

# *Modelo Matemático para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional*

*Lilian Caroline Xavier Candido; Luzia Vidal de Souza*  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba-PR, Brasil

**Resumo**—Neste trabalho estudou-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional, cujo objetivo consiste em encontrar o conjunto de roteiros de mínimo custo a ser realizado por uma frota limitada de veículos de diferentes capacidades e custos, determinando ainda o arranjo geométrico da carga nos veículos, considerando os itens de demanda dos clientes e as superfícies de carregamento dos veículos elementos retangulares. Foi desenvolvida uma formulação matemática para o problema, e para validação do modelo proposto foram realizados experimentos computacionais nos quais foram resolvidos alguns problemas com o uso do *solver* CPLEX. Os resultados mostraram que a formulação proposta é capaz de representar matematicamente o problema, no entanto é possível obter soluções ótimas em tempo computacional aceitável apenas para problemas consideravelmente pequenos.

**Palavras-chave**—roteamento de veículos; frota heterogênea fixa; carregamento bidimensional; modelo matemático

## I. INTRODUÇÃO

O Problema de Roteamento de Veículos (VRP - *Vehicle Routing Problem*) é um problema encontrado com muita frequência na logística de transportes. Foi proposto inicialmente por [1] e consiste em determinar o roteiro de viagem a ser realizado por um ou mais veículos com o menor custo possível, sendo este custo avaliado, em geral, em função da distância total percorrida. Em sua forma clássica, considera-se que a frota de veículos é homogênea, isto é, todos os veículos possuem a mesma capacidade, o que caracteriza o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (CVRP - *Capacitated Vehicle Routing Problem*) [2]–[4]. Uma variação do CVRP, e também uma generalização do mesmo, considera veículos com diferentes capacidades e custos, caracterizando o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (HFVRP - *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*) [5]–[8]. Duas variações básicas para o HFVRP são encontradas na literatura: o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa (HFFVRP - *Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem*), quando o número de veículos disponíveis é limitado; e o Problema de Dimensionamento e Roteamento de Veículos (FSMVRP - *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*), quando o número de veículos disponível é ilimitado e, neste caso, o problema trata da composição da frota de forma integrada ao roteamento.

Nos problemas de roteamento são consideradas apenas restrições unidimensionais de capacidade dos veículos, como peso ou volume que o veículo pode transportar. Entretanto, no transporte de mercadorias, que geralmente são embaladas em caixas, se forem consideradas apenas restrições unidimensionais de capacidade, pode acontecer de não ser possível acomodar os itens nos veículos devido às suas características geométricas. Este fato levou à inclusão de restrições de carregamento dos veículos aos problemas de roteamento. O carregamento de um veículo consiste basicamente em um Problema do *Bin Packing*, cujo objetivo consiste em posicionar os itens nos veículos, de acordo com as especificidades do problema. Desse modo, tem-se a conjuntura de um problema integrado de roteamento e carregamento de veículos. Este tipo de problema tem sido cada vez mais estudado devido à sua relevância nos sistemas logísticos de distribuição [9]–[11].

Em casos particulares, nos quais os itens não podem ser carregados uns sobre os outros, as restrições de carregamento tomam o aspecto bidimensional (Fig. 1) e temos o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições Bidimensionais de Carregamento (2L-CVRP - *Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints*) [12]–[19].

Para uma abordagem mais realista, o problema pode ser generalizado considerando-se a frota heterogênea, isto é, veículos de diferentes capacidades. Com isso tem-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições Bidimensionais de Carregamento (2L-HFVRP - *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints*), que por sua vez pode ainda se desdobrar em problemas com número de veículos limitado (2L-HFFVRP) ou ilimitado (2L-FSMVRP). O 2L-HFVRP pode ter duas versões: o caso Irrestrito trata apenas de carregamentos factíveis dos itens nos veículos; enquanto o caso Sequencial considera ainda restrições de carregamento e descarregamento dos itens, isto é, a sequência do descarregamento deve ser respeitada, de modo que a retirada de uma caixa pela porta do veículo não implique no movimento de nenhuma outra caixa.

A abordagem integrada de problemas de roteamento com frota heterogênea e restrições de carregamento foi proposta por [20], que resolveram o problema com número de veículos ilimitado, tanto para o caso irrestrito como para o sequencial.

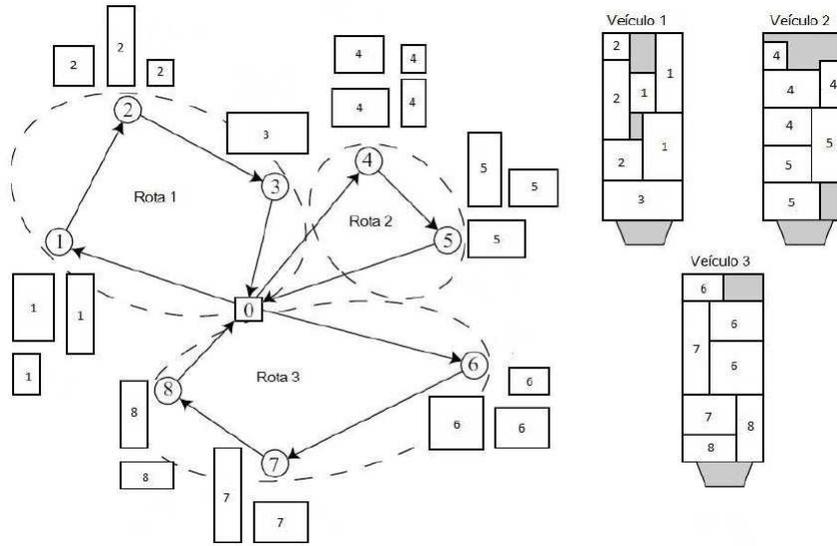


Figura 1. Exemplo de problema de roteamento de veículos com restrições de carregamento bidimensional

Para isto, desenvolveram um algoritmo que combina *Simulated Annealing* e Busca Local para o problema de roteamento e utiliza seis métodos heurísticos para o problema do roteamento, e propuseram ainda um conjunto de 360 instâncias para os testes computacionais.

Em [21] o problema é resolvido com número de veículos ilimitado e rotação permitida dos itens a serem carregados, porém apenas para o caso irrestrito. Os autores propuseram algoritmos multi-início com base em randomização tendenciosa para os problemas de roteamento e carregamento dos veículos, e realizaram testes computacionais sobre as instâncias propostas por [20].

Neste estudo, apresenta-se uma formulação matemática para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições Bidimensionais de Carregamento (2L-HFFVRP), com carregamento irrestrito. Na Seção 2 é feita uma breve descrição do 2L-HFFVRP; a Seção 3 apresenta o modelo matemático proposto para o problema; na Seção 4 são analisados os resultados de alguns testes computacionais realizados para validação do modelo proposto; a Seção 5, por fim, apresenta as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

## II. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O 2L-HFFVRP é definido sobre um grafo  $G = (N, A)$ , em que  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  define um conjunto de  $n + 1$  vértices no qual o vértice 0 corresponde ao depósito e os clientes correspondem aos vértices  $1, \dots, n$ ; e  $A$  define o conjunto dos arcos  $(i, j)$  que ligam o vértice  $i$  ao vértice  $j$ . A cada arco  $(i, j)$  está associada uma distância  $d_{ij}$ .

Cada cliente  $i \in N \setminus \{0\}$  demanda um conjunto de  $m_i$  itens retangulares, denotado por  $IT_i$ , cujo peso total é igual a  $D_i$ . Cada item  $I_p \in IT_i$   $\left( p = \left( \sum_{r=1}^{i-1} m_r \right) + 1, \dots, \sum_{r=1}^i m_r \right)$  tem

dimensões  $l_p \times w_p$ . Assim, tem-se um conjunto  $I = \bigcup_{i=1}^n IT_i$

de  $D = \sum_{i=1}^n m_i$  itens a serem carregados nos veículos.

Um conjunto  $V = \{1, \dots, v\}$  de  $v$  veículos está disponível no depósito. Cada veículo  $k \in V$  tem uma capacidade de peso  $Q_k$ , e uma superfície para carregamento de dimensões  $L_k \times W_k$ , em que apenas um lado da mesma está acessível para as operações de carregamento e descarregamento. A cada veículo estão associados ainda um custo fixo  $F_k$ , se o veículo for utilizado, e um custo variável  $V_k$ , proporcional à distância da rota à qual ele for designado.

Uma rota é definida como um par  $(R, k)$  no qual  $R = (i_1, i_2, \dots, i_{|R|})$  com  $i_1 = i_{|R|} = 0$  é a sequência dos nós do grafo a serem percorridos, e  $k$  é o veículo designado para a rota. Vê-se, portanto, que todas as rotas se iniciam e terminam no depósito. A rota  $(R, k)$  é dita factível se a demanda de todos os clientes visitados nela não excede a capacidade  $Q_k$  do veículo que a atende, e se é possível carregar no veículo todos os itens dos clientes sem que os mesmos se sobreponham ou excedam a superfície de carregamento do veículo. O custo da rota  $(R, k)$  corresponde à soma dos custos de se percorrer os arcos que compõem a rota pelo veículo associado a ela, acrescido do custo fixo relacionado a este veículo.

O objetivo do 2L-HFVRP é encontrar um conjunto de rotas factíveis de mínimo custo. São aplicadas ao problema restrições relacionadas ao roteamento (R) e restrições relacionadas ao carregamento (C):

- R1 Cada rota inicia e termina no depósito;
- R2 Cada cliente é atendido exatamente por um único veículo;
- R3 A soma das demandas dos clientes atendidos por uma rota não excede a capacidade do veículo associado a ela;
- C1 Os itens demandados por um cliente devem ser todos carregados no veículo que o atende;

- C2 Os itens devem ser carregados com seus lados paralelos aos lados da superfície de carregamento;
- C3 Os itens não se sobrepõem e não excedem as dimensões do veículo em que foram carregados;

Por simplicidade, neste trabalho considera-se ainda que os itens possuem orientação fixa, isto, é não podem ser rotacionados no carregamento.

### III. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O problema será modelado em duas etapas: primeiramente, será descrito um modelo para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa. Depois, serão apresentadas as restrições para o carregamento dos veículos. Por fim, será apresentada a restrição que integra o roteamento e o carregamento.

#### A. Formulação Matemática para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa

Existem várias formas de modelar matematicamente o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa [5], [8]. Neste trabalho, será utilizada uma extensão da formulação dependente do tempo para o Problema do Caixeiro Viajante proposta por [22] para problemas integrados de roteamento de carregamento de veículos.

Define-se que um veículo chega em cada vértice do seu roteiro em uma posição  $t$ . Assume-se ainda que cada roteiro se inicia no vértice 0 na posição  $t = 0$ , e termina no vértice 0 na posição  $n + 1$ , na hipótese de que apenas um veículo seja utilizado. Pode-se então dizer que o conjunto dos valores possíveis para  $t$  é  $T = \{1, \dots, n + 1\}$ . A Fig. 2 ilustra um roteiro  $R = \{0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0\}$  para um veículo que visita todos os  $n$  clientes.

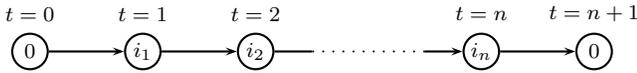


Figura 2. Valores possíveis para o índice  $t$

As variáveis de decisão para o modelo do problema de roteamento,  $z_{ij}^{kt}$ , são definidas como:

$z_{ij}^{kt}$ : variável binária, igual a 1 se o veículo  $k$  vai diretamente do vértice  $i$  para o vértice  $j$  na posição  $t$ , tal que  $(i, j) \in A$ ,  $k \in V$ ,  $t \in T$ ; e igual a 0 caso contrário.

A formulação matemática para o HFVRP pode ser escrita como:

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in V} \sum_{j \in N \setminus \{0\}} F_k z_{0j}^{k1} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} V_k d_{ij} z_{ij}^{kt} \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} z_{ij}^{kt} = 1, i \in N \setminus \{0\} \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} t z_{ij}^{kt} - \sum_{g \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} t z_{gi}^{kt} = 1, i \in N \setminus \{0\} \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N \setminus \{0\}} z_{0j}^{k1} \leq 1, k \in V \quad (4)$$

$$\sum_{j \in N} z_{ij}^{k,t+1} - \sum_{g \in N} z_{gi}^{kt} = 0, i \in N \setminus \{0\}, k \in V, t \in T \setminus \{n + 1\} \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} D_i z_{ij}^{kt} \leq Q_k, k \in V \quad (6)$$

$$z_{ij}^{kt} \in \{0, 1\}, (i, j) \in A, k \in V, t \in T \quad (7)$$

Na formulação (1)-(7), a função objetivo (1) minimiza o custo dos roteiros utilizados para visitar os clientes. As restrições (2) garantem que cada cliente é visitado somente uma vez, enquanto as restrições (3) garantem a conectividade de cada roteiro, isto é, garantem que se um cliente  $i$  é visitado na posição  $t$ , este cliente tem que ser o ponto de partida para algum outro cliente em uma posição  $t + 1$ . As restrições (4) asseguram que cada veículo é utilizado no máximo uma vez. As restrições (5) garantem a conservação de fluxo de cada roteiro, isto é, garantem que se um veículo  $k$  chega em um cliente  $i$  na posição  $t$ , então  $i$  deve ser ponto de partida para que o veículo  $k$  visite algum outro cliente na posição  $t + 1$ ; e as restrições (6) garantem que a capacidade dos veículos não é excedida. Por fim, as restrições (7) definem o domínio das variáveis de decisão.

#### B. Restrições Geométricas para o Carregamento dos Veículos

A posição dos itens quando carregados nos veículos pode ser determinada pelas restrições de um Problema do *Bin Packing* Bidimensional. Sejam as superfícies de carregamento dos veículos um conjunto  $K = \{1, \dots, P\}$  de  $P$  objetos retangulares, com dimensões  $L_k \times W_k$ ,  $k = 1, \dots, P$  onde  $L_k$  e  $W_k$  denotam, respectivamente, comprimento e largura.

Para formular matematicamente as restrições geométricas para o carregamento dos veículos, tomaremos como base a formulação para o problema de carregamento de contêiner proposto por [23], adaptando-a para o caso bidimensional.

Para mapear a superfície de carregamento do veículo, convém tomar um sistema cartesiano bidimensional composto de dois eixos  $X$  e  $Y$ . Suponha que o canto frontal esquerdo da superfície de carregamento do veículo seja posicionado na origem  $(0, 0)$  do sistema cartesiano, sua lateral esquerda sobre o eixo  $X$  e sua lateral frontal sobre o eixo  $Y$ , e considere ainda que a porta do veículo que dá acesso à carga se encontra no lado entre as coordenadas  $(L, 0)$  e  $(L, W)$ , conforme a Fig. 3.

Supondo que os itens tenham orientação fixa, são definidas as seguintes variáveis:

$(x_p, y_p)$ : variáveis reais, que correspondem às coordenadas do canto frontal esquerdo do item  $I_p$  quando posicionado no veículo, tal que  $I_p \in I$ .

$s_{pk}$ : variável binária, igual a 1 se o item  $I_p$  é carregado no veículo  $k$ , tal que  $I_p \in I$ ,  $k \in K$ ; e igual a 0 caso contrário.

$v_k$ : variável binária, igual a 1 se o veículo  $k$  é utilizado, tal que  $k \in V$ ; e igual a 0 caso contrário.

$\alpha_{pq}$ : variável binária, igual a 1 se o item  $I_p$  é posicionado atrás do item  $I_q$ , tal que  $I_p, I_q \in I$ ,  $p < q$ ; e igual a 0 caso contrário.

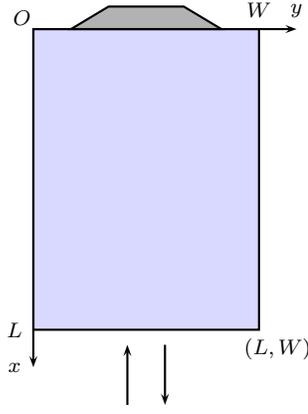


Figura 3. Superfície de carregamento do veículo

$\beta_{pq}$ : variável binária, igual a 1 se o item  $I_p$  é posicionado a frente do item  $I_q$ , tal que  $I_p, I_q \in I, p < q$ ; e igual a 0 caso contrário.

$\gamma_{pq}$ : variável binária, igual a 1 se o item  $I_p$  é posicionado à esquerda do item  $I_q$ , tal que  $I_p, I_q \in I, p < q$ ; e igual a 0 caso contrário.

$\delta_{pq}$ : variável binária, igual a 1 se o item  $I_p$  é posicionado à direita do item  $I_q$ , tal que  $I_p, I_q \in I, p < q$ ; e igual a 0 caso contrário.

As variáveis  $\alpha_{pq}, \beta_{pq}, \gamma_{pq}, \delta_{pq}$  ditam o posicionamento relativo entre os itens. Para facilitar a compreensão do comportamento destas variáveis, um exemplo é dado na Fig. 4, que mostra dois itens  $I_p$  e  $I_q$  carregados em um veículo. Supondo  $p < q$ , para estes itens temos:  $\alpha_{pq} = 1, \beta_{pq} = 0, \gamma_{pq} = 0$  e  $\delta_{pq} = 0$ .

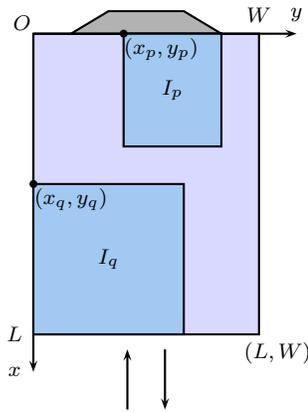


Figura 4. Posições relativa entre os itens  $I_p$  e  $I_q$

É importante observar que um item  $I_p$  é dito estar atrás ou a frente do item  $I_q$  somente se não houver interseção das projeções destes dois itens sobre o eixo  $X$ . Analogamente,  $I_p$  só pode estar à esquerda ou direita de  $I_q$  se não houver interseção de suas projeções sobre o eixo  $Y$ . Assim, pode-se ter  $\alpha_{pq} + \beta_{pq} \leq 1$  e  $\gamma_{pq} + \delta_{pq} \leq 1$ , enquanto  $1 \leq \alpha_{pq} + \beta_{pq} + \gamma_{pq} + \delta_{pq} \leq 2$ .

Sendo  $M$  um número arbitrariamente grande, as restrições geométricas para o carregamento dos itens nos veículos são dadas por:

$$x_p + l_p \leq x_q + (1 - \alpha_{pq})M, I_p, I_q \in I, p < q \quad (8)$$

$$x_q + l_q \leq x_p + (1 - \beta_{pq})M, I_p, I_q \in I, p < q \quad (9)$$

$$y_p + w_p \leq y_q + (1 - \gamma_{pq})M, I_p, I_q \in I, p < q \quad (10)$$

$$y_q + w_q \leq y_p + (1 - \delta_{pq})M, I_p, I_q \in I, p < q \quad (11)$$

$$\alpha_{pq} + \beta_{pq} + \gamma_{pq} + \delta_{pq} \geq s_{pk} + s_{qk} - 1, I_p, I_q \in I, p < q, k \in V \quad (12)$$

$$x_p + l_p \leq L_k + (1 - s_{pk})M, I_p \in I, k \in V \quad (13)$$

$$y_p + w_p \leq W_k + (1 - s_{pk})M, I_p \in I, k \in V \quad (14)$$

$$x_p, y_p \in \mathbb{R}, I_p \in I \quad (15)$$

$$\alpha_{pq}, \beta_{pq}, \gamma_{pq}, \delta_{pq} \in \{0, 1\}, I_p, I_q \in I, p < q \quad (16)$$

$$s_{pk} \in \{0, 1\}, I_p \in I, k \in V \quad (17)$$

As restrições (8)-(11) garantem que não haja sobreposição dos itens, e a restrição (12) faz com que a verificação de sobreposição seja feita apenas para itens carregados no mesmo veículo, enquanto as restrições (13)-(14) fazem com que os itens não excedam as dimensões da superfície de carregamento do veículo. Por fim, as restrições (15)-(17) definem o domínio das variáveis de decisão.

### C. Restrição para integração entre roteamento e carregamento

As restrições (8)-(17) estabelecem a posição de cada item a ser carregado nos veículos, garantindo que não haja sobreposição de itens. No entanto, elas não garantem que todos os itens de um cliente sejam carregados no veículo que o atende. Esta condição está contemplada na restrição (18) a seguir:

$$\sum_{I_p \in IT_i} s_{pk} = m_i \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} z_{ij}^{kt}, i \in N \setminus \{0\}, k \in V \quad (18)$$

## IV. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

O modelo formulado para o 2L-HFFVRP foi utilizado para resolver alguns problemas, com o intuito de validá-lo e de analisar a viabilidade de sua aplicação. Nesta seção serão descritos os problemas utilizados nos testes, e os resultados obtidos serão apresentados e discutidos.

Tabela I  
INFORMAÇÕES DOS CLIENTES

$i$	Clientes		Classe	Itens	
	$(x_i, y_i)$	$D_i$		$m_i$	$(l_p, w_p), p \in 1, \dots, m_i$
0	(30,40)				
1	(37,52)	7	2	2	(7, 9); (34, 3)
			3	2	(4, 11); (13, 6)
			4	4	(5, 12); (7, 7); (15, 3); (11, 3)
			5	4	(11, 5); (21, 3); (19, 3); (10, 3)
2	(49,49)	30	2	2	(14, 5); (36, 3)
			3	2	(9, 5); (5, 15)
			4	2	(28, 2); (6, 14)
			5	4	(4, 2); (6, 11); (5, 5); (7, 10)
3	(52,64)	16	2	2	(29, 3); (5, 8)
			3	2	(13, 8); (26, 2)
			4	1	(8, 9)
			5	4	(15, 4); (5, 5); (6, 11); (6, 5)
4	(20,26)	9	2	2	(19, 3); (9, 4)
			3	1	(10, 5)
			4	4	(8, 11); (15, 7); (11, 2); (6, 9)
			5	1	(19, 4)
5	(40,30)	21	2	2	(6, 10); (8, 10)
			3	2	(13, 7); (31, 2)
			4	1	(13, 2)
			5	4	(7, 5); (12, 5); (6, 5); (4, 4)
6	(21,47)	15	2	1	(19, 9)
			3	2	(12, 8); (6, 11)
			4	4	(12, 5); (16, 3); (29, 3); (13, 7)
			5	1	(11, 4)
7	(17,63)	19	2	1	(7, 11)
			3	1	(5, 10)
			4	3	(8, 4); (6, 6); (6, 5)
			5	5	(4, 11); (23, 2); (14, 4); (6, 2); (8, 4)
8	(31,62)	23	2	1	(12, 7)
			3	3	(9, 7); (7, 8); (12, 3)
			4	3	(7, 6); (16, 6); (13, 8)
			5	3	(16, 3); (10, 3); (4, 5)
9	(52,33)	11	2	2	(22, 4); (31, 3)
			3	2	(22, 2); (7, 13)
			4	2	(21, 2); (5, 12)
			5	4	(5, 9); (5, 6); (7, 3); (23, 2)
10	(51,21)		2	2	(10, 4); (8, 8)
			3	3	(11, 5); (6, 12); (29, 2)
			4	1	(5, 9)
			5	3	(7, 3); (18, 3); (4, 5)

### A. Problemas Utilizados nos Testes

Os problemas para os testes foram obtidos a partir da instância 1 de [20]. Esta instância possui 5 classes: a classe 1 corresponde ao problema original de roteamento de veículos com frota heterogênea (cada cliente demanda apenas um item de dimensões unitárias), enquanto nas classes 2, 3, 4 e 5 cada cliente demanda uma quantidade de itens que varia entre 1 e 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Em todas as classes da instância 1 é utilizado o mesmo grafo, isto é, a mesma disposição geográfica do depósito e dos clientes.

Esta instância possui 15 clientes, mas como a resolução do modelo limita-se a problemas pequenos, foram selecionados apenas os  $n$  primeiros clientes, com  $n$  variando de 4 a 9. A Tabela I contém os dados dos clientes utilizados nos problemas dos testes. Para cada cliente  $i$ , é dada a sua demanda  $e_i$ , para cada classe 2-5, são dadas as dimensões de seus itens.

Para esta instância, [20] disponibiliza uma frota composta por quatro tipos de veículos, com as seguintes características:

Veíc A:  $C_A = 20$ ;  $L_A = 10$ ;  $W_A = 10$ ;  $F_A = 10$ ;  $f_A = 1, 0$   
 Veíc B:  $C_A = 25$ ;  $L_A = 15$ ;  $W_A = 15$ ;  $F_A = 20$ ;  $f_A = 1, 1$   
 Veíc C:  $C_A = 40$ ;  $L_A = 25$ ;  $W_A = 25$ ;  $F_A = 30$ ;  $f_A = 1, 2$   
 Veíc D:  $C_A = 60$ ;  $L_A = 40$ ;  $W_A = 20$ ;  $F_A = 40$ ;  $f_A = 1, 3$

Tabela II  
CARACTERÍSTICAS DOS PROBLEMAS

Problema	$n$	Veículos					Nº de itens / classe			
		A	B	C	D	Total	2	3	4	5
P4	4			1	1	2	8	7	11	13
P5	5			1	1	2	10	9	12	17
P6	6		1	1	1	3	11	11	16	18
P7	7		2	1	1	4	12	12	19	23
P8	8		1	2	1	4	13	15	22	26
P9	9			1	2	3	15	17	24	30
P10	10			1	2	3	17	20	25	33

Para cada problema gerado, determinou-se um número de veículos de cada tipo para compor a frota. Por serem pequenos e terem capacidade muito baixa, suficiente para atender em geral a um único cliente, o veículo do tipo A não foi utilizado.

Tabela III  
RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO PARA O 2L-HFFVRP

Prob.	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4		Classe 5	
	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)
P4	201.54	0.25	201.54	0.22	201.54	0.25	201.54	0.44	201.54	0.44
P5	222.34	0.45	222.34	0.23	259.24	0.44	222.34	0.45	222.34	0.48
P6	267.42	0.52	270.92	0.45	287.13	0.47	303.74	1.13	267.42	1.52
P7	330.94	0.91	349.04	0.47	365.26	0.47	381.87	2.02	336.22	3.78
P8	385.97	2.25	385.97	0.50	401.08	1.78	411.05	3.55	386.26	84.62
P9	394.96	6.41	406.72	7.03	397.47	50.16	394.96	91.04	394.96	395.41
P10	419.28	44.95	450.60	55.46	450.60	5118.78	422.04	378.00	419.28	7808.24

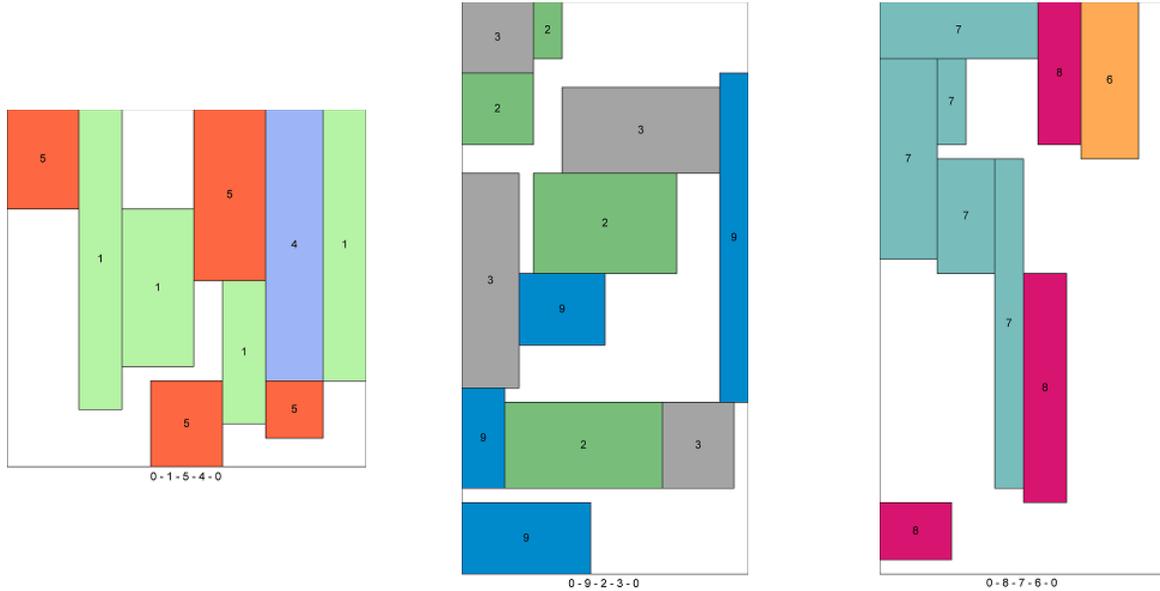


Figura 5. Carregamento dos veículos para o problema P9-Classe 5

Os dados dos problemas gerados para validação do modelo 2L-HFFVRP estão dispostos na Tabela II, que mostra, para cada problema, o número de clientes, a quantidade de cada tipo de veículo A, B, C e D disponível, o número total de veículos disponíveis e, para cada classe 2-5, o número de itens a serem carregados nos veículos.

### B. Resultados Obtidos

O modelo 2L-HFFVRP foi implementado em Visual Basic .Net, e resolvido pelo solver CPLEX 12.6, em um micro-computador Core i5 1.40 GHz, com 8Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 8. As configurações padrão do CPLEX não foram alteradas. Os resultados obtidos pelos experimentos estão apresentados na Tabela III, que mostra, para cada classe, o valor da função objetivo FO e o tempo  $t(s)$  gasto para resolver o problema, em segundos.

Como é esperado, o tempo gasto para resolver o problema aumenta quanto maior é o número de clientes. Nota-se também que, em geral o tempo computacional aumenta progressivamente da Classe 2 para a Classe 5, isto é, aumenta quanto maior for o número total de itens, pois isto significa maior complexidade na composição dos carregamentos. A Figura 5 ilustra o carregamento dos veículos do problema P9-Classe 5.

O maior problema considerado (P10-Classe 5), com 10 clientes, 3 veículos e 33 itens demandou 7808.24 segundos para ser resolvido, o que equivale a mais de 2 horas de processamento. Desse modo, embora o modelo proposto represente matematicamente o 2L-HFFVRP, soluções ótimas, em tempo computacional razoável, podem ser encontradas apenas para problemas consideravelmente pequenos, com poucos clientes, poucos veículos e poucos itens a serem carregados.

### V. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma formulação matemática para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional, com carregamento irrestrito. O modelo foi validado através de experimentos computacionais, e os resultados obtidos mostraram que o modelo proposto é capaz de representar matematicamente o problema estudado, mas apenas problemas pequenos são passível de serem resolvidos em tempo computacional aceitável.

É importante observar que o descarregamento dos itens de um cliente exigem o manuseio dos itens de outros clientes que ainda serão atendidos posteriormente, isto é, não foram consideradas restrições de carregamento sequencial. Para evitar que isto aconteça, tais restrições podem ser facilmente

incorporadas ao modelo, visto que a formulação utilizada para o problema de roteamento fornece a posição em que cada cliente é atendido.

## REFERÊNCIAS

- [1] G. B. Dantzig and J. H. Ramser. The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, v. 6, n. 1, p. 80-91, 1959.
- [2] P. Toth and D. Vigo. An Overview of Vehicle Routing Problems. In: P. Toth and D. Vigo (Ed.). *The Vehicle Routing Problem*, 2002, p. 1-26.
- [3] B. Golden and S. Raghavan and E. A. Wasil. *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges*, Springer, 2008.
- [4] G. Laporte. Fifty Years of Vehicle Routing. *Transportation Science*, v. 43, n. 4, p.408-416, 2009.
- [5] B. Golden and A. Assad and L. Levy and F. Gheysens. The fleet size and mix vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 11, n. 1, p. 49-66, 1984.
- [6] É. D. Taillard. A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet VRP. *RAIRO - Operations Research*, v. 33, n. 1, p. 1-14, 1999.
- [7] C. D. Tarantilis and C. T. Kiranoudis and V. S. Vassiliadis. A threshold accepting metaheuristic for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 152, n. 1, p. 148-158, 2004.
- [8] R. Baldacci and A. Mingozzi. A unified exact method for solving different classes of vehicle routing problems. *Mathematical Programming*, v. 120, n. 2, p. 347-380, 2009.
- [9] F. Wang and Y. Tao and N. Shi. A Survey on Vehicle Routing Problem with Loading Constraints. In: *International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*, 2009, v. 2, p. 602-606.
- [10] M. Iori and S. Martello. Routing problems with loading constraints. *TOP*, v. 18, n. 1, p. 4-27, 2010.
- [11] H. Pollaris and K. Braekers and A. Caris and G. K. Janssens and S. Limbourg. Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions. *OR Spectrum*, v. 37, n. 2, p. 297-330, 2015.
- [12] M. Iori and J.-J. Salazar-González and D. Vigo. An Exact Approach for the Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints. *Transportation Science*, v. 41, n. 2, p. 253-264, 2007.
- [13] M. Gendreau and M. Iori and G. Laporte and S. Martello. A Tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Networks*, v. 51, n. 1, p. 4-18, 2008.
- [14] G. Fuellerer and K. F. Doerner and R. F. Hartl and M. Iori. Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 36, n. 3, p. 655-673, 2009.
- [15] E. E. Zachariadis and C. D. Tarantilis and C. T. Kiranoudis. A Guided Tabu Search for the Vehicle Routing Problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 195, n. 3, p. 729-743, 2009.
- [16] C. Duhamel and P. Lacomme and A. Quilliot and H. Toussaint. A multi-start evolutionary local search for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 38, n. 3, p. 617-640, 2011.
- [17] S. C. H. Leung and X. Zhou and D. Zhang and J. Zheng. Extended guided tabu search and a new packing algorithm for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 38, n. 1, p. 205-215, 2011.
- [18] E. E. Zachariadis and C. D. Tarantilis and C. T. Kiranoudis. Integrated distribution and loading planning via a compact metaheuristic algorithm. *European Journal of Operational Research*, v. 228, n. 1, p. 56-71, 2013.
- [19] O. Dominguez and A. A. Juan and J. Faulin. A biased-randomized algorithm for the two-dimensional vehicle routing problem with and without item rotations. *International Transactions in Operational Research*, v. 21, n. 3, p. 375-398, 2014.
- [20] S. C. H. Leung and Z. Zhang and D. Zhang and X. Hua and M. K. Lim". A meta-heuristic algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 225, n. 2, p. 199-210, 2013.
- [21] O. Dominguez and A. A. Juan and B. Barrios and J. Faulin and A. Agustin. Using biased randomization for solving the two-dimensional loading vehicle routing problem with heterogeneous fleet. *Annals of Operations Research*, v. 236, n. 2, p. 383-404, 2016.
- [22] L. Junqueira. *Modelos e Algoritmos para Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos*. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.
- [23] C. S. Chen and S. M. Lee and Q. S. Shen. An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 80, n. 1, p. 68-76, 1995.