

# Proposta de estabilização do MEFG aplicado à Análise Dinâmica transiente de uma barra sujeita a um carregamento de Heaviside

Paulo de Oliveira Weinhardt, Marcos Arndt,  
Roberto Dalledone Machado  
PPGMNE  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Brasil  
paulo.weinhardt@gmail.com

**Resumo**—No contexto da análise dinâmica de estruturas, uma das limitações do Método dos Elementos Finitos (MEF) é a dificuldade de aproximar as altas frequências. Essa falta de precisão se torna mais significativa a medida que os carregamentos excitam os modos com frequências mais altas. Visando abordar esse tipo de problema é possível utilizar o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendido (MEFG/MEFE) para enriquecer o espaço de aproximação e representar melhor esses modos de alta frequência. No entanto, as matrizes do MEFG/MEFE podem ser consideravelmente mal-condicionadas, podendo resultar em uma perda de acurácia da aproximação, e até mesmo resultando em matrizes numericamente singulares. Assim, neste trabalho apresentam-se duas propostas para contornar o problema de sensibilidade do MEFG: uma adaptação do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado voltada à Análise Dinâmica e uma estratégia de pré-condicionamento das funções de enriquecimento. Um exemplo clássico na análise transiente unidimensional é apresentado e os resultados são discutidos, mostrando que as implementações propostas possibilitam captar melhor frequências mais elevadas mantendo-se características de estabilidade numérica.

**Palavras-chave**—MEFG, MEFGE, Análise Dinâmica, Análise transiente.

## I. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é um método de Galerkin aplicado a subdomínios. Nesse método são adicionadas funções de enriquecimento que refletem características particulares do problema que visam melhorar a qualidade da aproximação. Para simular a propagação de trincas, por exemplo, podem ser utilizadas funções que contenham singularidades ou descontinuidades. Analogamente, para problemas da dinâmica de estruturas, podem ser utilizadas funções que contenham termos trigonométricos.

Os trabalhos de [1] e [2] foram apresentadas aplicações do Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise dinâmica. Em [1] foram estudadas metodologias de enriquecimento para a análise modal de estruturas reticuladas. A eficiência da abordagem se comprovou com a obtenção de bons resultados em termos do espectro de frequências. No entanto, a aplicação de sucessivas camadas de enriquecimento resultam no aumento de sensibilidade do problema numérico.

Posteriormente, o trabalho de [2] deu continuidade aos estudos do MEFG em dinâmica, estendendo as aplicações ao domínio bidimensional e envolvendo análises modais e transientes.

Baseando-se nesses trabalhos, o trabalho de [3] estende os estudos do MEFG a análise dinâmica elastoplástica propondo soluções para as dificuldades numéricas presentes na abordagem por MEF. Os resultados obtidos são bastante satisfatórios mas, no entanto, a problemática de sensibilidade numérica continua presente.

Visando tratar os problemas de sensibilidade numérica que surgem na aplicação das propostas de enriquecimento, são apresentadas duas alternativas: aplicação dos conceitos do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado e aplicação de modificações de pré-condicionamento nas funções de enriquecimento.

O MEFG Estabilizado foi proposto pelo trabalho de [4] para tratar o problema de mal-condicionamento dos sistemas de equações gerados pela aplicação do MEFG. Esta solução consiste numa simples modificação das funções de enriquecimento antes de associá-las à Partição da Unidade. O trabalho de [4] apresenta também o embasamento matemático que garante que o condicionamento desses sistemas pré-condicionados é tão bom quanto os resultantes do MEF. Neste trabalho, testa-se a extensão dessa proposta à análise modal, que resulta em um problema de autovalores e autovetores generalizado.

Seguindo a ideia de que pequenas alterações nas funções de enriquecimento podem alterar o condicionamento numérico do problema, sem perdas significativas das propriedades de acurácia do MEFG, este artigo propõe uma sutil modificação nas funções utilizadas para análise unidimensional apresentadas no trabalho [1]. Esta proposta se mostrou bastante eficaz, aumentando significativamente a estabilidade do método na análise modal, conforme exposto em [5]. Dessa forma, é apresentada a influencia dessas abordagens de estabilização no contexto da análise dinâmica transiente resultante da aplicação de um carregamento de Heaviside.

## II. METODOLOGIA

O presente trabalho aplicou duas abordagens visando a melhora da acurácia e da estabilidade da aplicação do MEFG em análise dinâmica, gerando um aperfeiçoamento dos resultados e aumento da aplicabilidade, consistindo no estudo de modificações pré condicionantes aplicadas às funções de enriquecimento, conforme [5].

### A. Análise Dinâmica Transiente

No contexto deste trabalho foi estudado um problema simples, seguindo a tendência encontrada na Análise Modal (ver [5]).

O modelo analisado neste trabalho consiste em uma barra com uma extremidade engastada e a outra extremidade livre, onde é aplicado o carregamento, como mostrado na figura 1. Para as aplicações dos enriquecimentos trigonométricos foi adotado  $\beta_1 = \frac{3\pi}{4}$ , devido à boa performance dessa escolha nos exemplos de análise modal (ver [5, 6]).



Figura 1. Barra engastada-livre sujeita a força dependente do tempo na extremidade.

Segundo [7], as matrizes  $K$  e  $M$  do problema dinâmico estão associadas à discretização e aproximação por Elementos Finitos do Problema Variacional de Valor de Contorno (PVVC) referente ao equilíbrio dinâmico do sistema. Ou seja, as matrizes  $K$  (matriz de Rigidez) e  $M$  (matriz de Massa) podem ser escritas como:

$$K = [k_{ij}] = \int_{\Omega} \Phi_{i,x} \Phi_{j,x} d\Omega \quad (1)$$

$$M = [m_{ij}] = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j d\Omega$$

sendo  $\Phi$  as funções de interpolação,  $\Phi_{,x}$ , em notação indicial, sua primeira derivada e  $\Omega$  o domínio global do problema.

A análise transiente se resumiu na aplicação do Método de Newmark utilizando as matrizes de massa e rigidez geradas pela aplicação do MEFG com as diferentes abordagens. Foram adotados parâmetros unitários ( $\sqrt{\frac{E}{\rho}} = c = 1$ ) e uma malha uniforme de 20 elementos finitos. Para a discretização temporal, o intervalo de análise de 20 segundos foi analisado em 2000 passos de  $10^{-2}$  segundos.

### B. Construção do Espaço de Aproximação do MEFG

Conforme [8], o MEF pode ser visto como um caso particular do Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU). Assim, as propriedades do MEF, e consequentemente do MEFG, são herdadas do MEFPU. A seguir são estabelecidas as condições às quais a aproximação deve estar

submetida para que sejam válidas as propriedades da Partição da Unidade.

Partição da Unidade é um espaço topológico de funções  $\{\phi_i\}$  subordinadas a uma cobertura  $\{\Omega_i\} \subset \mathbb{R}$  que possuem as seguintes propriedades:

- suporte  $\{\phi_i\} \subset \{\bar{\Omega}_i\}$ , ou seja  $\{\phi_i\}$  tem suporte compacto em  $\{\Omega_i\}$
- $\sum_i \{\phi_i\} = 1$  em  $\Omega$

Com a definição deste ente topológico pode-se estabelecer o conceito do espaço de aproximação do MEFPU.

Seja  $\Omega_i$  uma cobertura aberta de  $\{\Omega_i\} \subset \mathbb{R}$  e seja uma Partição da Unidade  $\{\phi_i\}$  correspondente. Seja, ainda, um espaço  $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ . Então o espaço

$$V_{MEFPU} = \sum_i \phi_i V_i \quad (2)$$

é definido como espaço de aproximação do MEFPU.

Os espaços de aproximação  $V_i$  apresentam as seguintes propriedades de aproximação:

Sendo  $v_i \in V_i$  e assumindo que os espaços de aproximação locais  $V_i$  satisfaçam

$$\|u - v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_1(i) \quad (3)$$

e

$$\|\nabla(u - v_i)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_2(i) \quad (4)$$

Então a função  $u_h$  satisfaz,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\infty} \sqrt{M \left( \sum_i \epsilon_1^2(i) \right)} \quad (5)$$

e

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L(\Omega)^2} \leq \sqrt{2M \left( \sum_i \left( \frac{C_g}{diam(\Omega_i)} \right)^2 \epsilon_1^2(i) + C_{\infty}^2 \epsilon_2^2(i) \right)} \quad (6)$$

Com os conceitos pertinentes do MEFPU embasados, pode-se escrever que a solução aproximada do MEFG é composta da soma de duas parcelas:

$$u_h^e = u_{MEF} + u_{ENR} \quad (7)$$

onde  $u_{MEF}$  corresponde a parcela descrita pelas funções de aproximação clássicas do MEF e  $u_{ENR}$  corresponde a aproximação feita pelas funções de enriquecimento que visam incorporar aspectos particulares do problema estudado.

1) *Enriquecimento Trigonômétrico:* Para o problema de vibração livre foi proposto por [1] um bloco de funções de enriquecimento para o problema de análise dinâmica com o MEFG. Esse grupo de funções consiste na construção de um par de nuvens, uma senoidal e uma cossenoidal, subordinadas à cobertura do nó enriquecido. Essas nuvens são escritas no domínio do elemento como dois pares de funções seno e cosseno. O domínio elementar é considerado para  $\xi \in (0, +1)$ .

Nuvem senoidal:

$$\begin{aligned}\gamma_{1j} &= \text{sen}(\beta_j L_e \xi) \\ \gamma_{2j} &= \text{sen}(\beta_j L_e (\xi - 1))\end{aligned}\quad (8)$$

Nuvem cossenoidal:

$$\begin{aligned}\varphi_{1j} &= \text{cos}(\beta_j L_e \xi) - 1 \\ \varphi_{2j} &= \text{cos}(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1\end{aligned}\quad (9)$$

Onde  $L_e$  é o comprimento do elemento e  $\beta_j = j\pi$  é um parâmetro de enriquecimento hierárquico proposto por [1] para  $j$  níveis de funções.

### C. Pré Condicionamento do Enriquecimento

1) *Modificação baseada no MEFGE*: O Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado (MEFGE) é proposto como uma alternativa para melhorar o condicionamento numérico do MEFG [4]. Este método consiste na aplicação de uma modificação simples nas funções de enriquecimento antes da sua inclusão no espaço de aproximação do MEFG [9, 10].

No MEFGE, modifica-se localmente as funções de enriquecimento empregadas antes da sua multiplicação pela Partição da Unidade (PU). O processo de modificação consiste no descrito pela Eq.10:

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) - I_\omega(\varphi_i(x)) \quad (10)$$

Onde,

- $\tilde{\varphi}_i$ :  $i$ -ésima função enriquecedora estabilizada
- $\varphi_i$ :  $i$ -ésima função enriquecedora
- $I_\omega(\varphi_i(x))$ : interpolante linear por parte da  $i$ -ésima função enriquecedora subordinada ao suporte  $\omega$

A estabilização do 1º nível de enriquecimento proposto é ilustrado na Fig.2.

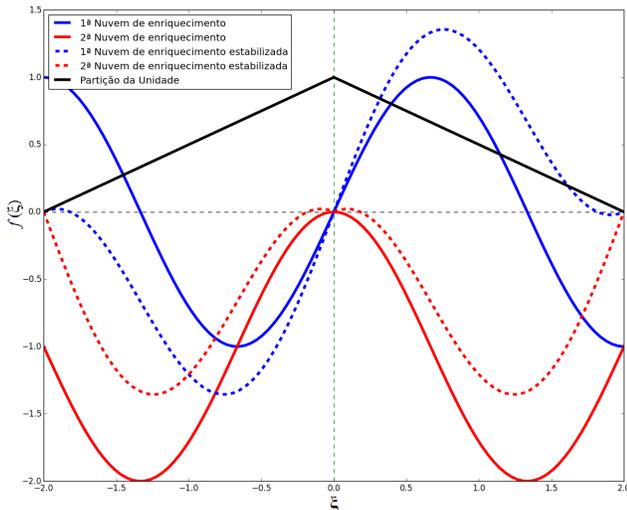


Figura 2. Processo de estabilização das funções do primeiro nível de enriquecimento.

2) *Modificação Heurística*: Segundo [11], um processo que pode resolver um determinado problema sem a garantia de que realmente irá resolvê-lo é uma heurística. Com esta definição em mente, uma abordagem proposta baseou-se na observação de testes numéricos para inferir um processo que reduzisse a sensibilidade do MEFG com enriquecimentos trigonométricos sucessivos.

Assim, o presente trabalho propõe uma alteração no grupo de funções de enriquecimento visando estabilizar sua aplicação sucessiva que visa evitar a construção de espaços de aproximação que tendem a dependência linear. A modificação proposta consiste basicamente na eliminação do parâmetro  $L_e$  e um ajuste no parâmetro  $\beta_j$  a cada novo nível de enriquecimento de forma automática. Assim, as funções utilizadas nas aplicações foram escritas no domínio de  $\xi \in (-1, +1)$  da seguinte forma:

Nuvem senoidal:

$$\begin{aligned}\gamma_{1j} &= \text{sen}(\beta_j(\xi + 1)) \\ \gamma_{2j} &= \text{sen}(\beta_j(\xi - 1))\end{aligned}\quad (11)$$

Nuvem cossenoidal:

$$\begin{aligned}\varphi_{1j} &= \text{cos}(\beta_j(\xi + 1)) - 1 \\ \varphi_{2j} &= \text{cos}(\beta_j(\xi - 1)) - 1\end{aligned}\quad (12)$$

Parâmetro  $\beta_j$

$$\bar{\beta}_j = \left[ 2(j-1) + \frac{\beta_1}{\pi} \right] \pi \quad j \geq 1 \quad (13)$$

## III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### A. Análise Transiente

O enriquecimento trigonométrico no contexto do MEFG aplicado à análise transiente unidimensional foi abordado anteriormente por [2] e [3] contemplando diversos exemplos. Alternativas de estabilização na análise transiente, como o HHT utilizado por [3], foram evitadas com o intuito de manter a análise voltada às interações do processo de enriquecimento e as propostas do presente trabalho.

Dessa forma o exemplo consiste em uma força  $f(t)$  contemplando o caso da Força de Heaviside - Carregamento súbito que permanece ao longo do tempo (exemplo 3.1) e apresenta saltos na velocidade [12].

O carregamento é ilustrado na figura 3.

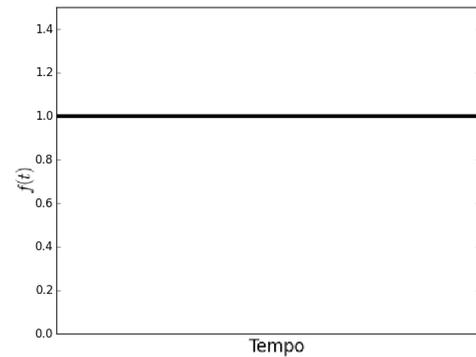


Figura 3. Análise transiente - Força de Heaviside

*Exemplo 3.1:* O carregamento externo é aplicado subitamente com valor igual a  $1N$  e mantido até o final da análise, caracterizando uma força de Heaviside. Os gráficos de deslocamento e velocidade ao longo do tempo da extremidade livre são apresentados a seguir para diferentes estratégias de aproximação. A resposta transiente para a aproximação feita com MEF Linear, MEEG com 1 nível de enriquecimento e a adaptação do MEEGE à dinâmica é apresentada na figura 4 e visando complementar a análise, apresentam-se os resultados correspondentes para aceleração nas figuras 5 e 6.

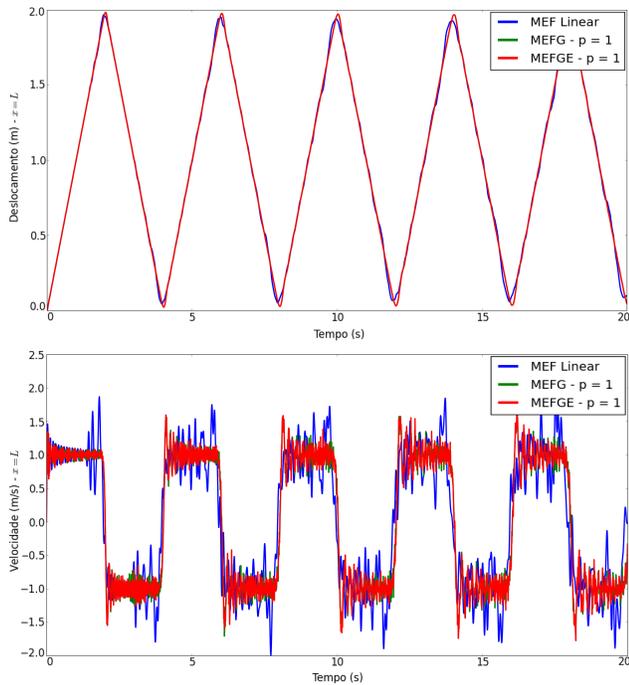


Figura 4. Análise transiente - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

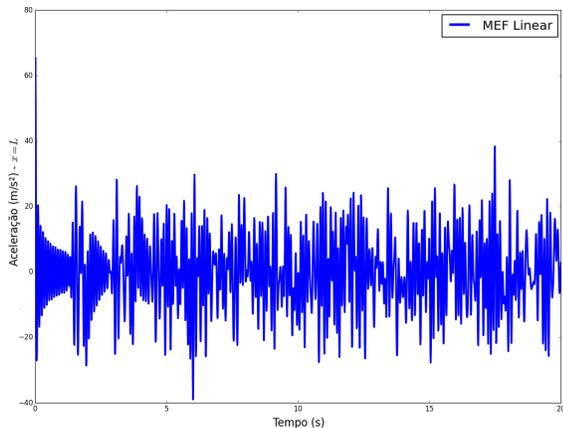


Figura 5. Análise transiente (refino  $p$ ) - Acelerações na extremidade livre (apenas MEF).

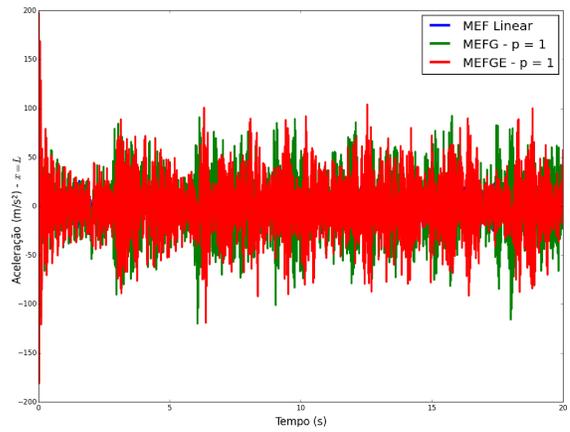


Figura 6. Análise transiente (refino  $p$ ) - Acelerações na extremidade livre (MEF, MEEG e MEEGE).

O refino  $p$  é aplicado até 4 níveis de enriquecimento para as três abordagens: MEEG, MEEGE e Modificação Heurística. Os resultados são apresentados na figura 7.

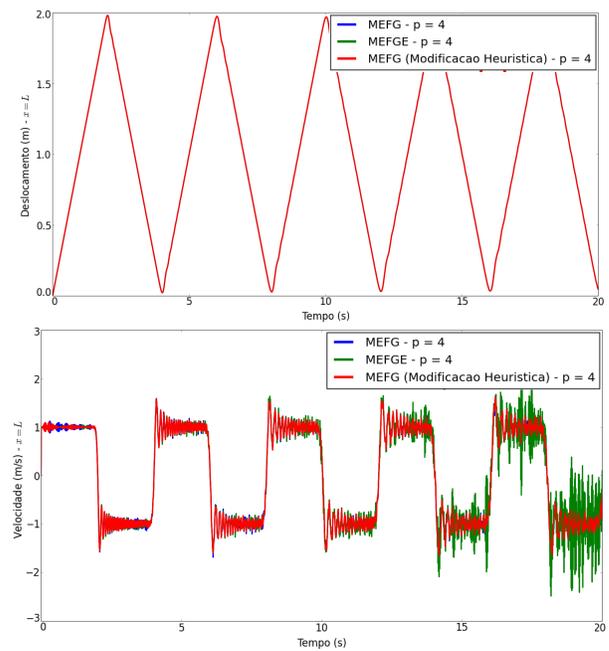


Figura 7. Análise transiente (refino  $p$ ) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

Ainda com o refino  $p$  aplicado até 4 níveis de enriquecimento, são apresentados os resultados em termos de aceleração na figura 8.

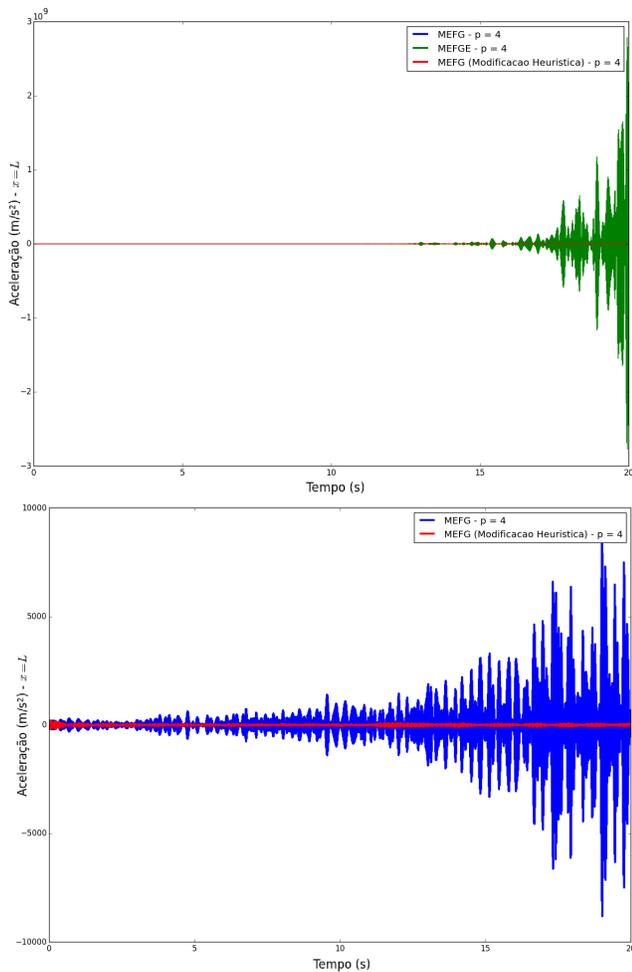


Figura 8. Análise transiente (refino  $p$ ) - (a) Acelerações na extremidade livre (MEFG, MEFGE e Modificação Heurística), (b) Acelerações na extremidade livre (MEFG e Modificação Heurística).

Levando o refino  $p$  até alta ordem, visando destacar a estabilidade da proposta, tem-se os resultados apresentados nas figuras 9 e 10.

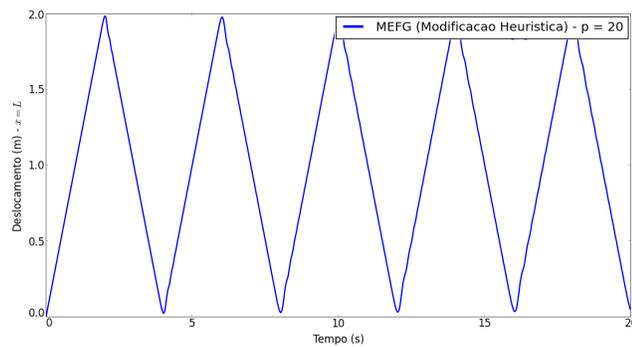


Figura 9. Análise transiente (refino  $p$  de alta ordem) - Deslocamentos na extremidade livre.

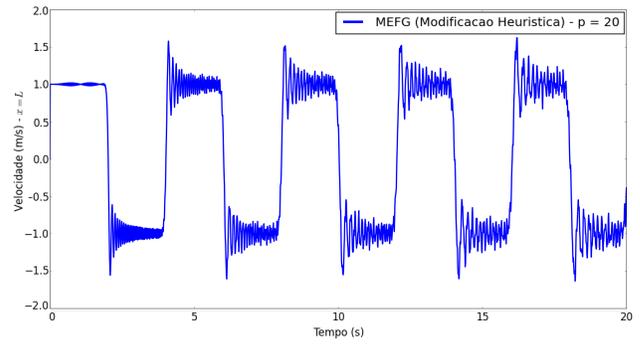


Figura 10. Análise transiente (refino  $p$  de alta ordem) - Velocidades na extremidade livre.

Os resultados em termos de aceleração são apresentados na figura 11.

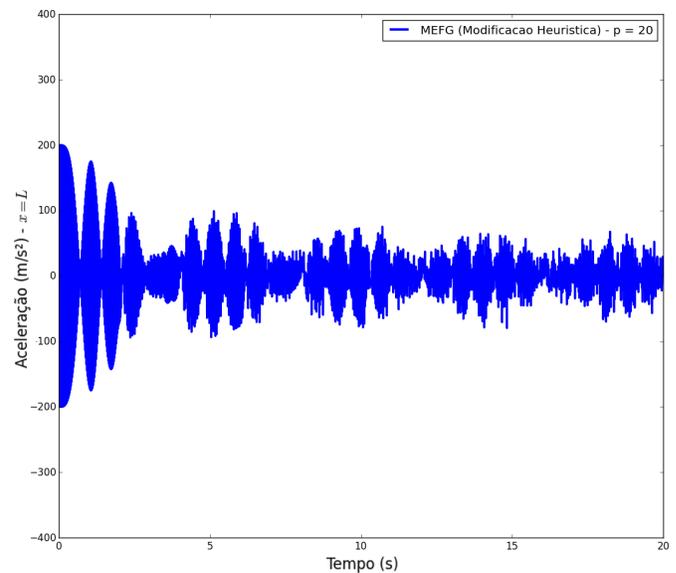


Figura 11. Análise transiente (refino  $p$ ) - Acelerações na extremidade livre.

#### IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O exemplo 3.1 apresentou o estudo da aplicação de uma força unitária de Heaviside ao longo do tempo na extremidade da barra considerada. Primeiramente a aproximação foi feita pelo MEF Linear, pelo MEFG com 1 nível de enriquecimento e a estabilização correspondente do MEFGE. Como pode ser observado na figura 4, a resposta para deslocamentos é razoavelmente acurada, mesmo para o MEF Linear, enquanto que a resposta para velocidade apresenta grande perturbação, uma vez que esse tipo de carregamento gera um salto na velocidade ao longo do tempo [12]. É possível notar que, para a aproximação de velocidades, o MEFG possui uma resposta melhor comportada do que as outras duas alternativas. Em termos de aceleração, como mostrado na figura 5, as aproximações são espúrias para as três abordagens, uma vez que o campo de acelerações é consideravelmente difícil de ser aproximado por funções contínuas.

Levando o refino  $p$  até 4 níveis de enriquecimento, a figura 7 apresenta a comparação entre o MEFG, MEFGE e Modificação Heurística. As aproximações correspondentes para deslocamentos são consideravelmente próximas. No entanto, a resposta para velocidades apresenta comportamentos bastante distintos, sendo que a Modificação Heurística resultou em uma aproximação melhor comportada ao longo do tempo, ao ponto que o MEFGE tem sua resposta deteriorada rapidamente. Problemas de estabilidade numérica são ressaltados na aproximação do campo de acelerações apresentado na figura 8, onde é possível notar que o MEFGE tem sua resposta drasticamente deteriorada a medida que a análise avança no tempo. O MEFG também sofre significativa deterioração, porém mais limitada. Por sua vez, a Modificação Heurística demonstrou um comportamento mais estável, apesar de ter uma resposta com certa perturbação.

Testando a estabilidade da proposta de Modificação Heurística, as figuras 9 e 10 mostram os resultados da aplicação de 20 níveis de enriquecimento. Aparentemente esse refino  $p$  de alta ordem não implicou em ganhos expressivos em acurácia, tanto para deslocamentos como para velocidades. No entanto, é válido ressaltar que a aplicação de diversos níveis de enriquecimento não comprometeu a estabilidade numérica da aproximação, seguindo a tendência apresentada na análise modal, inclusive para a resultados em termos de aceleração, como exposto na figura 11. A aplicação de um método de superposição modal pode tirar proveito dessas características ao extrair autovalores gerados pelas análise modal para construir a resposta transiente com menor esforço.

O campo de acelerações do exemplo 3.1 corresponde a segunda derivada do campo de deslocamentos que é de classe  $C^0$  e, conseqüentemente, é descontínuo. Dessa forma, a dificuldade numérica de aproximação é considerável, visto que o modelo do problema é baseado em deslocamentos. Estendendo essa análise para os demais casos de carregamento, optou-se por omitir os resultados em termos de acelerações nos demais exemplos, visto que os resultados são espúrios para todos o métodos numéricos adotados por este trabalho e que os demais exemplos constituem casos onde o campo de acelerações é no máximo de mesma regularidade que o encontrado no exemplo 3.1.

## V. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio financeiro por meio de bolsa de estudo.

## REFERÊNCIAS

- [1] M. Arndt, O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas, Doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2009.
- [2] A. J. Torii, Análise dinâmica de estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado, Doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2012.
- [3] Y. H. Shang, Análise dinâmica elastoplástica de problemas da mecânica de sólidos via métodos enriquecidos

de elementos finitos, Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2014.

- [4] I. Babuška, U. Banerjee, Stable generalized finite element method (SGFEM), *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 201 (2012) 91–111.
- [5] P. O. Weinhardt, M. Arndt, R. D. Machado, O Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a análise dinâmica: tipos de enriquecimento, escolha da partição da unidade e técnicas de pré condicionamento, *CILAMCE 2015 Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- [6] P. O. Weinhardt, M. Rauen, R. D. Machado, M. Arndt, Aplicação do Método dos Elementos Finitos, Análise Isogeométrica e Métodos Enriquecidos à Análise Dinâmica 1D, *Proceedings of CMN2015* 1 (1).
- [7] K. J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [8] J. M. Melenk, On generalized finite element methods, Ph.D. thesis, The University of Maryland, 1995.
- [9] V. Gupta, C. A. Duarte, I. Babuška, U. Banerjee, A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 266 (2013) 23–39.
- [10] H. Li, Investigation of stability and accuracy of high order generalized finite element methods, Master's thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2014.
- [11] J. Feldman, E. A. Feigenbaum, *Computers and Thought*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [12] C. d. S. G. Monteiro, Novos operadores de captura via o método dos elementos finitos aplicado a problemas de propagação de ondas, Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.