

Estabilidade de Métodos Enriquecidos Aplicados à Análise Dinâmica de Viga de Euler-Bernoulli

Thamara Petrolí
PPGMNE - UFPR
Curitiba, Brasil
thamarapetroli@gmail.com

Marcos Arndt
PPGMNE - UFPR
Curitiba, Brasil
arndt.marcos@gmail.com

Roberto Machado Dalledone
PPGMNE - UFPR
Curitiba, Brasil
roberto.dalledonemachado@gmail.com

Resumo—Sabe-se que os Métodos Enriquecidos baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) são importantes ferramentas na análise dinâmica de estruturas, principalmente pelos bons resultados apresentados. Ao aplicar esses métodos numéricos na análise de vibrações livres de estruturas, a solução numérica cai em um problema de autovalores e autovetores generalizado. Mesmo apresentando excelentes resultados para o problema de autovalores generalizado, em alguns casos, obtém-se autovalores negativos, dependendo da precisão empregada nas rotinas computacionais, perturbando a estabilidade do método. Sendo assim, este trabalho propõe uma análise da sensibilidade gerada pela construção numérica das matrizes de massa de alguns métodos enriquecidos para o caso de vibração livre de viga de Euler Bernoulli. São comparados os resultados, gerados pelo software Maple, a fim de verificar se o número de condição da matriz de massa pode ser empregado como uma medida de sensibilidade e estabilidade do método numérico utilizado.

Palavras-chave—Estabilidade, Condicionamento, Problema de Autovalores Generalizado, Método de Elementos Finitos, Análise dinâmica.

I. INTRODUÇÃO

A análise de modelos matemáticos requer o uso de métodos numéricos, entre os quais se inclui o Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método foi desenvolvido para a análise de meios contínuos, possibilitando nos dias de hoje, a análise da maior parte dos sistemas físicos dos quais trata a Engenharia [15]. Já o método Hierárquico e p-Fourier são métodos enriquecidos, que tem por objetivo obter melhores respostas. O Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG), por sua vez, é baseado nas ideias do Método da Partição da Unidade (MPU), desenvolvido por Melenk e Babuska, em [13].

No MPU, a base do subespaço de aproximações locais é constituída de funções, não necessariamente polinomiais, que refletem informações disponíveis a priori sobre a solução da equação diferencial governante [3]. Esta técnica garante boa aproximação local e global.

Por definição, tem-se que o refinamento p do MEF aumenta a precisão da solução sem a necessidade de um novo refinamento da malha [1], entretanto à um custo computacional maior para obter as novas funções de forma. Consequentemente, o grau polinomial das funções de forma crescem a cada

passo, causando um mau condicionamento dos polinômios, como em [11].

Observou-se ainda que os ajustes feitos na precisão empregada nos cálculos computacionais para determinação das matrizes de massa e rigidez por integração numérica, ou na solução do problema de autovalores, afetam a precisão e a convergência do MEF. Em [12] tentando encontrar uma maneira de avaliar a sensibilidade do problema de vibração, ao utilizar o método p-Fourier e MEF, calcularam o número de condição da matriz de massa, de forma a encontrar uma "medida" de sensibilidade.

[7] define o número de condição como quociente entre o maior e o menor autovalores da matriz, ou seja, o número de condição está diretamente ligado com autovalores. Em 1965, [18] introduziu o número de condição de uma matriz A , fazendo uma discussão sobre sua sensibilidade. [14] publicou uma expressão explícita do número de condição para matrizes reduzidas à forma canônica de Jordan. Por volta dos anos 1970, [16] e [19], usaram o número de condição para limitar o domínio do espectro. Já no ano de 1996, [9] começaram a tratar sobre a sensibilidade de problemas de autovalores.

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise do condicionamento e estabilidade do problema de autovalores generalizado, gerado pela equação $Ax = \lambda Bx$, do MEFG. [17] afirmaram que se uma matriz é hermitiana, e recebe uma perturbação, então haverá um incremento nos seus autovalores. Sendo assim, o estudo e análise das aproximações das matrizes de massa e rigidez é necessário, para descobrir até que ponto as perturbações geradas pelas aproximações do método de construção dessas matrizes podem influenciar no desempenho e precisão dos métodos na análise dinâmica de estruturas.

II. PROBLEMA DE AUTOVALORES GENERALIZADOS COM MATRIZES HERMITIANAS

Um problema de autovalores generalizado é, definido pela equação:

$$P(\lambda)x = (A - \lambda B)x = 0 \iff Ax = \lambda Bx \quad (1)$$

E se a matriz $B = I$, matriz identidade, o problema generalizado é chamado de *problema de autovalores padrão*, ou somente *problema padrão*.

Para este trabalho são necessárias as seguintes definições:

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), à Universidade Federal do Paraná (UFPR) e à Fundação Araucária e CAPES pelo apoio e oportunidade.

- Uma matriz A , é dita hermitiana, se $A = (\bar{A})^T$, onde \bar{A} é a matriz conjugada de A .
- Sejam λ_i 's autovalores da matriz A , então:
 - Se $\lambda_i > 0 \forall i$, então A é *definida positiva*;
 - Se $\lambda_i \geq 0 \forall i$, então A é chamada de *semi-definida positiva*;
 - Se $\lambda_i < 0 \forall i$, então A é *definida negativa*;
 - Se $\lambda_i \leq 0 \forall i$, então A é *semi-definida negativa*;
 - A matriz A é *indefinida* quando existem autovalores positivos e negativos.

O conceito de condicionamento é definido através da análise de sensibilidade da solução do problema de autovalor à pequenas variações nos dados de entrada. O problema é *bem condicionado* se pequenas perturbações nos dados de entrada resultam em pequenas variações nos dados de saída. Caso contrário, quando pequenas perturbações nos dados de entrada produzem grandes perturbações nos dados de saída, temos um problema *mal condicionado*. Definição esta que em algumas áreas de estudo da Mecânica Computacional é também conhecida como estabilidade do método, logo um problema é estável quando for bem condicionado, e instável caso contrário.

Um problema de autovalor generalizado, como definido em (1), pode ser bem condicionado ou mal condicionado. Quando a matriz A é hermitiana e trata-se de um problema padrão, então este é um problema bem condicionado [8]. A situação muda completamente quando o problema é generalizado, que em geral é mal condicionado, principalmente quando as matrizes não são hermitianas [5].

Lidar com matrizes hermitianas e definida positivas traz algumas vantagens, uma delas é que existem algoritmos que facilitam encontrar os autovalores das matrizes, de maneira a ter uma medida de condicionamento. Outra vantagem é que pode-se transformar um problema de autovalor generalizado em um problema padrão. Se as matrizes A e B são hermitianas e B é definida positiva, então pode-se decompor B como produto de matrizes não singulares, $B = LL^*$, através da Decomposição de Cholesky, por exemplo. Assim o problema se transforma em:

$$(L^{-1}A(L^*)^{-1})\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (2)$$

Como os espaços do domínio são invariantes [9], as propriedades são preservadas após a transformação, isto é, os autovalores são os mesmos, e se \bar{x} é autovetor em (2), então $x = (L^*)^{-1}\bar{x}$ satisfaz a equação em (1). Portanto, quando um problema de autovalores generalizado tem as matrizes A e B hermitianas e B é definida positiva; então este é um problema bem condicionado, porque pode ser reduzido a um problema padrão, com os mesmos autovalores e que por sua vez é bem condicionado.

III. ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

A análise de vibrações livres em estruturas não amortecidas recai no problema [6]:

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (3)$$

onde K é a matriz de rigidez, M a matriz de massa, ω a frequência natural e ϕ o vetor de modo de vibração natural.

As matrizes K e M quando provêm da forma fraca de Galerkin referente ao equilíbrio dinâmico do sistema para vibrações de viga de Euler-Bernoulli, são dadas na forma:

$$K = [k_{ij}] = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} d\Omega \quad (4)$$

$$M = [m_{ij}] = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j d\Omega \quad (5)$$

onde as Φ 's são funções de interpolação e Ω o domínio global do problema. A escolha das funções de interpolação depende do método aproximado a ser empregado.

A. Métodos Enriquecidos

Considerando que o elemento de viga reta uniforme possui dois graus de liberdade por nó, deslocamento e rotação, e fazendo uso de funções de forma do MEF convencional, e da adição de outras funções enriquecedoras, a solução aproximada no domínio em questão pode ser definida como

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} = \mathbf{N}^T \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{c}, \quad (6)$$

onde u_{MEF} é a componente do MEF baseada nos graus de liberdade nodais e u_{ENRIQ} é a componente de enriquecimento gerada sobre a partição da unidade, multiplicando-a, e baseada nos graus de liberdade de campo; e:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T &= [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4], \\ \mathbf{q}^T &= [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2], \\ \Phi^T &= [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_r \quad \dots \quad F_n], \\ \mathbf{c}^T &= [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n], \end{aligned} \quad (7)$$

sendo que \mathbf{q} corresponde ao vetor de graus de liberdade nodais do elemento do MEF convencional, \mathbf{N} é o vetor que contém as funções de forma cúbicas do MEF ψ_i , Φ o vetor das funções enriquecedoras F_j e \mathbf{c} o vetor de graus de liberdade de campo.

1) *MEF p-Hierárquico (Elemento de viga de Bardell)*: Este método, proposto em [4], utiliza um conjunto de funções de forma composto pelos quatro primeiros polinômios cúbicos de Hermite do MEF e por polinômios que derivam dos polinômios de Legendre da forma de Rodrigues, no domínio $\Omega = [-1, 1]$, e são dados por:

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r-1} \frac{(-1)^n (2r-2n-7)!!}{2^n n! (r-2n-1)!} \xi^{r-2n-1}, \quad (8)$$

para $r!! = r(r-2)(r-4)\dots(2 \text{ ou } 1)$; $0!! = (-1)!! = 1$; $r \geq 4$ e $\frac{(r-1)}{2}$ denota a parte inteira desta operação. Os polinômios cúbicos de Hermite, para o domínio $\Omega = [-1, 1]$, são dados por:

$$\left\{ \begin{aligned} H_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{\xi^3}{4} \\ H_2(\xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)L \\ H_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{\xi^3}{4} \\ H_4(\xi) &= \frac{1}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)L \end{aligned} \right. \quad (9)$$

onde L determina o comprimento da viga.

2) *Método dos Elementos Finitos p-Fourier*: Este método foi proposto por [11] e utiliza as funções enriquecedoras, no domínio $\Omega = [0, 1]$, dadas por:

$$F_r = (\xi - \xi^2)sen(r\pi\xi) \quad (10)$$

Em [11] afirmaram que funções polinomiais são mal condicionadas, já que a diferença numérica, mesmo pequena, pode ser significativa. Ou seja, pequenas variações nos dados de entrada causam grandes variações nos dados de saída, o que motiva o uso das funções de Fourier, pois elas eliminam o mal condicionamento polinomial.

B. Aproximações pelo MEFG

O MEFG surgiu a partir do Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade, onde o enriquecimento local do subespaço de aproximação é incorporado através do MPU [1].

O espaço das funções de aproximação, além de representar uma boa aproximação local, deve ser denso no conjunto de soluções da equação diferencial a ser resolvida. Como a escolha não é única, então ela depende de aspectos como custo da construção das matrizes e otimização do sistema.

O MPU permite construir um espaço de aproximação com a regularidade desejada, independente dos espaços de aproximação locais, preservando as propriedades destes espaços. A aproximação da solução proposta pelo MEFG no domínio do elemento mestre pode ser escrito como a combinação das componentes [2]:

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} \quad (11)$$

Para este trabalho utilizam-se:

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi)(\phi_{1i}(\xi) + \phi_{2i}(\xi)) + \sum_{i=1}^2 \eta_i \left[\sum_{j=1}^{n_l} \gamma_j(\xi) \right] \quad (12)$$

onde:

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 - \frac{\xi + \xi^2}{2} \\ \phi_{12} = \frac{\xi - \xi^2}{2} + 1 \\ \phi_{21} = \frac{1 - \xi^2}{4} \\ \phi_{22} = \frac{\xi^2 - 1}{4} \end{cases} \quad (13)$$

As funções de enriquecimento utilizadas são baseadas no estudo de [1], e dadas por:

$$\gamma_j(\xi) = \cos \left[\frac{(j-1)\pi(\xi+1)}{2} \right] - \cos \left[\frac{(j+1)\pi(\xi+1)}{2} \right] \quad (14)$$

para $j = 1, 2, \dots, n_l$, sendo n_l o número de níveis de enriquecimento.

E as funções da partição da unidade utilizadas foram:

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{(1-\xi)}{2} \\ \eta_2 = \frac{(1+\xi)}{2} \end{cases} \quad (15)$$

Para este trabalho considerou-se $\xi \in [-1, 1]$.

Por construção do método, como apresentado por [1], sabe-se que as matrizes K e M são matrizes hermitianas. Sendo M definida positiva [10], então pode-se aplicar a decomposição em M , transformando o problema de autovalor generalizado em um padrão bem condicionado. E se \bar{x} é autovetor em (2), então $x = (L^*)^{-1}\bar{x}$ satisfaz (3); logo pelas definições anteriores segue que os autovalores são reais e positivos, ou seja, $\omega^2 \in \mathbb{R}$.

Como a matriz de massa é por definição definida positiva nos problemas de vibração livre não haveriam motivos para medir o condicionamento do sistema, pois sabe-se que o problema é bem condicionado e os autovalores são reais e positivos. Porém, dependendo da precisão empregada no cálculo das matrizes de massa e rigidez observa-se que o problema continua mal condicionado numericamente, sendo então necessário verificar a sensibilidade numérica da matriz de massa, pois o bom condicionamento do problema depende desta ser numericamente definida positiva.

IV. ANÁLISE DA SENSIBILIDADE

Primeiramente variou-se o número de dígitos significativos (precisão) para a aproximação numérica (integração numérica) das matrizes de massa, calculando-se o erro absoluto das aproximações em relação aos valores exatos (integração exata). As matrizes geradas, no software Maple, tem 5 níveis de enriquecimento ($n_l = 5$), variando o número de dígitos significativos (4, 6, 8, 10 e 17). Para determinação das matrizes aproximadas foi empregada a quadratura de Gauss.

As figuras 1, 2 e 3 apresentam, a título de ilustração, a distribuição do erro nas matrizes de massa para uma precisão de 6 e 10 dígitos significativos para o Método p-Hierárquico e 4 e 10 dígitos para o Método p-Fourier.

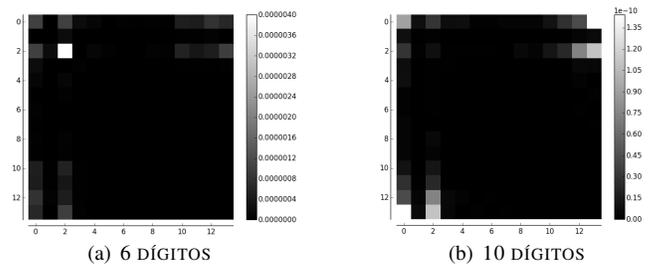


Figura 1: MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

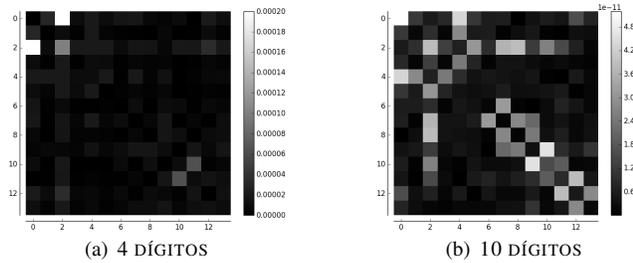


Figura 2: MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

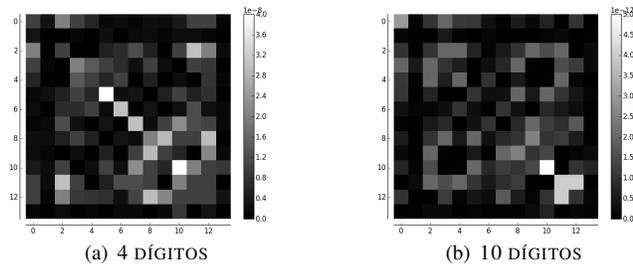


Figura 3: MEF G (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

Observa-se que apesar da dispersão do erro, o aumento da precisão faz com que a parte que apresenta os maiores níveis de enriquecimento (no caso, nível 5) das matrizes de massa contenha os erros mais altos na matriz, embora sejam bastante pequenos. Para o caso o MEF G a região central contém os níveis de enriquecimento mais altos, e neles estão os maiores erros numéricos.

Considerando o erro das aproximações, uma segunda análise foi feita, mas agora observando a partir de qual precisão a matriz de massa torna-se definida positiva e a ordem do número de condição dessa matriz (Tabelas 1, 2 e 3 a seguir). Em seguida são apresentados graficamente (figuras 4, 5 e 6) a relação entre o número de dígitos significativos versus a ordem do número de condição.

Tabela 1- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Número de Níveis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ordem do número de condição	10^3	10^5	10^6	10^7	10^7	10^8	10^9	10^9	10^9	10^{10}
Número de dígitos significativos	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7

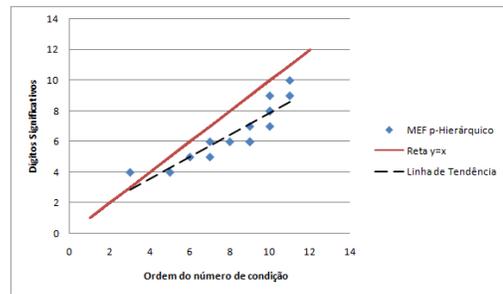


Figura 4: NÚMERO DE CONDIÇÃO \times DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Tabela 2- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Número de Níveis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ordem do número de condição	10^4	10^4	10^5	10^5	10^5	10^5	10^6	10^6	10^6	10^6
Número de dígitos significativos	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5

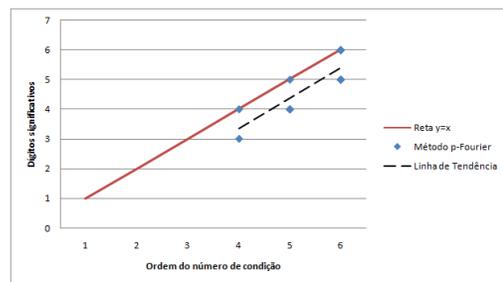


Figura 5: NÚMERO DE CONDIÇÃO \times DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Tabela 3- MEF G (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Número de Níveis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ordem do número de condição	10^3	10^5	10^6	10^8	10^9	10^{11}	10^{12}	10^{14}	10^{15}	10^{17}
Número de dígitos significativos	4	5	6	8	10	11	11	14	16	17

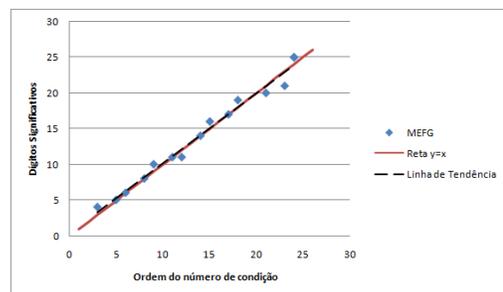


Figura 6: NÚMERO DE CONDIÇÃO \times DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF G (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Observa-se que a potência da ordem do número de condição se aproxima da precisão necessária para que a matriz M torne-se definida positiva. Por exemplo, no MEF p-Fourier com 6

níveis de enriquecimento a matriz é definida positiva a partir de 5 dígitos de precisão e a ordem do número de condição é 10^5 .

Na sequência tem-se uma comparação do número de condição da matriz de massa de cada Método Enriquecido apresentado neste trabalho. Para os 10 primeiros níveis com 100 dígitos significativos em relação ao número total de graus de liberdade, utilizou-se o método da quadratura de Gaus com dez pontos de integração para obter a aproximação numérica; e não foram considerados condições de contorno no problema.

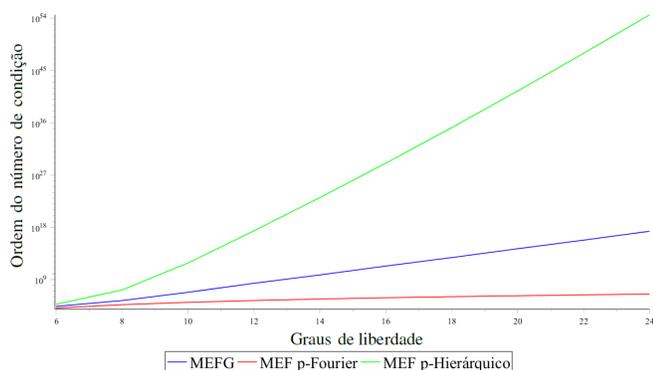


Figura 7: NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA VIGA DE EULER BERNOULLI

Nota-se que entre os métodos apresentados, o MEF p-Fourier é o mais estável, apresentando melhor comportamento do número de condição, entretando o MEF p-Hierárquico é o mais instável. A comparação do número de condição permite avaliar a estabilidade do método empregado.

V. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi fazer uma análise do problema de autovalores generalizado e a perturbação gerada pelas aproximações das matriz de massa dos Método Enriquecidos (p-Fourier, MEF p-Hierárquico e MEFG). Mesmo com toda a base teórica matemática garantindo que o problema de autovalores generalizado da vibração livre da viga de Euler-Bernoulli seja bem condicionado, ainda assim encontra-se grande sensibilidade no problema (3). Essa sensibilidade está diretamente ligada com os erros de aproximação gerados pelos Métodos Enriquecidos, na construção das matrizes de massa, que por fim provocam perturbações nos autovalores gerando instabilidade. Pela análise realizada, conclui-se que as aproximações numéricas e analíticas são aceitáveis, apesar da sensibilidade do problema.

Ainda pode-se observar uma correlação direta entre a potência da ordem do número de condição da matriz de massa e a quantidade de dígitos significativos (precisão) necessária para que a matriz de massa torne-se numericamente definida-positiva, ou seja, quando a mesma satisfaz as hipóteses para o bom condicionamento. Logo, a ordem de grandeza do número de condição da matriz de massa pode ser utilizado para estimar a precisão necessária na construção da matriz de massa e

portanto ser também empregada na comparação de estabilidade de diferentes propostas de funções de enriquecimento.

Pesquisas futuras poderão verificar o comportamento da sensibilidade do problema de autovalor com a mudança das funções de enriquecimento, para o problema de vibração livre de viga e também barra sob estado plano.

REFERÊNCIAS

- [1] Arndt, M., 2009. O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- [2] Arndt, M., Machado, R.M., & Natume, P.M. 2014. Generalized finite element method using bessel functions in vibration analysis. CILAMCE, Fortaleza.
- [3] Arndt, M., Machado, R.M., & Scremin, A. 2010. O Método dos Elementos Finitos Generalizados Adaptativo Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Eixos. CONEM. Paraíba.
- [4] Bardell, N. S., 1991 Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. *Journal of Sound and Vibration*.
- [5] Bazán, F.S.V., 2003. Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações .Notas de Minicurso: 24°CBM, Florianópolis.
- [6] Chopra, A. K., 2012. Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering. New Jersey: Prentice Hall.
- [7] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E, Witt, R. J., 2002. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. University of Wisconsin: Madison.
- [8] Demmel, J., Bai, Z., Dongarra, J., Ruhe, A., & Vorst, H.v.d., 2000. *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM.
- [9] Golub, G.H., & Loan, C.F.V., 1996. *Matrix Computations*. Baltimore and London: The Johns Hopking University Press.
- [10] Inman, D. J., 1996. *Engineering vibration*. New Jersey: Prentice-Hall.
- [11] Leung, A. Y. T. & Chan, J. K. W., 1998. *Fourier p-element for the analysis of beams and plates*. Journal of Sound and Vibration, vol. 212, n. 1, p. 179 - 185.
- [12] Leung, A.Y.T, Zhu, B., Zheng, J., & Yang, H., 2004. *Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems*. Journal of Sound and Vibration, vol.271, pp. 67 - 81.
- [13] Melenk, J. M.; & Babuska, I., 1996. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1-4, pp. 289 - 314.
- [14] Smith, R.A., 1967. *The condition numbers of the matrix eigenvalue problem*. Numerische Mathematik, vol.10, pp. 232 - 240.
- [15] Soriano, H.L. & De Souza Lima, S., 2003 *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. EDUSP.
- [16] Stewart, G.W., 1971. *Error bounds for approximate invariant subspaces of closed linear operators*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol.8, pp. 796 - 808.

- [17] Stewart, G.W., & Sun, J., 1990. *Matrix Perturbation Theory*. Boston: Academic Press.
- [18] Wilkinson, J.H., 1965. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon Press.
- [19] Wilkinson, J.H., 1972. *Note on matrices with a very ill-conditioned eigenproblem*. *Numerische Mathematik*, vol. 19, pp. 175 - 178.