

Métodos Aproximados Aplicáveis à Resolução de Problemas de Valor de Contorno

Maicon Felipe Malacarne¹
Roberto Dalledone Machado²
Programa de Pós-Graduação em
Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba-PR, Brasil
maicon.unicentro@hotmail.com¹, rdm@ufpr.br²

Paulo de Oliveira Weinhardt³
Marcos Arndt⁴
Programa de Pós-Graduação em
Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba-PR, Brasil
paulo.weinhardt@ufpr.br³, arndt.marcos@gmail.com⁴

Resumo—Este trabalho apresenta conceitos sobre métodos aproximados aplicados à resolução de problemas de valor de contorno. Além disso, é realizada uma breve comparação entre o Método dos Elementos Finitos, Métodos Sem Malha e o Método dos Elementos Finitos Generalizados.

Palavras-chave: aproximação; discretização; elementos.

I. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais parciais descrevem o comportamento de alguns sistemas reais, sejam físicos, sociológicos ou mesmo econômicos. Em muitos casos, obter a solução de uma equação diferencial parcial não é trivial, mesmo que ela exista [1].

Para contornar este problema foram desenvolvidas diferentes técnicas para aproximar a solução de uma equação diferencial [2]. Os métodos aproximados não resolvem diretamente o problema, mas são capazes de obter uma solução próxima da exata.

Ao substituir a solução aproximada na equação diferencial parcial, gera-se um resíduo, quanto mais próxima da solução analítica é a solução aproximada, menor será o resíduo.

Euler em 1755 já se preocupava em resolver de modo aproximado as equações diferenciais. Fundamentou alguns dos métodos existentes e solidificou as bases para o desenvolvimento de novos métodos [3]. No entanto, com o avanço da tecnologia, os métodos computacionais proliferaram-se, aumentando a acurácia nas aproximações devido à facilidade em processar e armazenar dados.

Ao incluir condições de contorno e valores conhecidos inicialmente na equação diferencial parcial, tem-se um problema de valor de contorno. Na engenharia, os problemas de contorno descrevem situações envolvendo: barras, vigas, pórticos, treliças e outros.

Neste contexto, surgiram o Método dos Elementos Finitos (MEF), os Métodos Sem Malha (MSM), Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e outros métodos aproximados, que discretizam o domínio (Ω) do problema, subdividindo em subdomínios (Ω_i).

II. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos emergiu na literatura em 1950 e se mostrou uma ferramenta poderosa para aproximação da solução de um problema de valor de contorno [4].

No Método dos Elementos Finitos o domínio Ω do problema é subdividido em elementos menores, cada elemento mapeia uma região do domínio, é a chamada malha de elementos finitos.

Aplicar diretamente um método de resíduos ponderados no domínio do problema não é simples, uma vez que podem mudar as características do material, a geometria ou as condições de contorno [5].

Os graus de liberdade do problema físico são substituídos por coeficientes, a serem determinados com a resolução do sistema de equações.

Existem aplicações do Método dos Elementos Finitos em análise estática e análise dinâmica [6]. Por ser um método de fácil implementação, pode ser adaptado para problemas de valor de contorno, é amplamente aceito pela comunidade científica e utilizado em diversos softwares comerciais.

III. MÉTODOS SEM MALHA

Quando ocorrem grandes deformações na malha de elementos finitos, o MEF se mostra pouco eficiente [7]. Em contrapartida os Métodos Sem Malha apresentam uma vantagem, uma vez que não necessitam de elementos finitos e grandes deformações no objeto em análise podem ser representadas pelos MSM.

Os Métodos Sem Malha são definidos como: “Métodos utilizados para se estabelecer algebricamente um sistema de equações para todo o domínio, sem a utilização de uma malha pré-definida para a discretização do domínio” [8].

O domínio Ω é discretizado por uma nuvem de pontos, como se fossem os nós da malha de elementos finitos, mas a grande diferença é que não existe ligação entre os nós por um segmento de reta ou curva. Os pontos são colocados no domínio de forma que estejam no contorno do objeto e em seu interior.

Quanto maior o número de pontos da “Nuvem de Pontos”, melhor será a aproximação, este é um dos tipos de refinamento empregados por este método.

É importante ressaltar que os pontos devem ser inseridos no contorno de forma que o formato do objeto não seja alterado pela disposição dos pontos, ou pela insuficiência de pontos que o representem.

Para cada ponto da nuvem existe uma área de influência, onde aquele ponto vai interferir durante a aproximação. O formato da área de influência pode ser variado, normalmente usa-se o formato circular. Neste método uma área de influência não tem continuidade ao se tocar com as áreas de influência dos nós vizinhos, elas podem adentrar umas nas outras, pois não existe malha de elementos finitos.

Nenhuma região do domínio deve ficar sem cobertura de uma área de influência, pois essa região não seria analisada, comprometendo a confiabilidade da solução aproximada.

Como neste método não existem elementos, a interpolação é feita diretamente nos nós. Quando se deseja melhorar a aproximação é possível enriquecer diretamente nos nós, multiplicando as funções partição da unidade por um conjunto de funções linearmente independentes, assim as novas funções herdam peculiaridades pretendidas.

A aproximação dos Métodos Sem Malha é feita de forma dinâmica, já que ela usa diretamente a posição no domínio global, mas a ideia de aproximação local é mantida através da área de influência [9].

Quando um ponto se move, a relação que existia entre ele e os pontos vizinhos é modificada, isso permite que o domínio seja monitorado. Havendo uma região de interesse, são posicionados mais pontos próximos dali para que mudanças significativas sejam captadas.

As funções de forma usadas no MSM são funções de Shepard, que apesar de não serem suficientes para a maioria dos casos, podem ser facilmente enriquecidas. Além disso, atendem ao critério da partição da unidade e possuem suporte compacto.

IV. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos elementos Finitos Generalizados, compartilha características dos MSM e do MEF. Visto que o enriquecimento do MEFG é análogo ao refinamento p do Método das “Núvens hp ” e por necessitar de uma malha de elementos finitos para construir as funções partição da unidade, poderia ser tratado como um caso não convencional do MEF.

Antes de aplicar o MEF para obter uma aproximação, é possível fazer uma análise sobre o formato que a solução pode apresentar e acrescentar característica de interesse à solução aproximada.

O presente método é semelhante ao enriquecimento dos MSM, mas com a diferença que aqui existe a malha de elementos finitos. Portanto, como já foi dito, o Método dos Elementos Finitos Generalizados apresenta características

tanto dos Métodos Sem Malha, quanto do Método dos Elementos Finitos.

Ao escolher funções que melhor representem a solução da equação diferencial, procura-se gerar um espaço aproximado que mais se aproxime do espaço gerado pela solução analítica.

O MEFG também é empregado na análise dinâmica de estruturas e se mostrou eficiente para determinar os modos mais altos de vibração, uma vez que o enriquecimento feito a partir de funções trigonométricas específicas, é capaz de melhorar significativamente a convergência na aproximação. Empregado em [10], [11], [12] e [13].

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar diferentes métodos aproximados para a resolução de problemas de valor de contorno. Inicialmente foram apresentadas características do Método dos Elementos Finitos, que apresentou diferenças se comparado aos métodos que o precederam. A partir do MEF, o problema de valor de contorno pode ser resolvido usando a discretização do domínio. Posteriormente, características dos MSM, que se mostraram inovadores, pois não utilizavam elementos finitos para discretizar o domínio, mas apenas uma nuvem de pontos. Finalmente o MEFG que é uma das técnicas mais recentes de aproximação e um tema de pesquisa recorrente, pois reuniu aspectos estratégicos do MEF e dos MSM.

REFERÊNCIAS

- [1] Zill D. G.; Cullen M. R. Equações Diferenciais. p. 94-144, São Paulo, 2007.
- [2] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R.I. The finite element method. McGraw-hill, London, 1977.
- [3] Boyer, C. B. História da Matemática. Ed. Universidade de São Paulo. São Paulo, 1974.
- [4] Oden, J.T.; Reddy, J.N. An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. New York: [s.n.], 1976.
- [5] Soriano, H.L. Elementos Finitos, Formulação e Aplicações na Estática e Dinâmica das Estruturas. Ed. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2009.
- [6] Torii, A.J. . Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado. Tese (doutorado)-Universidade Federal do Paraná, 2012.
- [7] Barros, F.B. Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese (doutorado)-Universidade de São Paulo, 2002.
- [8] Liu, G.R.; Gu, Y.T. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, ed. Springer, p. 17- 55. Netherlands, 2005.
- [9] Duarte, C.A.; Oden, J.T. hp Adaptive Method Using Clouds. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. V. 139. p. 23-84, 1996.
- [10] Arndt, M. O Método dos Elementos Finitos Generalizado Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas. Tese (doutorado)-Universidade Federal do Paraná, 2009.
- [11] Torii, A.J. . Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado. Tese (doutorado)-Universidade Federal do Paraná, 2012.
- [12] Shang, Y. H. Análise Dinâmica Elastoplástica de Problemas da Mecânica de Sólidos via Métodos Enriquecidos de Elementos Finitos. Tese (doutorado)-Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2014.
- [13] Weinhardt, P. D. Estudo da Estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica. Dissertação-Universidade Federal do Paraná, 2016.