GA)$$

e

$$\Theta = \Theta_{X,A} : \mathcal{C}(X, GA) \to \mathcal{D}(FX, A)$$

para cada $f \in \mathcal{D}(FX, A)$ e $g \in \mathcal{C}(X, GA)$ por

$$\Gamma(f) = Gf \circ \eta_X \ \text{ e } \ \Theta(g) = \varepsilon_A \circ Fg.$$

Verifica-se que Γ e Θ são transformações naturais para cada $X \in \mathcal{C}$ e $A \in \mathcal{D}$. Vejamos que são mutuamente inversas, logo definem uma bijeção e consequentemente uma adjunção entre F e G. Dados $f \in \mathcal{D}(FX, A)$ e $g \in \mathcal{C}(X, GA)$, temos

$$\begin{aligned}
(\Gamma \circ \Theta)(g) &= \Gamma(\Theta(g)) \\
&= \Gamma(\varepsilon_A \circ Fg) \\
&= G(\varepsilon_A \circ Fg) \circ \eta_X \\
&= G\varepsilon_A \circ (GFg \circ \eta_X) \\
&\overset{(1)}{=} G\varepsilon_A \circ (\eta_{GA} \circ g) \\
&= (G\varepsilon_A \circ \eta_{GA}) \circ g \\
&\overset{(2)}{=} 1_{GA} \circ g \\
&= g,
\end{aligned}$$

donde (1) segue da naturalidade de η e (2) do diagrama (B.4). Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Theta \circ \Gamma)(f) &= \Theta(\Gamma(f)) \\
&= \Theta(Gf \circ \eta_X) \\
&= \varepsilon_A \circ F(Gf \circ \eta_X) \\
&= (\varepsilon_A \circ FGf) \circ F\eta_X \\
&\overset{(3)}{=} (f \circ \varepsilon_{FX}) \circ F\eta_X \\
&= f \circ (\varepsilon_{FX} \circ F\eta_X) \\
&\overset{(4)}{=} f \circ 1_{FX} \\
&= f,
\end{aligned}$$

com (3) decorrendo da naturalidade de ε e (4) do diagrama (B.4), como queríamos. $\square$

Observação B.7. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias abelianas. Se (F, G) é um par adjunto, então F é exato à direita e G é exato à esquerda (veja [21, Corollary 4.5.11]). Em particular, se F e G são equivalências de categorias, temos que a unidade e counidade são isomorfismos, assim (G, F) também formam um par adjunto e portanto F e G são exatos.*

A proposição a seguir nos permite compreender a condição de funtores adjuntos serem fiéis e plenos por meio das transformações naturais *unidade* e *counidade* (veja [21, Lemma 4.5.13]). Antes de enuncia-la, é necessário um lema:

Lema B.8. *Seja* $f_{**} : \mathcal{C}(-, X) \to \mathcal{C}(-, Y)$ *a transformação natural induzida por um morfismo* $f : X \to Y$ *de* $\mathcal{C}$ *(veja o Exemplo A.18). Então,*

(i) f_{**} *é monomorfismo se, e somente se,* f *é monomorfismo;*

(ii) f_{**} *é epimorfismo se, e somente se,* f *é epimorfismo que cinde (*f *possui inversa à direita);*

(iii) f_{**} *é isomorfismo se, e somente se,* f *é isomorfismo.*

Demonstração. (i) f_{**} é monomorfismo se para todos $g, h \in \mathcal{C}(X, Z)$ é válido que $f_{**}(g) = f_{**}(h)$ implica $g = h$, equivalentemente, $fg = fh$ implica $g = h$, ou ainda, que f é monomorfismo.

(ii) Se f_{**} é epimorfismo, então existe $h \in \mathcal{C}(Y, X)$ tal que $f_{**}(h) = fh = I_Y$, ou seja, f é epimorfismo que cinde. Por outro lado, se f é epimorfismo que cinde com inversa à direita g, dado $h \in \mathcal{C}(Z, Y)$ um morfismo arbitrário, é fácil ver que $f_{**}(gh) = fgh = h$, logo f_{**} é epimorfismo.

(iii) Supondo f_{**} isomorfismo, então f_{**} é, em particular, monomorfismo e epimorfismo. Pelos itens (i) e (ii) temos que f é monomorfismo e epimorfismo que cinde, logo f é isomorfismo, pois se g é tal que $fg = 1_Y$ então $fgf = f1_X$ e como f é monomorfismo segue $gf = 1_X$. Reciprocamente, se f é isomorfismo então f_{**} também é, com inversa a transformação natural ${f^{-1}}_{**}$.

□

Proposição B.9. *Sejam* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *funtores formando um par adjunto* (F, G) *e* $\eta : I_{\mathcal{C}} \to GF$, $\varepsilon : FG \to I_{\mathcal{D}}$ *a unidade e counidade da adjunção, respectivamente. Nessas condições, temos que*

(i) F *é fiel e pleno se, e somente se,* η *é isomorfismo natural;*

(ii) G *é fiel e pleno se, e somente se,* ε *é isomorfismo natural.*

Demonstração. Provaremos apenas o item (i), visto que (ii) é análogo (para mais detalhes veja [19, Theorem IV.3.1]). Por hipótese (F, G) formam um par adjunto, logo temos bijeções

$$\varphi_{X,FY} : \mathcal{D}(FX, FY) \to \mathcal{C}(X, GFY)$$

para todos $X, Y \in \mathcal{C}$. Assim considere a aplicação composta, natural em X e Y,

$$\varphi_{X,FY} \circ F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, GFY)$$

dada para cada $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ por

$$\begin{aligned}(\varphi_{X,FY} \circ F_{X,Y})(f) &= \varphi_{X,FY}(F_{X,Y}(f)) \\ &= \varphi_{X,FY}(Ff) \\ &\overset{(B.6)}{=} GFf \circ \eta_X \\ &\overset{(B.5)}{=} \eta_Y \circ f,\end{aligned}$$

ou ainda, $\varphi_{X,FY} \circ F_{X,Y} = (\eta_Y)_{**}$. Agora temos as seguintes equivalências lógicas, que concluem a prova:

$$\begin{aligned}F \text{ é fiel e pleno} &\Leftrightarrow F_{X,Y} \text{ é bijetor para todos } X,Y \in \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \varphi_{X,FY} \circ F_{X,Y} \text{ é bijetor para todos } X,Y \in \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow (\eta_Y)_{**} \text{ é bijetor para todo } Y \in \mathcal{C} \\ &\overset{(B.8)}{\Leftrightarrow} \eta_Y \text{ é bijetor para todo } Y \in \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \eta \text{ é isomorfismo natural.}\end{aligned}$$

□

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, M. M. S.; BATISTA, E. *An introduction to Hopf algebras: A categorical approach*. Maringá, Brasil, 2014. In: *XXIII Brazilian Algebra Meeting*. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/2016-1/Maringa.pdf>. Acesso em: 20 out. 2023.

[2] ASSEM, I. *Algèbre et Modules*: Cours et exercices. Ottawa: Presses de l'Université d'Ottawa, 1997.

[3] AUSLANDER, M.; GOLDMAN, O. The Brauer Group of a Commutative Ring. *Transactions of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 97, n. 3, p. 367–409, 1960.

[4] BÓSCHI, J. *Ações diagonais de categorias de Hopf*. 186 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2022. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/81228>. Acesso em: 15 jan. 2024.

[5] BRZEZIŃSKI, T. The Structure of Corings: Induction Functors, Maschke-Type Theorem, and Frobenius and Galois-Type Properties. *Algebras and Representation Theory*, Springer Publishing, n. 5, p. 389–410, 2002.

[6] BRZEZIŃSKI, T.; HAJAC, P. M. Coalgebra extensions and algebra coextensions of Galois type. *Communications in Algebra*, Taylor & Francis, v. 27, n. 3, p. 1347–1367, 1999.

[7] BRZEZIŃSKI, T.; WISBAUER, R. *Corings and Comodules*. 1. ed. Nova York: Cambridge University Press, 2003.

[8] CAENEPEEL, S. Galois corings from the descent theory point of view. In: *Galois Theory, Hopf Algebras, and Semiabelian Categories*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2004. p. 174–186.

[9] CAENEPEEL, S.; GROOT, E. de; VERCRUYSSE, J. Galois theory for comatrix corings: Descent theory, Morita theory, Frobenius and separability properties. *Transactions of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 359, n. 1, 2007.

[10] CAENEPEEL, S.; VERCRUYSSE, J. *Hopf algebras*. Bruxelas: Vrije Universiteit Brussel, 2014. Notas de aula. Disponível em: <`http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Disciplinas_arquivos/Hopfalgebra.pdf`>. Acesso em: 26 abr. 2023.

[11] CHASE, S. U.; SWEEDLER, M. E. *Hopf Algebras and Galois Theory*. Berlim: Springer-Verlag, 1969.

[12] DĂSCĂLESCU, S.; NĂSTĂSESCU, C.; RAIANU, Ş. *Hopf Algebras: An Introduction*. 1. ed. Nova York: Marcel Dekker, 2001.

[13] FERREIRA, V. de O.; MURAKAMI, L. S. I. *Uma Introdução às álgebras de Hopf*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

[14] JACOBSON, N. An Extension of Galois Theory to Non-Normal and Non-Separable Fields. *American Journal of Mathematics*, Johns Hopkins University Press, v. 66, n. 1, p. 1–29, 1944.

[15] JACOBSON, N. *Basic Algebra I*. 2. ed. Nova York: W. H. Freeman & Company, 1985.

[16] JACOBSON, N. *Basic Algebra II*. 2. ed. Nova York: W. H. Freeman & Company, 1985.

[17] KREIMER, H. F.; TAKEUCHI, M. Hopf Algebras and Galois Extensions of an Algebra. *Indiana University Mathematics Journal*, Indiana University Mathematics Department, v. 30, n. 5, p. 675–692, 1981.

[18] LAM, T. Y. *Lectures on Modules and Rings*. 1. ed. Nova York: Springer, 1998.

[19] LANE, S. M. *Categories for the working mathematician*. 2. ed. Nova York: Springer, 1998.

[20] PAQUES, A. Galois Theories: A Survey. In: *Advances in Mathematics and Applications: Celebrating 50 years of the Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computing, University of Campinas*. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 247–273.

[21] RIEHL, E. *Category theory in context*. Nova York: Dover Publications, 2016.

[22] SCHAUENBURG, P. Hopf-Galois and Bi-Galois Extensions. In: *Galois Theory, Hopf Algebras, and Semiabelian Categories*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2004. p. 469–515.

[23] SCHNEIDER, H. J. Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras. *Israel Journal of Mathematics*, v. 72, p. 167–195, 1990.

[24] SWEEDLER, M. The Predual Theorem to the Jacobson-Bourbaki Theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 213, p. 391–406, 1975.