

Análise comparativa do problema de fundação elástica via teoria da elasticidade e método dos elementos finitos com o software Abaqus

Vinícius Hanser de Souza, Cladilson Nardino, Tatiani Zaroni, Emílio E. Kavamura, Daniane F. Vicentini
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil

ovinius10@outlook.com, clanardino@gmail.com, tatiani_z@hotmail.com, emilio.kavamura@ufpr.br, vicentini@ufpr.br

Resumo—O presente trabalho apresenta uma revisão bibliográfica e aplicação prática sobre o modelo de Winkler para fundação elástica, e tem como objetivo obter o campo de deslocamentos de uma laje submetida a um estado plano de tensões com tal fundação. O campo de deslocamentos foi obtido tal como a teoria da elasticidade linear considerando o modelo de base elástica da hipótese de Winkler, e foi comparado à modelagem com elementos finitos utilizando molas lineares na fundação da laje. Os resultados demonstram que mesmo que ocorra a variação dos valores de carga e de módulo de reação vertical, a relação carga/módulo de reação vertical do solo é numericamente igual ao deslocamento vertical uniforme na laje como um todo.

Palavras-chave—fundação elástica; teoria de Winkler; teoria da elasticidade linear; método dos elementos finitos; modelagem numérica.

I. INTRODUÇÃO

A hipótese de Winkler, que se baseia em uma adequação da lei de Hooke, é utilizada para a modelagem de deformações de estruturas com apoio elástico, como por exemplo o solo. Tal hipótese considera, para o caso particular de deformações verticais apenas, molas transversais à placa, sem interação entre elas, conforme [1]. A base elástica é considerada como homogênea e isotrópica, portanto possui um único parâmetro constitutivo, denominado como módulo de reação vertical. Tal modelo assume que a relação tensão-deformação da estrutura com o solo é linear [1]-[2], conforme (1).

$$\sigma(x, y) = K_s^v \cdot w(x, y) \quad (1)$$

K_s^v módulo de reação vertical, dependente do tipo de solo do maciço de fundação. Também chamado de coeficiente de mola;

$\sigma(x, y)$ tensão média de contato na base da fundação na direção z ;

$w(x, y)$ deslocamento vertical no ponto (x, y) da laje.

Este modelo é o mais utilizado em escritórios de projetos, devido ao fato de se realizar uma análise numérica mais rápida de acordo com [2]. Contudo, tal hipótese é bastante criticada

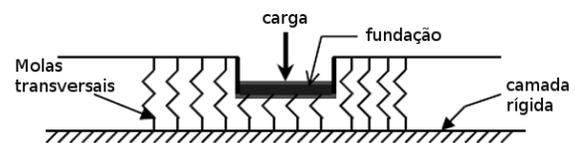


Figura 1. Modelo de Winkler
Fonte: Adaptado de [1]

por [3], pois a mesma só considera as deformações apenas nas regiões em que são aplicadas as cargas. Este fato pode ser explicado analisando que a deformação pontual não depende dos pontos próximos, e assume que o deslocamento ocorre somente na área carregada, conforme [4]. Fora desta área, as deformações são nulas, como demonstra a Fig. 1. Deduz-se que nos extremos as tensões cisalhantes são nulas, e portanto as deformações angulares também são nulas.

O trabalho de [5] apresenta que na falta de ensaios apropriados o valor do módulo de reação vertical pode ser arbitrado de acordo com a Tabela I.

II. SOLUÇÃO PELA TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

Para a solução via elasticidade linear, foram consideradas hipóteses e equações importantes, tais como a equação de equilíbrio, a simetria do tensor de tensões, o teorema de Cauchy, a relação entre deformações e campo de deslocamentos, e a lei de Hooke generalizada para materiais elásticos, exposta em (2).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

ε_{ij} tensor de deformações;
 E módulo de elasticidade;
 ν coeficiente de Poisson;
 σ_{ij} tensor de tensões;
 δ_{ij} delta de Kronecker.

A laje é apoiada em uma base elástica com coeficiente de reação vertical K_s^v na face inferior, submetida a uma carga q na face superior, e considerada semi-infinita, ou seja,

Tabela I
VALORES DE K_S^v

Tipo de Solo	K_S^v (kN.m ⁻³)
Turfa leve – solo pantanoso	5.000 a 10.000
Turfa pesada – solo pantanoso	10.000 a 15.000
Areia fina de praia	10.000 a 15.000
Aterro de silte, de areia e cascalho	10.000 a 20.000
Argila molhada	20.000 a 30.000
Argilha úmida	40.000 a 50.000
Argila seca	60.000 a 80.000
Argila seca endurecida	100.000
Silte compactado com areia e pedra	80.000 a 100.000
Silte compactado com areia e muita pedra	100.000 a 120.000
Cascalho miúdo com areia fina	80.000 a 120.000
Cascalho médio com areia fina	100.000 a 120.000
Cascalho grosso com areia grossa	120.000 a 150.000
Cascalho grosso com pouca areia	150.000 a 200.000
Cascalho grosso com pouca areia compactada	200.000 a 250.000

Fonte: Adaptado de [5]

possui apoios tipo rolete nos extremos laterais. O problema foi simplificado para o caso 2D, assumindo um estado plano de tensões. Para verificar as equações e hipóteses da elasticidade, foram arbitrados três possíveis tensores de tensão no plano com coeficientes a determinar, sendo eles linear, quadrático e cúbico. As componentes de tensão do tensor cúbico são mostrados em (3), (4) e (5).

$$\sigma_x = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + H \quad (3)$$

$$\sigma_y = Ix^3 + Jx^2y + Kxy^2 + Ly^3 + Mx^2 + Ny^2 + Oxy + P \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = Qx^3 + Rx^2y + Sxy^2 + Ty^3 + Ux^2 + Vy^2 + Xxy + Y \quad (5)$$

Realizando o equilíbrio, aplicando condições de contorno essenciais e naturais: $U_x|_{x=0} = 0$ e $U_y|_{x=L} = 0$ devido à simetria, e $U_y|_{y=0} = U_y|_{y=h}$ (deformação nula), obtém-se (6).

$$u_y = \frac{q}{K_s^v} \quad (6)$$

III. MODELAGEM NUMÉRICA

O modelo em elementos finitos da laje foi gerado no software Abaqus [6], considerando elemento do tipo CPS4R, que possui 4 nós e 2 graus de liberdade em cada nó, submetido a um estado plano de tensões. Devido à limitação do número de nós da versão educacional (1000 nós no máximo), o modelo foi restringido a um comprimento de 1,50m e 15cm de altura, e os elementos finitos foram criados com tamanho de 1,875cm (ou seja, 1/8 da altura da laje). A malha obtida está apresentada na Fig. 2.

O material considerado na laje foi adotado a partir da literatura conforme [4], e lançado no Abaqus como um sólido



Figura 2. Malha de elementos finitos no Abaqus
Fonte: os Autores

homogêneo com $E=30\text{GPa}$ e $\mu=0.30$. O carregamento aplicado foi de 1.000 kN/m, na face superior, e o valor do módulo de reação vertical do solo foi sendo alterado conforme Tabela II. As condições de contorno foram aplicadas na face inferior, com molas transversais, e nas faces laterais, como apoios de simetria.

Tabela II
VALORES DE K_S^v AVALIADOS

K_S^v (kN/m ³)	2000	4803	5000	10000	20000	40000
u_y (m)	0,5000	0,2082	0,2000	0,1000	0,0500	0,0250

Os resultados do modelo mostram que à medida que os valores de módulo de reação vertical se alteram, ocorre o decrescimento do valor de deslocamento vertical de forma exponencial. Traçando-se uma linha de tendência com os resultados de deslocamentos, obtém-se que a relação entre tais parâmetros de análise segue conforme (6) anteriormente obtido. Desta forma, consequentemente, o campo de tensões verticais é constante, igual ao valor da carga aplicada.

IV. CONCLUSÕES

O problema de base elástica utilizando o modelo de Winkler foi apresentado neste trabalho. O tensor de tensões foi arbitrado com equações de termos cúbicos de modo a realizar as verificações conforme as equações da teoria da elasticidade linear, contudo a solução obtida demonstrou que os campos de deslocamentos e de tensões são constantes ao longo da altura da laje, fato que corrobora o resultado obtido via método dos elementos finitos.

REFERÊNCIAS

- [1] Straughan, W. T. Analysis of plates on elastic foundations. 1990. Dissertation in Civil Engineering – Graduate Faculty of Texas Tech University, Texas Tech University, Texas.
- [2] Porto, T. B.; Mendonça, B. Q.; Carvalho, L. G. S. Análise estrutural de pisos industriais utilizando o método dos elementos finitos. Mecânica Computacional Vol XXXI, págs. 1355-1377. 2012.
- [3] Dutta, S.C.; Roy, R. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system. Computers and Structures 80, págs. 1579-1594. 2002.
- [4] Dinev, D. Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions. Engineering Mechanics, Vol. 19, No. 6, págs. 381-392. 2012.
- [5] Souza, R. A.; Reis, J. H. C. Interação solo-estrutura para edifícios sobre fundações rasas. Acta Sci. Technol. Maringá, v. 30, n. 2, p. 161-171, 2008.
- [6] Abaqus/CAE Student Edition 6.14-2. Dassault Systèmes, 2014.