

Uma Análise Comparativa entre o Método de Newton Raphson Multivariável e uma Simulação Assistida por Computador para Circuitos Eletrônicos Aplicados na Modelagem do Transistor Ebers Moll

Estudo de caso em CC, modelo de transistor Ebers-Moll

Luis Eduardo Palomino Bolívar
Engenharia Elétrica
Universidade do Contestado
Canoinhas, Brasil
palomino@unc.br

Ana Sabrina Niño Ruge
Mestrado em Engenharia Mecatrônica
Universidad Militar Nueva Granada
Bogotá, Colômbia
u3900212@unimilitar.edu.co

Resumo—Este trabalho apresenta o método numérico de Newton Raphson Multivariável (MNM) aplicado para determinar os valores de tensão CC nas funções exponenciais próprias de cada um dos dois diodos do modelamento do transistor Ebers-Moll utilizando o Matlab. É utilizado a análise nodal modificada para equacionar o circuito, comparando os resultados de tensão em Corrente Contínua (CC) com os obtidos no simulador QUCs.

Palavras-chave— Simulação; Newton Raphson; Circuito; Análise Nodal Modificada;

I. INTRODUÇÃO

O modelamento matemático dos componentes num circuito elétrico permite prever ou analisar o comportamento de cada um dos elementos conectados em termos de tensão, corrente e potência. Assim, o equacionamento dos circuitos é atividade própria do projetista, que analisa e ajusta os parâmetros dos componentes ativos mantendo, principalmente, o funcionamento fora das condições de não linearidade. Para o caso de Transistores de Junção Bipolar – BJT, os modelos utilizados para baixo sinal consideram todos os elementos do circuito como dipolos que são elementos de dois terminais.

Considerando que o modelo Ebers-Moll (EM) possui só elementos de dois terminais, propomos neste trabalho um circuito com EM e elementos resistivos para efeitos da polarização em CC do transistor, comparando os resultados obtidos na análise matemática com um programa de desenho assistido por computador para circuitos elétricos denominado QUCs.

II. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O modelo EM apresentado na Fig. 1, possui dois diodos que caracterizam a corrente reversa entre a base (B) e o coletor (C) assim como a corrente direta entre B e o Emissor (E) com

equações exponenciais, como apresentado em (1) e (2), determinam a não linearidade, em que I_{SE} e I_{SC} são correntes de saturação ou de escalamento dos dois diodos com fator de proporção 2 a 50 sendo $I_{SE} > I_{SC}$ [1], em que V_T é um valor também constante próprio de cada diodo de forma que a corrente está em função da tensão entre seus terminais. Portanto, o comportamento exponencial determina a abordagem não linear multivariável considerando também que é um sistema em regime estável ou permanente.

$$I_{DE} = I_{SE}(\exp(v_{BE}/V_T) - 1) \quad (1)$$

$$I_{DC} = I_{SC}(\exp(v_{BC}/V_T) - 1) \quad (2)$$

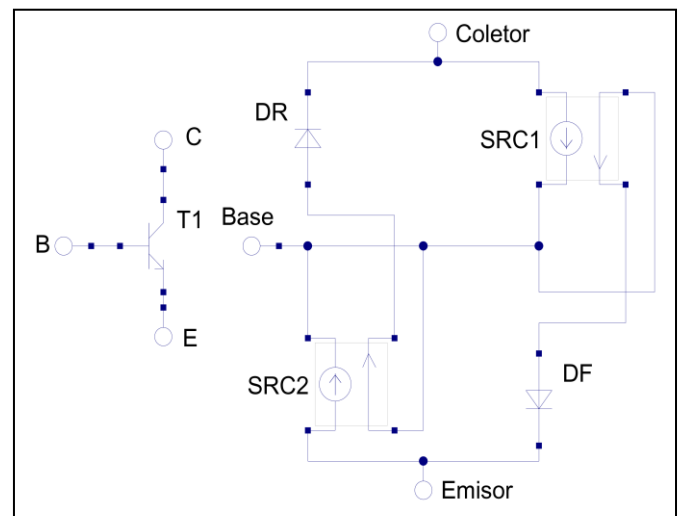


Fig. 1. Modelo Ebers-Moll (EM) do transistor de junção bipolar (BJT).

O modelo EM possui duas fontes de corrente dependentes que modelam a característica de transistor como dispositivo de corrente controlado pela corrente de entrada na base. Será assim necessário utilizar a Análise Nodal Modificado (ANM) para o equacionamento de circuitos eletrônicos definindo o comportamento elétrico de cada componente em função da tensão, para que do ponto de vista nodal, obedeça a lei de Kirchhoff para Correntes (LKC), em que a soma algébrica das correntes a um nó seja zero em todo instante [2].

A matriz resultante do sistema, é processada com o Método de Newton-Raphson Multivariável (MNM) conforme apresentado em (3), com n equações do sistema, n variáveis x_i igualadas a zero. Os resultados obtidos neste método devem convergir a valores obtidos em simuladores de circuitos elétricos.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

III. EQUACIONAMENTO DO CIRCUITO

O circuito proposto apresentado na Fig. 2 apresenta a topologia de um transistor com duas fontes de tensão V_1 e V_2 , uma fonte de corrente I_1 , 6 resistores e 7 nós considerando a referência também.

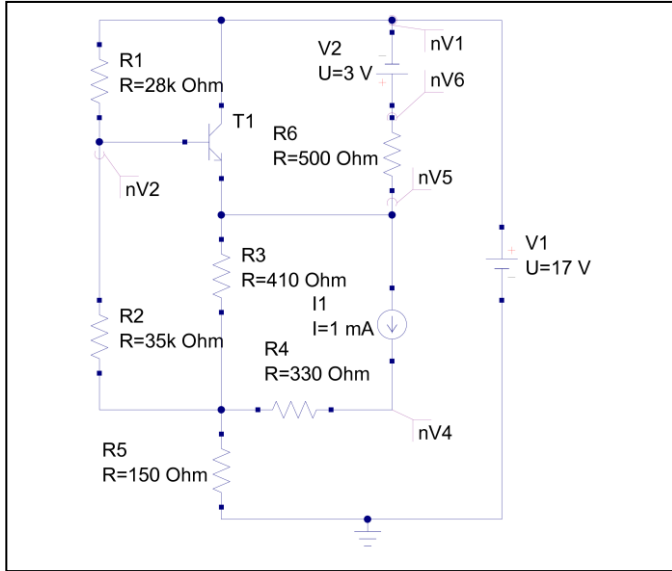


Fig. 2. Circuito com transistor para análise de corrente contínua (CC).

O circuito apresentado na Fig. 3 apresenta a topologia do circuito com elementos de dois terminais no modelo do transistor EM, e os nós propostos também na Fig. 2. Deverão ser calculadas as tensões em cada um dos 7 nós, e as correntes nas fontes de tensão, como apresentado no conjunto de incógnitas $Inc = \{nV_1, nV_2, nV_3, nV_4, nV_5, nV_6, I_{V1}, I_{V2}\}$ e as variáveis auxiliares sobre cada dipolo não problemático são representadas por $Va = \{I_{R1}, I_{R2}, I_{R3}, I_{R4}, I_{R5}, I_{R6}, I_{DR}, I_{DF}\}$.

O equacionamento em cada um dos nós seguindo o ANM, determina os coeficientes das variáveis que caracterizam a equação em cada matriz como apresenta a equação (4).

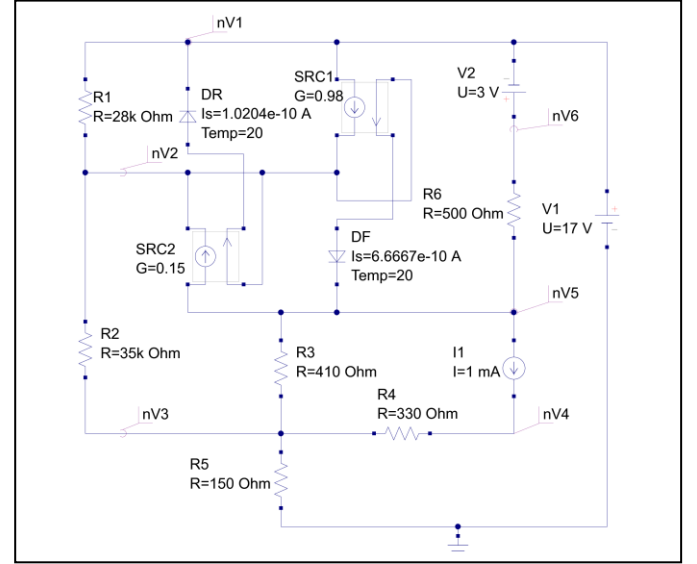


Fig. 3. Circuito com modelo Ebers Moll (EM) equivalente.

$$\begin{cases} f_1 = I_{V1} + I_{DR} - I_{R1} - G_1 \cdot I_{DF} = 0 \\ f_2 = G_1 I_{DF} + G_2 I_{DR} + I_{DR} - I_{R2} - I_{DR} - I_{DF} = 0 \\ f_3 = I_{R2} + I_{R3} - I_{R4} - I_{R5} = 0 \\ f_4 = I_{R4} + I_1 = 0 \\ f_5 = I_{DF} - I_1 - I_{R3} - G_2 I_{DR} - I_{R6} = 0 \\ f_6 = I_{V2} + I_{R6} = 0 \\ f_7 = V_{n6} - V_{n1} - V_2 = 0 \\ f_8 = V_1 - V_{n1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

O sistema multivariável da equação (4), apresenta os valores G_1 e G_2 nas funções f_1 , f_2 e f_5 como fator multiplicador de uma corrente no circuito determinando o valor em cada uma das fontes de corrente dependentes. Seguidamente é expressa a equação característica de cada elemento relacionando as variáveis auxiliares com as incógnitas [2]. Na Tabela I, são apresentadas as equações características dos resistores.

TABELA I. EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DOS DIPOLOS

Elemento	Equação Característica
I_{R1}	$(V_{n1} - V_{n2})/R_1$
I_{R2}	$(V_{n2} - V_{n3})/R_2$
I_{R3}	$(V_{n5} - V_{n3})/R_3$
I_{R4}	$(V_{n3} - V_{n4})/R_4$
I_{R5}	$(V_{n3} - 0)/R_5$
I_{R6}	$(V_{n5} - V_{n6})/R_6$
I_{DR}	$(I_S/\alpha_R) \cdot (\exp((V_{n2} - V_{n1})/V_T) - 1)$
I_{DF}	$(I_S/\alpha_F) \cdot (\exp((V_{n2} - V_{n5})/V_T) - 1)$

As correntes dos diodos nas duas últimas linhas da Tabela I, são determinadas por uma diferença de tensão de comportamento exponencial, assim como a relação entre constantes I_S , α_F e α_R equivalem a I_{SE} e I_{SC} na equação (1) e (2).

Com a equação característica dos elementos em função das variáveis auxiliares obtemos um sistema matricial, cujos elementos são apresentados em (7) [3].

$$V = \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \\ V_{n4} \\ V_{n5} \\ V_{n6} \\ I_{V1} \\ I_{V2} \end{bmatrix}, f(V) = \begin{bmatrix} f_1(V) \\ f_2(V) \\ f_3(V) \\ f_4(V) \\ f_5(V) \\ f_6(V) \\ f_7(V) \\ f_8(V) \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

As funções de $f_1(V)$, $f_2(V)$ e $f_5(V)$ possuem expressões exponenciais entre seus elementos devido ao comportamento dos diodos conforme equação (4). Dessa forma, para aplicação do algoritmo de Newton Raphson Multivariável foi utilizado o Matlab, em especial a instrução *fsolve*.

IV. ALGORITMO

O algoritmo proposto permite calcular os valores da matriz V com pouco custo computacional sem requerer um método exaustivo de busca de convergência. As fontes são iniciadas em zero e há um aumento do valor de forma proporcional em valores discretos até atingir o valor de energia nas fontes, conforme o circuito proposto, determinando o valor de tensão nos dipolos em cada iteração ou realizando o cálculo da matriz Jacobiana em cada iteração. Para este algoritmo é implementada a MNM em Matlab.

1) *Determinar o número de iterações*: O número de iterações incrementa a tensão nas fontes tanto de tensão como de corrente, com intervalos que evitem o rápido crescimento dos valores gerados nas funções que possuem comportamento exponencial. Para este caso foram utilizadas 10 iterações.

2) *Valor de incremento das fontes*: Determinar qual é o primeiro valor das fontes de tensão e corrente, que serão calculados, dividindo o valor da fonte no circuito em regime permanente, pelo número de iterações, definido no passo 1. Neste ponto são discretizados os valores da fonte

3) *Inicializar vetor de soluções parciais*: As soluções parciais nas iterações consideram o resultado como condição inicial para a iteração seguinte. Assim, na primeira iteração os valores de tensão e corrente do vetor de solução V são zero, emulando a condição em que não há energia no circuito.

4) *Loop de incrementos das fontes*: Neste loop é considerado o incremento gradativo das fontes com o número de iterações, segundo o passo 1. São realizados dois passos dentro deste loop. A Aplicação do MNM do sistema em conformidade as condições iniciais e o armazenamento dos resultados do vetor $Inc.$, é descrita a seguir:

a) *Aplicação de MNM ao sistema de equações*: Para aplicar o método de MNM é utilizado o estado inicial de tensão e das correntes dos elementos problemáticos considerados em Inc no vetor solução V , a função que modela o sistema $f(V)$, o valor das fontes V_1 , V_2 e I_1 . Em cada iteração o valor das fontes são determinados pelo valor anterior somado ao incremento correspondente em conformidade ao passo 2. “Utilizamos a função *fsolve* do Matlab ou, de forma alternativa, estimamos a matriz Jacobiana conforme indicado na equação (8). Assim para cada equação de $f(V)$ realiza-se uma nova iteração aplicando MNM que de forma geral esta definido em (9) [5].

$$df/dt \approx (f(t + dt) - f(t))/dt \quad (8)$$

$$\varphi(V) = V - (f(V)/f'(V)) \quad (9)$$

b) *Armazenamento dos resultados parciais*: Na equação (9) $\varphi(V)$ obtemos o resultado parcial nas iterações do loop definidas no passo 1, sendo utilizado para a iteração seguinte, como condição inicial na função V em (9).

V. CASO NUMERICO

Para analisar a eficiência numérica do algoritmo, são considerados no circuito da Fig. 3 os seguinte valores $V_1 = 17$, $V_2 = 3$, $I_1 = 1e-3$, $R_1 = 28000$, $R_2 = 35000$, $R_3 = 410$, $R_4 = 330$, $R_5 = 150$, $R_6 = 500$, $I_S = 1e-10$, $V_T = 25e-3$ e $\alpha_F = 0.98$, $\alpha_R = 0.15$; O processamento do algoritmo foi realizado em Matlab comparando os resultados com o programa de simulação de circuitos QUCs. Na Tabela II são apresentados os resultados obtidos para o vetor solução V , os resultados do simulador CAD, o método de MNM e as porcentagens de diferença relativa.

Os resultados obtidos são relacionados a partir do erro relativo entre estes e a média geral dos erros. No caso o erro da média geral é de 0,0153% considerado aceitável devido aos parâmetros de temperatura que não foram considerados na simulação. Somente na quarta casa decimal no QUCs apresenta diferença com o MNM com 10 iterações.

TABELA II. COMPARAÇÃO SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS E RESULTADOS DO ANALISE DO METODO NRM

V	QUCs	NRM	Erro
V_1	17,00000000	17,000000	0,0000%
V_2	10,7251000	10,72700	0,0177%
V_3	2,9209100	2,92030	0,0209%
V_4	3,2509100	3,25030	0,0188%
V_5	10,4033000	10,40100	0,0221%
V_6	20,0000000	20,00000	0,0000%
I_1	0,0194727	0,01947	0,0190%
I_2	0,0191934	0,01920	0,0240%

0,0153%

VI. COMENTARIOS FINAIS

Os resultados apresentados na Tabela II, considera o MNM como um método numérico de importante precisão para simulação de circuitos elétricos não lineares, onde a convergência tem uma velocidade de forma quadrática. Incrementar o valor das fontes é um método estável que permite a convergência do resultado com um número de iterações relativamente baixo. Para os ensaios do algoritmo foram configurados valores discretos das fontes na ordem da décima parte do valor original obtendo um erro consideravelmente baixo sendo aceito para maioria de análise de circuitos com BJT, onde o modelo de EM seja utilizado para baixo sinal e baixa frequência.

Para obter maior precisão, o custo computacional deve ser maior, o que implica no aumento de tempo nas iterações no passo quatro do algoritmo. Também é necessário ajustar o parâmetro de temperatura na simulação principalmente na característica do modelo dos dipolos não lineares. Neste trabalho é utilizada a temperatura de 20°C.

Os valores de tensão, corrente e potência são calculados a partir das equações características dos elementos em Tabela I e os valores calculados do vetor V. Na Tabela III são apresentados os valores de tensão a partir do CAD.

TABELA III. VALORES DE TENSÃO NOS ELEMENTOS DO CIRCUITO.

Tensão	Valor (V)
V_{R1}	6,27490
V_{R2}	7,80419
V_{R3}	7,48239
V_{R4}	-0,33000
V_{R5}	2,92091
V_{R6}	-9,59670
V_{BC}	-6,27490
V_{BE}	0,32180
V_{DR}	-6,27490
V_{DF}	0,32180
V_{I1}	7,15239

Os valores de corrente obtidos no CAD são apresentados na Tabela IV com unidades de amperes. Os cálculos de potência são o fruto da multiplicação dos resultados de tensão pela corrente em cada um dos elementos.

Finalmente, propõe-se um trabalho futuro validando a convergência do método numérico MNM aplicado a Ebers-Moll implementando o circuito transistorizado. Espera-se que o

MNM tenha restrições de uso para alguns casos assim como o método utilizado aqui como base de Newton-Raphson [4].

TABELA IV. VALORES DE TENSÃO NOS ELEMENTOS DO CIRCUITO

Corrente	Valor (A)
I_{R1}	0,000224
I_{R2}	0,000223
I_{R3}	0,01825
I_{R4}	-0,001
I_{R5}	0,019473
I_{R6}	-0,019193
I_{BC}	-2,53E-11
I_{BE}	5,63E-05
I_{DR}	-2,53E-11
I_{DF}	5,63E-05
I_{E1}	0,0194727
I_{E2}	0,0191934

AGRADECIMENTOS

Agradecimento à Pró-reitora de Pesquisa da Universidade do Contestado, ao programa de pós-graduação Maestria em Mecatrônica da Universidad Militar Nueva Granada.

REFERÊNCIAS

- [1] Sedra, Adel S.; Smith, Kenneth C., Microeletrônica, 4a ed., São Paulo: Makron Books, 2000, pp. 289-293.
- [2] R. C. Dorf, Circuitos Electricos, Introducció al análisis y diseño, 2 ed., México D.F.: Alfaomega, 1993, pp. 72;136-137.
- [3] M. Tadeusiewicz and S. Halgas, "Analysys Of BJT Circuit Having Multiple DC Solution Using Deflection Tecnique," *International Conference on Signals and Electronic Systems*, no. 2012, p. 3, 21 September 2012.
- [4] J.-H. He, "A modified Newton-Raphson method," *Communcationr in Numerical Methods in Engineering*, pp. 801-805, 10 1 2004.
- [5] L. C. Barroso, M. M. de Araujo Barroso, F. Ferreira Campos, Filho, M. L. Bunte de C. e M. L. Maia, Cálculo Numérico, 2 ed., São Paulo: Harbra Ltda, 1987, p. 19.
- [6] M. A. Gomes Ruggiero e V. L. Da Rocha Lopes, Cálculo Numérico, Aspectos Teóricos e Computacionais, 2 ed., M. M. d. Assumpção, Ed., São Paulo: Makron Books, 1988, pp. 66-70.