

Método dos Elementos de Conservação Espacial-Temporal Modificado para as Equações de Saint Venant Unidimensionais

Problemas que admitem profundidade nula

Adriano Rodrigues de Melo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense - IFC
Araquari, Brasil
adriano.melo@ifc-araquari.edu.br

Liliana Madalena Gramani, Eloy Kaviski
PPGMNE
Universidade Federal do Paraná - UFPR
Curitiba, Brasil
l.gramani@gmail.com, eloy.dhs@ufpr.br

Resumo—O método dos elementos de conservação espacial-temporal ou, de modo abreviado, método CE/SE (*Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element*) é um método robusto e acurado utilizado em sistemas de equações na forma conservativa e que produz bons resultados para aplicações em equações de águas rasas. Suas variáveis de marcha dependem, no entanto, do inverso da profundidade o que o torna inviável em problemas em que a profundidade atinge valores nulos. Neste sentido, este trabalho objetiva apresentar o desenvolvimento de esquemas modificados que contornem esta limitação. A partir da forma reduzida da equação da quantidade de momento linear deduz-se equações auxiliares a serem utilizadas nos casos de profundidade nula. Os experimentos numéricos realizados comprovam a acurácia e robustez do método na passagem entre os perímetros seco e molhado.

Palavras-chave—Método CE/SE; Equações de Saint Venant; Profundidade Nula.

I. INTRODUÇÃO

As equações de Saint Venant constituem um dos modelos mais comumente usados na análise de fluxo de águas rasas em rios ou áreas costeiras [8]. Sua forma conservativa unidimensional, para um canal retangular sem resistência ao escoamento [2], é

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right) = g h S_{0_x}, \quad (2)$$

em que $h(x, t)$ é a profundidade do fluxo (m); $u(x, t)$ a velocidade média do escoamento (m/s) na direção x ; x é a distância ao longo do canal (m); t é o tempo (s); g é a aceleração da gravidade (m/s²) e S_{0_x} é a inclinação do fundo do canal.

Molls e Molls (1998) [6] e Zhang *et al.* (2012) [9] foram os primeiros a desenvolverem esquemas numéricos pela formulação do método CE/SE (*Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element*) para as equações de águas rasas unidimensionais e bidimensionais, simulando os problemas de ruptura de barragem e ressalto hidráulico.

Para aplicar o método CE/SE, as formas conservativas (1) e (2) são reescritas, respectivamente, como

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial p_k}{\partial x} = f_k, \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

em que

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2) = (h, uh), \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2) = (q_2, q_2^2/q_1 + gq_1^2/2), \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = (f_1, f_2) = (0, gq_1 S_{0_x}). \quad (6)$$

No método CE/SE a variável fluxo \mathbf{Q} e o gradiente espacial \mathbf{Q}_x são considerados como incógnitas e são resolvidos simultaneamente [10], de modo que o esquema resultante (conforme seção II a seguir) é dependente de $(p_2)_{i\pm 1/2}^{j-1/2}$ e $[(p_2)_t]_{i\pm 1/2}^{j-1/2}$, que não podem ser avaliados quando a profundidade for nula, isto é, $(q_1)_{i\pm 1/2}^{j-1/2} = 0$. Em outras palavras, os esquemas resultantes não podem ser utilizados em situações em que a profundidade atinge valores nulos. Este trabalho tem por objetivo apresentar uma solução para essa questão.

Para cumprir este objetivo, o presente artigo será estruturado da seguinte maneira: na seção II, resume-se os fundamentos do método CE/SE; a abordagem proposta é desenvolvida na seção III; extensivos experimentos numéricos são realizados junto a seção IV; o trabalho é finalizado com as conclusões e considerações finais apresentados na seção V.

II. FORMULAÇÃO DO MÉTODO CE/SE

Pelo teorema da divergência de Gauss em \mathbb{R}^2 , tem-se que as equações do sistema em (3) representam as formas diferenciais das leis integrais de conservação

$$\oint_{S(V)} \mathbf{Q} \cdot ds = \int_V f_1 dV \quad \text{e} \quad \oint_{S(V)} \mathbf{P} \cdot ds = \int_V f_2 dV, \quad (7)$$

em que $S(V)$ representa o contorno de uma região espaço-tempo $V \subset \mathbb{R}^2$.

Para cada ponto (i, j) da malha associa-se um elemento de solução, denotado por $SE(i, j)$ e definido como sendo o interior de uma região espaço-tempo limitada por uma curva pontilhada, conforme figura 1a. Note-se que o elemento de solução é basicamente uma vizinhança dos segmentos de reta horizontal e vertical centrados em (i, j) .

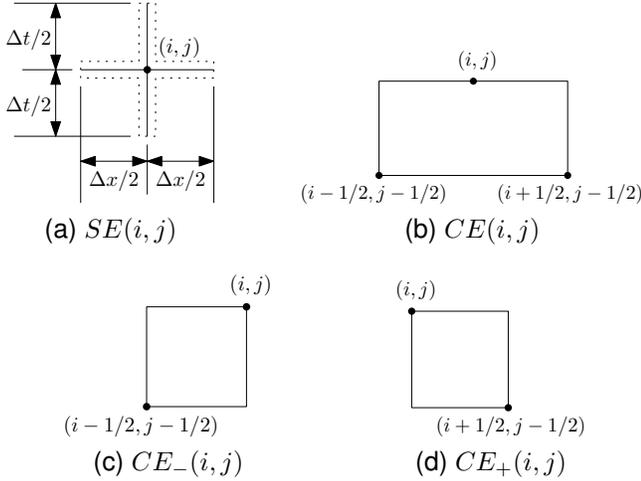


Figura 1. Definição dos elementos de solução, válidos sobre as aproximações em (8)-(10) e elementos de conservação utilizados nas formas integrais de conservação em (12) e (13).

Para todo $(x, t) \in SE(i, j)$, $q_k(x, t)$ e $p_k(x, t)$ são aproximados por polinômios de Taylor de primeira ordem dados por

$$q_k^*(x, t; i, j) = (q_k)_i^j + [(q_k)_x]_i^j (x - x_i) + [(q_k)_t]_i^j (t - t_j), \quad k = 1, 2 \quad (8)$$

e

$$p_k^*(x, t; i, j) = (p_k)_i^j + [(p_k)_x]_i^j (x - x_i) + [(p_k)_t]_i^j (t - t_j), \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Por outro lado, como o termo fonte possui derivada de uma ordem a menos em relação as funções p_k e q_k , aproxima-se o mesmo por funções constantes, isto é

$$f_k^*(x, t; i, j) = (f_k)_i^j, \quad \text{para todo } i, j \text{ e } k = 1, 2. \quad (10)$$

Nestes termos, os campos vetoriais em (4) e (5) são aproximados por $\mathbf{Q}^* = (q_1^*, q_2^*)$ e $\mathbf{P}^* = (p_1^*, p_2^*)$, de modo que as correspondentes leis integrais em (7) se tornam

$$\oint_{S(V)} \mathbf{Q}^* \cdot ds = \int_V f_1^* dV \quad \text{e} \quad \oint_{S(V)} \mathbf{P}^* \cdot ds = \int_V f_2^* dV. \quad (11)$$

As integrais anteriores são avaliadas sobre os volumes de controle, aqui denotados por elementos de conservação CE, conforme Fig. 1c e Fig. 1d, isto é,

$$\oint_{S(CE_{\pm}(i, j))} \mathbf{Q}^* \cdot ds = \int_{CE_{\pm}(i, j)} f_1^* dV \quad (12)$$

e

$$\oint_{S(CE_{\pm}(i, j))} \mathbf{P}^* \cdot ds = \int_{CE_{\pm}(i, j)} f_2^* dV. \quad (13)$$

A. Avaliação de q_k

Substituindo as equações (9)-(10) em (12) e (13), após as simplificações, obtém-se o esquema

$$(q_k)_i^j = \frac{1}{2} \left[(\tilde{q}_k)_{i-1/2}^{j-1/2} + (\hat{q}_k)_{i+1/2}^{j-1/2} \right], \quad k = 1, 2, \quad (14)$$

em que

$$\tilde{q}_k = q_k + \frac{\Delta x}{4} (q_k)_x + \frac{\Delta t}{\Delta x} p_k + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (p_k)_t + \frac{\Delta t}{2} f_k, \quad (15)$$

$$\hat{q}_k = q_k - \frac{\Delta x}{4} (q_k)_x - \frac{\Delta t}{\Delta x} p_k - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (p_k)_t + \frac{\Delta t}{2} f_k. \quad (16)$$

B. Avaliação de $(q_k)_x$

Para evitar oscilações causadas por descontinuidades, calcula-se $[(q_k)_x]_i^j$ por meio de uma média ponderada entre as diferenças regressivas e progressivas [9]

$$[(q_k)_x]_i^j = W \{ [(q_k)_x]_i^+, [(q_k)_x]_i^-, \alpha \}, \quad k = 1, 2, \quad (17)$$

onde a função W é definida como [1]

$$W(x, y, \alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = y = 0 \\ \frac{|x|^\alpha y + |y|^\alpha x}{|x|^\alpha + |y|^\alpha} & , \text{ se } |x| + |y| > 0 \end{cases}, \quad (18)$$

$$[(q_k)_x]_i^{\pm j} = \pm \frac{2}{\Delta x} \left\{ [(q_k)'_x]_{i\pm 1/2}^j - [(q_k)_x]_i^j \right\}, \quad k = 1, 2 \quad (19)$$

e

$$[(q_k)'_x]_{i\pm 1/2}^j = \left\{ q_k + \frac{\Delta t}{2} (q_k)_t \right\}_{i\pm 1/2}^{j-1/2}, \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

A média ponderada das derivadas de primeira ordem é controlada pelo parâmetro α . Quando $\alpha = 0$, W é equivalente a diferenças finitas centrais e é adequado para regiões suaves, enquanto que α igual a um ou dois são usados em regiões com descontinuidades [9]. Neste trabalho, utiliza-se $\alpha = 1$.

C. Erro de truncamento, consistência e estabilidade

Na hipótese de que as funções q_k sejam suaves, isto é, $q_k \in C^\infty(V)$, $k = 1, 2$, então $p_k \in C^\infty(V)$. Neste caso, as funções q_k, p_k , $k = 1, 2$ podem ser expandidas em série de Taylor na vizinhança do ponto $(x_i, t_{j-1/2}) \in V \subset \mathbb{R}^2$. O mesmo é possível para suas derivadas utilizadas no esquema (14), isto é, $(q_k)_x, (p_k)_t$. Substituindo estas expressões em série de Taylor nas equações (3) e (14) e subtraindo-as, logo em seguida, após as simplificações será obtido

$$T^{qk}(x_i, t_{j-1/2}) = \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

A equação (21) representa o erro de truncamento decorrente ao aproximar-se (3) por (14), supondo que as funções soluções sejam suaves. O esquema é, neste sentido, consistente visto que $T^{qk} \rightarrow 0$ quando $\Delta, \Delta x \rightarrow 0$. A condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|u| + \sqrt{gh}), \quad (22)$$

em que o número de Courant satisfaz $0 < CFL \leq 1$ [9].

III. UTILIZANDO A FORMA REDUZIDA DA EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOMENTO LINEAR

Observa-se das equações (14)-(16) que $p_2 = q_2^2/q_1 + gq_1^2/2$ é utilizado:

- No cálculo de $(q_1)_i^j$, para se avaliar $(p_1)_t = (q_2)_t = -(p_2)_x + f_2$, pela equação (3);
- No cálculo de $(q_2)_i^j$, a fim de se obter $(p_2)_t$.

Assim, o presente esquema é inviável quando a profundidade $h = p_1$ é nula, uma vez que p_2 não tem sentido nestes casos.

Para sanar este problema, será utilizado a forma reduzida da equação da quantidade de momento linear (2), isto é

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + gh \right) = gS_{0x}, \quad (23)$$

para se calcular a velocidade u , de modo que se possa obter o valor da variável p_2 , agora reescrita como:

$$p_2 = uq_2 + gq_1^2/2. \quad (24)$$

Observe que a forma integral de (23) é

$$\oint_{S(V)} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{s} = \int_V f_3 dV, \quad (25)$$

em que

$$\mathbf{R} = (r_2, r_1) = (u^2/2 + gh, u) = (r_1^2/2 + gq_1, r_1) \quad (26)$$

e $f_3 = gS_{0x}$. Pode-se aproximar r_1 e f_3 por polinômios de Taylor como (8) e (10), respectivamente, de modo a obter, a partir dos mesmos argumentos apresentados na seção II, um esquema equivalente àquele em (14)-(16), qual seja:

$$(r_1)_i^j = \frac{1}{2} \left[(\tilde{r}_1)_{i-1/2}^{j-1/2} + (\hat{r}_1)_{i+1/2}^{j-1/2} \right], \quad (27)$$

em que

$$\tilde{r}_1 = r_1 + \frac{\Delta x}{4} (r_1)_x + \frac{\Delta t}{\Delta x} r_2 + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (r_2)_t + \frac{\Delta t}{2} f_3, \quad (28)$$

$$\hat{r}_1 = r_1 - \frac{\Delta x}{4} (r_1)_x - \frac{\Delta t}{\Delta x} r_2 - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (r_2)_t + \frac{\Delta t}{2} f_2. \quad (29)$$

No que diz respeito a obtenção da variável de marcha $[(r_1)_x]_i^j$, utiliza-se a mesma estratégia apresentada na seção II-B.

IV. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

São realizados alguns experimentos numéricos a fim de se validar as mudanças desenvolvidas. As soluções analíticas dos problemas tratados nesta seção podem ser encontradas em [3], [4] ou [7].

A. Ordem de convergência experimental

Esta seção é destinada ao estudo de convergência do presente esquema. Considera-se, para tal fim, um fluxo em regime transcrito sem formação de choque, em um canal com topografia dada por

$$z(x) = \begin{cases} 0,2 - 0,05(x - 10)^2, & \text{se } 8 < x < 12, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (30)$$

com condições iniciais: $(h + z)(x, 0) = 0,66$ m, $q(x, 0) = 0$ m²/s e condições de contorno: $q(0, t) = 1,53$ m²/s e $h(L, t) = 0,66$ m.

O número de Courant é fixado em $CFL = 0,96$ de tal modo que o incremento Δt se torna dependente de Δx por meio da relação (22) e, refinando-se neste sentido, o esquema se torna de ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, conforme equação (21). A Tab. I dispõe os erros ε_h e ε_q computados na norma L^1 , bem como as estimativas da ordem de convergência (ver [5, p. 150]) que confirmam esta observação. A Fig. 2 é construída a partir da referida tabela e contém, ainda, uma reta com coeficiente angular 2 fazendo referência à ordem 2.

Tabela I
ERROS EM NORMA L^1 E ESTIMATIVAS DA ORDEM DE CONVERGÊNCIA, AVALIADOS A PARTIR DO PROBLEMA DE FLUXO TRANSCRITO, SEM FORMAÇÃO DE CHOQUE, FIXADOS $L = 25$ M E $CFL = 0,96$.

Δx	ε_h	Ordem	ε_q	Ordem
$L/25$	0,2173		1,2419	
$L/50$	0,0540	2,0100	0,3089	2,0073
$L/100$	0,0138	1,9684	0,0807	1,9365
$L/200$	0,0038	1,8408	0,0227	1,8300
$L/400$	0,0012	1,7311	0,0067	1,7563
$L/800$	0,0004	1,5577	0,0022	1,6236

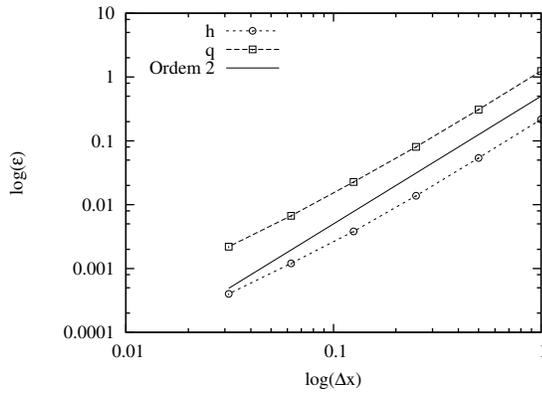


Figura 2. Gráfico em escala log-log dos incrementos espaciais versus erro numérico em norma L^1 , bem como curva de referência indicando ordem 2.

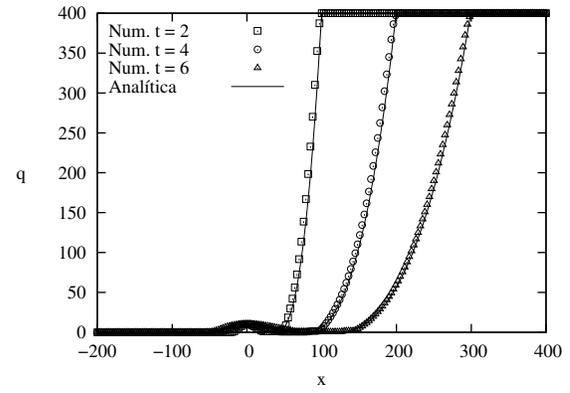


Figura 4. Soluções analítica e numérica da descarga q para o problema de Riemann em diferentes tempos com 200 células uniformes.

B. Problema de Riemann

Seja o problema de Riemann definido num domínio plano e sem fricção com condições iniciais

$$(h, u)(x, 0) = \begin{cases} (h_l, u_l), & \text{se } x \leq 0, \\ (h_r, u_r), & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (31)$$

Quando a $h_l > 0$, $h_r > 0$ e $u_r - u_l \geq 2\sqrt{g}(\sqrt{h_r} + \sqrt{h_l})$ a solução possui uma zona intermediária seca [4].

Fixamos os parâmetros acima em $h_l = 5$ m, $h_r = 10$ m, $u_l = 0$ m/s, $u_r = 40$ m/s para $x \in [-200, 400]$. Fig. 3 e Fig. 4 apresentam os resultados numéricos da profundidade e descarga, respectivamente, simulados em diferentes tempos. Utilizou-se nestas simulações uma malha com $n + 1 = 201$ pontos e o número de Courant fixo em $CFL = 0,98$.

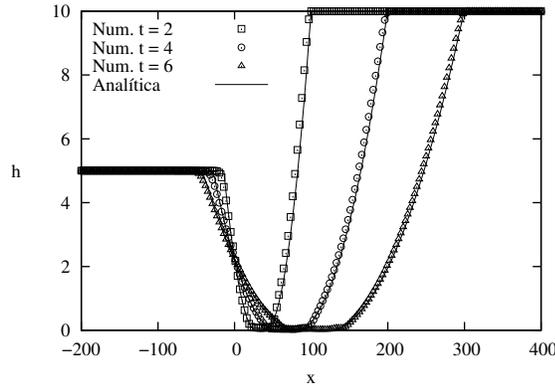


Figura 3. Soluções analítica e numérica da profundidade h para o problema de Riemann em diferentes tempos com 200 células uniformes.

C. Ruptura de barragem sobre um domínio seco

Considera-se nesta seção um segundo problema de Riemann conhecido como problema de ruptura de barragem sobre um domínio plano e sem fricção, com condições iniciais descontínuas

$$(h, u)(x, 0) = \begin{cases} (h_l, 0), & \text{se } 0 \leq x \leq x_0, \\ (0, 0), & \text{se } x_0 < x \leq L. \end{cases} \quad (32)$$

Consiste na simulação do fenômeno que ocorre após a remoção instantânea de uma parede vertical que separa a água no meio de um canal. Os parâmetros utilizados nas simulações correspondem a $h_l = 10$ m, $x_0 = 1000$ m e $L = 2000$ m. Foram computados sobre uma malha com $n + 1 = 201$ pontos e $CFL = 0,96$ (veja Fig. 5 e Fig. 6).

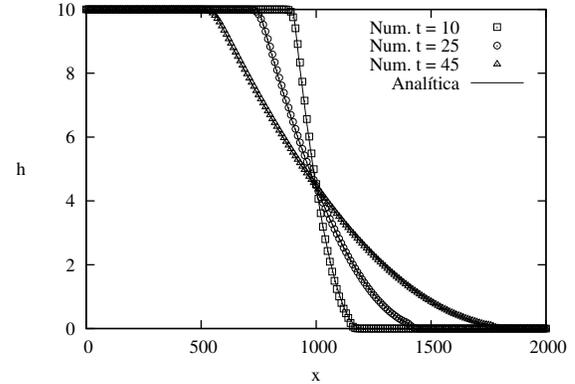


Figura 5. Soluções analítica e numérica da profundidade h para o problema de ruptura de barragem em domínio seco, em diferentes tempos e com 200 células uniformes.

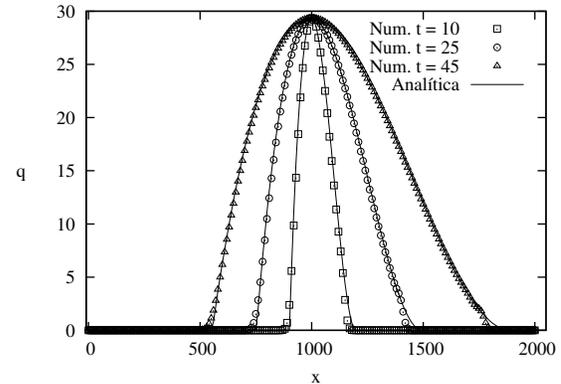


Figura 6. Soluções analítica e numérica da descarga q para o problema de ruptura de barragem em domínio seco, em diferentes tempos e com 200 células uniformes.

D. Oscilações de uma superfície plana em uma bacia parabólica

Este problema, assim como o anterior (seção IV-C), simula a habilidade do método em captar a transição entre os perímetros seco e molhado. Neste caso, os contornos movimentam-se periodicamente ao longo do tempo. A topografia é uma bacia parabólica dada por

$$z(x) = h_0 \left[\frac{1}{a^2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 - 1 \right], \quad (33)$$

e as condições iniciais são

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0 \left[1 - \left(\frac{2x-L+1}{2a} \right)^2 \right], & \text{se } |x + (1-L)/2| \leq a, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (34)$$

e $u(x, t) = 0$ m/s. Este problema tem solução periódica com período $T = 2\pi/\omega$ e $\omega = \sqrt{2gh_0}/a$. Utilizou-se, nas simulações a seguir apresentadas, os seguintes parâmetros: $a = 1$ m, $h_0 = 0,5$ m e $L = 4$ m.

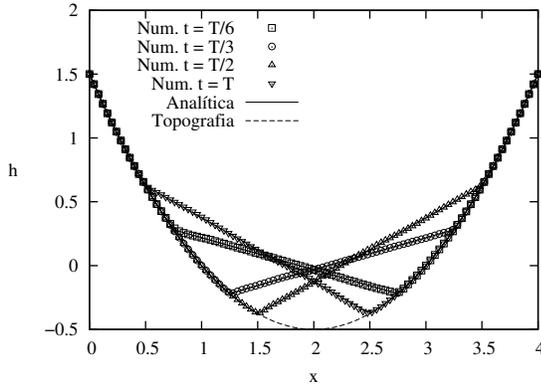


Figura 7. Soluções analítica e numérica da profundidade h para o problema de oscilações periódicas em diferentes tempos e com 100 células uniformes.

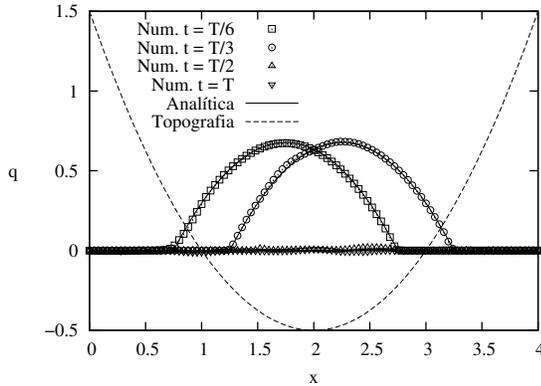


Figura 8. Soluções analítica e numérica da descarga q para o problema de oscilações periódicas em diferentes tempos e com 100 células uniformes.

Nas Fig. 7 e Fig. 8 encontram-se os gráficos das funções de profundidade e de descarga, respectivamente, em diferentes

tempos calculados com $n+1 = 101$ pontos de malha e número de Courant fixo em $CFL = 0,98$.

V. CONCLUSÃO

O presente artigo teve por objetivo contribuir com a teoria do método CE/SE no que tange às soluções numéricas das equações de Saint Venant unidimensionais. O ponto de partida é a observação de que quando a variável profundidade é nula o esquema não é aplicável, uma vez que as variáveis de marcha h_i^j , $(h_x)_i^j$, q_i^j e $(q_x)_i^j$ dependem do inverso da profundidade no tempo $j - 1/2$. A solução apresentada para esta questão é a dedução de equações auxiliares utilizando a forma reduzida da equação da quantidade de momento linear. Experimentos numéricos foram realizados com o objetivo de validar a mudança proposta. Os resultados obtidos mostram que as soluções numéricas são coerentes com as soluções analíticas dos problemas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE - UFPR) e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, Campus Araquari pelo apoio à pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] S.-C. Chang, X.-Y. Wang, and W.-M. To. Application of the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method to One-Dimensional Convection-Diffusion Problems. *Journal of Computational Physics*, 165(1):189–215, 2000.
- [2] M. H. Chaudhry. *Open-Channel Flow - Second Edition*. Springer Science, 2008.
- [3] O. Delestre, C. Lucas, P.-A. Ksinant, F. Darboux, C. Laguerre, T.-N.-T. Vo, F. James, and S. Cordier. Swashes: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(3):269–300, 2013.
- [4] G. Faccanoni and A. Mangeney. Exact solution for granular flows. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(10):1408–1433, 2013.
- [5] R. J. Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, eBook (netLibrary), 2004.
- [6] T. Molls and F. Molls. Space-time conservation method applied to saint venant equations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(5):501–508, 1998.
- [7] J. J. Stoker. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers, New York, 1957.
- [8] S. Yang, A. Kurganov, and Y. Liu. Well-balanced central schemes on overlapping cells with constant subtraction techniques for the saint-venant shallow water system. *Journal of Scientific Computing*, 63(3):678–698, 2015.
- [9] Y. Zhang, Z. Zeng, and J. Chen. The improved space-time conservation element and solution element scheme for two-dimensional dam-break flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68(5):605–624, 2012.
- [10] Z.-C. Zhang, S. Yu, S.-C. Chang, A. Himansu, and P. Jorgenson. A modified space-time conservation element and solution element method for euler and navier-stokes equations. In *14th Computational Fluid Dynamics Conference, Fluid Dynamics and Co-located Conferences*, Norfolk, VA, U.S.A., 1999.