

Análise Não Linear da Vibração de Torres Offshore Multi-Articuladas

Gabriel Jung, Elvidio Gavassoni

Departamento de Construção Civil

Universidade Federal do Paraná

Curitiba, Brasil

gabriel.jung@ufpr.br, gavassoni@ufpr.br

Torres articuladas são estruturas offshore complacentes economicamente atrativas na indústria de óleo e gás, e são geralmente modeladas por barras rígidas unidas por juntas universais. Quando submetidas aos carregamentos de alto-mar, essas plataformas podem exibir grandes deslocamentos, exigindo uma análise não linear. Neste trabalho, a técnica dos modos normais não lineares é utilizada para a obtenção de modelos de ordem reduzida a fim de estudar a vibração de uma torre triarticulada. Uma análise utilizando dados numéricos é realizada, e os modelos obtidos apresentam bons resultados quando comparados à solução numérica do problema.

Palavras-chave: Estruturas offshore, vibração não linear, modos normais não lineares.

I. INTRODUÇÃO

Torres articuladas são uma classe de estruturas complacentes muito comumente utilizadas na indústria de óleo e gás, como uma alternativa de projeto atraente a partir de certas profundidades de exploração oceânica, uma vez que são mais leves que plataformas fixas [1]. Enquanto estruturas offshore fixas são dimensionadas para resistir às ações do ambiente sem deslocamentos consideráveis, estruturas complacentes, possuindo frequências naturais de vibração de baixa magnitude, são projetadas para permitir grandes deslocamentos [2]. Devido à natureza dos carregamentos aos quais a torre é submetida e as considerações de projeto, uma análise dinâmica não linear deve ser efetuada para uma correta abordagem do problema. Além disso, o grande número de graus de liberdade necessários para descrever o problema de maneira satisfatória uma análise paramétrica da estrutura fica limitada com métodos usuais de dimensionamento, como o Método dos Elementos Finitos [3]. Uma alternativa para contornar estas dificuldades é a utilização de modelos de ordem reduzida do problema.

Os modos normais não lineares (MNN) são uma ferramenta utilizada para obter de maneira precisa modelos de ordem reduzida na análise não linear de sistemas oscilatórios [4]. Pela captura da essência não linear do problema e por manter explicitamente a dependência da dinâmica estrutural por parâmetros físicos, podem-se obter modelos analíticos de ordem reduzida que facilitam uma análise paramétrica. O modelo reduzido leva a um melhor entendimento do comportamento não linear da estrutura. Os MNN surgiram

como uma extensão da teoria linear. No entanto, eles não exibem algumas das características fundamentais da análise modal linear como o princípio da superposição dos efeitos e singularidade de soluções. Neste trabalho, a definição baseada nas variedades invariantes dos MNNs é utilizada para estudar a vibração não linear forçada de uma torre offshore do tipo triarticulada [5]-[6]. As equações de movimento são obtidas utilizando a equação de Euler-Lagrange. O modelo de ordem reduzida é inicialmente utilizado para o estudo do comportamento não linear da torre em vibração livre. A análise da vibração livre é utilizada para ganhar entendimento para a resposta da torre para o caso de vibração forçada sob a ação de uma força harmônica externa. A excitação harmônica dos osciladores de um grau de liberdade obtidos com a análise pelos MNNs é estudada, mostrando informações importantes acerca da resposta da torre às excitações externas dinâmicas, como a ação de correntes, ventos e ondas.

II. MODELO ESTRUTURAL

O modelo estrutural é baseado em membros rígidos unidos por juntas universais [7]. Forças restauradoras são modeladas como molas rotacionais de rigidez k_i . As cargas da plataforma e instalações são modeladas como uma massa concentrada m no topo da torre. Cada membro estrutural do modelo possui comprimento l_i , seção transversal de área A_i , peso específico de material γ e é considerado um membro rígido.

O modelo resulta em um problema de três graus de liberdade, os ângulos de rotação de cada articulação - θ_i , como mostrado na Fig. 1. As equações de movimento são obtidas pela aplicação de técnicas variacionais, resultando em três equações diferenciais acopladas em termos das coordenadas generalizadas θ_i . As equações de movimento resultantes são transformadas para a forma de equações de Cauchy, utilizando a regra de Cramer para realizar o desacoplamento dos termos de inércia. As equações resultantes são expandidas como uma série polinomial retendo os termos não lineares de até terceira ordem.

A energia potencial total, Π , é expressa por:

$$\Pi = U + V \quad (1)$$

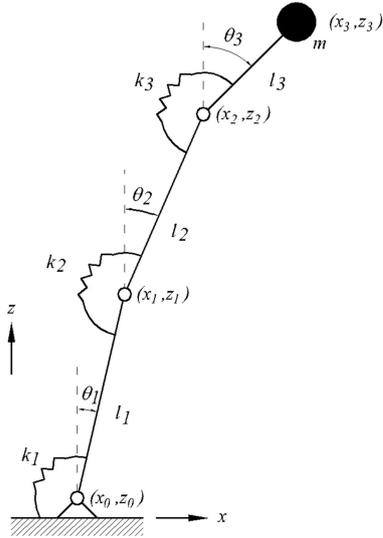


Fig. 1. Modelo estrutural para torre offshore tri-articulada.

sendo U a energia interna de formação elástica, dada por (2), e V o potencial das cargas externas atuantes sobre a estrutura. A energia interna de deformação resultante da deformação das molas rotacionais é expressa por:

$$U = \sum_{i=1}^3 [k_i(\theta_i - \theta_{i-1})], \theta_0 = 0 \quad (2)$$

$$V = -W \quad (3)$$

O potencial das cargas externas é igual ao negativo do trabalho realizado por tais forças, como mostrado em (3). As cargas externas consideradas na análise elástica são o peso da plataforma e das colunas da torre, o empuxo e a força de corrente, cujos trabalhos compõem o escalar total:

$$W = W_{plataforma} + W_{colunas} + W_{empuxo} \quad (4)$$

O trabalho do peso da plataforma é dado por:

$$W_{plataforma} = mg \sum_{i=1}^3 [l_i(1 - \cos \theta_i)] \quad (5)$$

O trabalho associado ao peso das colunas é dado por:

$$W_{colunas} = g \sum_{i=1}^3 \rho_i l_i A_i \left[\sum_{j=i}^3 l_j (1 - \cos \theta_j) + \frac{l_i(1 - \cos \theta_i)}{2} \right] \quad (6)$$

O trabalho realizado pelas forças de empuxo atuando sobre a estrutura submersa é dado por:

$$W_{empuxo} = -g \sum_{i=1}^3 \rho_w l_i A_i \left[\sum_{j=i}^3 l_j (1 - \cos \theta_j) + \frac{l_i(1 - \cos \theta_i)}{2} \right] \quad (7)$$

A energia cinética total da estrutura, T , depende somente dos deslocamentos dinâmicos da mesma e é composta de três parcelas: devido à massa da plataforma, $T_{plataforma}$, devido à massa da coluna, $T_{colunas}$ e devido à massa adicionada, T_{adic} , pelo fato de a estrutura vibrar dentro d'água, que são respectivamente iguais à:

$$T_{plataforma} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^3 l_i \cos \theta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 -l_i \sin \theta_i \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$T_{colunas} = \frac{1}{2} \rho_i \sum_{i=1}^3 l_i A_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k \cos \theta_k + \frac{1}{2} l_i \cos \theta_i \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_i \left[\sum_{i=1}^3 l_i A_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} -l_k \sin \theta_k - \frac{1}{2} l_i \sin \theta_i \right)^2 + \frac{A_i l_i^3}{12} (\dot{\theta}_i)^2 \right] \quad (9)$$

$$T_{adic} = \rho_w \sum_{i=1}^3 \frac{\pi d_0^2}{8} C_{A,i} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{l_i \sin \theta_i \dot{\theta}_i}{2} - l_k \sin \theta_k \dot{\theta}_i \right) \cos \theta_i \dot{\theta}_i + \rho_w \sum_{i=1}^3 \frac{\pi d_0^2}{8} C_{A,i} \left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k \cos \theta_k \dot{\theta}_i + \frac{l_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i}{2} \right) \cos \theta_i \dot{\theta}_i \quad (10)$$

O Lagrangeano obtido para o sistema considerado é:

$$Lg = T - \Pi \quad (11)$$

Pela aplicação de técnicas variacionais a (11), a dinâmica global do sistema é governada por três equações de movimento obtidas por:

$$\frac{\partial Lg}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Lg}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = 0, i = 1..3 \quad (12)$$

III. MODOS NORMAIS NÃO LINEARES

A análise modal não linear realizada neste trabalho utiliza a aproximação baseada na teoria das variedades invariantes, proposta por Shaw e Pierre [8]. Essas podem ser interpretadas como os subespaços de solução que governam o comportamento dos graus de liberdade do sistema. Um modo normal não linear, definido de acordo com essa teoria, corresponde a um movimento limitado pela superfície descrita pelo espaço fase do sistema (subespaço das relações deslocamento-velocidade de um dado grau de liberdade). Esta superfície é tangente, na posição de equilíbrio, ao autoespaço formado pelos modos lineares de vibração obtidos pela linearização do problema [9]. O movimento correspondente a um modo normal não linear pode ser parametrizado pelo deslocamento e velocidade de um grau de liberdade do sistema, chamado de par mestre. Todos os demais graus de liberdade, chamados pares escravos, são relacionados ao par mestre através de equações de restrição. As equações de

restrição determinam a geometria da superfície gerada pelo espaço fase do sistema para cada modo, que compõe a solução do sistema. Caso essa função de restrição seja dada por uma constante, a geometria da superfície é caracterizada por um plano no espaço fase do sistema, e o modo correspondente é chamado um modo similar, por ser análogo a um modo normal linear. Isso quer dizer, a relação entre deslocamento e velocidade de um dado grau de liberdade é constante durante o movimento modal. Caso a função de restrição não seja constante, o modo é chamado não similar e a superfície modal correspondente é curvilínea [10], caracterizando o modo não linear.

Neste trabalho, o método assintótico é utilizado para obtenção dos modos não lineares. Nesse método, as equações não lineares de movimento resultantes para o sistema devem ser reescritas na forma de equações de primeira ordem de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{cases} = \begin{cases} y \\ f \end{cases} \quad (13)$$

sendo θ_i as coordenadas (rotações) e y_i as correspondentes velocidades. O vetor de forças generalizadas $\{f\}$ consiste de momentos não lineares funções de $\{\theta\}$ e $\{y\}$. O ponto sobre as variáveis denota a primeira derivada temporal. Como o sistema de equações de movimento resultantes da aplicação de (12) não está na forma de Cauchy, isto é, possui acoplamento nos termos inerciais, a regra de Cramer é aplicada para realizar o desacoplamento. Então, um par deslocamento-velocidade pode ser escolhido arbitrariamente como par mestre. Neste trabalho, o par deslocamento-velocidade referente ao primeiro grau de liberdade é escolhido como par mestre, θ_1 e y_1 :

$$\begin{aligned} u &= \theta_1 \\ v &= y_1 \end{aligned} \quad (14)$$

Os demais pares escravos são representados em termos de u e v pelas funções de restrição P_i e Q_i :

$$\begin{aligned} \theta_i &= P_i(u, v), i = 1..3 \\ y_i &= Q_i(u, v), i = 1..3 \end{aligned} \quad (15)$$

onde particularmente, $P_1(u, v) = u$ e $Q_1(u, v) = v$. O próximo passo é eliminar a dependência explícita do tempo das equações. Isto é feito derivando as funções de restrição com relação à variável temporal. Pela substituição das derivadas temporais resultantes da utilização da regra da cadeia nas equações de movimento, (13), e pelo uso das definições de pares mestres e escravos em (14) e (15), o seguinte sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem é obtido:

$$Q_i(u, v) = \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)), i = 1..3 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f_i(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) &= \\ = \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); \dots & (17) \\ \dots, v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)), i = 1..3 \end{aligned}$$

A determinação das equações de restrição leva a uma redução da ordem do problema, tendo em vista que sua substituição nas equações de movimento originais leva à obtenção de um oscilador modal de um grau de liberdade. Exceto por casos muito particulares, não existe solução exata fechada para as soluções parciais que governam a geometria dos subespaços (variedades invariantes) expressos em (16) e (17). A solução pode ser obtida de maneira aproximada utilizando expansões em séries de Taylor sobre uma configuração de equilíbrio, tomada nesta análise como $\{\theta_0\} = 0$. Desta maneira, as funções de restrição são reescritas, mantendo até os termos de linearidade cúbica:

$$\begin{aligned} P_i(u, v) &= a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + \\ &+ a_{6i}u^3 + a_{7i}u^2v + a_{8i}uv^2 + a_{9i}v^3, i = 1..3 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q_i(u, v) &= b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + \\ &+ b_{6i}u^3 + b_{7i}u^2v + b_{8i}uv^2 + b_{9i}v^3, i = 1..3 \end{aligned} \quad (19)$$

A substituição de (16) e (17) no sistema de equações de movimento do sistema dado por (13) resulta num sistema algébrico de equações função apenas dos coeficientes a_{ij} e b_{ij} , que podem ser determinados de maneira sequencial, dos conjuntos de menor para maior ordem de não linearidade. A solução obtida é válida localmente, e o domínio de validade não é conhecido a priori, sendo determinado apenas pela comparação com soluções numéricas do problema original.

A obtenção dos modos normais não lineares de um sistema pode ser sistematizada em suas etapas principais, para um melhor entendimento dos procedimentos adotados [11]:

- 1) Escolha do par de coordenadas mestre u e v ;
- 2) Expressar as coordenadas escravas em função das coordenadas mestre, pelas suas funções de restrição $P(u, v)$ e $Q(u, v)$;
- 3) Utilizar a técnica das variedades invariantes para eliminar a dependência explícita do tempo;
- 4) Encontrar uma solução local aproximada utilizando expansões polinomiais para as funções de restrição;
- 5) Substituir as expansões nas equações diferenciais parciais que governam a geometria das variedades invariantes;
- 6) Resolver as expansões polinomiais de $P(u, v)$ e $Q(u, v)$ pelo sistema de equações algébricas resultante;
- 7) Substituir as coordenadas escravas pelas suas expansões polinomiais, as eliminando do sistema, isto é, das equações de movimento.

Por meio destes passos obtêm-se os osciladores não lineares de um grau de liberdade relativos aos modos não lineares de vibração do sistema, tantos quantos forem os graus

de liberdade do problema, em função das coordenadas modais u e v .

IV. ANÁLISE MODAL LINEAR

O exemplo numérico desenvolvido neste trabalho utiliza parâmetros de experimentos físicos, sumarizados na Tabela I.

As equações de movimento do sistema são obtidas com a utilização dos dados apresentados na Tabela I na aplicação da metodologia apresentada na seção 2 deste trabalho em (12). A linearização do sistema de equações de movimento obtido resulta no sistema linear desacoplado:

$$\begin{aligned} 60,214\theta_1 - 60,803\theta_2 + 21,095\theta_3 &= 0 \\ 80,745\theta_1 - 121,070\theta_2 + 62,065\theta_3 &= 0 \\ 20,010\theta_1 - 77,521\theta_2 + 56,539\theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

A solução do problema de autovalor para o sistema em (20) resulta nas frequências e modos normais lineares de vibração da estrutura, e compõe a análise modal linear do problema estudado. As três frequências naturais de vibração para o sistema resultam $\omega_{01} = 0,426$ rad/s, $\omega_{02} = 6,047$ rad/s e $\omega_{03} = 14,180$ rad/s. Sob a finalidade de ganhar um melhor entendimento do modelo, calculam-se as frequências naturais de vibração para o modelo desconsiderando a atuação do empuxo e o efeito da massa adicionada, resultando nas seguintes frequências naturais de vibração: $\omega_{01} = 0,617$ rad/s, $\omega_{02} = 9,240$ rad/s e $\omega_{03} = 21,273$ rad/s. Como pode ser observado, a consideração dos efeitos hidrostáticos provoca a diminuição das frequências naturais de vibração da estrutura, isto significa que a rigidez efetiva da estrutura diminui quando esta vibra sob efeito do fluido em seu entorno, devido ao aumento ocasionado dos termos de massa da estrutura. Os autovetores resultantes do sistema dado por (20) representam os modos normais lineares de vibração do sistema, e cujas configurações estão representadas graficamente na Fig. 2.

TABELA I.

Parâmetros numéricos utilizados	
Material	Alumínio
Massa específica das colunas, ρ_i	2770,000 kg/m ³
Massa da plataforma, m	0,236 kg
Rigidez das molas, k_i	38,800 Nm/ra
Comprimento das colunas, l_i	1,270 m
Diâmetro das colunas, d_0	0,025 m
Área da seção transversal, A_i	1,110 10 ⁻⁴ m ²
Massa específica da água, ρ	999,000 kg/m ³
Coefficiente de massa adicionada, C_A	1,000
Coefficiente de inércia, C_M	2,000
Coefficiente de arraste, C_D	1,000

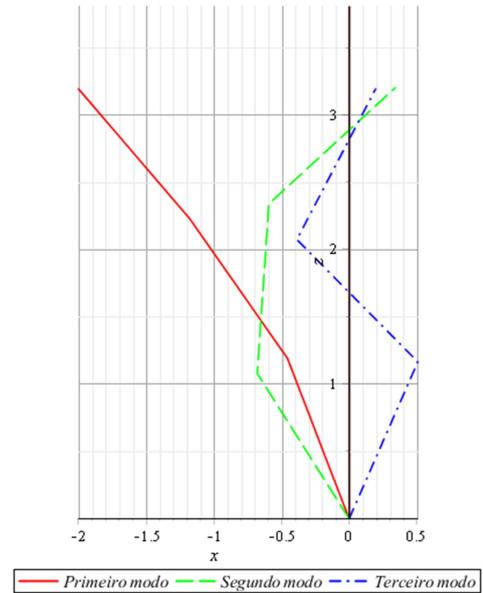


Fig. 2. Modos normais lineares de vibração.

V. ANÁLISE MODAL NÃO LINEAR

Para construção da geometria dos subespaços de solução que governam os modos normais não lineares, é escolhido como par mestre o deslocamento e velocidade referentes ao primeiro grau de liberdade, θ_1 e $\dot{\theta}_1$; as coordenadas e velocidades relativas aos demais graus de liberdade são reescritas então pelas funções de restrição, função do par mestre, respectivamente:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= u, \dot{\theta}_1 = v \\ \theta_2 &= P_2(u, v), \dot{\theta}_2 = Q_2(u, v) \\ \theta_3 &= P_3(u, v), \dot{\theta}_3 = Q_3(u, v) \end{aligned} \quad (21)$$

Pela aplicação da metodologia descrita na seção 3, obtêm-se os três osciladores de um grau de liberdade (tantos osciladores quantos graus de liberdade originais do sistema), escritos em função do deslocamento modal do grau de liberdade escolhido como mestre (θ_1 e $\dot{\theta}_1$):

$$\ddot{u} + 0,182u - 0,260uv^2 + 0,412u^3 = 0 \quad (22)$$

$$\ddot{u} + 36,572u + 6,378uv^2 - 191,968u^3 = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{u} + 201,070u + 32,802uv^2 - 6155,259u^3 = 0 \quad (24)$$

Estes osciladores correspondem aos modos normais não lineares de vibração do sistema. Como na sistematização do processo de composição das equações que geram a geometria dos subespaços de solução (variedades invariantes) os osciladores são determinados de forma aleatória, é necessário

identificar a correspondência entre estes e os modos de vibração do sistema. Isso pode ser realizado pela análise da constante que multiplica o termo linear de deslocamento, u , de cada oscilador, que é igual ao quadrado da frequência natural de vibração do modo correspondente, obtida na análise linear, ou seja, ω_i^2 . Por essa correspondência, pode-se verificar que o oscilador representado por (22) corresponde ao primeiro modo não linear, (23) ao segundo modo e (24) ao terceiro modo de vibração não linear.

Uma característica particular de sistemas não lineares possível de ser capturada pela análise modal não linear, é que a relação entre frequência de vibração e energia no sistema não é linear, ao contrário do que ocorre na análise linear. Isto pode ser verificado pela análise das curvas de ressonância do sistema. Nestas curvas, com o aumento da amplitude de movimento, ou seja, aumento da energia imposta ao sistema, pode ser verificada uma variação da frequência natural de vibração do mesmo.

As curvas de ressonância são obtidas com aplicação do método do balanço harmônico, onde admite-se a seguinte substituição nos osciladores modais representados em (20):

$$u(t) = X_1 \text{sen}(\omega t) \quad (25)$$

Com a introdução do parâmetro adimensional Ω , que representa a relação entre a frequência de vibração do sistema e a frequência natural de vibração relacionada ao modo não linear, ω/ω_i , as relações frequência-amplitude para os três modos de vibração ficam iguais a:

$$-0,426X_1\Omega^2 + 0,729X_1^3 + 0,426X_1 - 0,028X_1^3\Omega^2 \quad (26)$$

$$-6,047X_1\Omega^2 - 23,808X_1^3 + 6,047X_1 + 9,642X_1^3\Omega^2 \quad (27)$$

$$-14,180X_1\Omega^2 - 325,562X_1^3 + 14,180X_1 + 116,282X_1^3\Omega^2 \quad (28)$$

A equação (26) apresenta relação de ganho de rigidez com o aumento da amplitude de vibração do sistema, como mostrado na Fig. 3; (27) e (28) apresentam relações de perda de rigidez com o aumento da amplitude de movimento do sistema, como pode ser visto na Fig. 4. Junto das soluções obtidas dos modelos reduzidos, são mostrados pontos referentes às soluções numéricas das equações originais de movimento do sistema, obtidas por (12), utilizando integração numérica pelo método de Runge-Kutta. Observa-se nas Fig. 3, 4 e 5 a validade da expansão das equações originais em série de Taylor para obtenção dos modelos reduzidos, para os três modos não lineares, a medida que as soluções se afastam da posição de equilíbrio inicial, $\Omega = 1$.

Outra ferramenta utilizada para analisar o comportamento dos modelos reduzidos é o espaço fase do sistema, para cada modo. Cada órbita mostrada nas Fig. 6 a 8 é gerada a partir de uma condição inicial dada para a estrutura, mostrando a relação entre deslocamento, u , e velocidade modais, v , previstas enquanto a estrutura vibra livremente.

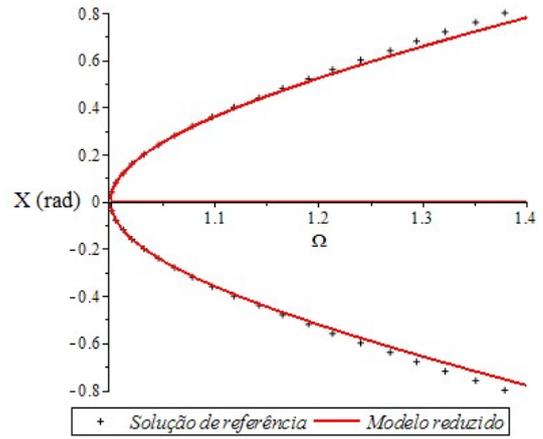


Fig. 3. Curva frequência-amplitude para o primeiro modo não linear de vibração.

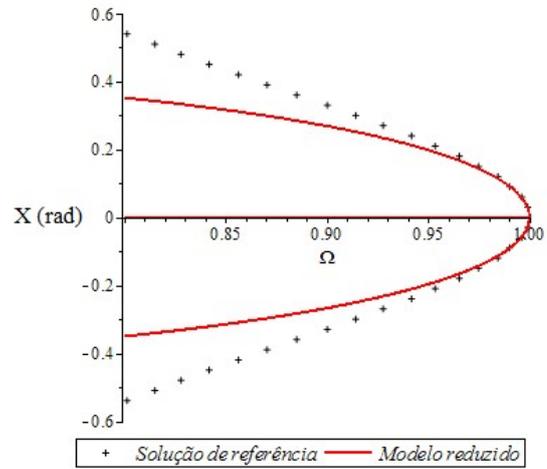


Fig. 4. Curva frequência-amplitude para o segundo modo não linear de vibração.

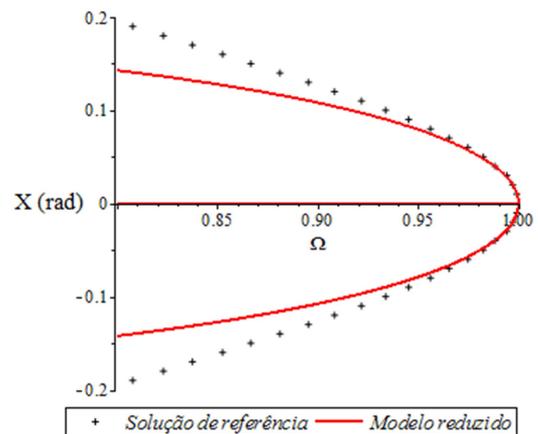


Fig. 5. Curva frequência-amplitude para o terceiro modo não linear de vibração.

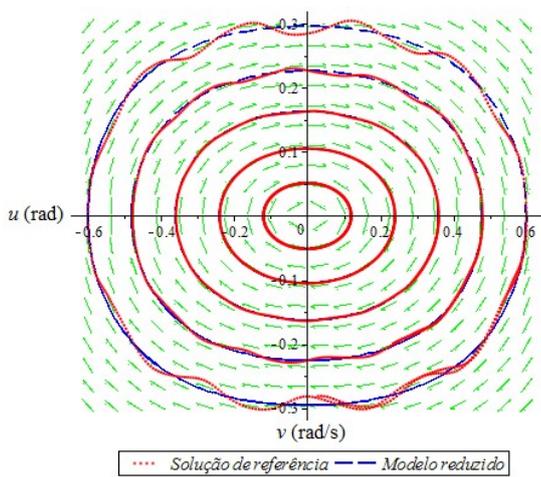


Fig. 6. Espaço fase para o primeiro modo não linear de vibração.

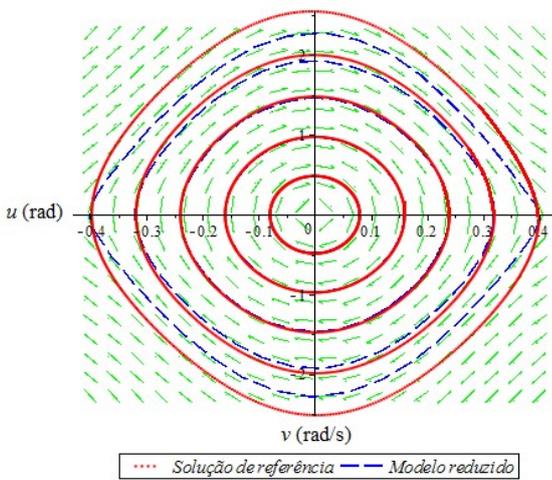


Fig. 7. Espaço fase para o segundo modo não linear de vibração.

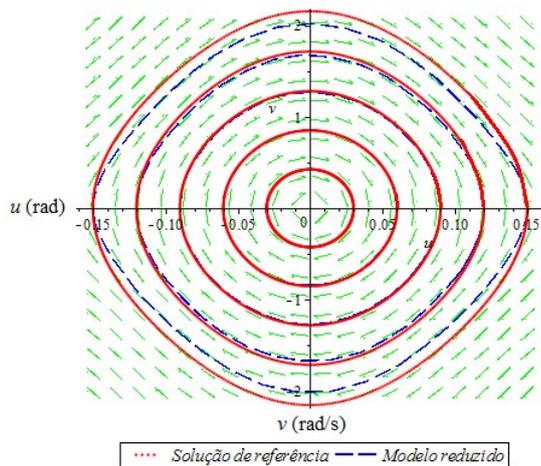


Fig. 8. Espaço fase para o terceiro modo não linear de vibração.

Em cada gráfico de espaço fase são mostradas também órbitas obtidas pela integração numérica das equações de movimento originais do sistema, de maneira análoga às curvas de ressonância, as linhas contínuas correspondendo às órbitas obtidas da integração numérica das equações originais de movimento do sistema, enquanto as linhas tracejadas são obtidas pela integração do modelo reduzido. Pode ser observada a perda de precisão conforme a solução se afasta dos pontos de origem e o surgimento de um comportamento dinâmico oscilatório caótico.

VI. CONCLUSÕES

A metodologia apresentada e utilizada neste trabalho permite obter modelos de ordem reduzida para problemas de vibração que demandem a consideração de não linearidades.

Os modelos de ordem reduzida permitem rápida análise paramétrica do comportamento do sistema oscilatório estudado, compondo uma de suas grandes vantagens no estudo de vibrações não lineares. Além disso, apresentam bons resultados quando comparados aos resultados da integração numérica. Por meio das ferramentas apresentadas, curvas de ressonância e espaço fase do sistema, é possível analisar os domínios de validade do modelo reduzido, sendo estes função também das necessidades de projeto do problema estudado no que diz respeito ao erro admissível da solução.

Este estudo é parte de um trabalho em andamento, e o trabalho completo incluirá análise multimodal do problema e uma consideração de efeitos de correntes e ondas marinhas sobre a estrutura.

VII. REFERÊNCIAS

- [1] Chandrasekaran S., et. al., Dynamic Response Behaviour of multi-legged Articulated Tower with & without TMD. *Conference Proceeding of MARTEC*, 2010.
- [2] Han S. M and Benaroya, H (2002) Vibration of a Compliant Tower in Three-dimensions. *J. of Sound and Vib.*, **250**(4):675-709.
- [3] Pesheck E. et al. (2002) Modal Reduction of a Nonlinear rotating Beam Through Nonlinear Normal Modes. *J of Sound and Vib.*, **124**:229-236.
- [4] Happawana G. S. et. al. (1995) An Analytical Solution to Non-similar Normal Modes in a Strongly Non-linear Discrete System. *J of Sound and Vib.* **183**:361-367.
- [5] Shaw S. W. and Pierre C. (1991) Nonlinear Normal Modes and Invariant Manifold. *J. of Sound and Vib.*, **150**:170-173.
- [6] Sellers L. L. and Niedzwecki J. M. (1992) Response Characteristics of Multi-articulated Offshore Towers. *Ocean Engng.*, **1**:1-20.
- [7] Gavassoni E., et al., Nonlinear modal analysis of multi-articulated offshore towers. *European Nonlinear Oscillations Conference, 2014*
- [8] Shaw S. W. and Pierre C. (1993) Normal modes for non-linear vibratory systems. *J. of Sound and Vib.*, **164**:85-124.
- [9] Jiang, D. et al. (2005) The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *Int. J. of Non-linear Mech.* **40**:729-746.
- [10] Rosemberg, R. (1961) On normal vibrations of a general class of nonlinear dual-mode systems. *J. Appl. Mech.* **28**: 275-283.
- [11] Kerschen, G. et al. (2009) A.F. Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist. *Mech. Syst. Sign.* **23**:170-194.