

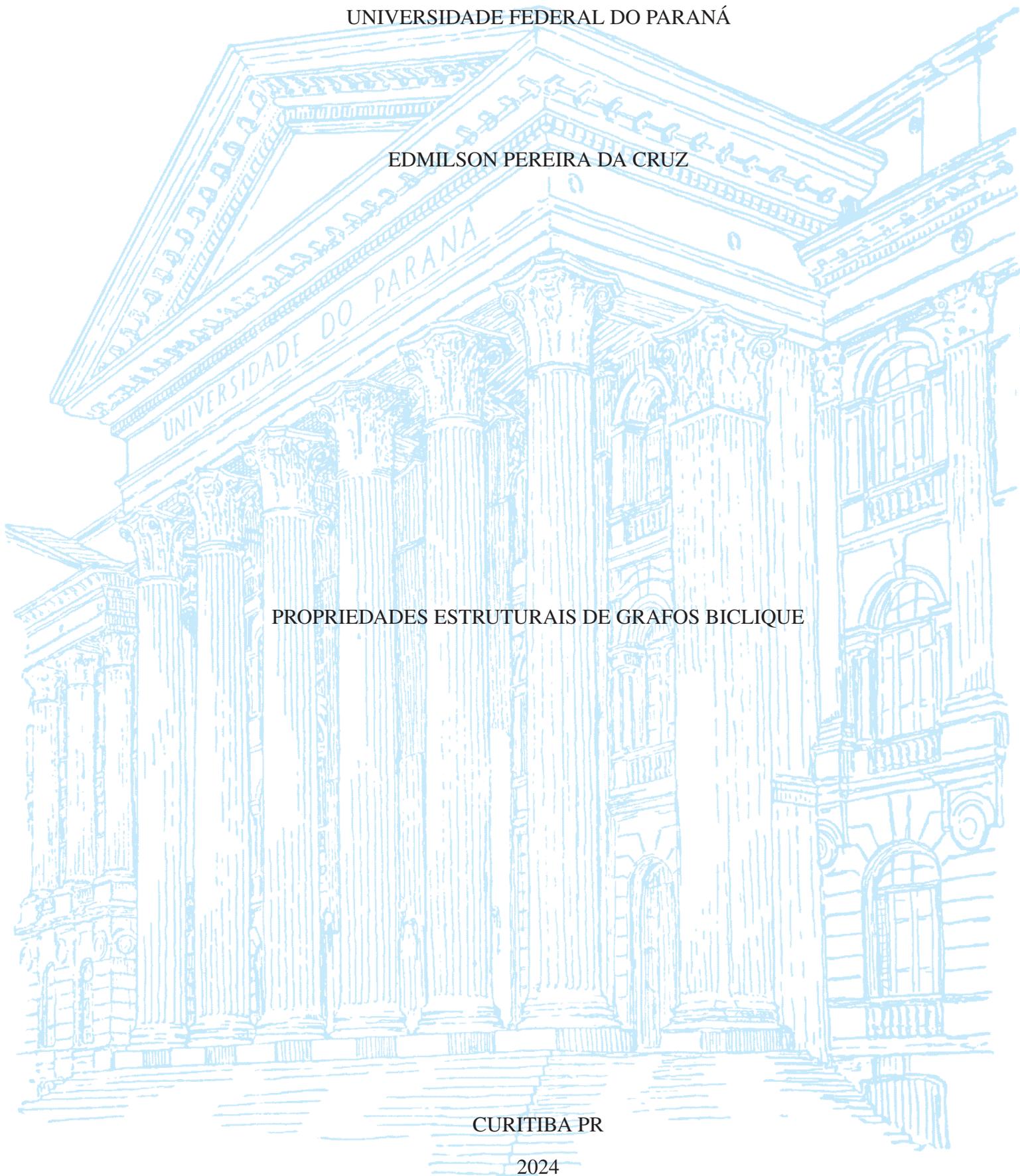
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDMILSON PEREIRA DA CRUZ

PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DE GRAFOS BICLIQUE

CURITIBA PR

2024



EDMILSON PEREIRA DA CRUZ

PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DE GRAFOS BICLIQUE

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação no Programa de Pós-Graduação em Informática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Computação*.

Orientador: André Luiz Pires Guedes.

Coorientador: Marina Groushaus.

CURITIBA PR

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cruz, Edmilson Pereira da
Propriedades estruturais de grafos biclique / Edmilson Pereira da Cruz. –
Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências
Exatas, Programa de Pós-Graduação em Informática.

Orientador: André Luiz Pires Guedes
Coorientador: Marina Groushaus

1. Grafos. 2. Grafo biclique. I. Universidade Federal do Paraná. II.
Programa de Pós-Graduação em Informática. III. Guedes, André Luiz Pires.
IV. Groushaus, Marina. V. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação INFORMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **EDMILSON PEREIRA DA CRUZ** intitulada: **PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DE GRAFOS BICLIQUE**, sob orientação do Prof. Dr. ANDRÉ LUIZ PIRES GUEDES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 03 de Julho de 2024.

Assinatura Eletrônica

06/07/2024 16:16:04.0

ANDRÉ LUIZ PIRES GUEDES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

05/07/2024 17:33:13.0

LUERBIO FARIA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE
JANEIRO)

Assinatura Eletrônica

09/07/2024 12:03:28.0

MURILO VICENTE GONÇALVES DA SILVA
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

07/07/2024 16:25:25.0

FLAVIA BONOMO-BRABERMAN

Avaliador Externo (UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES)

Assinatura Eletrônica

08/07/2024 16:14:23.0

MARINA ESTHER GROSHAUS
Coorientador(a) (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO
PARANÁ)

*Ao meu pai Clodoaldo
(in memoriam), que me ensi-
nou a usar a responsabilidade como
força guiadora.
À minha mãe Elizabeth, que me en-
sinou a importância da honestidade
e da humildade.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo apoio durante todos os momentos desta longa jornada.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. André Guedes e Prof^a. Marina Groushaus, por motivarem e supervisionarem o desenvolvimento deste trabalho. Também os agradeço por providenciarem os períodos de descanso em meio ao desgaste causado pelo extenso isolamento em resposta à pandemia.

Agradeço aos professores Flavia Bonomo, Luerbio Faria, Murilo da Silva e Renato Carmo pelas participações no exame de qualificação e na defesa final. Suas contribuições levaram à melhoria da qualidade do texto apresentado.

Agradeço aos integrantes do grupo TEORIA por proverem um ambiente acolhedor dedicado ao estudo da ciência da computação teórica.

RESUMO

Esta tese apresenta o estudo sobre propriedades estruturais de grafos biclique em termos de tipos de intersecção entre bicliques maximais. Mostramos que grafos de bicliques mutuamente inclusas de bigrafos de inclusão de intervalos são grafos de permutação e que todo grafo de permutação é subgrafo induzido do grafo de bicliques mutuamente inclusas de algum bigrafo de intervalos. Também provamos a presença de certos subgrafos induzidos para intersecções apenas por vértices, mutuamente inclusas e por aresta não-mutuamente inclusa em grafos bipartidos. Introduzimos o grafo de inclusão de partes de bicliques e uma subclasse dos grafos de comparabilidade que é equivalente à classe dos grafos de inclusão de partes de bicliques de grafos livres de triângulos, do qual nós derivamos uma caracterização da classe dos grafos biclique de grafos livres de triângulos. Nós também sugerimos um algoritmo para a computação de uma pré-imagem do grafo de bicliques mutuamente inclusas de um grafo livre de triângulos. Introduzimos bicliques diferenciadas por aresta e por não-aresta — os quais chamamos de propriedades diferenciadoras — e provamos que toda inclusão mútua é um tipo de diferenciação por não-aresta, que todo par de bicliques intersectantes são diferenciadas por aresta ou por não-aresta e que cada tipo de propriedade diferenciadora é equivalente à presença de algum subgrafo induzido. Analisamos o grafo biclique do *join* entre dois grafos à luz das propriedades estruturais nós cobrimos neste trabalho e apresentamos alguns outros resultados de interesse sobre o estudo de grafos biclique.

Palavras-chave: grafo biclique; classes de grafos; caracterização e reconhecimento.

ABSTRACT

This thesis presents the study on structural properties of biclique graphs in terms of types of intersections between maximal bicliques. We show that the mutually included biclique graphs of interval containment bigraphs are permutation graphs and that every permutation graph is an induced subgraph of the mutually included biclique graph of some interval bigraph. We also prove the presence of certain induced subgraphs for vertex-only, mutually included and edge without mutual inclusion intersections in bipartite graphs. We introduce the inclusion graph of biclique parts of a graph and a subclass of comparability graphs that is equivalent to the class of inclusion graphs of biclique parts of triangle-free graphs, from which we derive a characterization of the class of biclique graphs of triangle-free graphs in terms of partially ordered sets. We also suggest an algorithm for the computation of a pre-image of the mutually included biclique graph of a triangle-free graph. We introduce the edge differentiated and non-edge differentiated bicliques — which we call the differentiated properties — and we prove that every mutual inclusion is a type of differentiation by non-edge, that every pair of intersecting bicliques are differentiated by edge or non-edge, and that each type of differentiating property is equivalent to the presence of some induced subgraph. We analyze the biclique graph of a join between two graphs in light of the structural properties we cover in this work and present some other results of interest on the study of biclique graphs.

Keywords: biclique graph; graph classes; characterization and recognition.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação gráfica de um grafo..	22
2.2	Vizinhança aberta (a) e vizinhança fechada (b) do vértice 1.	23
2.3	Grafo G (a), subgrafo induzido de G (b) e subgrafo gerador de G (c)..	24
2.4	Grafo G (a) e grafo H (b) isomorfo a G	24
2.5	Caminho $(5, 1, 3, 4, 7)$ com o atalho $\{1, 4\}$	25
2.6	Grafos caminhos P_2 (a), P_3 (b) e P_4 (c)..	25
2.7	Ciclo $(1, 2, 6, 5)$ com a corda $\{2, 5\}$	26
2.8	Grafos ciclos C_4 (a), C_5 (b) e C_6 (c).	26
2.9	Grafos rodas W_4 (a), W_5 (b) e W_6 (c).	26
2.10	Grafos completos K_3 (a), K_4 (b) e K_5 (c)..	27
2.11	Grafo G (a), cliques maximais de G (b) e conjuntos independentes maximais de G (c).	27
2.12	Grafos bipartidos completos $K_{2,2}$ (a), $K_{1,3}$ (b) e $K_{3,3}$ (c)..	28
2.13	Grafo G (a) e bicliques maximais de G (b)..	28
2.14	Bicliques com intersecção apenas por vértice (a) e bicliques com intersecção por aresta (b).	29
2.15	Bicliques mutuamente inclusas.	29
2.16	Grafo G (a) e seu complemento \overline{G} (b).	29
2.17	Grafo G (a), grafo H (b) e o grafo $G \cup H$ (c).	30
2.18	Grafo G (a), grafo H (b) e o grafo $G \nabla H$ (c)..	30
2.19	Grafo G (a) e seu grafo linha $L(G)$ (b)..	31
2.20	Grafo G (a) e seu grafo quadrado G^2 (b)..	31
2.21	Grafo G (a) e seu grafo clique $K(G)$ (b).	32
2.22	Grafo G (a) e seu grafo biclique $KB(G)$	32
2.23	Grafo G (a) e seu grafo de bicliques com intersecção por aresta $KB_e(G)$	33
2.24	Grafo G (a) e seu grafo de bicliques mutuamente inclusas $KB_m(G)$	33
2.25	Poset não-IIC (a) e poset IIC (b).	36
2.26	Grafos de comparabilidade não-IIC (a) e IIC (b).	37
2.27	Grafos $\mathcal{F}_1(0)$ (a), $\mathcal{F}_1(1)$ (b) e $\mathcal{F}_1(2)$ (c).	38
2.28	Grafos $\mathcal{F}_2(0)$ (a), $\mathcal{F}_2(1)$ (b) e $\mathcal{F}_2(2)$ (c).	38
2.29	Grafos $\mathcal{F}_3(0)$ (a), $\mathcal{F}_3(1)$ (b) e $\mathcal{F}_3(2)$ (c).	39
2.30	Grafos $\mathcal{F}_4(0)$ (a), $\mathcal{F}_4(1)$ (b) e $\mathcal{F}_4(2)$ (c).	39
2.31	Grafos $\mathcal{F}_5(0)$ (a), $\mathcal{F}_5(1)$ (b) e $\mathcal{F}_5(2)$ (c).	39
2.32	Grafos $\mathcal{F}_6(0)$ (a), $\mathcal{F}_6(1)$ (b) e $\mathcal{F}_6(2)$ (c).	40

2.33	Tripla <i>Helly</i> (a) e tripla não- <i>Helly</i> (b).	41
3.1	Grafo diamante (a) e grafo gema (b).	42
3.2	Diagrama de inclusão de classes de grafos.	47
4.1	Intervalos da reta real e seus respectivos extremos esquerdo e direito.	51
4.2	Bipartição (X, Y) de um modelo de intervalos e os menores a maiores extremos esquerdo e direito de $S \cap X$ e $S \cap Y$.	52
4.3	Diagrama de intersecção de classes de grafos.	57
4.4	Modelo de intervalos \mathcal{M} (a) e a partição $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ do modelo de intervalos $\mathcal{M}' = X \cup Y$ (b).	60
4.5	Bipartição de um modelo de intervalos \mathcal{M} (a) e bicliques maximais mutuamente inclusas do bigrafo de intersecção do modelo de intervalos \mathcal{M} (b).	63
4.6	Inclusões das classes de grafos biclique (e de bicliques mutuamente inclusas) dos bigrafos de intervalos e dos bigrafos de inclusão de intervalos.	64
4.7	Os respectivos caminhos de uma tripla asteroidal.	65
4.8	Os respectivos caminhos de uma tripla bi-asteroidal.	65
4.9	Tripla bi-asteroidal de um grafo bipartido e as bicliques maximais B_1, B_2 e B_3 .	68
4.10	Inclusões das classes dos grafos IIC-comparabilidade AT-free e de das pré-imagens bipartidas de seus grafos KB_m .	69
4.11	Grafo caminho P_4 (a) e inclusão mútua (b).	69
4.12	Grafo caminho P_5 (a) e intersecção apenas por vértices entre bicliques maximais (b).	71
4.13	Grafo dominó (a) e intersecção por aresta não mutuamente incluída entre bicliques maximais (b).	71
4.14	Intersecções entre bicliques maximais em grafos bipartidos.	72
5.1	Representações de partes de bicliques maximais.	74
5.2	Grafo G (a), grafo $BP(G)$ (b) e grafo $KB_m(G)$ (c).	75
5.3	Elementos não comparáveis pela Definição 5.1.5.	76
5.4	Poset \mathcal{P} (a) e grafo $G_{\mathcal{P}}$ (b).	79
5.5	Diagrama de inclusão de classes com os grafos $BP(K_3\text{-free})$.	82
5.6	Grafo $G_{\mathcal{P}}$ (a), grafo $L(G_{\mathcal{P}})^2$ (b) e grafo $KB_m(G_{\mathcal{P}})$ (c).	84
5.7	Grafo $G_{\mathcal{P}}$ (a), grafo $L(G_{\mathcal{P}})$ (b) e grafo $L(KB_m(G_{\mathcal{P}}))$ (c).	86
5.8	Arestas e_{xy} e e_{yz} intersectantes (a) e não-intersectantes (b).	86
5.9	Grafo subdivisão S_1 do grafo $H \simeq KB_m(G_{\mathcal{P}})$ (a), grafo $L(G_{\mathcal{P}})$ (b) e grafo S_2 com vértices e arestas de S_1 e arestas de $L(H)$ (c).	87
6.1	Encontrar a pré-imagem de um grafo KB_m de livre de triângulos visto como um problema sanduíche.	88
6.2	Grafo diamante (a) e grafo garra (b).	89

6.3	Três arestas de um emparelhamento perfeito e três arestas intersectantes ao emparelhamento em $G_{\mathcal{P}}$.	92
6.4	Regra do Triângulo.	93
6.5	Regra das Cliques.	95
6.6	Regra do P_3 .	96
6.7	Regra do Diamante.	97
6.8	Grafo de entrada (a) e pares não decididos (b).	104
6.9	Regra do P_3 (a) e Regra das Cliques (b).	104
6.10	Regra do Triângulo (a) e Regra do Diamante (b).	105
6.11	Todos os pares decididos (a) e pré-imagem do grafo linha (b).	106
6.12	Possíveis decisões de pares para um grafo diamante de entrada.	107
6.13	Ordens de inclusão das partes de bicliques de H (a) e H' (b).	109
6.14	Grafo roda W_4 de entrada (a) e pares a serem decididos (b).	109
6.15	Decisão de pares (a), grafo H obtido (b) e grafo $KB_m(H)$ (c).	110
6.16	Decisão alternativa de pares (a), grafo H' obtido (b) e grafo $KB_m(H')$ (c).	110
6.17	Grafo rede de entrada (a) e inconsistência com a Regra do Triângulo (b).	114
6.18	Grafos rejeitados pelo algoritmo.	114
6.19	Famílias infinitas de subgrafos proibidos pelos grafos de comparabilidade ou de seus complementos.	115
6.20	Diagrama que descreve a classe que, hipoteticamente, contém a classe $KB_m(K_3\text{-free})$.	116
6.21	Conjectura da intersecção de classes de grafos.	117
7.1	Bicliques maximais intersectantes (a) e não-aresta diferenciadora entre elas (b).	119
7.2	Bicliques maximais intersectantes (a) e aresta diferenciadora entre elas (b).	120
7.3	Diagrama de possíveis arestas e não-arestas diferenciadoras.	120
7.4	Grafo G (a) e bicliques maximais de G (b).	121
7.5	Grafos $KB_{\text{ndif}}(G)$ (a) e $KB_{\text{edif}}(G)$ (b).	122
7.6	Relação entre as arestas do grafo $KB_m(G)$ com as arestas do grafo $KB_{\text{ndif}}(G)$ e as arestas do grafo $KB_{\text{edif}}(G)$.	125
7.7	Conjuntos S e R (a) e conjuntos K e L (b).	126
7.8	Partição da biclique maximal B_2 pelos conjuntos S , R , K e L .	127
7.9	Relação entre as arestas do grafo $KB(G)$ com as arestas do grafo $KB_{\text{ndif}}(G)$ e as arestas do grafo $KB_{\text{edif}}(G)$.	128
7.10	Grafo K_3 (a) e grafo C_5 (b).	128
7.11	Grafo pata (a) e grafo P_4 (b).	130
7.12	Adjacências entre os vértices dos conjuntos S e R caso o grafo pata seja subgrafo induzido de G .	131

7.13	Adjacências entre os vértices dos conjuntos S e R caso o grafo P_4 seja subgrafo induzido de G	132
7.14	Adjacências entre os vértices v_1, v_2 e os vértices dos conjuntos S, R, K e L	132
7.15	Grafo P_4 induzido.	133
7.16	Grafo pata induzido.	133
7.17	Diagrama de inclusão com as classes dos grafos livres de arestas e não-arestas diferenciadoras.	134
8.1	Grafo <i>join</i> $G \nabla H$ (a) e grafo biclique $\text{KB}(G \nabla H)$ (b).	135
8.2	Produto direto entre os grafos G e H	140
8.3	Produto forte entre os grafos G e H	143
8.4	Componentes do grafo $\text{KB}(G \nabla H)$	147
9.1	Grafo casa (a) e grafo obtido pela inserção de um vértice e uma aresta a partir de um grafo casa (b)..	149
9.2	Grafo G (a) e correspondências e inclusões das partes de bicliques de G (b). . . .	150
9.3	Grafo G (a) e grafo $L(\text{BP}_c(G))$ (b)..	151
9.4	Grafo $\text{BP}_{\text{ndif}}(G)$ (a) e grafo $\text{BP}_{\text{edif}}(G)$ (b).	152
9.5	Diagrama da composição estrutural do operador KB pela Conjectura 9.2.1.. . . .	152
9.6	Grafos K_3 (a) e P_5 e as intersecções entre suas bicliques maximais.	155

LISTA DE TABELAS

3.1	Comparação de subclasses de grafos biclique.	44
6.1	Decisão de pares e grafos de saída obtidos..	108
6.2	Comparação entre decisões de pares e <i>posets</i> de inclusão de partes de bicliques dos grafos obtidos correspondentes.	111
7.1	Intersecções das bicliques maximais de G com as arestas e não-arestas diferenciadoras em destaque.	122
8.1	Relações de intersecção entre bicliques maximais formadas pelas arestas do <i>join</i> entre G e H descritas em função de $g, g' \in V(\mathbb{K}(\overline{G}))$ e $h, h' \in V(\mathbb{K}(\overline{H}))$	141
9.1	Conjecturas sobre as arestas do grafo BP_{ndif} a partir das correspondências e inclusões entre as partes.	153
9.2	Conjecturas sobre as arestas do grafo BP_{edif} a partir das correspondências e inclusões entre as partes.	154
B.1	Família finita de subgrafos proibidos aos grafos de comparabilidade.	178

LISTA DE ACRÔNIMOS

IIC	<i>Interval Intersection Closed</i>
NSSG	<i>Nested separable split graphs</i>
NHC-IIC	<i>Non-Hereditary Characteristic of IIC</i>
AT	<i>Asteroidal Triple</i>
biAT	<i>bi-Asteroidal Triple</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

P_n	Grafo caminho de n vértices.
C_n	Grafo ciclo de n vértices.
W_n	Grafo roda de $n + 1$ vértices.
K_n	Grafo completo de n vértices.
$K_{n,m}$	Grafo bipartido completo partido em n e m vértices.
\mathcal{B}_G	Conjunto de todas as bicliques maximais do grafo G .
$\widehat{\mathcal{B}}_G$	Conjunto de todas as partes de bicliques do grafo G .
\mathcal{I}_G	Conjunto de todos os conjuntos independentes maximais do grafo G .
$K(G)$	Grafo clique do grafo G .
$L(G)$	Grafo linha do grafo G .
$KB(G)$	Grafo biclique do grafo G .
$KB_m(G)$	Grafo de bicliques mutuamente inclusas do grafo G .
$KB_e(G)$	Grafo de bicliques com intersecção por aresta do grafo G .
$KB_{\text{edif}}(G)$	Grafo de bicliques diferenciadas por aresta do grafo G .
$KB_{\text{ndif}}(G)$	Grafo de bicliques diferenciadas por não-aresta do grafo G .
$BP(G)$	Grafo de inclusão de partes de bicliques de G .
$BP_c(G)$	Grafo de partes de bicliques correspondentes de G .
$BP_{\text{edif}}(G)$	Grafo de partes de bicliques diferenciadas por aresta do grafo G .
$BP_{\text{ndif}}(G)$	Grafo de partes de bicliques diferenciadas por não-aresta do grafo G .
\overline{G}	Complemento do grafo G .
nG	União disjunta de n grafos isomorfos ao grafo G .
G^2	Grafo quadrado do grafo G .
$G \nabla H$	<i>Join</i> entre os grafos G e H .
$G \cup H$	União disjunta entre os grafos G e H .
$G \times H$	Produto direto entre os grafos G e H .
$G \boxtimes H$	Produto forte entre os grafos G e H .
$G \simeq H$	Isomorfismo entre os grafos G e H .
$N_G(v)$	Vizinhança aberta do vértice v no grafo G .
$N_G[v]$	Vizinhança fechada do vértice v no grafo G .
$U(\mathcal{M})$	Conjunto de unidades do modelo \mathcal{M} .
\mathcal{F} -free	Classe de grafos livres de grafos da família \mathcal{F} .
$l(i)$	Extremo esquerdo do intervalo i .
$r(i)$	Extremo direito do intervalo i .

$\overleftarrow{l}_X(B)$	Ponto mínimo dos extremos esquerdos dos intervalos em $B \cap X$.
$\overrightarrow{l}_X(B)$	Ponto máximo dos extremos esquerdos dos intervalos em $B \cap X$.
$\overleftarrow{r}_X(B)$	Ponto mínimo dos extremos direitos dos intervalos em $B \cap X$.
$\overrightarrow{r}_X(B)$	Ponto máximo dos extremos direitos dos intervalos em $B \cap X$.
$\overleftarrow{l}_Y(B)$	Ponto mínimo dos extremos esquerdos dos intervalos em $B \cap Y$.
$\overrightarrow{l}_Y(B)$	Ponto máximo dos extremos esquerdos dos intervalos em $B \cap Y$.
$\overleftarrow{r}_Y(B)$	Ponto mínimo dos extremos direitos dos intervalos em $B \cap Y$.
$\overrightarrow{r}_Y(B)$	Ponto máximo dos extremos direitos dos intervalos em $B \cap Y$.
$I_{\mathcal{P}}^-(x)$	Conjunto de intervalos antecessores de x do conjunto parcialmente ordenado \mathcal{P} .
$I_{\mathcal{P}}^+(x)$	Conjunto de intervalos sucessores de x do conjunto parcialmente ordenado \mathcal{P} .
$\mathcal{O}(f(n))$	Conjunto de funções computáveis com limitante assintótico superior $f(n)$.
$o(f(n))$	Conjunto de funções computáveis com limitante assintótico estritamente superior $f(n)$.
$\Theta(f(n))$	Conjunto de funções computáveis com limitante assintótico superior e inferior $f(n)$.
NP	Classe dos problemas de decisão verificáveis em tempo polinomial por alguma máquina de Turing determinística.
NP-completo	Classe dos problemas de decisão completos em NP.
NP-difícil	Classe dos problemas computacionais pelo menos tão difíceis quanto um problema NP-completo.
#P	Classe dos problemas de contagem de todos os caminhos de aceitação de tamanho polinomial da execução de alguma máquina de Turing não-determinística.
#P-completo	Classe dos problemas de contagem completos em #P.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	CARACTERIZAÇÕES DE CLASSES DE GRAFOS	17
1.2	BICLIQUES E GRAFO BICLIQUE	17
1.3	PROPOSTA	18
1.4	CONTRIBUIÇÃO	18
1.5	ORGANIZAÇÃO DESTE DOCUMENTO	19
2	DEFINIÇÕES E NOTAÇÃO	21
2.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS	22
2.2	ESTRUTURAS EM GRAFOS	24
2.3	OPERADORES SOBRE GRAFOS	29
2.4	MODELOS	33
2.5	CLASSES DE GRAFOS	34
2.6	FAMÍLIAS E SUBGRAFOS PROIBIDOS	35
2.7	PROPRIEDADE IIC E GRAFOS IIC-COMPARABILIDADE	36
2.8	DEFINIÇÕES ADICIONAIS	37
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	42
3.1	TRABALHOS SOBRE GRAFOS BICLIQUE	42
3.2	CLASSES DE GRAFOS E SUAS INCLUSÕES	44
3.3	BICLIQUES EM GRAFOS	48
4	GRAFOS BICLIQUE DE BIPARTIDOS	50
4.1	BIGRAFOS DE INCLUSÃO DE INTERVALOS	51
4.2	BIGRAFOS DE INTERVALOS	57
4.3	TRIPLAS ASTEROIDAIIS E TRIPLAS BI-ASTEROIDAIIS	64
4.4	INTERSECÇÕES ENTRE BICLIQUES MAXIMAIS	69
5	GRAFOS DE PARTES DE BICLIQUES DE LIVRES DE TRIÂNGULO	74
5.1	ORDENS PARCIAIS SOBRE PARTES DE BICLIQUES	74
5.2	GRAFO $G_{\mathcal{P}}$	79
5.3	PROPRIEDADES DO GRAFO LINHA DE $G_{\mathcal{P}}$	83
6	PRÉ-IMAGEM DO KB_M DE LIVRES DE TRIÂNGULOS	88
6.1	REGRAS DO TRIÂNGULO, DAS CLIQUES, DO P_3 E DO DIAMENTE	89
6.2	ALGORITMO DA PRÉ-IMAGEM	97
6.3	CRITÉRIO DE ESCOLHA	107
6.4	RECONHECIMENTO DE KB_M DE LIVRES DE TRIÂNGULOS	113

7	PROPRIEDADES DIFERENCIADORAS.	118
7.1	DEFINIÇÕES DE PROPRIEDADES DIFERENCIADORAS.	118
7.2	RELAÇÃO COM INCLUSÃO MÚTUA.	122
7.3	CASO GERAL DE PROPRIEDADES DIFERENCIADORAS	125
7.4	GRAFOS LIVRES DE BICLIQUES MAXIMAIS DIFERENCIADAS.	128
8	GRAFO BICLIQUE DE UM JOIN	135
8.1	BICLIQUES MAXIMAIS DO JOIN ENTRE DOIS GRAFOS	136
8.2	INTERSECÇÕES ENTRE BICLIQUES MAXIMAIS DE UM JOIN.	139
8.3	ARESTAS DO GRAFO BICLIQUE DE UM JOIN	143
9	RESULTADOS ADICIONAIS E POSSÍVEIS CAMINHOS.	148
9.1	PROPRIEDADE ADICIONAL DO GRAFO KB_M	148
9.2	VARIAÇÕES DO GRAFO DE PARTES DE BICLIQUE	150
9.3	TRANSFORMAÇÕES DA PRÉ-IMAGEM DO GRAFO KB.	155
10	CONCLUSÃO	157
	REFERÊNCIAS	159
	APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO DA PRÉ-IMAGEM DO GRAFO	
	KB_M DE LIVRE DE TRIÂNGULOS	163
A.1	IMPLEMENTAÇÃO DAS REGRAS DO ALGORITMO	163
A.2	IMPLEMENTAÇÃO COMPLETA EM C	166
	APÊNDICE B – GRAFOS E GERADORES	177
B.1	DESCRIÇÃO DE GRAFOS	177
B.2	GERADORES	178
	APÊNDICE C – EXPERIMENTO	185

1 INTRODUÇÃO

Nesta tese, registramos o estudo de propriedades estruturais de grafos biclique através da análise e classificação dos tipos de intersecções entre bicliques maximais. Grafos são entidades matemáticas que modelam uma relação de adjacência entre pares de elementos de uma quantia contável. Consideramos, para o propósito de desenvolvimento deste trabalho, que tal quantia contável seja finita e que as adjacências ocorram apenas entre elementos distintos. Chamamos cada elemento dessa quantia de *vértice* e a entidade matemática que representa tal adjacência de *aresta*.

1.1 CARACTERIZAÇÕES DE CLASSES DE GRAFOS

A abstração da relação de adjacência descrita por um grafo o torna um modelo adequado para a formalização de entrada para certos problemas computacionais. Em certas aplicações, espera-se que os grafos de entrada para tais problemas possuam alguma restrição estrutural proveniente do domínio da aplicação. Tal restrição pode ser explorada para solucionar o problema usando menos recursos computacionais — como tempo de execução e memória — que no caso geral. Chamamos tal restrição estrutural de *característica* e o procedimento de identificação de tal característica de *caracterização* e agrupamos grafos que compartilham uma característica em *classes*.

A caracterização de uma classe de grafos é importante para compreender melhor o domínio de um problema, ajudando a estabelecer ligações com demais conceitos presentes na literatura. Para seu estudo, também é de interesse estudar o problema de *reconhecimento* de um grafo da classe, isto é, decidir se um grafo qualquer pertence ou não à classe. Tal estudo permite evidenciar propriedades da classe sob um ponto de vista computacional.

O problema de reconhecimento de uma classe também permite adotar estratégias híbridas para soluções de problemas em um caso mais geral, onde um algoritmo especializado é usado se o grafo de entrada for reconhecido pertencer à classe onde tal algoritmo é aplicável. Entretanto, reconhecer um grafo de uma classe também possui um custo de utilização de recursos computacionais. Se o custo somado de reconhecimento e de execução do algoritmo especializado é inferior ao custo de resolver o problema no caso mais geral, podemos dizer que tal estratégia especializada se torna eficiente para os casos cobertos.

1.2 BICLIQUES E GRAFO BICLIQUE

Bicliques são estruturas em grafos que descrevem dois grupos de vértices onde cada vértice de um grupo é adjacente a todos os vértices do outro grupo. Neste trabalho, consideramos apenas bicliques que não permitem adjacências entre vértices do mesmo grupo. Quando uma biclique não está contida em outra no mesmo grafo, dizemos que tal biclique é *maximal*. Um *grafo biclique* é um grafo que representa as intersecções entre as bicliques maximais de outro grafo, onde cada vértice corresponde a uma biclique maximal e dois vértices são adjacentes se as bicliques maximais correspondentes possuem algum vértice em comum. A *classe dos grafos biclique* é, portanto, a classe de todos os grafos que representam as intersecções entre bicliques maximais de algum grafo.

No momento da escrita desta tese, ainda não é conhecido um algoritmo de reconhecimento de custo de tempo polinomial de algum grafo da classe dos grafos biclique.

Também abordamos a propriedade de inclusão mútua entre bicliques maximais. Duas bicliques são mutuamente inclusas se um grupo de vértices da primeira biclique contém um grupo de vértices da segunda, mas o outro grupo de vértices da segunda biclique contém, reciprocamente, o outro grupo de vértices da primeira biclique. Da mesma forma que temos os grafos biclique — que representam as intersecções entre bicliques maximais de algum grafo —, também temos os grafos de bicliques maximais mutuamente inclusas — que representam a relação de inclusão mútua entre bicliques maximais de algum grafo.

1.3 PROPOSTA

Este trabalho propõe o estudo do problema da caracterização e reconhecimento de grafos biclique através da análise de como diferentes tipos de intersecções entre bicliques maximais afetam a estrutura do grafo biclique. Tal abordagem nos permite classificar as arestas do grafo biclique de acordo com o tipo de intersecção, também nos permitindo definir variações do grafo biclique onde as adjacências correspondem às tais intersecções. Analisamos a estrutura de grafos biclique sob o ponto de vista de intersecções mutuamente inclusas e introduzimos as propriedades diferenciadoras entre bicliques maximais intersectantes e as variações do operador de grafos biclique que refletem tais propriedades diferenciadoras.

1.4 CONTRIBUIÇÃO

Neste trabalho, nos aprofundamos nas propriedades estruturais de grafos biclique de subclasses de grafos bipartidos e de grafos livres de triângulos no ponto de vista de bicliques maximais mutuamente inclusas. Para os grafos bipartidos, mostramos que

- o grafo de bicliques mutuamente inclusas de bigrafos de inclusão de intervalos é grafo de permutação;
- o grafo de bicliques mutuamente inclusas de bigrafos de intervalos aceitam qualquer grafo de permutação como subgrafo induzido;
- se um grafo bipartido possui uma tripla bi-asteroidal, seu grafo de bicliques mutuamente inclusas possui uma tripla asteroidal; e
- certos subgrafos induzidos ocorrem quando existem intersecções entre bicliques maximais apenas por vértices, mutuamente inclusas e por arestas sem inclusão mútua.

Para os grafos livres de triângulos, mostramos — a partir da introdução do grafo de inclusão de partes de bicliques — que as inclusões de suas partes de bicliques correspondem a uma ordem parcial com certas propriedades, as quais usamos para apresentar uma caracterização da classe dos grafos biclique de grafos livres de triângulos. A partir das propriedades de tal ordem de inclusão entre partes de bicliques de grafos livres de triângulos, também sugerimos um algoritmo para a computação da pré-imagem do grafo de bicliques mutuamente inclusas de um grafo livre de triângulos. Embora tal algoritmo não consiga computar uma pré-imagem para todos os casos, exploramos exemplos que possam contribuir para seu aprimoramento.

Para o caso geral de grafos biclique, introduzimos as duas propriedades diferenciadoras entre bicliques maximais. Tais propriedades descrevem bicliques maximais intersectantes por propriedades que as diferenciam, isto é, que certificam que a união das bicliques não é uma biclique. Chamamos uma das propriedades diferenciadoras por *diferenciação por aresta* — onde a união das bicliques maximais intersectantes não induz um grafo bipartido — e a outra

por *diferenciação por não-aresta* — onde as adjacências entre as partes da união das bicliques maximais intersectantes não é completa. Também introduzimos os grafos de bicliques maximais diferenciadas por aresta e por não-aresta, onde mostramos que

- toda intersecção mutuamente inclusa entre bicliques maximais é diferenciada por não-aresta;
- toda intersecção entre bicliques maximais é diferenciada por aresta ou por não-aresta; e
- a presença de cada propriedade diferenciadora equivale na presença de certos subgrafos induzidos para cada tipo de propriedade.

Fazemos uma análise das bicliques maximais do *join* entre dois grafos, onde também aplicamos os conceitos de inclusão mútua, intersecção por aresta e propriedades diferenciadoras para descrever a composição estrutural de seu grafo biclique.

Apresentamos, ao final deste trabalho, alguns breves resultados, conjecturas de interesse e possíveis caminhos para a continuação deste estudo.

1.5 ORGANIZAÇÃO DESTE DOCUMENTO

No Capítulo 2, apresentamos as definições, notação e conceitos usados para o desenvolvimento deste trabalho. Os conceitos estabelecem uma convenção preliminar para as definições dos objetos matemáticos de interesse. Definimos grafos e suas propriedades estruturais, operadores sobre grafos, diferentes tipos de modelos usados para a construção de grafos e suas classes e propriedades de classes de grafos.

No Capítulo 3, fazemos um levantamento dos trabalhos que abordam grafos biclique, bicliques em grafos e relações de inclusão entre diferentes classes de grafos. Apresentamos a origem e desenvolvimento do estudo dos grafos biclique, alguns resultados de relevância para este trabalho e o que sabemos sobre o reconhecimento de certas subclasses de grafos biclique.

No Capítulo 4, estudamos subclasses de grafos biclique de grafos bipartidos sob o contexto da propriedade de inclusão mútua entre bicliques maximais e de modelos bipartidos de intersecção que definem algumas classes. Abordamos a classe dos bigrafos de inclusão de intervalos, dos bigrafos de intervalos e as propriedades estruturais de intersecção de bicliques maximais e triplas bi-asteroidais em grafos bipartidos.

No Capítulo 5, introduzimos o grafo de inclusão de partes de bicliques como intermediário entre a transformação de um grafo ao seu grafo de bicliques mutuamente inclusas. Mostramos que a classe dos grafos de inclusão de partes de bicliques está relacionada com ordens parciais com a propriedade que chamamos de autotransposição livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, onde derivamos uma caracterização para a classe dos grafos biclique de grafos livres de triângulos. Apresentamos uma subclasse de grafos livres de triângulos cujos seus grafos biclique formam a classe equivalente a dos grafos biclique de todos os grafos livres de triângulos e mostramos a relação entre seus grafos linha com seus grafos biclique.

No Capítulo 6, fazemos uso das propriedades discutidas no capítulo anterior para sugerir um algoritmo para a computação da pré-imagem de um grafo de bicliques mutuamente inclusas de um grafo livre de triângulos. Descrevemos as propriedades, que chamamos de *regras*, para definir os passos do algoritmo. Como o algoritmo sugerido é incompleto, usamos exemplos para análises de seu comportamento para descrever propriedades ainda não cobertas. Também analisamos o algoritmo para reconhecimento de grafos de bicliques mutuamente inclusas de grafos livres de triângulos, onde conjecturamos uma caracterização da classe.

No Capítulo 7, introduzimos as propriedades diferenciadoras entre bicliques maximais intersectantes e as variações do operador grafo biclique em termos de tais propriedades. Mostramos a relação entre propriedades diferenciadoras e inclusão mútua e que todo par de bicliques maximais intersectantes possui alguma das propriedades diferenciadoras. Também caracterizamos classes de grafos livres de cada tipo de propriedade diferenciadora.

No Capítulo 8, estudamos o grafo biclique de um *join* entre dois grafos. Mostramos que as bicliques maximais de um *join* entre dois grafos equivale às bicliques maximais e conjuntos independentes maximais da união disjunta entre eles. Descrevemos as intersecções das bicliques maximais que contêm arestas do *join* e usamos as propriedades de intersecção por aresta, inclusão mútua e propriedades diferenciadoras para classificar as arestas que compõem o grafo biclique de um *join*.

No Capítulo 9, apresentamos resultados que escapam dos temas dos capítulos anteriores e sugerimos possíveis caminhos para a continuação do estudo de grafos biclique. Mostramos que o quadrado do grafo de bicliques mutuamente inclusas de um grafo qualquer é subgrafo gerador de seu grafo biclique. Apresentamos o grafo de partes de bicliques correspondentes de um grafo e mostramos que o grafo linha do grafo obtido por tal operador é subgrafo gerador do grafo biclique. Também adaptamos as propriedades diferenciadoras para o contexto de partes de bicliques, onde conjecturamos certas estruturas a partir de algumas possíveis configurações das relações de inclusão e correspondência entre as partes de bicliques.

2 DEFINIÇÕES E NOTAÇÃO

Neste capítulo, apresentamos as definições e notação usadas como base para o desenvolvimento de nosso estudo sobre grafos biclique.

Neste trabalho, assumimos o conhecimento da notação e terminologia usada em Teoria dos Conjuntos, no estudo de funções e relações, familiaridade com resultados clássicos da Teoria da Computação e interesse nos estudos de caracterizações de classes de grafos. Para estabelecer uma convenção preliminar dos objetos matemáticos estudados, apresentamos os seguintes conceitos.

Conceito 1. *Uma relação é um subconjunto do produto cartesiano entre conjuntos.*

Conceito 2. *Uma relação é homogênea sobre o conjunto C se é um subconjunto do produto cartesiano $C \times \dots \times C$, isto é, sucessivo sobre o mesmo conjunto. Chamamos cada elemento (x_1, \dots, x_n) de uma relação homogênea sobre o conjunto C de sequência de elementos de C e dizemos que n é o tamanho da sequência.*

Conceito 3. *Uma permutação de um conjunto S é uma sequência sem repetição de todos os elementos de S . Seja P uma permutação (x_1, \dots, x_n) , chamamos de índice de x_i na permutação P o valor i , para $1 \leq i \leq n = |S|$.*

Conceito 4. *Uma partição de um conjunto C é uma sequência (p_1, \dots, p_n) de subconjuntos de C , chamados de partes de C , onde nenhuma parte intersecta outra e nenhuma parte é vazia.*

Conceito 5. *Uma partição relaxada de um conjunto C é uma partição que admite partes vazias.*

Conceito 6. *Uma relação é binária se é um subconjunto do produto cartesiano entre dois conjuntos. Denotamos a presença do par ordenado (x, y) na relação binária R por xRy .*

Conceito 7. *Uma relação R é de equivalência se é uma relação binária homogênea sobre um conjunto C tal que valem*

- a reflexividade, onde xRx para todo $x \in C$;
- a simetria, onde $xRy \implies yRx$ para todo $x, y \in C$; e
- a transitividade, onde xRy e yRz implicam que xRz , para todo $x, y, z \in C$.

Conceito 8. *Uma classe de equivalência de uma relação de equivalência R sobre um conjunto C é um subconjunto maximal $C' \subseteq C$ onde vale que xRy para todo $x, y \in C'$.*

Conceito 9. *Uma relação R é uma ordem parcial se é uma relação binária homogênea sobre um conjunto C tal que valem*

- a reflexividade, onde xRx para todo $x \in C$;
- a antissimetria, onde xRy e yRx implicam que $x = y$, para todo $x, y \in C$; e
- a transitividade, onde xRy e yRz implicam que xRz , para todo $x, y, z \in C$.

Conceito 10. *Uma relação R é uma ordem parcial estrita se é uma relação binária homogênea sobre um conjunto C tal que valem*

- a irreflexividade, onde $(x,x) \notin R$ para todo $x \in C$;
- a assimetria, onde $xRy \implies (y,x) \notin R$ para todo $x,y \in C$; e
- a transitividade, onde xRy e yRz implicam que xRz , para todo $x,y,z \in C$.

Conceito 11. Seja \preceq uma ordem parcial (estrita ou não) sobre um conjunto C . Dizemos que dois elementos $x,y \in C$ são comparáveis em \preceq se $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Se todo elemento de C é comparável aos demais elementos do conjunto em \preceq , então \preceq é uma ordem total.

Conceito 12. Um conjunto parcialmente ordenado (ou poset) é um par ordenado $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ tal que C é um conjunto e \preceq é uma ordem parcial (estrita ou não) sobre os elementos de C .

Conceito 13. Seja um poset $\mathcal{P} = (C, \preceq)$. Chamamos de intervalo antecessor e intervalo sucessor de $x \in C$, respectivamente, os conjuntos $I_{\mathcal{P}}^{-}(x) = \{y \mid y \preceq x\}$ e $I_{\mathcal{P}}^{+}(x) = \{y \mid x \preceq y\}$.

Conceito 14. Um intervalo da reta real é um subconjunto não-vazio de \mathbb{R} que contém todo x onde $p_1 \leq x \leq p_2$, para dois elementos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Chamamos todo elemento de um intervalo de ponto do intervalo e os pontos p_1 e p_2 de extremos do intervalo.

2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nesta seção, apresentamos as definições de grafos, vértices, arestas, não-arestas e vizinhanças, as propriedades de adjacência entre vértices e as relações de subgrafo, supergrafo e isomorfismo entre grafos.

Definição 2.1.1. Um grafo é um par ordenado $G = (V,E)$ tal que V é um conjunto finito de elementos que chamamos de vértices e E é um conjunto de pares não-ordenados de V , os quais chamamos de arestas. Denotamos o conjunto de vértices de G por $V(G)$ e o conjunto de arestas de G por $E(G)$.

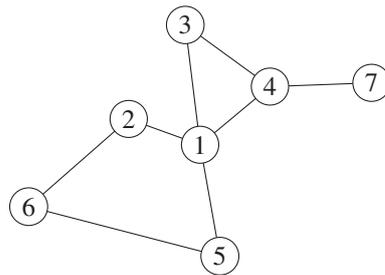


Figura 2.1: Representação gráfica de um grafo.

A Figura 2.1 descreve, como exemplo para a definição, um grafo G com o conjunto de vértices $V(G) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{4,7\}, \{5,6\}\}$.

Definição 2.1.2. Dois vértices v e u de um grafo G são adjacentes, ou vizinhos, entre si se $\{v,u\}$ é aresta de G .

Definição 2.1.3. Chamamos de vizinhança aberta — ou apenas de vizinhança — de um vértice v em um grafo G o conjunto de todos os vértices de G adjacentes a v . Denotamos a vizinhança aberta de v em G por $N_G(v)$.

Definição 2.1.4. Chamamos de vizinhança fechada de um vértice v em um grafo G a união entre a vizinhança $N_G(v)$ e o conjunto $\{v\}$. Denotamos a vizinhança fechada de v em G por $N_G[v]$.

Definição 2.1.5. Chamamos de grau de um vértice v em um grafo G a cardinalidade da vizinhança aberta $N_G(v)$, isto é, o número de vértices adjacentes a v em G . O grau máximo de G é o maior grau entre todos dos vértices de G e é representado por Δ_G .

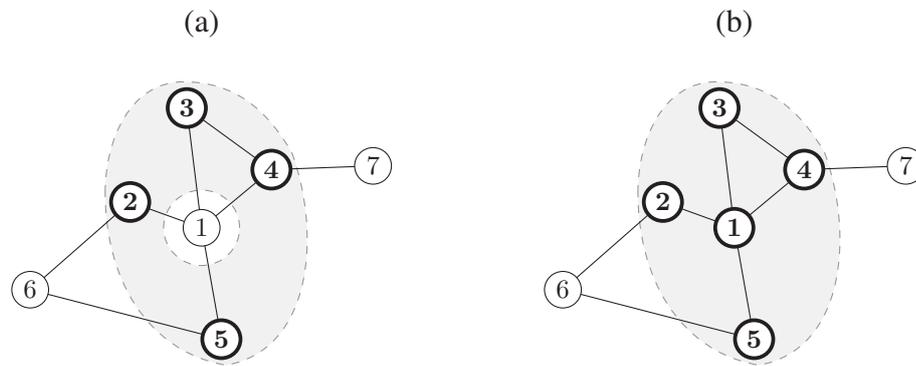


Figura 2.2: Vizinhança aberta (a) e vizinhança fechada (b) do vértice 1.

A Figura 2.2 descreve o grafo G com os vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. À esquerda (a), são destacados os vértices da vizinhança aberta do vértice 1 em G , isto é, todos os vértices de G que são adjacentes ao vértice 1. À direita (b), são destacados os vértices da vizinhança fechada do vértice 1, formada pela união entre a vizinhança aberta de 1 em G e o conjunto $\{1\}$. Temos que $N_G(1) = \{2, 3, 4, 5\}$ e que $N_G[1] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Como quatro vértices são adjacentes ao vértice 1 em G , o grau de 1 em G equivale a 4.

Definição 2.1.6. Sejam G um grafo e v e u dois vértices de G . Se v e u não são adjacentes, então chamamos o par não-ordenado $\{v, u\}$ de não-aresta de G .

Definição 2.1.7. Um subgrafo G de um grafo H é um grafo tal que seu conjunto de vértices $V(G)$ é subconjunto do conjunto de vértices $V(H)$ e seu conjunto de arestas $E(G)$ é subconjunto do conjunto de arestas $E(H)$. Um supergrafo G de um grafo H é um grafo tal que seu conjunto de vértices $V(G)$ contém o conjunto de vértices $V(H)$ e seu conjunto de arestas $E(G)$ contém o conjunto de arestas $E(H)$.

Definição 2.1.8. Um subgrafo G de um grafo H é induzido se toda aresta de H formada por pares de vértices que pertencem a $V(G)$ também é aresta de G . Dizemos que o subconjunto S de vértices de H tal que $S = V(G)$ é o subconjunto de vértices de H que induz G .

Definição 2.1.9. Um subgrafo/supergrafo G de um grafo H é gerador se ambos os grafos possuem o mesmo conjunto de vértices, isto é, se $V(G) = V(H)$.

A Figura 2.3 descreve o grafo G (a), o subgrafo induzido G' de G (b) e o subgrafo gerador G'' de G (c). O grafo G é o mesmo descrito pela Figura 2.1. O subgrafo induzido G' possui o conjunto de vértices $V(G') = \{1, 2, 3, 5\} \subseteq V(G)$ e o conjunto de arestas $E(G') = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}\} \subseteq E(G)$ e o subgrafo gerador G'' possui o conjunto de vértices $V(G'') = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = V(G)$ e o conjunto de arestas $E(G'') = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\} \subseteq E(G)$. Todas as arestas de G formadas por vértices presentes em G' também são arestas de G' e todo vértice de G também é vértice de G'' .

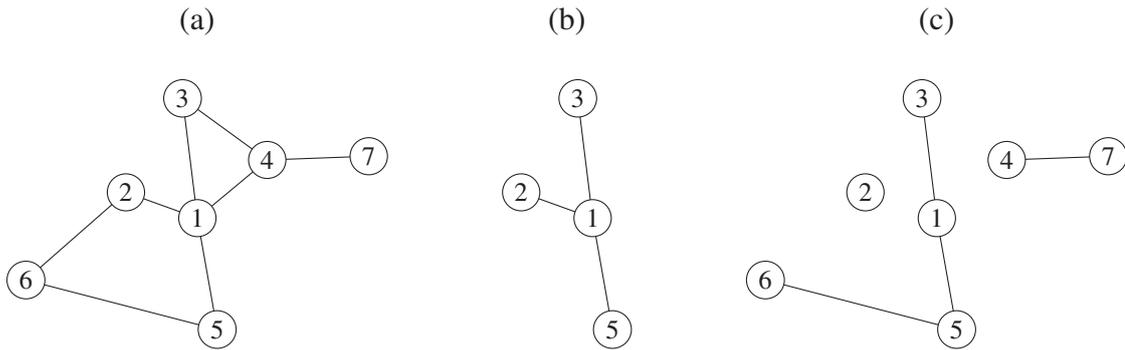


Figura 2.3: Grafo G (a), subgrafo induzido de G (b) e subgrafo gerador de G (c).

Definição 2.1.10. Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ onde os vértices v e u de G são adjacentes se, e somente se, os vértices $\varphi(v)$ e $\varphi(u)$ de H são adjacentes. Se existe isomorfismo entre os grafos G e H , dizemos que eles são isomorfos, e denotamos tal relação por $G \simeq H$. Chamamos o conjunto de todos os grafos isomorfos a G de classe de isomorfismo de G .

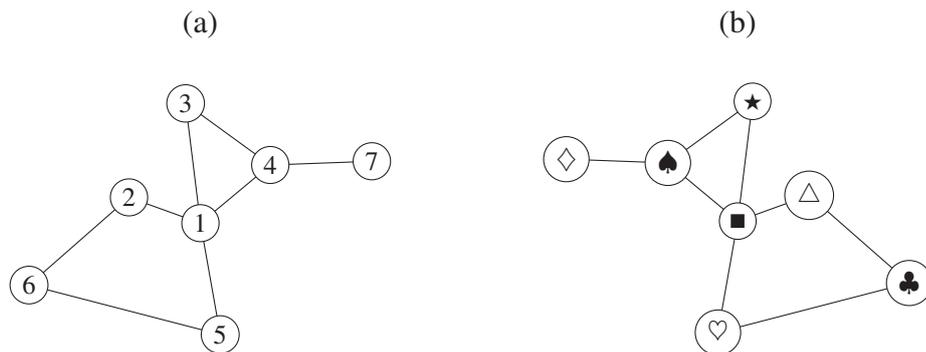


Figura 2.4: Grafo G (a) e grafo H (b) isomorfo a G .

A Figura 2.4 descreve o grafo G (a) e o grafo H (b). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$, enquanto o grafo H possui o conjunto de vértices $V(H) = \{\blacksquare, \triangle, \star, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamond\}$ e o conjunto de arestas $E(H) = \{\{\blacksquare, \triangle\}, \{\blacksquare, \star\}, \{\blacksquare, \spadesuit\}, \{\blacksquare, \heartsuit\}, \{\triangle, \clubsuit\}, \{\star, \spadesuit\}, \{\spadesuit, \diamond\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}\}$. Vale que existe a bijeção $\varphi = \{(1, \blacksquare), (2, \triangle), (3, \star), (4, \spadesuit), (5, \heartsuit), (6, \clubsuit), (7, \diamond)\}$, a qual temos que os vértices v e u são adjacentes entre si em G se, e somente se, os vértices $\varphi(v)$ e $\varphi(u)$ são adjacentes entre si em H , para todo $v, u \in V(G)$. Logo, vale que os grafos G e H são isomorfos entre si.

Vale notar que uma classe de isomorfismo de um grafo é também uma classe de equivalência, visto que a relação de isomorfismo entre grafos é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. Por essa razão, quando descrevemos um grafo sem definir seu conjunto de vértices, assumimos que tal grafo seja um representante arbitrário de sua classe de isomorfismo.

2.2 ESTRUTURAS EM GRAFOS

Nesta seção, apresentamos as definições de estruturas em grafos e características de tais estruturas. Definimos caminhos, ciclos, rodas, cliques, conjuntos independentes e bicliques.

Também definimos atalhos em caminhos, cordas em ciclos, maximalidade de cliques, conjuntos independentes e bicliques e as intersecções apenas por vértices, por aresta e mutuamente inclusas entre bicliques.

Definição 2.2.1. Um caminho em um grafo G é uma sequência (v_1, \dots, v_n) de vértices distintos de G onde v_i é adjacente a v_{i+1} , para $1 \leq i < n$. Se G possui alguma aresta formada por vértices não consecutivos de um caminho, chamamos tal aresta de atalho do caminho. O comprimento de um caminho é o número de arestas entre vértices consecutivos do caminho.

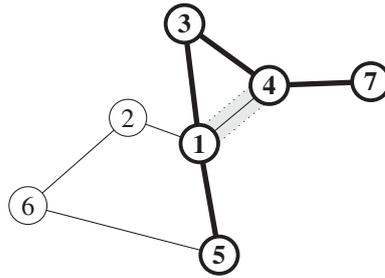


Figura 2.5: Caminho $(5, 1, 3, 4, 7)$ com o atalho $\{1, 4\}$.

A Figura 2.5 descreve o caminho $P = (5, 1, 3, 4, 7)$ do grafo G , descrito também pela Figura 2.1. O caminho P possui cinco vértices, comprimento equivalente a quatro e a aresta $\{1, 4\}$ é um atalho de P .

Definição 2.2.2. A distância entre dois vértices em um grafo G é o comprimento do menor caminho entre eles.

Definição 2.2.3. Dizemos que um grafo G é um grafo caminho se existe um caminho sem atalhos com tamanho equivalente ao número de vértices de G . Denotamos o grafo caminho de n vértices por P_n .

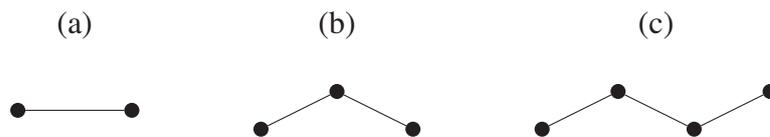


Figura 2.6: Grafos caminhos P_2 (a), P_3 (b) e P_4 (c).

A Figura 2.6 descreve os grafos caminhos P_2 (a), P_3 (b) e P_4 (c). Vale notar que nenhum dos grafos caminhos possui atalho e que o número de arestas de cada grafo é seu número de vértices reduzido em 1.

Definição 2.2.4. Um ciclo em um grafo G é um caminho (v_1, \dots, v_n) com o atalho $\{v_1, v_n\}$. Chamamos de corda de um ciclo um atalho distinto de $\{v_1, v_n\}$.

A Figura 2.7 descreve o ciclo $C = (1, 2, 6, 5)$ do grafo G com o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$. O ciclo C possui tamanho equivalente a quatro e a aresta $\{2, 5\}$ é uma corda de C .

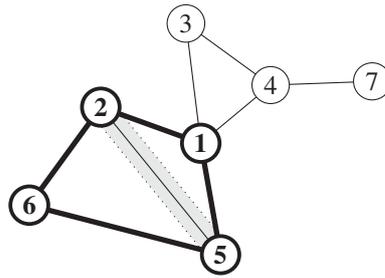


Figura 2.7: Ciclo $(1, 2, 6, 5)$ com a corda $\{2, 5\}$.

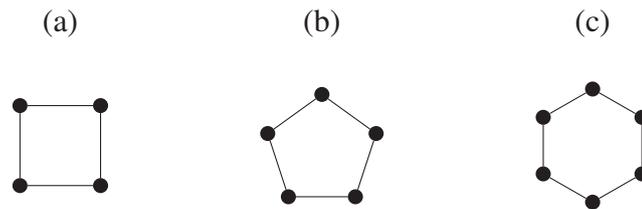


Figura 2.8: Grafos ciclos C_4 (a), C_5 (b) e C_6 (c).

Definição 2.2.5. Dizemos que um grafo é um grafo ciclo se existe um ciclo sem cordas com tamanho equivalente ao número de vértices de G . Denotamos o grafo ciclo de n vértices por C_n . Se o grafo ciclo tem, pelo menos, cinco vértices, tal grafo também é chamado de buraco.

A Figura 2.8 descreve os grafos ciclos C_4 (a), C_5 (b) e C_6 (c). Os grafos C_5 e C_6 também são chamados de *buracos* por terem, pelo menos, cinco vértices cada. Como definimos, os grafos ciclos são formados por ciclos sem cordas.

Definição 2.2.6. Dizemos que um grafo é um grafo roda se admite uma partição não-relaxada $(\{w\}, C)$ de seus vértices onde C induz um ciclo sem cordas e w é um vértice adjacente a todos os vértices em C . Denotamos por W_n o grafo roda com a partição $(\{w\}, C)$ onde $n = |C|$ e chamamos w de vértice central da roda.

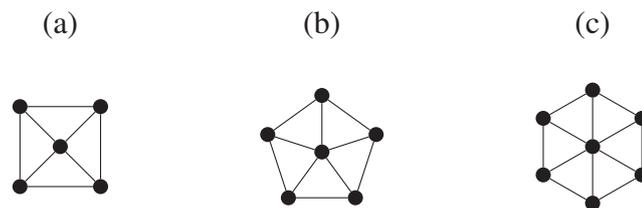


Figura 2.9: Grafos rodas W_4 (a), W_5 (b) e W_6 (c).

A Figura 2.9 descreve os grafos rodas W_4 (a), W_5 (b) e W_6 (c). Os grafos possuem, respectivamente, os grafos ciclos C_4 , C_5 e C_6 como subgrafos induzidos e os respectivos vértices centrais de cada grafo roda é adjacente a todos os vértices de seus respectivos ciclos induzidos.

Definição 2.2.7. Um grafo é dito completo se todo par de vértices é adjacente. Denotamos o grafo completo de n vértices por K_n .

A Figura 2.10 descreve os grafos completos K_3 (a), K_4 (b) e K_5 (c). Vale notar que o grafo completo K_3 — também chamado de *triângulo* — é um ciclo de três vértices, também

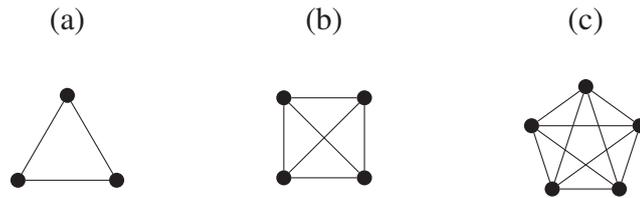


Figura 2.10: Grafos completos K_3 (a), K_4 (b) e K_5 (c).

sendo denotado por C_3 . O grafo com um único vértice é considerado um grafo completo, sendo denotado por K_1 . Também denotamos o grafo sem vértices por K_0 .

Definição 2.2.8. Uma clique de um grafo é um subconjunto não-vazio de seus vértices que induz um grafo completo. Uma clique é dita maximal se não está contida em outra clique do grafo e é dita máxima se nenhuma outra clique possui mais vértices.

Definição 2.2.9. Um conjunto independente de um grafo é um subconjunto não-vazio de seus vértices que induz um grafo sem arestas. Dizemos que um conjunto independente é maximal se não está contido em outro conjunto independente do grafo e denotamos o conjunto de todos os conjuntos independentes maximais de um grafo G por \mathcal{I}_G .

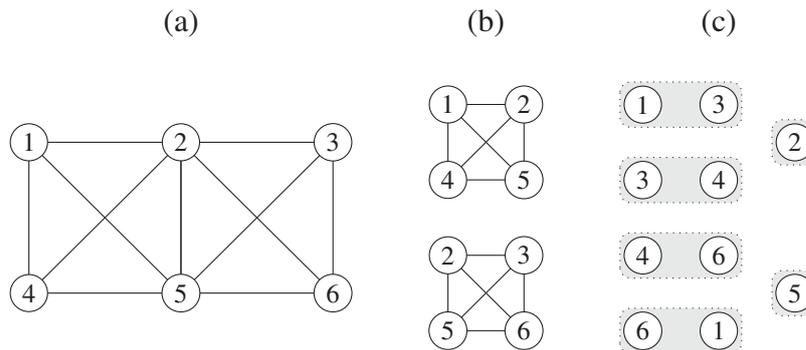


Figura 2.11: Grafo G (a), cliques maximais de G (b) e conjuntos independentes maximais de G (c).

A Figura 2.11 descreve o grafo G , as cliques maximais de G (b) e os conjuntos independentes maximais de G (c). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$, as duas cliques maximais $\{1, 2, 4, 5\}$ e $\{2, 3, 5, 6\}$ e os seis conjuntos independentes maximais $\{1, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 6\}$, $\{6, 1\}$, $\{2\}$ e $\{5\}$.

Definição 2.2.10. Um grafo é bipartido se seu conjunto de vértices admite uma partição relaxada (X, Y) onde cada um de X e Y é vazio ou conjunto independente. Também chamamos grafos bipartidos de bigrafos. Para uma partição (X, Y) de um grafo bipartido, dizemos que X e Y são partes opostas entre si do grafo.

Definição 2.2.11. Um grafo bipartido é dito completo se admite uma partição não-relaxada (X, Y) de seus vértices tal que cada vértice de uma parte é adjacente a todo vértice da outra parte. Para $n = |X|$ e $m = |Y|$, denotamos o grafo bipartido completo por $K_{n,m}$. Se uma das partes possui um único vértice, o grafo também é chamado de estrela.

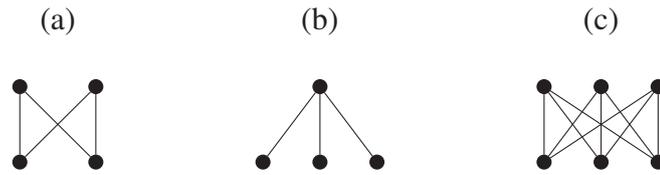


Figura 2.12: Grafos bipartidos completos $K_{2,2}$ (a), $K_{1,3}$ (b) e $K_{3,3}$ (c).

A Figura 2.12 descreve os grafos bipartidos completos $K_{2,2}$ (a), $K_{1,3}$ (b) e $K_{3,3}$ (c). O grafo $K_{2,2}$ é um ciclo de quatro vértices, também sendo denotado por C_4 . Como uma das partes do grafo bipartido completo $K_{1,3}$ possui um único vértice, também o chamamos de estrela. Em especial, chamamos o grafo $K_{1,3}$ de *grafo garra*. Vale notar que os grafos $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$ não são estrelas por não aceitarem partições onde alguma parte possui um único vértice.

Definição 2.2.12. Uma biclique de um grafo é um subconjunto de seus vértices que induz um grafo bipartido completo. A partição de uma biclique é a partição não-relaxada admitida pelo grafo bipartido completo induzido. Uma biclique é dita maximal se não está contida em outra biclique do grafo e é dita máxima se nenhuma outra biclique do grafo possui mais vértices. Denotamos o conjunto de todas as bicliques maximais de um grafo G por \mathcal{B}_G .

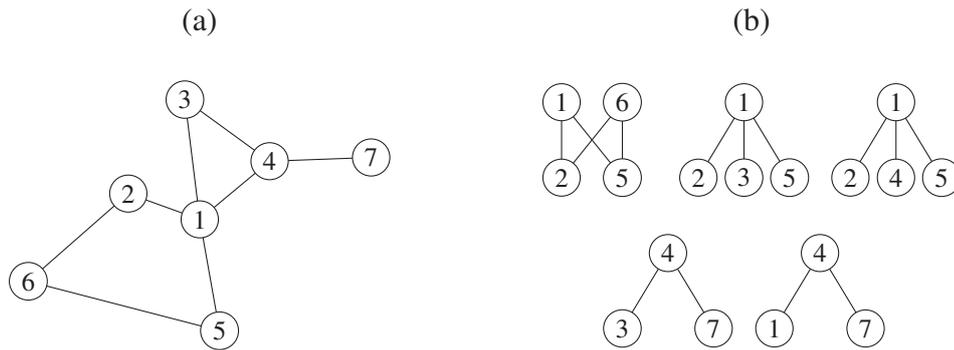


Figura 2.13: Grafo G (a) e bicliques maximais de G (b).

A Figura 2.13 descreve o grafo G (a) e as bicliques maximais de G (b). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$ e as cinco bicliques maximais $B_1 = \{1, 6, 2, 5\}$, $B_2 = \{1, 2, 3, 5\}$, $B_3 = \{1, 2, 4, 5\}$, $B_4 = \{3, 4, 7\}$ e $B_5 = \{1, 4, 7\}$.

Definição 2.2.13. Duas bicliques B_1 e B_2 de um grafo G possuem intersecção apenas por vértice se a intersecção $B_1 \cap B_2$ induz um conjunto independente em G . Duas bicliques B_1 e B_2 de um grafo G possuem intersecção por aresta se a intersecção $B_1 \cap B_2$ induz um grafo com alguma aresta em G .

A Figura 2.14 descreve as bicliques $B_1 = \{1, 2, 3\}$ e $B_2 = \{3, 4, 5\}$ com intersecção apenas por vértice (a) e as bicliques $B'_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B'_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ com intersecção por aresta (b). A intersecção $B_1 \cap B_2$ possui o vértice 3 e induz um conjunto independente no grafo representado em (a), enquanto a intersecção $B'_1 \cap B'_2$ possui os vértices 3 e 4 e induz um grafo com a aresta $\{3, 4\}$ — em destaque — no grafo representado em (b).

Definição 2.2.14. Um par de bicliques são mutuamente inclusas entre si se admitem, respectivamente, as partições (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) tais que $X_1 \subset X_2$ e $Y_2 \subset Y_1$.

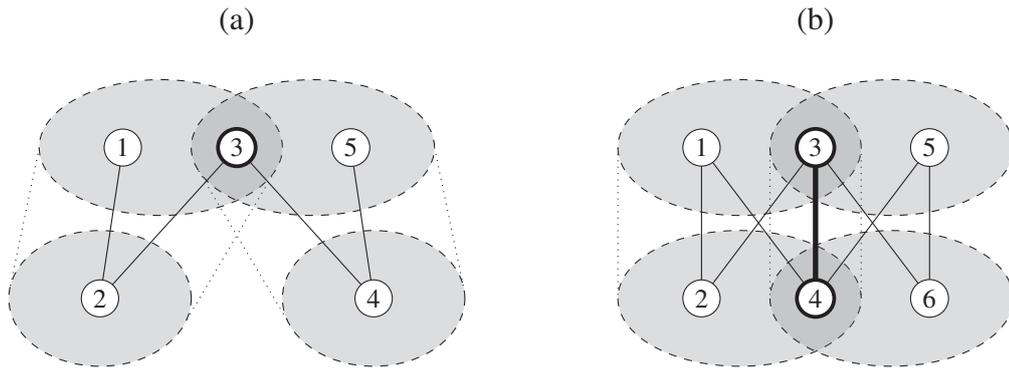


Figura 2.14: Bicliques com intersecção apenas por vértice (a) e bicliques com intersecção por aresta (b).

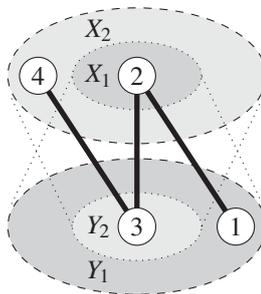


Figura 2.15: Bicliques mutuamente inclusas.

A Figura 2.15 descreve o par de bicliques $B_1 = \{1, 2, 3\}$ e $B_2 = \{2, 3, 4\}$ mutuamente inclusas entre si. A biclique B_1 admite a partição $(X_1, Y_1) = (\{2\}, \{1, 3\})$ e a biclique B_2 admite a partição $(X_2, Y_2) = (\{2, 4\}, \{3\})$ onde temos que $X_1 \subset X_2$ e que $Y_2 \subset Y_1$. Vale notar que todo par de bicliques mutuamente inclusas possuem intersecção por aresta.

2.3 OPERADORES SOBRE GRAFOS

Nesta seção, apresentamos as definições de operadores sobre grafos. Definimos os operadores complemento, grafo linha, grafo quadrado, grafo clique, grafo biclique, grafo de bicliques com intersecção por aresta e grafo de bicliques mutuamente inclusas de um grafo. Também definimos os operadores união disjunta e *join* entre dois grafos.

Definição 2.3.1. O complemento de um grafo G é o grafo denotado por \bar{G} com o mesmo conjunto de vértices onde dois vértices são adjacentes em \bar{G} se, e somente se, não são adjacentes em G .

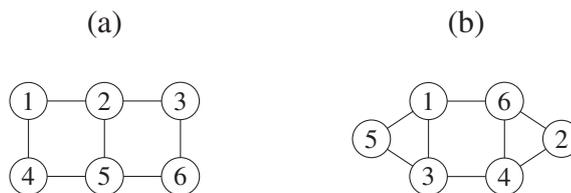


Figura 2.16: Grafo G (a) e seu complemento \bar{G} (b).

A Figura 2.16 descreve o grafo G (a) e seu complemento \overline{G} (b). Ambos os grafos G e \overline{G} possuem o mesmo conjunto de vértices $V(G) = V(\overline{G}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mas — enquanto G possui o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ — o grafo \overline{G} possui o conjunto de arestas $E(\overline{G}) = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$. Um par não-ordenado de seus vértices é aresta de G se, e somente se, não é aresta do complemento \overline{G} .

Definição 2.3.2. A união disjunta entre os grafos G e H com conjuntos de vértices $V(G)$ e $V(H)$ disjuntos entre si é o grafo, denotado por $G \cup H$, onde $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Denotamos a união disjunta de n grafos isomorfos entre si por nG , onde G é o grafo que representa a classe de isomorfismo.

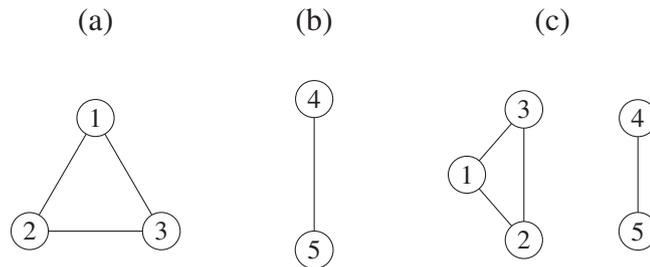


Figura 2.17: Grafo G (a), grafo H (b) e o grafo $G \cup H$ (c).

A Figura 2.17 descreve o grafo G (a), o grafo H (b) e o grafo $G \cup H$ (c). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. O grafo H possui o conjunto de vértices $V(H) = \{4, 5\}$ e o conjunto de arestas $E(H) = \{\{4, 5\}\}$. O grafo $G \cup H$ possui o conjunto de vértices $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ e o conjunto de arestas $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Definição 2.3.3. O grafo join (grafo junção ou, simplesmente, join) entre dois grafos G e H com conjuntos de vértices $V(G)$ e $V(H)$ disjuntos entre si é o grafo, denotado por $G \nabla H$, onde $V(G \nabla H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \nabla H) = E(G) \cup E(H) \cup \{\{g, h\} \mid \forall g \in V(G), \forall h \in V(H)\}$. Chamamos as arestas entre os vértices de G e os vértices de H no grafo $G \nabla H$ de arestas do join entre G e H .

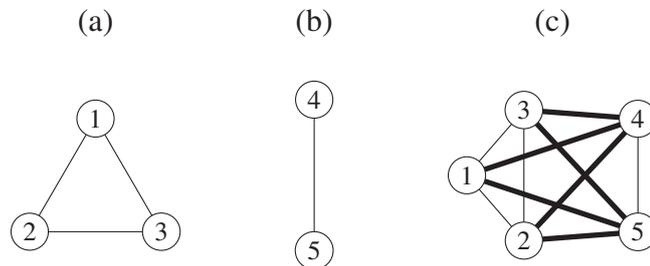


Figura 2.18: Grafo G (a), grafo H (b) e o grafo $G \nabla H$ (c).

A Figura 2.18 descreve o grafo G (a), o grafo H (b) e o grafo $G \nabla H$ (c). O grafo G é o mesmo grafo descrito pela Figura 2.17 (a) e o grafo H é o mesmo grafo descrito pela Figura 2.17 (b). O grafo $G \nabla H$ possui o conjunto de vértices $V(G \nabla H) = V(G) \cup V(H)$ e o conjunto de arestas $E(G \nabla H) = E(G) \cup E(H) \cup \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$. As arestas do join são apresentadas em destaque pela figura.

Definição 2.3.4. O grafo linha de um grafo G é o grafo denotado por $L(G)$ onde o conjunto de vértices $V(L(G))$ é o conjunto de arestas $E(G)$ e dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se, e somente se, as arestas de G correspondentes compartilham algum vértice de G .

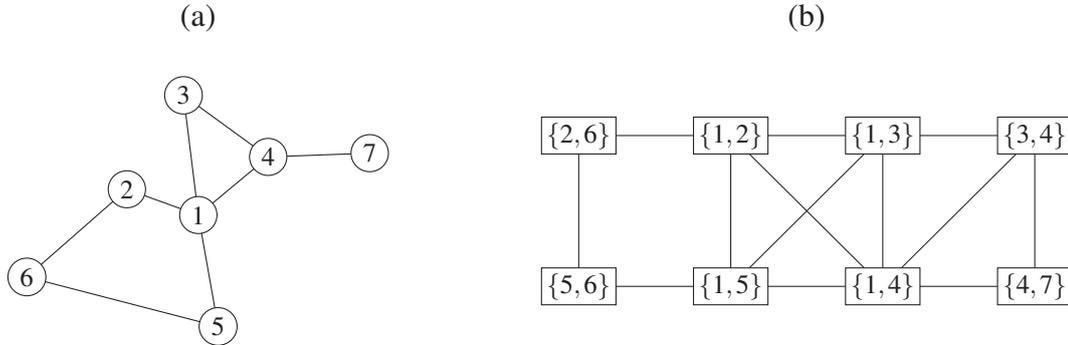


Figura 2.19: Grafo G (a) e seu grafo linha $L(G)$ (b).

A Figura 2.19 descreve o grafo G (a) e seu grafo linha $L(G)$ (b). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e as arestas $e_1 = \{1,2\}$, $e_2 = \{1,3\}$, $e_3 = \{1,4\}$, $e_4 = \{1,5\}$, $e_5 = \{2,6\}$, $e_6 = \{3,4\}$, $e_7 = \{4,7\}$ e $e_8 = \{5,6\}$. O grafo linha $L(G)$ possui o conjunto de vértices $V(L(G)) = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ e o conjunto de arestas $E(L(G)) = \{\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_6\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_6\}, \{e_3, e_7\}, \{e_4, e_8\}, \{e_5, e_8\}, \{e_6, e_7\}\}$.

Definição 2.3.5. O grafo quadrado de um grafo G é um grafo denotado por G^2 com o mesmo conjunto de vértices que G e dois vértices são adjacentes em G^2 se, e somente se, a distância entre eles em G é menor ou igual a 2.

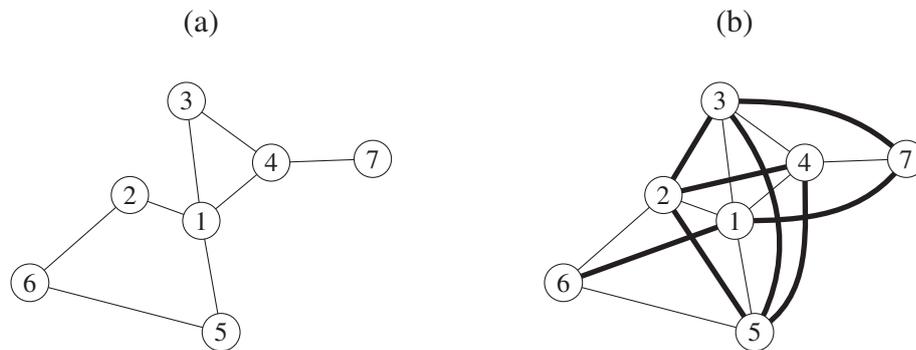


Figura 2.20: Grafo G (a) e seu grafo quadrado G^2 (b).

A Figura 2.20 descreve o grafo G e seu grafo quadrado G^2 . Ambos os grafos G e G^2 possuem o mesmo conjunto de vértices $V(G) = V(G^2) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, mas — enquanto o grafo G possui o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{4,7\}, \{5,6\}\}$ — seu grafo quadrado G^2 possui o conjunto de arestas $E(G^2) = E(G) \cup \{\{1,6\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{4,5\}\}$. As arestas de $E(G^2) \setminus E(G)$, que estão em destaque na figura, são formadas por pares de vértices que estão a distância igual a 2 no grafo G .

Definição 2.3.6. O grafo clique de um grafo G é o grafo denotado por $K(G)$ cujo o conjunto de vértices é o conjunto de todas as cliques maximais de G e dois vértices de $K(G)$ são adjacentes se, e somente se, as cliques maximais de G correspondentes são intersectantes.

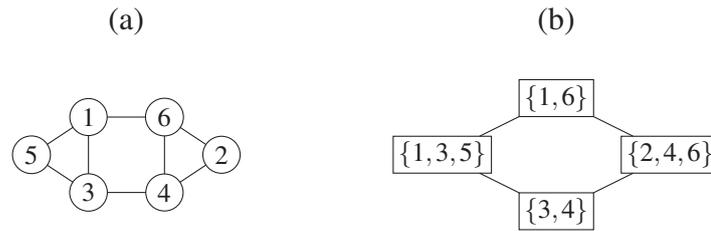


Figura 2.21: Grafo G (a) e seu grafo clique $K(G)$ (b).

A Figura 2.21 descreve o grafo G (a) e o grafo clique $K(G)$. O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$, enquanto o grafo clique $K(G)$ possui o conjunto de vértices $V(K(G)) = \{\{1, 3, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4\}\}$ e o conjunto de arestas $E(K(G)) = \{\{\{1, 3, 5\}, \{1, 6\}\}, \{\{1, 6\}, \{2, 4, 6\}\}, \{\{2, 4, 6\}, \{3, 4\}\}, \{\{3, 4\}, \{1, 3, 5\}\}\}$.

Definição 2.3.7. O grafo biclique de um grafo G é o grafo denotado por $KB(G)$ cujo o conjunto de vértices é o conjunto \mathcal{B}_G de bicliques maximais de G e dois vértices de $KB(G)$ são adjacentes se, e somente se, as bicliques maximais correspondentes são intersectantes.

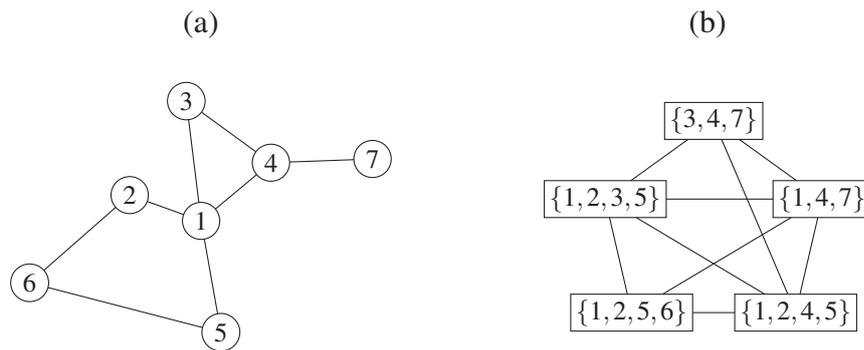


Figura 2.22: Grafo G (a) e seu grafo biclique $KB(G)$ (b).

A Figura 2.22 descreve o grafo G (a) e seu grafo biclique $KB(G)$ (b). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$ e as bicliques maximais $B_1 = \{1, 6, 2, 5\}$, $B_2 = \{1, 2, 3, 5\}$, $B_3 = \{1, 2, 4, 5\}$, $B_4 = \{3, 4, 7\}$ e $B_5 = \{1, 4, 7\}$. Seu grafo biclique $KB(G)$ possui o conjunto de vértices $V(KB(G)) = \mathcal{B}_G = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ e o conjunto de arestas $E(KB(G)) = \{\{B_1, B_2\}, \{B_1, B_3\}, \{B_1, B_5\}, \{B_2, B_3\}, \{B_2, B_4\}, \{B_2, B_5\}, \{B_3, B_4\}, \{B_3, B_5\}, \{B_4, B_5\}\}$.

Definição 2.3.8. O grafo de bicliques com intersecção por aresta de um grafo G é o grafo denotado por $KB_e(G)$ cujo o conjunto de vértices é o conjunto \mathcal{B}_G de bicliques maximais de G e dois vértices de $KB_e(G)$ são adjacentes se, e somente se, as bicliques maximais correspondentes possuem intersecção por aresta.

A Figura 2.23 descreve o grafo G (a) e o grafo de bicliques com intersecção por aresta $KB_e(G)$ (b). O grafo G é o mesmo que é descrito pela Figura 2.22 (a) e possui as bicliques maximais $B_1 = \{1, 2, 5, 6\}$, $B_2 = \{1, 2, 3, 5\}$, $B_3 = \{1, 2, 4, 5\}$, $B_4 = \{3, 4, 7\}$ e $B_5 = \{1, 4, 7\}$. Seu grafo de bicliques com intersecção por aresta $KB_e(G)$ possui o conjunto de vértices

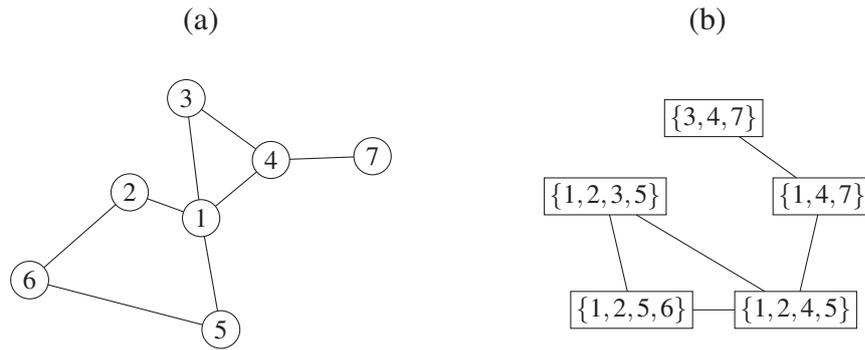


Figura 2.23: Grafo G (a) e seu grafo de bicliques com intersecção por aresta $KB_e(G)$.

$V(KB_e(G)) = \mathcal{B}_G = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ e o conjunto de arestas $E(KB_e(G)) = \{\{B_1, B_2\}, \{B_1, B_3\}, \{B_2, B_3\}, \{B_3, B_5\}, \{B_4, B_5\}\}$. Vale notar que o grafo de bicliques com intersecção por aresta $KB_e(G)$ é subgrafo gerador do grafo biclique $KB(G)$.

Definição 2.3.9. O grafo de bicliques mutuamente inclusas de um grafo G é o grafo denotado por $KB_m(G)$ cujo o conjunto de vértices é o conjunto \mathcal{B}_G de bicliques maximais de G e dois vértices de $KB_m(G)$ são adjacentes se, e somente se, as bicliques maximais correspondentes são mutuamente inclusas entre si.

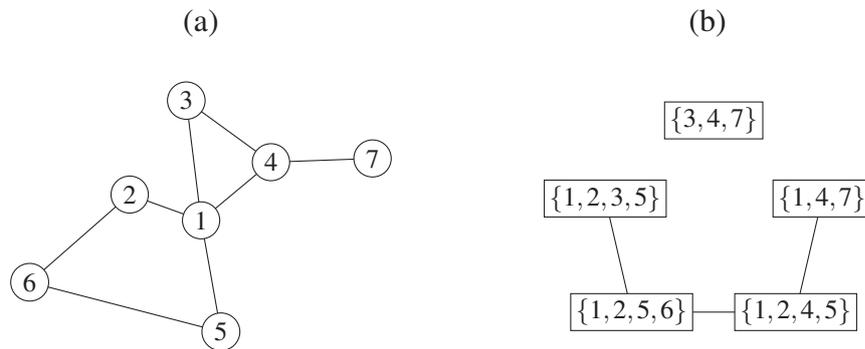


Figura 2.24: Grafo G (a) e seu grafo de bicliques mutuamente inclusas $KB_m(G)$.

A Figura 2.22 descreve o grafo G (a) e seu grafo de bicliques mutuamente inclusas $KB_m(G)$ (b). O grafo G é o mesmo que é descrito pela Figura 2.22 (a) e possui as bicliques maximais $B_1 = \{1, 2, 5, 6\}$, $B_2 = \{1, 2, 3, 5\}$, $B_3 = \{1, 2, 4, 5\}$, $B_4 = \{3, 4, 7\}$ e $B_5 = \{1, 4, 7\}$. Seu grafo de bicliques mutuamente inclusas $KB_m(G)$ possui o conjunto de vértices $V(KB_m(G)) = \mathcal{B}_G = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ e o conjunto de arestas $E(KB_m(G)) = \{\{B_1, B_2\}, \{B_1, B_3\}, \{B_3, B_5\}\}$. Vale notar que, como inclusão mútua requer intersecção por aresta, que o grafo de bicliques mutuamente inclusas $KB_m(G)$ é subgrafo gerador do grafo de bicliques com intersecção por aresta $KB_e(G)$ e, portanto, subgrafo gerador do grafo biclique $KB(G)$.

2.4 MODELOS

Em sua essência, grafos descrevem relações entre pares de elementos de uma coleção, isto é, de uma entidade matemática capaz de representar unidades de uma quantidade. Quando

essas relações são baseadas em uma propriedade conhecida entre os pares de elementos, chamamos a coleção de elementos de *modelo* e descrevemos a natureza dessa propriedade que o grafo representa. Neste trabalho, definimos os *grafos de intersecção*, os *grafos de inclusão* e os *grafos de comparabilidade* de um modelo e, como variações bipartidas, os *bigrafos de intersecção* e os *bigrafos de inclusão* com partição (X, Y) da coleção de elementos de um modelo.

Definição 2.4.1. *Um modelo é uma entidade matemática que representa unidades de uma quantidade finita, isto é, elementos únicos e distintos de um conjunto finito. Representamos o conjunto de unidades de um modelo \mathcal{M} por $U(\mathcal{M})$. Cada unidade pode intersectar outra, conter ou estar contido em outra ou ser comparável a outra em uma relação.*

Definição 2.4.2. *Um modelo de intervalos é um modelo \mathcal{M} que tem, como seu conjunto de unidades $U(\mathcal{M})$, um conjunto de intervalos da reta real.*

Definição 2.4.3. *Um modelo de comparabilidade \mathcal{M} é um poset (C, \preceq) que tem, como conjunto de unidades $U(\mathcal{M})$, o conjunto C e tem a relação \preceq .*

Definição 2.4.4. *Um grafo de intersecção de um modelo \mathcal{M} é o grafo que tem, como conjunto de vértices, o conjunto de unidades $U(\mathcal{M})$ e dois de seus vértices $v, u \in U(\mathcal{M})$ são adjacentes se, e somente se, a intersecção $v \cap u$ não é vazia.*

Definição 2.4.5. *Um grafo de inclusão de um modelo \mathcal{M} é o grafo que tem, como conjunto de vértices, o conjunto de unidades $U(\mathcal{M})$ e dois de seus vértices $v, u \in U(\mathcal{M})$ são adjacentes se, e somente se, vale uma das inclusões $u \subseteq v$ ou $v \subseteq u$.*

Definição 2.4.6. *Um grafo de comparabilidade de um modelo \mathcal{M} de comparabilidade com relação \preceq é o grafo que tem, como conjunto de vértices, o conjunto de unidades $U(\mathcal{M})$ e dois de seus vértices $v, u \in U(\mathcal{M})$ são adjacentes se, e somente se, valem as comparações $v \preceq u$ ou $u \preceq v$.*

Definição 2.4.7. *Um bigrafo de intersecção com partição (X, Y) de um modelo \mathcal{M} é o grafo bipartido que tem, como conjunto de vértices, o conjunto de unidades $U(\mathcal{M}) = X \cup Y$ e dois vértices $x \in X$ e $y \in Y$ são adjacentes se, e somente se, a intersecção $x \cap y$ não é vazia.*

Definição 2.4.8. *Um bigrafo de inclusão com partição (X, Y) de um modelo \mathcal{M} é o grafo bipartido que tem, como conjunto de vértices, o conjunto de unidades $U(\mathcal{M}) = X \cup Y$ e dois vértices $x \in X$ e $y \in Y$ são adjacentes se, e somente se, vale a inclusão $y \subseteq x$.*

Vale notar que bigrafos de inclusão, como definidos neste trabalho, possuem uma natureza assimétrica, onde a relação de inclusão só é considerada para a adjacência do grafo se as unidades que contêm e as unidades que estão contidas estão em partes distintas.

2.5 CLASSES DE GRAFOS

Nesta seção, apresentamos as definições referentes a classes de grafos. Tais classes são compostas por grafos que compartilham alguma propriedade estrutural fechada por isomorfismo entre grafos e não são limitadas por alguma quantidade máxima de vértices. Também definimos classes de grafos de interesse para este trabalho, classe complementar de outra classe, classe sobre algum operador sobre grafos e as relações de subclasse e superclasse entre classes de grafos.

Definição 2.5.1. *Uma classe de grafos é uma união de infinitas classes de isomorfismo.*

Definição 2.5.2. *Um grafo é chamado de grafo biclique se é isomorfo ao grafo biclique de algum grafo. A classe dos grafos biclique é a classe de todos os grafos biclique.*

Alternativamente, um grafo é grafo biclique se é isomorfo ao grafo de intersecção do modelo \mathcal{M} onde seu conjunto de unidades $U(\mathcal{M})$ equivale ao conjunto de bicliques maximais de algum grafo.

Definição 2.5.3. *Um grafo é chamado de grafo clique se é isomorfo ao grafo clique de algum grafo. A classe dos grafos clique é a classe de todos os grafos clique.*

Da maneira análoga aos grafos biclique, um grafo é grafo clique se é isomorfo ao grafo de intersecção G do modelo \mathcal{M} onde seu conjunto de unidades $U(\mathcal{M})$ equivale ao conjunto de todas as cliques maximais de algum grafo.

Definição 2.5.4. *Um grafo é chamado de grafo de comparabilidade se é isomorfo ao grafo de um modelo de comparabilidade qualquer. A classe dos grafos de comparabilidade é a classe de todos os grafos de comparabilidade.*

Definição 2.5.5. *Um grafo é chamado de grafo de inclusão de intervalos se é isomorfo a um grafo de inclusão de um modelo de intervalos. A classe dos grafos de inclusão de intervalos é a classe de todos os grafos de inclusão de intervalos.*

Definição 2.5.6. *Um grafo bipartido é chamado de bigrafo de intervalos se é isomorfo a um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos. A classe dos bigrafos de intervalos é a classe de todos os bigrafos de intervalos.*

Definição 2.5.7. *Um grafo bipartido é chamamdo de bigrafo de inclusão de intervalos se é isomorfo a um grafo de inclusão de um modelo de intervalos. A classe dos bigrafos de inclusão de intervalos é a classe de todos os bigrafos de inclusão de intervalos.*

Definição 2.5.8. *A classe dos complementos dos grafos da classe \mathcal{C} é a classe denotada por $co\text{-}\mathcal{C}$ onde todo grafo G pertence a $co\text{-}\mathcal{C}$ se, e somente se, o grafo complemento \overline{G} pertence a \mathcal{C} .*

Definição 2.5.9. *Sejam \mathcal{C} uma classe de grafos e F um operador sobre grafos, denotamos por $F(\mathcal{C})$ a classe de todos os grafos isomorfos a $F(G)$, para todo grafo G da classe \mathcal{C} .*

Definição 2.5.10. *Sejam G um grafo e F um operador sobre grafos, denotamos por $F^{-1}(G)$ a classe de grafos tais que $H \in F^{-1}(G)$ se, e somente se, $F(H) \simeq G$. Chamamos tais grafos H de pré-imagens F de G . Para uma classe de grafos \mathcal{C} , denotamos por $F^{-1}(\mathcal{C})$ a união $\bigcup_{G \in \mathcal{C}} F^{-1}(G)$.*

Definição 2.5.11. *Uma classe de grafos \mathcal{C}_1 é subclasse de uma classe de grafos \mathcal{C}_2 se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$. Uma classe de grafos \mathcal{C}_1 é superclasse de uma classe de grafos \mathcal{C}_2 se $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$.*

2.6 FAMÍLIAS E SUBGRAFOS PROIBIDOS

Nesta seção, apresentamos as definições referentes a famílias de grafos, classes livres de uma família de grafos e hereditariedade de uma classe de grafos.

Definição 2.6.1. *Uma família de grafos é um conjunto de grafos fechado por isomorfismo, isto é, se um grafo G pertence a uma família de grafos \mathcal{F} , então todo grafo isomorfo a G também pertence a \mathcal{F} .*

Definição 2.6.2. Seja \mathcal{F} uma família de grafos. Denotamos por $\overline{\mathcal{F}}$ a família dos grafos complementos de \mathcal{F} . Isto é, a família de grafos onde o grafo G pertence a \mathcal{F} se, e somente se, o grafo \overline{G} pertence a $\overline{\mathcal{F}}$.

Definição 2.6.3. Os grafos de uma classe de grafos \mathcal{C} são ditos livres de uma família de grafos \mathcal{F} se nenhum grafo de \mathcal{F} é subgrafo induzido de qualquer grafo de \mathcal{C} . Também dizemos que os grafos de \mathcal{F} são subgrafos (induzidos) proibidos por \mathcal{C} e que uma família \mathcal{F} de subgrafos proibidos é mínima se nenhum grafo de \mathcal{F} é subgrafo induzido de outro grafo de \mathcal{F} .

Definição 2.6.4. Denotamos a classe de todos os grafos livres de uma família de grafos \mathcal{F} por \mathcal{F} -free.

Definição 2.6.5. Uma classe de grafos \mathcal{C} é dita hereditária se todo subgrafo induzido de todo grafo $G \in \mathcal{C}$ também pertence a \mathcal{C} .

2.7 PROPRIEDADE IIC E GRAFOS IIC-COMPARABILIDADE

Nesta seção, apresentamos as definições referentes à propriedade IIC de *posets* e a classe dos grafos IIC-comparabilidade.

Definição 2.7.1. Dizemos que um *poset* $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ é fechado por intersecção de intervalos, ou IIC (Interval Intersection Closed), se, para todo $x, y \in C$, vale que

- $I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(y) \neq \emptyset \implies \exists z \in C$ onde $I_{\mathcal{P}}^{-}(z) = I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(y)$; e
- $I_{\mathcal{P}}^{+}(x) \cap I_{\mathcal{P}}^{+}(y) \neq \emptyset \implies \exists z \in C$ onde $I_{\mathcal{P}}^{+}(z) = I_{\mathcal{P}}^{+}(x) \cap I_{\mathcal{P}}^{+}(y)$.

Alternativamente, um *poset* $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ é IIC se toda intersecção não-vazia entre dois intervalos antecessores possui um máximo em \preceq e toda intersecção não-vazia entre dois intervalos sucessores possui um mínimo em \preceq .

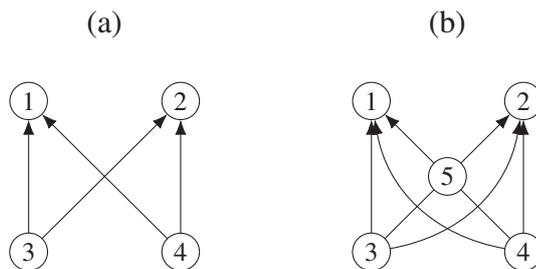


Figura 2.25: Poset não-IIC (a) e poset IIC (b).

A Figura 2.25 descreve um *poset* não-IIC $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ (a) e um *poset* IIC $\mathcal{P}' = (C', \preceq')$ (b) com os conjuntos $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e as ordens parciais $\preceq = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$ e $\preceq' = \preceq \cup \{(3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$. Vale notar que $I_{\mathcal{P}}^{-}(1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(2) = \{3, 4\}$ e que $I_{\mathcal{P}}^{+}(3) \cap I_{\mathcal{P}}^{+}(4) = \{1, 2\}$, que não são intervalos antecessores ou sucessores de nenhum elemento de C . Enquanto $I_{\mathcal{P}'}^{-}(1) \cap I_{\mathcal{P}'}^{-}(2) = \{3, 4, 5\}$ é o intervalo antecessor $I_{\mathcal{P}'}^{-}(5)$ e $I_{\mathcal{P}'}^{+}(3) \cap I_{\mathcal{P}'}^{+}(4) = \{1, 2, 5\}$ é o intervalo sucessor $I_{\mathcal{P}'}^{+}(5)$.

Definição 2.7.2. Um grafo é IIC-comparabilidade se é isomorfo ao grafo que tem, como modelo de comparabilidade, um *poset* IIC. A classe dos grafos IIC-comparabilidade é a classe de todos os grafos IIC-comparabilidade.

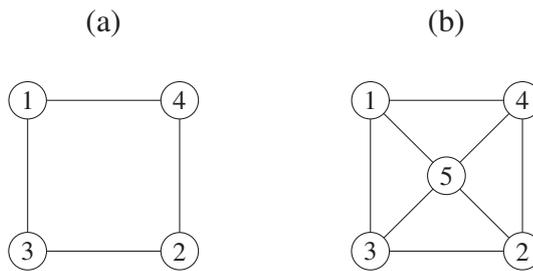


Figura 2.26: Grafos de comparabilidade não-IIC (a) e IIC (b).

A Figura 2.26 descreve o grafo de comparabilidade G do modelo não-IIC $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ (a) e o grafo de comparabilidade G' do modelo IIC $\mathcal{P}' = (C', \preceq')$ (b) apresentados. Como o *poset* \mathcal{P}' é IIC, o grafo G' é um grafo IIC-comparabilidade. O grafo G não admite como modelo de comparabilidade um *poset* IIC e, portanto, não é grafo IIC-comparabilidade. Vale notar que a presença do vértice 5, adjacente aos demais vértices, é o que distingue o grafo G' do grafo G .

2.8 DEFINIÇÕES ADICIONAIS

As seguintes definições, embora não usadas diretamente como objetos de estudo deste trabalho, ajudam a ter descrições breves para conceitos que são mencionados nos demais capítulos.

Definição 2.8.1. Um grafo é dito conexo se existe um caminho entre todos os pares de vértices. Um grafo que não é conexo é dito desconexo. O subconjunto maximal de vértices que induz um grafo conexo em um grafo G é chamado de componente conexa de G .

Definição 2.8.2. Um grafo é chamado de acíclico ou de floresta se não possui ciclos.

Definição 2.8.3. Um grafo acíclico e conexo é chamado de árvore.

Definição 2.8.4. Um conjunto dominante de um grafo G é um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ onde todos os vértices em $V(G) \setminus S$ são adjacentes a algum vértice em S .

Definição 2.8.5. Um emparelhamento perfeito de um grafo G é um subconjunto de arestas $S \subseteq E(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$ que formam uma partição (e_1, \dots, e_n) dos vértices de G .

Definição 2.8.6. Um vértice de um grafo é chamado de universal se é adjacente a todos os demais vértices do grafo.

Definição 2.8.7. Um vértice de um grafo é chamado de folha se é adjacente a um único vértice do grafo.

Definição 2.8.8. Um vértice de um grafo é isolado se não é adjacente a vértice algum do grafo.

Definição 2.8.9. Dois vértices v_1 e v_2 de um grafo G são chamados de falsos gêmeos se possuem a mesma vizinhança aberta, isto é, se $N_G(v_1) = N_G(v_2)$. Os vértices v_1 e v_2 de G são chamados de gêmeos verdadeiros se possuem a mesma vizinhança fechada, isto é, se $N_G[v_1] = N_G[v_2]$.

Definição 2.8.10. A cintura de um grafo é o número de vértices do menor ciclo sem cordas do grafo.

Definição 2.8.11. A arboricidade de um grafo G é o menor número n de subgrafos árvores S_1, \dots, S_n de G onde $(E(S_1), \dots, E(S_n))$ é uma partição das arestas de G .

Definição 2.8.12. O grafo H é obtido pela unificação de dois vértices x e y de G se $V(H) = V(G) \setminus \{x, y\} \cup \{x, y\}$ e $E(H) = E(G) \setminus \{\{x, z\}, \{y, z\} \mid \forall z \in N_G(x) \cup N_G(y)\} \cup \{\{z, \{x, y\}\} \mid \forall z \in N_G(x) \cup N_G(y)\}$. Uma contração é uma unificação de dois vértices adjacentes.

Definição 2.8.13. O grafo H é obtido pela subdivisão da aresta $e = \{x, y\}$ de G se $V(H) = V(G) \cup \{e\}$ e $E(H) = E(G) \setminus \{e\} \cup \{\{x, e\}, \{y, e\}\}$.

Definição 2.8.14. Chamamos um grafo G de grafo caterpillar se G é acíclico e possui um conjunto dominante que induz um caminho sem atalhos.

Definição 2.8.15. Denotamos por $\mathcal{F}_1(n)$ o grafo com o conjunto de vértices $\{a, u, w, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ onde $(u, v_1, \dots, v_{n+1}, w)$ é um caminho sem atalhos e o vértice a é apenas adjacente aos vértices v_1, \dots, v_{n+1} .

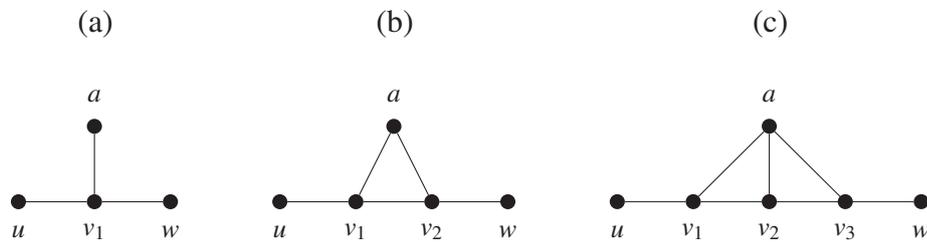


Figura 2.27: Grafos $\mathcal{F}_1(0)$ (a), $\mathcal{F}_1(1)$ (b) e $\mathcal{F}_1(2)$ (c).

A Figura 2.27 descreve o grafo $\mathcal{F}_1(0)$ (a), o grafo $\mathcal{F}_1(1)$ (b) e o grafo $\mathcal{F}_1(2)$ (c). Os vértices de cada grafo são rotulados de acordo com a definição de $\mathcal{F}_1(n)$.

Definição 2.8.16. Denotamos por $\mathcal{F}_2(n)$ o grafo com o conjunto de vértices $\{a_1, a_2, u, w, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ onde $(u, v_1, \dots, v_{n+1}, w)$ é um caminho sem atalhos, o vértice a_1 é apenas adjacente ao vértice a_2 e o vértice a_2 é apenas adjacente aos vértices a_1, v_1, \dots, v_{n+1} .

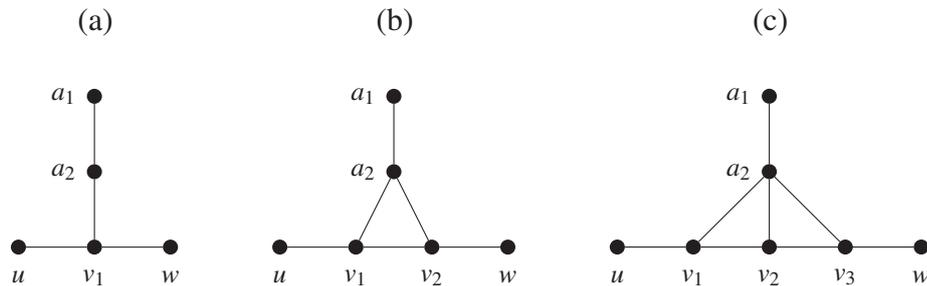


Figura 2.28: Grafos $\mathcal{F}_2(0)$ (a), $\mathcal{F}_2(1)$ (b) e $\mathcal{F}_2(2)$ (c).

A Figura 2.28 descreve o grafo $\mathcal{F}_2(0)$ (a), o grafo $\mathcal{F}_2(1)$ (b) e o grafo $\mathcal{F}_2(2)$ (c). Os vértices de cada grafo são rotulados de acordo com a definição de $\mathcal{F}_2(n)$.

Definição 2.8.17. Denotamos por $\mathcal{F}_3(n)$ o grafo com o conjunto de vértices $\{v, a_1, a_2, u, w, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ onde $(u, v_1, \dots, v_{n+1}, w)$ é um caminho sem atalhos, o vértice a_1 é apenas adjacente aos vértices $v, a_2, u, v_1, \dots, v_{n+1}$, o vértice a_2 é apenas adjacente aos vértices $v, w, a_1, v_1, \dots, v_{n+1}$ e o vértice v é apenas adjacente aos vértices a_1 e a_2 .

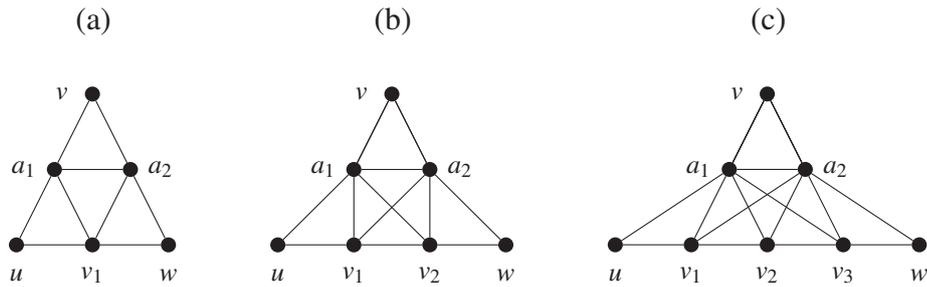


Figura 2.29: Grafos $\mathcal{F}_3(0)$ (a), $\mathcal{F}_3(1)$ (b) e $\mathcal{F}_3(2)$ (c).

A Figura 2.29 descreve o grafo $\mathcal{F}_3(0)$ (a), o grafo $\mathcal{F}_3(1)$ (b) e o grafo $\mathcal{F}_3(2)$ (c). Os vértices de cada grafo são rotulados de acordo com a definição de $\mathcal{F}_3(n)$.

Definição 2.8.18. Denotamos por $\mathcal{F}_4(n)$ o grafo com o conjunto de vértices $\{v, a_1, a_2, u, w, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ onde $(u, v_1, \dots, v_{n+1}, w)$ é um caminho sem atalhos, o vértice a_1 é apenas adjacente aos vértices $v, u, v_1, \dots, v_{n+1}$, o vértice a_2 é apenas adjacente aos vértices $v, w, v_1, \dots, v_{n+1}$ e o vértice v é apenas adjacente aos vértices a_1 e a_2 .

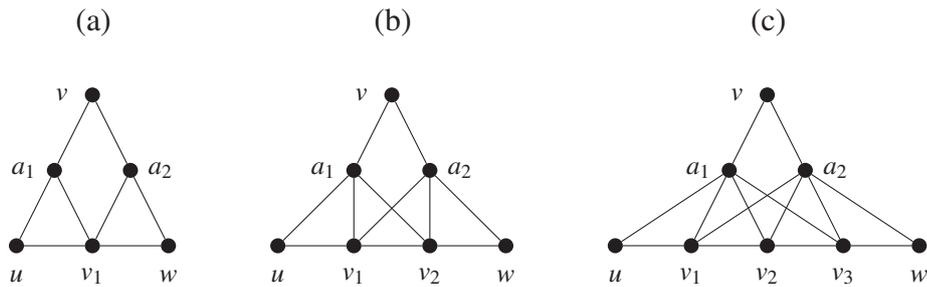


Figura 2.30: Grafos $\mathcal{F}_4(0)$ (a), $\mathcal{F}_4(1)$ (b) e $\mathcal{F}_4(2)$ (c).

A Figura 2.30 descreve o grafo $\mathcal{F}_4(0)$ (a), o grafo $\mathcal{F}_4(1)$ (b) e o grafo $\mathcal{F}_4(2)$ (c). Os vértices de cada grafo são rotulados de acordo com a definição de $\mathcal{F}_4(n)$.

Definição 2.8.19. Denotamos por $\mathcal{F}_5(n)$ o grafo com o conjunto de vértices $\{a_1, a_2, u, w, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ onde $(u, v_1, \dots, v_{n+1}, w)$ é um caminho sem atalhos, o vértice a_1 é apenas adjacente aos vértices u, v_1, \dots, v_{n+1} e o vértice a_2 é apenas adjacente aos vértices w, v_1, \dots, v_{n+1} .

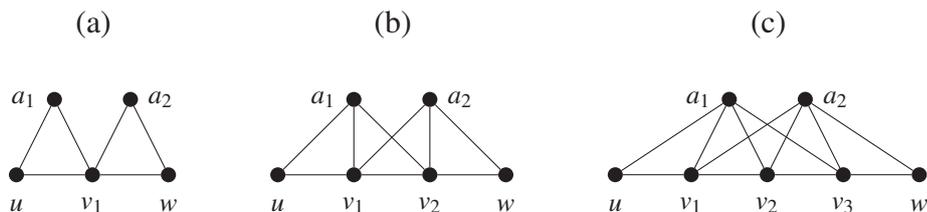


Figura 2.31: Grafos $\mathcal{F}_5(0)$ (a), $\mathcal{F}_5(1)$ (b) e $\mathcal{F}_5(2)$ (c).

A Figura 2.31 descreve o grafo $\mathcal{F}_5(0)$ (a), o grafo $\mathcal{F}_5(1)$ (b) e o grafo $\mathcal{F}_5(2)$ (c). Os vértices de cada grafo são rotulados de acordo com a definição de $\mathcal{F}_5(n)$.

Definição 2.8.20. Denotamos por $\mathcal{F}_6(n)$ o grafo com o conjunto de vértices $\{a_1, a_2, u, w, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ onde $(u, v_1, \dots, v_{n+1}, w)$ é um caminho sem atalhos, o vértice a_1 é apenas adjacente aos vértices $a_2, u, v_1, \dots, v_{n+1}$ e o vértice a_2 é apenas adjacente aos vértices $a_1, w, v_1, \dots, v_{n+1}$.

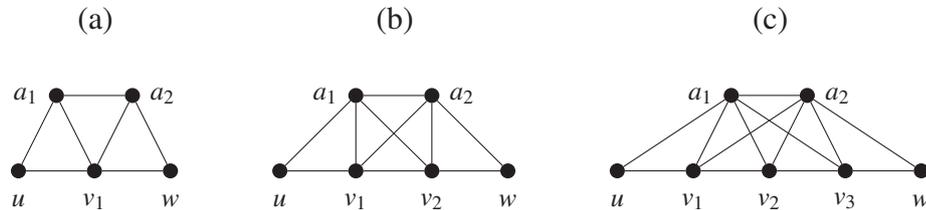


Figura 2.32: Grafos $\mathcal{F}_6(0)$ (a), $\mathcal{F}_6(1)$ (b) e $\mathcal{F}_6(2)$ (c).

A Figura 2.32 descreve o grafo $\mathcal{F}_6(0)$ (a), o grafo $\mathcal{F}_6(1)$ (b) e o grafo $\mathcal{F}_6(2)$ (c). Os vértices de cada grafo são rotulados de acordo com a definição de $\mathcal{F}_6(n)$.

Definição 2.8.21. Um grafo é cordal se todo ciclo com quatro ou mais vértices possui uma corda, isto é, se é livre de C_{4+n} . A classe dos grafos cordais é a classe C_{4+n} -free.

Definição 2.8.22. Um grafo é bipartido cordal se é bipartido e todo ciclo com seis ou mais vértices possui uma corda. A classe dos bipartidos cordais é a classe $\text{bipartido} \cap C_{6+n}$ -free.

Definição 2.8.23. Seja G um grafo. Chamamos de coloração de G a atribuição de $k \in \mathbb{N}$ elementos, que chamamos de cores, aos vértices de G tal que cores distintas são atribuídas a vértices adjacentes. Uma coloração de um grafo é mínima se k é o menor possível.

De forma alternativa, uma coloração é uma partição dos vértices de um grafo onde cada parte induz um conjunto independente. Uma coloração é mínima se o número de partes é o menor possível.

Definição 2.8.24. Um grafo G é perfeito se todo subgrafo induzido S de G possui coloração mínima com o número de cores equivalente ao número de vértices da maior clique de S .

Definição 2.8.25. Um grafo é split se admite uma partição relaxada (I, C) de seus vértices onde I é vazio ou é um conjunto independente e C é vazio ou é uma clique.

Definição 2.8.26. Chamamos um par de permutações de um conjunto finito S de modelo de permutação e temos que $U(\mathcal{M}) = S$. O grafo do modelo de permutação \mathcal{M} é o grafo G que tem $U(\mathcal{M})$ como conjunto de vértices e dois vértices $v, u \in V(G)$ são adjacentes se, e somente se, o índice de v é maior que o índice de u em uma das permutações e menor na outra permutação. Um grafo é grafo de permutação se é isomorfo a algum grafo de um modelo de permutação.

Definição 2.8.27. Chamamos de cografo o grafo da classe de grafos definida de forma recursiva por:

- O grafo K_1 é cografo;
- O complemento de um cografo é cografo; e
- A união disjunta entre dois cografos é cografo.

Isto é, a classe dos cografos é a menor classe de grafos fechada sob complementação e união disjunta que possui o grafo K_1 .

Definição 2.8.28. Um grafo é chamado de grafo de intervalos se é isomorfo a um grafo de intersecção de um modelo de intervalos. A classe dos grafos de intervalos é a classe de todos os grafos de intervalos.

Definição 2.8.29. Um bigrafo de intervalos é próprio se é isomorfo a um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos onde nenhum intervalo está contido em outro. A classe dos bigrafos de intervalos próprios é a classe de todos os bigrafos de intervalos próprios.

Definição 2.8.30. Dizemos que duas bicliques maximais B_1 e B_2 de um grafo G possuem intersecção apenas por vértices se a intersecção $B_1 \cap B_2$ induz um conjunto independente em G .

Definição 2.8.31. Dizemos que duas bicliques maximais B_1 e B_2 de um grafo G possuem intersecção por arestas se a intersecção $B_1 \cap B_2$ induz um grafo com alguma aresta em G .

Definição 2.8.32. A matriz de adjacência de um grafo G de n vértices é uma matriz $A = \{0, 1\}^{n \times n}$ — isto é, uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com valorações 0 ou 1 — onde existe uma bijeção $\pi : V(G) \rightarrow [1..n]$ tal que $A_{\pi(v), \pi(u)} = 1$ se, e somente se, o vértice v é adjacente ao vértice u , para todo $v, u \in V(G)$.

Definição 2.8.33. Um grafo direcionado é um grafo onde arestas são pares ordenados chamados de arcos em vez de pares não-ordenados. O conjunto de arcos de um grafo direcionado G é denotado por $A(G)$. Um grafo direcionado também é chamado de digrafo.

Definição 2.8.34. Um automorfismo em um (di)grafo G é uma bijeção de isomorfismo de G para G , isto é, é uma bijeção $\varphi : V(G) \rightarrow V(G)$ onde — para todos os vértices $v, u \in V(G)$ — vale que v é adjacente a u se, e somente se, $\varphi(v)$ é adjacente a $\varphi(u)$. Um automorfismo φ em G é dito não-trivial se vale que $\varphi(v) \neq v$, para todo $v \in G$.

Definição 2.8.35. Seja S um conjunto de conjuntos. Dizemos que S é Helly se, para todo subconjunto $R \subset S$ onde todos $x, y \in R$ são intersectantes entre si, então a intersecção total $\bigcap_{x \in R} x$ não é vazia.

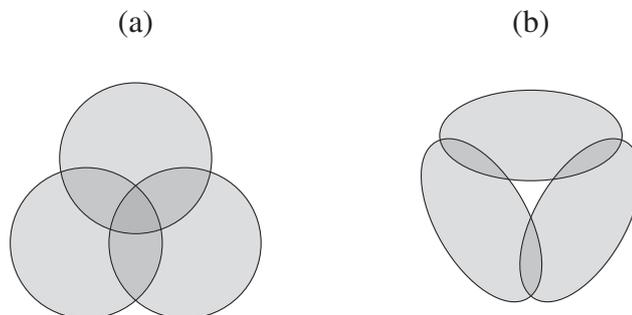


Figura 2.33: Tripla Helly (a) e tripla não-Helly (b).

A Figura 2.33 descreve um conjunto Helly de três conjuntos (a) e um conjunto não-Helly de três conjuntos (b). Todos os conjuntos da tripla (a) compartilham de algum elemento em comum, mas os conjuntos da tripla (b) — embora intersectantes 2-a-2 — não compartilham um elemento em comum.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresentamos uma revisão dos trabalhos que motivam ou levam ao estudo de grafos biclique apresentado neste documento, assim como alguns dos trabalhos relacionados aos tópicos abordados.

3.1 TRABALHOS SOBRE GRAFOS BICLIQUE

O estudo de grafos biclique tem seu início com a tese de doutorado de Groshaus (2006) com a introdução de grafos biclique-Helly, grafos com conjunto de bicliques maximais que respeitam a propriedade *Helly* — isto é, cada subconjunto de bicliques maximais com intersecções 2-a-2 não-vazias, vale que todas compartilham algum elemento em comum. O trabalho também introduz o conceito de matriz biclique e o operador grafo biclique (KB), conceitos que são posteriormente apresentados no artigo de Groshaus e Szwarcfiter (2010). A tese de Groshaus (2006) também introduz o operador de grafos de bicliques com intersecção por aresta (KB_e), subgrafo gerador do grafo biclique onde há adjacência se, e somente se, existe aresta no subgrafo induzido pela intersecção das bicliques maximais correspondentes. São estudados grafos biclique de grafos bipartidos e grafos KB-perfeitos, grafos cujos seus grafos biclique são da classe dos grafos perfeitos — classe que é brevemente descrita na Seção 3.2.

A matriz biclique de um grafo com vértices v_1, \dots, v_n e bicliques maximais B_1, \dots, B_d é a matriz $A \in \{0, 1, -1\}^{d \times n}$ onde $A_{ki} = -A_{kj} \neq 0$, para todo par de vértices adjacentes $v_i, v_j \in B_k$, e $A_{ki} = 0$ se $v_i \notin B_k$, com $1 \leq k \leq d$ e $1 \leq i \neq j \leq n$. O trabalho de Groshaus e Szwarcfiter (2010), assim como a tese de Groshaus (2006), apresenta caracterizações das classes dos grafos biclique e dos grafos biclique de bipartidos em termos de matrizes biclique. Entretanto, tais caracterizações não levam a um algoritmo polinomial de reconhecimento.



Figura 3.1: Grafo diamante (a) e grafo gema (b).

Groshaus e Szwarcfiter (2010) também provam que o caminho P_3 é subgrafo induzido de um grafo biclique apenas se estiver contido em um *diamante* ou em uma *gema*. A Figura 3.1 descreve a ocorrência de P_3 (em destaque) em cada um dos casos. Os grafos diamante e gema também são chamados de *2-fan* e *3-fan* respectivamente.

Groshaus e Szwarcfiter (2010) mostram que reconhecimento de grafos biclique está em NP. Entretanto, o complexidade de reconhecimento de grafos biclique ainda é um problema em aberto. Contudo, o interesse na caracterização de grafos biclique nos leva ao estudo do operador sob diversos ângulos. Os próximos parágrafos descrevem o estudo do operador e em quais contextos o estudo foi feito.

Groshaus e Montero (2013) estudam o operador grafo biclique iterado — isto é, o operador grafo biclique aplicado sucessivamente — e provam que é polinomial decidir se um grafo qualquer diverge ou converge sob aplicação sucessiva do operador. Tal prova apresenta

uma caracterização por subgrafos proibidos para grafos que convergem. O trabalho também apresenta uma prova de que a remoção ou inserção de algum vértice falso gêmeo de outro preserva a estrutura do grafo biclique, o que permite que grafos biclique de qualquer classe seja analisada limitando-se apenas aos grafos livres de falsos gêmeos.

Legay e Montero (2019) estudam o operador KB_e de grafos de bicliques maximais com intersecção por aresta no contexto de operador iterado e apresentam condições suficientes para decidir a convergência ou divergência de um grafo. Também é estudado o grafo $\text{KB}_e(B(G))$ — onde $B(G)$ denota o *grafo inflado* de G , isto é, o grafo onde cada vértice v de G de grau d é substituído pela clique C_v de d vértices e uma aresta conecta duas cliques C_v e C_w distintas se conecta exclusivamente um de seus respectivos vértices e se os vértices v e w de G correspondentes são adjacentes — e é apresentada a caracterização $\text{KB}_e(B(G)) \simeq B(L(G))$.

A dissertação de Cruz (2018) aborda a classe dos grafos biclique de bigrafos de intervalos, os quais são chamados de grafos de bi-intervalos, e apresenta uma prova de que tais grafos são de co-comparabilidade livres de $K_{1,4}$. Para a prova, são usados modelos de intervalos onde assume-se uma ordem total dos extremos de cada intervalo e, a partir de suas propriedades, é descrita uma ordem parcial entre bicliques maximais não-intersectantes dos bigrafos de intersecção dos modelos de intervalos.

Cruz et al. (2020) descrevem caracterizações de grafos biclique de grafos como árvores, ciclos, completos e grafos com cintura de pelo menos 5 e bigrafos de intervalos próprios, onde a classe de seus grafos biclique é equivalente a classe dos grafos quadrados dos grafos linhas dos bigrafos de intervalos próprios. Também é descrito um algoritmo polinomial de reconhecimento de grafos biclique de uma subclasse dos bigrafos de intervalos próprios.

Groshaus et al. (2022) descrevem um algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos biclique de uma subclasse dos grafos *split* definida como *nested separable split graphs* (NSSG) e provam que tais grafos biclique são hamiltonianos, isto é, admitem um ciclo de todos os seus vértices. Também provam que decidir se o grafo biclique de um grafo qualquer é completo é um problema coNP-completo.

Montero (2022) estuda em quais condições a remoção de um vértice v de um grafo biclique $\text{KB}(G)$ resulta em um grafo biclique de algum grafo. Também apresenta como construir um grafo H tal que $\text{KB}(H) \simeq \text{KB}(G) \setminus \{v\}$ se o grau de v for igual a 2.

O trabalho de Groshaus e Guedes (2021) introduz o conceito de bicliques maximais *mutuamente inclusas* e o operador KB_m de grafo de bicliques mutuamente inclusas. Também é introduzida a propriedade IIC de *posets* e os grafos IIC-comparabilidade e provado os seguintes resultados de interesse para este trabalho.

Teorema 3.1.1 (Groshaus e Guedes, 2021). *Seja G um grafo bipartido com partição (X, Y) e duas bicliques maximais distintas B_1 e B_2 . Vale que*

$$B_1 \cap X \subset B_2 \cap X \iff B_2 \cap Y \subset B_1 \cap Y.$$

Teorema 3.1.2 (Groshaus e Guedes, 2021). *Vale que um grafo G é grafo de bicliques mutuamente inclusas de bipartido se, e somente se, G for IIC-comparabilidade.*

Teorema 3.1.3 (Groshaus e Guedes, 2021). *Seja G um grafo livre de triângulos. Vale que*

$$\text{KB}(G) = \left(\text{KB}_m(G) \right)^2.$$

O pôster apresentado por Groshaus e Guedes (2020) acrescenta que grafos biclique de grafos livres de triângulos e ciclos de tamanhos 5 e 6 são também grafos clique onde — para todo grafo G da classe — vale que $\text{KB}(G) \simeq \text{K}(G^2)$. O pôster também associa o estudo de Farzad e Karimi (2012) — sobre reconhecimento de grafos quadrados de grafos de cintura igual a 5 — com os grafos biclique de grafos com cintura igual a 5, mostrando que o reconhecimento de tal classe é um problema NP-completo.

Classe de G	Classe de $\text{KB}(G)$	Reconhecimento
Livre de triângulos	\subset grafos quadrados	^a Em aberto
Bipartido	$(\text{IIC-comparabilidade})^2$	^a Em aberto
Bigrafo de Intervalos	\subset co-comparabilidade \cap livre de $K_{1,4}$	^b Em aberto
Bigrafo de Intervalos Próprio	$L(\text{bigrafo de intervalos próprio})^2$	^c Em aberto
Grafo split	\subset hamiltoniano	^d Em aberto
<i>Caterpillar</i>	$(\text{caminho})^2$	^c Linear ^c
Árvore	$(\text{árvore})^2$	^c Linear ^c
Completo	$L(\text{completo})$	^c Polinomial ^c
NSSG	Em aberto	Polinomial ^d
Cintura ≥ 6	$(\text{cintura} \geq 6)^2$	^c Polinomial ^c
Cintura = 5	$(\text{cintura} = 5)^2$	^c NP-completo ^e

^a Groshaus e Guedes (2021); ^b Cruz (2018); ^c Cruz et al. (2020); ^d Groshaus et al. (2022);
^e Groshaus e Guedes (2020).

Tabela 3.1: Comparação de subclasses de grafos biclique.

A Tabela 3.1 descreve os resultados de caracterização e complexidade de reconhecimento das subclasses de grafos biclique dos estudos até então mencionados. Cada linha descreve, respectivamente, a classe de um grafo G , a classe de $\text{KB}(G)$ e a complexidade de reconhecimento de $\text{KB}(G)$. Em especial, a caracterização ainda conhecida para grafos biclique de grafos NSSG é seu algoritmo de reconhecimento.

3.2 CLASSES DE GRAFOS E SUAS INCLUSÕES

A tese de Groshaus (2006) introduz os grafos biclique de forma análoga aos grafos clique, que foram estudados por Hamelink (1968) já na forma de operador grafo clique K . Entretanto, o problema de reconhecimento de grafos clique é descoberto ser NP-completo por Alcón et al. (2009) décadas após o interesse inicial na classe. Além de conter a classe dos grafos biclique de grafos livres de K_3 , C_5 e C_6 — como mencionamos na Seção 3.1 —, a classe dos grafos clique contém a classe de todos os grafos cujo seu conjunto de cliques maximais respeitam a propriedade Helly, como provado por Hamelink (1968). Tais grafos são chamados de clique-Helly e os trabalhos de Dragan (1989) e Szwarcfiter (1997) mostram que um grafo é clique-Helly se, e somente se, todo subgrafo induzido por um triângulo e todos os vértices adjacentes a, pelo menos, dois vértices do triângulo possui um vértice universal. Por vacuidade, todo grafo livre de triângulos é clique-Helly e, portanto, grafo clique.

Embora não diretamente estudados neste trabalho, a classe dos grafos perfeitos contém algumas classes de interesse como os grafos de comparabilidade — por Berge (1960) e também derivado pelo Teorema de Mirsky (1971) — e os grafos de co-comparabilidade — pelo Teorema de Dilworth (1950) e derivado pelo Teorema Fraco dos Grafos Perfeitos de Lovász (1972),

que enuncia que todo complemento de um grafo perfeito também é perfeito. A classe dos grafos perfeitos foi conjecturada por Berge (1961) ser equivalente à classe dos grafos livres de buracos ímpares e seus complementos, isto é, que a classe dos grafos perfeitos é a classe $(C_{5+2n}, \overline{C_{5+2n}})$ -free. O trabalho de Chudnovsky et al. (2006) prova a conjectura, agora chamada de Teorema Forte dos Grafos Perfeitos.

A classe dos grafos *split* é equivalente à classe dos grafos cordais \cap co-cordais — por Foldes e Hammer (1976). Pelo Teorema Forte dos Grafos Perfeitos, podemos verificar que grafos cordais são perfeitos¹ — resultado apresentado por Dirac (1961), que antecede o teorema — e, portanto, que grafos *split* são perfeitos.

Dushnik e Miller (1941) prova que a classe dos grafos de permutação equivale à classe dos grafos de inclusão de intervalos e também à intersecção entre as classes dos grafos de comparabilidade e dos grafos de co-comparabilidade.

A classe dos cografos é estudada independentemente por diferentes autores sob distintos nomes. O trabalho de Sumner (1974) os estuda sob o nome de *HD-graphs* — *hereditary Dacey graphs* (grafos hereditários de Dacey) — e o trabalho de Jung (1978) os chamam de *D*-graphs* (grafos *D**). O trabalho de Corneil et al. (1981) mostra a equivalência entre a classe dos cografos e a classe dos grafos livres de P_4 e os trabalhos de Jung (1978) e Corneil et al. (1981) mostram que todo cografo é um grafo de comparabilidade. Como a classe dos cografos é autocomplementar — isto é, o complemento de um cografo também é um cografo —, vale que todo cografo também é um grafo de co-comparabilidade e, portanto, é um grafo de permutação.

A classe dos grafos IIC-comparabilidade é introduzida pelo trabalho de Groshaus e Guedes (2021) para a caracterização da classe dos grafos de bicliques mutuamente inclusas de grafos bipartidos. A dissertação de Glir (2022) aprofunda o estudo de grafos IIC-comparabilidade, sugerindo um algoritmo de reconhecimento da classe baseado em programação linear inteira, embora não possua uma prova de corretude. A complexidade de reconhecimento, entretanto, é ainda um problema em aberto. Por uma análise do trabalho de Cruz et al. (2020) à luz dos resultados de Groshaus e Guedes (2021), podemos afirmar que a classe dos grafos IIC-comparabilidade contém a classe dos grafos árvores, que são grafos de bicliques mutuamente inclusas de grafos árvores². Glir (2022) também mostra que a classe dos grafos IIC-comparabilidade não é hereditária a partir de uma demonstração de que todo C_4 induzido em um grafo IIC-comparabilidade está contido em algum grafo W_4 induzido.

Um dos resultados clássicos de Teoria dos Grafos é a equivalência entre a classe dos grafos bipartidos e a classe dos grafos livres de ciclos ímpares. Como o triângulo é um ciclo, temos que a classe dos grafos bipartidos é subclasse dos grafos livres de triângulos. Também temos que todos os grafos acíclicos — incluindo a classe dos grafos árvores — são grafos bipartidos.

A classe dos grafos árvores contém a classe dos grafos *caterpillar* — onde o conjunto dominante que induz um caminho garante a conectividade —, que — por sua vez — contém a classe dos grafos caminhos. Por uma análise similar ao caso dos grafos árvores, temos que a classe dos grafos caminhos é a classe de grafos de bicliques mutuamente inclusas de grafos *caterpillar*. Feuilloley e Habib (2021) mostram que a classe dos grafos *caterpillar* é equivalente

¹Proibindo todo ciclo C_{4+n} como subgrafo induzido proíbe os buracos ímpares. O grafo $\overline{C_5}$ é isomorfo a C_5 e, logo, proibido pelos cordais. Todo ciclo com mais de cinco vértices possui um $2K_2$ induzido, cujo o complemento é isomorfo a C_4 . Logo, os cordais são $(C_{5+n}, \overline{C_{5+n}})$ -free.

²Toda biclique maximal de uma árvore é uma estrela e podemos, então, definir uma bijeção entre as bicliques maximais de uma árvore e os vértices que não são folhas. Se dois de tais vértices são vizinhos, então cada um é folha na estrela induzida correspondente ao vizinho pela bijeção, revelando a relação de inclusão mútua entre elas. O grafo KB_m de uma árvore — que não seja um K_2 — é, portanto, a própria árvore com os vértices folhas removidos.

à classe dos grafos conexos³ de intervalos acíclicos, que equivale à classe dos grafos árvores que são de co-comparabilidade.

Bigrafos de intervalos são introduzidos por Harary et al. (1982) como análogos aos grafos de intervalos. O trabalho também sugere uma caracterização semelhante à de Lekkerkerker e Boland (1962) da classe dos grafos de intervalos. Entretanto, a caracterização apresentada por Harary et al. está parcialmente correta como discutida brevemente na tese de Tennenhouse (2010) que aponta que o trabalho de Müller (1997) mostra que a caracterização de Harary et al. é insuficiente. O trabalho de Müller também apresenta um algoritmo de reconhecimento da classe com custo de tempo $\mathcal{O}(nm^6(n+m)\log n)$ — onde n e m correspondem ao número de vértices e o número de arestas do grafo respectivamente — baseado na construção de um modelo bipartido de intervalos a partir de seus subgrafos de forma recursiva. Hell e Huang (2004) apresentam outra caracterização no contexto de ordenação de vértices com a motivação de que seja encontrado um algoritmo de reconhecimento mais eficiente. A partir dessa motivação, Rafiey (2022) apresenta um algoritmo com custo de tempo $\mathcal{O}(nm)$ que usa a estratégia de padrões proibidos baseada na ordenação de vértices descrita por Hell e Huang. Hell e Huang também provam que a classe dos bigrafos de intervalos é a mesma que a classe dos grafos bipartidos cujos seus complementos são grafos arco-circulares normais, isto é, grafos que admitem como modelo de intersecção um conjunto de arcos em uma circunferência que não é coberta por dois de seus arcos.

Steiner (1996) prova que a classe dos bigrafos de intervalos próprios é equivalente à classe dos bipartidos de permutação, isto é, dos grafos de permutação que também são bipartidos. A classe dos bigrafos de intervalos unitários — que são grafos bipartidos que admitem representação por um modelo de intersecção de intervalos de mesmo comprimento — é provada por Sen e Sanyal (1994) e por West (1998) ser equivalente à classe dos bigrafos de intervalos próprios. Hell e Huang (2004) enunciam a equivalência entre bigrafos de intervalos próprios, bipartidos de permutação, bipartido \cap co-comparabilidade e complementos de arcos-circulares próprios — que correspondem aos grafos que admitem como modelo de intersecção um conjunto de arcos em uma circunferência onde nenhum arco contém outro. Como os grafos *caterpillar* são bipartidos e de co-comparabilidade, vale que a classe dos bigrafos de intervalos próprios contém a classe dos grafos *caterpillar*.

A classe dos bigrafos de inclusão de intervalos é mostrada ser equivalente, por Saha et al. (2014), à classe dos bigrafos que admitem um modelo de permutação de vértices definida como a classe dos *bigrafos de permutação* que, apesar do nome, é uma classe distinta da classe dos bipartidos de permutação. A partir de restrições de tais modelos de permutação, o trabalho também prova que todo bigrafo de intervalos é um bigrafo de inclusão de intervalos. Entretanto, ainda é uma questão em aberto se existe uma equivalência entre as duas classes. O trabalho de Hell e Huang (2004) também mostra que a classe dos bigrafos de inclusão de intervalos equivale à classe dos grafos bipartidos que são complementos dos grafos arco-circulares — grafos que admitem como modelo de intersecção um conjunto de arcos em uma circunferência. Hell et al. (2020) mostram que a classe é subclasse dos bipartidos cordais.

A Figura 3.2 descreve as relações de inclusão entre algumas classes até então mencionadas. Vale notar que, se uma classe de grafos \mathcal{C}_1 está contida em uma classe \mathcal{C}_2 , então a subclasse de grafos biclique $\text{KB}(\mathcal{C}_1)$ está contida em $\text{KB}(\mathcal{C}_2)$.

³Feuilloley e Habib (2021) definem os grafos *caterpillar* como uma união disjunta de árvores com conjuntos dominantes que induzem caminhos. Neste trabalho, acrescentamos que grafos *caterpillar* são conexos.

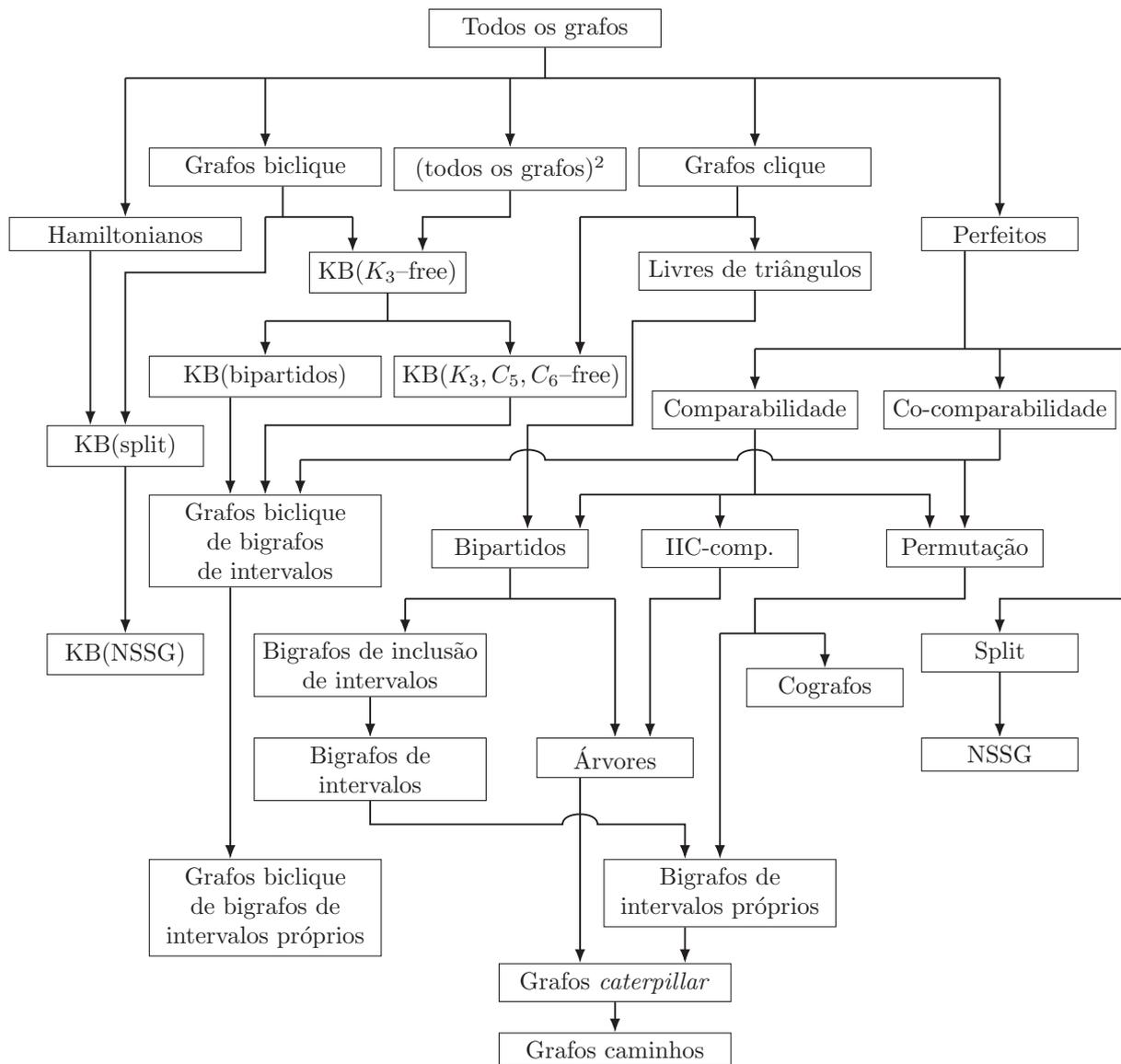


Figura 3.2: Diagrama de inclusão de classes de grafos.

3.3 BICLIQUES EM GRAFOS

A definição de *biclique* varia entre diferentes trabalhos. Os trabalhos de Alexe et al. (2004), Liu et al. (2006) e Eppstein (1994), por exemplo, as associam com subgrafos bipartidos completos não necessariamente induzidos. Os trabalhos de Prisner (2000) e Dias et al. (2007) as associam com subgrafos bipartidos completos induzidos, embora reservem o termo apenas para as bicliques maximais.

Enquanto alguns trabalhos que abordam grafos bipartidos as associam com subgrafos bipartidos completos induzidos — dado que todo subgrafo bipartido completo é induzido em grafos bipartidos —, ainda existe distinção no conceito de maximalidade, como o trabalho de Zhang et al. (2014) que permite que a maximalidade seja medida tanto pelo número de vértices quanto pelo número de arestas. O trabalho de Li et al. (2023), entretanto, reserva o conceito de *biclique máxima* como aquela que induz o maior número de arestas — embora também apresente o conceito de biclique com o maior número de vértices como uma variação.

Para esta seção — assim como em toda tese —, definimos biclique como o subconjunto de vértices que induz um bipartido completo e sua maximalidade pela propriedade de não estar propriamente contida em outra biclique, como descrevemos no Capítulo 2. Por questão de clareza, discutimos as seguintes referências aproximando suas definições de *biclique* para os conceitos matemáticos definidos neste trabalho.

Dawande et al. (2001) apresentam variações do problema da biclique máxima e mostram que encontrar a biclique com o maior número de vértices é polinomial para grafos bipartidos. Entretanto, Peeters (2003) mostra que decidir se existe uma biclique que induz um subgrafo com, pelo menos, um certo número de arestas é NP-completo em grafos bipartidos. Dias et al. (2007) provam que, dado um subconjunto de vértices S , decidir se existe uma biclique maximal onde uma de suas partes equivale a S é NP-completo. Em busca de métodos alternativos para contornar as restrições de implementações de soluções clássicas no ponto de vista de sustentabilidade, Li et al. (2023) propõem um algoritmo quântico para encontrar a biclique que induz um subgrafo com o maior número de arestas em grafos bipartidos.

Prisner (2000) encontra um limitante superior de $(1.618034^n + o(1))n^{5/2}$ para o número de bicliques maximais em um grafo de n vértices e um de $2^{n/2}$ para grafos bipartidos. Gaspers et al. (2012) melhoram o limitante de bicliques maximais em grafos quaisquer para $\Theta\left(3^{n/3}\right)$. O trabalho de Kuznetsov (2001) mostra que o problema de contagem de bicliques maximais em grafos bipartidos é #P-completo.

A partir dos resultados de Müller (1997), Prisner (2000) também prova um limitante superior de $(|X| \cdot |Y|)^2$ bicliques maximais em bigrafos de intervalos com partição (X, Y) , além de um limitante polinomial para generalizações bipartidas dos bigrafos de intervalos. O trabalho de Albano e do Lago (2014) apresenta limitantes para o número de bicliques maximais em grafos bipartidos a partir de um parâmetro chamado de *convexidade* e mostra que calcular tal parâmetro é um problema NP-difícil.

O trabalho de Ikeda (2018) propõe um algoritmo de custo de tempo total polinomial de enumeração de bicliques maximais de bigrafos de intervalos a partir de seus modelos de intervalos.

O trabalho de Kloks e Kratsch (1995) apresenta um algoritmo de enumeração de bicliques maximais de um grafo bipartido cordal de n vértices e m arestas de custo $\mathcal{O}(\min(m \log n, n^2))$.

Alexe et al. (2004) descrevem um algoritmo de enumeração de subgrafos bipartidos completos — não necessariamente induzidos — similar ao método do consenso em lógica

proposicional. Para um grafo de n vértices e B subgrafos bipartidos completos maximais, o algoritmo possui custo de tempo $\mathcal{O}(n^3B)$.

O trabalho de Liu et al. (2006) apresenta um algoritmo para a enumeração de subgrafos bipartidos completos baseado na técnica de divisão-e-conquista e cortes do espaço de busca. Para um grafo de n vértices e B subgrafos bipartidos completos maximais, o algoritmo possui custo de tempo $\mathcal{O}(n^2B)$.

Eppstein (1994) propõe um algoritmo com custo de tempo $\mathcal{O}(a^32^{2a}n)$ para a enumeração de subgrafos bipartidos completos maximais de um grafo de n vértices e arboricidade a . Eppstein também prova que, em qualquer grafo de arboricidade a , existem até $2^{2a}n$ subgrafos bipartidos completos maximais.

Makino e Uno (2004) propõem três algoritmos para a enumeração de bicliques maximais de um grafo bipartido G de entrada com n vértices e m arestas. O primeiro com custo de tempo $\mathcal{O}(M(n))$ por biclique maximal — onde $M(n)$ descreve o custo de tempo para a multiplicação de duas matrizes $n \times n$ — e custo de espaço $\mathcal{O}(n^2)$. O segundo possui custo de tempo de $\mathcal{O}(\Delta_G^3)$ por biclique maximal e custo de espaço $\mathcal{O}(n+m)$. O terceiro possui custo de tempo $\mathcal{O}(\Delta_G^2)$ por biclique maximal e custo de espaço $\mathcal{O}(n+m+\Delta_G|\mathcal{B}_G|)$.

Dias et al. (2007) apresentam um algoritmo de enumeração de bicliques maximais em um grafo bipartido de n vértices e m arestas com custo de tempo $\mathcal{O}(nm)$ para cada biclique maximal e custo de espaço $\mathcal{O}(n+m)$. O trabalho também apresenta duas classes onde o custo de tempo por biclique maximal é $\mathcal{O}(n^2)$ e $\mathcal{O}(n)$ respectivamente.

Gély et al. (2009) apresentam algoritmos de enumeração de bicliques quaisquer de um grafo G de n vértices e m arestas para o caso geral e para quando G for um grafo bipartido. O custo de tempo do caso geral é $\mathcal{O}(nm)$ por biclique maximal e o custo de tempo quando G é bipartido é $\mathcal{O}(n^2)$ por biclique maximal além de custo de espaço polinomial.

Motivados pela análise de dados em escala genômica, o trabalho de Zhang et al. (2014) propõe um algoritmo de enumeração de bicliques que são maximais tanto em vértices quanto em arestas do subgrafo induzido de um grafo bipartido. Tal algoritmo se baseia no uso de propriedades estruturais de grafos bipartidos para cortes do espaço de busca e possui custo de tempo $\mathcal{O}(\Delta_G^2n^2)$ para cada uma de tais bicliques e custo de espaço $\mathcal{O}(\min(\Delta_G, n)m)$ para um grafo bipartido G de n vértices e m arestas.

Hermelin e Manoussakis (2021) apresentam um algoritmo de custo de tempo $\mathcal{O}(n3^{n/3})$ para a enumeração de bicliques maximais em grafos quaisquer. O trabalho encontra também limitantes mais precisos de bicliques maximais para certas classes de grafos.

4 GRAFOS BICLIQUE DE BIPARTIDOS

Pela natureza bipartida das bicliques, um caminho natural para o estudo de grafos biclique é pelas diferentes subclasses de grafos biclique de grafos bipartidos. Neste trabalho, abordamos os grafos biclique de bigrafos de intervalos e bigrafos de inclusão de intervalos como uma continuação do estudo iniciado pela dissertação de Cruz (2018). Ambas as classes são definidas sobre bipartições de modelos de intervalos da reta real e usamos propriedades de tais modelos para derivar características das bicliques maximais dos grafos das respectivas classes.

As propriedades de interesses entre os intervalos são, portanto, intersecção e inclusão. Os bigrafos de intervalos e bigrafos de inclusão de intervalos permitem múltiplos modelos de intervalos que satisfazem as respectivas relações de intersecção e inclusão que os descrevem. Contudo, podemos restringir os modelos de intervalos para derivarmos propriedades dos grafos e suas bicliques com a seguinte convenção.

Convenção. *Consideramos, em todo modelo de intervalos, que dois intervalos distintos não compartilham algum extremo de intervalo. Isto é, o extremo de todo intervalo é único em um modelo de intervalos.*

Vale notar que podemos derivar um modelo de intervalos com extremos não coincidentes a partir de um modelo de intervalos qualquer por uma ordenação dos extremos que mantém a ordem de extremos não coincidentes. Para preservar intersecção, basta garantir para todo par de intervalos considerados intersectantes que todo ponto mínimo do primeiro intervalos preceda o ponto máximo do segundo intervalo e que o ponto máximo do primeiro intervalo suceda o ponto mínimo do segundo intervalo. Para preservar inclusão, basta garantir para todo par de intervalos que compartilham alguma relação de inclusão que a ordem dos pontos mínimos do primeiro e segundo intervalos seja a reversa da ordem dos seus pontos máximos.

Na Seção 4.1, provamos que grafos KB_m de bigrafos de inclusão de intervalos são grafos comparabilidade \cap co-comparabilidade a partir das propriedades de conjuntos de intervalos que correspondem às bicliques maximais do grafo. Tais propriedades levam à existência tanto de uma ordem parcial estrita sobre bicliques maximais de um bigrafo de inclusão de intervalos onde comparabilidade equivale à inclusão mútua quanto a uma ordem parcial estrita onde comparabilidade equivale à não-inclusão mútua.

Na Seção 4.2, mostramos que todo grafo de inclusão de intervalos é subgrafo induzido do grafo KB_m de algum bigrafo de intervalos. Usamos uma construção de um modelo de intervalos que admite uma bipartição onde as bicliques maximais do bigrafo de intervalos correspondente são mutuamente inclusas se, e somente se, intervalos correspondentes às bicliques maximais compartilham a relação de inclusão.

Outra propriedade de interesse são as triplas bi-asteroidais em grafos bipartidos, introduzidas por Harary et al. (1982) na tentativa de caracterização de bigrafos de intervalos. Na Seção 4.3, mostramos que se um grafo bipartido possui uma tripla bi-asteroidal, então seu grafo KB_m possui uma tripla asteroidal.

Na Seção 4.4, relacionamos três tipos de intersecção entre bicliques maximais em grafos bipartidos com subgrafos induzidos. Mais especificamente, mostramos que: bicliques maximais são mutuamente inclusas se, e somente se, o grafo contém P_4 como subgrafo induzido; se bicliques maximais possuem intersecção sem compartilhar arestas, então o grafo contém P_5 como subgrafo induzido e; bicliques maximais possuem intersecção não-mutuamente inclusa por arestas se, e somente se, o grafo contém o grafo *dominó* como subgrafo induzido.

4.1 BIGRAFOS DE INCLUSÃO DE INTERVALOS

Nesta Seção, mostramos que todo grafo de bicliques mutuamente inclusas de bigrafos de inclusão de intervalos são grafos de comparabilidade e grafos de co-comparabilidade. Mostramos que o conjunto de bicliques maximais de todo bigrafo de inclusão de intervalos admite uma ordem parcial estrita onde bicliques maximais são comparáveis se, e somente se, se são mutuamente inclusas. Também mostramos que existe uma ordem parcial estrita onde as bicliques maximais são comparáveis se, e somente se, não são mutuamente inclusas.

Para a descrição de tais ordens parciais, apresentamos as seguintes definições.

Definição 4.1.1. *Seja um intervalo i da reta real. Denotamos por $l(i)$ o menor ponto de i e, por $r(i)$, o maior ponto de i e chamamos, respectivamente, de extremo esquerdo e extremo direito de i .*

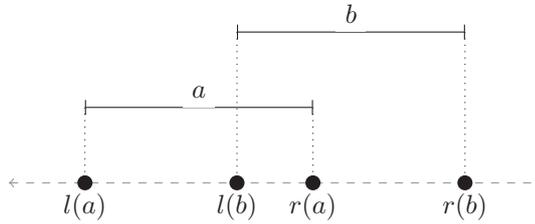


Figura 4.1: Intervalos da reta real e seus respectivos extremos esquerdo e direito.

A Figura 4.1 descreve os intervalos a e b da reta real, os extremos esquerdo $l(a)$ e $l(b)$ e os extremos direito $r(a)$ e $r(b)$. No exemplo, vale a ordem $l(a) < l(b) < r(a) < r(b)$ entre os extremos dos intervalos.

Definição 4.1.2. *Seja (X, Y) a partição de um modelo de intervalos \mathcal{M} e o subconjunto de $S \subseteq U(\mathcal{M})$. Denotamos os seguintes pontos:*

$\overleftarrow{l}_X(S)$	menor extremo esquerdo dos intervalos de $S \cap X$	$\min\{l(i) \mid \forall i \in S \cap X\}$
$\overrightarrow{l}_X(S)$	maior extremo esquerdo dos intervalos de $S \cap X$	$\max\{l(i) \mid \forall i \in S \cap X\}$
$\overleftarrow{r}_X(S)$	menor extremo direito dos intervalos de $S \cap X$	$\min\{r(i) \mid \forall i \in S \cap X\}$
$\overrightarrow{r}_X(S)$	maior extremo direito dos intervalos de $S \cap X$	$\max\{r(i) \mid \forall i \in S \cap X\}$
$\overleftarrow{l}_Y(S)$	menor extremo esquerdo dos intervalos de $S \cap Y$	$\min\{l(i) \mid \forall i \in S \cap Y\}$
$\overrightarrow{l}_Y(S)$	maior extremo esquerdo dos intervalos de $S \cap Y$	$\max\{l(i) \mid \forall i \in S \cap Y\}$
$\overleftarrow{r}_Y(S)$	menor extremo direito dos intervalos de $S \cap Y$	$\min\{r(i) \mid \forall i \in S \cap Y\}$
$\overrightarrow{r}_Y(S)$	maior extremo direito dos intervalos de $S \cap Y$	$\max\{r(i) \mid \forall i \in S \cap Y\}$

A Figura 4.2 descreve uma bipartição (X, Y) de um conjunto $S = \{a, b, c\}$ de intervalos da reta real e os menores e maiores extremos esquerdo e direito de $S \cap X = \{a\}$ e de $S \cap Y = \{b, c\}$. No exemplo, vale a ordem de extremos de intervalos $l(b) < l(a) < r(b) < l(c) < r(a) < r(c)$. Temos que $\overleftarrow{l}_X(S) = \overrightarrow{l}_X(S) = l(a)$, que $\overleftarrow{r}_X(S) = \overrightarrow{r}_X(S) = r(a)$, que $\overleftarrow{l}_Y(S) = l(b)$, que $\overrightarrow{l}_Y(S) = l(c)$, que $\overleftarrow{r}_Y(S) = r(b)$ e que $\overrightarrow{r}_Y(S) = r(c)$. Como a é o único intervalo em $S \cap X$, temos que $\overleftarrow{l}_X(S)$ coincide com $\overrightarrow{l}_X(S)$ e que $\overleftarrow{r}_X(S)$ coincide com $\overrightarrow{r}_X(S)$.

Quando o subconjunto de intervalos do modelo bipartido é uma biclique do bigrafo de inclusão de intervalos correspondente, podemos derivar as propriedades enunciadas pelas seguintes proposições.

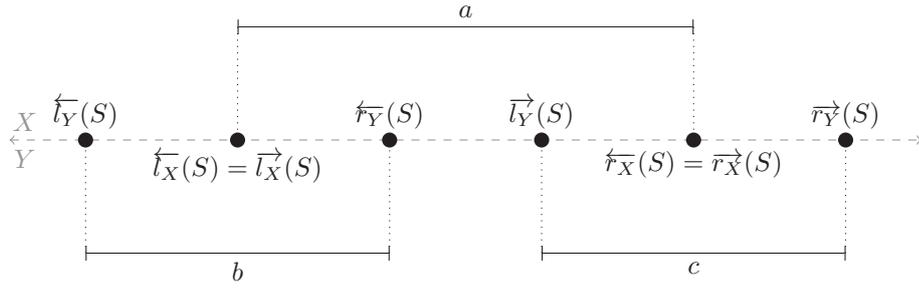


Figura 4.2: Bipartição (X, Y) de um modelo de intervalos e os menores a maiores extremos esquerdo e direito de $S \cap X$ e $S \cap Y$.

Proposição 4.1.1. *Sejam G um bigrafo de inclusão de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B uma biclique qualquer de G . Vale que*

$$\vec{l}_X(B) < \overleftarrow{l}_Y(B) < \vec{r}_Y(B) < \overleftarrow{r}_Y(B).$$

Prova. Para todo intervalo $y \in B \cap Y$ e todo intervalo $x \in B \cap X$, temos que y está contido em x , isto é, que $l(x) < l(y)$ e que $r(y) < r(x)$. Logo, temos que $\vec{l}_X(B) < \overleftarrow{l}_Y(B) < \vec{r}_Y(B) < \overleftarrow{r}_Y(B)$. \square

Proposição 4.1.2. *Sejam G um bigrafo de inclusão de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B uma biclique qualquer de G . Se existe algum intervalo $y \in Y$ tal que*

$$\left(\vec{l}_X(B) < l(y) \right) \wedge \left(r(y) < \overleftarrow{r}_X(B) \right),$$

então $B \cup \{y\}$ é biclique de G .

Prova. Pela Proposição 4.1.1, temos que $\vec{l}_X(B) < \overleftarrow{r}_X(B)$. Como $l(y) < r(y)$, temos que y está contido em todos os intervalos de $B \cap X$, isto é, que

$$\vec{l}_X(B) < l(y) < r(y) < \overleftarrow{r}_X(B).$$

Portanto, vale que $B \cup \{y\}$ é biclique de G . \square

Proposição 4.1.3. *Sejam G um bigrafo de inclusão de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B uma biclique qualquer. Se existe algum intervalo $x \in X$ tal que*

$$\left(l(x) < \vec{l}_X(B) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B) < r(x) \right),$$

então $B \cup \{x\}$ é biclique de G .

Prova. Pela Proposição 4.1.1, temos que $\vec{l}_X(B) < \overleftarrow{l}_Y(B) < \vec{r}_Y(B) < \overleftarrow{r}_X(B)$. Então, temos que

$$l(x) < \overleftarrow{l}_Y(B) < \vec{r}_Y(B) < r(x).$$

Logo, temos que y está contido em x , para todo intervalo $y \in B \cap Y$. Portanto, vale que $B \cup \{x\}$ é biclique de G . \square

Podemos, portanto, enunciar o seguinte teorema sobre inclusão mútua entre bicliques maximais em bigrafos de inclusão de intervalos.

Teorema 4.1.4. *Sejam G um bigrafo de inclusão de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B_1 e B_2 bicliques maximais de G . Vale que*

$$\left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1)\right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2)\right) \iff B_2 \cap X \subset B_1 \cap X.$$

Prova. \Rightarrow) Para todo intervalo $x \in B_2 \cap X$, temos que

$$\left(l(x) \leq \vec{l}_X(B_1)\right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq r(x)\right).$$

Pela Proposição 4.1.3, temos que $B_1 \cap \{x\}$ é biclique de G . Como $\vec{l}_X(B_1 \cup \{x\}) = \vec{l}_X(B_1)$ e $\overleftarrow{r}_X(B_1 \cup \{x\}) = \overleftarrow{r}_X(B_1)$, temos que $B_1 \cup (B_2 \cap X)$ é biclique de G . Como B_1 é maximal, temos que $B_2 \cap X \subseteq B_1 \cap X$. Como B_1 e B_2 são distintas, temos que

$$\left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1)\right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2)\right) \implies B_2 \cap X \subset B_1 \cap X.$$

\Leftarrow) Vamos provar que

$$\left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2)\right) \vee \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1)\right) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

Considere $\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2)$. Seja o intervalo $x \in B_2$ tal que $l(x) = \vec{l}_X(B_2)$. Como $\vec{l}_X(B_1) < l(x)$, temos que x não pertence a B_1 . Como B_1 é maximal, existe algum intervalo $y \in B_1 \cap Y$ que não está contido em x . Logo, temos que $y \notin B_2$.

Portanto, temos que

$$\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

De maneira análoga, temos que

$$\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

Como B_1 e B_2 são distintas, temos — para ambos os casos — que

$$B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

Portanto, temos que

$$\left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2)\right) \vee \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1)\right) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

Por contrapositiva, temos que

$$B_1 \cap Y \subset B_2 \cap Y \implies \left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1)\right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2)\right).$$

Pelo Teorema 3.1.1, temos que

$$B_2 \cap X \subset B_1 \cap X \iff B_1 \cap Y \subset B_2 \cap Y.$$

E, portanto, que

$$B_2 \cap X \subset B_1 \cap X \implies \left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \vee \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \right).$$

□

Considere o bigrafo de inclusão G de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e as relações $R, R_{co} \subseteq \mathcal{B}_G \times \mathcal{B}_G$ definidas, para bicliques maximais distintas B_1 e B_2 de G , como

$$\begin{aligned} (B_1, B_2) \in R &\iff \left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \\ (B_1, B_2) \in R_{co} &\iff \left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) < \overleftarrow{r}_X(B_2) \right). \end{aligned}$$

Enunciamos, então, o seguinte lema.

Lema 4.1.5. *As relações R e R_{co} são ordens parciais estritas.*

Prova. Como as relações R e R_{co} são definidas sobre bicliques maximais *distintas*, temos — por definição — que R e R_{co} são *irreflexivas*.

Considere as bicliques maximais distintas B_1 e B_2 de G . Como $(B_1, B_2) \in R$ e $(B_2, B_1) \in R$ implica que $B_1 = B_2$, temos que os pares ordenados (B_1, B_2) e (B_2, B_1) não pertencem simultaneamente a R . Também temos que (B_1, B_2) e (B_2, B_1) não pertencem simultaneamente a R_{co} , pois implicaria as contradições $\left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \wedge \left(\vec{l}_X(B_2) < \vec{l}_X(B_1) \right)$ e $\left(\overleftarrow{r}_X(B_1) < \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \right)$. Logo, temos que as relações R e R_{co} são *assimétricas*.

Considere a biclique maximal B_3 distinta de B_1 e B_2 . Se os pares ordenados (B_1, B_2) e (B_2, B_3) pertencem a R , então temos que

$$\left(\vec{l}_X(B_3) \leq \vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \leq \overleftarrow{r}_X(B_3) \right).$$

Logo, temos que (B_1, B_3) pertence a R . De maneira análoga, se os pares ordenados (B_1, B_2) e (B_2, B_3) pertencem a R_{co} , então temos que (B_1, B_3) pertence a R_{co} . Portanto, temos que as relações R e R_{co} são *transitivas*.

Como R e R_{co} são irreflexivas, assimétricas e transitivas, temos que R e R_{co} são ordens parciais estritas. □

Podemos, então, enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.1.6. *Sejam G um bigrafo de inclusão de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B_1 e B_2 duas bicliques maximais distintas de G . Vale que B_1 e B_2 não são comparáveis em R se, e somente se, são comparáveis em R_{co} , isto é, que*

$$(B_1, B_2) \notin R \wedge (B_2, B_1) \notin R \iff (B_1, B_2) \in R_{co} \vee (B_2, B_1) \in R_{co}.$$

Prova. Considere os predicados P_l e P_r definidos, para as bicliques maximais distintas B_1 e B_2 de G , como

$$\begin{aligned} P_l(B_1, B_2) &\iff \left(\vec{l}_X(B_1) \leq \vec{l}_X(B_2) \right), \\ P_r(B_1, B_2) &\iff \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right). \end{aligned}$$

Pela definição de R , temos que

$$\begin{aligned} (B_1, B_2) \in R &\iff \left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \\ &\iff P_l(B_2, B_1) \wedge P_r(B_1, B_2). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} (B_1, B_2) \notin R &\iff \left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \vee \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \right) \\ &\iff \neg P_l(B_2, B_1) \vee \neg P_r(B_1, B_2). \end{aligned}$$

Se B_1 e B_2 não são comparáveis em R , temos — por distribuição — que

$$\begin{aligned} &(B_1, B_2) \notin R \wedge (B_2, B_1) \notin R \\ &\iff \left(\neg P_l(B_2, B_1) \vee \neg P_r(B_1, B_2) \right) \wedge \left(\neg P_l(B_1, B_2) \vee \neg P_r(B_2, B_1) \right) \\ &\iff \left(\neg P_l(B_2, B_1) \wedge \neg P_l(B_1, B_2) \right) \vee \left(\neg P_l(B_2, B_1) \wedge \neg P_r(B_2, B_1) \right) \\ &\quad \vee \left(\neg P_r(B_1, B_2) \wedge \neg P_l(B_1, B_2) \right) \wedge \left(\neg P_r(B_1, B_2) \wedge \neg P_r(B_2, B_1) \right). \end{aligned}$$

Pelas definições de P_l e P_r , temos as contradições

$$\begin{aligned} \neg P_l(B_1, B_2) \wedge \neg P_l(B_2, B_1) &\iff \left(\vec{l}_X(B_2) < \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right), \\ \neg P_r(B_1, B_2) \wedge \neg P_r(B_2, B_1) &\iff \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) < \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \right). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} &(B_1, B_2) \notin R \wedge (B_2, B_1) \notin R \\ &\iff \left(\neg P_l(B_2, B_1) \wedge \neg P_r(B_2, B_1) \right) \vee \left(\neg P_l(B_1, B_2) \wedge \neg P_r(B_1, B_2) \right). \end{aligned}$$

Pela definição de R_{co} , temos que

$$\begin{aligned} (B_1, B_2) \in R_{co} &\iff \left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) < \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \\ &\iff \neg P_l(B_2, B_1) \wedge \neg P_r(B_2, B_1). \end{aligned}$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} &(B_1, B_2) \notin R \wedge (B_2, B_1) \notin R \\ &\iff \left(\neg P_l(B_2, B_1) \wedge \neg P_r(B_2, B_1) \right) \vee \left(\neg P_r(B_1, B_2) \wedge \neg P_l(B_1, B_2) \right) \\ &\iff (B_1, B_2) \in R_{co} \vee (B_2, B_1) \in R_{co}. \end{aligned}$$

□

Enunciamos a seguinte propriedades de grafos de bicliques mutuamente inclusas de bigrafos de inclusão de intervalos.

Teorema 4.1.7. *Seja G um bigrafo de inclusão de um modelo de intervalos com partição (X, Y) . Vale que $KB_m(G)$ é comparabilidade \cap co-comparabilidade.*

Prova. Considere as relações $R, R_{\text{co}} \subseteq \mathcal{B}_G \times \mathcal{B}_G$ definidas, para as bicliques maximais distintas B_1 e B_2 de G , como

$$\begin{aligned} (B_1, B_2) \in R &\iff \left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \\ (B_1, B_2) \in R_{\text{co}} &\iff \left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) < \overleftarrow{r}_X(B_2) \right). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.5, temos que R e R_{co} são ordens parciais estritas. Pelos Teoremas 4.1.4 e 3.1.1, temos que duas bicliques maximais distintas B_1 e B_2 de G são comparáveis em R se, e somente se, são mutuamente inclusas. Logo, temos que o grafo $\text{KB}_m(G)$ é um grafo de comparabilidade. Pelo Teorema 4.1.6, temos que duas bicliques maximais distintas B_1 e B_2 de G são comparáveis em R_{co} se, e somente se, não são mutuamente inclusas, isto é, que o complemento $\overline{\text{KB}_m(G)}$ é grafo de comparabilidade. Portanto, temos que $\text{KB}_m(G)$ é comparabilidade \cap co-comparabilidade. \square

Vale lembrar que a classe comparabilidade \cap co-comparabilidade é equivalente à classe dos grafos de permutação. Portanto, temos que a classe dos grafos KB_m dos bigrafos de inclusão de intervalos é subclasse da classe dos grafos de permutação. Pelo Teorema 3.1.3, vale que os grafos biclique dos bigrafos de inclusão de intervalos são grafos quadrados dos grafos de permutação. Como bigrafos de inclusão de intervalos são bipartidos cordais e, portanto, livres de K_3 , C_5 e C_6 , temos — pelo resultado de Groshaus e Guedes (2020) — que seus grafos biclique também são grafos clique. O artigo de Damaschke (1992) demonstra que grafos quadrados de grafos de co-comparabilidade também são grafos de co-comparabilidade livres de $K_{1,4}$ e $K_{2,3}$. Podemos, então, enunciar o seguinte corolário.

Corolário 4.1.8. *Seja BIC a classe dos bigrafos de inclusão de intervalos. Vale que*

$$\text{KB}(\text{BIC}) \subseteq (\text{permutação})^2 \cap \text{grafos clique} \subseteq \text{co-comparabilidade} \cap (K_{1,4}, K_{2,3})\text{-free}.$$

Como os bigrafos de inclusão de intervalos são grafos bipartidos, temos — pelo Teorema 3.1.2 de Groshaus e Guedes (2021) — que seus grafos KB_m são IIC-comparabilidade. Também sabemos que a classe de grafos IIC-comparabilidade não é uma classe hereditária, o que nos leva a seguinte proposta de classe de grafos para isolar a característica não-hereditária dos grafos IIC-comparabilidade.

Proposta 4.1.3. *Seja \mathcal{F} a família de subgrafos proibidos pelos grafos IIC-comparabilidade. Denotamos por NHC-IIC (Non-Hereditary Characteristic of IIC-comparability) a classe de grafos não-hereditária — isto é, não definida sob subgrafos proibidos — que satisfaz*

$$\text{IIC-comparabilidade} = \mathcal{F}\text{-free} \cap \text{NHC-IIC}.$$

Apresentamos a classe NHC-IIC em uma categoria distinta de definições por não ser uma definição precisa. A possibilidade de que existam múltiplas classes que satisfazem a equivalência torna a descrição vaga quando usada fora do contexto de grafos IIC-comparabilidade.

A Figura 4.3 descreve as intersecções entre as classes dos grafos de comparabilidade, dos grafos de co-comparabilidade e a classe proposta NHC-IIC, composta pelos grafos que possuem a propriedade não-hereditária dos grafos IIC-comparabilidade. Os grafos KB_m de grafos bipartidos são a intersecção entre a classe dos grafos de comparabilidade e a classe NHC-IIC, enquanto os grafos de permutação são grafos comparabilidade \cap co-comparabilidade.

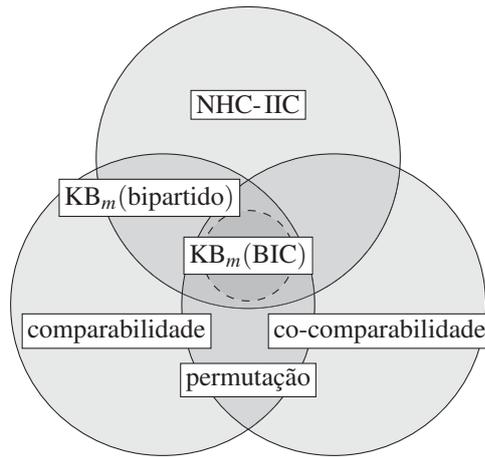


Figura 4.3: Diagrama de intersecção de classes de grafos.

Como demonstrado pelo Teorema 4.1.7, grafos KB_m de bigrafos de inclusão de intervalos — descrito como $KB_m(\text{BIC})$ na figura — são grafos de comparabilidade \cap co-comparabilidade. Como os bigrafos de inclusão de intervalos são bipartidos, a classe $KB_m(\text{BIC})$ também está contida em NHC-IIC. Porém, saber se $KB_m(\text{BIC})$ equivale à intersecção entre as três classes é uma questão ainda em aberto.

4.2 BIGRAFOS DE INTERVALOS

Nesta Seção, mostramos que todo grafo de inclusão de intervalos — isto é, todo grafo de permutação — é subgrafo induzido do grafo de bicliques mutuamente inclusas de algum bigrafo de intervalos. Para a prova, construímos um modelo de intervalos bipartido \mathcal{M}' a partir de um modelo de intervalos qualquer \mathcal{M} . Mostramos que todo intervalo de \mathcal{M} possui uma biclique maximal correspondente no bigrafo de intervalos do modelo \mathcal{M}' e que dois intervalos de \mathcal{M} possuem relação de inclusão se, e somente se, as bicliques maximais correspondentes são mutuamente inclusas entre si. Como consequência, o grafo de inclusão de intervalos do modelo \mathcal{M} é isomorfo a algum subgrafo induzido do bigrafo de intervalos de \mathcal{M}' .

Considere, portanto, as seguintes proposições.

Proposição 4.2.1. *Sejam G um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B uma biclique qualquer de G . Vale que*

$$\left(\vec{l}_X(B) < \overleftarrow{r}_Y(B) \right) \wedge \left(\vec{l}_Y(B) < \overleftarrow{r}_X(B) \right).$$

Prova. Sejam os intervalos $x \in B \cap X$ e $y \in B \cap Y$ tais que $l(x) = \vec{l}_X(B)$ e $r(y) = \overleftarrow{r}_Y(B)$. Se $\overleftarrow{r}_Y(B) < \vec{l}_X(B)$, temos que $r(y) < l(x)$ e, portanto, que os intervalos x e y não possuem intersecção. Logo, vale que

$$\vec{l}_X(B) < \overleftarrow{r}_Y(B).$$

De maneira análoga, vale que

$$\vec{l}_Y(B) < \overleftarrow{r}_X(B).$$

□

Proposição 4.2.2. *Sejam G um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B uma biclique qualquer de G . Se existe algum intervalo $y \in Y$ tal que*

$$\left(l(y) < \overleftarrow{r}_X(B) \right) \wedge \left(\overrightarrow{l}_X(B) < r(y) \right),$$

então $B \cup \{y\}$ é biclique de G .

Prova. Para todo intervalo $x \in B \cap X$, temos que $l(y) < \overleftarrow{r}_X(B) \leq r(x)$ e que $l(x) \leq \overrightarrow{l}_X(B) < r(y)$ e, portanto, que $l(y) < r(x)$ e que $l(x) < r(y)$. Logo, vale que y intersecta todos os intervalos de $B \cap X$. Portanto, temos que $B \cup \{y\}$ é biclique de G . \square

Proposição 4.2.3. *Sejam G um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B uma biclique qualquer de G . Se existe algum intervalo $x \in X$ tal que*

$$\left(l(x) < \overrightarrow{l}_X(B) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B) < r(x) \right),$$

então $B \cup \{x\}$ é biclique de G .

Prova. Pela Proposição 4.2.1, temos que

$$\left(\overrightarrow{l}_X(B) < \overleftarrow{r}_Y(B) \right) \wedge \left(\overrightarrow{l}_Y(B) < \overleftarrow{r}_X(B) \right).$$

Logo, temos que $l(x) < \overrightarrow{l}_X(B) < \overleftarrow{r}_Y(B)$ e que $\overrightarrow{l}_Y(B) < \overleftarrow{r}_X(B) < r(x)$. Pela Proposição 4.2.2, temos que $B \cup \{x\}$ é biclique de G . \square

Podemos, então, enunciar os seguintes teoremas.

Teorema 4.2.4. *Sejam G um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B_1 e B_2 duas bicliques maximais de G . Vale que*

$$\left(\overrightarrow{l}_X(B_2) \leq \overrightarrow{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \implies B_2 \cap X \subseteq B_1 \cap X.$$

Prova. Para todo intervalo $x \in B_2$, vale que

$$\begin{aligned} & \left(l(x) \leq \overrightarrow{l}_X(B_2) \leq \overrightarrow{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \leq r(x) \right) \\ & \implies \left(l(x) \leq \overrightarrow{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq r(x) \right). \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.2.3, temos que $B_1 \cup (B_2 \cap X)$ é biclique de G . Logo, temos que

$$B_2 \cap X \subseteq B_1 \cap X.$$

Como B_1 e B_2 são distintas, temos que

$$B_2 \cap X \subset B_1 \cap X.$$

\square

Teorema 4.2.5. *Sejam G um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B_1 e B_2 duas bicliques maximais de G . Vale que*

$$B_2 \cap Y \subset B_1 \cap Y \implies \left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right).$$

Prova. Vamos provar a contrapositiva, ou seja, que

$$\left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \vee \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \right) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

Considere $\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2)$. Seja o intervalo $x \in B_2 \cap X$ tal que $l(x) = \vec{l}_X(B_2)$. Como $\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2)$, temos que $x \notin B_1$.

Como B_1 é maximal, existe algum intervalo $y \in B_1 \cap Y$ que não intersecta x e, portanto, que também não pertence a B_2 . Logo, temos que

$$\left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

De maneira análoga,

$$\left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \right) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

Logo, temos que

$$\left(\vec{l}_X(B_1) < \vec{l}_X(B_2) \right) \vee \left(\overleftarrow{r}_X(B_2) < \overleftarrow{r}_X(B_1) \right) \implies B_1 \cap Y \not\subset B_2 \cap Y.$$

Pela contrapositiva, temos que

$$B_1 \cap Y \subset B_2 \cap Y \implies \left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right).$$

□

Teorema 4.2.6. *Sejam G um bigrafo de intersecção de um modelo de intervalos com partição (X, Y) e B_1 e B_2 duas bicliques maximais de G . Vale que*

$$\left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \iff B_2 \cap X \subset B_1 \cap X.$$

Prova. Pelo Teorema 4.2.4, temos que

$$\left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right) \implies B_2 \cap X \subset B_1 \cap X.$$

Pelo Teorema 3.1.1, temos que

$$B_2 \cap X \subset B_1 \cap X \iff B_1 \cap Y \subset B_2 \cap Y.$$

Pelo Teorema 4.2.5, temos que

$$B_1 \cap Y \subset B_2 \cap Y \implies \left(\vec{l}_X(B_2) \leq \vec{l}_X(B_1) \right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \overleftarrow{r}_X(B_2) \right).$$

Logo, temos que

$$\left(\vec{l}_X(B_2) \leq \overleftarrow{r}_X(B_1)\right) \wedge \left(\overleftarrow{r}_X(B_1) \leq \vec{l}_X(B_2)\right) \iff B_2 \cap X \subset B_1 \cap X.$$

□

Considere a seguinte definição.

Definição 4.2.1. *Sejam o modelo de intervalos \mathcal{M} e o conjunto de extremos de intervalos $S = \{l(i), r(i) \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\}$. Para cada $i \in U(\mathcal{M})$, considere um intervalo l_i da reta real cuja a intersecção com S contém apenas o extremo de intervalo $l(i)$ e um intervalo r_i da reta real cuja a intersecção com S contém apenas o extremo de intervalo $r(i)$. Isto é, definimos, para todo $i \in U(\mathcal{M})$, os intervalos l_i e r_i da reta real tais que*

$$\begin{aligned} l_i \cap S &= \{l(i)\}, \\ r_i \cap S &= \{r(i)\}. \end{aligned}$$

Vale mencionar que, para todo intervalo i do modelo de intervalos \mathcal{M} , o intervalo l_i pode ser qualquer intervalo que contenha apenas $l(i)$ de todos os extremos de intervalos de \mathcal{M} . Da mesma forma, o intervalo r_i pode ser qualquer intervalo que contenha apenas $r(i)$ de todos os extremos de intervalos de \mathcal{M} . Podemos, portanto, descrever a seguinte construção de um modelo de intervalos \mathcal{M}' bipartido a partir de um modelo de intervalos \mathcal{M} qualquer.

Construção 4.2.2. *Seja \mathcal{M} um modelo de intervalos qualquer. Construimos o modelo de intervalos \mathcal{M}' bipartido em (X, Y) tal que*

$$\begin{aligned} X &= U(\mathcal{M}), \\ Y &= \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\}. \end{aligned}$$

Isto é, construímos um modelo de intervalos \mathcal{M}' a partir de \mathcal{M} onde \mathcal{M}' contém todos os intervalos de \mathcal{M} e os intervalos l_i e r_i de todo intervalo $i \in U(\mathcal{M})$. O modelo de intervalos \mathcal{M}' é bipartido entre os intervalos de \mathcal{M} em uma parte X e os intervalos l_i e r_i em uma parte Y .

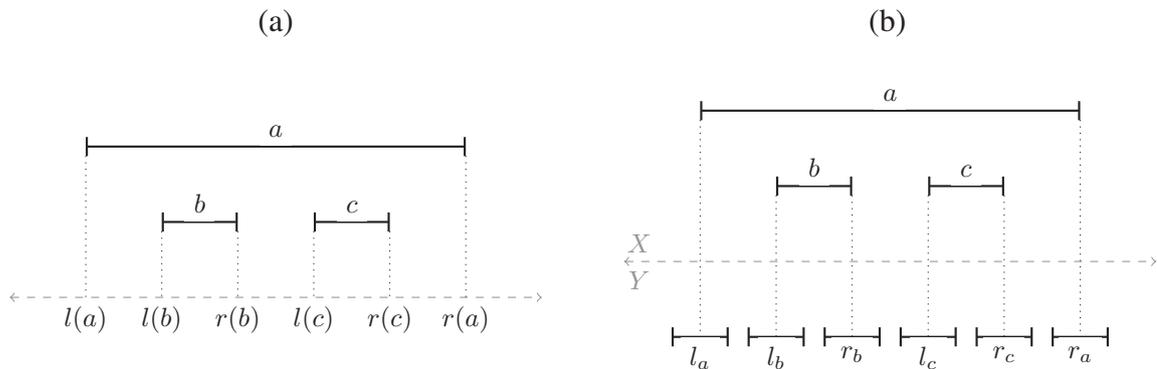


Figura 4.4: Modelo de intervalos \mathcal{M} (a) e a partição $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ do modelo de intervalos $\mathcal{M}' = X \cup Y$ (b).

A Figura 4.4 descreve um modelo de intervalos \mathcal{M} com o conjunto de unidades $U(\mathcal{M}) = \{a, b, c\}$ (a) e a partição $(X, Y) = (U(\mathcal{M}), \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ do modelo de intervalos \mathcal{M}' com o conjunto de unidades $U(\mathcal{M}') = X \cup Y$ (b). O conjunto de intervalos $U(\mathcal{M})$ possui a ordem

de extremos de intervalos $l(a) < l(b) < r(b) < l(c) < r(c) < r(a)$ e o conjunto de intervalos $\{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\}$ possui a ordem de extremos de intervalos $l(l_a) < r(l_a) < l(l_b) < r(l_b) < l(r_b) < r(r_b) < l(l_c) < r(l_c) < l(r_c) < r(r_c) < l(r_a) < r(r_a)$. Como definido, o único extremo de intervalo de \mathcal{M} que o intervalo l_i inclui é $l(i)$ e o único extremo de intervalo de \mathcal{M} que o intervalo r_i inclui é $r(i)$, para todo intervalo $i \in U(\mathcal{M})$.

Considere a seguinte notação para as bicliques maximais do bigrafo de intervalos sobre o modelo de intervalos construído.

Definição 4.2.3. *Sejam \mathcal{M} um modelo de intervalos, (X, Y) a partição $(\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ e G o bigrafo de intersecção do modelo de intervalos $\mathcal{M}' = X \cup Y$ com partição (X, Y) . Para todo intervalo $i \in U(\mathcal{M})$, denotamos por B_i a biclique maximal de G que possui os intervalos l_i e r_i , isto é, que*

$$\{i, l_i, r_i\} \subseteq B_i.$$

Com tal definição, descrevemos a correspondência entre todo intervalo i do modelo de intervalos \mathcal{M} à biclique maximal B_i do bigrafo de intersecção de intervalos do modelo \mathcal{M}' . Enunciamos as seguintes propriedades da biclique maximal B_i definida.

Proposição 4.2.7. *Sejam \mathcal{M} um modelo de intervalos, \mathcal{M}' o modelo de intervalos bipartido em $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ e G o bigrafo de intersecção de intervalos do modelo \mathcal{M}' . Vale que*

$$\begin{aligned} \vec{l}_X(B_i) &= l(i), \\ \overleftarrow{r}_X(B_i) &= r(i). \end{aligned}$$

Prova. Se o intervalo i é o único intervalo em $B_i \cap X$, então temos que $\vec{l}_X(B_i) = l(i)$ e que $\overleftarrow{r}_X(B_i) = r(i)$.

Sejam um intervalo qualquer $j \in B_i \cap X$ distinto de i e o conjunto de extremos de intervalos $S = \{l(i), r(i) \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\}$. Suponha que $l(i) < l(j)$. Como a intersecção $l_i \cap S$ possui apenas $l(i)$, temos que $r(l_i) < l(j)$. Logo, temos que o intervalo j não intersecta o intervalo l_i e, portanto, que $j \notin B_i$.

Logo, temos que $l(j) < l(i)$ e, portanto, que

$$\vec{l}_X(B_i) = l(i).$$

De maneira análoga, também temos que

$$\overleftarrow{r}_X(B_i) = r(i).$$

□

Proposição 4.2.8. *Sejam \mathcal{M} um modelo de intervalos, \mathcal{M}' o modelo de intervalos bipartido em $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ e G o bigrafo de intersecção de intervalos do modelo \mathcal{M}' . Vale que, para qualquer intervalos $i \in U(\mathcal{M})$, todo intervalo de Y que intersecta i também intersecta todos os intervalos em $B_i \cap X$.*

Prova. Seja um intervalo qualquer $j \in B_i \cap X$ distinto de i . Pela Proposição 4.2.7, temos que $\vec{l}_X(B_i) = l(i)$ e que $\overleftarrow{r}_X(B_i) = r(i)$. Portanto, temos que $l(j) < l(i)$ e que $r(i) < r(j)$, isto é, que j contém i . Logo, temos que se todo intervalo $y \in Y$ intersecta i , então y também intersecta j . □

Com os próximos lemas, mostramos que a biclique maximal B_i — para todo intervalo i do modelo de intervalos \mathcal{M} — é única e distinta das bicliques maximais correspondentes aos demais intervalos.

Lema 4.2.9. *Sejam \mathcal{M} um modelo de intervalos, \mathcal{M}' o modelo de intervalos bipartido em $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ e G o bigrafo de intersecção de intervalos do modelo \mathcal{M}' . Vale que, para qualquer intervalo $i \in U(\mathcal{M})$, a biclique maximal B_i de G é única.*

Prova. Suponha que exista alguma biclique maximal B'_i de G distinta de B_i tal que $\{i, l_i, r_i\} \subseteq B'_i$.

Seja o intervalo $j \in B'_i \setminus B_i$. Se j é intervalo em Y , então — pela Proposição 4.2.8 — temos que j intersecta todos os intervalos em $B_i \cap X$ e, portanto, que $j \in B_i$. Logo, temos que j não pertence a Y . Se j é intervalo em X , então — pela Proposição 4.2.7 — temos que $l(j) < l(i)$ e que $r(i) < r(j)$, isto é, que j contém i . Logo, temos que j intersecta todos os intervalos em $B_i \cap Y$. Como B_i é máxima, temos que j pertence a $B_i \cap X$. Logo, temos que $B'_i \subseteq B_i$, isto é, que B'_i não é máxima.

Portanto, temos, para todo intervalo $i \in U(\mathcal{M})$, que B_i é única. \square

Lema 4.2.10. *Sejam \mathcal{M} um modelo de intervalos, \mathcal{M}' o modelo de intervalos bipartido em $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ e G o bigrafo de intersecção de intervalos do modelo \mathcal{M}' . Vale que, para todo par distinto de intervalos $i, j \in U(\mathcal{M})$, que $B_i \neq B_j$.*

Prova. Seja o conjunto $S = \{l(i), r(i) \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\}$ de extremos de intervalos de \mathcal{M} .

Assuma que $B_i = B_j$ e, portanto, que $\{i, l_i, j, l_j\} \subseteq B_i$. Suponha que $l(i) < l(j)$. Como apenas $l(i)$ pertence à intersecção $l_i \cap S$, temos que $r(l_i) < l(j)$, isto é, que l_i e j não possuem intersecção. Portanto, temos que $l(j) < l(i)$.

Porém, como a intersecção $l_j \cap S$ contém apenas $l(j)$, temos que $r(l_j) < l(i)$, isto é, que l_j e i não possuem intersecção.

Logo, temos que os intervalos i, l_i, j e l_j não pertencem simultaneamente à biclique maximal B_i . Portanto, temos que $B_i \neq B_j$ para todos os pares distintos de intervalos $i, j \in U(\mathcal{M})$. \square

Logo, temos que a correspondência entre os intervalos i — do modelo de intervalos \mathcal{M} — e as bicliques maximais B_i — do bigrafo de intervalos do modelo construído \mathcal{M}' — é uma-para-uma. Vale notar que o bigrafo de intersecção de intervalos pode conter outras bicliques maximais sem correspondência com algum intervalo de \mathcal{M} . Para as bicliques maximais com correspondência a algum intervalo de \mathcal{M} , podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.2.11. *Sejam \mathcal{M} um modelo de intervalos, \mathcal{M}' o modelo de intervalos bipartido em $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$ e G o bigrafo de intersecção de intervalos do modelo \mathcal{M}' . Vale que, para todo par distinto de intervalos $i, j \in U(\mathcal{M})$, que um dos intervalos contém outro se, e somente se, as bicliques maximais B_i e B_j são mutuamente inclusas.*

Prova. Assuma, sem perda de generalidade, que j contém i , isto é, que

$$(l(j) < l(i)) \wedge (r(i) < r(j)).$$

Pela Proposição 4.2.7, temos que $\vec{l}_X(B_i) = l(i)$, que $\vec{l}_X(B_j) = l(j)$, que $\overleftarrow{r}_X(B_i) = r(i)$ e que $\overleftarrow{r}_X(B_j) = r(j)$. Logo, temos que

$$(l(j) < l(i)) \wedge (r(i) < r(j)) \iff (\vec{l}_X(B_j) < \vec{l}_X(B_i)) \wedge (\overleftarrow{r}_X(B_i) < \overleftarrow{r}_X(B_j)).$$

Pelo Teorema 4.2.6, temos que

$$\left(l(j) < l(i) \right) \wedge \left(r(i) < r(j) \right) \iff B_j \cap X \subset B_i \cap X.$$

Isto é, as bicliques maximais B_i e B_j são mutuamente inclusas se, e somente se, o intervalo j contém o intervalo i ou o intervalo i contém o intervalo j . \square

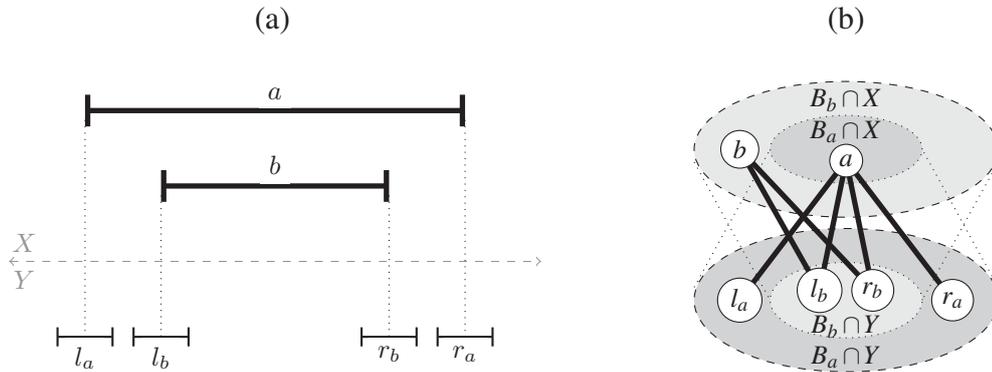


Figura 4.5: Bipartição de um modelo de intervalos \mathcal{M} (a) e bicliques maximais mutuamente inclusas do bigrafo de intersecção do modelo de intervalos \mathcal{M} (b).

A Figura 4.5 descreve um modelo de intervalos \mathcal{M}' bipartido em $(X, Y) = (\{a, b\}, \{l_a, r_a, l_b, r_b\})$ (a) — construído a partir de um modelo de intervalos \mathcal{M} com os intervalos $U(\mathcal{M}) = \{a, b\}$ — e as bicliques maximais $B_a = \{a, l_a, r_a, l_b, r_b\}$ e $B_b = \{a, b, l_b, r_b\}$ do bigrafo de intersecção de intervalos de \mathcal{M}' (b). Como ilustração do Teorema 4.2.11, temos que o intervalo a inclui o intervalo b e, portanto, que as bicliques maximais B_a e B_b são mutuamente inclusas entre si. Temos, portanto, o seguinte teorema.

Teorema 4.2.12. *Todo grafo de inclusão de intervalos é isomorfo a algum subgrafo induzido do grafo de bicliques mutuamente inclusas de algum bigrafo de intervalos.*

Prova. Seja H o grafo de inclusão do modelo de intervalos \mathcal{M} e G o bigrafo de intersecção do modelo de intervalos \mathcal{M}' com partição $(X, Y) = (\mathcal{M}, \{l_i, r_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\})$.

Pelas Proposições 4.2.9 e 4.2.10, temos que existe a bijeção $\pi : U(\mathcal{M}) \rightarrow \{B_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\}$. Pelo Teorema 4.2.11, temos que — para todo par de intervalos distintos $i, j \in U(\mathcal{M})$ — um intervalo contém outro se, e somente se, as bicliques maximais B_i e B_j são mutuamente inclusas e, portanto, que H é isomorfo ao subgrafo de $\text{KB}_m(G)$ induzido por $\{B_i \mid \forall i \in U(\mathcal{M})\}$. \square

Vale lembrar que a classe dos grafos de inclusão de intervalos é a mesma que a classe dos grafos de permutação e, como consequência do Teorema 4.2.12, que a classe dos grafos de permutação é a menor classe hereditária que contém a classe dos grafos de bicliques mutuamente inclusas dos bigrafos de intervalos. Descrevemos essa relação de maneira alternativa com o seguinte corolário.

Corolário 4.2.13. *Sejam um grafo de permutação G qualquer e BIV a classe dos bigrafos de intervalos. Vale que*

$$\text{KB}_m(\text{BIV}) \cap G\text{-free} \subsetneq \text{KB}_m(\text{BIV}).$$

Também vale lembrar que, como resultado do Teorema 4.1.7 (Seção 4.1), a classe dos grafos de bicliques mutuamente inclusas dos bigrafos de inclusão de intervalos é subclasse da classe dos grafos de permutação. Como todo bigrafo de intervalos é bigrafo de inclusão de intervalos, temos que o que separa a classe dos grafos de permutação da classe dos grafos KB_m dos bigrafos de inclusão de intervalos é uma propriedade não-hereditária, isto é, não descrita como uma família de subgrafos induzidos proibidos.

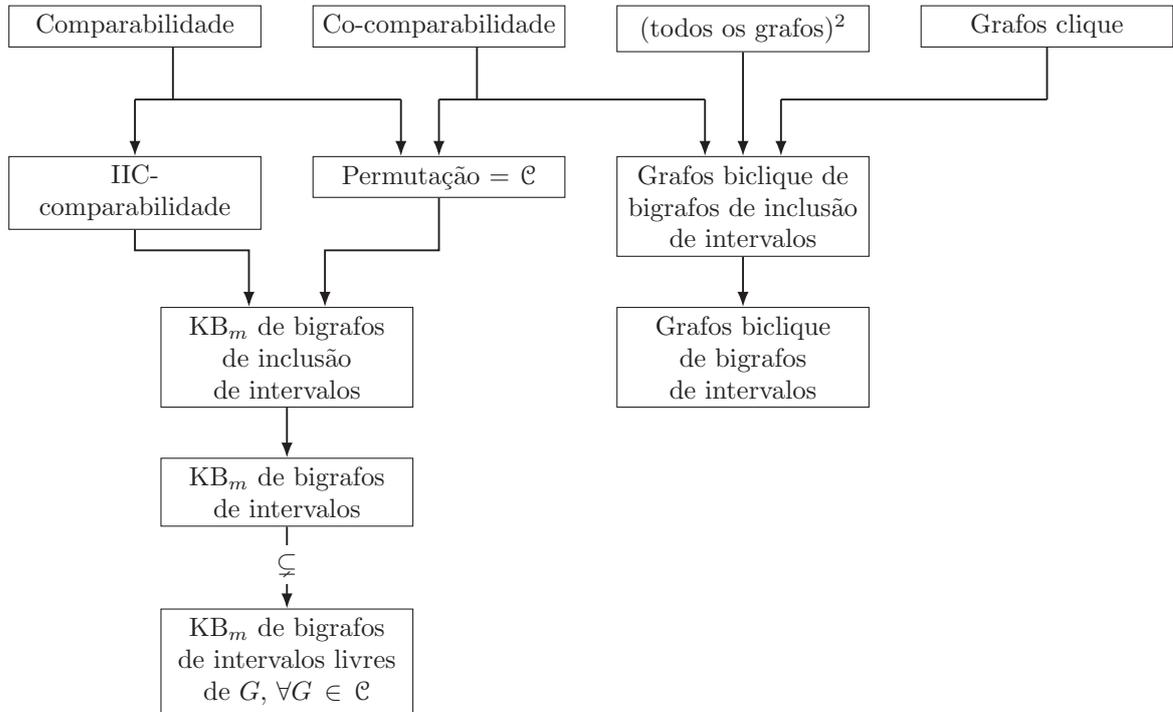


Figura 4.6: Inclusões das classes de grafos biclique (e de bicliques mutuamente inclusas) dos bigrafos de intervalos e dos bigrafos de inclusão de intervalos.

A Figura 4.6 descreve as relações discutidas entre as classes de grafos. Pelo Teorema 3.1.2 (Groshaus e Guedes (2021)), temos que a classe dos grafos KB_m dos bigrafos de inclusão de intervalos — e KB_m dos bigrafos de intervalos — são também grafos IIC-comparabilidade. O resultado do Corolário 4.1.8 (Seção 4.1) também é descrito pela figura por meio da inclusão da classe dos grafos biclique dos bigrafos de inclusão de intervalos na classe dos grafos de co-comparabilidade.

4.3 TRIPLAS ASTEROIDAIS E TRIPLAS BI-ASTEROIDAIS

Nesta seção, apresentamos a relação entre duas propriedades estruturais em grafos bipartidos no contexto do operador KB_m : as triplas asteroidais e as triplas bi-asteroidais. Mostramos que se um grafo bipartido possui uma tripla bi-asteroidal, então seu grafo KB_m possui uma tripla asteroidal.

Considere, portanto, as seguintes definições.

Definição 4.3.1. *Uma tripla asteroidal em um grafo G é uma tripla não-ordenada $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ de vértices de G onde existem caminhos em G entre cada par de vértices em T tais que nenhum dos vértices de cada caminho é adjacente ao terceiro vértice.*

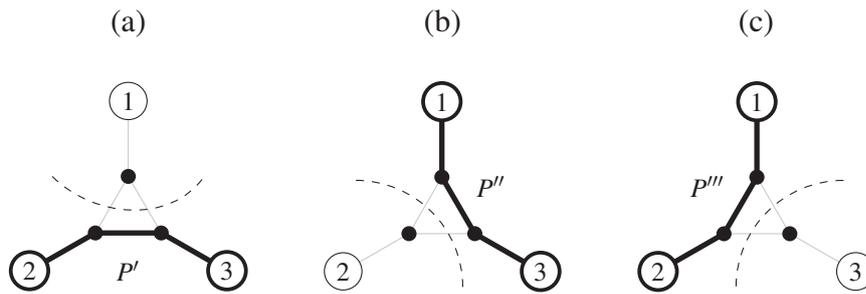


Figura 4.7: Os respectivos caminhos de uma tripla asteroidal.

A Figura 4.7 descreve um grafo G com a tripla asteroidal $\{1, 2, 3\}$ que admite os caminhos $P' = (2, \dots, 3)$ (a), $P'' = (1, \dots, 3)$ (b) e $P''' = (1, \dots, 2)$ (c). Nenhum dos vértices do caminho P' é adjacente a 1, nenhum dos vértices do caminho P'' é adjacente a 2 e nenhum dos vértices do caminho P''' é adjacente a 3.

Definição 4.3.2. Um grafo G é dito livre de triplas asteroidais se nenhuma tripla não-ordenada de vértices de G é tripla asteroidal. Denotamos a classe dos grafos livres de triplas asteroidais por *AT-free*.

Definição 4.3.3. Uma tripla bi-asteroidal em um grafo G é uma tripla asteroidal $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ onde existem caminhos em G entre cada par de vértices em T tais que nenhum dos vértices de cada caminho é adjacente à vizinhança do terceiro vértice.

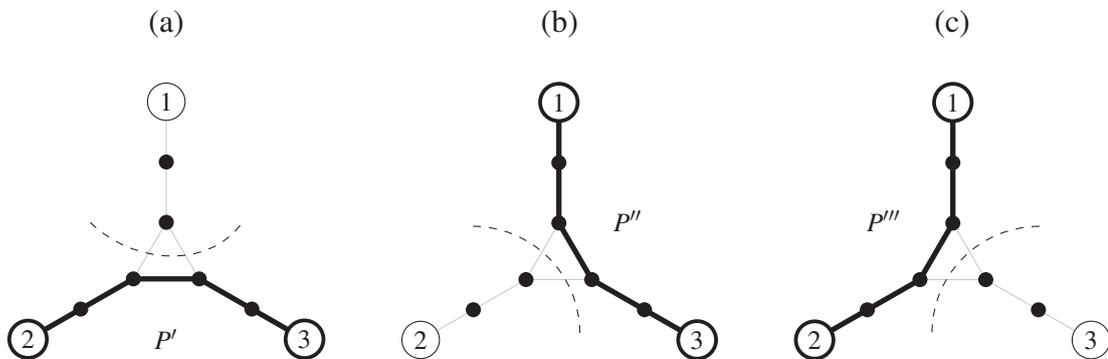


Figura 4.8: Os respectivos caminhos de uma tripla bi-asteroidal.

A Figura 4.8 descreve um grafo G com a tripla bi-asteroidal $\{1, 2, 3\}$ que admite os caminhos $P' = (2, \dots, 3)$ (a), $P'' = (1, \dots, 3)$ (b) e $P''' = (1, \dots, 2)$ (c). Nenhum dos vértices do caminho P' é adjacente à vizinhança de 1, nenhum dos vértices do caminho P'' é adjacente à vizinhança de 2 e nenhum dos vértices do caminho P''' é adjacente à vizinhança de 3.

Definição 4.3.4. Um grafo G é dito livre de triplas bi-asteroidais se nenhuma tripla não-ordenada de vértices de G é tripla bi-asteroidal. Denotamos a classe dos grafos livres de triplas bi-asteroidais por *biAT-free*.

Triplas asteroidais e triplas bi-asteroidais são estruturas que aparecem na história do estudo de, respectivamente, grafos de intervalos e bigrafos de intervalos. Enquanto as triplas asteroidais surgem da caracterização da classe dos grafos de intervalos por Lekkerkerker e

Boland (1962) — que mostram que a classe é a mesma que a dos grafos cordais livres de triplas asteroidais —, o trabalho de Harary et al. (1982) tenta uma caracterização análoga ao caso bipartido com as triplas bi-asteroidais. Tal caracterização está parcialmente correta — como mostrado por Müller (1997), que confirma que bigrafos de intervalos são bipartidos cordais livres de triplas bi-asteroidais.

O conceito de triplas (bi-)asteroidais leva às generalizações como as triplas asteroidais de arestas (Müller, 1997) e as asteroides de arestas (Hell et al., 2020). Em particular, o trabalho de Hell et al. mostra que bigrafos de inclusão de intervalos — superclasse dos bigrafos de intervalos — são exatamente os bipartidos cordais livres de asteroides de arestas.

Para provar que uma tripla bi-asteroidal em um grafo bipartido G implica a presença de uma tripla asteroidal em $\text{KB}_m(G)$, mostramos que um caminho em G garante um caminho correspondente em $\text{KB}_m(G)$. Em seguida, mostramos condições para que duas bicliques maximais de G não sejam mutuamente inclusas, o que se traduz para a não-adjacência em $\text{KB}_m(G)$. Por fim, mostramos que uma tripla bi-asteroidal em G implica a existência de três bicliques maximais de G com caminhos correspondentes entre elas em $\text{KB}_m(G)$ onde as bicliques maximais correspondentes aos vértices de cada caminho atendem à condição de não-inclusão mútua com a biclique maximal não participante do caminho.

Com o seguinte lema, garantimos a existência de um caminho correspondente no grafo KB_m .

Lema 4.3.1. *Sejam G um grafo bipartido e B_1 e B_2 duas bicliques maximais distintas de G . Se B_1 e B_2 possuem intersecção por aresta não mutuamente incluída em G , então existem, pelo menos, duas outras bicliques maximais mutuamente inclusas a B_1 , B_2 e entre si que contêm a intersecção $B_1 \cap B_2$.*

Prova. Sejam a partição (X, Y) do grafo bipartido G e os conjuntos M_1 e M_2 tais que

$$\begin{aligned} M_1 &= \left((B_1 \cup B_2) \cap X \right) \cup \left(B_1 \cap B_2 \cap Y \right), \\ M_2 &= \left((B_1 \cup B_2) \cap Y \right) \cup \left(B_1 \cap B_2 \cap X \right). \end{aligned}$$

Como B_1 e B_2 possuem intersecção por aresta, temos que $B_1 \cap B_2 \cap Y$ não é vazio e, portanto, que M_1 é uma biclique de G . De maneira análoga, temos que M_2 também é biclique de G .

Considere, portanto, as bicliques maximais B_3 e B_4 tais que $M_1 \subseteq B_3$ e $M_2 \subseteq B_4$. Como B_3 e B_4 contêm a intersecção $B_1 \cap B_2$, temos que B_3 e B_4 intersectam por aresta a intersecção $B_1 \cap B_2$. Como B_3 contém tanto $B_1 \cap X$ quanto $B_2 \cap X$, temos — pelo Teorema 3.1.1 — $B_3 \cap Y$ está contido tanto em B_1 quanto em B_2 . Logo, temos que a biclique maximal B_3 é mutuamente incluída a B_1 e a B_2 . De maneira análoga, temos que B_4 contém tanto $B_1 \cap Y$ quanto $B_2 \cap Y$ e, portanto, que a biclique maximal B_4 é mutuamente incluída a B_1 e a B_2 .

Como B_3 contém $B_1 \cap X$ e $B_2 \cap X$ e ambas partes $B_1 \cap X$ e $B_2 \cap X$ contêm $B_4 \cap X$, temos que B_3 contém $B_4 \cap X$. Da mesma forma, também temos que B_4 contém $B_3 \cap Y$. Logo, temos que B_3 e B_4 são mutuamente inclusas entre si.

Como B_3 e B_4 possuem diferentes relações de inclusão com as partes de B_1 e B_2 , temos que B_3 e B_4 são distintas entre si. \square

O próximo lema descreve a condição de não-inclusão mútua entre duas bicliques maximais.

Lema 4.3.2. *Sejam G um grafo bipartido e B_1 e B_2 duas bicliques maximais distintas de G . Se o subgrafo de G induzido por $B_1 \cup B_2$ contém algum $2K_2$ induzido, então B_1 e B_2 não são mutuamente inclusas entre si.*

Prova. Sejam (X, Y) a partição do grafo G e e_1 e e_2 as arestas que formam um $2K_2$ induzido contido no subgrafo de G induzido por $B_1 \cup B_2$. Como B_1 e B_2 são bicliques, as arestas e_1 e e_2 estão contidas em bicliques distintas. Portanto, considere $e_1 \subseteq B_1$ e $e_2 \subseteq B_2$. Considere também os vértices $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $e_1 = \{x, y\}$.

Como x não é adjacente a vértice algum de e_2 , temos que $x \notin B_2$. Logo, temos que

$$B_1 \cap X \not\subseteq B_2 \cap X.$$

De maneira análoga, temos que

$$B_1 \cap Y \not\subseteq B_2 \cap Y.$$

Portanto, temos que B_1 e B_2 não são mutuamente inclusas entre si. \square

Finalmente, o seguinte teorema descreve a relação entre triplas bi-asteroidais em grafos bipartidos com triplas asteroidais no seu grafo KB_m .

Teorema 4.3.3. *Seja G um grafo bipartido. Se G possui uma tripla bi-asteroidal, então $KB_m(G)$ possui uma tripla asteroidal.*

Prova. Sejam (X, Y) a partição do grafo bipartido G e $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma tripla bi-asteroidal em G . Considere os caminhos $P' = (v_2, \dots, v_3)$, $P'' = (v_1, \dots, v_3)$ e $P''' = (v_1, \dots, v_2)$ tais que:

- nenhum dos vértices em P' é adjacente a vizinhança de v_1 ;
- nenhum dos vértices em P'' é adjacente a vizinhança de v_2 ; e
- nenhum dos vértices em P''' é adjacente a vizinhança de v_3 .

Como G é bipartido, temos que o vértice v_1 e seus vértices consecutivos nos caminhos P'' e P''' pertencem a alguma biclique maximal B_1 . Da mesma forma, temos a biclique maximal B_2 — que inclui o vértice v_2 e seus consecutivos em P' e P''' — e a biclique maximal B_3 — que inclui o vértice v_3 e seus consecutivos nos caminhos P' e P'' . (Figura 4.9)

Como nenhum vértice do caminho P' é adjacente a v_1 ou sua vizinhança, temos que nenhum par consecutivo de vértices do caminho — isto é, uma aresta de P' — é adjacente a aresta alguma de B_1 . Logo, temos que o subgrafo de G induzido pela união entre B_1 e qualquer biclique maximal que contenha uma aresta de P' contém um $2K_2$ induzido. Pelo Lema 4.3.2, temos que B_1 não é mutuamente inclusa a biclique maximal alguma que contenha aresta de P' .

Considere as bicliques maximais distintas B' e B'' que contêm a aresta e do caminho P' . Logo, temos que B' e B'' não são mutuamente inclusas a B_1 . Se B' e B'' são mutuamente inclusas entre si, então existe uma aresta em $KB_m(G)$ — e, portanto, um caminho em $KB_m(G)$ — entre os vértices correspondentes a B' e B'' não adjacente ao vértice correspondente a B_1 .

Se B' e B'' não são mutuamente inclusas entre si, então temos, pelo Lema 4.3.1, que existem duas outras bicliques maximais mutuamente inclusas a B' e B'' que também contêm a aresta e . Como tais bicliques maximais contêm e , temos que nenhuma delas é mutuamente inclusa a B_1 . Logo, temos que existe um caminho em $KB_m(G)$ entre os vértices correspondentes a B' e B'' onde seus vértices não são adjacentes ao vértice correspondente a B_1 . Portanto,

temos que existe um caminho em $\text{KB}_m(G)$ entre quaisquer vértices correspondentes a bicliques maximais com aresta em P' de vértices não adjacentes ao vértice correspondente a B_1 .

Temos, portanto, que existe um caminho entre os vértices correspondentes a B_2 e a B_3 de vértices não adjacentes ao vértice correspondente a B_1 no grafo $\text{KB}_m(G)$. De maneira análoga, temos que existe um caminho em $\text{KB}_m(G)$ entre os vértices correspondentes a B_1 e a B_3 de vértices não adjacentes ao vértice correspondente a B_2 . Também temos que existe um caminho em $\text{KB}_m(G)$ entre os vértices correspondentes a B_1 e a B_2 de vértices não adjacentes ao vértice correspondente a B_3 . Isto é, temos que $\{B_1, B_2, B_3\}$ é uma tripla asteroidal em $\text{KB}_m(G)$.

Portanto, se G possui uma tripla bi-asteroidal, então $\text{KB}_m(G)$ possui uma tripla asteroidal. \square

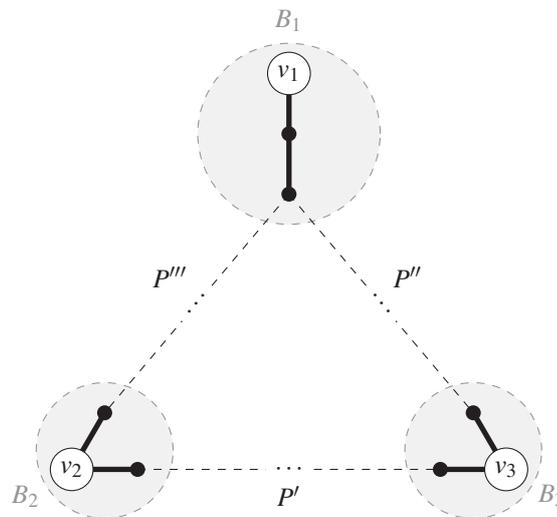


Figura 4.9: Tripla bi-asteroidal de um grafo bipartido e as bicliques maximais B_1 , B_2 e B_3 .

A Figura 4.9 descreve a tripla bi-asteroidal de um grafo bipartido G sobre os caminhos P' , P'' e P''' e as bicliques maximais B_1 , B_2 e B_3 de G , definidas na prova do Teorema 4.3.3. Como demonstrado, nenhum par consecutivo de vértices do caminho P' é adjacente aos vértices de qualquer aresta de B_1 . O mesmo também pode ser dito entre P'' e B_2 e entre P''' e B_3 . Tais bicliques maximais são, portanto, uma tripla asteroidal no grafo KB_m de G .

A Figura 4.10 descreve as classes que contêm e estão contidas pelas classes dos grafos IIC-comparabilidade AT-free — a classe \mathcal{C} — e das pré-imagens bipartidas de seus grafos KB_m — isto é, a classe $\text{KB}_m^{-1}(\mathcal{C}) \cap \text{bipartidos}$ ou a classe de todos os grafos bipartidos tais que seus grafos KB_m pertencem a \mathcal{C} . Vale lembrar, pelo Teorema 3.1.2, que a classe dos grafos KB_m de bipartidos é a mesma que a dos grafos IIC-comparabilidade. Como resultado do Teorema 4.3.3, vale que se um grafo KB_m de um bipartido é livre de triplas asteroidais, então sua pré-imagem bipartida é livre de triplas bi-asteroidais. Como toda tripla bi-asteroidal é uma tripla asteroidal, vale que a classe AT-free é subclasse de biAT-free. Pelo Teorema 4.1.7, grafos KB_m de bigrafos de inclusão de intervalos são grafos de permutação e, portanto, são AT-free. Logo, temos que os bigrafos de inclusão de intervalos são biAT-free. A classe dos bigrafos de intervalos próprios equivale à classe bipartidos \cap AT-free — como enunciado por Hell e Huang (2004) —, além de ser subclasse dos bigrafos de inclusão de intervalos.

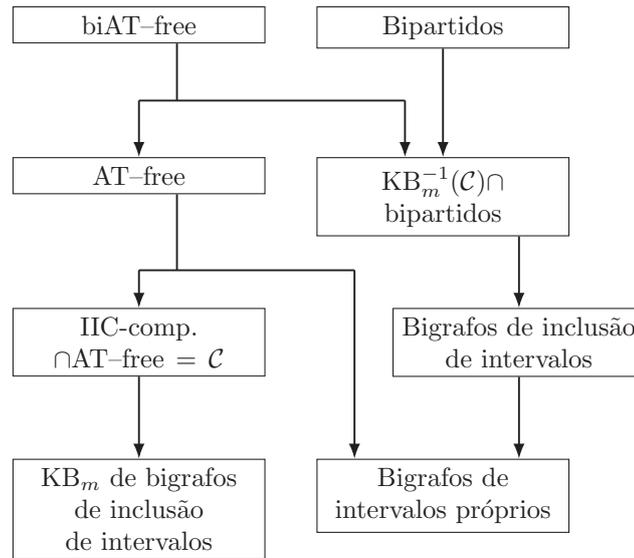


Figura 4.10: Inclusões das classes dos grafos IIC-comparabilidade AT-free e de das pré-imagens bipartidas de seus grafos KB_m .

4.4 INTERSECÇÕES ENTRE BICLIQUES MAXIMAIS

Nesta seção, consideramos três formas de intersecção entre bicliques maximais: intersecção mutuamente incluída, intersecção apenas por vértices e intersecção por aresta não mutuamente incluída. Descrevemos a existência de subgrafos induzidos em grafos bipartidos a partir da presença de cada forma de intersecção entre bicliques maximais. A intersecção mutuamente incluída é descrita pela Definição 2.2.14 e as demais formas de intersecção são definidas a seguir.

Definição 4.4.1. Duas bicliques maximais B_1 e B_2 de um grafo G possuem intersecção apenas por vértices se $B_1 \cap B_2$ induz um conjunto independente em G .

Definição 4.4.2. Duas bicliques maximais B_1 e B_2 de um grafo G possuem intersecção por aresta não mutuamente incluída se B_1 e B_2 não são mutuamente incluídas entre si e $B_1 \cap B_2$ induz um grafo com aresta em G .

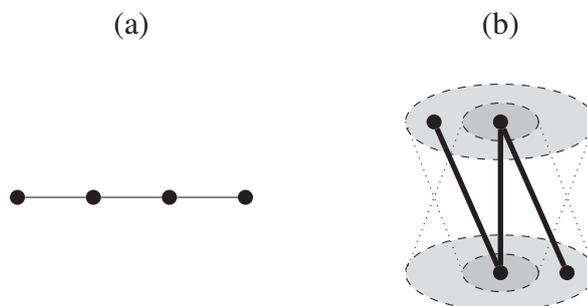


Figura 4.11: Grafo caminho P_4 (a) e inclusão mútua (b).

Em grafos bipartidos, associamos o grafo caminho P_4 — ilustrado pela Figura 4.11 (a) — à intersecção mutuamente incluída entre bicliques maximais — ilustrada pela Figura 4.11 (b). O enunciado do seguinte teorema descreve a relação entre as duas estruturas.

Teorema 4.4.1. *Seja G um grafo bipartido. Existem duas bicliques maximais mutuamente inclusas entre si em G se, e somente se, o grafo P_4 for subgrafo induzido de G .*

Prova. \Rightarrow) Considere a partição (X, Y) de G e as bicliques maximais B_1 e B_2 de G tais que

$$\begin{aligned} B_1 \cap X &\subset B_2 \cap X, \\ B_2 \cap Y &\subset B_1 \cap Y. \end{aligned}$$

Temos, portanto, que existem vértices $v_1 \in B_1 \cap B_2 \cap Y$ e $v_2 \in B_1 \cap B_2 \cap X$. Como B_1 é maximal e existe algum vértice de $B_2 \cap X$ que não pertence a $B_1 \cap X$, também temos que existe algum vértice $y \in B_1 \cap Y$ que não é adjacente a algum vértice $x \in B_2 \cap X$.

Como o vértice v_1 pertence a $B_1 \cap B_2 \cap Y$, temos que v_1 é adjacente tanto ao vértice x quanto ao vértice v_2 . Da mesma forma, temos que o vértice v_2 é adjacente tanto ao vértice y quanto ao vértice v_1 .

Logo, temos que o subconjunto de vértices $\{x, v_1, v_2, y\}$ induz o grafo P_4 em G . Portanto, se o grafo bipartido G possui bicliques maximais mutuamente inclusas entre si, então o grafo P_4 é subgrafo induzido de G .

\Leftarrow) Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 os vértices que induzem o grafo P_4 em G tais que (v_1, v_2, v_3, v_4) seja um caminho sem atalhos em G . Considere que v_1 e v_3 pertencem a X e que v_2 e v_4 pertencem a Y , para a partição (X, Y) de G .

Como G é bipartido, temos que existem as bicliques maximais B_1 e B_2 tais que

$$\begin{aligned} \{v_2\} \cup N_G(v_2) &\subseteq B_1, \\ \{v_3\} \cup N_G(v_3) &\subseteq B_2. \end{aligned}$$

Como v_1 é adjacente a v_2 , temos que $v_1 \in B_1$. Da mesma forma, temos que $v_4 \in B_2$. Como os vértices v_1 e v_4 pertencem a diferentes partes da partição de G e não são adjacentes entre si, temos que as bicliques maximais B_1 e B_2 são distintas entre si.

Como o vértice v_3 pertence a $N_G(v_2) \subset B_1$, temos que v_3 é adjacente a todos os vértices de $B_1 \cap Y$. Como $N_G(v_3)$ está contida na biclique maximal B_2 , temos que $B_1 \cap Y$ está contida em B_2 , isto é, que

$$B_1 \cap Y \subset B_2 \cap Y.$$

De maneira análoga, também temos que

$$B_2 \cap X \subset B_1 \cap X.$$

Logo, temos que as bicliques maximais B_1 e B_2 são mutuamente inclusas entre si.

Portanto, vale que o grafo bipartido G possui bicliques maximais mutuamente inclusas entre si se, e somente se, o grafo P_4 for subgrafo induzido de G . \square

Em grafos bipartidos, associamos o grafo caminho P_5 — ilustrado pela Figura 4.12 (a) — à intersecção apenas por vértices entre bicliques maximais — ilustrada pela Figura 4.12 (b). O enunciado do seguinte teorema descreve a relação entre as duas estruturas.

Teorema 4.4.2. *Seja G um grafo bipartido. Se G possui bicliques maximais que se intersectam apenas por vértices, então o grafo P_5 é subgrafo induzido de G .*

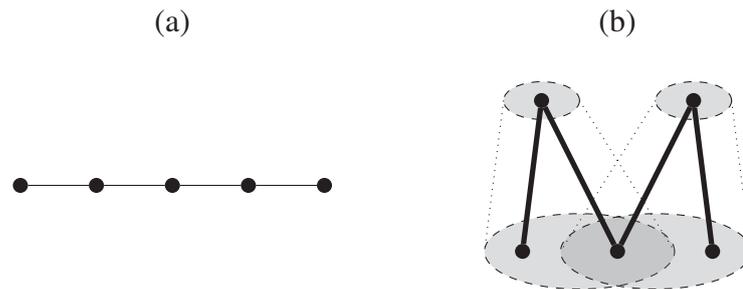


Figura 4.12: Grafo caminho P_5 (a) e intersecção apenas por vértices entre bicliques maximais (b).

Prova. Sejam (X, Y) a partição de G e B_1 e B_2 as bicliques maximais distintas de G . Considere que

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 \cap X &= \emptyset, \\ B_1 \cap B_2 \cap Y &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como B_1 é maximal e a intersecção $B_1 \cap B_2 \cap X$ é vazia, temos que existe algum vértice $y_1 \in B_1 \cap Y$ que não é adjacente a algum vértice $x_2 \in B_2 \cap X$. Da mesma forma, temos que existe algum vértice $y_2 \in B_2 \cap Y$ que não é adjacente a algum vértice $x_1 \in B_1 \cap X$.

Como a intersecção entre $B_1 \cap Y$ e $B_2 \cap Y$ não é vazia, temos que existe algum vértice $v \in B_1 \cap B_2 \cap Y$ que, portanto, é adjacente tanto a x_1 quanto a x_2 . Logo, temos que (y_1, x_1, v, x_2, y_2) é um caminho sem atalhos de G e, portanto, que o grafo P_5 é subgrafo induzido de G .

Portanto, se G possui bicliques maximais que se intersectam apenas por vértices, então o grafo P_5 é subgrafo induzido de G . \square

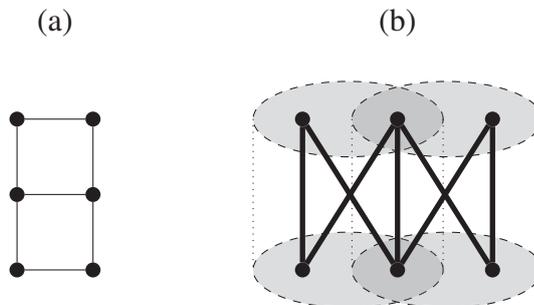


Figura 4.13: Grafo dominó (a) e intersecção por aresta não mutuamente incluída entre bicliques maximais (b).

Em grafos bipartidos, associamos o grafo dominó — ilustrado pela Figura 4.13 (a) — à intersecção por aresta não mutuamente incluída entre bicliques maximais — ilustrada pela Figura 4.13 (b). O grafo dominó pode ser descrito como um grafo ciclo de 6 vértices com uma única corda que forma dois grafos C_4 induzidos e podemos descrever sua relação com a intersecção por aresta não mutuamente incluída pelo enunciado do seguinte teorema.

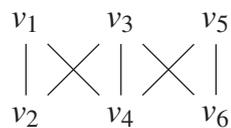
Teorema 4.4.3. *Seja G um grafo bipartido G . Existem duas bicliques maximais de G com intersecção por arestas não mutuamente incluídas se, e somente se, o grafo dominó for subgrafo induzido de G .*

Prova. \Rightarrow) Sejam (X, Y) a partição de G e B_1 e B_2 as bicliques maximais distintas de G com intersecção por arestas não mutuamente incluídas entre si.

Como $B_1 \cap X$ não contém $B_2 \cap X$ e $B_2 \cap X$ não contém $B_1 \cap X$, temos que existe algum vértice $x_1 \in B_1 \cap X$ que não é adjacente a algum vértice $y_2 \in B_2 \cap Y$. Da mesma forma, também temos que existe algum vértice $x_2 \in B_2 \cap X$ que não é adjacente a algum vértice $y_1 \in B_1 \cap X$.

Como B_1 e B_2 se intersectam por arestas, temos que existe algum vértice $v_1 \in B_1 \cap B_2 \cap X$ adjacente tanto a y_1 quanto a y_2 . Da mesma forma, temos que existe algum vértice $v_2 \in B_1 \cap B_2 \cap Y$ adjacente tanto a x_1 quanto a x_2 . Também temos que v_1 é adjacente a v_2 . Logo, temos que $\{x_1, y_1, x_2, y_2, v_1, v_2\}$ induz o grafo dominó em G .

\Leftrightarrow Sejam (X, Y) a partição de G e $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ o subconjunto de vértices que induz o grafo dominó em G tal que os vértices v_1, v_3, v_5 pertencem a X , os vértices v_2, v_4, v_6 pertencem a Y e (v_1, v_4, v_3, v_2) e (v_5, v_4, v_3, v_6) são ciclos sem cordas de G . Isto é, onde valem as adjacências:



Considere as bicliques maximais B_1 e B_2 tais que

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2, v_3, v_4\} &\subseteq B_1, \\ \{v_3, v_4, v_5, v_6\} &\subseteq B_2. \end{aligned}$$

Como $v_1 \in B_1 \cap X$ e $v_6 \in B_2 \cap Y$ não são adjacentes, temos que v_1 não pertence a $B_2 \cap X$ e que v_6 não pertence a $B_1 \cap Y$. Da mesma forma, também temos que $v_2 \in B_1 \cap Y$ não pertence a $B_2 \cap Y$ e que $v_5 \in B_2 \cap X$ não pertence a $B_1 \cap X$. Logo, temos que B_1 e B_2 não são mutuamente inclusas entre si.

Como $v_3 \in X$ e $v_4 \in Y$ pertencem tanto a B_1 quanto a B_2 , temos que B_1 e B_2 possuem intersecção por arestas. Logo, temos que se o dominó for subgrafo induzido de G , então existem duas bicliques maximais não mutuamente inclusas entre si que se intersectam por arestas.

Portanto, temos que o grafo bipartido G possui duas bicliques maximais não mutuamente inclusas entre si se e somente se, o grafo dominó for subgrafo induzido de G . \square

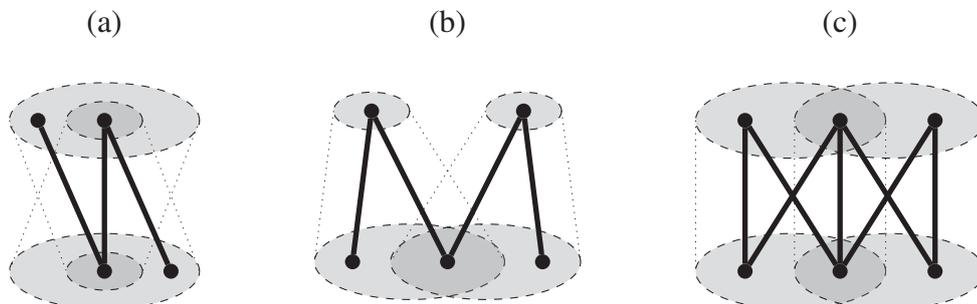


Figura 4.14: Intersecções entre bicliques maximais em grafos bipartidos.

A Figura 4.14 descreve os diferentes tipos de intersecções entre bicliques maximais em um grafo bipartido: inclusão mútua (a), intersecção apenas por vértices (b) e intersecção por arestas não mutuamente incluída (c). Em destaque, o grafo P_4 em uma inclusão mútua, o grafo P_5 em uma intersecção apenas por vértices e o grafo dominó em uma intersecção por arestas

não mutuamente inclusa. Vale notar que a presença de um grafo P_5 como subgrafo induzido não implica a intersecção apenas por vértices em um grafo bipartido, onde o grafo dominó é um exemplo de um grafo com P_5 induzido e sem intersecção apenas por vértices entre bicliques maximais.

Vale observar que grafos bipartidos livres de P_4 também são livres de P_5 e de dominó. Portanto, grafos bipartidos sem inclusões mútuas entre bicliques maximais também não possuem intersecções apenas por vértices ou intersecções por arestas não mutuamente inclusas. Tal resultado reflete o trabalho de Groshaus e Guedes (2021), que identifica as intersecções mutuamente inclusas como a base da estrutura dos grafos bicliques em grafos livres de triângulos.

Como a classe dos grafos livres de P_4 é exatamente a mesma que a dos cografos, temos que os cografos bipartidos não possuem qualquer tipo de intersecção entre suas bicliques maximais. Tal classe também pode ser descrita como a classe das uniões disjuntas entre bipartidos completos ou como K_3, P_4 -free, dado que proibir P_4 proíbe também os demais ciclos ímpares.

5 GRAFOS DE PARTES DE BICLIQUES DE LIVRES DE TRIÂNGULO

O operador KB_m de grafos de bicliques mutuamente inclusas, introduzido por Groshaus e Guedes (2021), pode ser visto como uma etapa intermediária da transformação de um grafo livre de triângulos ao seu grafo biclique. Tal descrição permitiu avanços na descrição de propriedades de grafos biclique de certas classes, como mostramos no Capítulo 4. Neste capítulo, sugerimos o operador BP de grafos de partes de bicliques como uma etapa intermediária da transformação de um grafo a seu grafo de bicliques mutuamente inclusas, descrevendo a relação de inclusão entre as partes de cada biclique maximal do grafo.

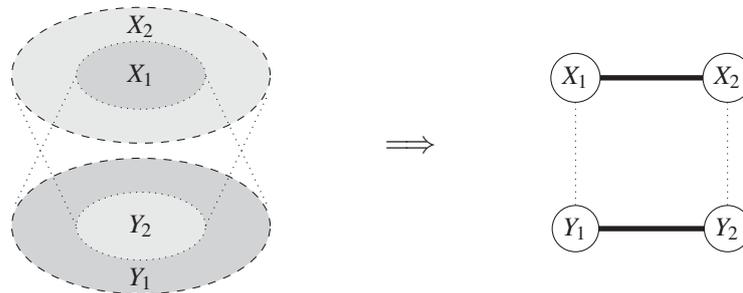


Figura 5.1: Representações de partes de bicliques maximais.

A Figura 5.1 descreve como um par de bicliques maximais B_1 e B_2 mutuamente inclusas entre si é representada pelo operador BP sugerido. A biclique maximal B_1 admite a partição (X_1, Y_1) e a biclique maximal B_2 admite a partição (X_2, Y_2) . As partes X_1 e X_2 possuem relação de inclusão entre si, representada pela aresta que conecta X_1 a X_2 no grafo BP. Da mesma forma, as partes Y_1 e Y_2 também compartilham uma aresta no grafo BP. As linhas em pontilhado correspondem às partes de bicliques maximais que formam a biclique maximal correspondente. Definimos formalmente o operador BP na Seção 5.1.

Também na Seção 5.1, definimos as propriedades de autotransposição e incomparabilidade antecessor-sucessor de correspondentes sobre *posets*. Mostramos que todo grafo BP de grafo livre de triângulo é isomorfo a algum grafo comparabilidade onde seu modelo de comparabilidade é um *poset* IIC autotransposto e livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.

Na Seção 5.2, construímos a partir de um *poset* \mathcal{P} IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes um grafo $G_{\mathcal{P}}$ livre de triângulos e mostramos que o grafo $BP(G_{\mathcal{P}})$ é isomorfo ao grafo de comparabilidade que aceita \mathcal{P} como modelo, mostrando que todo grafo de comparabilidade que aceita um modelo com tais propriedades é isomorfo a algum grafo BP de um grafo livre de triângulo e levando à equivalência entre as duas classes de grafos.

Na Seção 5.3, exploramos as propriedades do grafo $G_{\mathcal{P}}$ e de seu grafo linha. Mostramos que o grafo $KB_m(G_{\mathcal{P}})$ é isomorfo a um subgrafo induzido de $L(G_{\mathcal{P}})^2$ e que o grafo $L(KB_m(G_{\mathcal{P}}))$ é isomorfo a um subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})$.

5.1 ORDENS PARCIAIS SOBRE PARTES DE BICLIQUES

Nesta seção, apresentamos o operador BP de grafo de partes de bicliques. Também apresentamos as propriedades de autotransposição e incomparabilidade antecessor-sucessor de

correspondentes sobre *posets*. Mostramos que o grafo BP de todo grafo livre de triângulos é isomorfo a algum grafo que admite como modelo de comparabilidade um *poset* IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, o que implica que $\text{BP}(K_3\text{-free})$ é subclasse da classe de tais grafos de comparabilidade.

Considere as seguintes definições sobre partes de biclique e o grafo de inclusão de partes de biclique.

Definição 5.1.1. *Seja G um grafo qualquer. Chamamos de parte de biclique de G o subconjunto de vértices de G que é uma das partes de uma biclique maximal. Denotamos o conjunto de partes de bicliques de G por $\widehat{\mathcal{B}}_G$. Se duas partes de biclique X e Y formam a partição (X, Y) de uma biclique maximal, dizemos que X e Y são correspondentes.*

Definição 5.1.2. *Seja G um grafo qualquer. Chamamos de grafo de inclusão de partes de bicliques de G o grafo de inclusão com $\widehat{\mathcal{B}}_G$ como modelo. Denotamos o grafo de inclusão de partes de bicliques de G por $\text{BP}(G)$.*

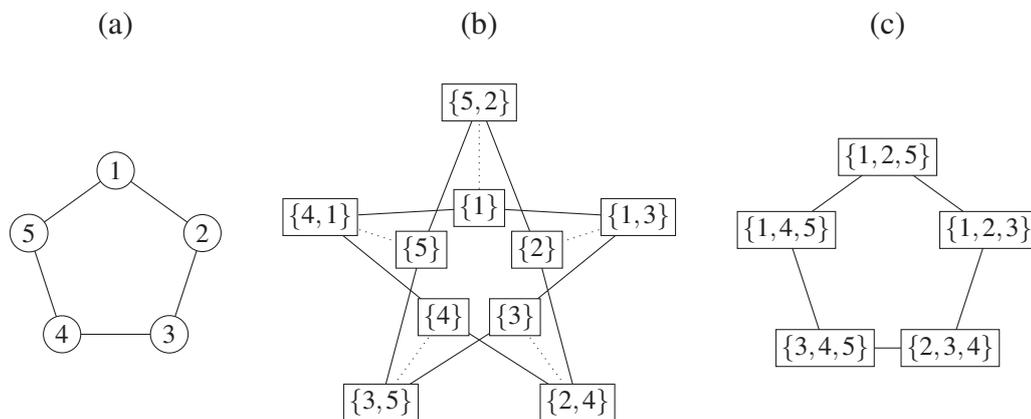


Figura 5.2: Grafo G (a), grafo $\text{BP}(G)$ (b) e grafo $\text{KB}_m(G)$ (c).

A Figura 5.2 descreve um grafo G (a), o grafo $\text{BP}(G)$ (b) e o grafo $\text{KB}_m(G)$ (c). O grafo G é o grafo ciclo C_5 com vértices que formam o ciclo $(1, 2, 3, 4, 5)$ e possui as bicliques maximais $B_1 = \{1, 2, 5\}$, $B_2 = \{1, 2, 3\}$, $B_3 = \{2, 3, 4\}$, $B_4 = \{3, 4, 5\}$ e $B_5 = \{1, 4, 5\}$. O grafo $\text{BP}(G)$ é o grafo ciclo C_{10} com vértices que formam o ciclo $(\{1\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{3, 5\}, \{5\}, \{2, 5\}, \{2\}, \{2, 4\}, \{4\}, \{1, 4\})$ de partes de bicliques de G . O grafo $\text{KB}_m(G)$ é o grafo ciclo C_5 com vértices que formam o ciclo $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$. Vale notar que é possível obter o grafo isomorfo a $\text{KB}_m(G)$ a partir da unificação dos pares de vértices de $\text{BP}(G)$ que correspondem às partes de biclique correspondentes de G . Também vale notar que, se G é livre de triângulos, que toda parte de biclique é correspondente a uma única outra parte de biclique — propriedade a qual provamos após o enunciado da Proposição 5.1.3.

Considere a seguinte definição da propriedade de autotransposição de *posets*.

Definição 5.1.3. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um *poset* sobre um conjunto finito C e uma ordem parcial não-estrita \preceq . Dizemos que \mathcal{P} é autotransposto se existe bijeção $\pi : C \rightarrow C$ onde, para todo $x, y \in C$, valem que*

- $x \neq \pi(x)$;
- $\pi(\pi(x)) = x$; e

$$\bullet x \preceq y \iff \pi(y) \preceq \pi(x).$$

Chamamos $\pi(x)$ de correspondente de x , para todo $x \in C$.

Podemos, então, definir a seguinte subclasse de grafos de comparabilidade.

Definição 5.1.4. Dizemos que um grafo de comparabilidade é autotransposto se é isomorfo ao grafo de comparabilidade com um poset autotransposto como modelo de comparabilidade.

Vale notar que a propriedade de autotransposição de *posets* é semelhante ao automorfismo *skew-symmetric* de grafos direcionados, introduzido por Tutte (1967) como digrafos antissimétricos. A única distinção, porém, é a transitividade de *posets* que não é garantida em um digrafo antissimétrico.

A seguinte definição descreve a propriedade de incomparabilidade antecessor-sucessor de correspondentes de *posets* autotranspostos.

Definição 5.1.5. Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \rightarrow C$. Dizemos que \mathcal{P} é livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes se nenhum antecessor de $x \in C$ é comparável a sucessor algum de $\pi(x)$. Isto é — para todo $x, y, z \in C$ não necessariamente distintos — vale que

$$y \preceq x \wedge \pi(x) \preceq z \implies z \not\preceq y \wedge y \not\preceq z.$$

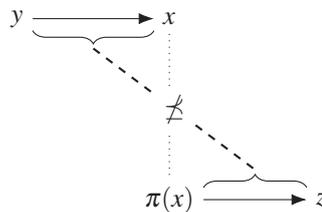


Figura 5.3: Elementos não comparáveis pela Definição 5.1.5.

Alternativamente, podemos dizer que um *poset* $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \rightarrow C$ é livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes se, para todo $y \in I_{\mathcal{P}}^{-}(x)$ e todo $z \in I_{\mathcal{P}}^{+}(\pi(x))$, vale que $y \not\preceq z$ e que $z \not\preceq y$, para todo $x \in C$. A Figura 5.3 ilustra os elementos não comparáveis sob a definição. Vale notar que, se $y = x$ e $z = \pi(x)$, então também vale que $x \not\preceq \pi(x)$ e que $\pi(x) \not\preceq x$, isto é, que nenhum elemento de C é comparável ao seu correspondente.

Com a propriedade de incomparabilidade antecessor-sucessor de correspondentes de *posets* autotranspostos, podemos definir a seguinte subclasse de grafos de comparabilidade autotranspostos.

Definição 5.1.6. Dizemos que um grafo de comparabilidade autotransposto é livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes se é isomorfo ao grafo de comparabilidade com um modelo autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes como modelo.

Considere os seguintes resultados do trabalho de Groshaus e Guedes (2021).

Lema 5.1.1 (Groshaus e Guedes, 2021). *Sejam G um grafo sem triângulos e B_1 e B_2 as bicliques maximais de G não mutuamente inclusas entre si que admitem, respectivamente, as partições (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) . Se a intersecção $X_1 \cap X_2$ não é vazia, então existe biclique maximal $B \in \mathcal{B}_G$ que admite a partição (X, Y) tal que $X = X_1 \cap X_2$ e que $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$.*

Lema 5.1.2 (Groshaus e Guedes, 2021). *Sejam G um grafo sem triângulos e B_1 e B_2 bicliques maximais de G que admitem, respectivamente, as partições (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) . Se $X_1 \subset X_2$, então $Y_2 \subset Y_1$.*

Também considere a seguinte proposição.

Proposição 5.1.3. *Sejam G um grafo livre de triângulos e B_1 e B_2 bicliques maximais de G com partições (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) respectivamente. Se $X_1 = X_2$, então $Y_1 = Y_2$.*

Prova. Suponha que $Y_1 \neq Y_2$. Logo, existe algum vértice $v \in Y_2 \setminus Y_1$. Como $X_1 = X_2$, temos que todo vértice em X_1 é adjacente a v . Como G é livre de triângulos, temos que v não é adjacente a vértice algum em Y_1 . Logo, vale que $B_1 \cup \{v\}$ é biclique e, portanto, que B_1 não é maximal. Logo, temos que todo vértice em Y_2 também pertence a Y_1 , isto é, que $Y_2 \subseteq Y_1$. Da mesma forma, também temos que $Y_1 \subseteq Y_2$.

Logo, se $X_1 = X_2$, então vale que $Y_1 = Y_2$. □

O seguinte teorema enuncia que a relação de inclusão entre partes de bicliques de grafos livres de triângulos é descrita por um *poset* autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.

Teorema 5.1.4. *Seja G um grafo livre de triângulos. Vale que o poset $\mathcal{P} = (\widehat{\mathcal{B}}_G, \subseteq)$ é autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes sobre uma bijeção $\pi : \widehat{\mathcal{B}}_G \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_G$ onde $\pi(\widehat{B})$ é a parte de biclique correspondente a \widehat{B} .*

Prova. Como a relação de inclusão \subseteq é uma ordem parcial — por ser reflexiva, antissimétrica e transitiva — temos que o grafo BP de todo grafo G é um grafo de comparabilidade que admite o modelo $(\widehat{\mathcal{B}}_G, \subseteq)$. Pela Proposição 5.1.3, vale que toda parte de biclique de um grafo livre de triângulos possui uma única parte de biclique correspondente.

Considere, para o grafo G livre de triângulos, a bijeção $\pi : \widehat{\mathcal{B}}_G \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_G$ onde $\pi(\widehat{B})$ é a parte de biclique correspondente a \widehat{B} . Logo, temos que $\widehat{B} \neq \pi(\widehat{B})$ e que $\pi(\pi(\widehat{B})) = \widehat{B}$.

Sejam \widehat{B}_1 e \widehat{B}_2 duas partes de bicliques de G . Se $\widehat{B}_1 \subseteq \widehat{B}_2$, temos — pelo Lema 5.1.2 e pela Proposição 5.1.3 — que $\pi(\widehat{B}_2) \subseteq \pi(\widehat{B}_1)$. Portanto, temos que BP(G) é um grafo de comparabilidade autotransposto pela bijeção π .

Sejam \widehat{B}_1 , \widehat{B}_2 e \widehat{B}_3 partes de bicliques de G tais que $\widehat{B}_2 \subseteq \widehat{B}_1$ e que $\pi(\widehat{B}_1) \subseteq \widehat{B}_3$. Se $\widehat{B}_3 \subseteq \widehat{B}_2$, então temos que $\pi(\widehat{B}_1) \subseteq \widehat{B}_1$ e, portanto, que $\pi(\widehat{B}_1)$ não é correspondente a \widehat{B}_1 . Se $\widehat{B}_2 \subseteq \widehat{B}_3$, então temos que \widehat{B}_3 possui intersecção com \widehat{B}_1 . Como $\pi(\widehat{B}_1) \subseteq \widehat{B}_3$, temos que \widehat{B}_3 possui vértices de \widehat{B}_1 e de $\pi(\widehat{B}_1)$. Logo, temos que \widehat{B}_3 não é conjunto independente e, portanto, que não é parte de biclique.

Logo, temos que

$$\widehat{B}_2 \subseteq \widehat{B}_1 \wedge \pi(\widehat{B}_1) \subseteq \widehat{B}_3 \implies \widehat{B}_2 \not\subseteq \widehat{B}_3 \wedge \widehat{B}_3 \not\subseteq \widehat{B}_2.$$

Portanto, temos que BP(G) é grafo de comparabilidade autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. □

Pelo Teorema 5.1.4, vale que as correspondências entre as partes de biclique de um grafo livre de triângulos qualquer são as mesmas correspondências de um *poset* autotransposto. Também temos que a propriedade de incomparabilidade antecessor-sucessor de correspondentes de um *poset* autotransposto modela a limitação das relações de inclusão entre as partes de biclique.

Podemos adaptar a prova do Lema 5 de Groshaus e Guedes (2021) para a prova do teorema a seguir.

Teorema 5.1.5. *Seja G um grafo livre de triângulos. Vale que o poset $\mathcal{P} = (\widehat{\mathcal{B}}_G, \subseteq)$ é IIC.*

Prova. Considere as partes de bicliques \widehat{B}_1 e \widehat{B}_2 de G .

Se $\widehat{B}_1 \subseteq \widehat{B}_2$, então $I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2) = I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1)$. Da mesma forma, se $\widehat{B}_2 \subseteq \widehat{B}_1$, então $I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2) = I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2)$. Considere, portanto, que \widehat{B}_1 e \widehat{B}_2 não são comparáveis sob \subseteq .

Se $\widehat{B}_1 \cap \widehat{B}_2 = \emptyset$, então $I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2) = \emptyset$.

Se $\widehat{B}_1 \cap \widehat{B}_2 \neq \emptyset$, temos que $\pi(\widehat{B}_1) \neq \widehat{B}_2$ e que $\pi(\widehat{B}_2) \neq \widehat{B}_1$. Pelo Lema 5.1.1, vale que existe biclique maximal $B \in \mathcal{B}_G$ que aceita a partição (X, Y) tal que $X = \widehat{B}_1 \cap \widehat{B}_2$ e que $\pi(\widehat{B}_1) \cup \pi(\widehat{B}_2) \subseteq Y$. Logo, valem que $X \subseteq \widehat{B}_1$ e que $X \subseteq \widehat{B}_2$ e, portanto, que $X \in I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2) \neq \emptyset$. Como toda parte de biclique \widehat{B} contida na intersecção $\widehat{B}_1 \cap \widehat{B}_2$ está também contida em X , temos que $I_{\mathcal{P}}^{-}(X) = I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2)$.

Portanto, vale que

$$I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2) \neq \emptyset \implies \exists \widehat{B} \in \widehat{\mathcal{B}}_G \text{ onde } I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}) = I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}_2).$$

Pelo Teorema 5.1.4, temos que \mathcal{P} é autotransposto. Logo, vale que

$$\widehat{B}_1 \subseteq \widehat{B}_2 \iff \pi(\widehat{B}_2) \subseteq \pi(\widehat{B}_1).$$

Portanto, temos que $\widehat{B} \in I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_1) \iff \pi(\widehat{B}) \in I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(\widehat{B}_1))$ e que $\widehat{B} \in I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_2) \iff \pi(\widehat{B}) \in I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(\widehat{B}_2))$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_2) \neq \emptyset &\implies \\ I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(\widehat{B}_1)) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(\widehat{B}_2)) \neq \emptyset &\implies \\ \exists \widehat{B} \in \widehat{\mathcal{B}}_G \text{ onde } I_{\mathcal{P}}^{-}(\widehat{B}) = I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(\widehat{B}_1)) \cap I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(\widehat{B}_2)) &\implies \\ \exists \widehat{B} \in \widehat{\mathcal{B}}_G \text{ onde } I_{\mathcal{P}}^{+}(\pi(\widehat{B})) = I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_2). & \end{aligned}$$

Logo, vale que

$$I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_2) \neq \emptyset \implies \exists \widehat{B} \in \widehat{\mathcal{B}}_G \text{ onde } I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}) = I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}}^{+}(\widehat{B}_2).$$

Portanto, temos que o poset $\mathcal{P} = (\widehat{\mathcal{B}}_G, \subseteq)$ é IIC. □

Temos, portanto, o seguinte corolário.

Corolário 5.1.6. *Seja G um grafo livre de triângulos. Vale que $\text{BP}(G)$ é um grafo IIC-comparabilidade autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.*

5.2 GRAFO $G_{\mathcal{P}}$

Nesta seção, provamos a recíproca do Corolário 5.1.6, isto é, que todo grafo de comparabilidade que admite como modelo um *poset* \mathcal{P} IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes é isomorfo ao grafo de inclusão de partes de biclique de algum grafo livre de triângulos. Para a prova, construímos um grafo livre de triângulos a partir do *poset* \mathcal{P} — que chamamos de $G_{\mathcal{P}}$ — e mostramos que o grafo de comparabilidade de \mathcal{P} é isomorfo ao grafo $\text{BP}(G_{\mathcal{P}})$. Descrevemos tal grafo $G_{\mathcal{P}}$ com a construção a seguir.

Construção 5.2.1. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Denotamos por $G_{\mathcal{P}}$ o grafo onde o conjunto de vértices $V(G_{\mathcal{P}})$ equivale a C e dois vértices $x, y \in C$ são adjacentes se, e somente se, vale que $x \preceq \pi(y)$.*

O grafo $G_{\mathcal{P}}$ possui o conjunto de elementos C do *poset* $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ como seu conjunto de vértices e usamos a ordem parcial \preceq para derivar propriedades sobre o grafo. Entretanto, vale ressaltar que o grafo $G_{\mathcal{P}}$ não é o grafo de comparabilidade do modelo \mathcal{P} .

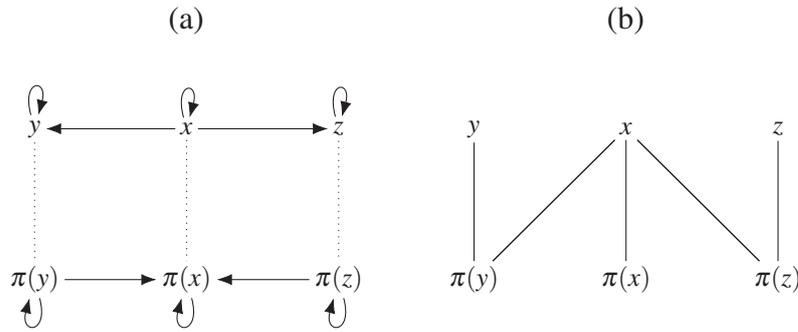


Figura 5.4: Poset \mathcal{P} (a) e grafo $G_{\mathcal{P}}$ (b).

A Figura 5.4 descreve um *poset* $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ IIC autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes (a) e o grafo $G_{\mathcal{P}}$ (b). O *poset* \mathcal{P} possui o conjunto $C = \{x, y, z, \pi(x), \pi(y), \pi(z)\}$ e a ordem parcial $\preceq = \{(x, y), (x, z), (\pi(y), \pi(x)), (\pi(z), \pi(x)), (x, x), (y, y), (z, z), (\pi(x), \pi(x)), (\pi(y), \pi(y)), (\pi(z), \pi(z))\}$ e o grafo $G_{\mathcal{P}}$ possui o conjunto de vértices $V(G_{\mathcal{P}}) = C$ e o conjunto de arestas $E(G_{\mathcal{P}}) = \{\{x, \pi(x)\}, \{y, \pi(y)\}, \{z, \pi(z)\}, \{x, \pi(y)\}, \{x, \pi(z)\}\}$.

Mostramos, com o seguinte lema, que todo grafo $G_{\mathcal{P}}$ é livre de triângulos.

Lema 5.2.1. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Vale que $G_{\mathcal{P}}$ é livre de triângulos.*

Prova. Suponha que $x, y, z \in C$ distintos formam um triângulo em $G_{\mathcal{P}}$. Como $\{x, y\}$ e $\{y, z\}$ são arestas de $G_{\mathcal{P}}$, valem que $x \preceq \pi(y)$ e que $y \preceq \pi(z)$. Como \mathcal{P} é livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, vale que

$$y \preceq \pi(z) \wedge x \preceq \pi(y) \implies x \not\preceq \pi(z).$$

Como $x \not\preceq \pi(z) \iff z \not\preceq \pi(x)$, temos que $\{x, z\}$ não é aresta de $G_{\mathcal{P}}$. Logo, temos que $G_{\mathcal{P}}$ é livre de triângulos. \square

Com o seguinte teorema, mostramos que toda biclique maximal de $G_{\mathcal{P}}$ — com $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ — é exatamente a união entre o intervalo de antecessores de algum elemento de C e o intervalo de antecessores de seu correspondente.

Teorema 5.2.2. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Vale que $\widehat{\mathcal{B}}_{G_{\mathcal{P}}} = \{I_{\mathcal{P}}^-(x) \mid \forall x \in C\}$ e que a parte de biclique correspondente a $I_{\mathcal{P}}^-(x) \in \widehat{\mathcal{B}}_{G_{\mathcal{P}}}$ é exatamente $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$.*

Prova. Considere $x \in C$. Para todo $y \in I_{\mathcal{P}}^-(x)$, vale que $\{y, \pi(x)\}$ é uma aresta de $G_{\mathcal{P}}$. Pelo Lema 5.2.1, temos que $G_{\mathcal{P}}$ é livre de triângulos. Logo, vale que os elementos de $I_{\mathcal{P}}^-(x)$ não são adjacentes entre si em $G_{\mathcal{P}}$ e, portanto, que $I_{\mathcal{P}}^-(x)$ é conjunto independente de $G_{\mathcal{P}}$.

Para todo $y \in C$ onde $x \preceq y$, vale que $\{x, \pi(y)\}$ é aresta de $G_{\mathcal{P}}$. Como \mathcal{P} é autotransposto sobre π , vale que

$$\begin{aligned} \{\pi(y) \mid x \preceq y\} &= \{y \in C \mid y \preceq \pi(x)\} \\ &= I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)). \end{aligned}$$

Logo, vale que x é adjacente a todos — e apenas a — os elementos de $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$ em $G_{\mathcal{P}}$. Pela transitividade de \preceq , vale que todo elemento de $I_{\mathcal{P}}^-(x)$ é adjacente a todos os elementos de $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$. Da mesma forma que em $I_{\mathcal{P}}^-(x)$, também vale que $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$ é um conjunto independente de $G_{\mathcal{P}}$. Logo, vale que $I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$ é uma biclique de $G_{\mathcal{P}}$ com partição $(I_{\mathcal{P}}^-(x), I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)))$.

Assuma que exista $z \in C$ onde $(I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup \{z\}, I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)))$ seja partição de alguma biclique de $G_{\mathcal{P}}$. Logo, vale que $\{z, \pi(x)\}$ é aresta de $G_{\mathcal{P}}$ e, portanto, que $z \preceq x$, isto é, que $z \in I_{\mathcal{P}}^-(x)$. Da mesma forma, se houver biclique em $G_{\mathcal{P}}$ com partição $(I_{\mathcal{P}}^-(x), I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \cup \{z\})$ para algum $z \in C$, então $z \in I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$. Logo, vale que $I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$ é biclique maximal de $G_{\mathcal{P}}$. Portanto, temos que $\{I_{\mathcal{P}}^-(x) \mid \forall x \in C\} \subseteq \widehat{\mathcal{B}}_{G_{\mathcal{P}}}$ e que $\{I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \mid \forall x \in C\} \subseteq \mathcal{B}_{G_{\mathcal{P}}}$.

Para provar que $\widehat{\mathcal{B}}_{G_{\mathcal{P}}} \subseteq \{I_{\mathcal{P}}^-(x) \mid \forall x \in C\}$, assumamos que exista uma biclique maximal B_1 com partição (X_1, Y_1) onde $X_1 \notin \{I_{\mathcal{P}}^-(x) \mid \forall x \in C\}$. Se X_1 possui um único máximo x no poset (X_1, \preceq) , então temos que $X_1 = I_{\mathcal{P}}^-(x)$. Logo, temos que X_1 possui, pelo menos, dois elementos máximos $x, y \in X_1$ no poset (X_1, \preceq) . Portanto, temos que existe uma biclique maximal B_2 com partição (X_2, Y_2) tal que $\{x, y\} \subseteq X_2$ e que

$$\begin{aligned} \{w \in C \mid w \preceq \pi(x) \wedge w \preceq \pi(y)\} &\subseteq Y_2 \implies \\ \{w \in C \mid w \preceq \pi(x)\} \cap \{w \in C \mid w \preceq \pi(y)\} &\subseteq Y_2 \implies \\ I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \cap I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y)) &\subseteq Y_2. \end{aligned}$$

Como x e y são máximos em (X_1, \preceq) , então x e y não são comparáveis em \preceq . Como B_2 é biclique e $x, y \in X_2$, temos que existe $w \in Y_2$ adjacente tanto a x quanto a y em $G_{\mathcal{P}}$. Logo, valem que $w \preceq \pi(x)$ e que $w \preceq \pi(y)$. Portanto, temos que a intersecção $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \cap I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y))$ não é vazia. Como \mathcal{P} é IIC, temos que existe $z \in C$ onde $I_{\mathcal{P}}^-(z) = I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \cap I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y))$. Se existe $w' \in C$ tal que $I_{\mathcal{P}}^-(z) \cup \{w'\} \subseteq Y_2$, então, da mesma forma que no caso anterior, temos que $w' \in I_{\mathcal{P}}^-(z)$. Temos, portanto, que $Y_2 = I_{\mathcal{P}}^-(z)$ e que $X_2 = I_{\mathcal{P}}^-(\pi(z))$.

Como B_1 é biclique, vale que todo $z' \in Y_1$ é adjacente tanto a x quanto a y e, portanto, vale que $z' \preceq \pi(x)$ e $z' \preceq \pi(y)$ para todo $z' \in Y_1$. Logo, temos que $Y_1 \subseteq I_{\mathcal{P}}^-(z) = Y_2$. Pelo Lema 5.1.2 e pela Proposição 5.1.3, temos que $X_2 = I_{\mathcal{P}}^-(\pi(z)) \subseteq X_1$ e, portanto, que $\pi(z) \in X_1$. Como $x \preceq \pi(z)$ e $y \preceq \pi(z)$, temos que x e y não são máximos em (X_1, \preceq) . Logo, temos que não existe parte de biclique que não esteja em $\{I_{\mathcal{P}}^-(x) \mid \forall x \in C\}$.

Portanto, temos que toda parte de biclique de $G_{\mathcal{P}}$ pertence a $\{I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \mid \forall x \in C\}$ e que a parte de biclique correspondente a $I_{\mathcal{P}}^{-}(x)$ é $I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(x))$. \square

Considere a seguinte proposição.

Proposição 5.2.3. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset qualquer sobre um conjunto finito C . Vale — para todo $x, y \in C$ — que*

$$x \preceq y \iff I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \subseteq I_{\mathcal{P}}^{-}(y).$$

Prova. Se vale que $x \preceq y$, então — para todo $z \in I_{\mathcal{P}}^{-}(x)$ — vale que $z \preceq x \implies z \preceq y$. Logo, temos que $x \preceq y \implies I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \subseteq I_{\mathcal{P}}^{-}(y)$.

Se $I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \subseteq I_{\mathcal{P}}^{-}(y)$, então todo $z \in I_{\mathcal{P}}^{-}(x)$ também pertence a $I_{\mathcal{P}}^{-}(y)$. Logo, vale que $z \preceq y$ para todo $z \in I_{\mathcal{P}}^{-}(x)$. Como $x \in I_{\mathcal{P}}^{-}(x)$, temos que $x \preceq y$. Logo, temos que $I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \subseteq I_{\mathcal{P}}^{-}(y) \implies x \preceq y$.

Portanto, vale que

$$x \preceq y \iff I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \subseteq I_{\mathcal{P}}^{-}(y).$$

\square

Considere, portanto, o enunciado do próximo teorema.

Teorema 5.2.4. *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \longrightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e H o grafo de comparabilidade que tem \mathcal{P} como modelo. Vale que $\text{BP}(G_{\mathcal{P}})$ é isomorfo a H .*

Prova. Pelo Teorema 5.2.2, temos que o conjunto de partes de bicliques de $G_{\mathcal{P}}$ equivale a $\{I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \mid \forall x \in C\}$. Pela Proposição 5.2.3, temos que H é isomorfo a $\text{BP}(G_{\mathcal{P}})$. \square

Pelo Corolário 5.1.6, temos que o grafo BP de todo grafo livre de triângulos é grafo IIC-comparabilidade autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Com o Teorema 5.2.4, podemos afirmar a recíproca, obtendo o seguinte corolário.

Corolário 5.2.5. *Seja \mathcal{C} a classe dos grafos IIC-comparabilidade autotranspostos livres de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Vale que*

$$\text{BP}(K_3\text{-free}) = \mathcal{C}.$$

A Figura 5.5 descreve a inclusão da classe dos grafos $\text{BP}(K_3\text{-free})$ pelos grafos IIC-comparabilidade e os grafos de comparabilidade autotranspostos livres de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, ambas subclasses da classe dos grafos de comparabilidade. Como a classe dos grafos IIC-comparabilidade equivale aos grafos KB_m de grafos bipartidos, também temos que os grafos $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$ incluem os grafos IIC-comparabilidade e, portanto, a classe $\text{BP}(K_3\text{-free})$.

O seguinte enunciado caracteriza a classe dos grafos biclique de grafos livres de triângulos em termos de *posets* IIC autotranspostos livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.

Teorema 5.2.6. *Todo grafo biclique de um grafo livre de triângulos é isomorfo ao grafo de intersecção que tem o conjunto $\{I_{\mathcal{P}}^{-}(x) \cup I_{\mathcal{P}}^{-}(\pi(x)) \mid \forall x \in C\}$ como modelo, para algum poset $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ IIC autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \longrightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.*

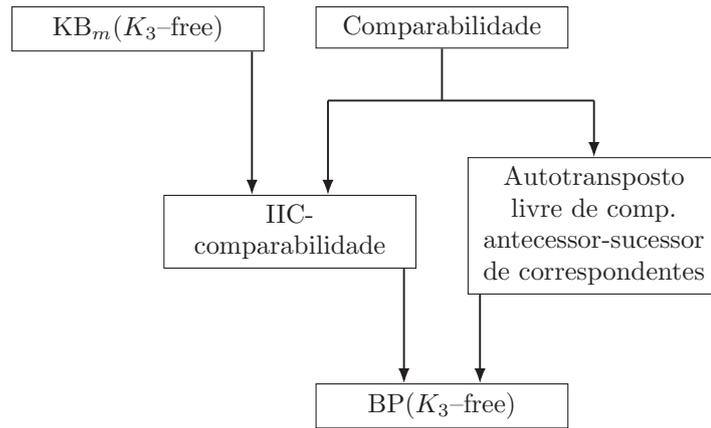


Figura 5.5: Diagrama de inclusão de classes com os grafos $BP(K_3\text{-free})$.

Prova. Seja G um grafo livre de triângulos qualquer. Considere o poset $\mathcal{P}' = (\widehat{\mathcal{B}}_G, \subseteq)$. Pelos Teoremas 5.1.4 e 5.1.5, vale que \mathcal{P}' é IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes sobre alguma bijeção $\pi' : \widehat{\mathcal{B}}_G \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_G$ onde $\pi'(\widehat{B})$ é a parte de biclique correspondente de \widehat{B} para todo $\widehat{B} \in \widehat{\mathcal{B}}_G$.

Considere duas partes de bicliques \widehat{B}_1 e \widehat{B}_2 distintas e não-correspondentes de G . Se \widehat{B}_1 e \widehat{B}_2 se intersectam, então — por \mathcal{P}' ser IIC — vale que existe alguma parte de biclique \widehat{B} de G tal que $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B})$ equivale à intersecção $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_1) \cap I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_2)$. Como tal \widehat{B} existe, temos que $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B})$ não é vazio e, portanto, que $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_1)$ possuem intersecção $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_2)$. Logo, temos que se as bicliques maximais $\widehat{B}_1 \cup \pi'(\widehat{B}_1)$ e $\widehat{B}_2 \cup \pi'(\widehat{B}_2)$ se intersectam, então as uniões $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_1) \cup I_{\mathcal{P}'}^-(\pi'(\widehat{B}_1))$ e $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_2) \cup I_{\mathcal{P}'}^-(\pi'(\widehat{B}_2))$ também se intersectam.

Considere, portanto, que $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_1)$ e $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_2)$ se intersectam. Existe, portanto, algum elemento $\widehat{B} \in \widehat{\mathcal{B}}_G$ tal que $\widehat{B} \in I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_1)$ e $\widehat{B} \in I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_2)$. Logo, temos que $\widehat{B} \subseteq \widehat{B}_1$ e que $\widehat{B} \subseteq \widehat{B}_2$ e, portanto, que \widehat{B}_1 e \widehat{B}_2 se intersectam. Temos, então, que se as uniões $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_1) \cup I_{\mathcal{P}'}^-(\pi'(\widehat{B}_1))$ e $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_2) \cup I_{\mathcal{P}'}^-(\pi'(\widehat{B}_2))$ se intersectam, então as bicliques maximais $\widehat{B}_1 \cup \pi'(\widehat{B}_1)$ e $\widehat{B}_2 \cup \pi'(\widehat{B}_2)$ também se intersectam.

Portanto, vale que a biclique maximal $\widehat{B}_1 \cup \pi'(\widehat{B}_1)$ intersecta a biclique maximal $\widehat{B}_2 \cup \pi'(\widehat{B}_2)$ se, e somente se, a união $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_1) \cup I_{\mathcal{P}'}^-(\pi'(\widehat{B}_1))$ intersecta a união $I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}_2) \cup I_{\mathcal{P}'}^-(\pi'(\widehat{B}_2))$.

Vale notar — para todo poset $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ que admite uma bijeção $\phi : C \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{G_{\mathcal{P}'}}$ onde $x \preceq y$ se, e somente se, $\phi(x) \subseteq \phi(y)$ — que \mathcal{P} é IIC autotransposto sobre alguma bijeção $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Portanto, o grafo $KB(G)$ é isomorfo ao grafo de intersecção que admite o conjunto $\{I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \mid \forall x \in C\}$ como modelo. \square

Vale lembrar, para um poset $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ IIC autotransposto sobre a bijeção $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, que o grafo $G_{\mathcal{P}}$ possui as arestas $\{x, \pi(x)\}$ para todo $x \in C$. Logo, temos que $G_{\mathcal{P}}$ possui um emparelhamento perfeito. Como — pelo Lema 5.2.1 — vale que $G_{\mathcal{P}}$ é livre de triângulos, temos a classe de todos os grafos isomorfos a um possível grafo $G_{\mathcal{P}}$ é subclasse estrita à classe dos grafos livres de triângulos. Porém, também vale — pelo Teorema 5.2.6 — que a classe de seus grafos biclique equivale a classe dos grafos biclique dos grafos livres de triângulos. Portanto, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 5.2.7. *Seja \mathcal{C} a classe de todos os grafos isomorfos a algum grafo $G_{\mathcal{P}}$, para algum poset \mathcal{P} IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Vale que $\mathcal{C} \subset K_3$ -free e que $\text{KB}(\mathcal{C}) = \text{KB}(K_3\text{-free})$.*

5.3 PROPRIEDADES DO GRAFO LINHA DE $G_{\mathcal{P}}$

Nesta seção, exploramos as propriedades do grafo $G_{\mathcal{P}}$ — apresentado na Seção 5.2 — e de seu grafo linha. Mostramos que o grafo $\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$ é isomorfo a um subgrafo induzido de $L(G_{\mathcal{P}})^2$ e que um subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})$ é isomorfo a um subgrafo de $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$. Tais propriedades nos permitem associar a estrutura do grafo KB_m — e, portanto, as bicliques maximais — de um grafo $G_{\mathcal{P}}$ a seu grafo linha. Para esta seção, considere o poset $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.

Vale lembrar que todo par de elementos correspondentes $\{x, \pi(x)\}$ de \mathcal{P} é uma aresta de $G_{\mathcal{P}}$ e, portanto, que $G_{\mathcal{P}}$ possui um emparelhamento perfeito. Descrevemos as arestas do emparelhamento perfeito com a seguinte notação.

Definição 5.3.1. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Denotamos por e_x a aresta $\{x, \pi(x)\}$ de $G_{\mathcal{P}}$, para todo $x \in C$.*

Com a seguinte proposição, enunciamos que existe uma bijeção entre as arestas do emparelhamento perfeito com as bicliques maximais de $G_{\mathcal{P}}$. Mais especificamente, que uma aresta e_x do emparelhamento perfeito está contida apenas na biclique maximal $I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$ de $G_{\mathcal{P}}$, com $x \in V(G_{\mathcal{P}})$.

Proposição 5.3.1. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Para todo $x \in C$, a aresta e_x está contida na biclique maximal $B \in \mathcal{B}_{G_{\mathcal{P}}}$ se, e somente se, vale que $B = I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$.*

Prova. \Leftarrow) Pelo Teorema 5.2.2, temos que $B = I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$ é biclique maximal de $G_{\mathcal{P}}$. Como $x \preceq \pi(\pi(x))$, temos que $e_x = \{x, \pi(x)\}$ é aresta de $G_{\mathcal{P}}$. Como $x \in I_{\mathcal{P}}^-(x)$ e $\pi(x) \in I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$, temos que $e_x \subseteq B$.

\Rightarrow) Considere a biclique maximal $B \in \mathcal{B}_{G_{\mathcal{P}}}$ e a aresta $e_x \subseteq B$. Pelo Teorema 5.2.2, temos que existe algum $y \in C$ tal que $B = I_{\mathcal{P}}^-(y) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y))$. Como $x \in B$, assumamos — sem perda de generalidade — que $x \in I_{\mathcal{P}}^-(y)$ e, portanto, que $x \preceq y$. Como e_x é aresta contida em B , temos que $\pi(x) \in B \setminus I_{\mathcal{P}}^-(y) = I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y))$. Logo, temos que $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \subseteq I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y))$. Pela Proposição 5.2.3, temos que $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)) \subseteq I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y))$ se, e somente se, $\pi(x) \preceq \pi(y)$. Como \mathcal{P} é autotransposto, temos que $\pi(x) \preceq \pi(y)$ se, e somente se, $y \preceq x$. Logo, temos que $x = y$ e, portanto, que $\pi(x) = \pi(y)$.

Portanto, temos que e_x é aresta de B se, e somente se, vale que $B = I_{\mathcal{P}}^-(x) \cup I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$. \square

Podemos, então, assumir uma bijeção entre as arestas do emparelhamento e as bicliques maximais de $G_{\mathcal{P}}$ e, logo, fazer uso da seguinte notação.

Definição 5.3.2. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Denotamos por B_x a biclique maximal de $G_{\mathcal{P}}$ que admite a partição $(I_{\mathcal{P}}^-(x), I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x)))$, para todo $x \in C$.*

Vale notar que um emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$ é um conjunto independente em seu grafo linha. O seguinte teorema enuncia que os vértices e_x e e_y de $L(G_{\mathcal{P}})$ possuem um vizinho em comum — isto é, então a distância 2 — se, e somente se, as bicliques maximais B_x e B_y são mutuamente inclusas entre si.

Teorema 5.3.2. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Para todo $x, y \in C$ distintos e não correspondentes, vale que e_x é adjacente a e_y em $L(G_{\mathcal{P}})^2$ se, e somente se, as bicliques maximais B_x e B_y são mutuamente inclusas.*

Prova. Como as arestas $e_x = \{x, \pi(x)\}$ e $e_y = \{y, \pi(y)\}$ de $G_{\mathcal{P}}$ não possuem intersecção, temos que são adjacentes em $L(G_{\mathcal{P}})^2$ apenas se algum dos pares $\{x, y\}$, $\{x, \pi(y)\}$, $\{\pi(x), y\}$ ou $\{\pi(x), \pi(y)\}$ for aresta de $G_{\mathcal{P}}$. Considere, sem perda de generalidade, que $\{x, \pi(y)\}$ é aresta de $G_{\mathcal{P}}$.

Logo, temos que $x \preceq y$ e — pelo Teorema 5.2.3 — que $I_{\mathcal{P}}^-(x) \subseteq I_{\mathcal{P}}^-(y)$. Como \mathcal{P} é autotransposto, temos que $\pi(y) \preceq \pi(x)$ e, conseqüentemente, que $I_{\mathcal{P}}^-(\pi(y)) \subseteq I_{\mathcal{P}}^-(\pi(x))$. Pelo Teorema 5.2.2 e pela Proposição 5.3.1, temos que B_x e B_y são mutuamente inclusas entre si. \square

Logo, podemos enunciar o seguinte Corolário.

Corolário 5.3.3. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Vale que $\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$ é isomorfo ao subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})^2$ induzido por $\{e_x \mid \forall x \in C\}$.*

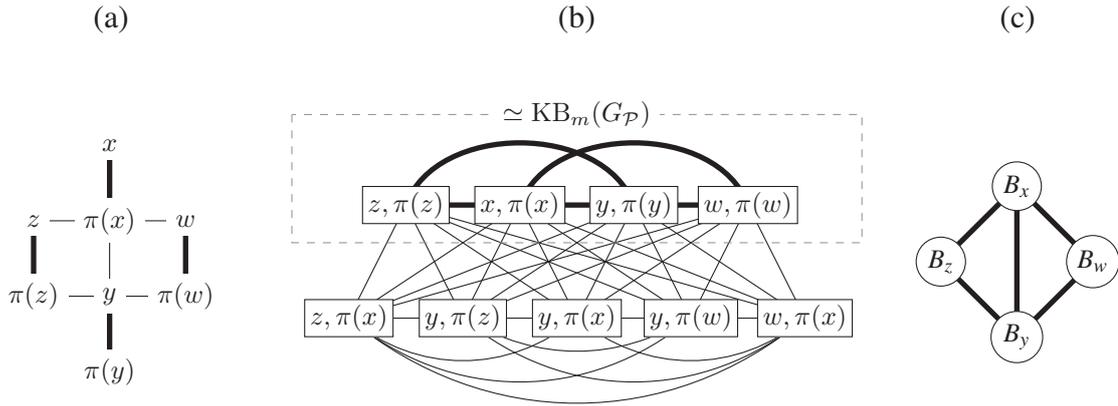


Figura 5.6: Grafo $G_{\mathcal{P}}$ (a), grafo $L(G_{\mathcal{P}})^2$ (b) e grafo $\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$ (c).

A Figura 5.6 descreve um grafo $G_{\mathcal{P}}$ (a), o grafo $L(G_{\mathcal{P}})^2$ (b) e o grafo $\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$ (c). O grafo $G_{\mathcal{P}}$ possui o conjunto de vértices $V(G_{\mathcal{P}}) = \{x, \pi(x), y, \pi(y), z, \pi(z), w, \pi(w)\}$, o conjunto de arestas $E(G_{\mathcal{P}}) = \{\{x, \pi(x)\}, \{y, \pi(y)\}, \{z, \pi(z)\}, \{w, \pi(w)\}, \{z, \pi(x)\}, \{w, \pi(x)\}, \{y, \pi(z)\}, \{y, \pi(w)\}, \{y, \pi(x)\}\}$ e as bicliques maximais $B_x = \{x, \pi(x), z, w, y\}$, $B_y = \{y, \pi(y), \pi(z), \pi(w), \pi(x)\}$, $B_z = \{z, \pi(z), \pi(x), y\}$ e $B_w = \{w, \pi(w), \pi(x), y\}$. Como enunciado pelo Corolário 5.3.3, o subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})^2$ induzido pelo conjunto de arestas do emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$ — em destaque em (b) — é isomorfo ao grafo $\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$.

Teorema 5.3.4. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Para todo $x, y \in C$ distintos e não correspondentes onde as bicliques maximais B_x e B_y de $G_{\mathcal{P}}$ são mutuamente inclusas, vale que existe uma única aresta de $G_{\mathcal{P}}$ que intersecta tanto e_x quanto e_y .*

Prova. Pelo Teorema 5.3.2, temos que e_x e e_y são adjacentes em $L(G_{\mathcal{P}})^2$. Como x e y são distintos e não correspondentes, também vale e_x e e_y não possuem vértices de $G_{\mathcal{P}}$ em comum. Logo, existe alguma aresta que intersecta tanto e_x quanto e_y .

Vamos supor os casos que exista mais de uma aresta que intersecta tanto e_x quanto e_y em $G_{\mathcal{P}}$. Como vale — pelo Lema 5.2.1 — que $G_{\mathcal{P}}$ é livre de triângulos, então tais arestas não possuem vértices de e_x ou de e_y em comum.

Assuma que existam duas arestas $e_1 = \{x, y\}$ e $e_2 = \{\pi(x), \pi(y)\}$ de $G_{\mathcal{P}}$. Logo, vale que $x \preceq \pi(y)$ e que $\pi(x) \preceq y$. Como \mathcal{P} é autotransposto sobre π , vale que $\pi(x) \preceq y$ implica que $\pi(y) \preceq x$ e, portanto, que $x = \pi(y)$. Entretanto, x não é correspondente de y . Logo, as arestas e_1 e e_2 não pertencem simultaneamente a $E(G_{\mathcal{P}})$.

Assuma, portanto, que $e_1 = \{x, \pi(y)\}$ e que $e_2 = \{y, \pi(x)\}$ são arestas de $G_{\mathcal{P}}$. Vale que $x \preceq y$ e que $y \preceq x$ e, portanto, que $x = y$. Entretanto, como x e y são distintos, então e_1 e e_2 não pertencem simultaneamente a $E(G_{\mathcal{P}})$.

Portanto, se B_x e B_y são mutuamente inclusas, então existe uma única aresta que intersecta tanto e_x quanto e_y em $G_{\mathcal{P}}$. \square

Com o Teorema 5.3.4, podemos usar a seguinte notação para a única aresta que intersecta tanto e_x quanto e_y em $G_{\mathcal{P}}$. Vale notar que tal aresta corresponde, no grafo linha $L(G_{\mathcal{P}})$, ao vizinho em comum de e_x e e_y .

Definição 5.3.3. *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e $x, y \in C$ distintos e não correspondentes onde as bicliques maximais B_x e B_y são mutuamente inclusas entre si. Denotamos a aresta que intersecta tanto e_x quanto e_y em $G_{\mathcal{P}}$ por e_{xy} .*

Vale destacar que a aresta e_{xy} existe em $G_{\mathcal{P}}$ se as bicliques maximais B_x e B_y são mutuamente inclusas. Logo, a aresta e_{xy} pode ser vista como a relação de inclusão mútua entre B_x e B_y e, portanto, associada à aresta $\{B_x, B_y\}$ de $\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$. Exploramos tal associação com o seguinte teorema.

Teorema 5.3.5. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Vale que o subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})$ induzido por $E(G_{\mathcal{P}}) \setminus \{e_x \mid \forall x \in C\}$ é isomorfo a um subgrafo gerador de $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$.*

Prova. Considere as arestas e_{xy} e e_{xz} de $G_{\mathcal{P}}$. Pelo Lema 5.3.2, temos que a biclique maximal B_x é mutuamente inclusa tanto a B_y quanto a B_z . Logo, temos que $\{B_x, B_y\}$ e $\{B_x, B_z\}$ são arestas de $\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$. Vale notar que e_{xy} e e_{xz} de $G_{\mathcal{P}}$ não são necessariamente intersectantes. Entretanto, se $\{e_{xy}, e_{xz}\}$ é aresta de $L(G_{\mathcal{P}})$ — isto é, se e_{xy} e e_{xz} são intersectantes —, então $\{\{B_x, B_y\}, \{B_x, B_z\}\}$ é aresta de $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$.

Vale notar que, como $\{e_x \mid \forall x \in C\}$ é um emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$, as demais arestas de $G_{\mathcal{P}}$ são as que intersectam simultaneamente duas arestas do emparelhamento perfeito. Portanto, temos que o subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})$ induzido por $E(G_{\mathcal{P}}) \setminus \{e_x \mid \forall x \in C\}$ é subgrafo gerador de $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$. \square

A Figura 5.7 descreve um grafo $G_{\mathcal{P}}$ (a), o grafo $L(G_{\mathcal{P}})$ (b) e o grafo $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$. O grafo $G_{\mathcal{P}}$ é o mesmo que é descrito pela Figura 5.6. Como demonstrado pelo Teorema 5.3.5, temos que o subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})$ induzido pelo conjunto de arestas de $G_{\mathcal{P}}$ que não pertencem ao emparelhamento perfeito — em destaque em (b) — é isomorfo a um subgrafo gerador do grafo $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$. Nesse exemplo, vale que $e_{xz} = \{z, \pi(x)\}$, que $e_{yz} = \{y, \pi(z)\}$, que $e_{xw} = \{w, \pi(x)\}$ e que $e_{yw} = \{y, \pi(w)\}$. Embora $\{\{B_x, B_z\}, \{B_y, B_z\}\}$ e $\{\{B_x, B_w\}, \{B_y, B_w\}\}$ sejam arestas de $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$, os pares $\{e_{xz}, e_{yz}\}$ e $\{e_{xw}, e_{yw}\}$ não são arestas de $L(G_{\mathcal{P}})$. Logo, não há garantia de tal subgrafo induzido de $L(G_{\mathcal{P}})$ seja isomorfo a $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$.

O motivo de não haver garantia é descrito pela Figura 5.8, que ilustra dois casos envolvendo as arestas e_x, e_y, e_z, e_{xy} e e_{yz} . No caso (a), existe intersecção entre as arestas e_{xy} e e_{yz} ,

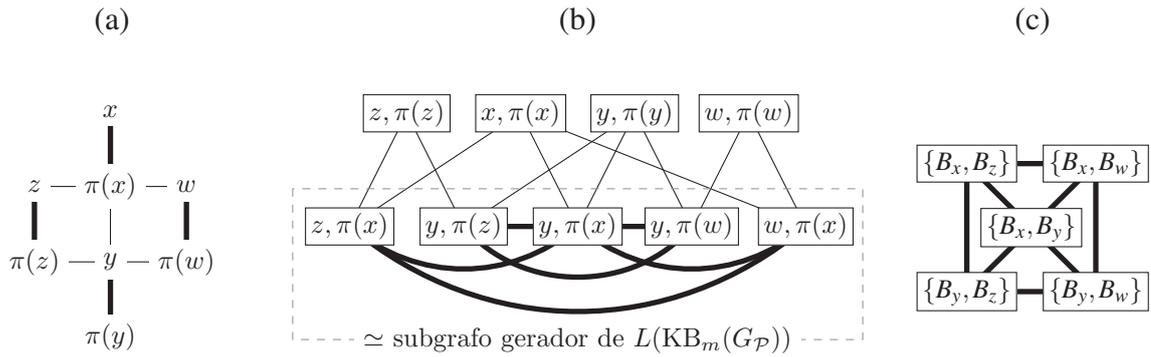


Figura 5.7: Grafo $G_{\mathcal{P}}$ (a), grafo $L(G_{\mathcal{P}})$ (b) e grafo $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$ (c).

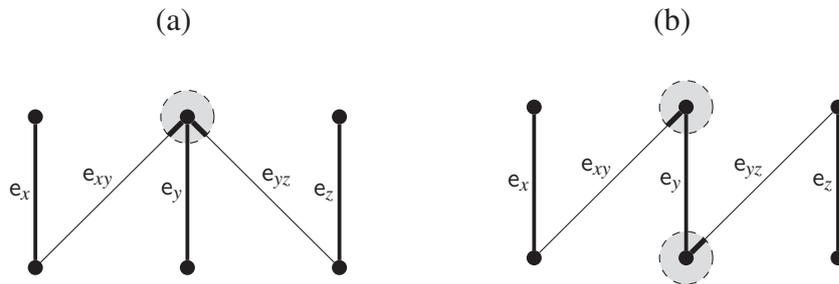


Figura 5.8: Arestas e_{xy} e e_{yz} intersectantes (a) e não-intersectantes (b).

que é apresentada pelo vértice em destaque. No caso (b), o vértice de e_{xy} que intersecta e_y e o vértice de e_{yz} que intersecta e_y não são o mesmo, como apresentado em destaque pela figura. Em ambos os casos, a biclique maximal B_y é mutuamente incluída tanto a B_x quanto a B_z e, portanto, ambos vértices $\{B_x, B_y\}$ e $\{B_y, B_z\}$ são adjacentes em $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$. Entretanto, apenas no caso (a) que os vértices e_{xy} e e_{yz} são adjacentes em $L(G_{\mathcal{P}})$. No caso (b), vale que e_{xy} e e_{yz} não são intersectantes e, portanto, não são adjacentes em $L(G_{\mathcal{P}})$.

Como já mostramos, as arestas do emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$ correspondem às suas bicliques maximais e as arestas que não pertencem ao emparelhamento perfeito correspondem às relações de inclusão mútua entre as bicliques maximais. Podemos descrever tais correspondências pelo seguinte corolário.

Corolário 5.3.6. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Vale que existe bijeção $\phi : E(G_{\mathcal{P}}) \rightarrow V(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})) \cup E(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$ onde*

$$\phi(e) = \begin{cases} B_x, & \text{se } e = e_x, \text{ para algum } x \in C, \\ \{B_x, B_y\}, & \text{se } e = e_{xy} \text{ para algum par } x, y \in C \text{ com } x \neq y \neq \pi(x). \end{cases}$$

Como consequência, também vale para o grafo $G_{\mathcal{P}}$ que

$$|E(G_{\mathcal{P}})| = |V(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))| + |E(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))|.$$

Vale lembrar que o operador de subdivisão de uma aresta e de um grafo G retorna um grafo com o conjunto de vértices $V(G) \cup \{e\}$. Se é feita uma subdivisão de todas as arestas de

G , então o grafo resultante possui o conjunto de vértices $V(G) \cup E(G)$. Logo, é razoável falar de inserção de arestas de $L(G)$ no grafo obtido pela subdivisão de todas as arestas de G , onde o conjunto de vértices de $L(G) = E(G)$ é subconjunto de vértices de tal grafo. Considerando o Corolário 5.3.3, o Teorema 5.3.5 e o Corolário 5.3.6, podemos considerar o seguinte enunciado.

Corolário 5.3.7. *Sejam H o grafo de bicliques mutuamente inclusas de um grafo livre de triângulos, S_1 o grafo obtido pela subdivisão de todas as arestas de H e S_2 o grafo com o mesmo conjunto de vértices que S_1 e com o conjunto de arestas $E(S_2) = E(S_1) \cup E(L(H))$. Vale que existe poset \mathcal{P} IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes onde $H \simeq \text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$ tal que S_1 é isomorfo a um subgrafo gerador de $L(G_{\mathcal{P}})$, que é isomorfo a um subgrafo gerador de S_2 .*

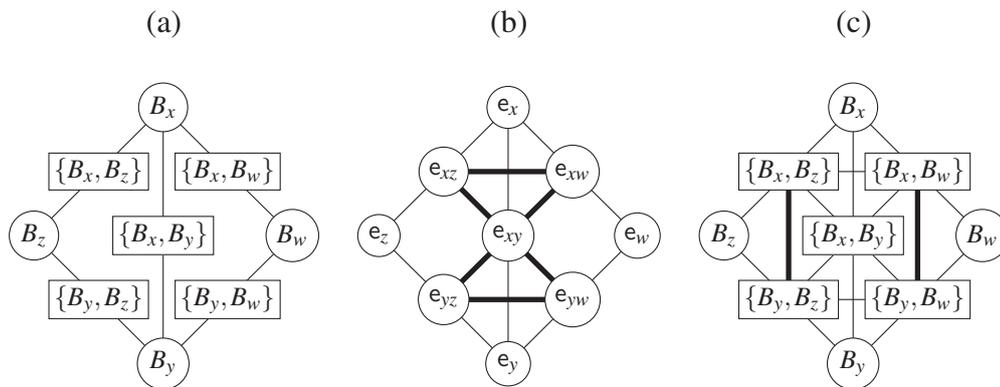


Figura 5.9: Grafo subdivisão S_1 do grafo $H \simeq \text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$ (a), grafo $L(G_{\mathcal{P}})$ (b) e grafo S_2 com vértices e arestas de S_1 e arestas de $L(H)$ (c).

A Figura 5.9 descreve o grafo S_1 (a) — obtido pela subdivisão de todas as arestas do grafo $H \simeq \text{KB}_m(G_{\mathcal{P}})$ —, o grafo $L(G_{\mathcal{P}})$ (b) e o grafo S_2 (c) — com os mesmos vértices e arestas de S_1 e as arestas de $L(H)$. O grafo $G_{\mathcal{P}}$ é o mesmo descrito pelas Figuras 5.6 e 5.7. Como enunciado pelo Corolário 5.3.7, temos que o grafo S_1 é isomorfo a um subgrafo gerador de $L(G_{\mathcal{P}})$, que é isomorfo a um subgrafo gerador de S_2 . As arestas em destaque são as arestas ausentes no subgrafo gerador isomorfo ao grafo anterior dessa sequência de subgrafos geradores.

O enunciado do Corolário 5.3.7 garante a existência do grafo linha de um grafo pré-imagem $G_{\mathcal{P}} \in \text{KB}_m^{-1}(H)$ intermediário entre S_1 e S_2 . Exploramos, no Capítulo 6, essa propriedade no contexto de computação da pré-imagem de um grafo KB_m de um grafo livre de triângulos, onde sugerimos um algoritmo para a computação da pré-imagem.

6 PRÉ-IMAGEM DO KB_m DE LIVRES DE TRIÂNGULOS

Ao final do Capítulo 5, mostramos que todo grafo $G \in KB_m(K_3\text{-free})$ admite uma pré-imagem H tal que seu grafo linha $L(H)$ é isomorfo a um supergrafo gerador do grafo obtido pela subdivisão de todas as arestas de G e isomorfo a um subgrafo gerador do grafo obtido pela subdivisão de todas as arestas de G e inserção de todas as arestas de $L(G)$.

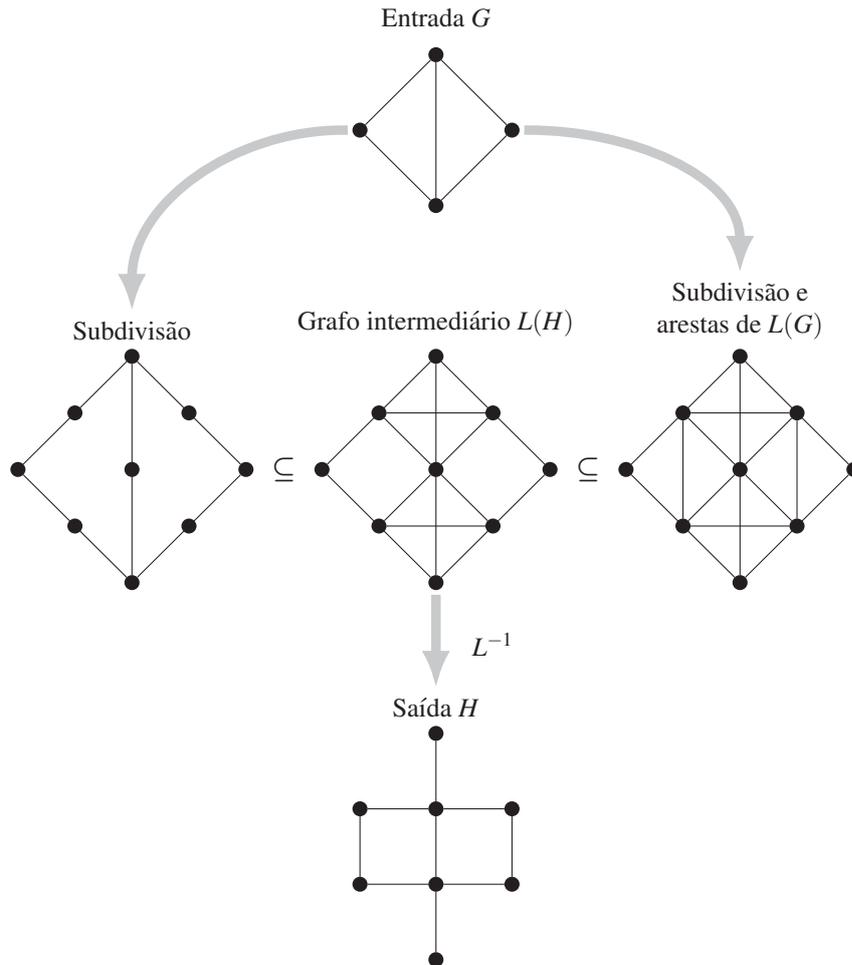


Figura 6.1: Encontrar a pré-imagem de um grafo KB_m de livre de triângulos visto como um problema sanduíche.

Uma forma de obter uma pré-imagem de um grafo $KB_m(K_3\text{-free})$ é tratar como um problema sanduíche, isto é, o problema de identificar um grafo de uma determinada classe entre um subgrafo e um supergrafo geradores dados como entrada. Esse problema é introduzido por Golumbic et al. (1995) como uma generalização do problema de caracterização. A Figura 6.1 descreve o diagrama da computação da pré-imagem de um grafo $KB_m(K_3\text{-free})$ como uma redução a um problema sanduíche. Se um grafo linha de um grafo livre de triângulos é encontrado, então computamos a pré-imagem L^{-1} de tal grafo e testamos se seu grafo KB_m é isomorfo ao grafo de entrada.

Grafos linha de livres de triângulos são exatamente os grafos livres do grafo diamante — Figura 6.2 (a) — e do grafo garra — Figura 6.2 (b) —, como descrito por Metelsky e Tyshkevich (2003). O trabalho de Dantas et al. (2011) sugere que o problema sanduíche possa ser resolvido

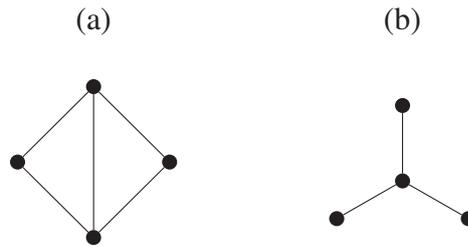


Figura 6.2: Grafo diamante (a) e grafo garra (b).

com complexidade de tempo polinomial para o caso do grafo intermediário ser livre de diamantes. Entretanto, o trabalho de Dantas et al. (2015) prova que é NP-completo decidir se existe um grafo intermediário livre de garras.

Vale lembrar que, no caso da computação da pré-imagem de um grafo $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$, o subgrafo e supergrafo geradores são construídos a partir de um grafo de entrada e tal restrição não é imposta pelo problema sanduíche. Também vale lembrar que a pré-imagem a ser encontrada é o grafo construído por um *poset* IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Neste capítulo, usamos as propriedades de tais *posets* para sugerir um algoritmo para a computação da pré-imagem do grafo KB_m de livre de triângulos. O algoritmo se baseia em decidir quais arestas do grafo linha da entrada inserir no grafo obtido pela subdivisão e quais não inserir, isto é, o conjunto de pares para a decisão da inserção.

Na Seção 6.1, apresentamos a Regra do Triângulo, Regra das Cliques, Regra do P_3 e a Regra do Diamante para a decisão de pares a serem inseridos. Derivamos tais regras a partir das propriedades de um *poset* IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.

Na Seção 6.2, sugerimos o algoritmo da computação da pré-imagem com descrições das funções que implementam cada uma das regras apresentadas na Seção 6.1 e a descrição da função da computação da pré-imagem do grafo linha do grafo intermediário computado. Tal computação também faz uso da existência da bijeção entre o emparelhamento perfeito e as bicliques maximais da pré-imagem retornada.

Na Seção 6.3, descrevemos alguns critérios de decisão dos pares para a inserção que não são cobertos pelas regras e cogitamos a influência da propriedade IIC do *poset* sobre o grafo de saída gerado.

Na Seção 6.4, descrevemos o uso do algoritmo para o reconhecimento dos grafos da classe $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$ e apresentamos exemplos de grafos rejeitados. Conjecturamos, então, que a família mínima de subgrafos proibidos pela classe dos grafos $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$ é composta pelos grafos proibidos pelos grafos de comparabilidade com exceção dos buracos ímpares.

6.1 REGRAS DO TRIÂNGULO, DAS CLIQUES, DO P_3 E DO DIAMANTE

Nesta seção, apresentamos a Regra do Triângulo, a Regra das Cliques, a Regra do P_3 e a Regra do Diamante. Tais regras descrevem as propriedades do grafo linha do grafo $G_{\mathcal{P}}$ — da Construção 5.2.1 —, construído sobre um *poset* \mathcal{P} IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, e são usadas como critério de construção do grafo linha da pré-imagem de um grafo $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$.

Considere o *poset* $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e o grafo construído $G_{\mathcal{P}}$. Para derivar as propriedades do grafo linha

$L(G_{\mathcal{P}})$ a partir das relações de comparabilidade do *poset* \mathcal{P} , fazemos uso da notação de disjunção iterada (\bigvee) para a seguinte simplificação:

$$\bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} (x' \preceq y') \iff (x \preceq y) \vee (x \preceq \pi(y)) \vee (\pi(x) \preceq y) \vee (\pi(x) \preceq \pi(y)),$$

onde e_x e e_y denotam, respectivamente, as arestas $\{x, \pi(x)\}$ e $\{y, \pi(y)\}$ do emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$, como descrito pela Definição 5.3.1. Para estender a notação descrita pela Definição 5.3.3 para os casos onde o grafo $G_{\mathcal{P}}$ pode ou não possuir uma aresta que intersecta tanto e_x quanto e_y , enunciamos a seguinte definição.

Definição 6.1.1. *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e x e y elementos de C . Denotamos que existe aresta que intersecta tanto e_x quanto e_y em $G_{\mathcal{P}}$ por $e_{xy} \in E(G_{\mathcal{P}})$ e que tal aresta não existe em $G_{\mathcal{P}}$ por $e_{xy} \notin E(G_{\mathcal{P}})$.*

Considere, portanto, a seguinte proposição.

Proposição 6.1.1. *Seja $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes. Para todo $x, y \in C$, vale que*

$$e_{xy} \in E(G_{\mathcal{P}}) \iff \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} (x' \preceq y')$$

Prova. \Rightarrow Para $x, y \in C$, temos que e_x e e_y são arestas de $G_{\mathcal{P}}$. Considere $c_x \in e_x \cap e_{xy}$ e $c_y \in e_y \cap e_{xy}$. Logo, temos que $\{c_x, c_y\}$ é aresta de $G_{\mathcal{P}}$ e, portanto, que $c_x \preceq \pi(c_y)$. Como $c_x, \pi(c_x) \in e_x$, $c_y, \pi(c_y) \in e_y$ e $c_y = \pi(\pi(c_y))$, vale que

$$e_{xy} \in E(G_{\mathcal{P}}) \implies \exists x' \in e_x \exists y' \in e_y (x' \preceq \pi(y')) \implies \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} (x' \preceq y').$$

\Leftarrow Se existem $x' \in e_x$ e $y' \in e_y$ tal que $x' \preceq y'$, temos que

$$(x \preceq y) \vee (x \preceq \pi(y)) \vee (\pi(x) \preceq y) \vee (\pi(x) \preceq \pi(y)).$$

Como o *poset* \mathcal{P} é autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, temos que apenas uma das precedências é válida. Portanto, que um dos pares $\{x, \pi(y)\}$, $\{x, y\}$, $\{\pi(x), \pi(y)\}$ ou $\{\pi(x), \pi(y)\}$ é aresta de $G_{\mathcal{P}}$. Como e_x e e_y são arestas de $G_{\mathcal{P}}$, temos que um dos pares que é aresta de $G_{\mathcal{P}}$ é a aresta e_{xy} . \square

Pelo Teorema 5.3.5, mostramos que o subgrafo de $L(G_{\mathcal{P}})$ induzido pelo conjunto $E(G_{\mathcal{P}}) \setminus \{e_x \mid \forall x \in C\}$ — correspondente às arestas que não são do emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$ — são subgrafos geradores do grafo linha $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$. Justificamos o motivo do subgrafo induzido de $L(G_{\mathcal{P}})$ não ser necessariamente isomorfo a $L(\text{KB}_m(G_{\mathcal{P}}))$ pela forma de que as arestas de $G_{\mathcal{P}}$ intersectam uma aresta do emparelhamento perfeito, sendo por uma intersecção pelo mesmo vértice ou por vértices distintos. A seguinte proposição descreve que a condição para intersecções pelo mesmo vértice são exatamente a em que tal vértice — elemento do *poset* — é ou antecessor ou sucessor em comum pela ordem \preceq de algum dos vértices das arestas do emparelhamento perfeito que compartilham tais arestas intersectantes. Pela notação de disjunção iterada, isso é descrito por um termo em comum ou antecede ou sucede simultaneamente outros dois termos, como destacamos no enunciado da proposição.

Proposição 6.1.2. *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \longrightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e e_{xy} e e_{xz} arestas de $G_{\mathcal{P}}$ com $x, y, z \in C$ distintos e não correspondentes. Vale que*

$$e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset \iff \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (\boxed{x'} \preceq y' \wedge \boxed{x'} \preceq z').$$

Prova. \Rightarrow) Considere $c_x \in e_x$, $c_y \in e_y$ e $c_z \in e_z$ tais que $c_x \in e_{xy}$, $c_y \in e_{xy}$ e $c_z \in e_{xz}$. Como $c_x \in e_x \cap e_{xy}$ e $e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset$, temos que $c_x \in e_{xy} \cap e_{xz}$ e, portanto, que $c_x \in e_{xz}$. Como $\{c_x, c_y\}$ é aresta de $G_{\mathcal{P}}$, temos que $c_x \preceq \pi(c_y)$. Da mesma forma, também temos que $c_x \preceq \pi(c_z)$. Como $c_x \in e_{xy} \cap e_{xz}$, temos que c_x é vértice de e_x e, portanto, que $\pi(c_y)$ é vértice de e_y e que $\pi(c_z)$ é vértice de e_z . Logo, temos que

$$e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset \implies \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z').$$

\Leftarrow) Considere $c_x \in e_x$, $c_y \in e_y$ e $c_z \in e_z$ tais que $c_x \preceq c_y$ e $c_x \preceq c_z$. Portanto, temos que $\{c_x, \pi(c_y)\}$ e $\{c_x, \pi(c_z)\}$ são arestas de $G_{\mathcal{P}}$. Como e_x , e_y e e_z são arestas de $G_{\mathcal{P}}$, temos que $\{c_x, \pi(c_y)\} = e_{xy}$ e que $\{c_x, \pi(c_z)\} = e_{xz}$ e, portanto, que $e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset$. \square

A seguinte proposição descreve a condição para que as intersecções envolvendo a aresta do emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$ não sejam pelo mesmo vértice, como no caso da Proposição 6.1.2. Caso intersecções por vértices distintos ocorram, então tal termo da disjunção iterada antecede um e sucede outro na ordem \preceq , como destacado no enunciado da proposição.

Proposição 6.1.3. *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \longrightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e e_{xy} e e_{xz} arestas de $G_{\mathcal{P}}$ com $x, y, z \in C$ distintos e não correspondentes. Vale que*

$$e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset \iff \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (\boxed{x'} \preceq y' \wedge z' \preceq \boxed{x'}).$$

Prova. Considere $c_x \in e_x$, $c_y \in e_y$ e $c_z \in e_z$ tais que $c_x \in e_{xy}$, $c_y \in e_{xy}$ e $c_z \in e_{xz}$. Como $e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset$, temos que $c_x \notin e_{xz}$ e, portanto, que $\pi(c_x) \in e_{xz}$. Logo, temos que $e_{xy} = \{c_x, c_y\}$ e que $e_{xz} = \{\pi(c_x), c_z\}$. Portanto, temos que $c_x \preceq \pi(c_y)$ e que $c_z \preceq c_x$. Logo, vale que

$$e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset \implies \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq x').$$

\Leftarrow) Considere $c_x \in e_x$, $c_y \in e_y$ e $c_z \in e_z$ tais que $c_x \preceq c_y$ e $c_z \preceq c_x$. Vale que $\{c_x, \pi(c_y)\}$ e que $\{c_z, \pi(c_x)\}$ são arestas de $G_{\mathcal{P}}$. Como $x, y, z \in C$, temos que e_x , e_y e e_z são arestas de $G_{\mathcal{P}}$ e, portanto, que $e_{xy} = \{c_x, \pi(c_y)\}$ e que $e_{xz} = \{c_z, \pi(c_x)\}$. Temos, então, que $e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset$. \square

O seguinte lema enuncia a relação entre três arestas do emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$ possuem arestas intersectantes entre si.

Lema 6.1.4. *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \longrightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} arestas de $G_{\mathcal{P}}$ com $x, y, z \in C$ distintos e não correspondentes. Vale que*

$$e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset \wedge e_{xy} \cap e_{yz} \neq \emptyset \implies e_{xz} \cap e_{yz} = \emptyset.$$

Prova. Pela Proposição 6.1.2, temos que

$$e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset \iff \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z').$$

Também temos que

$$e_{xy} \cap e_{yz} \neq \emptyset \iff \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (y' \preceq x' \wedge y' \preceq z').$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset \wedge e_{xy} \cap e_{yz} \neq \emptyset &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z') \wedge \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (y' \preceq x' \wedge y' \preceq z') &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z') \wedge \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq y') &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z' \wedge z' \preceq y') &\implies \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq z' \wedge z' \preceq y'). \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.1.3, temos que $e_{xz} \cap e_{yz} = \emptyset$. □

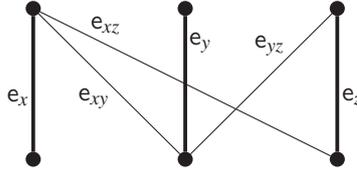


Figura 6.3: Três arestas de um emparelhamento perfeito e três arestas intersectantes ao emparelhamento em $G_{\mathcal{P}}$.

A Figura 6.3 ilustra o enunciado do Lema 6.1.4 com um emparelhamento perfeito de $G_{\mathcal{P}}$ com as arestas e_x , e_y e e_z e as arestas intersectantes às arestas do emparelhamento perfeito e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} . As arestas e_{xy} e e_{xz} intersectam o mesmo vértice de e_x e as arestas e_{xy} e e_{yz} intersectam o mesmo vértice de e_y . Como consequência, as arestas e_{xz} e e_{yz} intersectam vértices distintos de e_z .

Podemos, portanto, enunciar o teorema correspondente à Regra do Triângulo.

Teorema 6.1.5 (Regra do Triângulo). *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} arestas de $G_{\mathcal{P}}$ com $x, y, z \in C$ distintos e não correspondentes. Vale que exatamente uma das intersecções duas-a-duas entre e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} é vazia.*

Prova. Pelo Lema 6.1.4, temos que pelo menos uma das intersecções duas-a-duas entre e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} é vazia. Suponha, sem perda de generalidade, que $e_{xy} \cap e_{xz} = e_{xy} \cap e_{yz} = \emptyset$. Pela Proposição 6.1.3, temos que

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq x') \wedge \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (y' \preceq x' \wedge z' \preceq y') \iff \\ & \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq x') \wedge \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge y' \preceq z') \iff \\ & \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge y' \preceq z' \wedge z' \preceq x') \implies \\ & \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' = y' = z'). \end{aligned}$$

Como $x \in e_x$, $y \in e_y$ e $z \in e_z$ são distintos e não correspondentes, temos que apenas uma das intersecções duas-a-duas entre e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} é vazia. \square

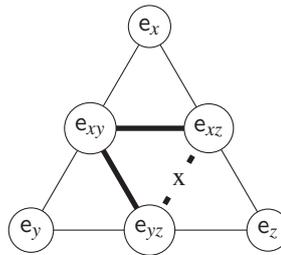


Figura 6.4: Regra do Triângulo.

A Figura 6.4 descreve o grafo linha $L(G_{\mathcal{P}})$ onde $G_{\mathcal{P}}$ possui o emparelhamento perfeito com as arestas e_x , e_y e e_z e as arestas intersectantes às arestas do emparelhamento perfeito e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} . Como resultado do Teorema 6.1.5, temos que existe exatamente duas arestas entre os vértices e_{xy} , e_{xz} e e_{yz} em $L(G_{\mathcal{P}})$, representadas em destaque na figura. A linha tracejada com o rótulo “x” em destaque representa o par que deve ser decidido a não inserção pelo algoritmo. No grafo $KB_m(G_{\mathcal{P}})$, seus vértices B_x , B_y e B_z — descritos pela Definição 5.3.2 — formam um triângulo, o que dá o nome de *Regra do Triângulo* ao teorema.

Enunciamos o seguinte teorema correspondente à Regra das Cliques.

Teorema 6.1.6 (Regra das Cliques). *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e e_{xy} , e_{xz} e e_{xw} arestas de $G_{\mathcal{P}}$ com $x, y, z, w \in C$ distintos e não correspondentes. Vale que*

$$|e_{xy} \cap e_{xz}| = |e_{xy} \cap e_{xw}| \iff e_{xz} \cap e_{xw} \neq \emptyset.$$

Prova. Como $G_{\mathcal{P}}$ é livre de triângulos, temos que cada intersecção $e_{xy} \cap e_{xz}$ e $e_{xy} \cap e_{xw}$ pode ser vazia ou possui um elemento. Logo, temos que $|e_{xy} \cap e_{xz}|, |e_{xy} \cap e_{xw}| \in \{0, 1\}$.

Considere que $e_{xy} \cap e_{xz} = e_{xy} \cap e_{xw} = \emptyset$. Pela Proposição 6.1.3, temos que

$$\begin{aligned} e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset \wedge e_{xy} \cap e_{xw} = \emptyset &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq x') \wedge \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq y' \wedge w' \preceq x') &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq x' \wedge w' \preceq x') &\implies \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{z' \in e_z} \bigvee_{w' \in e_w} (z' \preceq x' \wedge w' \preceq x') &\iff \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{z' \in e_z} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq z' \wedge x' \preceq w'). \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.1.2, temos que $e_{xz} \cap e_{xw} \neq \emptyset$

Considere que $e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset$ e que $e_{xy} \cap e_{xw} \neq \emptyset$. Pela Proposição 6.1.2, temos que

$$\begin{aligned} e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset \wedge e_{xy} \cap e_{xw} \neq \emptyset &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z') \wedge \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq w') &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z' \wedge x' \preceq w') &\implies \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{z' \in e_z} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq z' \wedge x' \preceq w'). \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.1.2, temos que $e_{xz} \cap e_{xw} \neq \emptyset$. Portanto, temos que

$$|e_{xy} \cap e_{xz}| = |e_{xy} \cap e_{xw}| \implies e_{xz} \cap e_{xw} \neq \emptyset.$$

Considere, sem perda de generalidade, que $e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset$ e que $e_{xy} \cap e_{xw} = \emptyset$. Pelas Proposições 6.1.2 e 6.1.3, temos que

$$\begin{aligned} e_{xy} \cap e_{xz} \neq \emptyset \wedge e_{xy} \cap e_{xw} = \emptyset &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z') \wedge \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq y' \wedge w' \preceq x') &\iff \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq y' \wedge x' \preceq z' \wedge w' \preceq x') &\implies \\ \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{z' \in e_z} \bigvee_{w' \in e_w} (x' \preceq z' \wedge w' \preceq x'). \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.1.3, temos que $e_{xz} \cap e_{xw} = \emptyset$. Portanto, temos que

$$|e_{xy} \cap e_{xz}| = |e_{xy} \cap e_{xw}| \iff e_{xz} \cap e_{xw} \neq \emptyset.$$

□

A Figura 6.5 descreve cada um dos casos de adjacências de e_x no grafo $L(G_{\mathcal{P}})$ para um grafo $G_{\mathcal{P}}$ com as arestas do emparelhamento perfeito e_x , e_y , e_z e e_w e as arestas intersectantes às arestas do emparelhamento perfeito e_{xy} , e_{xz} e e_{xw} . Para cada caso, a linha cheia em destaque descreve a aresta que pode ser inferida a partir das adjacências de e_{xy} em $L(G_{\mathcal{P}})$ e a linha tracejada em destaque com o rótulo “X” descreve o par que não pode compartilhar uma aresta em $L(G_{\mathcal{P}})$ de acordo com o Teorema 6.1.6. No caso (a), as arestas e_{xy} não intersecta o mesmo vértice em e_x

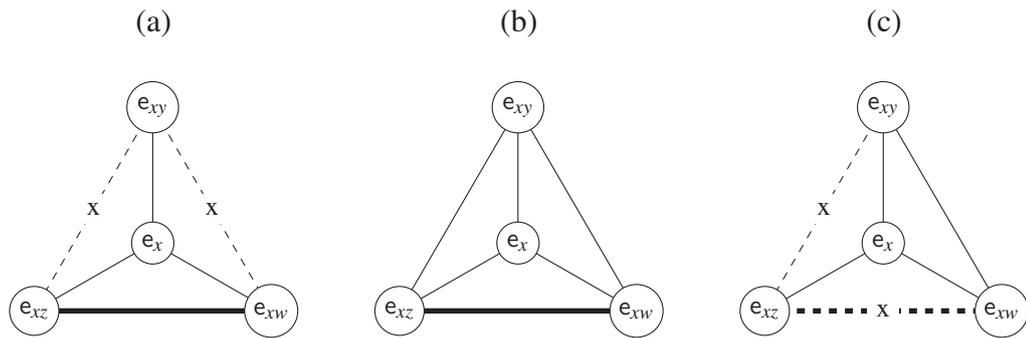


Figura 6.5: Regra das Cliques.

que as arestas e_{xz} e e_{xw} e, portanto, vale que e_{xz} e e_{xw} são intersectantes. No caso (b), a aresta e_{xy} intersecta o mesmo vértice em e_x que as arestas e_{xz} e e_{xw} , implicando que as duas arestas também são intersectantes entre si. No caso (c), a aresta e_{xy} intersecta apenas o mesmo vértice em e_x que e_{xw} , o que leva e_{xz} intersectar um vértice distinto que e_{xw} intersecta.

O teorema recebe o nome de *Regra das Cliques* pela propriedade da vizinhança de e_x — aceitar uma bipartição relaxada onde cada parte induz uma clique em $G_{\mathcal{P}}$.

Teorema 6.1.7 (Regra do P_3). *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e e_{xy} e e_{yz} arestas de $G_{\mathcal{P}}$ com $x, y, z \in C$. Se nenhuma aresta de $G_{\mathcal{P}}$ intersecta tanto e_x quanto e_z , então e_{xy} e e_{yz} são intersectantes.*

Prova. Pela Proposição 6.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
 e_{xy}, e_{yz} \in E(G_{\mathcal{P}}) \wedge e_{xz} \notin E(G_{\mathcal{P}}) &\iff \\
 \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} (x' \preceq y') \wedge \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (y' \preceq z') \wedge \neg \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq z') &\iff \\
 \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} (x' \preceq y') \wedge \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (y' \preceq z') \wedge \bigwedge_{x' \in e_x} \bigwedge_{z' \in e_z} (x' \not\preceq z'). &
 \end{aligned}$$

Pela propriedade distributiva da conjunção sobre a disjunção, temos que

$$\begin{aligned}
 \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} (x' \preceq y') \wedge \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (y' \preceq z') \wedge \bigwedge_{x' \in e_x} \bigwedge_{z' \in e_z} (x' \not\preceq z') &\iff \\
 \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{y'' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge y'' \preceq z') \wedge \bigwedge_{x' \in e_x} \bigwedge_{z' \in e_z} (x' \not\preceq z') &\iff \\
 \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{y'' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} \left(x' \preceq y' \wedge y'' \preceq z' \wedge \bigwedge_{x'' \in e_x} \bigwedge_{z'' \in e_z} (x'' \not\preceq z'') \right). &
 \end{aligned}$$

Vale notar que $y' = y''$ implica que $x' \preceq z'$, levando a uma contradição. Logo, temos que $y'' \in e_y \setminus \{y'\}$, isto é, que $y'' = \pi(y')$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{y'' \in e_y, z' \in e_z} \left(x' \preceq y' \wedge y'' \preceq z' \wedge \bigwedge_{x'' \in e_x} \bigwedge_{z'' \in e_z} (x'' \not\preceq z'') \right) \iff \\ & \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} \left(x' \preceq y' \wedge \pi(y') \preceq z' \wedge \bigwedge_{x'' \in e_x} \bigwedge_{z'' \in e_z} (x'' \not\preceq z'') \right) \implies \\ & \bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq y'). \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.1.2, temos que

$$\bigvee_{x' \in e_x} \bigvee_{y' \in e_y} \bigvee_{z' \in e_z} (x' \preceq y' \wedge z' \preceq y') \iff e_{xy} \cap e_{yz} \neq \emptyset.$$

Portanto, vale que

$$e_{xy}, e_{yz} \in E(G_{\mathcal{P}}) \wedge e_{xz} \notin E(G_{\mathcal{P}}) \implies e_{xy} \cap e_{yz} \neq \emptyset.$$

□

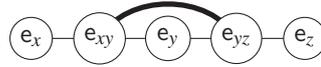


Figura 6.6: Regra do P_3 .

A Figura 6.6 descreve o grafo linha $L(G_{\mathcal{P}})$ onde $G_{\mathcal{P}}$ possui o emparelhamento perfeito formado pelas arestas e_x , e_y e e_z e as arestas e_{xy} e e_{yz} que intersectam as arestas do emparelhamento perfeito. Como nenhuma aresta de $G_{\mathcal{P}}$ intersecta tanto e_x quanto e_z , vale — pelo Teorema 6.1.7 — que e_{xy} e e_{yz} intersectam o mesmo vértice em e_y e, portanto, que são adjacentes em $L(G_{\mathcal{P}})$. No grafo $KB_m(G_{\mathcal{P}})$, o conjunto $\{B_x, B_y, B_z\}$ induz um P_3 , o que leva ao nome *Regra do P_3* .

Considere, portanto, o enunciado da Regra do Diamante.

Teorema 6.1.8 (Regra do Diamante). *Sejam $\mathcal{P} = (C, \preceq)$ um poset IIC autotransposto sobre $\pi : C \rightarrow C$ livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e e_{xy} , e_{xz} , e_{wy} , e_{wz} e e_{yz} arestas de $G_{\mathcal{P}}$ com $x, y, z, w \in C$. Se nenhuma aresta de $G_{\mathcal{P}}$ intersecta tanto e_x quanto e_w , então vale que*

$$e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset \iff e_{wy} \cap e_{wz} = \emptyset.$$

Prova. Pelo Teorema 6.1.7, temos que

$$e_{xy}, e_{wy}, e_{xz}, e_{wz} \in E(G_{\mathcal{P}}) \wedge e_{xw} \notin E(G_{\mathcal{P}}) \implies e_{xy} \cap e_{wy} \neq \emptyset \wedge e_{xz} \cap e_{wz} \neq \emptyset.$$

Suponha que $e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset$. Pelo Teorema 6.1.5, temos que $e_{xy} \cap e_{yz} \neq \emptyset$ e que $e_{xz} \cap e_{yz} \neq \emptyset$. Pelo Teorema 6.1.6, temos que $e_{yz} \cap e_{wy} \neq \emptyset$ e que $e_{yz} \cap e_{wz} \neq \emptyset$. Pelo Teorema 6.1.5, temos que $e_{wy} \cap e_{wz} = \emptyset$. Logo, se $e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset$, então $e_{wy} \cap e_{wz} = \emptyset$.

De maneira análoga, se $e_{wy} \cap e_{wz} = \emptyset$, então $e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset$. Portanto, temos que

$$e_{xy} \cap e_{xz} = \emptyset \iff e_{wy} \cap e_{wz} = \emptyset.$$

□

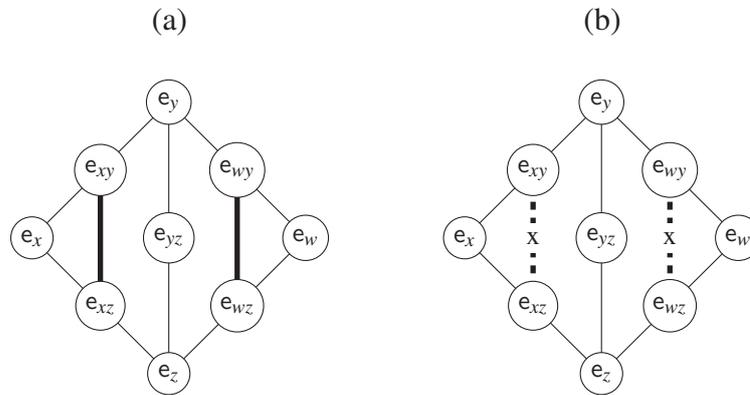


Figura 6.7: Regra do Diamante.

A Figura 6.7 descreve os possíveis casos de adjacências no grafo $L(G_{\mathcal{P}})$, onde o grafo $G_{\mathcal{P}}$ possui o emparelhamento perfeito com as arestas e_x , e_y , e_z e e_w e as arestas e_{xy} , e_{xz} , e_{wy} , e_{wz} e e_{yz} . Pelo Teorema 6.1.8, vale que as arestas e_{xy} e e_{xz} intersectam um mesmo vértice em e_x se, e somente se, as arestas e_{wy} e e_{wz} intersectam um mesmo vértice em e_w . As linhas cheias em destaque descrevem o caso onde as adjacências que ocorrem simultaneamente em $L(G_{\mathcal{P}})$ (a) e as linhas tracejadas em destaque com o rótulo “X” descrevem o caso onde as não-adjacências que ocorrem simultaneamente em $L(G_{\mathcal{P}})$ (b). No grafo $KB_m(G_{\mathcal{P}})$, o conjunto $\{B_x, B_y, B_z, B_w\}$ induz um grafo diamante, o que dá o nome de *Regra do Diamante* ao teorema.

6.2 ALGORITMO DA PRÉ-IMAGEM

Nesta seção, sugerimos um algoritmo para a computação da pré-imagem do grafo KB_m do grafo livre de triângulos a partir das regras que derivamos durante a Seção 6.1. Pelas regras, inferimos quais arestas do grafo linha inserir na subdivisão do grafo de entrada e quais não inserir. Iteramos pelas regras até que todos os pares — as arestas do grafo linha do grafo de entrada — sejam decididos ou até não ser mais possível inferir pelas regras quais pares inserir e quais não inserir. Exemplos de implementações das regras e do algoritmo está disponível no Apêndice A.

Com exceção da Regra do P_3 , as regras decidem a inserção ou não-inserção de arestas de maneira condicional, dependendo de decisões de inserção ou não-inserção anteriores. A Regra do P_3 decide apenas por inserção de arestas entre todos os pares de vértices da subdivisão cujas arestas do grafo de entrada formam um P_3 , o que permite que a Regra do P_3 seja aplicada logo após a etapa de subdivisão. A partir das inserções decididas pela Regra do P_3 , as demais regras propagam suas respectivas decisões de forma iterada.

Caso o algoritmo complete uma iteração sem decidir inserir ou não-inserir uma aresta do grafo linha, escolhemos uma aresta ainda não decidida para inserção e testamos pelas regras se o grafo resultante é consistente. Se não for, decidimos pela não-inserção da aresta através de uma estratégia de *backtracking*, o que implica a complexidade exponencial sobre o número de arestas que não são possíveis decidir por inserção ou não-inserção. O critério dessa escolha é

discutido mais a fundo na Seção 6.3 assim como uma motivação para usar uma estratégia gulosa em vez do *backtracking*.

Como a subdivisão do grafo de entrada é um passo do algoritmo, assumimos que o conjunto de vértices do grafo de entrada é disjunto ao seu conjunto de arestas, visto que a subdivisão retorna um grafo que possui a aresta subdividida como um de seus vértices. Com essa consideração feita, apresentamos o seguinte algoritmo que adota a estratégia por *backtracking*.

Algoritmo 1: Computação da pré-imagem do grafo KB_m de livre de triângulos.

Entrada : Grafo $G \in KB_m(K_3\text{-free})$.
Saída : Grafo $H \in KB_m^{-1}(G) \cap K_3\text{-free}$.

```

1: função PREKBM_REC ( $H, P, V$ ) :
2:   faça
3:      $n \leftarrow |P|$ 
4:      $(H, P) \leftarrow \text{regra\_cliques}(H, P, V)$ 
5:      $(H, P) \leftarrow \text{regra\_triângulo}(H, P, V)$ 
6:      $(H, P) \leftarrow \text{regra\_diamante}(H, P, V)$ 
7:     se  $H = \emptyset$  então
8:       retorna  $(\emptyset, P, V)$ 
9:     fim
10:    se  $|P| = n$  então
11:       $e \leftarrow \text{escolha}(P)$ 
12:       $P \leftarrow P \setminus \{e\}$ 
13:       $H' \leftarrow H$ 
14:       $E(H') \leftarrow E(H') \cup \{e\}$ 
15:       $(H', P) \leftarrow \text{PREKBM\_REC}(H', P, V)$ 
16:      se  $H' = \emptyset$  então
17:         $H' \leftarrow H$ 
18:         $(H', P) \leftarrow \text{PREKBM\_REC}(H', P, V)$ 
19:      fim
20:       $H \leftarrow H'$ 
21:    fim
22:  enquanto  $|P| > 0$ 
23:  retorna  $(H, P, V)$ 
24: fim
25:  $H \leftarrow \text{subdivida}(G)$ 
26:  $(H, P) \leftarrow \text{regra\_p3}(H, E(L(G)), V(G))$ 
27:  $(H, P, V) \leftarrow \text{PREKBM\_REC}(H, P, V(G))$ 
28:  $H \leftarrow \text{pré\_linha}(H, V(G))$ 
29: retorna  $H$ 

```

O algoritmo, como apresentado, tem como entrada um grafo G da classe dos grafos de bicliques mutuamente inclusas de livres de triângulos e propõe-se a retornar um grafo H tal que o grafo $KB_m(H)$ seja isomorfo a G .

Vale destacar que a função PREKBM_REC encapsula o processo recursivo descrito pelo algoritmo e possui como parâmetros um grafo intermediário H — iniciado como o grafo retornado pela subdivisão de todas as arestas de G —, o conjunto de pares a serem decididos $P \subseteq E(L(G))$ e o conjunto de vértices $V = V(G)$ — correspondente às bicliques maximais e ao emparelhamento perfeito do grafo de saída. Através da chamada recursiva de PREKBM_REC, nos permitimos tomar a decisão de algum par $e \in P$ que não está sob influência das regras usando

um grafo H' como cópia de H com o par e inserido como aresta de H' . Caso a escolha feita a e leve a uma rejeição — que é detectada pelas regras quando essas retornam \emptyset como resultado —, a cópia H' é descartada e usamos outra cópia H' de H onde o par e não é inserido em H' .

Após todos os pares serem decididos — isto é, quando a primeira chamada de PREKBM_REC retorna —, computamos a pré-imagem do grafo linha do grafo construído. A pré-imagem do grafo linha é, então, retornada pelo algoritmo.

A seguir, definimos e descrevemos as funções usadas pelo algoritmo.

- $\text{subdivida}(G)$: Retorna o grafo obtido pela subdivisão de todas as arestas de G , isto é, um grafo H com o conjunto de vértices $V(H) = V(G) \cup E(G)$ e o conjunto de arestas $E(H) = \{\{v, e\} \mid \forall v \in V(G), \forall e \in E(G) \text{ onde } v \in e\}$. O Programa A.1 implementa uma variação da função subdivida .
- $\text{regra_p3}(G, P, V)$: Aplica a Regra do P_3 (Teorema 6.1.7), retornando um grafo H obtido a partir do grafo G após a inserção de pares não-ordenados $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\} \in P$ como arestas em H para todos os trios de elementos distintos v_1, v_2 e v_3 de V onde $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_2, v_3\}$ são vértices de G e $\{v_1, v_3\}$ não é vértice de G . Retorna também o conjunto P com a remoção de todos os pares inseridos como arestas em H . O Programa A.2 implementa uma variação da função regra_p3 .

Algoritmo 2: Aplicação da Regra do P_3 .

```

1: função regra_p3 (G, P, V) :
2:   H ← G
3:   para  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$  faça
4:     se  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \in E(G)$  e  $\{v_1, v_3\} \notin E(G)$  então
5:       e ←  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$ 
6:       E(H) ← E(H)  $\cup$  {e}
7:       P ← P \ {e}
8:     fim
9:   fim
10:  retorna (H, P, V)
11: fim

```

- $\text{regra_cliques}(G, P, V)$: Aplica a Regra das Cliques (Teorema 6.1.6), retornando um grafo H obtido a partir do grafo G após inserções (se necessárias) de arestas entre cada trio distinto de vértices vizinhos u_1, u_2 e u_3 de todo vértice $v \in V$. Se os pares não-ordenados $\{u_1, u_2\}$ e $\{u_1, u_3\}$ foram decididos (não pertencem a P) e o par $\{u_2, u_3\}$ não foi decidido (pertence a P), então $\{u_2, u_3\}$ é removido de P e, se ambos $\{u_1, u_2\}$ e $\{u_1, u_3\}$ são simultaneamente arestas de H ou não são simultaneamente arestas de H , o par $\{u_2, u_3\}$ é inserido em H como aresta. Nos casos onde há conflito com a Regra das Cliques, onde $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\} \notin P$ e $\{u_1, u_2, u_3\}$ induz um P_3 ou um $\overline{K_3}$, então a função retorna \emptyset como grafo de saída. O Programa A.3 implementa uma variação da função regra_cliques .

Algoritmo 3: Aplicação da Regra das Cliques.

```

1: função regra_cliques ( $G, P, V$ ):
2:   se  $G = \emptyset$  então
3:     | retorna ( $\emptyset, P, V$ )
4:   fim
5:    $H \leftarrow G$ 
6:   para  $\forall v, v_1, v_2, v_3 \in V$  onde  $\{v, v_i\} \in V(H)$  para todo  $i \in [1..3]$  faça
7:     |  $u_1 \leftarrow \{v, v_1\}$ 
8:     |  $u_2 \leftarrow \{v, v_2\}$ 
9:     |  $u_3 \leftarrow \{v, v_3\}$ 
10:    | se  $\{u_2, u_3\} \in P$  e  $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\} \notin P$  então
11:    | | se  $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\} \in E(H)$  ou  $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\} \notin E(H)$ 
12:    | | | então
13:    | | | |  $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{\{u_2, u_3\}\}$ 
14:    | | | fim
15:    | |  $P \leftarrow P \setminus \{\{u_2, u_3\}\}$ 
16:    | | senão se  $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\} \notin P$  então
17:    | | | se  $\{u_1, u_2, u_3\}$  induz  $P_3$  ou  $\bar{K}_3$  em  $H$  então
18:    | | | | retorna ( $\emptyset, P, V$ )
19:    | | | fim
20:    | | fim
21:    | fim
22:  retorna ( $H, P, V$ )

```

- `regra_triângulo(G, P, V)`: Aplica a Regra do Triângulo (Teorema 6.1.5), retornando um grafo H obtido a partir de G após as inserções (se necessárias) de arestas entre os vértices $u_1 = \{v_1, v_2\}$, $u_2 = \{v_1, v_3\}$ e $u_3 = \{v_2, v_3\}$ de G para todo trio de vértices $v_1, v_2, v_3 \in V$ que admitem a existência de tais u_1, u_2 e u_3 . Se os pares $\{u_1, u_2\}$ e $\{u_1, u_3\}$ foram decididos (não pertencem a P) e o par $\{u_2, u_3\}$ não foi decidido (pertence a P), então o par $\{u_2, u_3\}$ é inserido como aresta em H se apenas um dos pares dos $\{u_1, u_2\}$ e $\{u_1, u_3\}$ é aresta de H . O par $\{u_2, u_3\}$ é, então, removido de P . Caso haja conflito com a Regra do Triângulo, onde $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\} \notin P$ e $\{u_1, u_2, u_3\}$ induz um \bar{P}_3 ou um K_3 , então a função retorna \emptyset como grafo de saída. O Programa A.4 implementa uma variação da função `regra_triângulo`.

Algoritmo 4: Aplicação da Regra do Triângulo.

```

1: função regra_triângulo ( $G, P, V$ ) :
2:   se  $G = \emptyset$  então
3:     | retorna ( $\emptyset, P, V$ )
4:   fim
5:    $H \leftarrow G$ 
6:   para  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$  onde  $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \in V(H)$  faça
7:     |  $u_1 \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
8:     |  $u_2 \leftarrow \{v_1, v_3\}$ 
9:     |  $u_3 \leftarrow \{v_2, v_3\}$ 
10:    se  $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\} \notin P$  e  $\{u_2, u_3\} \in P$  então
11:      | se  $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\} \notin E(H)$  então
12:        | | retorna ( $\emptyset, P, V$ )
13:      | senão se  $\{u_1, u_2\} \notin E(H)$  ou  $\{u_1, u_3\} \notin E(H)$  então
14:        | |  $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{\{u_2, u_3\}\}$ 
15:      | fim
16:      |  $P \leftarrow P \setminus \{\{u_2, u_3\}\}$ 
17:    senão se  $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\} \notin P$  então
18:      | se  $\{u_1, u_2, u_3\}$  induz  $\overline{P_3}$  ou  $K_3$  em  $H$  então
19:        | | retorna ( $\emptyset, P, V$ )
20:      | fim
21:    fim
22:  fim
23:  retorna ( $H, P, V$ )
24: fim

```

- `regra_diamante (G, P, V)` : Aplica a Regra do Diamante (Teorema 6.1.8), retornando um grafo H obtido a partir do grafo G após a inserção (se necessária) da aresta entre os vértices $w_1 = \{v_4, v_2\}$ e $w_2 = \{v_4, v_3\}$ de G para todo quarteto de vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 onde $u_1 = \{v_1, v_2\}$, $u_2 = \{v_1, v_3\}$, w_1 e w_2 são vértices de G e o par não-ordenado $\{v_1, v_4\}$ não é vértice de G . Se $\{u_1, u_2\}$ foi decidido (não pertence a P) e $\{w_1, w_2\}$ não foi decidido (pertence a P), então o par $\{w_1, w_2\}$ é removido de P e — se $\{u_1, u_2\}$ é aresta de H — inserido em H como aresta. Caso haja conflito com a Regra do Diamante, onde ambos os pares $\{u_1, u_2\}$ e $\{w_1, w_2\}$ foram decididos e apenas um deles é aresta de H , então a função retorna \emptyset como grafo de saída.

Algoritmo 5: Aplicação da Regra do Diamante.

```

1: função regra_diamante ( $G, P, V$ ):
2:   se  $G = \emptyset$  então
3:     | retorna ( $\emptyset, P, V$ )
4:   fim
5:    $H \leftarrow G$ 
6:   para  $\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$  onde
7:      $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_2\}, \{v_4, v_3\} \in V(H)$  e  $\{v_1, v_4\} \notin V(H)$  faça
8:     |  $u_1 \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
9:     |  $u_2 \leftarrow \{v_1, v_3\}$ 
10:    |  $w_1 \leftarrow \{v_4, v_2\}$ 
11:    |  $w_2 \leftarrow \{v_4, v_3\}$ 
12:    | se  $\{u_1, u_2\} \notin P$  e  $\{w_1, w_2\} \in P$  então
13:      | se  $\{u_1, u_2\} \in E(H)$  então
14:        |  $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{\{w_1, w_2\}\}$ 
15:      | fim
16:      |  $P \leftarrow P \setminus \{\{w_1, w_2\}\}$ 
17:    | senão se  $\{u_1, u_2\}, \{w_1, w_2\} \notin P$  então
18:      | se  $\{u_1, u_2\} \in E(H) \neq \{w_1, w_2\} \in E(H)$  então
19:        | retorna ( $\emptyset, P, V$ )
20:      | fim
21:    | fim
22:  | fim
23:  retorna ( $\emptyset, P, V$ )

```

- $escolha(P)$: Retorna um par de P para ser decidido. Discutimos o critério de escolha na Seção 6.3. Para a apresentação do Algoritmo 1, assumimos que a função retorna um par qualquer.
- $pré_linha(G, V)$: Retorna um grafo H tal que $L(H)$ é isomorfo a G . A função inicia um grafo H com o conjunto de vértices $V(H) = \{0_v, 1_v \mid \forall v \in V\}$ — onde 0_v e 1_v são vértices distintos entre si e para todo $v \in V$ — e o conjunto de arestas $E(H) = \{\{0_v, 1_v\} \mid \forall v \in V\}$, formando um emparelhamento perfeito em H . Um vetor associativo $t : V \rightarrow V(G) \setminus V$ é, então, iniciado associando o valor \emptyset para cada $v \in V$. O vetor associativo t associa um vértice v de V a um vértice u da vizinhança $N_G(v)$. Como a vizinhança $N_G(v)$ admite bipartição relaxada onde cada parte induz uma clique em G (Teorema 6.1.6), vale que o vetor associativo t associa v a uma das partes da bipartição de $N_G(v)$, onde as arestas de $L^{-1}(G)$ correspondentes compartilham um mesmo vértice. Para todo $u = \{v_1, v_2\} \in V(G) \setminus V$, os valores de $t[v_1]$ e $t[v_2]$ — após de terem, respectivamente, um vizinho de v_1 e um vizinho de v_2 atribuídos — são testados por igualdade ou adjacência a u — isto é, testados se pertencem a mesma parte que u nas bipartições de $N_G(v_1)$ e de $N_G(v_2)$ que induzem cliques em G — e um par de vértices — um vértice de $\{0_{v_1}, 1_{v_1}\}$ e outro de $\{0_{v_2}, 1_{v_2}\}$ — é escolhido de acordo para ser a aresta de $L^{-1}(G)$ correspondente a u . O Programa A.5 implementa uma variação da função $pré_linha$.

Algoritmo 6: Computação da pré-imagem do grafo linha.

```

1: função pré_linha ( $G, V$ ) :
2:    $H \leftarrow (\{0_v, 1_v \mid \forall v \in V\}, \{\{0_v, 1_v\} \mid \forall v \in V\})$ 
3:   para  $\forall v \in V$  faça
4:      $t[v] \leftarrow \emptyset$ 
5:   fim
6:   para  $\forall \{v_1, v_2\} \in V(G) \setminus V$  faça
7:      $u \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
8:     se  $t[v_1] = \emptyset$  então
9:        $t[v_1] \leftarrow u$ 
10:    fim
11:    se  $t[v_2] = \emptyset$  então
12:       $t[v_2] \leftarrow u$ 
13:    fim
14:    se  $t[v_1] = u$  ou  $\{t[v_1], u\} \in E(G)$  então
15:      se  $t[v_2] = u$  ou  $\{t[v_2], u\} \in E(G)$  então
16:         $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{\{0_{v_1}, 0_{v_2}\}\}$ 
17:      senão
18:         $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{\{0_{v_1}, 1_{v_2}\}\}$ 
19:      fim
20:    senão
21:      se  $t[v_2] = u$  ou  $\{t[v_2], u\} \in E(G)$  então
22:         $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{\{1_{v_1}, 0_{v_2}\}\}$ 
23:      senão
24:         $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{\{1_{v_1}, 1_{v_2}\}\}$ 
25:      fim
26:    fim
27:  fim
28:  retorna  $H$ 
29: fim

```

A seguir, apresentamos um exemplo de execução do Algoritmo 1 sobre o grafo de entrada G que possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e as arestas $u_{1,2} = \{1, 2\}$, $u_{1,5} = \{1, 5\}$, $u_{2,4} = \{2, 4\}$, $u_{2,5} = \{2, 5\}$, $u_{2,6} = \{2, 6\}$, $u_{3,4} = \{3, 4\}$, $u_{3,5} = \{3, 5\}$, $u_{3,6} = \{3, 6\}$, $u_{3,7} = \{3, 7\}$, $u_{4,6} = \{4, 6\}$, $u_{4,7} = \{4, 7\}$ e $u_{5,6} = \{5, 6\}$.

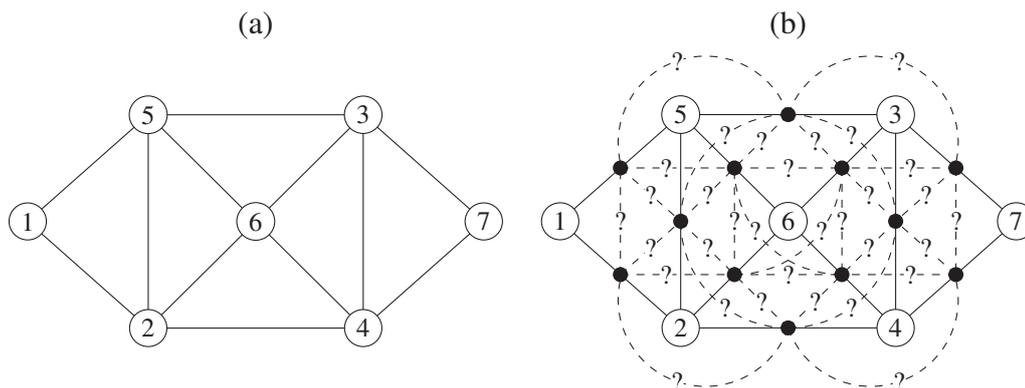


Figura 6.8: Grafo de entrada (a) e pares não decididos (b).

O grafo de entrada G é descrito pela Figura 6.8 (a). Um grafo, que denotamos por H_1 neste exemplo, é obtido pela subdivisão de todas as arestas de G ; a variável P de pares não decididos é iniciada com o conjunto de arestas do grafo linha de G ; e o conjunto de vértices de G é atribuído à variável V . A Figura 6.8 (b) descreve o grafo H_1 — formado pelos vértices em V (rotulados), pelos vértices obtidos pela subdivisão de G (não rotulados) e as arestas obtidas pela subdivisão (não tracejadas) — e os pares não decididos (em tracejado com o rótulo “?”).

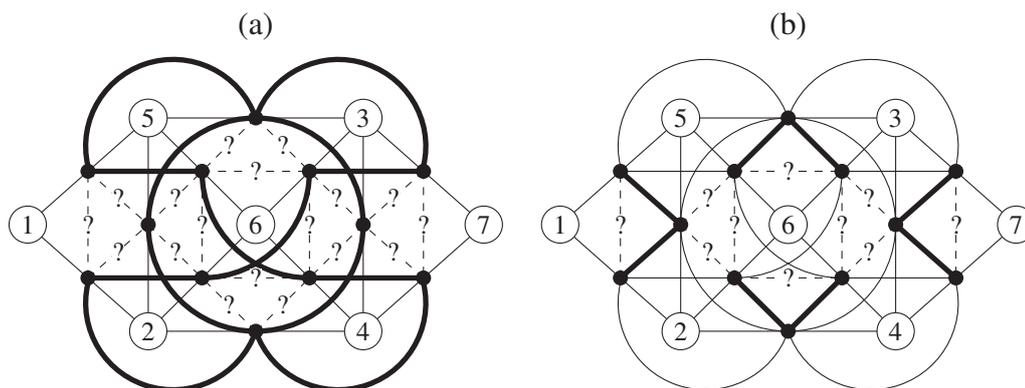


Figura 6.9: Regra do P_3 (a) e Regra das Cliques (b).

Obtemos o grafo H_2 pela aplicação da Regra do P_3 sobre o grafo H_1 , descrito pela Figura 6.9 (a). O grafo H_2 é o grafo retornado pela função descrita pelo Algoritmo 2, obtido pela inserção de pares de P que satisfazem as condições para a aplicação da regra. Para todo P_3 induzido em G , os vértices obtidos pela subdivisão das arestas de G presentes no P_3 induzido são adjacentes entre si em H_2 . Tais arestas são, então, removidas da variável P e representadas em destaque na figura. Um exemplo de uma das arestas é o par $\{u_{1,5}, u_{3,5}\}$, onde $\{1, 3, 5\}$ induz um P_3 em G .

O grafo H_3 obtido pela aplicação da Regra das Cliques sobre o grafo H_2 é descrito pela Figura 6.9 (b). Tal grafo é retornado pela função descrita pelo Algoritmo 3. Tomamos, como exemplo, o par $\{u_{3,5}, u_{3,6}\}$. Como $\{u_{1,5}, u_{3,5}\}$ e $\{u_{1,5}, u_{5,6}\}$ são arestas de H_2 e a vizinhança $N_{H_3}(5)$ precisa admitir uma bipartição relaxada onde cada parte induz uma clique, temos que o par $\{u_{3,5}, u_{3,6}\}$ precisa ser aresta de H_3 . Arestas inseridas são representadas em destaque na figura e removidas da variável P . Neste exemplo, nenhum par de P é decidido não pertencer a $E(H_3)$ pela aplicação da regra.

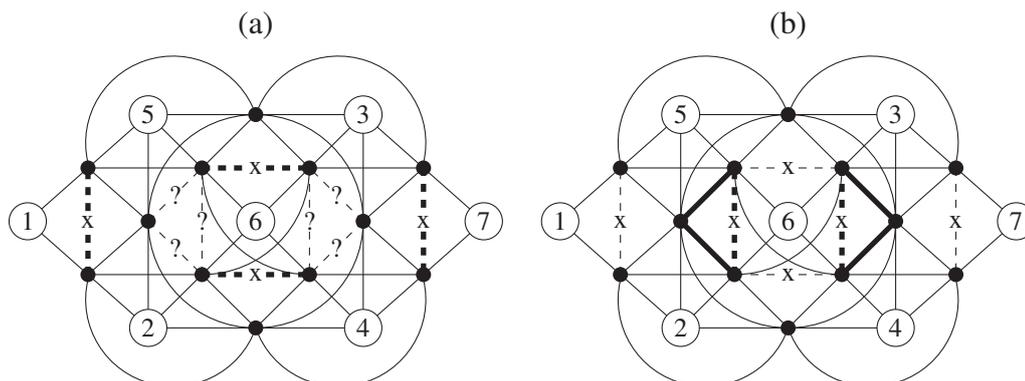


Figura 6.10: Regra do Triângulo (a) e Regra do Diamante (b).

A Figura 6.10 (a) descreve o grafo H_4 obtido pela aplicação da Regra do Triângulo, descrita pelo Algoritmo 4, sobre o grafo H_3 . Para todo triângulo induzido de G , é necessário que os pares formados pelos vértices obtidos pela subdivisão das arestas no triângulo formem duas arestas em H_4 e que o terceiro par seja decidido não pertencer a $E(H_4)$. Considere o par $\{u_{1,2}, u_{1,5}\}$ como exemplo. Como os pares $\{u_{1,2}, u_{2,5}\}$ e $\{u_{2,5}, u_{1,5}\}$ são arestas de H_3 , então $\{u_{1,2}, u_{1,5}\}$ não pode ser aresta de H_4 . A figura descreve os pares decididos a não serem arestas de H_4 pela aplicação da regra em linhas tracejadas em destaque com o rótulo “X”. Pares decididos são, então, removidos da variável P .

A Figura 6.10 (b) descreve o grafo H_5 obtido pela aplicação da Regra do Diamante, descrita pelo Algoritmo 5, sobre o grafo H_4 . Para todo diamante induzido em G , a decisão tomada pelo par de vértices obtidos da subdivisão das arestas de um dos triângulos do diamante — excluindo a aresta que é compartilhada pelos dois triângulos — tem que ser a mesma que a decisão tomada pelo par de vértices obtidos da subdivisão das arestas do outro triângulo do diamante — também excluindo a aresta compartilhada por ambos triângulos. Como o par $\{u_{1,2}, u_{1,5}\}$ foi a decidido não ser aresta de H_4 , então o par $\{u_{2,6}, u_{5,6}\}$ não pode ser aresta de H_5 , pois $\{1, 2, 5, 6\}$ induz um diamante em G . Como $\{u_{2,4}, u_{4,6}\}$ é aresta de H_4 , então $\{u_{2,5}, u_{5,6}\}$ é aresta de H_5 , pois $\{2, 4, 5, 6\}$ é diamante de G . Pares decididos pela regra estão em destaque na figura, com arestas decididas sem tracejado e pares decididos a não serem arestas em tracejado e com o rótulo “X”. Pares decididos a não serem arestas em passos anteriores são representados por linhas tracejadas sem destaque com o rótulo “X”. Pares decididos pela regra são removidos da variável P , exaustando todos os seus pares.

Com a aplicação da Regra do Diamante, a variável P não contém mais pares. Descrevemos, pela Figura 6.11 (a), o grafo H_5 sem a representação dos pares decididos a não serem arestas do grafo. O grafo H , obtido pela aplicação do Algoritmo 6 sobre o grafo H_5 , é descrito pela Figura 6.11 (b) com as arestas do emparelhamento perfeito $\{0_v, 1_v \mid \forall v \in V\}$ em destaque e rotuladas pelo respectivo vértice $v \in V$. Considere a aresta $\{0_6, 1_6\}$ como exemplo. Como a vizinhança $N_{H_5}(6)$ admite a partição $(\{u_{2,6}, u_{3,6}\}, \{u_{4,6}, u_{5,6}\})$, onde cada parte induz uma clique em H_5 , temos que um dos vértices de $\{0_2, 1_2\}$ e um dos vértices de $\{0_3, 1_3\}$ são adjacentes ao mesmo vértice v' de $\{0_6, 1_6\}$ e que um dos vértices de $\{0_4, 1_4\}$ e um dos vértices de $\{0_5, 1_5\}$ são adjacentes ao mesmo vértice v'' de $\{0_6, 1_6\}$. Entretanto, os vértices v' e v'' são distintos entre si.

Por fim, vale notar que o grafo H possui seis bicliques maximais onde cada aresta $\{0_v, 1_v\}$, para todo $v \in V(G)$, está contida unicamente a uma das bicliques maximais e que o grafo de bicliques mutuamente inclusas $KB_m(H)$ é isomorfo ao grafo de entrada G .

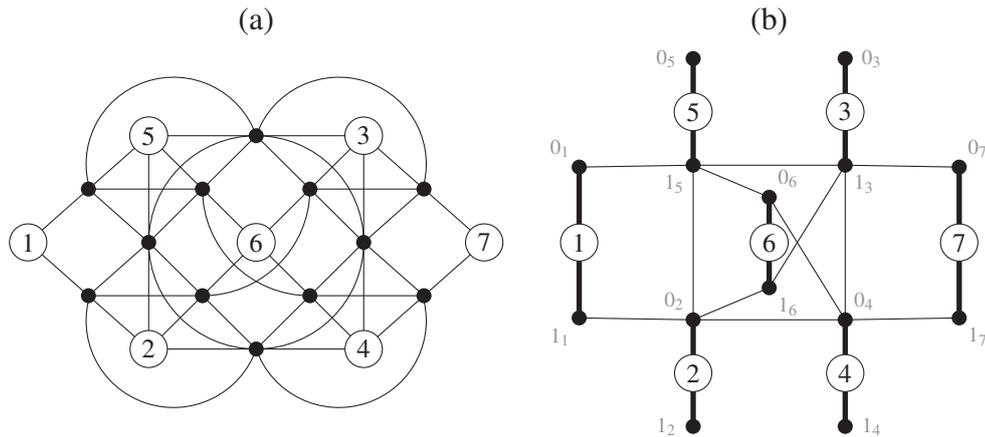


Figura 6.11: Todos os pares decididos (a) e pré-imagem do grafo linha (b).

Para uma análise do custo de execução do algoritmo, considere um grafo de entrada G de n vértices e m arestas. Considere também que cada aresta possua referência direta para seus vértices e que o custo de testar se dois vértices são adjacentes é constante. Para a análise de custo, nos preocupamos apenas com o número de iterações e chamadas recursivas de cada função em termos das propriedades do grafo de entrada.

Vale, sob tais condições, que a subdivisão de todas as arestas pode ser feita em m passos. Como cada par a ser decidido se origina de dois vértices da subdivisão vizinhos a um mesmo vértice de G , temos que o número de pares a serem decididos é limitado a

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{v_1 \in N_G(v)} \left(\sum_{v_2 \in N_G(v) \setminus \{v_1\}} 1 \right) \right) \leq n \cdot \Delta_G^2.$$

A função `regra_p3` itera pelos vértices de G e, para cada vértice, itera por todos os pares de vizinhos não adjacentes entre si em G . Vale lembrar que, para cada vértice $v \in V(G)$, existe uma relação um-para-um entre seus vizinhos em G e seus vizinhos no grafo após a subdivisão de todas as arestas de G . Logo, podemos implementar a função com o custo de tempo similar ao número de pares a serem decididos, isto é, limitado a $n \cdot \Delta_G^2$.

A função `regra_cliques` itera por todos os vértices de G e, para cada vértice, itera por todas as triplas de vizinhos. Logo, podemos implementar a função com o custo de tempo

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{v_1 \in N_G(v)} \left(\sum_{v_2 \in N_G(v) \setminus \{v_1\}} \left(\sum_{v_3 \in N_G(v) \setminus \{v_1, v_2\}} 1 \right) \right) \right) \leq n \cdot \Delta_G^3.$$

A função `regra_triângulo` itera por todos os triângulos de G . Para a implementação, podemos iterar por todos os vértices de G e, para cada vértice, iterar por todas as duplas de vizinhos testando a adjacência entre os três vértices. Logo, tal implementação possui custo de tempo similar ao número de pares a serem decididos, isto é, limitado a $n \cdot \Delta_G^2$.

Para a função `regra_diamante`, basta procurar por todos os triângulos — assim como para a função anterior — e iterar por todos os vizinhos de um dos vértices da dupla testando

a adjacência com os três vértices do triângulo. Podemos implementar a função com custo de tempo

$$\sum_{v_1 \in V(G)} \left(\sum_{v_2 \in N_G(v_1)} \left(\sum_{v_3 \in N_G(v_1) \setminus \{v_2\}} \left(\sum_{v_4 \in N_G(v_2) \setminus \{v_1, v_3\}} 1 \right) \right) \right) \leq n \cdot \Delta_G^3.$$

Para a função `pré_linha`, criamos um grafo de $2n$ vértices e inserimos n arestas do emparelhamento perfeito. Para cada vértice da subdivisão — isto é, para cada aresta de G — inserimos uma aresta no grafo criado. Logo, temos o custo de tempo $3n + m$ para a função.

Como a função `escolha` não é definida, denotamos seu custo por T_E . Como toda chamada da função decide a inserção ou não se um dos pares a serem decididos, temos que o número de escolhas é limitado a $n \cdot \Delta_G^2$. Vale lembrar que adotamos uma estratégia de *backtracking* para cada escolha. Logo, a função `PREKBM_REC` está limitada a $2^{n\Delta_G^2}$ chamadas recursivas. Para determinar um limitante para o custo de execução, consideramos o caso hipotético onde a estratégia de *backtracking* precisa ser usada para todos os pares a serem decididos. Logo, temos o custo de tempo de

$$m + 2n\Delta_G^2 + 2^{n\Delta_G^2} (n\Delta_G^3 + 2n\Delta_G^2 + 2T_E) + 3n + m = \mathcal{O} \left(m + 2^{n\Delta_G^2} (n\Delta_G^3 + T_E) \right).$$

Vale notar que tal análise não é sofisticada, dado que as escolhas feitas e a estrutura do grafo podem influenciar as decisões de inserção ou não tomadas pelas demais funções, reduzindo consideravelmente o número de chamadas recursivas de `PREKBM_REC`¹.

6.3 CRITÉRIO DE ESCOLHA

Nesta Seção, discutimos os possíveis critérios para a função de escolha de aresta para inserção ou não-inserção usada pelo algoritmo através de alguns exemplos. Mostramos que certos grafos KB_m de livres de triângulos admitem que mais de uma pré-imagem seja retornada pelo algoritmo, demonstrando que a função de escolha permite algum nível de relaxamento. Também mostramos que certos grafos admitem decisões de inserções de pares que levam o algoritmo a retornar uma pré-imagem incorreta, mas que sugere um vínculo entre as decisões de pares para inserções e a propriedade IIC do *poset* usado para a construção do grafo pré-imagem KB_m^{-1} . Finalmente, cogitamos certas propriedades das regras usadas pelo algoritmo e da função de escolha que usamos para apresentar uma variação do algoritmo que dispensa o *backtracking*.

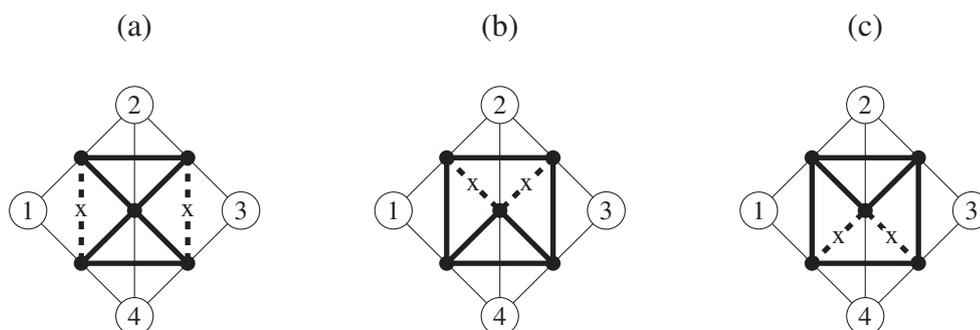


Figura 6.12: Possíveis decisões de pares para um grafo diamante de entrada.

¹Como cada decisão tomada pode levar as funções que implementam as regras a derivarem alguma nova decisão — estas que podem também levar outras regras a derivarem novas decisões em uma reação em cadeia —, temos que cada decisão pode reduzir o número de chamadas recursivas de `PREKBM_REC`.

A Figura 6.12 descreve três possíveis grafos intermediários — grafo linha da pré-imagem KB_m^{-1} do grafo de entrada — construídos a partir do grafo de entrada G . Linhas cheias em destaque denotam decisões de inserção de arestas e linhas tracejadas em destaque com o rótulo “x” denotam decisões de não-inserção de arestas. O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Após a subdivisão de G , as arestas $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ e $\{\{1, 3\}, \{3, 4\}\}$ são inseridas pela Regra do P_3 . Para (a), é decidido não inserir $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}\}$, o que leva à não-inserção de $\{\{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ pela Regra do Diamante e à inserção das demais arestas pela Regra do Triângulo. Para (b), é decidida a não-inserção de $\{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$, o que leva à não-inserção de $\{\{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ pela Regra das Cliques e à inserção das demais arestas pela Regra do Triângulo. De forma similar, é decidido em (c) pela não-inserção de $\{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, o que leva à não-inserção de $\{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ e à inserção das demais arestas. Vale notar que os casos (b) e (c) resultam em grafos intermediários isomorfos entre si.

Grafo intermediário	Grafo de saída

Tabela 6.1: Decisão de pares e grafos de saída obtidos.

A Tabela 6.1 descreve os grafos intermediários obtidos pelas decisões descritas pela Figura 6.12 e as respectivas pré-imagens L^{-1} , retornadas como saída do algoritmo. A primeira linha da tabela descreve o caso (a), onde o grafo intermediário H obtido possui o conjunto de vértices $V(H) = \{0_1, 1_1, 0_2, 1_2, 0_3, 1_3, 0_4, 1_4\}$, o conjunto de arestas $E(H) = \{\{0_1, 1_1\}, \{0_2, 1_2\}, \{0_3, 1_3\}, \{0_4, 1_4\}, \{0_1, 1_2\}, \{1_1, 0_4\}, \{1_2, 0_3\}, \{1_3, 0_4\}, \{1_2, 0_4\}\}$ e as bicliques maximais $B_1 = \{0_1, 0_4, 1_1, 1_2\}$, $B_2 = \{1_2, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4\}$, $B_3 = \{1_2, 1_3, 0_3, 0_4\}$ e $B_4 = \{0_4, 1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$. A segunda linha da tabela descreve o caso (b), onde o grafo obtido H' possui o mesmo conjunto de vértices que H , o conjunto de arestas $E(H') = \{\{0_1, 1_1\}, \{0_2, 1_2\}, \{0_3, 1_3\}, \{0_4, 1_4\}, \{0_1, 0_2\}, \{0_1, 0_4\}, \{0_2, 0_3\}, \{0_3, 0_4\}, \{1_2, 0_4\}\}$ e as bicliques maximais $B'_1 = \{0_1, 1_1, 0_2, 0_4\}$, $B'_2 = \{1_2, 0_1, 0_3, 0_2, 0_4\}$, $B'_3 = \{0_3, 1_3, 0_2, 0_4\}$ e $B'_4 = \{0_4, 1_4, 0_1, 0_3, 1_2\}$. Vale notar que ambos grafos $KB_m(H)$ e $KB_m(H')$ são isomorfos entre si e ao grafo de entrada G .

A Figura 6.13 descreve as ordens de inclusão das bicliques maximais de H (a) e de H' (b). Vale notar que ambas as ordens não são apenas distintas como também não são isomorfos

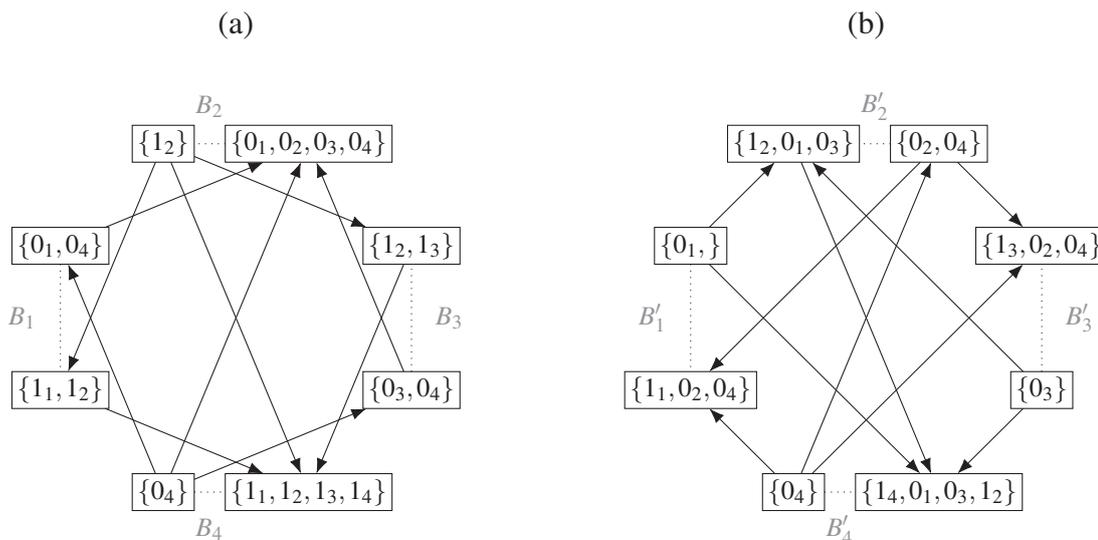


Figura 6.13: Ordens de inclusão das partes de bicliques de H (a) e H' (b).

entre si em respeito às orientações das arestas de inclusão, onde a ordem em (a) possui dois máximos — $\{0_1, 0_2, 0_3, 0_4\}$ e $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$ — e dois mínimos — $\{0_4\}$ e $\{1_2\}$ — e a ordem em (b) possui três máximos — $\{1_1, 0_2, 0_4\}$, $\{1_3, 0_2, 0_4\}$ e $\{1_4, 0_1, 0_3, 1_2\}$ — e três mínimos — $\{0_1\}$, $\{0_3\}$ e $\{0_4\}$. Vale, pelo Corolário 5.1.6, que ambos os *posets* correspondentes a ambas as ordens são IIC autotranspostos livres de comparações antecessor-sucessor de correspondentes e, apesar de topologicamente distintas, correspondem a ordens de inclusão de partes de bicliques de grafos livres de triângulos com grafos KB_m isomorfos entre si. Isso demonstra que a Construção 5.2.1 não leva a uma correspondência uma-para-uma entre os *posets* e os grafos KB_m dos grafos construídos.

Como ambos os grafos intermediários são derivados pelas escolhas das arestas para inserção ou não-inserção, podemos afirmar que existe algum nível de relaxamento para o critério de escolha de aresta, dado que o algoritmo permite que diferentes pré-imagens possam ser encontradas para certos grafos KB_m de livres de triângulos. Entretanto, o exemplo a seguir descreve uma escolha de arestas que gera uma pré-imagem incorreta.

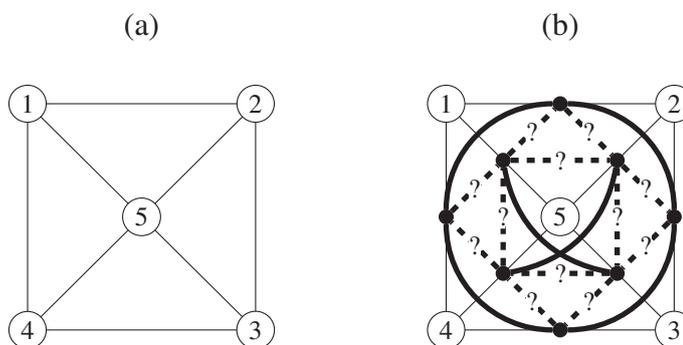


Figura 6.14: Grafo roda W_4 de entrada (a) e pares a serem decididos (b).

A Figura 6.14 descreve um grafo de entrada G (a) e os pares a serem decididos por inserção ou não-inserção de arestas de $L(G)$ (b). O grafo G é o grafo roda W_4 com o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\},$

$\{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}$. Pares a serem decididos são descritos em linhas tracejadas em destaque com o rótulo “?”.

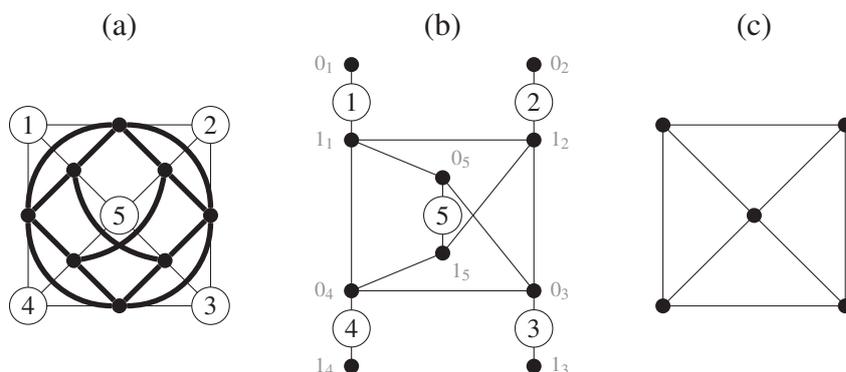


Figura 6.15: Decisão de pares (a), grafo H obtido (b) e grafo $\text{KB}_m(H)$ (c).

Uma das decisões possíveis é descrita pela Figura 6.15 (a) que resulta no grafo H (b), onde o grafo $\text{KB}_m(H)$ (c) é isomorfo ao grafo de entrada. O grafo H possui as bicliques maximais $B_1 = \{0_1, 1_1, 1_2, 0_4, 0_5\}$, $B_2 = \{0_2, 1_2, 1_1, 0_3, 1_5\}$, $B_3 = \{0_3, 1_3, 1_2, 0_4, 0_5\}$, $B_4 = \{0_4, 1_4, 1_1, 0_3, 1_5\}$ e $B_5 = \{0_5, 1_5, 1_1, 1_2, 0_3, 0_4\}$. Vale lembrar — pela Proposição 5.3.1 — que a aresta do $\{0_x, 1_x\}$ emparelhamento perfeito, para $x \in [1..5]$, pertence a apenas a biclique maximal B_x e — pelo Teorema 5.2.2 — que não há biclique maximal de H que não contém alguma aresta do emparelhamento perfeito.

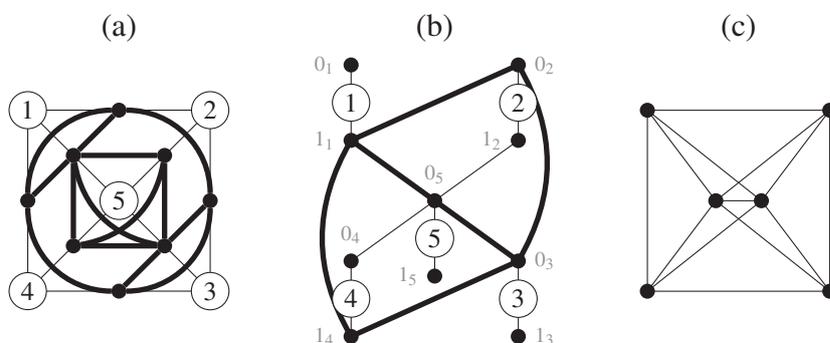


Figura 6.16: Decisão alternativa de pares (a), grafo H' obtido (b) e grafo $\text{KB}_m(H')$ (c).

A Figura 6.16 descreve outra decisão possível (a) que resulta no grafo H' (b), onde o grafo $\text{KB}_m(H')$ (c) não é isomorfo ao grafo de entrada. O grafo H' possui as bicliques maximais $B'_1 = \{0_1, 1_1, 0_2, 0_4, 0_5\}$, $B'_2 = \{0_2, 1_2, 1_1, 0_3, 0_5\}$, $B'_3 = \{0_3, 1_3, 0_2, 1_4, 0_5\}$, $B'_4 = \{0_4, 1_4, 1_1, 0_3, 0_5\}$, $B'_5 = \{0_5, 1_5, 1_1, 1_2, 0_3, 0_4\}$ e $B = \{1_1, 0_2, 0_3, 1_4, 0_5\}$. Além de H' ter mais bicliques maximais que H , a biclique maximal B — apresentada em destaque em (b) — é a única a não conter uma aresta do emparelhamento perfeito de H' . As bicliques maximais B e B_5 são mutuamente inclusas entre si e às demais bicliques maximais de H' , o que as torna gêmeos verdadeiros no grafo $\text{KB}_m(H')$.

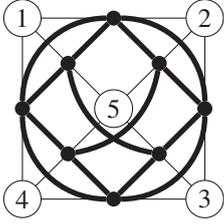
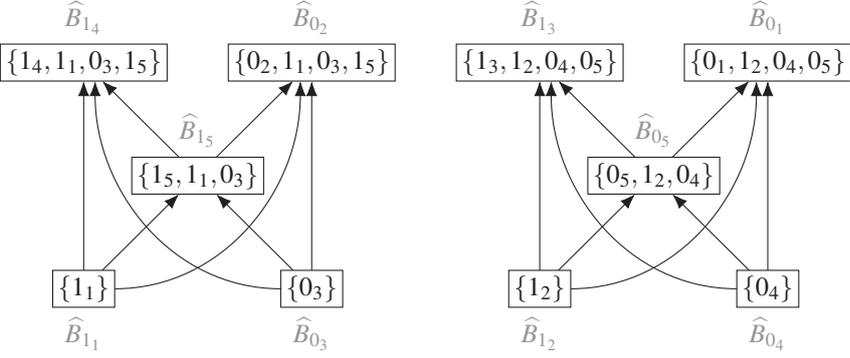
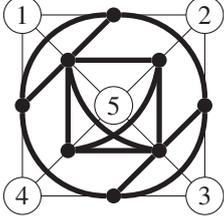
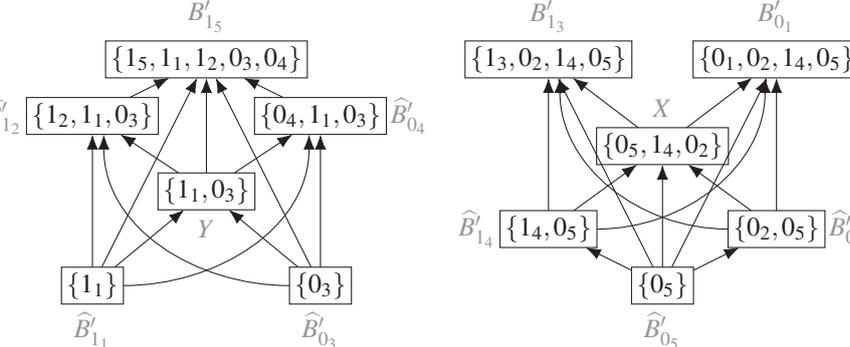
Grafo Intermediário	Poset de inclusão de partes de biclique
	
	

Tabela 6.2: Comparação entre decisões de pares e *posets* de inclusão de partes de bicliques dos grafos obtidos correspondentes.

A Tabela 6.2 compara os grafos intermediários $L(H)$ e $L(H')$ com os respectivos *posets* de inclusão de partes de bicliques de H e H' , isto é, os *posets* $\mathcal{P} = (\widehat{\mathcal{B}}_H, \subseteq)$ e $\mathcal{P}' = (\widehat{\mathcal{B}}_{H'}, \subseteq)$. Para $x \in [1..5]$, denotamos por \widehat{B}_{0_x} a parte da biclique maximal B_x de H que contém o vértice 0_x e por \widehat{B}_{1_x} a parte da biclique maximal B_x de H que contém o vértice 1_x . Da mesma forma, denotamos por \widehat{B}'_{0_x} a parte da biclique maximal B'_x de H' que contém o vértice 0_x e por \widehat{B}'_{1_x} a parte da biclique maximal B'_x de H' que contém o vértice 1_x . As partes da biclique maximal B de H' são denotadas por X e Y . No caso de H , as partes de bicliques \widehat{B}_{0_5} e \widehat{B}_{1_5} são as que satisfazem a propriedade IIC do *poset* \mathcal{P} para as seguintes intersecções entre intervalos anteriores e intervalos sucessores.

$$I_{\mathcal{P}}^-(\widehat{B}_{1_5}) = I_{\mathcal{P}}^-(\widehat{B}_{1_4}) \cap I_{\mathcal{P}}^-(\widehat{B}_{0_2}) \quad \text{e} \quad I_{\mathcal{P}}^+(\widehat{B}_{1_5}) = I_{\mathcal{P}}^+(\widehat{B}_{1_1}) \cap I_{\mathcal{P}}^+(\widehat{B}_{0_3}),$$

$$I_{\mathcal{P}}^-(\widehat{B}_{0_5}) = I_{\mathcal{P}}^-(\widehat{B}_{1_3}) \cap I_{\mathcal{P}}^-(\widehat{B}_{0_1}) \quad \text{e} \quad I_{\mathcal{P}}^+(\widehat{B}_{0_5}) = I_{\mathcal{P}}^+(\widehat{B}_{1_2}) \cap I_{\mathcal{P}}^+(\widehat{B}_{0_4}).$$

Entretanto, enquanto as partes de biclique \widehat{B}_{0_5} e \widehat{B}_{1_5} de H não são elementos máximos, as partes de biclique \widehat{B}'_{0_5} e \widehat{B}'_{1_5} de H' são e, portanto, seus intervalos antecessores e sucessores em \mathcal{P}' não possuem a mesma relação de intersecção que os intervalos antecessores e sucessores de \widehat{B}_{0_5} e de \widehat{B}_{1_5} possuem com as demais partes de bicliques de seus respectivos grafos. Para \mathcal{P}' , as partes de biclique X e Y são as que possuem relação similar a \widehat{B}_{0_5} e \widehat{B}_{1_5} em H com as seguintes intersecções entre intervalos antecessores e sucessores.

$$I_{\mathcal{P}'}^-(X) = I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}'_{1_3}) \cap I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}'_{0_1}) \quad \text{e} \quad I_{\mathcal{P}'}^+(X) = I_{\mathcal{P}'}^+(\widehat{B}'_{1_4}) \cap I_{\mathcal{P}'}^+(\widehat{B}'_{0_2}),$$

$$I_{\mathcal{P}'}^-(Y) = I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}'_{1_2}) \cap I_{\mathcal{P}'}^-(\widehat{B}'_{0_4}) \quad \text{e} \quad I_{\mathcal{P}'}^+(Y) = I_{\mathcal{P}'}^+(\widehat{B}'_{1_1}) \cap I_{\mathcal{P}'}^+(\widehat{B}'_{0_3}).$$

Tal discrepância é resultado das decisões dos pares a serem inseridos nos grafos intermediários, onde a vizinhança do vértice 5 em $L(H)$ induz duas cliques enquanto a vizinhança do vértice 5 em $L(H')$ induz apenas uma clique.

Vale notar que, com a computação do grafo intermediário, o algoritmo também infere um *poset* sobre as regras e as decisões de pares. Se tal *poset* — que pode ser computado pelas inclusões das partes de bicliques do grafo final gerado — possui intersecções entre alguns dos conjuntos de intervalos antecessores e sucessores, então é necessário que exista partes de biclique cujos conjuntos de intervalos anteriores e sucessores sejam equivalentes às intersecções para a satisfação da propriedade IIC. Se houver partes de bicliques sem relação de inclusão entre si mas que possuam relação de inclusão com alguma parte de biclique que satisfaz a propriedade IIC, então é necessário que o vértice correspondente a biclique maximal no grafo intermediário admita que duas cliques sejam induzidas em sua vizinhança. O grafo $L(H')$ é um exemplo onde isso não acontece em nenhuma das vizinhanças dos vértices $1, \dots, 5$, impedindo que qualquer uma das partes das respectivas bicliques maximais satisfaça a propriedade IIC do *poset* \mathcal{P}' . O algoritmo, portanto, retorna um grafo com uma biclique maximal adicional B cujas partes satisfazem a propriedade.

Os grafos H e H' são bipartidos e, portanto, os *posets* $\mathcal{P} = (\widehat{\mathcal{B}}_H, \subseteq)$ e $\mathcal{P}' = (\widehat{\mathcal{B}}_{H'}, \subseteq)$ admitem bipartições onde nenhum elemento de $\widehat{\mathcal{B}}_H$ ($\widehat{\mathcal{B}}_{H'}$) em uma das partes de \mathcal{P} (\mathcal{P}') inclui elemento algum de $\widehat{\mathcal{B}}_H$ ($\widehat{\mathcal{B}}_{H'}$) na outra parte de \mathcal{P} (\mathcal{P}'), o que leva aos grafos $\text{BP}(H)$ e $\text{BP}(H')$ serem isomorfos, respectivamente, às uniões disjuntas $2\text{KB}_m(H)$ e $2\text{KB}_m(H')$. Grafos KB_m de bipartidos são exatamente os grafos IIC-comparabilidade e, portanto, possuem a característica não-hereditária IIC — como um vértice adjacente a todos os vértices de um C_4 induzido. Embora grafos da classe $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$ não sejam grafos de comparabilidade — por permitirem buracos ímpares —, é possível — pela propriedade IIC do *poset* de inclusão de partes de bicliques de grafos $K_3\text{-free}$ — que os grafos $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$ “herdem” a característica não-hereditária IIC através da parte de biclique que satisfaz a propriedade no *poset*. Tal característica não-hereditária IIC pode se manifestar como um vértice “artefato” da propriedade IIC, o que torna razoável que uma definição mais precisa da classe NHC-IIC — que é apenas proposta neste trabalho — inclua também a classe $\text{KB}_m(K_3\text{-free})$.

As provas dos teoremas correspondentes às regras usadas pelo algoritmo não fazem uso da propriedade IIC², o que pode sugerir a existência de uma regra que considera a propriedade IIC do *poset*. Tal regra, entretanto, parece depender de uma caracterização não-parcial da classe dos grafos IIC-comparabilidade.

Vale notar que $\text{KB}_m(H)$ é isomorfo a um subgrafo induzido de $\text{KB}_m(H')$. A biclique maximal adicional de H' parece sugerir que o algoritmo tenta retornar um grafo que seja, pelo menos, subgrafo induzido à pré-imagem KB_m^{-1} do grafo de entrada, dado que as escolhas de inserções de arestas feitas para obter $L(H')$ são possíveis para um grafo de entrada isomorfo ao grafo $\text{KB}_m(H')$. Se as regras forem suficientes para garantir que o algoritmo retorne um subgrafo induzido à pré-imagem KB_m^{-1} e se a função de escolha respeita a propriedade IIC do *poset* inferido, então é possível cogitar a seguinte variação do algoritmo que remove o *backtracking*.

²As Regras do Triângulo e das Cliques podem ser derivadas pelas propriedades de grafos linha de grafos $K_3\text{-free}$ e a Regra do Diamante é derivada pelas demais regras. A Regra do P_3 , entretanto, requer que o grafo linha intermediário seja construído a partir de um *poset* autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.

Algoritmo 7: Possível computação alternativa da pré-imagem do grafo KB_m de livre de triângulos.

Entrada : Grafo $G \in \text{KB}_m(K_3\text{-free})$.
Saída : Grafo $H \in \text{KB}_m^{-1}(G) \cap K_3\text{-free}$.

- 1: $H \leftarrow \text{subdivida}(G)$
- 2: $(H, P) \leftarrow \text{regra_p3}(H, E(L(G)), V(G))$
- 3: **faça**
- 4: $n \leftarrow |P|$
- 5: $(H, P) \leftarrow \text{regra_cliques}(H, P, V)$
- 6: $(H, P) \leftarrow \text{regra_triângulo}(H, P, V)$
- 7: $(H, P) \leftarrow \text{regra_diamante}(H, P, V)$
- 8: **se** $H = \emptyset$ **então**
- 9: **retorna** (\emptyset, P, V)
- 10: **fim**
- 11: **se** $|P| = n$ **então**
- 12: $e \leftarrow \text{escolha}(P)$
- 13: $P \leftarrow P \setminus \{e\}$
- 14: **fim**
- 15: **enquanto** $|P| > 0$
- 16: $H \leftarrow \text{pré_linha}(H, V(G))$
- 17: **retorna** H

O Algoritmo 7 substitui a estratégia de *backtracking* do Algoritmo 1 por uma escolha gulosa caso nenhum par seja decidido pelas funções que implementam as regras em uma iteração. Essa mudança favorece o custo de tempo da computação da pré-imagem KB_m de um grafo livre de triângulos limitando o número de escolhas a serem feitas a não ser maior que o número de pares a serem decididos. Para um grafo de entrada G de n vértices e m arestas e uma implementação da função *escolha* com custo de tempo T_E e seguindo pelo cálculo do custo das demais funções feito na Seção 6.2, melhoramos o custo de tempo $\mathcal{O}(m + 2^{n\Delta_G^2}(n\Delta_G^3 + T_E))$ da versão com *backtracking* para

$$m + 2n\Delta_G^2 + n\Delta_G^2(n\Delta_G^3 + 2n\Delta_G^2 + 2T_E) + 3n + m = \mathcal{O}(m + n^2\Delta_G^5 + n\Delta_G^2T_E).$$

A corretude da versão com a escolha gulosa depende de uma prova de que é possível chegar a alguma pré-imagem independentemente da escolha feita pela função *escolha*. Embora sejam conhecidos casos onde o grafo retornado pelo algoritmo não corresponde à pré-imagem KB_m do grafo de entrada — como vimos nesta seção —, ainda não é conhecida uma instância válida que é rejeitada pela estratégia gulosa. Se tal rejeição não existir para qualquer instância válida, podemos usar o algoritmo — seja a versão com *backtracking* ou com a estratégia gulosa — para o reconhecimento de grafos KB_m de livres de triângulos, que é discutido na Seção 6.4.

6.4 RECONHECIMENTO DE KB_m DE LIVRES DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, descrevemos alguns resultados do uso do algoritmo sugerido — seja a versão com *backtracking* ou com a escolha gulosa — para o reconhecimento de grafos KB_m de grafos livres de triângulos. Com a capacidade de testar por consistências das funções que implementam as regras, podemos verificar se o grafo de entrada possui certas qualidades necessárias para descrever a relação de inclusão mútua de um grafo livre de triângulos desconhecido.

Como discutimos na Seção 6.3, esse teste pode ser incompleto pelas regras não levarem em conta a propriedade IIC dos *posets* que descrevem a relação de inclusão de partes de bicliques. A partir de resultados experimentais, propomos uma família de subgrafos proibidos pela classe dos grafos KB_m de livres de triângulos. As descrições de grafos e geradores de grafos usados nos experimentos são apresentados no Apêndice B e o programa que executa um dos experimentos é apresentado no Apêndice C.

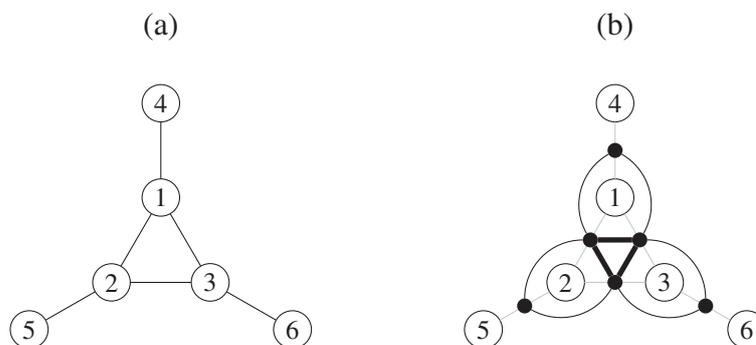


Figura 6.17: Grafo rede de entrada (a) e inconsistência com a Regra do Triângulo (b).

A Figura 6.17 descreve o grafo de entrada G (a) para o algoritmo — chamado de grafo rede, de $\mathcal{F}_2(1)$ ou de $\mathcal{F}_3(0)$ — e o grafo resultante após o passo da Regra do P_3 e o passo da Regra das Cliques (b). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$. Pelo Teorema 6.1.5 (Regra do Triângulo), dois dos vértices $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \in L(G)$ não são adjacentes se G fosse grafo KB_m de um grafo livre de triângulos, onde todos os três vértices da subdivisão compartilham arestas entre si como descrito em destaque em (b). Logo, o grafo G não é KB_m de grafo livre de triângulos e é, portanto, rejeitado pelo algoritmo.

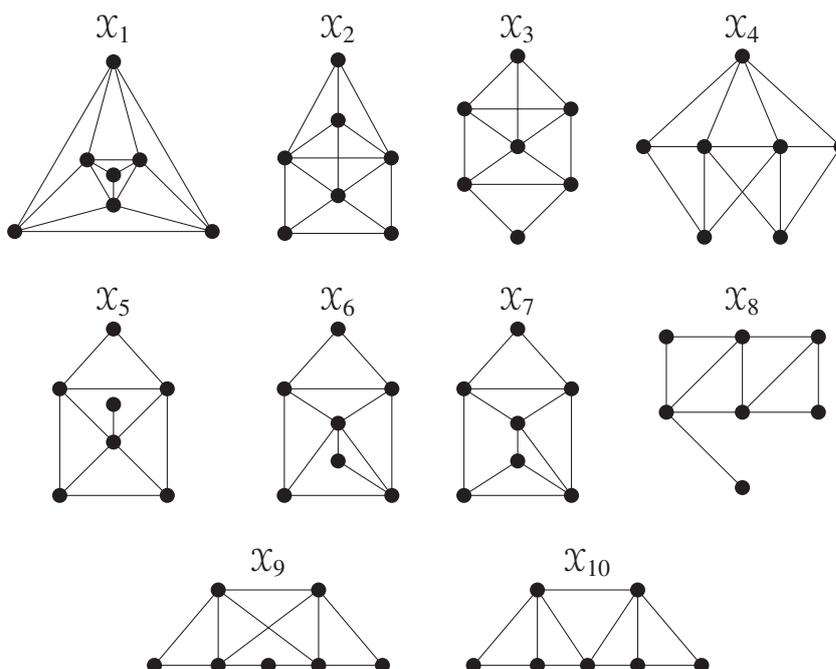


Figura 6.18: Grafos rejeitados pelo algoritmo.

Outros grafos que são rejeitados pela implementação do algoritmo são os grafos $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4, \mathcal{X}_5, \mathcal{X}_6, \mathcal{X}_7, \mathcal{X}_8, \mathcal{X}_9$ e \mathcal{X}_{10} , que são ilustrados pela Figura 6.18 e descritos — em formato dot do GraphViz — na Seção B.1. Vale observar que esses grafos são casos particulares da família mínima de subgrafos proibidos pela classe dos grafos de comparabilidade, como apresentado por Gallai (1967) e Duchet (1984). Os demais grafos da família mínima de subgrafos proibidos são $\mathcal{F}_1(2n+3), \mathcal{F}_2(n+1), \mathcal{F}_3(n), \mathcal{F}_4(n), \mathcal{F}_5(2n+3), \mathcal{F}_6(2n+2), \overline{C_{n+6}}$ e os buracos ímpares C_{2n+5} , para todo $n \geq 0$. Os grafos da família dos buracos ímpares — por não possuírem triângulos e, portanto, por não serem influenciados pela Regra do Triângulo — são aceitos pela implementação do algoritmo. Enquanto isso, acreditamos que todos os grafos das demais famílias são rejeitados pela implementação. Entretanto, não temos provas de que esse seja o caso.

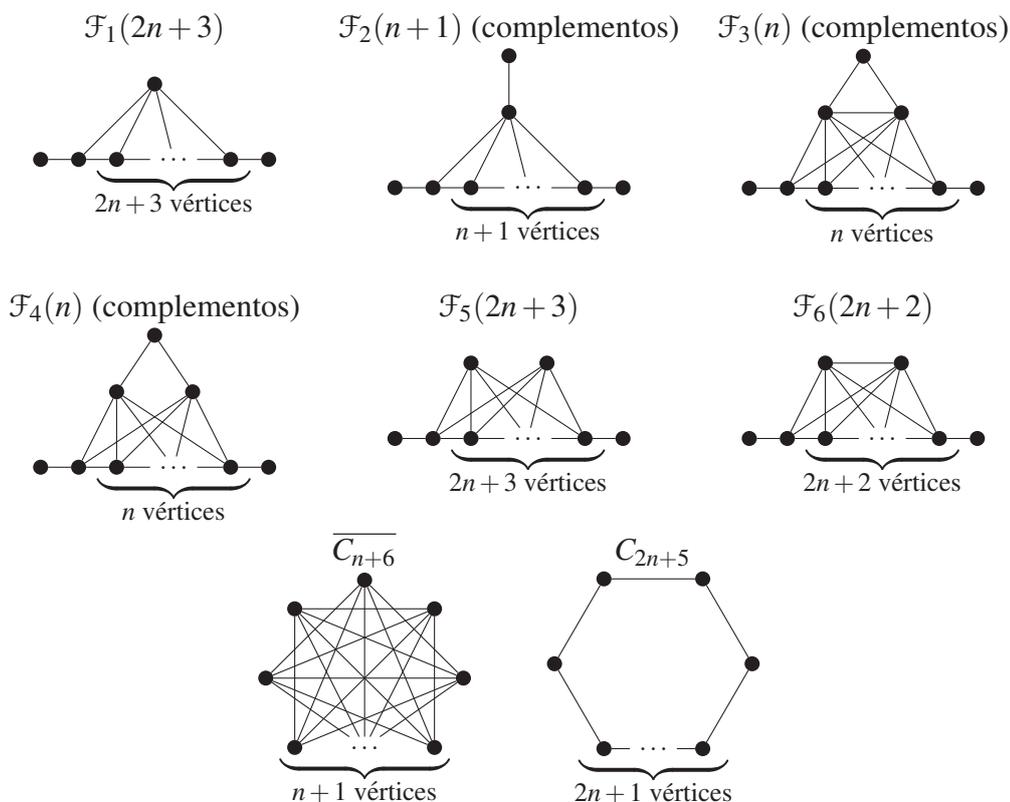


Figura 6.19: Famílias infinitas de subgrafos proibidos pelos grafos de comparabilidade ou de seus complementos.

A Figura 6.19 descreve as famílias infinitas de subgrafos proibidos pela classe dos grafos de comparabilidade — no caso de $\mathcal{F}_1(2n+3), \mathcal{F}_5(2n+3), \mathcal{F}_6(2n+2), \overline{C_{n+6}}$ e C_{2n+5} — ou os complementos de tais famílias — no caso de $\mathcal{F}_2(n+1), \mathcal{F}_3(n)$ e $\mathcal{F}_4(n)$. A figura ilustra o complemento de algumas famílias para facilidade de representação.

O motivo por acreditarmos que o algoritmo rejeita os grafos das famílias $\mathcal{F}_1(2n+3), \mathcal{F}_2(n+1), \mathcal{F}_3(n), \mathcal{F}_4(n), \mathcal{F}_5(2n+3), \mathcal{F}_6(2n+2)$ e $\overline{C_{n+6}}$ vem de resultados experimentais sobre a implementação descrita pelo Programa A.6. O Programa C.1 implementa o experimento, que foi executado por um período de 10 horas e testa a implementação do algoritmo sobre os 184 primeiros grafos de cada família. A implementação do algoritmo rejeita todos os grafos testados. A partir de tais resultados, propomos a seguinte conjectura.

Conjectura 6.4.1. *Seja \mathcal{F} a família mínima de subgrafos proibidos pelos grafos de comparabilidade. Vale que $(\mathcal{F} \setminus C_{5+2n})$ -free contém a classe dos grafos de bicliques mutuamente inclusas de livres de triângulos.*

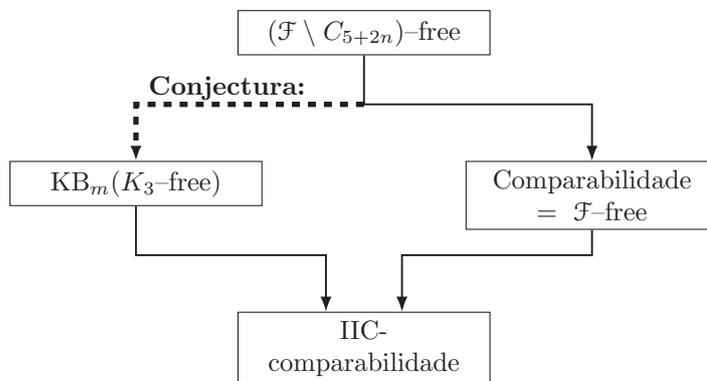


Figura 6.20: Diagrama que descreve a classe que, hipoteticamente, contém a classe $KB_m(K_3\text{-free})$.

A Figura 6.20 ilustra a Conjectura 6.4.1 por um diagrama de inclusão de classes onde a classe dos grafos livres de grafos da família mínima \mathcal{F} de subgrafos proibidos pelos grafos de comparabilidade exceto os buracos ímpares — $(\mathcal{F} \setminus C_{5+2n})$ -free — que contém a classe dos grafos de comparabilidade e, hipoteticamente, a classe $KB_m(K_3\text{-free})$. O diagrama também descreve a inclusão da classe dos grafos IIC-comparabilidade — equivalente à classe KB_m de bipartidos — nas demais classes.

Como discutido na Seção 6.3, é razoável que a classe proposta NHC-IIC — dos grafos com a característica não-hereditária dos grafos IIC-comparabilidade — contenha a classe $KB_m(K_3\text{-free})$ por manifestar os vértices como “artefatos” da propriedade IIC dos *posets* de inclusão de suas partes de bicliques. Podemos, portanto, expandir a Conjectura 6.4.1 com o seguinte enunciado.

Conjectura 6.4.2. *Seja \mathcal{F} a família mínima de subgrafos proibidos pelos grafos de comparabilidade. Vale que*

$$KB_m(K_3\text{-free}) = (\mathcal{F} \setminus C_{5+2n})\text{-free} \cap \text{NHC-IIC}.$$

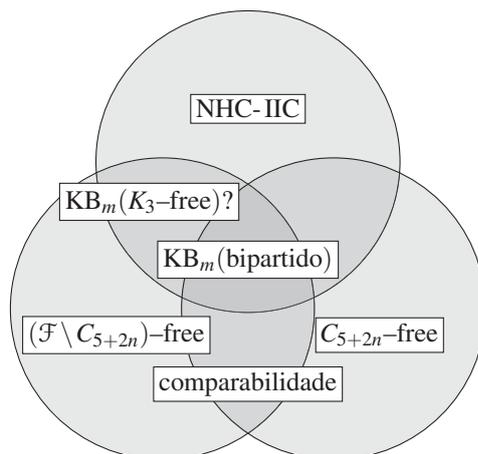


Figura 6.21: Conjectura da intersecção de classes de grafos.

A Figura 6.21 ilustra o diagrama de intersecção de classes proposto pela Conjectura 6.4.2 com a classe dos grafos livres de buracos ímpares — $C_{5+2n}\text{-free}$ —, a classe dos grafos livres da família mínima \mathcal{F} de subgrafos proibidos pela classe dos grafos de comparabilidade exceto os buracos ímpares — $(\mathcal{F} \setminus C_{5+2n})\text{-free}$ — e a classe proposta NHC-IIC. A intersecção entre $C_{5+2n}\text{-free}$ e $(\mathcal{F} \setminus C_{5+2n})\text{-free}$ equivale à classe dos grafos de comparabilidade e a intersecção entre as três classes equivale à classe dos grafos KB_m de grafos bipartidos, equivalente à classe dos grafos IIC-comparabilidade. A Conjectura 6.4.2 propõe que a intersecção entre $(\mathcal{F} \setminus C_{5+2n})\text{-free}$ e NHC-IIC equivale à classe $KB_m(K_3\text{-free})$.

7 PROPRIEDADES DIFERENCIADORAS

Embora a propriedade da inclusão mútua entre bicliques maximais tenha contribuído como uma ferramenta de estudo das bicliques maximais em diversas subclasses de grafos livres de triângulos, ela se demonstra mais limitada para a descrição de intersecções entre bicliques maximais em casos mais gerais. Neste capítulo, introduzimos o conceito de *propriedades diferenciadoras* entre biclique maximais para o caso mais geral, onde não há limitação para classe do grafo.

Nos referimos por *propriedades diferenciadoras* duas formas de intersecção entre bicliques maximais que certificam que a união de ambas não é uma única biclique maximal, isto é, que *diferenciam* duas bicliques maximais intersectantes. Chamamos tais formas de intersecção por *diferenciação por aresta* e por *diferenciação por não-aresta*, onde a primeira forma indica que as bicliques maximais são distintas porque a união entre elas contém arestas em excesso — isto é, a união não induz um subgrafo *bipartido* — e a segunda forma indica que as bicliques maximais são distintas porque a união entre elas não contém arestas o suficiente — isto é, a união não induz um bipartido *completo*. Usamos tais propriedades para definir variações do operador grafo biclique — o grafo de bicliques diferenciadas por arestas KB_{edif} e o grafo de bicliques diferenciadas por não-arestas KB_{ndif} — como uma forma de classificar arestas do grafo biclique de qualquer grafo.

Na Seção 7.1, definimos as propriedades diferenciadoras e suas respectivas variações do operador grafo biclique. As propriedades diferenciadoras são definidas em termos de vizinhanças de vértices que não pertencem à intersecção entre as bicliques maximais intersectantes. Essa forma de definição é motivada pelo interesse no estudo de intersecções entre bicliques maximais independentemente do conceito de partes de bicliques.

Na Seção 7.2, mostramos que bicliques maximais mutuamente inclusas são também diferenciadas por não-arestas, mas não são diferenciadas por arestas. Tal resultado mostra que o grafo KB_m de um grafo qualquer G é subgrafo gerador de $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$, mas não compartilha aresta alguma com o grafo $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$.

Na Seção 7.3, mostramos que todo par de bicliques maximais intersectantes de um grafo G precisa compartilhar alguma propriedade diferenciadora, o que leva à equivalência entre os conjuntos de arestas $E(\text{KB}(G)) = E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) \cup E(\text{KB}_{\text{edif}}(G))$.

Na Seção 7.4, caracterizamos as classes dos grafos livres de cada propriedade diferenciadora. Mostramos que a classe dos grafos livres de bicliques maximais diferenciadas por aresta equivale à classe dos grafos livres de triângulos e de C_5 e que a classe dos grafos livres de bicliques maximais diferenciadas por não-aresta equivale à classe dos grafos livres de P_4 e do grafo pata.

7.1 DEFINIÇÕES DE PROPRIEDADES DIFERENCIADORAS

Nesta seção, definimos as propriedades diferenciadoras entre bicliques maximais intersectantes de um grafo qualquer. Com o intuito de explorar as propriedades entre bicliques maximais em um contexto mais geral sobre grafos, definimos as propriedades em termos de vizinhanças na intersecção de vértices que não pertencem à intersecção entre as bicliques maximais. Dessa forma, podemos derivar propriedades estruturais de grafos sem depender de um conhecimento prévio de suas partes de bicliques.

Considere a seguinte definição.

Definição 7.1.1. *Sejam G um grafo qualquer e B_1 e B_2 duas bicliques maximais intersectantes entre si. Chamamos de não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 o par não-ordenado de vértices $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$ — com $v_1 \in B_1$, $v_2 \in B_2$ e $v_1, v_2 \notin B_1 \cap B_2$ — tal que*

$$\begin{aligned} \left(N_G(v_1) \cup N_G(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 &\neq \emptyset \text{ e} \\ \left(N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Se tal par não-ordenado existe, dizemos que B_1 e B_2 são diferenciadas por não-aresta.

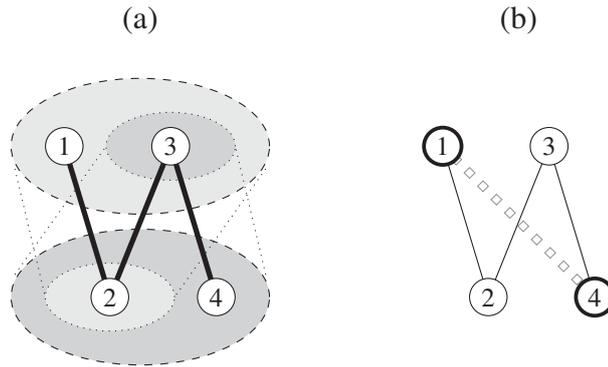


Figura 7.1: Bicliques maximais intersectantes (a) e não-aresta diferenciadora entre elas (b).

A Figura 7.1 descreve as bicliques maximais intersectantes $B_1 = \{1, 2, 3\}$ e $B_2 = \{2, 3, 4\}$ de um grafo G . Vale que $B_1 \cap B_2 = \{2, 3\}$, que $B_1 \setminus B_2 = \{1\}$ e que $B_2 \setminus B_1 = \{4\}$. Também vale que $N_G(1) = \{2\}$ e que $N_G(4) = \{3\}$. Portanto, vale que

$$\begin{aligned} \left(N_G(1) \cup N_G(2) \right) \cap B_1 \cap B_2 &= (\{2\} \cup \{3\}) \cap \{2, 3\} = \{2, 3\} \neq \emptyset, \\ \left(N_G(1) \cap N_G(2) \right) \cap B_1 \cap B_2 &= (\{2\} \cap \{3\}) \cap \{2, 3\} = \emptyset \cap \{2, 3\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Como os vértices $1 \in B_1 \setminus B_2$ e $4 \in B_2 \setminus B_1$ não são adjacentes, vale que o par não-ordenado $\{1, 4\}$ é não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 e, portanto, que B_1 e B_2 são diferenciadas por não-aresta. A figura descreve a não-aresta diferenciadora $\{1, 4\}$ como a linha branca tracejada que conecta os vértices 1 e 4 — ambos em destaque.

Definição 7.1.2. *Sejam G um grafo qualquer e B_1 e B_2 duas bicliques maximais intersectantes entre si. Chamamos de aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 o par não-ordenado de vértices $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ — com $v_1 \in B_1$, $v_2 \in B_2$ e $v_1, v_2 \notin B_1 \cap B_2$ — tal que*

$$\begin{aligned} \left(N_G(v_1) \cup N_G(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 &= \emptyset \text{ ou} \\ \left(N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Se tal par não-ordenado existe, dizemos que B_1 e B_2 são diferenciadas por aresta.

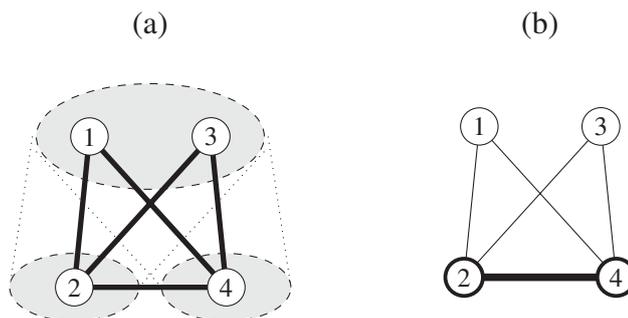


Figura 7.2: Bicliques maximais intersectantes (a) e aresta diferenciadora entre elas (b).

A Figura 7.2 descreve as bicliques maximais $B_1 = \{1, 2, 3\}$ e $B_2 = \{1, 3, 4\}$ de um grafo G . Vale que $B_1 \cap B_2 = \{1, 3\}$, que $B_1 \setminus B_2 = \{2\}$ e que $B_2 \setminus B_1 = \{4\}$. Também vale que $N_G(2) = \{1, 3, 4\}$ e que $N_G(4) = \{1, 2, 3\}$. Portanto, vale que

$$(N_G(2) \cap N_G(4)) \cap B_1 \cap B_2 = (\{1, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3\}) \cap \{1, 3\} = \{1, 3\} \cap \{1, 3\} \neq \emptyset.$$

Como os vértices $2 \in B_1 \setminus B_2$ e $4 \in B_2 \setminus B_1$ são adjacentes, vale que o par não-ordenado $\{2, 4\}$ é aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 e, portanto, que B_1 e B_2 são diferenciadas por aresta. A figura descreve a aresta diferenciadora $\{2, 4\}$ como a linha cheia que conecta os vértices 2 e 4 — ambos em destaque.

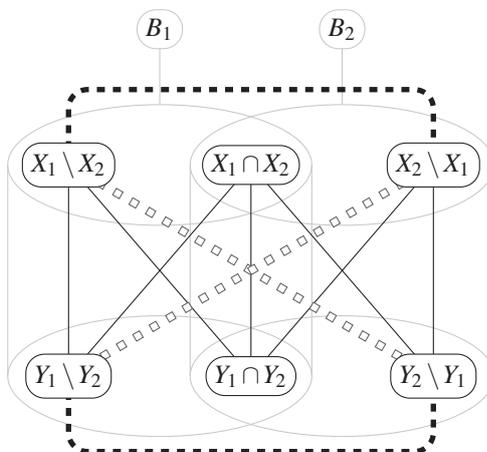


Figura 7.3: Diagrama de possíveis arestas e não-arestas diferenciadoras.

A Figura 7.3 descreve a intersecção entre duas bicliques maximais B_1 e B_2 com suas respectivas partições (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) . Possíveis não-arestas diferenciadoras são descritas pelas linhas brancas tracejadas e possíveis arestas diferenciadoras são descritas pelas linhas cheias em destaque. Vale notar que uma das intersecções $X_1 \cap X_2$ ou $Y_1 \cap Y_2$ pode ser vazia. Se B_1 e B_2 são diferenciadas por não-aresta, então algum dos vértices da não-aresta são adjacentes com algum vértice da intersecção $B_1 \cap B_2$. Entretanto, pela definição, os vértices da não-aresta não são adjacentes ao mesmo vértice da intersecção, o que leva a não-aresta existir apenas entre os vértices de $X_1 \setminus X_2$ e $Y_2 \setminus Y_1$ ou entre os vértices de $Y_1 \setminus Y_2$ e $X_2 \setminus X_1$. O que leva aos vértices da não-aresta estarem em partes opostas em uma partição $(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2)$ de $B_1 \cup B_2$. Isto é, a não-aresta diferenciadora certifica que $B_1 \cup B_2$ não é biclique maximal por corresponder ao o par não-ordenado ausente no grafo que torna as adjacências entre $X_1 \cup X_2$ e $Y_1 \cup Y_2$ incompleta.

Para o caso de B_1 e B_2 serem diferenciadas por aresta, vale — pela definição — que seus vértices não possuem adjacência com vértice algum da intersecção $B_1 \cap B_2$ — o que implica que uma das intersecções $X_1 \cap X_2$ ou $Y_1 \cap Y_2$ é vazia — ou que são adjacentes ao mesmo vértice da intersecção $B_1 \cap B_2$ — o que implica que são vértices em $X_1 \setminus X_2$ e $X_2 \setminus X_1$ ou em $Y_1 \setminus Y_2$ e $Y_2 \setminus Y_1$. O que leva aos vértices da aresta diferenciadora estarem na mesma parte da partição $(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2)$. Isto é, a aresta diferenciadora certifica que $B_1 \cup B_2$ não é biclique maximal por corresponder a uma aresta que conecta vértices de uma mesma parte da partição $(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2)$, impedindo que $B_1 \cup B_2$ induza um grafo bipartido.

Considere, portanto, as seguintes definições a respeito das variações do operador grafo biclique sob o contexto de propriedades diferenciadoras.

Definição 7.1.3. *Sejam G um grafo qualquer. Chamamos de grafo de bicliques diferenciadas por não-arestas o grafo denotado por $\text{KB}_{ndif}(G)$ com o conjunto de vértices equivalente ao conjunto de bicliques maximais \mathcal{B}_G e dois de seus vértices são adjacentes se, e somente se, as bicliques maximais correspondentes são diferenciadas por não-arestas.*

Definição 7.1.4. *Sejam G um grafo qualquer. Chamamos de grafo de bicliques diferenciadas por arestas o grafo denotado por $\text{KB}_{edif}(G)$ com o conjunto de vértices equivalente ao conjunto de bicliques maximais \mathcal{B}_G e dois de seus vértices são adjacentes se, e somente se, as bicliques maximais correspondentes são diferenciadas por arestas.*

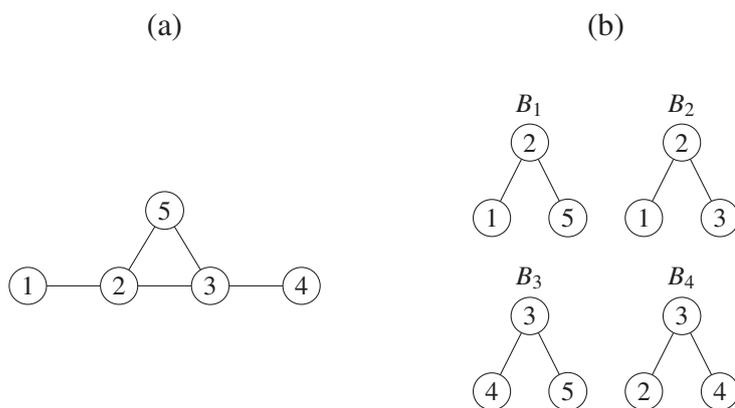


Figura 7.4: Grafo G (a) e bicliques maximais de G (b).

Tomamos como exemplo o grafo G representado pela Figura 7.4 (a) e suas bicliques maximais ilustradas em (b). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$ e as bicliques maximais $B_1 = \{1, 2, 5\}$, $B_2 = \{1, 2, 3\}$, $B_3 = \{3, 4, 5\}$ e $B_4 = \{2, 3, 4\}$.

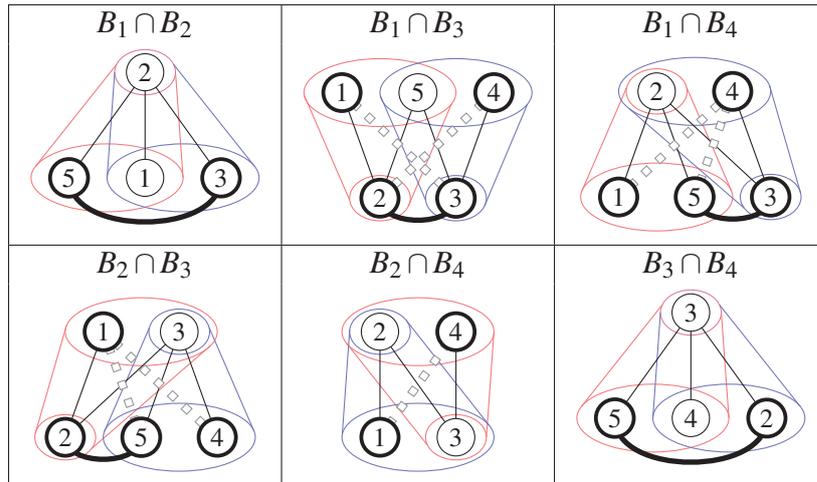


Tabela 7.1: Intersecções das bicliques maximais de G com as arestas e não-arestas diferenciadoras em destaque.

A Tabela 7.1 descreve as intersecções entre as bicliques maximais de G . As linhas cheias representam as arestas diferenciadoras e as linhas brancas tracejadas representam as não-arestas diferenciadoras. Temos, em G , que B_1 e B_2 são diferenciadas pela aresta $\{3, 5\}$, que B_1 e B_3 são diferenciadas pela aresta $\{2, 3\}$ e pelas não-arestas $\{1, 3\}$ e $\{2, 4\}$, que B_1 e B_4 são diferenciadas pela aresta $\{3, 5\}$ e pelas não-arestas $\{1, 4\}$ e $\{4, 5\}$, que B_2 e B_3 são diferenciadas pela aresta $\{2, 5\}$ e pelas não-arestas $\{1, 4\}$ e $\{1, 5\}$, que B_2 e B_4 são diferenciadas pela não-aresta $\{1, 4\}$ e que B_3 e B_4 são diferenciadas pela aresta $\{2, 5\}$.

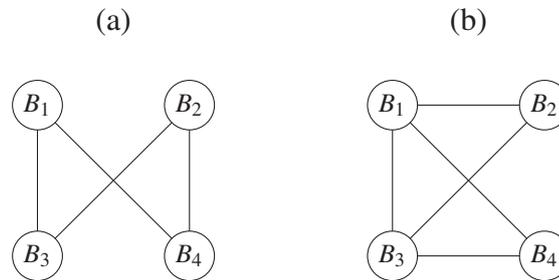


Figura 7.5: Grafos $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ (a) e $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ (b).

A Figura 7.5 descreve o grafo $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ de bicliques maximais diferenciadas por não-aresta (a) e o grafo $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ de bicliques maximais diferenciadas por aresta (b). Ambos os grafos possuem — assim como o grafo biclique $\text{KB}(G)$ — os conjuntos de vértices $V(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) = V(\text{KB}_{\text{edif}}(G)) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. O grafo $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ possui o conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) = \{\{B_1, B_3\}, \{B_1, B_4\}, \{B_2, B_3\}, \{B_2, B_4\}\}$ e o grafo $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ possui o conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{edif}}(G)) = \{\{B_1, B_2\}, \{B_1, B_3\}, \{B_1, B_4\}, \{B_2, B_3\}, \{B_3, B_4\}\}$.

7.2 RELAÇÃO COM INCLUSÃO MÚTUA

Nesta seção, mostramos que se duas bicliques maximais de um grafo G qualquer são mutuamente inclusas entre si, então elas são diferenciadas por não-aresta, mas não são diferenciadas por aresta. Esse resultado implica que o conjunto de arestas $E(\text{KB}_m(G))$ está contido na diferença entre conjuntos $E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) \setminus E(\text{KB}_{\text{edif}}(G))$.

Considere o enunciado do seguinte teorema que relaciona a propriedade de inclusão mútua com a diferenciação por não-aresta.

Teorema 7.2.1. *Sejam G um grafo qualquer e B_1 e B_2 duas bicliques maximais. Se B_1 e B_2 são mutuamente inclusas entre si, então são também diferenciadas por não-aresta.*

Prova. Considere as partições (X_1, Y_1) de B_1 e (X_2, Y_2) de B_2 . Sem perda de generalidade, considere que

$$\begin{aligned} X_1 &\subset X_2, \\ Y_2 &\subset Y_1. \end{aligned}$$

Como a parte X_1 está contida em X_2 , temos que nenhum vértice de X_1 é adjacente a vértice algum de X_2 . Da mesma forma, temos que nenhum vértice de Y_2 é adjacente a vértice algum de Y_1 .

Suponha que todos os vértices de Y_1 sejam adjacentes a todos os vértices de X_2 . Como Y_1 e X_2 contêm Y_2 e X_1 respectivamente, temos que $(X_1 \cup X_2) \cup (Y_1 \cup Y_2) = B_1 \cup B_2$ é biclique de G e, portanto, que B_1 e B_2 não são maximais. Logo, existe algum vértice $v_1 \in Y_1$ que não é adjacente a algum vértice $v_2 \in X_2$.

Como a parte X_1 está contida em X_2 e que o vértice $v_1 \in Y_1$ é adjacente a todos os vértices de X_1 , temos que a vinhança $N_G(v_1)$ possui intersecção com $B_1 \cap B_2$. Da mesma forma, também temos que $N_G(v_2)$ possui intersecção com $B_1 \cap B_2$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} (N_G(v_1) \cap B_1 \cap B_2) \cup (N_G(v_2) \cap B_1 \cap B_2) &\neq \emptyset \implies \\ (N_G(v_1) \cup N_G(v_2)) \cap B_1 \cap B_2 &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como o vértice v_2 pertence a X_2 e a parte X_1 está contida em X_2 , temos que $N_G(v_2)$ não possui intersecção com X_1 . Portanto, temos que

$$N_G(v_2) \cap X_1 = \emptyset \implies N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \cap X_1 = \emptyset.$$

Da mesma forma, temos que

$$N_G(v_1) \cap Y_2 = \emptyset \implies N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \cap Y_2 = \emptyset.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} (N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \cap X_1) \cup (N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \cap Y_2) &= \emptyset \implies \\ (N_G(v_1) \cap N_G(v_2)) \cap (X_1 \cup Y_2) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Como $X_1 \subset X_2$ e $Y_2 \subset Y_1$, temos que $X_1 \cup Y_2$ equivale a $B_1 \cap B_2$. Logo, temos que

$$(N_G(v_1) \cup N_G(v_2)) \cap (B_1 \cap B_2) = \emptyset.$$

Logo, temos que $\{v_1, v_2\}$ é não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 . Portanto, se B_1 e B_2 são mutuamente inclusas, então B_1 e B_2 são diferenciadas por não-aresta. \square

Considere, portanto, o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 7.2.2. *Sejam G um grafo qualquer e B_1 e B_2 duas bicliques maximais. Se B_1 e B_2 são mutuamente inclusas entre si, então B_1 e B_2 não são diferenciadas por aresta.*

Prova. Considere as partições (X_1, Y_1) de B_1 e (X_2, Y_2) de B_2 . Sem perda de generalidade, considere que

$$\begin{aligned} X_1 &\subset X_2, \\ Y_2 &\subset Y_1. \end{aligned}$$

Como a parte Y_2 está contida em Y_1 , temos que todos os vértices de Y_2 são adjacentes a todos os vértices de X_1 . Como Y_2 e X_1 são ambos conjuntos independentes e todos os vértices de Y_2 são adjacentes a todos os vértices de X_1 , temos que a intersecção $Y_2 \cap X_1$ é vazia. De maneira análoga, também temos que a intersecção $Y_1 \cap X_2$ é vazia. Logo, temos que

$$\begin{aligned} B_1 \setminus B_2 &= (X_1 \setminus X_2) \cup (Y_1 \setminus Y_2) \\ &= Y_1 \setminus Y_2. \end{aligned}$$

De forma similar, também temos que

$$B_2 \setminus B_1 = X_2 \setminus X_1.$$

Suponha que exista aresta diferenciadora $\{v_1, v_2\}$ entre B_1 e B_2 onde v_1 pertence a B_1 e v_2 pertence a B_2 . Por definição, temos que v_1 e v_2 não pertencem à intersecção $B_1 \cap B_2$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} v_1 &\in B_1 \setminus B_2 = Y_1 \setminus Y_2, \\ v_2 &\in B_2 \setminus B_1 = X_2 \setminus X_1. \end{aligned}$$

Como v_1 pertence a Y_1 , temos que v_1 é adjacente a todos os vértices de X_1 , isto é, que $X_1 \subseteq N_G(v_1)$. Da mesma forma, temos que $Y_2 \subseteq N_G(v_2)$. Como v_1 e v_2 são vértices de bicliques, temos que as vizinhanças $N_G(v_1)$ e $N_G(v_2)$ não são vazias. Logo, temos que

$$X_1 \cup Y_2 \subseteq N_G(v_1) \cup N_G(v_2) \neq \emptyset.$$

Pelas relações de inclusão das respectivas partes, temos que a união $X_1 \cup Y_2$ equivale à intersecção $B_1 \cap B_2$ e, portanto, que

$$(N_G(v_1) \cup N_G(v_2)) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset.$$

Como o vértice v_1 pertence a Y_1 e que a parte Y_2 está contida em Y_1 , temos que a vizinhança $N_G(v_1)$ não possui vértices de Y_2 não possui vértices de Y_2 . De maneira análoga, temos que a vizinhança $N_G(v_2)$ não possui vértices de X_1 . Como $B_1 \cap B_2$ é equivalente a $X_1 \cup Y_2$, temos que v_1 e v_2 não são adjacentes a um mesmo vértice de $B_1 \cap B_2$. Logo, temos que

$$(N_G(v_1) \cap N_G(v_2)) \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Temos, então, que $\{v_1, v_2\}$ não é aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 . Portanto, se B_1 e B_2 são mutuamente inclusas, então B_1 e B_2 não são diferenciadas por aresta. \square

Pelo Teorema 7.2.1, temos — para todo grafo G — que se duas bicliques maximais são mutuamente inclusas, então elas são diferenciadas por não-aresta. Logo, o conjunto de arestas $E(\text{KB}_m(G))$ está contido no conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G))$. Pelo Teorema 7.2.2, se duas

bicliques maximais são mutuamente inclusas, então elas não são diferenciadas por aresta. Logo, a intersecção entre o conjunto de arestas $E(\text{KB}_m(G))$ e o conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{edif}}(G))$ é vazia. Podemos, portanto, enunciar o seguinte corolário.

Corolário 7.2.3. *Seja G um grafo qualquer. Vale que*

$$E(\text{KB}_m(G)) \subseteq E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) \setminus E(\text{KB}_{\text{edif}}(G)).$$

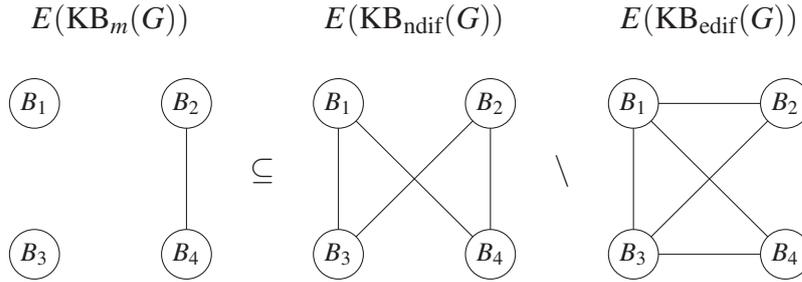


Figura 7.6: Relação entre as arestas do grafo $\text{KB}_m(G)$ com as arestas do grafo $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ e as arestas do grafo $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$.

A Figura 7.6 ilustra a relação entre os grafos $\text{KB}_m(G)$, $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ e $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ descrita pelo Corolário 7.2.3. O grafo G é o mesmo grafo descrito pela Figura 7.4 na Seção 7.1. O grafo $\text{KB}_m(G)$ possui apenas a aresta $\{B_2, B_4\}$. O grafo $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ possui o conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) = \{\{B_1, B_3\}, \{B_1, B_4\}, \{B_2, B_3\}, \{B_2, B_4\}\}$ e o grafo $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ possui o conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{edif}}(G)) = \{\{B_1, B_2\}, \{B_1, B_3\}, \{B_1, B_4\}, \{B_2, B_3\}, \{B_3, B_4\}\}$. Para o exemplo G , o conjunto de arestas $E(\text{KB}_m(G))$ é equivalente à diferença $E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) \setminus E(\text{KB}_{\text{edif}}(G)) = \{\{B_2, B_4\}\}$.

7.3 CASO GERAL DE PROPRIEDADES DIFERENCIADORAS

Nesta Seção, mostramos que todo par de bicliques maximais intersectantes são diferenciadas por aresta ou não-aresta. Isto é, não há uma terceira propriedade diferenciadora entre bicliques maximais intersectantes. Como consequência, a união entre os conjuntos de arestas $E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G))$ e $E(\text{KB}_{\text{edif}}(G))$ de um grafo G equivale ao conjunto de arestas $E(\text{KB}(G))$.

Considere o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 7.3.1. *Sejam G um grafo qualquer e B_1 e B_2 duas de suas bicliques maximais intersectantes. Se B_1 e B_2 não são diferenciadas por aresta, então B_1 e B_2 são diferenciadas por não-aresta.*

Prova. Para os vértices $v' \in B_1 \setminus B_2$ e $v'' \in B_2 \setminus B_1$, considere os predicados P_E , P_U e P_\cap tais que

$$\begin{aligned} P_E(v', v'') &\iff \{v', v''\} \in E(G), \\ P_U(v', v'') &\iff (N_G(v') \cup N_G(v'')) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset, \\ P_\cap(v', v'') &\iff (N_G(v') \cap N_G(v'')) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como B_1 e B_2 não são diferenciadas por aresta, temos — para quaisquer vértices $v' \in B_1 \setminus B_2$ e $v'' \in B_2 \setminus B_1$ — que

$$\neg\left(P_E(v', v'') \wedge (\neg P_U(v', v'') \vee P_\cap(v', v''))\right) \iff \\ \neg P_E(v', v'') \vee (P_U(v', v'') \wedge \neg P_\cap(v', v'')).$$

Considere o vértice $v_1 \in B_1 \setminus B_2$ e os conjuntos S , R , K e L tais que

$$S = \{v \in B_2 \setminus B_1 \mid P_U(v_1, v) \wedge \neg P_\cap(v_1, v)\},$$

$$R = \{v \in B_2 \setminus B_1 \mid \neg P_U(v_1, v) \vee P_\cap(v_1, v)\},$$

$$K = \{v \in B_1 \cap B_2 \mid P_E(v_1, v)\},$$

$$L = \{v \in B_1 \cap B_2 \mid \neg P_E(v_1, v)\}.$$

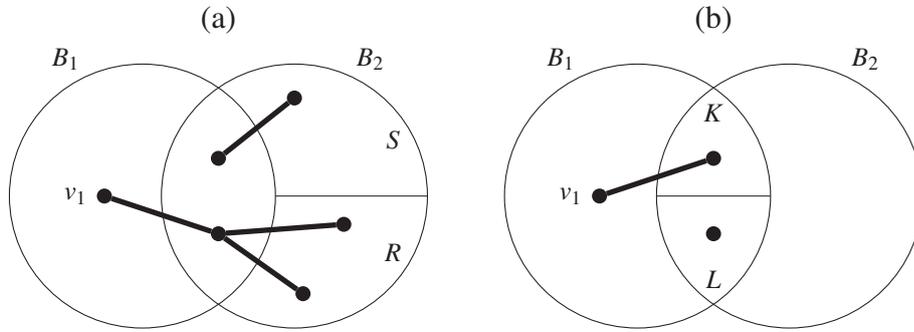


Figura 7.7: Conjuntos S e R (a) e conjuntos K e L (b).

A Figura 7.7 descreve os conjuntos S , R , K e L . Os vértices em K são vértices da intersecção que possuem adjacência com v_1 e os vértices de L são os vértices da intersecção que não possuem adjacência com v_1 . Os vértices em R possuem adjacência com os mesmos vértices da intersecção $B_1 \cap B_2$ que o vértice v_1 possui ou não possuem caso v_1 também não possua adjacência. Os vértices em S possuem adjacência com vértices distintos da intersecção que v_1 possui.

Pelas definições dos conjuntos, temos que $S \cup R \cup K \cup L = B_2$. Como B_1 e B_2 são intersectantes entre si, temos que $K \cup L \neq \emptyset$. Como B_1 e B_2 são distintas e maximais, temos que $S \cup R \neq \emptyset$.

Como B_1 e B_2 não são diferenciadas por aresta, temos que v_1 não é adjacente a vértice algum em R . Como K e L estão contidos em B_1 e que nenhum subconjunto de uma biclique induz um vértice isolado de uma aresta, temos que todo vértice em K é adjacente a todo vértice em L , caso nem K nem L sejam vazios.

Como nenhum dos vértices em S possui vizinhança em comum com v_1 nos vértices da intersecção $B_1 \cap B_2$, temos que nenhum vértice em S é adjacente a vértice algum em K . Como todo vértice em K é adjacente a todo vértice em L , temos que todo vértice em S também é adjacente a todo vértice em L , caso nem S nem L sejam vazios.

Como nenhum dos vértices em L é adjacente a v_1 , temos que nenhum dos vértices em L é adjacente a vértice algum em R . Como todo vértice em K é adjacente a todo vértice em L , temos que todo vértice em K é adjacente a todo vértice em R , caso nem K nem R sejam vazios.

Como nenhum vértice em L é adjacente a vértice algum de R e que todo vértice em L é adjacente a todo vértice em S , temos que todo vértice em S é adjacente a todo vértice em R , caso nem S nem R sejam vazios.

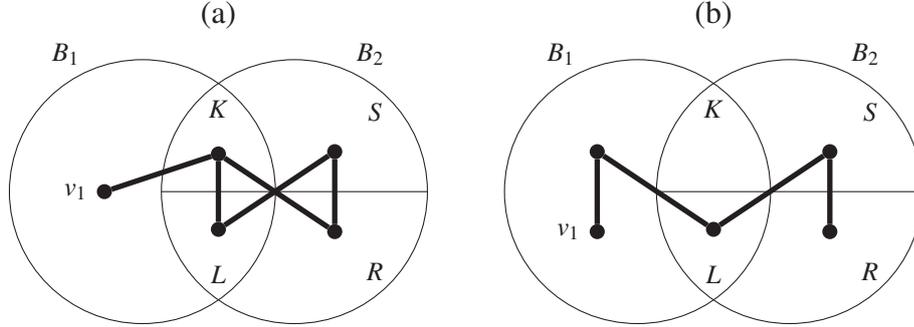


Figura 7.8: Partição da biclique maximal B_2 pelos conjuntos S , R , K e L .

Logo, temos que B_2 é bipartido em $(S \cup K, R \cup L)$. A Figura 7.8 descreve a partição da biclique maximal B_2 pelos conjuntos S , R , K e L . Em (a), o vértice v_1 possui adjacência com algum vértice da intersecção, isto é, vale que $K \neq \emptyset$. Em (b), o vértice v_1 não possui adjacência com vértice algum da intersecção, isto é, vale que $K = \emptyset$.

Suponha que S seja vazio. Como $S \cup R$ não é vazio, temos que R não é vazio. Como $S \cup K = K$ é uma das partes de B_2 , temos que K não é vazio. Como todo vértice em K é adjacente a todo vértice em R , em L e ao vértice v_1 , temos que a união $K \cup L \cup R \cup \{v_1\} = B_2 \cup \{v_1\}$ é biclique de G e — como v_1 não pertence a B_2 — que B_2 não é maximal. Temos, então, que S não é vazio.

Suponha que todo vértice em S é adjacente a v_1 . Como v_1 é adjacente a todo vértice em K , temos que $S \cup K \cup R \cup L \cup \{v_1\} = B_2 \cup \{v_1\}$ é biclique de G e que B_2 não é maximal. Logo, temos que existe algum vértice v_2 em S não adjacente a v_1 . Como v_2 pertence a $S \subseteq B_2 \setminus B_1$ e vale que $\neg P_E(v_1, v_2) \wedge (P_U(v_1, v_2) \wedge \neg P_\cap(v_1, v_2))$, temos que $\{v_1, v_2\}$ é não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 .

Portanto, se B_1 e B_2 não são diferenciadas por aresta, então B_1 e B_2 são diferenciadas por não-aresta. \square

Pelo Teorema 7.3.1, temos que se duas bicliques maximais intersectantes não são diferenciadas por aresta, então são diferenciadas por não-aresta. Pela contrapositiva do teorema, temos que se duas bicliques maximais intersectantes não são diferenciadas por não-aresta, então são diferenciadas por aresta. Logo, vale que duas bicliques maximais intersectantes são diferenciadas por aresta ou por não aresta. Podemos, portanto, enunciar o seguinte corolário.

Corolário 7.3.2. *Seja G um grafo qualquer. Vale que*

$$E(\text{KB}(G)) = E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) \cup E(\text{KB}_{\text{edif}}(G)).$$

A Figura 7.9 ilustra a relação entre os grafos $\text{KB}(G)$, $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ e $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ descrita pelo Corolário 7.3.2. O grafo G é o mesmo grafo descrito pela Figura 7.4 na Seção 7.1, o grafo $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ possui o conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) = \{\{B_1, B_3\}, \{B_1, B_4\}, \{B_2, B_3\}, \{B_2, B_4\}\}$ e o grafo $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ possui o conjunto de arestas $E(\text{KB}_{\text{edif}}(G)) = \{\{B_1, B_2\}, \{B_1, B_3\}, \{B_1, B_4\}, \{B_2, B_3\}, \{B_3, B_4\}\}$. O grafo $\text{KB}(G)$ possui, portanto, como conjunto de arestas a união $E(\text{KB}(G)) = E(\text{KB}_{\text{ndif}}(G)) \cup E(\text{KB}_{\text{edif}}(G))$.

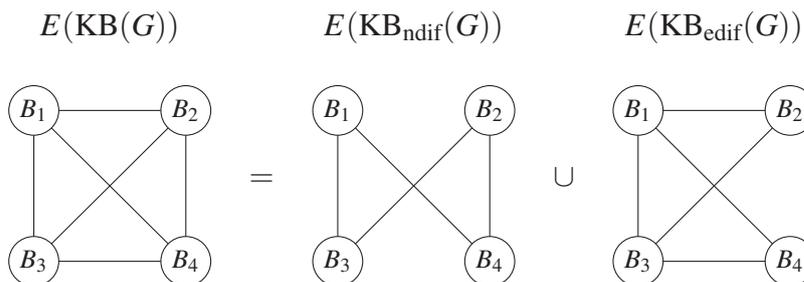


Figura 7.9: Relação entre as arestas do grafo $KB(G)$ com as arestas do grafo $KB_{ndif}(G)$ e as arestas do grafo $KB_{edif}(G)$.

7.4 GRAFOS LIVRES DE BICLIQUES MAXIMAIS DIFERENCIADAS

Nesta seção, descrevemos as classes dos grafos livres de cada uma das propriedades diferenciadoras. Mostramos que a classe dos grafos livres de bicliques maximais diferenciadas por aresta é a mesma que a classe dos grafos livres de triângulos e grafos ciclos de tamanho 5. Também mostramos que a classe dos grafos livres de bicliques maximais diferenciadas por não-aresta é a mesma que a classe dos grafos livres do grafo caminho de tamanho 4 e do grafo pata. A partir de tais resultados, derivamos caracterizações da classe de grafos sem bicliques maximais intersectantes e da classe de grafos cujos grafos KB_{ndif} e KB_{edif} não compartilham aresta.

Considere a definição a seguir.

Definição 7.4.1. Dizemos que um grafo G é livre de aresta diferenciadora se nenhum par de bicliques maximais de G são diferenciadas por aresta.

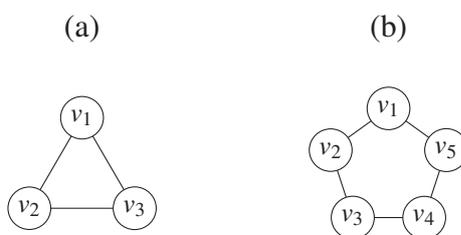


Figura 7.10: Grafo K_3 (a) e grafo C_5 (b).

Dado os grafos K_3 (a) e C_5 (b) descritos pela Figura 7.10, considere o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 7.4.1. Vale que um grafo G qualquer é livre de aresta diferenciadora se, e somente se, também for livre de K_3 e C_5 .

Prova. \Rightarrow) Assuma que exista um subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ de G que induz um triângulo (Figura 7.10 (a)). Considere as bicliques maximais B_1 e B_2 tais que

$$\begin{aligned} \{v_1, v_3\} &\subseteq B_1, \\ \{v_2, v_3\} &\subseteq B_2. \end{aligned}$$

Temos que o vértice v_3 pertence à intersecção $B_1 \cap B_2$, que v_1 pertence a $B_1 \setminus B_2$ e que v_2 pertence a $B_2 \setminus B_1$. Como v_3 é adjacente tanto a v_1 quanto a v_2 , vale que

$$v_3 \in N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset.$$

Logo, temos que o par não-ordenado $\{v_1, v_2\}$ é aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 .

Assuma, portanto, que exista um subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ de G que induz um C_5 onde $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ é um ciclo sem cordas — Figura 7.10 (b). Considere as bicliques maximais B_1 e B_2 tais que

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2, v_3\} &\subseteq B_1, \\ \{v_3, v_4, v_5\} &\subseteq B_2. \end{aligned}$$

Como o subconjunto de vértices $\{v_1, v_3, v_4\}$ induz um vértice isolado e uma aresta em G (um $K_1 \cup K_2$), temos que v_4 não pertence a B_1 . Como o subconjunto de vértices $\{v_3, v_5, v_1\}$ induz um vértice isolado de uma aresta, temos que v_5 não pertence a B_1 . De maneira análoga, temos que os vértices v_1 e v_2 não pertencem a B_2 .

O vértice v_3 pertence à intersecção $B_1 \cap B_2$ e não é adjacente nem a v_1 nem a v_5 . Assuma que v_1 e v_5 não são adjacentes a vértice algum da intersecção $B_1 \cap B_2$. Logo, temos que

$$\left(N_G(v_1) \cup N_G(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Como v_1 é adjacente a v_5 , temos que $\{v_1, v_5\}$ é aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 . Assuma, portanto, que v_1 é adjacente a algum vértice v da intersecção $B_1 \cap B_2$. Como v_3 não é adjacente a v_1 , temos que v_3 é adjacente a v . Como v pertence a B_2 e que v_3 não é adjacente a v_5 , temos que v é adjacente a v_5 . Logo, temos que

$$v \in \left(N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset.$$

Portanto, temos que $\{v_1, v_5\}$ é aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 .

Temos, então, que se G possui algum K_3 ou C_5 induzido, então G possui um par de bicliques maximais intersectantes diferenciadas por aresta. Pela contrapositiva, se G é livre de aresta diferenciadora, então G é livre de K_3 e de C_5 .

\Leftrightarrow Considere as bicliques maximais intersectantes B_1 e B_2 e a aresta diferenciadora $\{v_1, v_2\}$ entre B_1 e B_2 tal que $v_1 \in B_1$ e que $v_2 \in B_2$. Suponha que existe algum vértice v da intersecção $B_1 \cap B_2$ tal que

$$v \in N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \cap B_1 \cap B_2.$$

Como v_1 e v_2 são adjacentes entre si e v é adjacente tanto a v_1 quanto a v_2 , temos que o subconjunto de vértices $\{v, v_1, v_2\}$ induz um K_3 em G .

Suponha, portanto, que

$$\left(N_G(v_1) \cup N_G(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Considere o vértice v' da intersecção $B_1 \cap B_2$. Como v_1 não é adjacente a vértice algum da intersecção, temos que v_1 não é adjacente a v' . Como ambos os vértices v_1 e v' pertencem à biclique maximal B_1 , temos que existe algum vértice $v'_1 \in B_1 \setminus B_2$ adjacente tanto a v_1 quanto a v' . De maneira análoga, existe algum vértice $v'_2 \in B_2 \setminus B_1$ adjacente tanto a v_2 quanto a v' .

Se v'_1 e v'_2 são adjacentes entre si, então o subconjunto de vértices $\{v', v'_1, v'_2\}$ induz um K_3 em G . Se v'_1 é adjacente a v_2 , então o subconjunto de vértices $\{v_1, v'_1, v_2\}$ induz um K_3 em G . De maneira análoga, se v'_2 é adjacente a v_1 , então $\{v_2, v'_2, v_1\}$ induz um K_3 em G . Caso nenhuma de tais adjacências acontece, então o subconjunto de vértices $\{v', v'_1, v_1, v_2, v'_2\}$ induz um C_5 em G .

Portanto, se G possui bicliques maximais intersectantes diferenciadas por aresta, então os grafos K_3 ou C_5 são subgrafos induzidos de G . Pela contrapositiva, se o grafo G é livre de K_3 e de C_5 , então G é livre de aresta diferenciadora.

Temos, então, que G é livre de aresta diferenciadora se, e somente se, for livre de K_3 e C_5 . \square

Considere, portanto, a seguinte definição.

Definição 7.4.2. Dizemos que um grafo G é livre de não-aresta diferenciadora se nenhum par de bicliques maximais de G são diferenciadas por não-aresta.

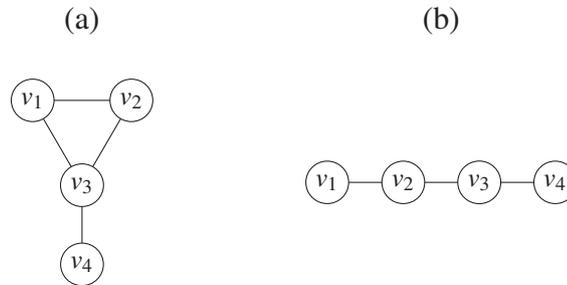


Figura 7.11: Grafo pata (a) e grafo P_4 (b).

Dado os grafos pata (a) e P_4 (b) descritos pela Figura 7.11, considere o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 7.4.2. Vale que um grafo G qualquer é livre de não-aresta diferenciadora se, e somente se, também for livre de P_4 e do grafo pata.

Prova. \Rightarrow) Assuma que G possui um grafo pata induzido pelo subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ induz um triângulo em G e $\{v_3, v_4\}$ é uma aresta de G — Figura 7.11 (a). Considere as bicliques maximais B_1 e B_2 de G tais que

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2\} &\subseteq B_1, \\ \{v_2, v_3, v_4\} &\subseteq B_2. \end{aligned}$$

Como v_3 é adjacente tanto a v_1 quanto a v_2 , temos que v_3 não pertence a B_1 . Da mesma forma, temos que v_1 não pertence a B_2 . Como v_4 não é adjacente nem a v_1 nem a v_2 — que são adjacentes entre si — temos que v_4 não pertence a B_1 . Também temos que B_1 e B_2 são intersectantes entre si.

Considere, portanto, os subconjuntos S e R de vértices de G tais que

$$\begin{aligned} S &= \{v \in (B_1 \cap B_2) \setminus \{v_2, v_3\} \mid \{v_1, v\} \in E(G)\}, \\ R &= \{v \in (B_1 \cap B_2) \setminus \{v_2, v_3\} \mid \{v_1, v\} \notin E(G)\}. \end{aligned}$$

Como o conjunto S está contido em B_1 e todo vértice de S é adjacente a v_1 — que é vértice em B_1 —, temos que S induz um grafo sem aresta em G . Como v_2 é adjacente a v_1 e nenhum dos vértices em $R \subseteq B_1$ é adjacente a v_1 , temos que todos os vértices de R são adjacentes a v_2 e, portanto, que R induz um grafo sem aresta em G . Como todo vértice em S é adjacente a v_1 e todo vértice em R não é adjacente a v_1 , temos que todo o vértice em S é adjacente a todo vértice em R .

Como v_2 é adjacente a v_3 e todo vértice em $R \subseteq B_2$ é adjacente a v_2 , temos que nenhum vértice em R é adjacente a v_3 . Como v_3 é adjacente a v_4 , temos que todo vértice em R é adjacente a v_4 .

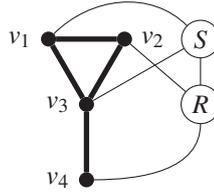


Figura 7.12: Adjacências entre os vértices dos conjuntos S e R caso o grafo pata seja subgrafo induzido de G .

Como todo vértice em R é adjacente a todo vértice em S — mas nenhum vértice em R é adjacente a v_3 —, temos que todo vértice em $S \subseteq B_2$ é adjacente a v_3 . A Figura 7.12 descreve as adjacências entre os vértices em S , R e os que induzem o grafo pata em G .

Logo, temos que $N_G(v_1) \cap B_1 \cap B_2 = \{v_2\} \cup S$ e que $N_G(v_4) \cap B_1 \cap B_2 = R$ e, portanto, que

$$\begin{aligned} (N_G(v_1) \cup N_G(v_4)) \cap B_1 \cap B_2 &= \{v_2\} \cup S \cup R \neq \emptyset, \\ (N_G(v_1) \cap N_G(v_4)) \cap B_1 \cap B_2 &= (\{v_2\} \cup S) \cap R = \emptyset. \end{aligned}$$

Como $v_1 \in B_1 \setminus B_2$ e $v_4 \in B_2 \setminus B_1$ não são adjacentes entre si, temos que $\{v_1, v_4\}$ é não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 .

Assuma, portanto, que G possui um P_4 induzido pelo subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que (v_1, v_2, v_3, v_4) é um caminho sem atalhos de G — Figura 7.11 (b). Considere as bicliques maximais B_1 e B_2 de G tais que

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2, v_3\} &\subseteq B_1, \\ \{v_2, v_3, v_4\} &\subseteq B_2. \end{aligned}$$

Como $v_1 \in B_1$ e $v_2 \in B_1$ são adjacentes entre e v_4 não é adjacente nem a v_1 nem a v_2 , temos que v_4 não pertence a B_1 . Da mesma forma, temos que v_1 não pertence a B_2 . Também temos que B_1 e B_2 são intersectantes entre si.

Considere os subconjuntos S e R de vértices de G tais que

$$\begin{aligned} S &= \{v \in (B_1 \cap B_2) \setminus \{v_2, v_3\} \mid \{v_1, v\} \in E(G)\}, \\ R &= \{v \in (B_1 \cap B_2) \setminus \{v_2, v_3\} \mid \{v_1, v\} \notin E(G)\}. \end{aligned}$$

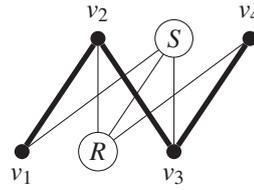


Figura 7.13: Adjacências entre os vértices dos conjuntos S e R caso o grafo P_4 seja subgrafo induzido de G .

De forma similar ao caso anterior, temos que $N_G(v_1) \cap B_1 \cap B_2 = S \cup \{v_2\}$. Entretanto, temos que $N_G(v_4) \cap B_1 \cap B_2 = R \cup \{v_3\}$. A Figura 7.13 ilustra tais adjacências entre os vértices em S , R e os que induzem o grafo P_4 em G . Logo, temos que

$$\begin{aligned} (N_G(v_1) \cup N_G(v_4)) \cap B_1 \cap B_2 &= \{v_2\} \cup S \cup \{v_3\} \cup R \neq \emptyset, \\ (N_G(v_1) \cap N_G(v_4)) \cap B_1 \cap B_2 &= (\{v_2\} \cup S) \cap (\{v_3\} \cup R) = \emptyset. \end{aligned}$$

Portanto, se G possui algum grafo pata ou P_4 como subgrafo induzido, temos que G possui bicliques maximais intersectantes diferenciadas por não-aresta. Pela contrapositiva, temos que se G é livre de não-aresta diferenciadora, então G é livre de P_4 e do grafo pata.

\Leftarrow) Considere as bicliques maximais intersectantes B_1 e B_2 de G e a não-aresta diferenciadora $\{v_1, v_2\}$ entre elas tal que v_1 pertence a B_1 e v_2 pertence a B_2 . Considere também os subconjuntos S , R , K e L de vértices de G tais que

$$\begin{aligned} S &= N_G(v_1) \cap B_1 \cap B_2, \\ R &= N_G(v_2) \cap B_1 \cap B_2, \\ K &= \{v \in B_1 \setminus B_2 \mid \{v_1, v\} \in E(G)\}, \\ L &= \{v \in B_2 \setminus B_1 \mid \{v_2, v\} \in E(G)\}. \end{aligned}$$

Como $S \cup K = B_1 \cap N_G(v_1)$ e $R \cup L = B_2 \cap N_G(v_2)$, temos que tanto $S \cup K$ quanto $R \cup L$ não são vazios. Como $\{v_1, v_2\}$ é não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 , temos que a união $S \cup R$ não é vazia e que a intersecção $S \cap R$ é vazia. Logo, temos que nenhum vértice em R é adjacente a v_1 e que nenhum vértice em S é adjacente a v_2 . Como a união $S \cup R$ está contida na intersecção $B_1 \cap B_2$, temos que todo vértice em R é adjacente a todo vértice em S .

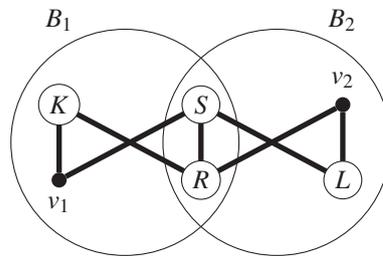


Figura 7.14: Adjacências entre os vértices v_1 , v_2 e os vértices dos conjuntos S , R , K e L .

Como todo vértice em K é adjacente a v_1 e nenhum vértice em R é adjacente a v_1 , temos que todo vértice em K é adjacente a todo vértice em R . Da mesma forma, temos que todo vértice em L é adjacente a todo vértice em S . Também temos que nenhum vértice em K é adjacente a vértice algum em S e que nenhum vértice em L é adjacente a vértice algum em R . A Figura 7.14

ilustra — de forma não exaustiva — as adjacências entre os vértices v_1 , v_2 e os vértices dos conjuntos S , R , K e L .

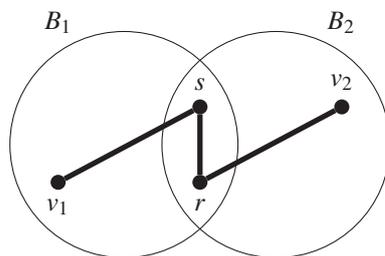


Figura 7.15: Grafo P_4 induzido.

Suponha que v_1 não é adjacente a todo vértice em L e que v_2 não é adjacente a todo vértice em K . Se nem S nem R são vazios, então — para todo vértice $s \in S$ e todo vértice $r \in R$ — vale que o conjunto $\{v_1, s, r, v_2\}$ induz um P_4 em G . A Figura 7.15 destaca o grafo P_4 induzido desse caso.

Se S é vazio, então temos que K e R não são vazios e — para todo $k \in K$ e todo $r \in R$ — que $\{v_1, k, r, v_2\}$ induz um P_4 em G . Da mesma forma, se R é vazio, então — para todo $s \in S$ e todo $l \in L$ — o conjunto $\{v_1, s, l, v_2\}$ induz um P_4 em G . Como a união $S \cup R$ não é vazia, temos que S e R não são vazios simultaneamente.

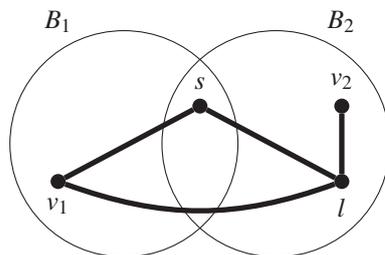


Figura 7.16: Grafo pata induzido.

Suponha, portanto, que o vértice v_1 é adjacente a todos os vértices em L . Se R é vazio, então L não é vazio e — para todo $s \in S$ e todo $l \in L$ — que o conjunto $\{v_1, s, l, v_2\}$ induz um grafo pata em G . A Figura 7.16 destaca o grafo pata induzido desse caso. Os demais casos são análogos ao caso de v_1 não ser adjacente a todo vértice em L .

De maneira análoga, se v_2 é adjacente a todo vértice em K e se S é vazio, então temos — para todo $k \in K$ e todo $r \in R$ — que o conjunto $\{v_1, k, r, v_2\}$ induz um grafo pata em G . Os demais casos são análogos ao caso de v_2 não ser adjacente a todo vértice em K .

Logo, temos que se existe uma não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 , então P_4 ou o grafo pata são subgrafos induzidos de G . Pela contrapositiva, se G é livre de P_4 e do grafo pata, então G é livre de não-aresta diferenciadora.

Portanto, temos que G é livre de não-aresta diferenciadora se, e somente se, é livre de P_4 e do grafo pata. \square

Pelo Corolário 7.3.2, temos que o conjunto de arestas do grafo biclique de qualquer grafo G é a união entre o conjunto de arestas de $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ e o conjunto de arestas de $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$. O Teorema 7.4.1 enuncia que o grafo $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ não possui aresta se, e somente se, o grafo G for livre de K_3 e de C_5 , quanto o Teorema 7.4.2 enuncia que o grafo $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ não possui aresta se, e somente se, o grafo G for livre de P_4 e do grafo pata. A Figura 7.17 ilustra tais relações

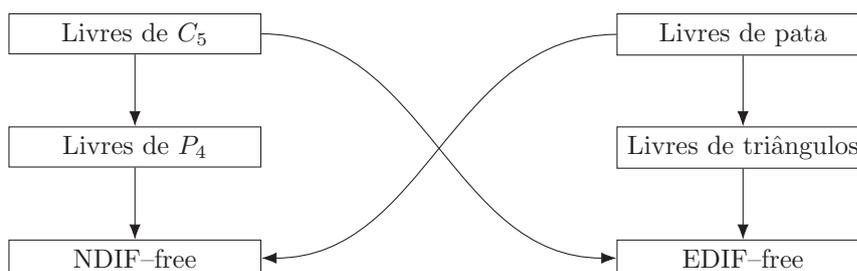


Figura 7.17: Diagrama de inclusão com as classes dos grafos livres de arestas e não-arestas diferenciadoras.

entre as classes. Como K_3 é subgrafo induzido do grafo pata e o P_4 é subgrafo induzido do grafo C_5 , podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 7.4.3. *Seja G um grafo qualquer. Vale que $\text{KB}(G)$ não possui arestas se, e somente se, o grafo G for livre de K_3 e de P_4 .*

Como o grafo pata contém um triângulo induzido, temos que um grafo G com um grafo pata induzido também possui bicliques maximais diferenciadas por arestas. De forma similar, se um grafo G contém um C_5 induzido — que contém um P_4 induzido —, então G também possui bicliques maximais diferenciadas por não-aresta. Portanto, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 7.4.4. *Seja G um grafo qualquer. Vale que $E(\text{KB}_{ndif}(G)) \cap E(\text{KB}_{edif}(G)) = \emptyset$ se, e somente se, o grafo G for livre do grafo pata e de C_5 .*

8 GRAFO BICLIQUE DE UM JOIN

Uma das classes de interesse para o estudo do operador biclique é a classe dos cografos — grafos que são obtidos pelos operadores de complemento e união disjunta com outros cografos, recursivamente, a partir do K_1 . Tal classe é livre de bicliques maximais mutuamente inclusas — por não permitir grafos P_4 induzidos e, portanto, diferenciação por não-aresta —, o que nos distancia das peculiaridades das bicliques maximais da classe dos grafos livres de triângulos — onde suas bicliques maximais intersectantes possui forte relação com a inclusão mútua. O Corolário 7.4.3 também mostra que a classe dos cografos livres de triângulos é a mesma que a dos grafos livres de intersecções entre suas bicliques maximais.

Entretanto, devido ao limite de nosso conhecimento às estruturas de bicliques maximais em cografos, nos limitamos — neste capítulo — ao estudo do grafo biclique do grafo obtido pelo operador *join* entre dois grafos.

O operador *join* entre dois grafos G e H equivale ao complemento da união disjunta entre o complemento de G e o complemento de H . Ou seja, vale a expressão

$$G \nabla H = \overline{\overline{G} \cup \overline{H}}.$$

Neste capítulo, estudamos as propriedades das bicliques maximais de um *join* entre dois grafos para descrevermos o seu grafo biclique, onde categorizamos suas arestas em termos de propriedades diferenciadoras, intersecção por aresta e pelas propriedades de inclusão mútua.

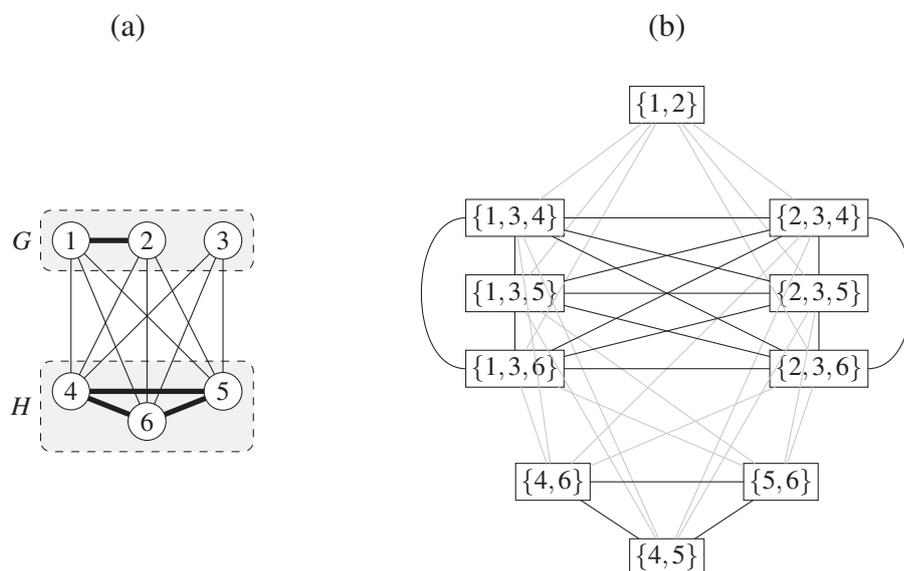


Figura 8.1: Grafo *join* $G \nabla H$ (a) e grafo biclique $KB(G \nabla H)$ (b).

A Figura 8.1 descreve o grafo *join* $G \nabla H$ (a) e o grafo biclique $KB(G \nabla H)$. O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}\}$. O grafo H possui o conjunto de vértices $V(H) = \{4, 5, 6\}$ e o conjunto de arestas $E(H) = \{\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$. O grafo $G \nabla H$ possui o conjunto de vértices $V(G \nabla H) = V(G) \cup V(H)$ e o conjunto de arestas $E(G \nabla H) = E(G) \cup E(H) \cup \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$. O grafo $G \nabla H$ possui as bicliques maximais $\{1, 2\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$ e $\{2, 3, 6\}$.

Na Seção 8.1, mostramos que as bicliques maximais de um grafo G e de um grafo H também são bicliques maximais do grafo *join* $G \nabla H$. Também mostramos que seu conjunto de bicliques maximais $\mathcal{B}_{G \nabla H}$ contém precisamente \mathcal{B}_G , \mathcal{B}_H e o conjunto $\mathcal{J}_{G \cup H}$, que denota o conjunto de conjuntos independentes maximais da união disjunta $G \cup H$.

Na Seção 8.2, descrevemos as intersecções entre as bicliques maximais de um *join* entre dois grafos, onde derivamos certas propriedades de seu grafo biclique.

Na Seção 8.3, descrevemos as arestas do grafo biclique de um *join* entre dois grafos em termos de propriedades diferenciadoras, intersecção por aresta e inclusão mútua.

8.1 BICLIQUES MAXIMAIS DO JOIN ENTRE DOIS GRAFOS

Nesta seção, mostramos quais são as bicliques maximais do *join* entre dois grafos. Provamos que as bicliques maximais de dois grafos também são bicliques maximais do grafo *join* entre eles. Também provamos que a união entre qualquer conjunto independente de um dos grafos e qualquer conjunto independente de outro grafo é biclique maximal do grafo *join* e que as bicliques maximais de cada grafo e os conjuntos independentes da união disjunta de ambos os grafos formam o conjunto de bicliques maximais do *join* entre eles.

Considere o enunciado da seguinte proposição.

Proposição 8.1.1. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que nenhuma biclique maximal de $G \nabla H$ contém simultaneamente uma aresta de um dos grafos e um vértice de outro.*

Prova. Considere os vértices $g, g' \in V(G)$ adjacentes entre si e um vértice $h \in V(H)$ qualquer. Como o conjunto $\{g, g', h\}$ induz um triângulo em $G \nabla H$, temos que nenhuma biclique maximal de $G \nabla H$ contém os três vértices simultaneamente. Logo, nenhuma biclique maximal de $G \nabla H$ contém uma aresta de G e um vértice de H . De maneira análoga, nenhuma biclique maximal de $G \nabla H$ contém uma aresta de H e um vértice de G . \square

Considere, então, o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 8.1.2. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que toda biclique maximal de G e toda biclique maximal de H são bicliques maximais de $G \nabla H$. Isto é, vale que*

$$\mathcal{B}_{G \cup H} \subseteq \mathcal{B}_{G \nabla H}.$$

Prova. Pela Proposição 8.1.1, nenhuma biclique maximal de $G \nabla H$ contém uma aresta de G e um vértice de H . Logo, toda biclique maximal que contém alguma aresta de G contém apenas vértices de G e, portanto, as bicliques maximais de G são bicliques maximais de $G \nabla H$. Da mesma forma, bicliques maximais de H são bicliques maximais de $G \nabla H$. Como as bicliques maximais de $G \cup H$ são as mesmas que as bicliques maximais de G e de H , temos que $\mathcal{B}_{G \cup H} \subseteq \mathcal{B}_{G \nabla H}$. \square

Como o operador *join* requer dois grafos cujos conjuntos de vértices sejam disjuntos, temos que nenhuma biclique maximal de um dos grafos intersecta biclique maximal alguma de outro. Podemos, portanto, enunciar o seguinte corolário.

Corolário 8.1.3. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que $\text{KB}(G \cup H)$ é subgrafo induzido de $\text{KB}(G \nabla H)$.*

Considere a seguinte proposição que relaciona os conjuntos independentes maximais da união disjunta de dois grafos com seus respectivos conjuntos independentes maximais.

Proposição 8.1.4. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que*

$$\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\} = \mathcal{J}_{G \cup H}.$$

Prova. Considere quaisquer conjuntos independentes maximais $i \in \mathcal{J}_G$ e $j \in \mathcal{J}_H$. Como $V(G)$ e $V(H)$ são disjuntos entre si e nenhum vértice em $V(G)$ é adjacente a vértice algum em $V(H)$ em $G \cup H$, temos que $i \cup j$ é conjunto independente de $G \cup H$. Como i é conjunto independente maximal de G , temos que $i \cup \{v\} \cup j$, para qualquer vértice $v \in V(G) \setminus i$, não é conjunto independente maximal de $G \cup H$. Da mesma forma, vale que $i \cup j \cup \{v\}$, para qualquer vértice $v \in V(H) \setminus j$, não é conjunto independente maximal de $G \cup H$. Portanto, temos que $i \cup j$ é conjunto independente maximal de $G \cup H$ e que

$$\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\} \subseteq \mathcal{J}_{G \cup H}.$$

Considere o conjunto independente maximal k de $G \cup H$. Como $k \subseteq V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$, temos que k admite uma partição $(k \cap V(G), k \cap V(H))$. Como k é conjunto independente, vale que $k \cap V(G)$ também é conjunto independente. Como nenhum elemento de $k \cap V(G)$ é adjacente a elemento algum de $V(H)$, então $k \cap V(G)$ possui o maior número possível de vértices de G , isto é, que $k \cap V(G)$ é conjunto independente maximal de G . Da mesma forma, temos que $k \cap V(H)$ é conjunto independente maximal de H . Logo, temos que

$$\mathcal{J}_{G \cup H} \subseteq \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\}.$$

Portanto, vale que

$$\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\} = \mathcal{J}_{G \cup H}.$$

□

Podemos, portanto, enunciar o seguinte teorema.

Teorema 8.1.5. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que*

$$\mathcal{J}_{G \cup H} \subseteq \mathcal{B}_{G \nabla H}.$$

Prova. Considere um conjunto independente maximal qualquer k de $G \cup H$. Pela Proposição 8.1.4, temos que existem $i \in \mathcal{J}_G$ e $j \in \mathcal{J}_H$ tais que $k = i \cup j$. Como todo vértice $v \in i$ é adjacente a todos os vértices em j em $G \nabla H$, temos que a união $i \cup j$ induz um bipartido completo em $G \nabla H$.

Considere um vértice v qualquer de G tal que v não pertence ao conjunto independente i . Como i é conjunto independente maximal de G , temos que v é adjacente a algum vértice $v' \in i$.

Pela Proposição 8.1.1, temos que nenhuma biclique maximal de $G \nabla H$ contém a união $i \cup j$ e a aresta $\{v, v'\}$. Portanto, temos que nenhum vértice que não esteja em i pertence a biclique alguma de $G \nabla H$ que contenha $i \cup j$. Da mesma forma, temos que nenhum vértice de H que não esteja em j pertence a uma biclique que contenha $i \cup j$. Logo, temos que $i \cup j = k$ é biclique maximal de $G \nabla H$. \square

Considere, então, o enunciado da seguinte proposição.

Proposição 8.1.6. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que as bicliques maximais de $G \nabla H$ não contêm simultaneamente alguma aresta de G ou de H e alguma aresta do join entre G e H .*

Prova. Se uma biclique maximal de $G \nabla H$ contém aresta de um dos grafos, temos — pela Proposição 8.1.1 — que tal biclique maximal não contém vértice algum de outro grafo e, portanto, não contém aresta do join entre G e H .

Se uma biclique maximal de $G \nabla H$ contém aresta do join entre G e H , vale que tal biclique maximal contém vértices de G e de H . Pela Proposição 8.1.1, vale que a biclique maximal não contém aresta de G por possuir vértice de H e não contém aresta de H por possuir vértice de G .

Logo, vale que as bicliques maximais de $G \nabla H$ não contêm simultaneamente alguma aresta de G ou de H e alguma aresta do join entre G e H . \square

Proposição 8.1.7. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que $\mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H}$ equivale ao conjunto de bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do join entre G e H .*

Prova. Pela Proposição 8.1.6, toda biclique maximal de $G \nabla H$ não contém simultaneamente uma aresta de G ou de H e uma aresta do join entre G e H . Pela Proposição 8.1.1, se uma biclique maximal de $G \nabla H$ contém aresta de G ou de H , então não possui vértice do outro grafo. Logo, tal biclique — por ser maximal — pertence a \mathcal{B}_G ou a \mathcal{B}_H . Portanto, temos que as bicliques maximais que contêm arestas do join pertencem a $\mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H}$.

Como $E(G \nabla H) = E(G) \cup E(H) \cup \{\{g, h\} \mid \forall g \in V(G), \forall h \in V(H)\}$, temos que o conjunto de arestas de $G \nabla H$ admite uma partição $(E(G \cup H), E(G \nabla H) \setminus E(G \cup H))$, isto é, entre o conjunto de arestas de G ou de H e o conjunto de arestas do join entre G e H . Como toda biclique maximal contém aresta, temos que a biclique maximal de $G \nabla H$ que não contém aresta de G ou de H contém aresta do join entre G e H . Logo, temos que o conjunto $\mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H}$ está contido no conjunto de bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do join.

Logo, vale que $\mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H}$ equivale ao conjunto de bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do join. \square

Podemos, portanto, descrever o conjunto de bicliques maximais do join entre dois grafos pelo seguinte teorema.

Teorema 8.1.8. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que*

$$\mathcal{B}_{G \nabla H} = \mathcal{B}_{G \cup H} \cup \mathcal{J}_{G \cup H}.$$

Prova. \Rightarrow) Pelos Teoremas 8.1.2 e 8.1.5, temos que

$$\mathcal{B}_{G \cup H} \cup \mathcal{J}_{G \cup H} \subseteq \mathcal{B}_{G \nabla H}.$$

\Leftrightarrow) Pela Proposição 8.1.7, temos que $\mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H}$ é o conjunto de bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do *join*. Considere uma biclique maximal $B \in \mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H}$. Pela Proposição 8.1.6, temos que B não contém aresta de G ou de H . Logo, vale que $B \cap V(G)$ e $B \cap V(H)$ são conjuntos independentes de $G \nabla H$. Como G e H são disjuntos e todo vértice de G é adjacente a todo vértice de H em $G \nabla H$, temos que B é bipartido em $(B \cap V(G), B \cap V(H))$. Como B é maximal, vale que $B \cap V(G)$ possui o maior número possível de vértices de G , isto é, que $B \cap V(G)$ é conjunto independente maximal de G . Da mesma forma, vale que $B \cap V(H)$ é conjunto independente maximal de H . Logo, temos que $B \in \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I}_G \\ j \in \mathcal{I}_H}} \{i \cup j\}$. Pela Proposição 8.1.4, temos que $B \in \mathcal{J}_{G \cup H}$. Vale, então, que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H} &\subseteq \mathcal{J}_{G \cup H} \iff \\ (\mathcal{B}_{G \nabla H} \setminus \mathcal{B}_{G \cup H}) \cup \mathcal{B}_{G \cup H} &\subseteq \mathcal{J}_{G \cup H} \cup \mathcal{B}_{G \cup H} \iff \\ \mathcal{B}_{G \nabla H} \cup \mathcal{B}_{G \cup H} &\subseteq \mathcal{J}_{G \cup H} \cup \mathcal{B}_{G \cup H}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 8.1.2, vale que $\mathcal{B}_{G \cup H} \subseteq \mathcal{B}_{G \nabla H}$. Logo, temos que

$$\mathcal{B}_{G \nabla H} \subseteq \mathcal{B}_{G \cup H} \cup \mathcal{J}_{G \cup H}.$$

Portanto, vale que

$$\mathcal{B}_{G \nabla H} = \mathcal{B}_{G \cup H} \cup \mathcal{J}_{G \cup H}.$$

□

Pelo Teorema 8.1.8, podemos descrever o grafo biclique do *join* entre dois grafos com o enunciado do seguinte corolário.

Corolário 8.1.9. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que $\text{KB}(G \nabla H)$ equivale ao grafo de intersecção das bicliques maximais e conjuntos independentes maximais de $G \cup H$.*

Pela Proposição 8.1.7 e pelo Teorema 8.1.8, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 8.1.10. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que $\mathcal{J}_{G \cup H}$ é o conjunto de bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do *join* entre G e H .*

Como o grafo de intersecção dos conjuntos independentes de $G \cup H$ é o grafo clique de $\overline{G \cup H}$ e que os conjuntos $\mathcal{B}_{G \cup H}$ e $\mathcal{J}_{G \cup H}$ são disjuntos entre si, temos o seguinte corolário.

Corolário 8.1.11. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que $\text{K}(\overline{G \cup H})$ é subgrafo induzido de $\text{KB}(G \nabla H)$. Também vale que $\text{KB}(G \cup H) \cup \text{K}(\overline{G \cup H})$ é subgrafo gerador de $\text{KB}(G \nabla H)$.*

8.2 INTERSECÇÕES ENTRE BICLIQUES MAXIMAIS DE UM JOIN

Nesta seção, descrevemos as intersecções entre bicliques maximais de um *join* entre dois grafos e derivamos algumas propriedades estruturais de seu grafo biclique. Tais propriedades estruturais são descritas em termos de operadores sobre grafos, levando a uma descrição parcial do grafo biclique de um *join*.

Um dos operadores de interesse é o produto direto entre dois grafos, que é descrito pela definição a seguir.

Definição 8.2.1. *Sejam G e H grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Chamamos de produto direto ou de produto tensorial entre G e H o grafo denotado por $G \times H$ onde*

- *O conjunto de vértices $V(G \times H)$ equivale ao produto cartesiano $V(G) \times V(H)$; e*
- *Dois vértices (g, h) e (g', h') — com $g, g' \in V(G)$ e $h, h' \in V(H)$ — são adjacentes entre si se, e somente se, o vértice g for adjacente ao vértice g' em G e o vértice h for adjacente ao vértice h' em H .*

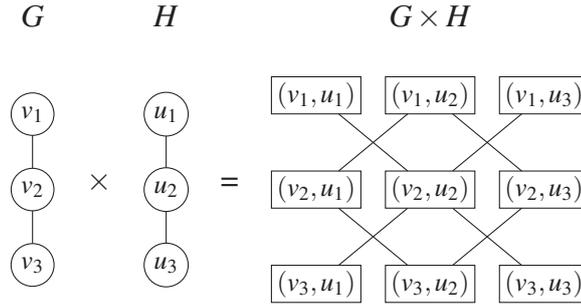


Figura 8.2: Produto direto entre os grafos G e H .

A Figura 8.2 descreve os grafos G , H e o produto direto $G \times H$. O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$. O grafo H possui o conjunto de vértices $V(H) = \{u_1, u_2, u_3\}$ e o conjunto de arestas $E(H) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}\}$. O grafo $G \times H$ possui o conjunto de vértices $V(G \times H) = V(G) \times V(H) = \{(v_1, u_1), (v_1, u_2), (v_1, u_3), (v_2, u_1), (v_2, u_2), (v_2, u_3), (v_3, u_1), (v_3, u_2), (v_3, u_3)\}$ e o conjunto de arestas $E(G \times H) = \{\{(v_1, u_1), (v_2, u_2)\}, \{(v_1, u_2), (v_2, u_1)\}, \{(v_1, u_2), (v_2, u_3)\}, \{(v_1, u_3), (v_2, u_2)\}, \{(v_2, u_1), (v_3, u_2)\}, \{(v_2, u_2), (v_3, u_1)\}, \{(v_2, u_2), (v_3, u_3)\}, \{(v_2, u_3), (v_3, u_2)\}\}$.

Podemos descrever as intersecções entre bicliques maximais que contêm arestas do *join* pelo enunciado do seguinte teorema.

Teorema 8.2.1. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que o grafo $\overline{K(G)} \times \overline{K(H)}$ é isomorfo ao grafo de intersecção das bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do *join* entre G e H .*

Prova. Considere o grafo clique $\overline{K(G)}$. Vale, por definição, que seus vértices são as cliques maximais do grafo \overline{G} que, por sua vez, são conjuntos independentes maximais de G . Da mesma maneira, os vértices de $\overline{K(H)}$ são conjuntos independentes maximais de H . Logo, temos que

$$\begin{aligned} V(\overline{K(G)} \times \overline{K(H)}) &= V(\overline{K(G)}) \times V(\overline{K(H)}) \\ &= \mathcal{I}_G \times \mathcal{I}_H. \end{aligned}$$

Como os conjuntos de vértices de G e H são disjuntos, temos que toda biclique maximal formada pela união $i \cup j$ — para $i \in \mathcal{I}_G$ e $j \in \mathcal{I}_H$ — de $G \nabla H$ admite partição $(i, j) \in \mathcal{I}_G \times \mathcal{I}_H$. Também temos que, para todo par ordenado $(i, j) \in \mathcal{I}_G \times \mathcal{I}_H$, a união $i \cup j$ pertence ao conjunto $\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I}_G \\ j \in \mathcal{I}_H}} \{i \cup j\}$. Logo, existe a bijeção entre os vértices de $\overline{K(G)} \times \overline{K(H)}$ e os elementos de $\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I}_G \\ j \in \mathcal{I}_H}} \{i \cup j\}$.

Como os grafos $\overline{K(G)}$ e $\overline{K(H)}$ denotam os grafos de intersecção dos conjuntos independentes maximais de G e H respectivamente, temos que os grafos $\overline{\overline{K(G) \times K(H)}}$ e $\overline{\overline{K(H) \times K(G)}}$ são os grafos de disjunção dos conjuntos independentes maximais de G e H respectivamente.

Sejam i e i' conjuntos independentes maximais de G e j e j' conjuntos independentes maximais de H . Vale, portanto, que os vértices (i, j) e (i', j') são adjacentes no grafo $\overline{\overline{K(G) \times K(H)}}$ se, e somente se, o conjunto i for disjunto do conjunto independente i' e o conjunto independente j for disjunto do conjunto independente j' . Logo, os vértices (i, j) e (i', j') são adjacentes no grafo $\overline{\overline{K(G) \times K(H)}}$ se, e somente se, os conjuntos i e i' possuem intersecção ou se os conjuntos j e j' possuem intersecção. Temos, então, que (i, j) e (i', j') são adjacentes em $\overline{\overline{K(G) \times K(H)}}$ são adjacentes se, e somente se, os conjuntos $i \cup j$ e $i' \cup j'$ possuem intersecção.

Portanto, temos que o grafo $\overline{\overline{K(G) \times K(H)}}$ é isomorfo ao grafo de intersecção dos elementos de $\bigcup_{i \in \mathcal{J}_G} \bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$. Pela Proposição 8.1.4, temos que $\overline{\overline{K(G) \times K(H)}}$ é isomorfo ao grafo de intersecção dos elementos de $\mathcal{J}_{G \cup H}$. Pelo Corolário 8.1.10, temos que $\overline{\overline{K(G) \times K(H)}}$ é isomorfo ao grafo de intersecção das bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do *join* entre G e H . □

	$h = h'$	$\{h, h'\} \in E(K(\overline{H}))$	$\{h, h'\} \notin E(K(\overline{H}))$
$g = g'$			
$\{g, g'\} \in E(K(\overline{G}))$			
$\{g, g'\} \notin E(K(\overline{G}))$			

Tabela 8.1: Relações de intersecção entre bicliques maximais formadas pelas arestas do *join* entre G e H descritas em função de $g, g' \in V(K(\overline{G}))$ e $h, h' \in V(K(\overline{H}))$.

A Tabela 8.1 descreve os diferentes tipos de intersecções entre as bicliques maximais de $G \nabla H$ presentes em $\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\}$ em função da adjacência dos vértices correspondentes de $\overline{K(\overline{G})}$ e de $\overline{K(\overline{H})}$ em $\overline{K(\overline{G})} \times \overline{K(\overline{H})}$. Como demonstrado na prova do Teorema 8.2.1, os vértices de $\overline{K(\overline{G})} \times \overline{K(\overline{H})}$ são adjacentes entre si se, e somente se, os elementos de $\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\}$ correspondentes são intersectantes. A tabela é uma representação visual da prova.

Pelo isomorfismo entre o grafo de intersecção das bicliques maximais de $G \nabla H$ que contém arestas do *join* — que, pelo Corolário 8.1.10, é o grafo de intersecção dos elementos de $\mathcal{J}_{G \cup H}$ — e o grafo $\overline{K(\overline{G})} \times \overline{K(\overline{H})}$ — como apresentado pelo Teorema 8.2.1 — e pela inclusão de $\mathcal{J}_{G \cup H}$ ao conjunto de bicliques maximais de $G \nabla H$ — como apresentado pelo Teorema 8.1.5 —, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 8.2.2. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que $\overline{K(\overline{G})} \times \overline{K(\overline{H})}$ é isomorfo a algum subgrafo induzido de $\text{KB}(G \nabla H)$.*

Pelo Corolário 8.1.11 e pelo Teorema 8.2.1, temos o seguinte corolário.

Corolário 8.2.3. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que a união disjunta $\text{KB}(G) \cup \text{KB}(H) \cup \overline{K(\overline{G})} \times \overline{K(\overline{H})}$ é isomorfo a algum subgrafo gerador de $\text{KB}(G \nabla H)$.*

Alternativamente, podemos fazer uso do seguinte teorema enunciado por Neumann-Lara et al. (1978) — e também apresentado por Szwarcfiter (2003) — para chegarmos ao Corolário 8.2.3.

Teorema 8.2.4 (Neumann-Lara et al., 1978, Szwarcfiter, 2003). *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos. Vale que*

$$\overline{K(G \nabla H)} \simeq \overline{K(G)} \times \overline{K(H)}.$$

Pelo Teorema 8.2.4, temos que $\overline{K(\overline{G \cup H})} = \overline{\overline{K(\overline{G \cup H})}} = \overline{\overline{K(\overline{G \nabla H})}}$ é isomorfo a $\overline{K(\overline{G})} \times \overline{K(\overline{H})}$. Pelo Corolário 8.1.11, vale que $\text{KB}(G \cup H) \cup \overline{K(\overline{G})} \times \overline{K(\overline{H})}$ é isomorfo a um subgrafo gerador de $\text{KB}(G \nabla H)$. Entretanto, vale destacar a associação entre os conjuntos independentes maximais de $G \cup H$ e as bicliques maximais de $G \nabla H$ que contém arestas do *join* enunciada pelo Teorema 8.2.1.

Vale notar que os enunciados dos Corolários 8.1.11 e 8.2.3 não descrevem todas as arestas do grafo $\text{KB}(G \nabla H)$, levando a descrições parciais do grafo biclique de um *join*. Mais precisamente, as arestas do grafo biclique não descritas pelos enunciados dos teoremas são aquelas que correspondem às intersecções entre as bicliques maximais dos dois grafos — G e H — e as bicliques maximais que contém arestas do *join*, isto é, aquelas que descrevem intersecções entre as bicliques maximais de $G \cup H$ e os conjuntos independentes maximais de $G \cup H$. Para a descrição de tais arestas, considere a seguinte definição.

Definição 8.2.2. *Chamamos de bigrafo biclique de um grafo G com a partição (X, Y) das bicliques maximais de G — isto é, onde $\mathcal{B}_G = X \cup Y$ — o bigrafo de intersecção que admite a bipartição (X, Y) de \mathcal{B}_G como modelo. Denotamos o bigrafo biclique de G com a partição (X, Y) das bicliques maximais de G por $\text{biKB}(G, X, Y)$.*

Logo, as arestas do grafo biclique $\text{KB}(G \nabla H)$ não descritas pelos Corolários 8.1.11 e 8.2.3 são as mesmas que são descritas pelo bigrafo biclique $\text{biKB}(G \nabla H, \mathcal{B}_{G \cup H}, \mathcal{J}_{G \cup H})$. Portanto, vale o seguinte corolário.

Corolário 8.2.5. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos. Vale que*

$$E(\text{KB}(G \nabla H)) = E(\text{KB}(G \cup H) \cup \text{K}(\overline{G \cup H})) \cup E(\text{biKB}(G \nabla H, \mathcal{B}_{G \cup H}, \mathcal{J}_{G \cup H})).$$

8.3 ARESTAS DO GRAFO BICLIQUE DE UM JOIN

Nesta seção, categorizamos as arestas do grafo biclique de um *join* em termos de propriedades diferenciadoras, intersecção por aresta e inclusão mútua. Descrevemos grafos isomorfos aos grafos KB_e e KB_m do *join* entre dois grafos por meio de operadores e mostramos quais arestas do grafo biclique correspondem a bicliques maximais diferenciadas por aresta por não-aresta.

Para a descrição do grafo isomorfo ao grafo KB_e do *join* entre dois grafos, considere a seguinte definição.

Definição 8.3.1. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Chamamos de produto forte entre G e H o grafo denotado por $G \boxtimes H$ com o conjunto de vértices equivalente ao produto cartesiano $V(G) \times V(H)$ e dois vértices (g, h) e (g', h') — com $g, g' \in V(G)$ e $h, h' \in V(H)$ — são adjacentes entre si se, e somente se, satisfazem qualquer das seguintes condições:*

- $g = g'$ e $\{h, h'\} \in E(H)$; ou
- $h = h'$ e $\{g, g'\} \in E(G)$; ou
- $\{g, g'\} \in E(G)$ e $\{h, h'\} \in E(H)$.

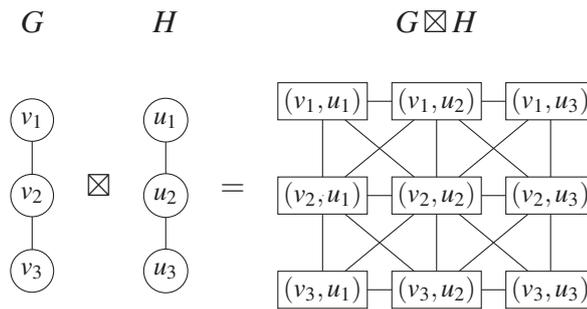


Figura 8.3: Produto forte entre os grafos G e H .

A Figura 8.3 descreve os grafos G , H e o produto forte $G \boxtimes H$. O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$. O grafo H possui o conjunto de vértices $V(H) = \{u_1, u_2, u_3\}$ e o conjunto de arestas $E(H) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3)\}$. O grafo $G \boxtimes H$ possui o conjunto de vértices $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H) = \{(v_1, u_1), (v_1, u_2), (v_1, u_3), (v_2, u_1), (v_2, u_2), (v_2, u_3), (v_3, u_1), (v_3, u_2), (v_3, u_3)\}$ e o conjunto de arestas $E(G \boxtimes H) = \{(v_1, u_1), (v_1, u_2)\}, \{(v_1, u_1), (v_2, u_1)\}, \{(v_1, u_1), (v_2, u_2)\}, \{(v_1, u_2), (v_1, u_3)\},$

$\{(v_1, u_2), (v_2, u_1)\}, \{(v_1, u_2), (v_2, u_2)\}, \{(v_1, u_2), (v_2, u_3)\}, \{(v_1, u_3), (v_2, u_2)\}, \{(v_1, u_3), (v_2, u_3)\},$
 $\{(v_2, u_1), (v_2, u_2)\}, \{(v_2, u_1), (v_3, u_1)\}, \{(v_2, u_1), (v_3, u_2)\}, \{(v_2, u_2), (v_2, u_3)\}, \{(v_2, u_2), (v_3, u_1)\},$
 $\{(v_2, u_2), (v_3, u_2)\}, \{(v_2, u_2), (v_3, u_3)\}, \{(v_2, u_3), (v_3, u_2)\}, \{(v_2, u_3), (v_3, u_3)\}, \{(v_3, u_1), (v_3, u_2)\},$
 $\{(v_3, u_2), (v_3, u_3)\}$. Vale notar que o grafo $G \times H$ é subgrafo gerador de $G \boxtimes H$.

Considere também a seguinte definição.

Definição 8.3.2. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Dizemos que os elementos $i \cup j$ e $i' \cup j'$ de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$ — com $i \cup j \neq i' \cup j'$ — possuem intersecção simultânea se ambas as intersecções $i \cap i'$ e $j \cap j'$ não são vazias. O grafo de intersecções simultâneas de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$ é o subgrafo gerador do grafo de intersecções de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$ onde vértices são adjacentes se, e somente se, possuem intersecção simultânea.*

O enunciado do seguinte teorema descreve a relação entre o grafo de intersecções simultâneas e o grafo KB_e do join entre dois grafos.

Teorema 8.3.1. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ é isomorfo ao grafo de intersecções simultâneas de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$.*

Prova. Vale que o conjunto de vértices de $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ equivale a

$$\begin{aligned} V(\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})) &= V(\text{K}(\overline{G})) \times V(\text{K}(\overline{H})) \\ &= \mathcal{J}_G \times \mathcal{J}_H. \end{aligned}$$

Temos, portanto, que existe bijeção entre os vértices de $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ e os elementos de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$.

Considere os conjuntos independentes maximais $i, i' \in \mathcal{J}_G$ e $j, j' \in \mathcal{J}_H$ com i e i' não necessariamente distintos e j e j' não necessariamente distintos. Os vértices (i, j) e (i', j') de $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ são adjacentes entre si se, e somente se, vale algum de

- $i = i'$ e $\{j, j'\} \in E(\text{K}(\overline{H}))$; ou
- $j = j'$ e $\{i, i'\} \in E(\text{K}(\overline{G}))$; ou
- $\{i, i'\} \in E(\text{K}(\overline{G}))$ e $\{j, j'\} \in E(\text{K}(\overline{H}))$.

Em todos os casos, temos que as intersecções $i \cap i'$ e $j \cap j'$ não são vazias. Logo, se (i, i') e (j, j') são adjacentes em $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$, então $i \cup j$ e $i' \cup j'$ possuem intersecção simultânea em $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$.

Se os elementos $i \cup j$ e $i' \cup j'$ de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$ possuem intersecção simultânea — isto é, se ambas as intersecções $i \cap i'$ e $j \cap j'$ não são vazias e $i \cup j \neq i' \cup j'$ —, então os vértices i e i' de $\text{K}(\overline{G})$ são adjacentes entre si e os vértices j e j' de $\text{K}(\overline{H})$ são adjacentes entre si. Logo, temos que os vértices (i, j) e (i', j') de $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ são adjacentes entre si.

Portanto, temos que os vértices (i, j) e (i', j') de $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ são adjacentes entre si se, e somente se, os elementos $i \cup j$ e $i' \cup j'$ de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$ possuem intersecção simultânea.

Isto é, temos que o grafo $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ é isomorfo ao grafo de intersecção simultânea de $\bigcup_{j \in \mathcal{J}_H} \{i \cup j\}$. \square

Temos, portanto, a seguinte descrição de um grafo isomorfo ao grafo KB_e do *join* entre dois grafos.

Teorema 8.3.2. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que o grafo $\text{KB}_e(G \nabla H)$ é isomorfo ao grafo $\text{KB}_e(G) \cup \text{KB}_e(H) \cup \text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$.*

Prova. Pelo Corolário 8.1.3, temos que o grafo união $\text{KB}(G) \cup \text{KB}(H)$ é subgrafo induzido de $\text{KB}(G \nabla H)$. Logo, temos que $\text{KB}_e(G) \cup \text{KB}_e(H)$ é subgrafo induzido de $\text{KB}_e(G \nabla H)$.

Pelo Teorema 8.3.1, temos que $\text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ é isomorfo ao grafo de intersecções simultâneas de $\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\}$, equivalente — pela Proposição 8.1.4 — ao conjunto $\mathcal{J}_{G \cup H}$ e — pelo Corolário 8.1.10 — ao conjunto de bicliques maximais de $G \nabla H$ que contêm arestas do *join* entre G e H . Pelo Teorema 8.1.8, temos que $\mathcal{B}_{G \nabla H} = \mathcal{B}_{G \cup H} \cup \mathcal{J}_{G \cup H}$ e, pela Proposição 8.1.7, temos que o conjunto $\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{J}_G \\ j \in \mathcal{J}_H}} \{i \cup j\}$ é disjunto de $\mathcal{B}_{G \cup H}$. Logo, temos que o grafo $\text{KB}_e(G) \cup \text{KB}_e(H) \cup \text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H})$ é isomorfo a algum subgrafo gerador de $\text{KB}_e(G \nabla H)$.

Pela Proposição 8.1.6, temos que não há intersecção por aresta entre as bicliques maximais com arestas de G ou H e as bicliques maximais com arestas do *join* entre G e H . Portanto, temos que

$$\text{KB}_e(G \nabla H) \simeq \text{KB}_e(G) \cup \text{KB}_e(H) \cup \text{K}(\overline{G}) \boxtimes \text{K}(\overline{H}).$$

□

Com o enunciado do seguinte teorema, descrevemos a relação entre bicliques maximais que contêm arestas do *join* em termos de propriedades diferenciadoras.

Teorema 8.3.3. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Para quaisquer bicliques maximais intersectantes B_1 e B_2 de $G \nabla H$, vale que se B_1 e B_2 contêm aresta do *join* entre G e H , então B_1 e B_2 não são diferenciadas por não-aresta.*

Prova. Pela Proposição 8.1.6, temos que B_1 e B_2 não contêm aresta de G ou de H .

Suponha que exista não-aresta diferenciadora $\{v_1, v_2\} \notin E(G \nabla H)$ onde $v_1 \in B_1 \setminus B_2$ e $v_2 \in B_2 \setminus B_1$ e

$$\begin{aligned} & \left(N_{G \nabla H}(v_1) \cup N_{G \nabla H}(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \text{ e} \\ & \left(N_{G \nabla H}(v_1) \cap N_{G \nabla H}(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Considere o vértice $v' \in \left(N_{G \nabla H}(v_1) \cup N_{G \nabla H}(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2$. Como v_1 e v_2 não são adjacentes a um mesmo vértice na intersecção $B_1 \cap B_2$, temos que se v' é adjacente a v_1 , então v' não é adjacente a v_2 . Como B_1 e B_2 não contêm aresta de G ou de H , temos que se v_1 é adjacente a v' , então $\{v_1, v'\}$ é aresta do *join* entre G e H . Logo, se v' é vértice de G , então v_1 é vértice de H e vice-versa.

Considere, sem perda de generalidade, que v_1 é adjacente a v' , que v' é vértice de G e que v_1 é vértice de H . Como v' não é adjacente a v_2 em $G \nabla H$, temos que v_2 é vértice de G e, portanto, adjacente a v_1 . Logo, temos que o par não-ordenado $\{v_1, v_2\}$ é aresta de $G \nabla H$ e, portanto, que não é não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 . Da mesma forma, se v' é adjacente a v_2 , então $\{v_1, v_2\}$ não é não-aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 .

Portanto, temos que B_1 e B_2 não são diferenciadas por não-aresta. □

Com o enunciado do seguinte teorema, mostramos — em termos de propriedades diferenciadoras — a relação de qualquer biclique maximal do grafo *join* com alguma biclique maximal que contém aresta do *join*.

Teorema 8.3.4. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Para quaisquer bicliques maximais intersectantes B_1 e B_2 de $G \nabla H$, vale que se B_2 contém aresta do *join* entre G e H , então B_1 e B_2 são diferenciadas por aresta.*

Prova. Se B_1 contém aresta do *join* entre G e H , temos — pelo Teorema 8.3.3 — que B_1 e B_2 não são diferenciadas por não-aresta. Pela contrapositiva do Teorema 7.3.1, temos que B_1 e B_2 são diferenciadas por aresta.

Considere, portanto, que B_1 não contém aresta do *join* entre G e H . Pela Proposição 8.1.7 e pelo Corolário 8.1.10, temos que B_1 não pertence a $\mathcal{J}_{G \cup H}$. Pelo Teorema 8.1.8, temos que B_1 pertence a $\mathcal{B}_{G \cup H} = \mathcal{B}_G \cup \mathcal{B}_H$, isto é, que B_1 é biclique maximal de G ou de H . Suponha, sem perda de generalidade, que B_1 é biclique maximal de G . Também vale destacar que, pela Proposição 8.1.6, temos que B_2 não contém aresta de G ou de H .

Sejam v o vértice em $B_1 \cap B_2$, v_1 o vértice em B_1 adjacente a v e v_2 o vértice em B_2 adjacente a v . Logo, temos que $\{v, v_1\}$ é aresta de G e que $\{v, v_2\}$ é aresta do *join* entre G e H . Isto é, temos que v e v_1 são vértices de G e que v_2 é vértice de H . Temos, então, que v_2 é também adjacente a v_1 em $G \nabla H$. Pela Proposição 8.1.1, temos que v_2 não é vértice de B_1 . Como B_2 não contém aresta de G ou de H , v é vértice de B_2 e que v é adjacente a v_1 , temos que v_1 não é vértice de B_2 . Portanto, temos que o vértice v_1 pertence a $B_1 \setminus B_2$, que o vértice v_2 pertence a $B_2 \setminus B_1$ e que $\{v_1, v_2\}$ é aresta de $G \nabla H$. Como tanto v_1 quanto v_2 são adjacentes a v , temos que

$$v \in \left(N_{G \nabla H}(v_1) \cap N_{G \nabla H}(v_2) \right) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset.$$

Temos, então, que $\{v_1, v_2\}$ é aresta diferenciadora entre B_1 e B_2 . Da mesma maneira, se B_1 é biclique maximal de H , então B_1 e B_2 são diferenciadas por aresta.

Portanto, se B_2 contém aresta do *join* entre G e H , então B_1 e B_2 são diferenciadas por aresta. \square

Como consequência dos Teoremas 8.3.2 e 8.3.4, temos o seguinte corolário.

Corolário 8.3.5. *Sejam G e H grafos com conjuntos de vértices disjuntos. Vale que*

$$E\left(\text{biKB}(G \nabla H, \mathcal{B}_{G \cup H}, \mathcal{J}_{G \cup H})\right) \subseteq E\left(\text{KB}_{\text{edif}}(G \nabla H)\right) \setminus E\left(\text{KB}_e(G \nabla H)\right).$$

A Figura 8.4 ilustra a composição do grafo biclique de $G \nabla H$ em termos dos subgrafos $\text{KB}(G)$, $\text{KB}(H)$ e do grafo de intersecção das bicliques maximais que contém arestas do *join* — equivalente, pelo Corolário 8.1.10, ao grafo $\text{K}(\overline{G \cup H})$. Pelo Teorema 8.3.2, as arestas de $\text{KB}(G \nabla H)$ que conectam vértices de $\text{KB}(G)$ e de $\text{KB}(H)$ aos vértices que correspondem às bicliques maximais que contém arestas do *join* não são arestas do grafo $\text{KB}_e(G \nabla H)$. Pelo Teorema 8.3.3, as intersecções entre bicliques maximais que contém arestas do *join* não são diferenciadas por não-aresta. Pelo Teorema 8.3.4, qualquer biclique maximal de $G \nabla H$ e qualquer biclique maximal que contém aresta do *join* são diferenciadas por aresta. As linhas apresentadas na figura conectando os subgrafos são as arestas de $\text{biKB}(G \nabla H, \mathcal{B}_{G \cup H}, \mathcal{J}_{G \cup H})$.

Como bicliques maximais mutuamente inclusas são diferenciadas por não-aresta e não são diferenciadas por aresta — como enunciado pelos Teoremas 7.2.1 e 7.2.2 —, podemos enunciar o seguinte corolário.

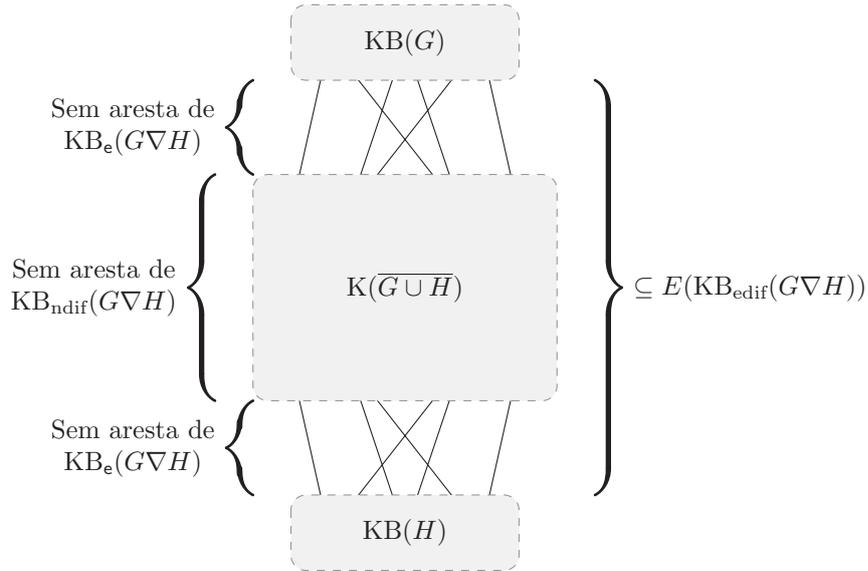


Figura 8.4: Componentes do grafo $\text{KB}(G \nabla H)$.

Corolário 8.3.6. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Para quaisquer bicliques maximais intersectantes B_1 e B_2 de $G \nabla H$, vale que se B_2 contém aresta do join entre G e H , então B_1 e B_2 não são mutuamente inclusas entre si.*

Portanto, descrevemos o grafo isomorfo ao grafo KB_m do join entre dois grafos pelo enunciado do seguinte teorema.

Teorema 8.3.7. *Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos entre si. Vale que o grafo $\text{KB}_m(G \nabla H)$ é isomorfo ao grafo $\text{KB}_m(G) \cup \text{KB}_m(H) \cup |\mathcal{J}_G||\mathcal{J}_H|K_1$.*

Prova. Pelo Teorema 8.1.8, temos que

$$\mathcal{B}_{G \nabla H} = \mathcal{B}_{G \cup H} \cup \mathcal{J}_{G \cup H}.$$

Pelo Corolário 8.1.10, temos que bicliques maximais em $\mathcal{J}_{G \cup H}$ contêm arestas do join entre G e H . Pelo Corolário 8.3.6, temos que nenhuma biclique maximal em $\mathcal{J}_{G \cup H}$ é mutuamente inclusa a qualquer outra biclique maximal de $G \nabla H$. Pela Proposição 8.1.1, temos que as bicliques maximais em \mathcal{B}_G são disjuntas às bicliques maximais em \mathcal{B}_H .

Pela Proposição 8.1.4, temos que $|\mathcal{J}_{G \cup H}| = |\bigcup_{i \in \mathcal{J}_G} \{i \cup j\}| = |\mathcal{J}_G||\mathcal{J}_H|$ e, portanto, que

$$\text{KB}_m(G \nabla H) \simeq \text{KB}_m(G) \cup \text{KB}_m(H) \cup |\mathcal{J}_G||\mathcal{J}_H|K_1.$$

□

9 RESULTADOS ADICIONAIS E POSSÍVEIS CAMINHOS

Apresentamos, neste capítulo, alguns resultados deste estudo que escapam dos temas dos capítulos anteriores. Também propomos algumas ideias de estudo para trabalhos futuros.

Na Seção 9.1, provamos que o quadrado do grafo de bicliques mutuamente inclusas de todo grafo G é subgrafo gerador do grafo biclique de G . Também conjecturamos que um grafo possui bicliques maximais mutuamente inclusas se, e somente se, possui um grafo P_4 induzido que não está contido em um grafo casa induzido.

Na Seção 9.2, apresentamos os operadores BP_c de grafos de partes de bicliques correspondentes, BP_{ndif} de grafos de partes de bicliques diferenciadas por não-aresta e BP_{edif} de grafos de partes de bicliques diferenciadas por aresta. Mostramos, para todo grafo G , que o grafo $L(BP_c(G))$ é isomorfo a algum subgrafo gerador de $KB(G)$.

9.1 PROPRIEDADE ADICIONAL DO GRAFO KB_m

Nesta seção, mostramos que o grafo quadrado do grafo de bicliques mutuamente inclusas de todo grafo G é subgrafo gerador do grafo biclique de G . Também conjecturamos que um grafo qualquer é livre de bicliques mutuamente inclusas se, e somente se, todo grafo P_4 induzido é subgrafo induzido de algum grafo casa induzido.

Considere o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 9.1.1. *Para qualquer grafo G , vale que o grafo $KB_m(G)^2$ é subgrafo gerador de $KB(G)$.*

Prova. Considere as bicliques maximais B_1 , B_2 e B_3 de G tais que B_2 é mutuamente inclusa tanto a B_1 quanto a B_3 . Considere também as partições (X_1, Y_1) de B_1 , (X_2, Y_2) de B_2 e (X_3, Y_3) de B_3 .

Assuma que

$$\left((X_1 \subset X_2) \vee (X_2 \subset X_1) \right) \wedge \left((X_3 \subset X_2) \vee (X_2 \subset X_3) \right).$$

Se $X_1 \subset X_2$ e $X_2 \subset X_3$, então temos que $X_1 \subset X_3$ e, portanto, que B_1 e B_3 se intersectam. De maneira análoga, se $X_3 \subset X_2$ e $X_2 \subset X_1$, então B_1 e B_3 se intersectam.

Se $X_2 \subset X_1$ e $X_2 \subset X_3$, então temos que a parte X_2 está contida na intersecção $X_1 \cap X_3$ e, portanto, que B_1 e B_3 se intersectam.

Se $X_1 \subset X_2$ e $X_3 \subset X_2$, então — como B_2 é mutuamente inclusa tanto a B_1 quanto a B_3 — temos que $Y_2 \subset Y_1$ e que $Y_2 \subset Y_3$. Logo, temos que Y_2 está contida na intersecção $Y_1 \cap Y_3$ e, portanto, que B_1 e B_3 se intersectam.

Assuma, então, que

$$\left((X_1 \subset X_2) \vee (X_2 \subset X_1) \right) \wedge \left((X_3 \subset Y_2) \vee (Y_2 \subset X_3) \right).$$

Como B_2 e B_3 são mutuamente inclusas entre si, temos que

$$\left((X_3 \subset Y_2) \iff (X_2 \subset Y_3) \right) \wedge \left((Y_2 \subset X_3) \iff (Y_3 \subset X_2) \right).$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} & \left((X_1 \subset X_2) \vee (X_2 \subset X_1) \right) \wedge \left((X_3 \subset Y_2) \vee (Y_2 \subset X_3) \right) \iff \\ & \left((X_1 \subset X_2) \vee (X_2 \subset X_1) \right) \wedge \left((X_2 \subset Y_3) \vee (Y_3 \subset X_2) \right). \end{aligned}$$

Da mesma maneira ao caso anterior, temos que B_1 e B_3 se intersectam.

Os demais casos são obtidos pela substituição de todas as ocorrências de X_i por Y_i ou de todas as ocorrências de Y_i por X_i , para $i \in [1..3]$.

Logo, se B_2 é mutuamente incluída simultaneamente a B_1 e a B_3 , então B_1 e B_3 se intersectam. Portanto, temos que $\text{KB}_m(G)^2$ é subgrafo de $\text{KB}(G)$. Como ambos $\text{KB}_m(G)^2$ e $\text{KB}(G)$ possuem o mesmo conjunto de vértices, temos que $\text{KB}_m(G)^2$ é subgrafo gerador de $\text{KB}(G)$. \square

O Corolário 7.2.3 mostra que toda inclusão mútua entre bicliques maximais é uma intersecção diferenciada por não-aresta que não é diferenciada por aresta. Pelos Teoremas 7.4.1 e 7.4.2, temos que as inclusões mútuas são associadas ao grafo P_4 induzido. Pela análise da estrutura de grafos com P_4 induzido, notamos que existem casos onde a presença do subgrafo — como o caso do grafo casa ilustrado pela Figura 9.1 (a) — não implica a presença de bicliques maximais mutuamente incluídas. Tal peculiaridade nos permite enunciar a seguinte conjectura.

Conjectura 9.1.1. *Seja G um grafo qualquer. Vale que G possui bicliques maximais mutuamente incluídas se, e somente se, existe P_4 induzido de G que não é subgrafo induzido de algum grafo casa induzido de G .*

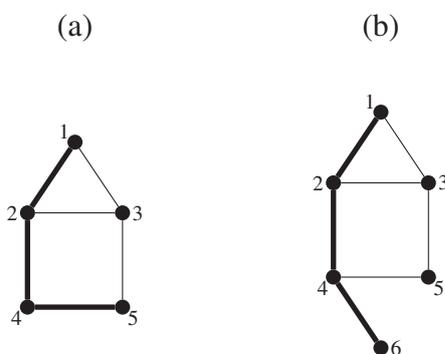


Figura 9.1: Grafo casa (a) e grafo obtido pela inserção de um vértice e uma aresta a partir de um grafo casa (b).

A Figura 9.1 descreve os grafos G (a) e G' (b). O grafo G é o grafo casa com o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ e as bicliques maximais $B_1 = \{1, 2, 4\}$, $B_2 = \{1, 3, 5\}$ e $B_3 = \{2, 3, 4, 5\}$. O grafo G' possui o conjunto de vértices $V(G') = V(G) \cup \{6\}$, o conjunto de arestas $E(G') = E(G) \cup \{\{4, 6\}\}$ e as bicliques maximais $B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$, $B'_3 = B_3$ e $B'_4 = \{2, 4, 5, 6\}$. O grafo G não possui bicliques maximais mutuamente incluídas entre si, enquanto as bicliques maximais B'_1 e B'_4 de G' são mutuamente incluídas entre si. O subconjunto de vértices $\{1, 2, 4, 5\}$ de G — em destaque em (a) — induz um grafo P_4 , enquanto o subconjunto de vértices $\{1, 2, 4, 6\}$ de G' — em destaque em (b) — induz um grafo P_4 que não é subgrafo induzido de algum grafo casa induzido.

9.2 VARIAÇÕES DO GRAFO DE PARTES DE BICLIQUE

Nesta seção, apresentamos os operadores de grafo de partes de bicliques correspondentes BP_c , de grafo de partes de bicliques diferenciadas por não-aresta BP_{ndif} e de grafos de partes de bicliques diferenciadas por aresta BP_{edif} . Provamos que o grafo $L(BP_c(G))$, para um grafo G qualquer, é subgrafo gerador do grafo $KB(G)$.

Considere a seguinte definição de grafo de partes de bicliques correspondentes.

Definição 9.2.1. Chamamos de grafo de partes de bicliques correspondentes de um grafo G o grafo, denotado por $BP_c(G)$, com o conjunto de vértices equivalente ao conjunto \widehat{B}_G de partes de biclique de G e dois vértices X e Y são adjacentes se, e somente se, são correspondentes, isto é, se existe biclique maximal de G que admite a partição (X, Y) .

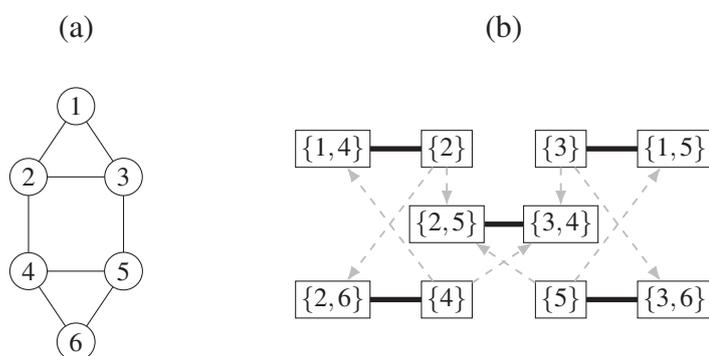


Figura 9.2: Grafo G (a) e correspondências e inclusões das partes de bicliques de G (b).

A Figura 9.2 descreve um grafo G (a) e as relações de correspondência e inclusão das partes de bicliques de G (b). O grafo G possui o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto de arestas $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$. As partes de bicliques de G correspondentes são conectadas por uma linha cheia e partes de bicliques com relação de inclusão são conectadas por uma seta tracejada que indica a direção da inclusão. O grafo $BP_c(G)$ é o grafo cujos os vértices são as partes de bicliques de G e as arestas são indicadas pelas linhas cheias pela figura.

Considere o seguinte teorema a respeito da relação entre o grafo BP_c e o grafo KB de qualquer grafo.

Teorema 9.2.1. Para qualquer grafo G , vale que $L(BP_c(G))$ é isomorfo a algum subgrafo gerador de $KB(G)$.

Prova. Por definição, temos que os vértices de toda aresta de $BP_c(G)$ são as partes de alguma biclique maximal de G . Também temos que toda biclique maximal de G possui uma aresta de $BP_c(G)$ correspondente. Se duas arestas de $BP_c(G)$ são adjacentes, então as bicliques maximais correspondentes compartilham uma mesma parte e, portanto, são intersectantes. Logo, temos que $L(BP_c(G))$ é isomorfo a algum subgrafo gerador de $KB(G)$. \square

A Figura 9.3 descreve o grafo G (a) — isomorfo ao grafo completo K_4 — e o grafo $L(BP_c(G))$ (b). Como é um completo, o grafo G é isomorfo ao seu grafo de partes de bicliques correspondentes $BP_c(G)$, uma vez que cada vértice v_i corresponde à parte de biclique $\{v_i\}$, para $i \in [1..4]$. Da mesma forma, todo vértice $\{\{v_i\}, \{v_j\}\}$, para $i, j \in [1..4]$ distintos, de

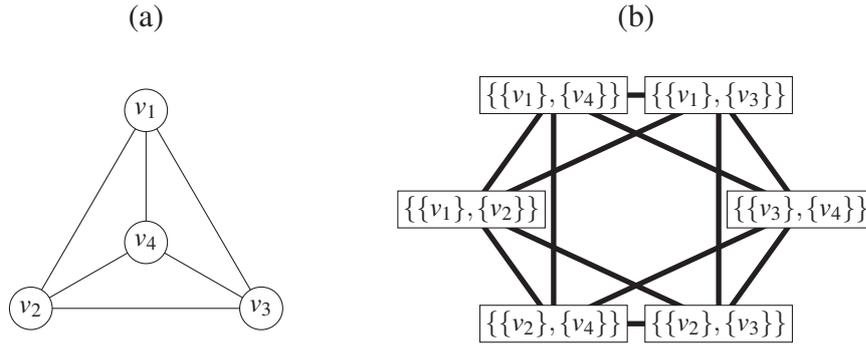


Figura 9.3: Grafo G (a) e grafo $L(\text{BP}_c(G))$ (b).

$L(\text{BP}_c(G))$ corresponde à biclique maximal $\{v_i, v_j\}$ de G . Para todo grafo completo K_n , vale que $L(\text{BP}_c(K_n)) \simeq L(K_n) = \text{KB}(K_n)$ ¹.

Considere as seguintes variações das propriedades diferenciadoras no contexto de partes de bicliques.

Definição 9.2.2. *Seja G um grafo qualquer. Dizemos que as partes de biclique X_1 e X_2 de G são diferenciadas por não-aresta se a parte de biclique X_1 possui correspondente Y_1 , a parte de biclique X_2 possui correspondente Y_2 e as bicliques maximais $B_1 = X_1 \cup Y_1$ e $B_2 = X_2 \cup Y_2$ são diferenciadas pela não-aresta $\{v_1, v_2\} \subseteq X_1 \cup X_2$.*

Definição 9.2.3. *Seja G um grafo qualquer. Dizemos que as partes de biclique X_1 e X_2 de G são diferenciadas por aresta se a parte de biclique X_1 possui correspondente Y_1 , a parte de biclique X_2 possui correspondente Y_2 e as bicliques maximais $B_1 = X_1 \cup Y_1$ e $B_2 = X_2 \cup Y_2$ são diferenciadas pela aresta $\{v_1, v_2\} \subseteq X_1 \cup X_2$.*

Podemos, então, definir os respectivos operadores em termos das variações das propriedades diferenciadoras.

Definição 9.2.4. *Seja G um grafo qualquer. Dizemos que o grafo de partes de biclique diferenciadas por não-aresta de G , denotado por $\text{BP}_{\text{ndif}}(G)$, é o grafo com o conjunto de vértices $V(\text{BP}_{\text{ndif}}(G))$ equivalente ao conjunto $\widehat{\mathcal{B}}_G$ de partes de biclique de G e dois vértices são adjacentes se, e somente se, as partes de biclique de G correspondentes são diferenciadas por não-aresta.*

Definição 9.2.5. *Seja G um grafo qualquer. Dizemos que o grafo de partes de biclique diferenciadas por aresta de G , denotado por $\text{BP}_{\text{edif}}(G)$, é o grafo com o conjunto de vértices $V(\text{BP}_{\text{edif}}(G))$ equivalente ao conjunto $\widehat{\mathcal{B}}_G$ de partes de biclique de G e dois vértices são adjacentes se, e somente se, as partes de biclique de G correspondentes são diferenciadas por aresta.*

A Figura 9.4 descreve os grafos $\text{BP}_{\text{ndif}}(G)$ (a) e $\text{BP}_{\text{edif}}(G)$ (b). O grafo G é o mesmo descrito pela Figura 9.2. Enquanto as definições dos grafos $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ e $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$ apenas descrevem a existência de — respectivamente — não-arestas e arestas diferenciadoras entre as bicliques maximais de G , os grafos $\text{BP}_{\text{ndif}}(G)$ e $\text{BP}_{\text{edif}}(G)$ descrevem a existência de não-arestas e arestas diferenciadoras entre as partes de bicliques envolvidas. Tal distinção permite que os grafos $\text{BP}_{\text{ndif}}(G)$ e $\text{BP}_{\text{edif}}(G)$ sejam mais descritivos da estrutura de bicliques maximais de G que os grafos $\text{KB}_{\text{ndif}}(G)$ e $\text{KB}_{\text{edif}}(G)$.

¹A equivalência entre o grafo biclique de um completo e seu grafo linha é enunciada por Cruz et al. (2020).

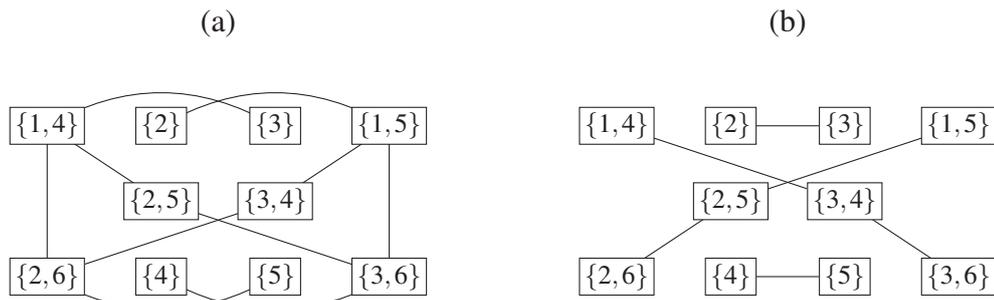


Figura 9.4: Grafo $BP_{ndif}(G)$ (a) e grafo $BP_{edif}(G)$ (b).

Conjectura 9.2.1. *Seja G um grafo qualquer. Vale que é possível computar os grafos isomorfos a $BP_{ndif}(G)$ e a $BP_{edif}(G)$ — e, portanto, os grafos isomorfos a $KB_{ndif}(G)$, $KB_{edif}(G)$ e $KB(G)$ — a partir do grafo H isomorfo a $BP_c(G)$ sobre a bijeção $\pi : V(H) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_G$ e algum poset $\mathcal{P} = (V(H), \preceq)$ onde $v \preceq w$ se, e somente se, $\pi(v) \subseteq \pi(w)$, para quaisquer $v, w \in V(H)$.*

Essencialmente, a Conjectura 9.2.1 enuncia que basta conhecer as relações de correspondência e inclusão entre as partes de bicliques de um grafo G — sem precisar conhecer os vértices que as compõem — para também conhecer as relações de diferenciação por aresta e não-aresta como intermediárias e, portanto, obter o grafo isomorfo ao grafo biclique de G .

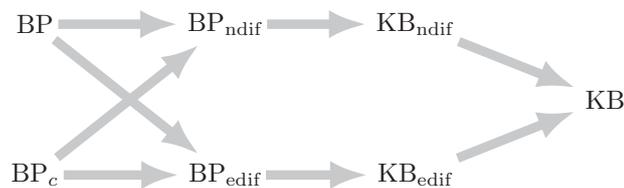


Figura 9.5: Diagrama da composição estrutural do operador KB pela Conjectura 9.2.1.

A Figura 9.5 ilustra, de um ponto de vista estrutural, a composição do operador KB descrita pela conjectura. O operador KB é descrito como uma composição entre os operadores KB_{ndif} e KB_{edif} — refletindo o enunciado do Corolário 7.3.2 — e cada um desses dois operadores é descrito como uma composição dos respectivos operadores BP_{ndif} e BP_{edif} . O conhecimento das partes de bicliques correspondentes e equivalentes — para a computação do grafo KB_{ndif} a partir de BP_{ndif} e do grafo KB_{edif} a partir de BP_{edif} — e das bicliques maximais equivalentes — para a computação do grafo KB a partir de KB_{ndif} e KB_{edif} — é inferido de forma implícita pelo diagrama.

O Corolário 5.2.6 enuncia uma variação da conjectura onde o grafo G é livre de triângulos e usa a relação de inclusão mútua como intermediária em vez das propriedades diferenciadoras. Entretanto, o caso livre de triângulos garante que o *poset* que descreve a relação de inclusão entre as partes de bicliques seja autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes.

A propriedade autotransposta do *poset* de inclusão de partes de bicliques em grafos livres de triângulos descreve as suas relações de correspondência, o que torna restritiva para o caso geral — onde o grafo BP_c serve como generalização da propriedade. Porém, ainda é necessário investigar a estrutura do grafo BP_c para tirar conclusões mais precisas do que se pode computar a partir das relações de correspondências e inclusão. A propriedade de ser livre de

comparações antecessor-sucessor de correspondentes parece permitir uma variação para o caso geral, onde a bijeção da propriedade autotransposta é substituída pela vizinhança no grafo BP_c .

Um plano para a possível computação enunciada pelo Corolário 9.2.1 é inferir adjacências entre os vértices dos grafos BP_{ndif} e BP_{edif} a partir de padrões de correspondências e inclusões entre partes de bicliques. As seguintes tabelas conjecturam tais adjacências.

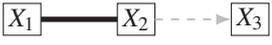
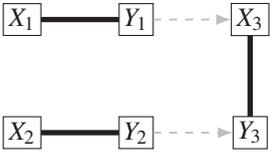
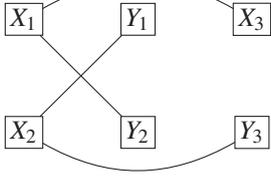
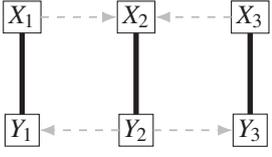
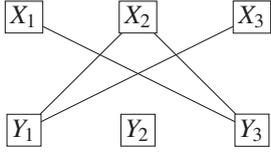
Caso	Correspondências e inclusões	Conjectura sobre o grafo BP_{ndif}
(a)		
(b)		
(c)		

Tabela 9.1: Conjecturas sobre as arestas do grafo BP_{ndif} a partir das correspondências e inclusões entre as partes.

Pela Tabela 9.1, conjecturamos a estrutura de um grafo BP_{ndif} a partir das correspondências e inclusões entre as partes de bicliques pelos seguintes casos.

Para o caso (a), se a parte de biclique X_1 é correspondente à parte de biclique X_2 e X_2 está contida na parte de biclique X_3 , conjecturamos que as partes de bicliques X_1 e X_3 são adjacentes no grafo BP_{ndif} .

Para o caso (b), se — para $n \in \{1, 2, 3\}$ — a parte de biclique X_n é correspondente à parte de biclique Y_n , a parte de biclique Y_1 está contida na parte de biclique X_3 e a parte de biclique Y_2 está contida na parte de biclique Y_3 , conjecturamos — além das adjacências entre X_1 e X_3 e entre X_2 e Y_3 no grafo BP_{ndif} semelhantes ao caso (a) — que também valem as adjacências entre X_1 e Y_2 e entre X_2 e Y_1 em BP_{ndif} .

Para o caso (c), se — para $n \in \{1, 2, 3\}$ — a parte de biclique X_n é correspondente à parte de biclique Y_n , as partes de biclique X_1 e X_3 estão ambas contidas na parte de biclique X_2 e a parte de biclique Y_2 está contida tanto em Y_1 quanto em Y_3 , conjecturamos — além das adjacências entre Y_1 e X_2 e entre Y_3 e X_2 no grafo BP_{ndif} semelhantes ao caso (a) — que também valem as adjacências entre X_1 e Y_3 e entre X_3 e Y_1 em BP_{ndif} . O caso (c) descreve a biclique maximal mutuamente inclusa a duas outras bicliques maximais, que é a configuração enunciada pelo Lema 5.1.2.

Pela Tabela 9.2, conjecturamos a estrutura de um grafo BP_{edif} a partir das correspondências e inclusões entre as partes de bicliques pelos seguintes casos.

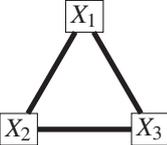
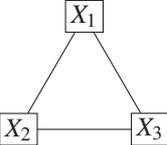
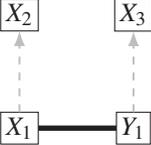
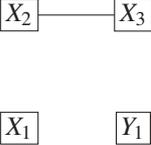
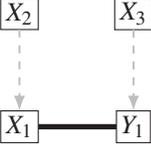
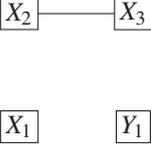
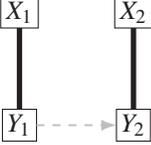
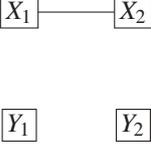
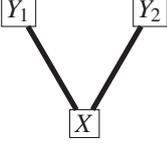
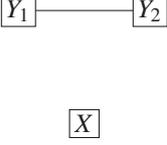
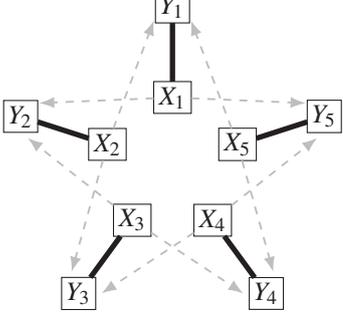
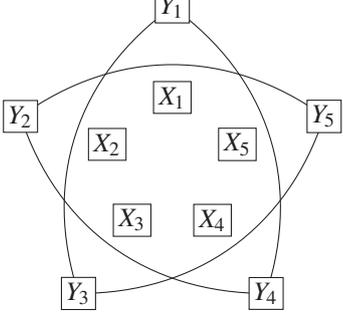
Caso	Correspondências e inclusões	Conjectura sobre o grafo BP_{edif}
(a)		
(b)		
(c)		
(d)		
(e)		
(f)		

Tabela 9.2: Conjecturas sobre as arestas do grafo BP_{edif} a partir das correspondências e inclusões entre as partes.

Para o caso (a), se as três partes de bicliques X_1 , X_2 e X_3 são correspondentes entre si duas-a-duas, conjecturamos que as três partes de bicliques são diferenciadas por aresta e, portanto, adjacentes entre si no grafo BP_{edif} .

Para o caso (b), se a parte de biclique X_1 é correspondente à parte de biclique Y_1 , a parte de biclique X_1 está contida na parte de biclique X_2 e a parte de biclique Y_1 está contida na parte de biclique X_3 , conjecturamos que X_2 é adjacente a X_3 no grafo BP_{edif} .

Para o caso (c), se a parte de biclique X_1 é correspondente à parte de biclique Y_1 , a parte de biclique X_2 está contida na parte de biclique X_1 e a parte de biclique X_3 está contida na parte de biclique Y_1 , conjecturamos que X_2 é adjacente a X_3 no grafo BP_{edif} .

Para o caso (d), se — para $n \in \{1, 2\}$ — a parte de biclique X_n é correspondente à parte de biclique Y_n e Y_1 está contida em Y_2 , conjecturamos que X_1 é adjacente a X_2 no grafo BP_{edif} .

Para o caso (e), se a parte de biclique X é correspondente tanto à parte de biclique Y_1 quanto à parte de biclique Y_2 , conjecturamos que Y_1 e Y_2 são adjacentes entre si no grafo BP_{edif} .

Para o caso (f), se — para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ — a parte de biclique X_n é correspondente à parte de biclique Y_n , a parte de biclique X_n está contida tanto na parte de biclique $Y_{(n-2 \bmod 5)+1}$ quanto na parte de biclique $Y_{(n \bmod 5)+1}$, conjecturamos que $(Y_1, Y_4, Y_2, Y_5, Y_3)$ é um ciclo no grafo BP_{edif} .

9.3 TRANSFORMAÇÕES DA PRÉ-IMAGEM DO GRAFO KB

A partir do estudo da composição do operador KB em termos de outros operadores, outro possível caminho é estudar as transformações sobre um grafo G tal que o grafo biclique do grafo resultante — em termos de isomorfismo entre grafos — seja resultado de algum outro operador sobre o grafo $\text{KB}(G)$. Com essa análise, buscamos descrever o operador KB e sua composição sobre os operadores KB_{ndif} e KB_{edif} de um ponto de vista mais algébrico.

A partir desse caminho, também é possível estudar que transformações preservam a estrutura do grafo biclique, buscando uma generalização do resultado de Groshaus e Montero (2013) sobre a preservação do grafo sob remoção ou inserção de vértices falsos gêmeos. Vale notar que podemos definir tal preservação não apenas em termos de isomorfismo entre os grafos biclique, mas também dos tipos de intersecções entre bicliques maximais.

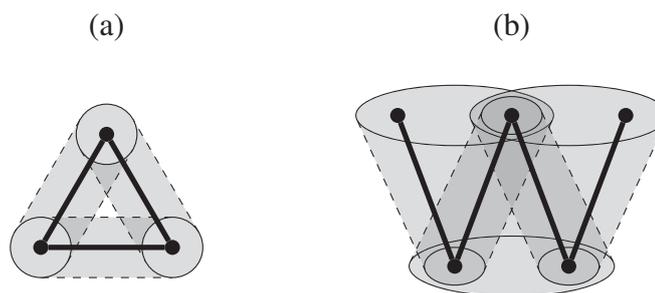


Figura 9.6: Grafos K_3 (a) e P_5 e as intersecções entre suas bicliques maximais.

A Figura 9.6 descreve dois grafos G_1 (a) — isomorfo a um triângulo — e G_2 (b) — isomorfo ao grafo caminho P_5 — tais que $\text{KB}(G_1)$ e $\text{KB}(G_2)$ são isomorfos entre si — nesse caso, são isomorfos ao grafo triângulo. Entretanto, vale observar que os tipos de intersecções entre suas bicliques maximais diferem. Em G_1 , cada par de suas bicliques maximais são diferenciadas por aresta, não são diferenciadas por não aresta e intersectam apenas por vértices. Em G_2 , cada par de suas bicliques maximais são diferenciadas por não-aresta, nenhum par é diferenciado por aresta e apenas um par possui intersecção apenas por vértice onde a terceira biclique maximal é

mutuamente inclusa às demais. Uma transformação sobre um dos grafos que resulta em outro preserva o isomorfismo entre seus grafos biclique, mas não os tipos de intersecção entre suas bicliques maximais — além de não preservar o isomorfismo entre seus grafos KB_m , KB_e , KB_{ndif} , KB_{edif} , BP , BP_c , BP_{ndif} e BP_{edif} .

Transformações que preservam os tipos de intersecções entre bicliques maximais podem ser usadas para definir uma entidade matemática intermediária entre os grafos e seus grafos biclique que agrupa — no ponto de vista de intersecções entre bicliques maximais — grafos estruturalmente semelhantes. Tal entidade matemática simplifica a representação de tais grafos e podem auxiliar o desenvolvimento de um algoritmo para a computação da pré-imagem de um grafo biclique, deixando a construção da pré-imagem como uma última etapa. Para o propósito de reconhecimento de grafos biclique usando tal algoritmo, bastaria construir a entidade intermediária sem a necessidade de construir um grafo pré-imagem. A Conjectura 9.2.1 propõe que um candidato a tal entidade intermediária seja um par (H, \mathcal{P}) , onde H é um grafo isomorfo ao grafo de inclusão de partes de bicliques de algum grafo G e \mathcal{P} é o *poset* que descreve as inclusões entre as partes de bicliques de G .

Transformações que não preservam os tipos de intersecções entre bicliques maximais, por sua vez, podem ser usadas para o estudo do problema de reconhecimento de grafos biclique. Se for possível associar os tipos de intersecções entre bicliques maximais às arestas do grafo biclique e computar uma pré-imagem ou a entidade matemática intermediária, então — em tese — seria possível decidir se algum grafo é um grafo biclique. Espera-se que tal associação entre arestas do grafo e os tipos de intersecções entre bicliques maximais seja gradual durante a computação, onde um subconjunto de arestas é associado de acordo com a estrutura local do grafo. Com a possibilidade da ocorrência de uma inconsistência durante a associação — isto é, de um subconjunto de arestas não admitir uma associação aos tipos de intersecções entre bicliques maximais —, o conhecimento sobre as transformações que não preservam tipos de intersecções pode contribuir com a decisão de que se o grafo permite uma associação alternativa de tipos de intersecções a arestas previamente associadas ou se tal grafo não aceita uma associação de tipos de intersecções a suas arestas e, portanto, não seja grafo biclique.

10 CONCLUSÃO

Nesta tese, abordamos o estudo de propriedades estruturais de grafos biclique com a identificação e análise de diferentes tipos de intersecções de bicliques maximais. Tal abordagem nos permite decompor os grafos biclique pelas arestas que representam cada tipo de intersecção, revelando suas contribuições para a estrutura do grafo. Um dos tipos de intersecção que este trabalho se desenvolve sobre é a intersecção mutuamente inclusa, usada para descrever a estrutura de grafos biclique de grafos bipartidos e de livres de triângulos.

Também estudamos grafos biclique de subclasses de interesse para ter melhor controle de suas estruturas, algumas vezes fornecendo modelos de representação alternativos que nos permitem analisar as intersecções de bicliques maximais. Mostramos que os grafos de bicliques mutuamente inclusas de bigrafos de inclusão de intervalos são grafos de permutação e que todo grafo de permutação é subgrafo induzido de algum grafo de biclique mutuamente inclusa de bigrafo de intervalo. Tais resultados mostram que o que separa os grafos de permutação dos grafos de bicliques mutuamente inclusas de bigrafos de inclusão de intervalos — e de bigrafos de intervalos — não é uma propriedade definida em termos de subgrafos proibidos induzidos.

A partir do estudo das propriedades estruturais de grafos de bicliques mutuamente inclusas em grafos bipartidos, apresentamos uma prova de que se um grafo bipartido possui uma tripla bi-asteroidal, então seu grafo KB_m possui uma tripla asteroidal. Também mostramos que um grafo bipartido possui um P_4 induzido se, e somente se, possui bicliques mutuamente inclusas; que possui intersecção por vértices apenas se o grafo P_5 for subgrafo induzido e; que possui um grafo dominó induzido se, e somente se, possui intersecção não mutuamente inclusa por arestas.

Para o estudo dos grafos biclique de grafos livres de triângulos, sugerimos o operador BP — o operador grafo de inclusão de partes de bicliques — para decompor o grafo de bicliques mutuamente inclusas. Mostramos que o grafo BP de qualquer grafo livre de triângulos é um grafo IIC-comparabilidade autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes, onde derivamos uma caracterização da classe dos grafos biclique de grafos livres de triângulos em termos de ordens parciais. Também apresentamos — para um *poset* \mathcal{P} IIC autotransposto livre de comparações antecessor-sucessor de correspondentes — o grafo $G_{\mathcal{P}}$, onde todos os grafos $G_{\mathcal{P}}$ formam uma subclasse estrita dos grafos livres de triângulos cuja sua classe de grafos biclique é a mesma que a classe dos grafos biclique de todos os grafos livres de triângulos. O grafo $G_{\mathcal{P}}$ também apresenta outras propriedades interessantes como ter seu próprio grafo KB_m isomorfo a um subgrafo induzido de $L(G_{\mathcal{P}})^2$ e ter um subgrafo induzido de $L(G_{\mathcal{P}})$ isomorfo a um subgrafo gerador de $L(KB_m(G_{\mathcal{P}}))$. Usamos tais propriedades para descrever o problema de encontrar a pré-imagem de um grafo KB_m de livres de triângulos como uma variação de um problema sanduíche, onde um grafo linha de $G_{\mathcal{P}}$ está entre dois grafos construídos a partir do seu grafo KB_m .

Para refinar o critério de busca pelo grafo $G_{\mathcal{P}}$ intermediário em tal problema sanduíche, derivamos a Regra do P_3 , a Regra do Triângulo, a Regra das Cliques e a Regra do Diamante, que descrevem propriedades da estrutura do grafo $L(G_{\mathcal{P}})$. A partir das regras, sugerimos um algoritmo para a computação da pré-imagem de um grafo KB_m de um grafo livre de triângulo que, apesar de incompleto, fornece casos de estudo de propriedades relevantes para a caracterização da classe. Mostramos que as regras não são suficientes para garantir que o algoritmo retorne uma pré-imagem correta, mas cogitamos que elas sejam suficientes para o reconhecimento de grafos KB_m de livres de triângulos.

Para descrever casos mais gerais de intersecções de bicliques maximais, introduzimos a intersecção diferenciada por aresta e diferenciada por não-aresta — ambas denominadas propriedades diferenciadoras — e os operadores KB_{ndif} e KB_{edif} como as variações do operador KB que descrevem as respectivas propriedades diferenciadoras. Mostramos que toda intersecção por inclusão mútua é diferenciada por não-aresta, mas não é diferenciada por aresta. Também mostramos que toda intersecção de bicliques maximais apresenta alguma das propriedades diferenciadoras e que a diferenciação por aresta está associada à presença de K_3 ou C_5 induzidos enquanto a diferenciação por não-aresta está associada à presença de P_4 ou grafo pata induzidos.

Com o intuito de estudar os grafos biclique de cografos — classe cujo seus grafos não possuem intersecções mutuamente inclusas entre bicliques maximais —, analisamos o grafo biclique de um *join* entre dois grafos. Descrevemos as bicliques maximais de um *join* entre dois grafos como as bicliques maximais de cada grafo e os conjuntos independentes da união disjunta entre os dois grafos, onde derivamos certas intersecções em termos de operadores sobre os grafos. Também decompos as arestas do grafo biclique de um *join* em termos de propriedades diferenciadoras, inclusão por aresta e inclusão mútua, onde derivamos a composição do grafo biclique e expressões que descrevem o grafo KB_e e o grafo KB_m .

Apresentamos, também, alguns resultados adicionais e conjecturas do estudo de grafos biclique. Mostramos que o grafo KB_m de qualquer grafo é subgrafo gerador do grafo biclique do mesmo grafo. Também apresentamos o operador BP_c — o operador de partes de bicliques correspondentes —, onde derivamos que o grafo linha do BP de um grafo é isomorfo a algum subgrafo gerador do grafo biclique do mesmo grafo. Apresentamos variações BP_{ndif} e BP_{edif} dos operadores BP e BP_c que descrevem as partes de bicliques participantes das propriedades diferenciadoras. Conjecturamos que é possível computar BP_{ndif} e BP_{edif} — e, portanto, os grafos KB_{ndif} , KB_{edif} e KB — a partir dos grafos BP e BP_c . Também sugerimos algumas formas de continuidade do estudo de grafos biclique através de transformações sobre grafos que preservam seu grafo biclique, seja permitindo ou não a preservação dos tipos de intersecções entre bicliques maximais.

Tais resultados são derivados pelo estudo de intersecções de bicliques maximais. A abordagem de identificação de tipos das intersecções permite que sejam analisadas as suas condições estruturais e implicações quanto a estrutura do grafo biclique, estabelecendo relações com entidades matemáticas usadas de forma auxiliar como modelos, *posets* e operadores intermediários. A decomposição dos grafos biclique pelas arestas que descrevem os tipos de intersecções dão ao operador novas dimensões a sua estrutura, revelando também novos operadores, relações com subgrafos induzidos e relações entre os tipos de intersecções. Com essas novas ferramentas, também se abrem novos caminhos para o estudo de grafos biclique e suas propriedades estruturais.

Mesmo com a finalização desta tese, esta revela diversas frentes para a continuação do estudo de grafos biclique. Embora certas subclasses de grafos bipartidos tenham sido abordadas, ainda cabe a um futuro trabalho a caracterização e análise do reconhecimento dos grafos bicliques dessas classes. O estudo dos *posets* IIC — assim como a caracterização dos grafos IIC-comparabilidade — pode contribuir com novas caracterizações dos grafos biclique de livres de triângulos e com a finalização do algoritmo para a computação da pré-imagem de grafos $KB_m(K_3\text{-free})$. As propriedades reveladas pela análise do grafo biclique de um *join* podem ser usadas — como foram intencionadas — para a análise dos grafos biclique de cografos. A caracterização dos grafos resultantes de cada operador relacionado ao grafo biclique, as transformações que preservam ou não tipos de intersecções entre bicliques maximais e as conjecturas enunciadas são diferentes caminhos para o desenvolvimento do estudo de grafos biclique.

REFERÊNCIAS

- Albano, A. e do Lago, A. P. (2014). A convexity upper bound for the number of maximal bicliques of a bipartite graph. *Discrete Applied Mathematics*, 165:12–24.
- Alcón, L., Faria, L., de Figueiredo, C. M. e Gutierrez, M. (2009). The complexity of clique graph recognition. *Theoretical Computer Science*, 410(21):2072–2083.
- Alexe, G., Alexe, S., Crama, Y., Foldes, S., Hammer, P. L. e Simeone, B. (2004). Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques. *Discrete Applied Mathematics*, 145(1):11 – 21. Graph Optimization IV.
- Berge, C. (1960). Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Annales de l'ISUP*, IX(2):123–160.
- Berge, C. (1961). Färbung von graphen, deren samtliche bzw. deren ungerade kreise starr sind. *Wissenschaftliche Zeitschrift*.
- Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P. e Thomas, R. (2006). The strong perfect graph theorem. *Annals of mathematics*, páginas 51–229.
- Corneil, D., Lerchs, H. e Burlingham, L. (1981). Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3):163–174.
- Cruz, E., Groshaus, M., Guedes, A. e Puppo, J. (2020). Biclique graphs of interval bigraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 281:134–143. LAGOS'17: IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, C.I.R.M., Marseille, France - 2017.
- Cruz, E. P. (2018). Grafos biclique de grafos de bi-intervalos e bi-arco-circulares. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- Damaschke, P. (1992). Distances in cocomparability graphs and their powers. *Discrete Applied Mathematics*, 35(1):67–72.
- Dantas, S., de Figueiredo, C. M., da Silva, M. V. e Teixeira, R. B. (2011). On the forbidden induced subgraph sandwich problem. *Discrete Applied Mathematics*, 159(16):1717–1725. 8th Cologne/Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2009).
- Dantas, S., de Figueiredo, C. M., Maffray, F. e Teixeira, R. B. (2015). The complexity of forbidden subgraph sandwich problems and the skew partition sandwich problem. *Discrete Applied Mathematics*, 182:15–24. Eighth International Colloquium on Graphs and Optimization (GO VIII), 2012.
- Dawande, M., Keskinocak, P., Swaminathan, J. M. e Tayur, S. (2001). On bipartite and multipartite clique problems. *Journal of Algorithms*, 41(2):388 – 403.
- Dias, V. M. F., de Figueiredo, C. M. H. e Szwarcfiter, J. L. (2007). On the generation of bicliques of a graph. *dam*, 155(14):1826–1832.
- Dilworth, R. P. (1950). A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, 51(1):161–166.

- Dirac, G. A. (1961). On rigid circuit graphs. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 25(1–2):71–76.
- Dragan, F. F. (1989). Centers of graphs and the helly property. *Ph. D. Thesis, Moldova State University*.
- Duchet, P. (1984). *Classical Perfect Graphs*, página 67–96. Elsevier.
- Dushnik, B. e Miller, E. W. (1941). Partially ordered sets. *American Journal of Mathematics*, 63(3):600–610.
- Eppstein, D. (1994). Arboricity and bipartite subgraph listing algorithms. *Information processing letters*, 51(4):207–211.
- Farzad, B. e Karimi, M. (2012). Square-root finding problem in graphs, a complete dichotomy theorem. *arXiv preprint arXiv:1210.7684*.
- Feuilleloy, L. e Habib, M. (2021). Graph classes and forbidden patterns on three vertices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 35(1):55–90.
- Foldes, S. e Hammer, P. L. (1976). *Split graphs*. Universität Bonn. Institut für Ökonometrie und Operations Research.
- Gallai, T. (1967). Transitiv orientierbare graphen. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 18(1–2):25–66.
- Gaspers, S., Kratsch, D. e Liedloff, M. (2012). On independent sets and bicliques in graphs. *Algorithmica*, 62(3):637–658.
- Glir, L. F. (2022). Reconhecimento de grafos iic-comparabilidade.
- Golumbic, M., Kaplan, H. e Shamir, R. (1995). Graph sandwich problems. *Journal of Algorithms*, 19(3):449–473.
- Groshaus, M. (2006). *Bicliques, cliques, neighborhoods y la propiedad de Helly*. Tese de doutorado, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
- Groshaus, M., Guedes, A. e Puppo, J. (2022). Biclique graphs of split graphs. *Discrete Applied Mathematics*.
- Groshaus, M. e Guedes, A. L. (2020). Recognition of Biclique Graphs: What we know so far. Pôster apresentado em LAWCG'20: IX Latin American Workshop on Clique in Graphs.
- Groshaus, M. e Guedes, A. L. (2021). Biclique graphs of k_3 -free graphs and bipartite graphs. *Procedia Computer Science*, 195:230–238. Proceedings of the XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.
- Groshaus, M. e Montero, L. P. (2013). On the iterated biclique operator. *Journal of Graph Theory*, 73(2):181–190.
- Groshaus, M. e Szwarcfiter, J. L. (2010). Biclique graphs and biclique matrices. *Journal of Graph Theory*, 63(1):1–16.
- Gély, A., Nourine, L. e Sadi, B. (2009). Enumeration aspects of maximal cliques and bicliques. *Discrete Applied Mathematics*, 157(7):1447–1459.

- Hamelink, R. C. (1968). A partial characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 5(2):192–197.
- Harary, F., Kabell, J. A. e McMorris, F. R. (1982). Bipartite intersection graphs. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 023(4):739–745.
- Hell, P. e Huang, J. (2004). Interval bigraphs and circular arc graphs. *Journal of Graph Theory*, 46(4):313–327.
- Hell, P., Huang, J., Lin, J. C.-H. e McConnell, R. M. (2020). Bipartite analogues of comparability and cocomparability graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34(3):1969–1983.
- Hermelin, D. e Manoussakis, G. (2021). Efficient enumeration of maximal induced bicliques. *Discrete Applied Mathematics*, 303:253–261. Combined Special Issue: 1) 17th Cologne–Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2019); Guest edited by Johann Hurink, Bodo Manthey 2) WEPA 2018 (Second Workshop on Enumeration Problems and Applications); Guest edited by Takeaki Uno, Andrea Marino.
- Ikeda, L. A. O. (2018). Grafos biclique em grafos de bi-intervalos. Trabalho de Conclusão de Curso do Bacharelado em Ciência da Computação da UFPR. Orientador: André Luiz Pires Guedes. Defesa: 18/12/2018. Banca: Leandro M. Zatesko e Murilo V. G. da Silva.
- Jung, H. (1978). On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(2):125–133.
- Kloks, T. e Kratsch, D. (1995). Computing a perfect edge without vertex elimination ordering of a chordal bipartite graph. *Information Processing Letters*, 55(1):11–16.
- Kuznetsov, S. O. (2001). On computing the size of a lattice and related decision problems. *Order*, 18:313–321.
- Legay, S. e Montero, L. (2019). On the edge-biclique graph and the iterated edge-biclique operator. *CoRR*, abs/1908.06656.
- Lekkerkerker, C. G. e Boland, J. C. (1962). Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundam. Math.*, 51:45–64.
- Li, X., Mitra, P., Zhou, R. e Nejdil, W. (2023). Quantum algorithm for maximum biclique problem.
- Liu, G., Sim, K. e Li, J. (2006). Efficient mining of large maximal bicliques. Em Tjoa, A. M. e Trujillo, J., editores, *Data Warehousing and Knowledge Discovery*, páginas 437–448, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Lovász, L. (1972). Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, 2(3):253–267.
- Makino, K. e Uno, T. (2004). New algorithms for enumerating all maximal cliques. Em *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, páginas 260–272. Springer.
- Metelsky, Y. e Tyshkevich, R. (2003). Line graphs of helly hypergraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16(3):438–448.

- Mirsky, L. (1971). A dual of dilworth's decomposition theorem. *The American Mathematical Monthly*, 78(8):876–877.
- Montero, L. (2022). Vertex removal in biclique graphs. *Discrete Applied Mathematics*.
- Müller, H. (1997). Recognizing interval digraphs and interval bigraphs in polynomial time. *Discrete Applied Mathematics*, 78(1):189 – 205.
- Neumann-Lara, V. et al. (1978). On clique-divergent graphs. *Problems Combinatoires et Théorie des Graphes, Colloques internationaux du CNRS, Paris*, 260:313–315.
- Peeters, R. (2003). The maximum edge biclique problem is np-complete. *Discrete Applied Mathematics*, 131(3):651 – 654.
- Prisner, E. (2000). Bicliques in graphs i: Bounds on their number. *Combinatorica*, 20(1):109–117.
- Rafiey, A. (2022). Recognizing interval bigraphs by forbidden patterns. *Journal of Graph Theory*, 100(3):504–529.
- Saha, P. K., Basu, A., Sen, M. K. e West, D. B. (2014). Permutation bigraphs and interval containments. *Discrete Applied Mathematics*, 175:71–78.
- Sen, M. e Sanyal, B. K. (1994). Indifference digraphs: A generalization of indifference graphs and semiorders. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7(2):157–165.
- Steiner, G. (1996). The recognition of indifference digraphs and generalized semiorders. *Journal of Graph Theory*, 21(2):235–241.
- Sumner, D. P. (1974). Dacey graphs. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18(4):492–502.
- Szwarcfiter, J. L. (1997). Recognizing clique-helly graphs. *Ars Combinatoria*, 45:29–32.
- Szwarcfiter, J. L. (2003). *A Survey on Clique Graphs*, páginas 109–136. Springer New York, New York, NY.
- Tennenhouse, C. M. (2010). *Some extensions of graph saturation to edge colored, oriented, and subdivided graphs*. Tese de doutorado, University of Colorado at Denver.
- Tutte, W. T. (1967). Antisymmetrical digraphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 19:1101–1117.
- West, D. B. (1998). Short proofs for interval digraphs. *Discrete Mathematics*, 178(1–3):287–292.
- Zhang, Y., Phillips, C. A., Rogers, G. L., Baker, E. J., Chesler, E. J. e Langston, M. A. (2014). On finding bicliques in bipartite graphs: a novel algorithm and its application to the integration of diverse biological data types. *BMC Bioinformatics*, 15(1):110.

APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO DA PRÉ-IMAGEM DO GRAFO KB_m DE LIVRE DE TRIÂNGULOS

A.1 IMPLEMENTAÇÃO DAS REGRAS DO ALGORITMO

Os seguintes programas implementam, respectivamente, as etapas de subdivisão de todas as arestas, Regra do P_3 , Regra das Cliques, Regra do Triângulo e computação da pré-imagem do grafo linha do Algoritmo 1 descrito na Seção 6.2. Essas implementações são parte de uma implementação inicial do algoritmo — que não é mais usado — e têm como objetivo apenas fornecer uma apresentação alternativa das etapas do algoritmo, não fazendo parte de outras implementações deste trabalho. A Regra do Diamante não é implementada pela descoberta do Teorema 6.1.8 ocorrer após a implementação inicial do algoritmo. As implementações também diferem das etapas apresentadas por manterem as arestas originais do grafo de entrada, usadas pela busca dos vértices descritos pelas etapas.

Os programas são implementados usando a linguagem `gvpr` de processamento de grafos, parte do pacote de programas `GraphViz`, versão 2.43.0. O Programa A.1 implementa a etapa de subdivisão de todas as arestas, o Programa A.2 implementa a Regra do P_3 , o Programa A.3 implementa a Regra das Cliques, o Programa A.4 implementa a Regra do Triângulo e o Programa A.5 implementa a computação da pré-imagem do grafo linha.

Programa A.1: `subdivide.gvpr`

```

1 BEG_G {
2   graph_t g = graph("TEMP_G", "US");
3   graph_t ori = subg(g, "ORIGINAL_EDGES");
4 }
5 N {
6   node_t n = clone(g, $);
7   n.tag = "MAIN";
8 }
9 E {
10  node_t h = clone(g, $.head);
11  node_t t = clone(g, $.tail);
12  edge_sg(ori, h, t, "");
13
14  n = node(g, h.name + ":" + t.name);
15  n.tag = "SUBD";
16  edge(n, h, "");
17  edge(n, t, "");
18 }
19 END_G { write(g); }
```

Programa A.2: `p3-rule.gvpr`

```

1 BEG_G {
2   graph_t g = $;
3   graph_t ori = subg(g, "ORIGINAL_EDGES");
4 }
5 N[tag == "MAIN"] {
6   node_t nX = $;
7
8   edge_t e, f;
9   for(e = fstedge_sg(ori, nX); e; e = nxtedge_sg(ori, e, nX)) {
```

```

10  node_t nY = opp(e, nX);
11  for(f = nnextedge_sg(ori, e, nX); f; f = nnextedge_sg(ori, f, nX)) {
12      node_t nZ = opp(f, nX);
13
14      node_t nXY = isNode(g, nX.name + ":" + nY.name);
15      nXY = nXY ? nXY : isNode(g, nY.name + ":" + nX.name);
16      node_t nXZ = isNode(g, nX.name + ":" + nZ.name);
17      nXZ = nXZ ? nXZ : isNode(g, nZ.name + ":" + nX.name);
18      node_t nYZ = isNode(g, nY.name + ":" + nZ.name);
19      nYZ = nYZ ? nYZ : isNode(g, nZ.name + ":" + nY.name);
20      edge_t t = edge(nXY, nXZ, "");
21      if(nYZ == NULL)
22          t.action = "keep";
23      else {
24          t.action = "decide";
25          t = edge(nXY, nYZ, ""); t.action = "decide";
26          t = edge(nXZ, nYZ, ""); t.action = "decide";
27      }
28  }
29  }
30  }
31  END_G { $0 = g; }

```

Programa A.3: clique-rule.gvpr

```

1  BEG_G {
2      graph_t g = $;
3      graph_t ori = subg(g, "ORIGINAL_EDGES");
4  }
5  E[head.tag == "SUBD" && tail.tag == "SUBD"] {
6      // $ = nXY -- nXZ
7      edge_t tYZ = $;
8      node_t nXY = tYZ.head;
9      node_t nXZ = tYZ.tail;
10
11     edge_t e;
12     node_t nX;
13     for(e = fstedge(nXY); e; e = nnextedge(e, nXY)) {
14         nX = opp(e, nXY);
15         if(nX.tag != "MAIN") continue;
16         if(isEdge(nX, nXZ, "")) break;
17     }
18
19     for(e = fstedge(nX); e; e = nnextedge(e, nX)) {
20         node_t nXW = opp(e, nX);
21         if(isSubedge(ori, e)) continue;
22         if(nXW == nXY || nXW == nXZ) continue;
23
24         edge_t tYW = isEdge(nXY, nXW, "");
25         edge_t tZW = isEdge(nXZ, nXW, "");
26
27         if(tYW.action == "keep" && tZW.action == "keep") {
28             if(tYZ.action != "delete") tYZ.action = "keep";
29             else exit(1);
30         }
31         if(tYW.action == "delete" && tZW.action == "delete") {
32             if(tYZ.action != "delete") tYZ.action = "keep";
33             else exit(1);

```

```

34     }
35     if(tYW.action == "keep" && tZW.action == "delete") {
36         if(tYZ.action != "keep") tYZ.action = "delete";
37         else exit(1);
38     }
39     if(tYW.action == "delete" && tZW.action == "keep") {
40         if(tYZ.action != "keep") tYZ.action = "delete";
41         else exit(1);
42     }
43 }
44 }
45 END_G { $0 = g; }

```

Programa A.4: triangle-rule.gvpr

```

1  BEG_G {
2  graph_t g = $;
3  graph_t ori = subg(g, "ORIGINAL_EDGES");
4  }
5  E[isSubedge(ori, $)] {
6  // $ = X -- Y
7  node_t nX = $.head;
8  node_t nY = $.tail;
9
10 edge_t e;
11 for(e = fstedge_sg(ori, nX); e; e = nxtedge_sg(ori, e, nX)) {
12     if(e == $) continue;
13     node_t nZ = opp(e, nX);
14     if(!isEdge(nZ, nY, "")) continue;
15
16     node_t nXY = isNode(g, nX.name + ":" + nY.name);
17     nXY = nXY ? nXY : isNode(g, nY.name + ":" + nX.name);
18     node_t nXZ = isNode(g, nX.name + ":" + nZ.name);
19     nXZ = nXZ ? nXZ : isNode(g, nZ.name + ":" + nX.name);
20     node_t nYZ = isNode(g, nY.name + ":" + nZ.name);
21     nYZ = nYZ ? nYZ : isNode(g, nZ.name + ":" + nY.name);
22
23     edge_t tX = isEdge(nXY, nXZ, "");
24     edge_t tY = isEdge(nXY, nYZ, "");
25     edge_t tZ = isEdge(nXZ, nYZ, "");
26
27     if(tX.action == "keep" && tY.action == "keep") {
28         if(tZ.action != "keep") tZ.action = "delete";
29         else exit(1);
30     }
31     if(tX.action == "delete") {
32         if(tY.action != "delete" && tZ.action != "delete") {
33             tY.action = "keep";
34             tZ.action = "keep";
35         } else exit(1);
36     }
37     if(tY.action == "delete") {
38         if(tX.action != "delete" && tZ.action != "delete") {
39             tX.action = "keep";
40             tZ.action = "keep";
41         } else exit(1);
42     }
43 }

```

```

44 }
45 END_G { $0 = g; }

```

Programa A.5: preline.gvpr

```

1  BEG_G {
2  graph_t g = graph("PREKBM", "US");
3  node_t STAY_IN_A[];
4  }
5  N[tag == "MAIN"] {
6  node_t A = node(g, $.name + "-0");
7  node_t B = node(g, $.name + "-1");
8  edge_t AB = edge(A, B, "");
9  AB.style = "bold";
10 }
11 N[tag == "SUBD"] {
12 node_t nXY = $;
13 node_t nX, nY;
14
15 edge_t e;
16 for(e = fstedge(nXY); e; e = nxtedge(e, nXY)) {
17   nX = opp(e, nXY); if(nX.tag == "MAIN") break;
18 }
19 for(e = nxtedge(e, nXY); e; e = nxtedge(e, nXY)) {
20   nY = opp(e, nXY); if(nY.tag == "MAIN") break;
21 }
22
23 node_t eX_A = node(g, nX.name + "-0");
24 node_t eX_B = node(g, nX.name + "-1");
25 node_t eY_A = node(g, nY.name + "-0");
26 node_t eY_B = node(g, nY.name + "-1");
27
28 if(!STAY_IN_A[nX]) STAY_IN_A[nX] = nXY;
29 if(!STAY_IN_A[nY]) STAY_IN_A[nY] = nXY;
30
31 if(STAY_IN_A[nX] == nXY || isEdge(STAY_IN_A[nX], nXY, "")) {
32   if(STAY_IN_A[nY] == nXY || isEdge(STAY_IN_A[nY], nXY, ""))
33     edge(eX_A, eY_A, "");
34   else
35     edge(eX_A, eY_B, "");
36 } else {
37   if(STAY_IN_A[nY] == nXY || isEdge(STAY_IN_A[nY], nXY, ""))
38     edge(eX_B, eY_A, "");
39   else
40     edge(eX_B, eY_B, "");
41 }
42 }
43 END_G { write(g); }

```

A.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPLETA EM C

O Programa A.6 implementa o Algoritmo 7 — ao final da Seção 6.3 —, que é a variação com escolha gulosa do Algoritmo 1. O programa é implementado usando a linguagem de programação C e depende da biblioteca `cgraph`, que é distribuído juntamente com o pacote de programas `GraphViz`, versão 2.43.0.

A implementação utiliza de uma representação em dois bits para a decisão de cada par, onde adotamos a seguinte interpretação para cada valor:

0 (00)	Ainda não decidido
1 (01)	Inserir (manter o par)
2 (10)	Não inserir (remover o par)
3 (11)	Rejeitar o grafo

O vetor `darray` é o vetor de pares a serem decididos, onde cada índice referencia um par e seu valor descreve a decisão tomada. Para as decisões, são usados outros vetores — um para cada regra — que armazenam, para cada um de seus índices, os índices de `darray` que são associados aos pares a serem decididos relevantes para a regra. O vetor `k3array` é usado para as Regras do Triângulo e do P_3 , o vetor `clarray` é usado para a Regra das Cliques e o vetor `diarray` é usado para a Regra do Diamante. A decisão é feita pelas fórmulas implementadas pelos *macros* `DECIDE_K3` (para a Regra do Triângulo), `DECIDE_CLIQUE` (para a Regra das Cliques) e `DECIDE_DIAMOND` (para a Regra do Diamante), que usam os valores de decisões e retornam a decisão a ser tomada para um dos pares. Caso haja inconsistência com as regras — que acontece quando o grafo de entrada não é um grafo KB_m de um grafo livre de triângulos —, as fórmulas atribuem o valor de rejeição — 3 (11) — para o par. Se um dos pares possui tal valor, as fórmulas propagam o valor de rejeição. Tal comportamento foi planejado para uma possível futura implementação paralela.

A implementação depende da biblioteca de funções `cgraph`, que acompanha o pacote de programas `GraphViz`, versão 2.43.0.

Programa A.6: `prekbm.c`

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <error.h>
3 #include <stdint.h>
4 #include <stdlib.h>
5 #include <graphviz/cgraph.h>
6
7 #ifndef TRUE
8 #define TRUE 1
9 #endif
10
11 #ifndef FALSE
12 #define FALSE 0
13 #endif
14
15 #define OPP(e,v) (aghead(e)==(v)?agtail(e):aghead(e))
16
17 #define DECISION_NONE 0
18 #define DECISION_KEEP 1
19 #define DECISION_DELE 2
20 #define DECISION_REJE 3
21
22 #define BIT0(d) ((d)&0x1)
23 #define BIT1(d) (((d)>>1)&0x1)
24
25 // x = AB, y = CD, z = EF
26 #define BIT_CD_BD_AC_AB(x,y) ((BIT1(y)&BIT0(y))|(BIT0(x)&BIT0(y))|(BIT1(x)&
    BIT1(y))|(BIT1(x)&BIT0(x)))
27 #define BIT_CD_BC_AD_AB(x,y) ((BIT1(y)&BIT0(y))|(BIT0(x)&BIT1(y))|(BIT1(x)&
    BIT0(y))|(BIT1(x)&BIT0(x)))

```

```

28 #define BIT0_CLIQUÉ(x, y, z) (BIT0(z) | BIT_CD_BD_AC_AB((x), (y)))
29 #define BIT1_CLIQUÉ(x, y, z) (BIT1(z) | BIT_CD_BC_AD_AB((x), (y)))
30 #define BIT0_K3(x, y, z) (BIT0(z) | BIT1(x) | BIT1(y))
31 #define BIT1_K3(x, y, z) (BIT1(z) | BIT_CD_BD_AC_AB((x), (y)))
32 #define DECIDE_CLIQUÉ(x, y, z) (((BIT1_CLIQUÉ((x), (y), (z))) << 1) | BIT0_CLIQUÉ((
    x), (y), (z)))
33 #define DECIDE_K3(x, y, z) (((BIT1_K3((x), (y), (z))) << 1) | BIT0_K3((x), (y), (z)))
34
35 #define BIT1_DIAMOND(x, y) (BIT1(y) | BIT1(x))
36 #define BIT0_DIAMOND(x, y) (BIT0(y) | BIT0(x))
37 #define DECIDE_DIAMOND(x, y) (((BIT1_DIAMOND((x), (y))) << 1) | BIT0_DIAMOND((x)
    , (y)))
38
39 typedef uint8_t decision_t;
40 typedef uint32_t index_t;
41
42 typedef struct {
43     index_t elidx;
44     index_t e2idx;
45 } idxduo_t;
46
47 typedef struct {
48     index_t elidx;
49     index_t e2idx;
50     index_t e3idx;
51 } idxtrio_t;
52
53 typedef struct {
54     Agrec_t header;
55     index_t index;
56 } rec_t;
57
58 void copy_graph(Agraph_t *in, Agraph_t *out)
59 {
60     Agnode_t *v, *u0, *u1;
61     Agedge_t *e;
62
63     for(v = agfstnode(in); v; v = agnxtnode(in, v)) {
64         u0 = agnode(out, agnameof(v), TRUE);
65         for(e = agfstout(in, v); e; e = agnxtout(in, e)) {
66             u1 = agnode(out, agnameof(aghead(e)), TRUE);
67             aedge(out, u0, u1, NULL, TRUE);
68         }
69     }
70 }
71
72 char buffer[256];
73 static char *subd_name(Agedge_t *e)
74 {
75     snprintf(buffer, 256, "%s:%s", agnameof(agtail(e)), agnameof(aghead(e)));
76     return buffer;
77 }
78
79 static char *concat_name(Agnode_t *n, const char *str)
80 {
81     snprintf(buffer, 256, "%s%s", agnameof(n), str);
82     return buffer;
83 }

```

```

84
85 void subdivide_graph(Agraph_t *in, Agraph_t *out)
86 {
87     Agnode_t *v, *u, *u0, *u1;
88     Agedge_t *e, *f, *d;
89
90     rec_t *rec;
91     int i = 0, j = 0;
92
93     for(v = agfstnode(in); v; v = agnxtnode(in, v)) {
94         u = agnode(out, agnameof(v), TRUE);
95         rec = agbindrec(u, "index", sizeof(rec_t), FALSE);
96         rec->index = j++;
97         for(e = agfstedge(in, v); e; e = agnxtedge(in, e, v)) {
98             u0 = agnode(out, subd_name(e), TRUE);
99             aedge(out, u, u0, NULL, TRUE);
100            for(f = agnxtedge(in, e, v); f; f = agnxtedge(in, f, v)) {
101                u1 = agnode(out, subd_name(f), TRUE);
102                aedge(out, u, u1, NULL, TRUE);
103                d = aedge(out, u0, u1, NULL, TRUE);
104                rec = (rec_t*)agbindrec(d, "index", sizeof(rec_t), FALSE);
105                rec->index = i++;
106            }
107        }
108    }
109 }
110
111 decision_t *alloc_dearray(Agraph_t *g, int *len)
112 {
113     Agnode_t *v;
114     decision_t *dearray;
115
116     int c = 0, d, i;
117     for(v = agfstnode(g); v; v = agnxtnode(g, v)) {
118         d = agdegree(g, v, TRUE, TRUE);
119         c+= d*(d-1)/2;
120     }
121     *len = c;
122     dearray = malloc(sizeof(idxtrio_t)*c);
123
124     for(i = 0; i < c; i++)
125         dearray[i] = 0;
126
127     return dearray;
128 }
129
130 idxtrio_t *alloc_k3array(Agraph_t *g, int *len)
131 {
132     Agnode_t *v;
133     idxtrio_t *k3array;
134
135     int c = 0, d, i;
136     for(v = agfstnode(g); v; v = agnxtnode(g, v)) {
137         d = agdegree(g, v, TRUE, TRUE);
138         c+= d*(d-1)/2;
139     }
140     *len = c;
141     k3array = malloc(sizeof(idxtrio_t)*c);

```

```

142
143     for(i = 0; i < c; i++) {
144         k3array[i].elidx = 0;
145         k3array[i].e2idx = 0;
146         k3array[i].e3idx = 0;
147     }
148
149     return k3array;
150 }
151
152 idxtrio_t *alloc_clarray(Agraph_t *g, int *len)
153 {
154     Agnode_t *v;
155     idxtrio_t *clarray;
156
157     int c = 0, d, i;
158     for(v = agfstnode(g); v; v = agnxtnode(g, v)) {
159         d = agdegree(g, v, TRUE, TRUE);
160         c+= d*(d-1)*(d-2)/2;
161     }
162     *len = c;
163     clarray = malloc(sizeof(idxtrio_t)*c);
164
165     for(i = 0; i < c; i++) {
166         clarray[i].elidx = 0;
167         clarray[i].e2idx = 0;
168         clarray[i].e3idx = 0;
169     }
170
171     return clarray;
172 }
173
174 idxduo_t *alloc_diarray(Agraph_t *g, int *len)
175 {
176     Agnode_t *v1, *v2, *v3, *v4;
177     Agedge_t *e, *f, *d;
178     idxduo_t *diarray;
179
180     int c = 0, i;
181     for(v1 = agfstnode(g); v1; v1 = agnxtnode(g, v1)) {
182         for(e = agfstedge(g, v1); e; e = agnxtedge(g, e, v1)) {
183             v2 = OPP(e, v1);
184             for(f = agnxtedge(g, e, v1); f; f = agnxtedge(g, f, v1)) {
185                 v3 = OPP(f, v1);
186                 if(!agedge(g, v2, v3, NULL, FALSE)) continue;
187                 for(d = agfstedge(g, v2); d; d = agnxtedge(g, d, v2)) {
188                     v4 = OPP(d, v2);
189                     if(v4 == v1 || v4 == v3) continue;
190                     if(agedge(g, v1, v4, NULL, FALSE)) continue;
191                     if(!agedge(g, v3, v4, NULL, FALSE)) continue;
192                     c++;
193                 }
194             }
195         }
196     }
197     *len = c;
198     diarray = malloc(sizeof(idxduo_t)*c);
199

```



```

258     y = aledge(subd, u0, u2, NULL, FALSE);
259     rec = (rec_t*)aggetrec(y, "index", FALSE);
260     clarray[i].e2idx = rec->index;
261     z = aledge(subd, u1, u2, NULL, FALSE);
262     rec = (rec_t*)aggetrec(z, "index", FALSE);
263     clarray[i].e3idx = rec->index;
264     i++;
265 }
266 }
267 }
268 }
269 }
270
271 void init_diarray(idxduo_t *diarray, Agraph_t *g, Agraph_t *subd)
272 {
273     Agnode_t *v1, *v2, *v3, *v4;
274     Agnode_t *u0, *u1;
275     Aledge_t *e, *f, *d, *k;
276     Aledge_t *x;
277     rec_t *rec;
278
279     int i = 0;
280     for(v1 = agfstnode(g); v1; v1 = agnxtnode(g, v1)) {
281         for(e = agfstedge(g, v1); e; e = agnxtedge(g, e, v1)) {
282             v2 = OPP(e, v1);
283             for(f = agnxtedge(g, e, v1); f; f = agnxtedge(g, f, v1)) {
284                 v3 = OPP(f, v1);
285                 if(!aledge(g, v2, v3, NULL, FALSE)) continue;
286                 for(d = agfstedge(g, v2); d; d = agnxtedge(g, d, v2)) {
287                     v4 = OPP(d, v2);
288                     if(v4 == v1 || v4 == v3) continue;
289                     if(aledge(g, v1, v4, NULL, FALSE)) continue;
290                     k = aledge(g, v3, v4, NULL, FALSE);
291                     if(!k) continue;
292                     u0 = agnode(subd, subd_name(e), FALSE);
293                     u1 = agnode(subd, subd_name(f), FALSE);
294                     x = aledge(subd, u0, u1, NULL, FALSE);
295                     rec = (rec_t*)aggetrec(x, "index", FALSE);
296                     diarray[i].elidx = rec->index;
297                     u0 = agnode(subd, subd_name(d), FALSE);
298                     u1 = agnode(subd, subd_name(k), FALSE);
299                     x = aledge(subd, u0, u1, NULL, FALSE);
300                     rec = (rec_t*)aggetrec(x, "index", FALSE);
301                     diarray[i].e2idx = rec->index;
302                     i++;
303                 }
304             }
305         }
306     }
307 }
308
309 void process_decision(Agraph_t *g, Agraph_t *line, decision_t *dearray)
310 {
311     Agnode_t *v, *u0, *u1;
312     Aledge_t *e, *f, *d;
313     rec_t *rec;
314     int i;
315

```

```

316 for(v = agfstnode(g); v; v = agnxtnode(g, v)) {
317     for(e = agfstedge(g, v); e; e = agnxtedge(g, e, v)) {
318         for(f = agnxtedge(g, e, v); f; f = agnxtedge(g, f, v)) {
319             u0 = agnode(line, subd_name(e), TRUE);
320             u1 = agnode(line, subd_name(f), TRUE);
321             d = aledge(line, u0, u1, NULL, TRUE);
322             rec = (rec_t*) aggetrec(d, "index", FALSE);
323             i = rec->index;
324             if(dearray[i] == DECISION_DELE) agdeledge(line, d);
325         }
326     }
327 }
328 }
329 }
330 int p3_rule(decision_t *dearray, idxtrio_t *k3array, int k3len)
331 {
332     int i, c = 0;
333
334     for(i = 0; i < k3len; i++) {
335         if(k3array[i].e2idx != k3array[i].e3idx) continue;
336         dearray[k3array[i].elidx] = DECISION_KEEP;
337         c++;
338     }
339
340     return c;
341 }
342
343 int clique_rule(decision_t *dearray, idxtrio_t *clarray, int cllen)
344 {
345     int i, c = 0;
346     int x, y, z;
347
348     for(i = 0; i < cllen; i++) {
349         x = dearray[clarray[i].elidx];
350         y = dearray[clarray[i].e2idx];
351         z = dearray[clarray[i].e3idx];
352         dearray[clarray[i].elidx] = DECIDE_CLIQUE(y, z, x);
353         if(dearray[clarray[i].elidx] == x) continue;
354         if(dearray[clarray[i].elidx] != DECISION_REJE) c++;
355         else return -1;
356     }
357
358     return c;
359 }
360
361 int k3_rule(decision_t *dearray, idxtrio_t *k3array, int k3len)
362 {
363     int i, c = 0;
364     decision_t x, y, z;
365
366     for(i = 0; i < k3len; i++) {
367         if(k3array[i].e2idx == k3array[i].e3idx) continue;
368         x = dearray[k3array[i].elidx];
369         y = dearray[k3array[i].e2idx];
370         z = dearray[k3array[i].e3idx];
371         dearray[k3array[i].elidx] = DECIDE_K3(y, z, x);
372         if(dearray[k3array[i].elidx] == x) continue;
373         if(dearray[k3array[i].elidx] != DECISION_REJE) c++;

```

```

374     else return -1;
375 }
376
377 return c;
378 }
379
380 int diamond_rule(decision_t *dearray, idxduo_t *diarray, int dilen)
381 {
382     int i, c = 0;
383     decision_t x, y;
384
385     for(i = 0; i < dilen; i++) {
386         x = dearray[diarray[i].elidx];
387         y = dearray[diarray[i].e2idx];
388         dearray[diarray[i].elidx] = DECIDE_DIAMOND(y, x);
389         if(dearray[diarray[i].elidx] == x) continue;
390         if(dearray[diarray[i].elidx] != DECISION_REJE) c++;
391         else return -1;
392     }
393
394     return c;
395 }
396
397 void decide_one(decision_t *dearray, unsigned int delen, idxduo_t *diarray,
398               unsigned int dilen)
399 {
400     unsigned int i, j, k;
401     int assigned = 0;
402
403     for(i = 0; i < delen; i++) {
404         if(dearray[i] != DECISION_NONE) continue;
405         k = i;
406         assigned = 1;
407         for(j = 0; j < dilen; j++) {
408             if(i == diarray[j].elidx) {
409                 dearray[i] = DECISION_KEEP;
410                 return;
411             }
412         }
413     }
414     if(assigned) dearray[k] = DECISION_KEEP;
415 }
416
417 void preline_graph(Agraph_t *g, Agraph_t *subd, Agraph_t *out)
418 {
419     Agnode_t *v, *u, *u0, *u1, *w0a, *w0b, *w1a, *w1b;
420     Agedge_t *e;
421     rec_t *rec;
422
423     int i, n = agnnodes(g);
424     Agnode_t **stay_in_a = malloc(sizeof(Agnode_t*)*n);
425
426     for(i = 0; i < n; i++)
427         stay_in_a[i] = NULL;
428
429     int e0, e1;
430     for(v = agfstnode(g); v; v = agnxtnode(g, v)) {
431         u0 = agnode(subd, agnameof(v), FALSE);

```

```

431 w0a = agnode(out, concat_name(u0, "-0"), TRUE);
432 w0b = agnode(out, concat_name(u0, "-1"), TRUE);
433 agedge(out, w0a, w0b, NULL, TRUE);
434 rec = (rec_t*) aggetrec(u0, "index", FALSE);
435 e0 = rec->index;
436 for(e = agfstedge(g, v); e; e = agnxtedge(g, e, v)) {
437     u1 = agnode(subd, agnameof(OPP(e, v)), FALSE);
438     w1a = agnode(out, concat_name(u1, "-0"), TRUE);
439     w1b = agnode(out, concat_name(u1, "-1"), TRUE);
440     rec = (rec_t*) aggetrec(u1, "index", FALSE);
441     e1 = rec->index;
442
443     u = agnode(subd, subd_name(e), FALSE);
444
445     if(!stay_in_a[e0]) stay_in_a[e0] = u;
446     if(!stay_in_a[e1]) stay_in_a[e1] = u;
447
448     if(stay_in_a[e0] == u || agedge(subd, u, stay_in_a[e0], NULL, FALSE)) {
449         if(stay_in_a[e1] == u || agedge(subd, u, stay_in_a[e1], NULL, FALSE))
450             agedge(out, w0a, w1a, NULL, TRUE);
451         else
452             agedge(out, w0a, w1b, NULL, TRUE);
453     } else {
454         if(stay_in_a[e1] == u || agedge(subd, u, stay_in_a[e1], NULL, FALSE))
455             agedge(out, w0b, w1a, NULL, TRUE);
456         else
457             agedge(out, w0b, w1b, NULL, TRUE);
458     }
459 }
460 }
461
462 free(stay_in_a);
463 }
464
465 int main()
466 {
467     Agraph_t *input, *line, *strict, *preline;
468
469     input = agread(stdin, NULL);
470     if(!input) error(1,0, "input file is not in a valid DOT format");
471
472     strict = agopen(NULL, Agstrictundirected, NULL);
473     copy_graph(input, strict);
474     agclose(input);
475
476     if(agnnodes(strict) < 1) {
477         agwrite(strict, stdout);
478         agclose(strict);
479         return 0;
480     }
481
482     line = agopen(NULL, Agstrictundirected, NULL);
483     subdivide_graph(strict, line);
484
485     decision_t *dearray; int delen;
486     idxtrio_t *k3array; int k3len;
487     idxtrio_t *clarray; int cllen;
488     idxduo_t *diarray; int dilen;

```

```

489
490 dearray = alloc_dearray(strict, &delen);
491 k3array = alloc_k3array(strict, &k3len);
492 clarray = alloc_clarray(strict, &cllen);
493 diarray = alloc_diarray(strict, &dilen);
494
495 init_k3array(k3array, strict, line);
496 init_clarray(clarray, strict, line);
497 init_diarray(diarray, strict, line);
498
499 int c_cl, c_k3, c_di;
500 int count = p3_rule(dearray, k3array, k3len);
501 do {
502     c_cl = clique_rule(dearray, clarray, cllen);
503     c_k3 = k3_rule(dearray, k3array, k3len);
504     c_di = diamond_rule(dearray, diarray, dilen);
505     // TODO: IIC rule
506     if(c_cl < 0 || c_k3 < 0 || c_di < 0) break;
507     if(c_cl + c_k3 + c_di == 0) {
508         decide_one(dearray, delen, diarray, dilen);
509         count++;
510     }
511     count += c_cl + c_k3 + c_di;
512 } while(count <= delen);
513 if(c_cl < 0 || c_k3 < 0 || c_di < 0) error(2,0, "impossible to solve");
514
515 process_decision(strict, line, dearray);
516 free(dearray);
517 free(clarray);
518 free(k3array);
519 free(diarray);
520
521 preline = agopen(NULL, Agstrictundirected, NULL);
522 preline_graph(strict, line, preline);
523 agclose(line);
524
525 agclose(strict);
526 agwrite(preline, stdout);
527 agclose(preline);
528
529 return 0;
530 }

```

O Programa A.6 pode ser compilado com o comando `gcc` acompanhado pela referência à biblioteca de funções `cgraph` com a opção `-lcgraph`.

```
gcc -Wall -Wextra -pedantic -O3 -o prekbm prekbm.c -lcgraph
```

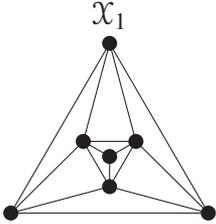
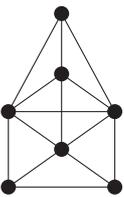
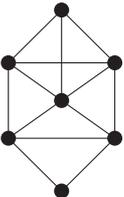
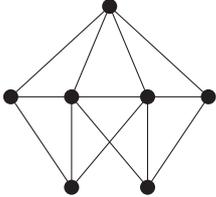
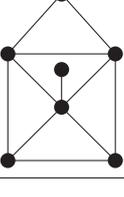
A partir de um grafo de entrada descrito por um arquivo `input.dot`, executamos a implementação direcionando o conteúdo do arquivo para a entrada padrão do processo com o seguinte comando.

```
./prekbm < input.dot
```

APÊNDICE B – GRAFOS E GERADORES

B.1 DESCRIÇÃO DE GRAFOS

A tabela a seguir descreve os casos particulares de subgrafos proibidos pela classe dos grafos de comparabilidade. Cada grafo é descrito no formato dot (também conhecido como formato gv) de descrição de grafos.

 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_1</p>	<pre style="text-align: center;">x1.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c -- a; 3 d -- e -- f -- d; 4 a -- { d f }; 5 b -- { d e }; 6 c -- { e f }; 7 g -- { d e f }; 8 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_2</p>	<pre style="text-align: center;">x2.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c -- a; 3 d -- e -- f -- d; 4 a -- d; 5 b -- e; 6 d -- { c g } -- { e f }; 7 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_3</p>	<pre style="text-align: center;">x3.dot 1 strict graph { 2 a -- { b c d }; 3 b -- { c d e }; 4 c -- { d f }; 5 e -- f -- g -- e; 6 e -- d -- f; 7 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_4</p>	<pre style="text-align: center;">x4.dot 1 strict graph { 2 a -- { b c d e }; 3 b -- c -- d -- e; 4 f -- { b c d }; 5 g -- { c d e }; 6 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_5</p>	<pre style="text-align: center;">x5.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c -- a; 3 b -- d -- e -- c; 4 f -- { b c d e g }; 5 }</pre>

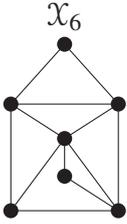
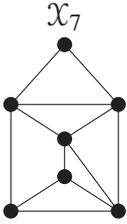
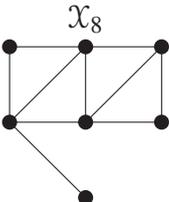
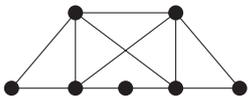
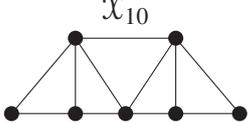
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_6</p>	<pre style="text-align: center;">x6.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c -- a; 3 b -- d -- e -- c; 4 f -- { b c d e g }; 5 g -- e; 6 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_7</p>	<pre style="text-align: center;">x7.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c -- a; 3 b -- d -- e -- c; 4 f -- { b c e g }; 5 g -- { e d }; 6 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_8</p>	<pre style="text-align: center;">x8.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c; 3 d -- e -- f; 4 a -- d -- b -- e -- c -- f; 5 g -- d; 6 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_9</p>	<pre style="text-align: center;">x9.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c -- a; 3 d -- e -- f -- d; 4 g -- e -- a -- d -- c -- g; 5 }</pre>
 <p style="text-align: center;">\mathcal{X}_{10}</p>	<pre style="text-align: center;">x10.dot 1 strict graph { 2 a -- b -- c -- a; 3 d -- e -- f -- d; 4 d -- a -- g -- c; 5 g -- { d e }; 6 }</pre>

Tabela B.1: Família finita de subgrafos proibidos aos grafos de comparabilidade.

B.2 GERADORES

Os seguintes programas implementam ferramentas para a geração de grafos das famílias $\mathcal{F}_1(n)$, $\mathcal{F}_2(n)$, $\mathcal{F}_3(n)$, $\mathcal{F}_4(n)$, $\mathcal{F}_5(n)$, $\mathcal{F}_6(n)$, C_n e seus complementos.

Programa B.11: comp.gvpr

```
1 BEG_G {
2   graph_t g = graph("COMP_" + $.name, "US");
3 }
4 N {
```

```

5  node(g, $.name);
6  }
7  END_G {
8  node_t a;
9  node_t b;
10
11  for(a = fstnode($G); a; a = nxtnode(a))
12    for(b = nxtnode(a); b; b = nxtnode(b))
13      if(!isEdge(a, b, "")) {
14        node_t v = node(g, a.name);
15        node_t u = node(g, b.name);
16        edge(v, u, "");
17      }
18  write(g);
19  }

```

O Programa B.11 retorna o complemento do grafo de entrada. Para o grafo de entrada descrito pelo arquivo `input.dot`, basta direcionar seu conteúdo para a entrada padrão do processo com o seguinte comando.

```
gvpr -f comp.gvpr < input.dot
```

Os seguintes programas implementam os geradores de grafos das famílias $\mathcal{F}_1(n)$ (B.12), $\mathcal{F}_2(n)$ (B.13), $\mathcal{F}_3(n)$ (B.14), $\mathcal{F}_4(n)$ (B.15), $\mathcal{F}_5(n)$ (B.16), $\mathcal{F}_6(n)$ (B.17) e C_n (B.18) respectivamente. Esses programas requerem um argumento numérico passado como parâmetro pela opção `-n`.

Programa B.12: `f1.sh`

```

1  #!/bin/bash
2  while getopts "n:" opt
3  do
4    case "$opt" in
5      n ) N="$OPTARG" ;;
6    esac
7  done
8  if [ -z $N ]; then
9    >&2 echo "$0: expected -n<NON-NEGATIVE INTEGER>"
10   exit 2
11 fi
12 if ! [[ $N =~ ^[0-9]+$ ]]; then
13   >&2 echo "$0: -n: expected non-negative number"
14   exit 2
15 fi
16
17 echo "strict graph F1_$N {"
18 echo -n " "
19 for i in $(seq 1 $((N+1))); do
20   echo -n $i
21   if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
22     echo -n " -- "
23   fi
24 done
25 echo ";"
26 echo -n " a -- {"
27 for i in $(seq 1 $((N+1))); do
28   echo -n $i
29   if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
30     echo -n " "

```

```

31 fi
32 done
33 echo "};"
34 echo " b -- 1;"
35 echo " c -- $((N+1));"
36 echo "}"

```

Programa B.13: f2.sh

```

1  #!/bin/bash
2  while getopts "n:" opt
3  do
4      case "$opt" in
5          n ) N="$OPTARG" ;;
6          esac
7      done
8      if [ -z $N ]; then
9          >&2 echo "$0: expected -n<NON-NEGATIVE INTEGER>"
10         exit 2
11     fi
12     if ! [[ $N =~ ^[0-9]+$ ]]; then
13         >&2 echo "$0: -n: expected non-negative number"
14         exit 2
15     fi
16
17     echo "strict graph F2_.$N {"
18     echo -n " "
19     for i in $(seq 1 $((N+1))); do
20         echo -n $i
21         if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
22             echo -n " -- "
23         fi
24     done
25     echo "};"
26     echo -n " v -- a -- {"
27     for i in $(seq 1 $((N+1))); do
28         echo -n $i
29         if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
30             echo -n " "
31         fi
32     done
33     echo "};"
34     echo " b -- 1;"
35     echo " c -- $((N+1));"
36     echo "}"

```

Programa B.14: f3.sh

```

1  #!/bin/bash
2  while getopts "n:" opt
3  do
4      case "$opt" in
5          n ) N="$OPTARG" ;;
6          esac
7      done
8      if [ -z $N ]; then
9          >&2 echo "$0: expected -n<NON-NEGATIVE INTEGER>"
10         exit 2

```

```

11 fi
12 if ! [[ $N =~ ^[0-9]+$ ]]; then
13     >&2 echo "$0: -n: expected non-negative number"
14     exit 2
15 fi
16
17 echo "strict graph F3_$(N) {"
18 echo -n " "
19 for i in $(seq 1 $(N+1)); do
20     echo -n $i
21     if [ $i -lt $(N+1) ]; then
22         echo -n " -- "
23     fi
24 done
25 echo "; "
26 echo " a -- b; "
27 echo -n " v -- {a b} -- {"
28 for i in $(seq 1 $(N+1)); do
29     echo -n $i
30     if [ $i -lt $(N+1) ]; then
31         echo -n " "
32     fi
33 done
34 echo "; "
35 echo " c -- {a 1}; "
36 echo " d -- {b $(N+1)}; "
37 echo "}"

```

Programa B.15: f4.sh

```

1  #!/bin/bash
2  while getopts "n:" opt
3  do
4      case "$opt" in
5          n ) N="$OPTARG" ;;
6          esac
7  done
8  if [ -z $N ]; then
9      >&2 echo "$0: expected -n<NON-NEGATIVE INTEGER>"
10     exit 2
11 fi
12 if ! [[ $N =~ ^[0-9]+$ ]]; then
13     >&2 echo "$0: -n: expected non-negative number"
14     exit 2
15 fi
16
17 echo "strict graph F4_$(N) {"
18 echo -n " "
19 for i in $(seq 1 $(N+1)); do
20     echo -n $i
21     if [ $i -lt $(N+1) ]; then
22         echo -n " -- "
23     fi
24 done
25 echo "; "
26 echo -n " v -- {a b} -- {"
27 for i in $(seq 1 $(N+1)); do
28     echo -n $i

```

```

29  if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
30      echo -n " "
31  fi
32  done
33  echo "};"
34  echo " c -- {a 1};"
35  echo " d -- {b $((N+1))};"
36  echo "}"

```

Programa B.16: f5.sh

```

1  #! /bin/bash
2  while getopts "n:" opt
3  do
4      case "$opt" in
5          n ) N="$OPTARG" ;;
6          esac
7      done
8      if [ -z $N ]; then
9          >&2 echo "$0: expected -n<NON-NEGATIVE INTEGER>"
10         exit 2
11     fi
12     if ! [[ $N =~ ^[0-9]+$ ]]; then
13         >&2 echo "$0: -n: expected non-negative number"
14         exit 2
15     fi
16
17     echo "strict graph F5_-$N {"
18     echo -n " "
19     for i in $(seq 1 $((N+1))); do
20         echo -n $i
21         if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
22             echo -n " -- "
23         fi
24     done
25     echo "};"
26     echo -n " {a b} -- {"
27     for i in $(seq 1 $((N+1))); do
28         echo -n $i
29         if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
30             echo -n " "
31         fi
32     done
33     echo "};"
34     echo " c -- {a 1};"
35     echo " d -- {b $((N+1))};"
36     echo "}"

```

Programa B.17: f6.sh

```

1  #! /bin/bash
2  while getopts "n:" opt
3  do
4      case "$opt" in
5          n ) N="$OPTARG" ;;
6          esac
7      done
8      if [ -z $N ]; then

```

```

9  >&2 echo "$0: expected -n<NON-NEGATIVE INTEGER>"
10 exit 2
11 fi
12 if ! [[ $N =~ ^[0-9]+$ ]]; then
13   >&2 echo "$0: -n: expected non-negative number"
14   exit 2
15 fi
16
17 echo "strict graph F6_$$N {"
18 echo -n " "
19 for i in $(seq 1 $((N+1))); do
20   echo -n $i
21   if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
22     echo -n " -- "
23   fi
24 done
25 echo "; "
26 echo " a -- b;"
27 echo -n " {a b} -- {"
28 for i in $(seq 1 $((N+1))); do
29   echo -n $i
30   if [ $i -lt $((N+1)) ]; then
31     echo -n " "
32   fi
33 done
34 echo "}; "
35 echo " c -- {a 1};"
36 echo " d -- {b $((N+1))};"
37 echo "}"

```

Programa B.18: cycle.sh

```

1  #! /bin/bash
2  while getopts "n:" opt
3  do
4    case "$opt" in
5      n ) N="$OPTARG" ;;
6    esac
7  done
8  if [ -z $N ]; then
9    >&2 echo "$0: expected -n<POSITIVE INTEGER>"
10   exit 2
11 fi
12 if ! [[ $N =~ ^[0-9]+$ ]]; then
13   >&2 echo "$0: -n: expected positive number"
14   exit 2
15 fi
16 if [ $N -lt 3 ]; then
17   >&2 echo "$0: -n: must be at least 3"
18   exit 2
19 fi
20
21 echo "strict graph C_$$N {"
22 echo -n " "
23 for i in $(seq 1 $N); do
24   echo -n "$i"
25   if [ $i -lt $N ]; then
26     echo -n " -- "

```

```
27 fi
28 done
29 echo " -- 1;"
30 echo "}"
```

O seguintes comandos exemplificam a geração de grafos pelos programas.

```
bash f1.sh -n0
bash f2.sh -n1
bash f3.sh -n2
bash f4.sh -n3
bash f5.sh -n4
bash f6.sh -n5
bash cycle.sh -n6
```

Para gerar o complemento do grafo, basta direcionar a saída do processo que executa o gerador à entrada padrão do processo que executa o Programa B.11.

```
bash cycle.sh -n6 | gvpr -f comp.gvpr
```

APÊNDICE C – EXPERIMENTO

O seguinte programa testa a Conjectura 6.4.1, registrando em um arquivo `run.log` a saída do problema de reconhecimento para os grafos das famílias $\mathcal{F}_1(2n+3)$, $\overline{\mathcal{F}_2(n+1)}$, $\overline{\mathcal{F}_3(n)}$, $\mathcal{F}_4(n)$, $\mathcal{F}_5(2n+3)$, $\mathcal{F}_6(2n+2)$ e $\overline{C_{n+6}}$. O programa usa a implementação descrita pelo Programa A.6 para o reconhecimento e os programas apresentados na Seção B.2 para a geração de grafos de tais famílias.

Programa C.1: `run.sh`

```

1  #!/bin/bash
2  graph_comp() {
3    gvpr -f comp.gvpr
4  }
5  export -f graph_comp
6
7  graph_cycle() {
8    bash cycle.sh -n "$1"
9  }
10 export -f graph_cycle
11
12 graph_f() {
13   bash f"$1".sh -n "$2"
14 }
15 export -f graph_f
16
17 write_output() {
18   local i="$2"
19   local output="$1 $2 "
20   case "$1" in
21     "co-cycle") graph_cycle "$((i+6))" | graph_comp | ./prekbm &> /dev/null ;;
22     "F1")       graph_f 1 "$((2*i+3))" | ./prekbm &> /dev/null ;;
23     "F5")       graph_f 5 "$((2*i+3))" | ./prekbm &> /dev/null ;;
24     "F6")       graph_f 6 "$((2*i+2))" | ./prekbm &> /dev/null ;;
25     "co-F2")    graph_f 2 "$((i+1))" | graph_comp | ./prekbm &> /dev/null ;;
26     "co-F3")    graph_f 3 "$i" | graph_comp | ./prekbm &> /dev/null ;;
27     "co-F4")    graph_f 4 "$i" | graph_comp | ./prekbm &> /dev/null ;;
28   esac
29   case "$?" in
30     0) output="$output ACCEPTED" ;;
31     2) output="$output REJECTED" ;;
32     *) output="$output ERROR $?" ;;
33   esac
34   echo "$output"
35 }
36 export -f write_output
37
38 if command -v parallel &> /dev/null ; then
39   parallel 'write_output {2} {1} >> run.log' \
40     ::: {0..10000} \
41     ::: {co-cycle,F1,F5,F6,co-F2,co-F3,co-F4}
42 else
43   for i in $(seq 0 10000); do
44     write_output "co-cycle" "$i" >> run.log &
45     write_output "F1" "$i" >> run.log &

```

```
46 write_output "F5" "$i" >> run.log &  
47 write_output "F6" "$i" >> run.log &  
48 write_output "co-F2" "$i" >> run.log &  
49 write_output "co-F3" "$i" >> run.log &  
50 write_output "co-F4" "$i" >> run.log &  
51 wait  
52 done  
53 fi
```

O seguinte comando executa o Programa C.1.

```
bash run.sh
```

Para limitar a execução do programa por um limite de tempo, usamos o comando `timeout` acompanhado pelo tempo limite.

```
timeout 10h bash run.sh
```