Cálculo Semianalítico da Condutividade Efetiva de Compósitos Fibrosos com Geometria Arbitrária e com Barreira Térmica nas Interfases

José A. Mesejo-Chiong, Angela León-Mecías,
Julián Bravo-Castillero
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana
La Habana, Cuba
mesejo, angela, jbravo@{matcom.uh.cu}

Leslie D. Pérez-Fernández
Instituto de Física e Matemática
UFPel
Pelotas RS, Brasil
leslie.fernandez@ufpel.edu.br

***Resumo*—A condutividade térmica efetiva de compósitos periódicos bifásicos fibrosos, com fibra de geometria arbitrária e com fases em contato térmico imperfeito, isto é, com barreira térmica nas interfases é obtida através da combinação dos métodos de homogeneização assintótica, decomposição de domínios e elementos finitos. O método de homogeneização assintótica é utilizado na construção dos chamados problemas locais sobre a célula de periodicidade, de cujas soluções depende a condutividade efetiva. A resolução numérica dos problemas locais requer um tratamento especial por causa da descontinuidade da temperatura nas interfases devido à barreira térmica. Assim, se propõe decompor em dois problemas, um para cada fase, integrados mediante uma equação de enlace. O método de elementos finitos, implementado no software livre FreeFEM++, é utilizado para resolver ambos os problemas. O enfoque de FreeFEM++, baseado na formulação variacional dos problemas, permite considerar geometrias arbitrárias tanto da seção transversal da fibra quanto da célula periódica. Resultados para o caso de célula periódica quadrada e fibra de seção transversal dado pelo interior da superelipse em três casos são apresentados.**

***Palavras-chave*—contato térmico imperfeito; condutividade térmica efetiva; homogeneização assintótica; decomposição de domínios; elementos finitos**

I. INTRODUÇÃO

Materiais compósitos fibrosos artificiais e naturais com propriedades rapidamente oscilantes aparecem em diversas aplicações, por exemplo na construção civil [1], na biomedicina [2], dentre outros. Por isso o estudo do seu comportamento, baseado no conhecimento de suas fases constituintes e dos processos que ocorrem neles, é uma área de pesquisa e desenvolvimento muito importante. O estudo dos fenômenos de transporte em materiais compósitos, como a condutividade térmica, é uma área de pesquisa de considerável interesse, ver [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Em particular, existe evidência experimental [5], [9], [10], [11], que indica que a condutividade térmica efetiva é afetada pela existência de uma barreira térmica resistiva nas interfases entre as constituintes dos compósitos.

Neste trabalho, considera-se o cálculo da condutividade térmica efetiva de compósitos condutivos bifásicos formados por uma matriz contendo fibras de geometria arbitrária, periodicamente distribuídas na microescala e que apresentam uma barreira térmica nas interfases. A abordagem inicial está baseada no método de homogeneização assintótica (MHA), cujos fundamentos matemáticos podem ser encontrados em [12], [13], dentre outros. O MHA procura a solução do problema de valores de contorno/iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes que modela o comportamento físico do compósito periódico na forma de uma série assintótica em duas escalas em termos das potências de um parâmetro pequeno que representa a separação das escalas estruturais do compósito. Para resolver os chamados problemas locais que resultam da aplicação do MHA, utiliza-se o método de elementos finitos (MEF) [14], [15], o qual permite considerar geometrias arbitrárias para as seções transversais das fibras e da célula básica cuja replicação periódica gera o compósito sob estudo. Em particular, utiliza-se a implementação do MEF em FreeFEM++ [16], o qual é um software livre projetado para resolver sistemas de equações diferenciais cuja particularidade consiste em discretizar diretamente a formulação variacional correspondente, ou seja, é muito próximo da formulação matemática do MEF.

Soluções analíticas e numéricas de problemas com contato térmico imperfeito têm sido reportadas em casos de geometrias e materiais específicos como em [7], [17]. De fato, a existência de uma barreira térmica entre as fases requer um tratamento numérico especial do termo que contém a integral de superfície na formulação variacional. Em [17], para uma célula de geometria hexagonal com inclusão circular, se duplicam os graus de liberdade dos nós globais da interfase para aplicar o MEF na sua forma tradicional; em [3] propõe-se uma formulação variacional dual híbrida, se compara com a formulação variacional de Galerkin descontínua de [18], e se apresentam resultados numéricos para uma região circular com uma inclusão circular. Neste trabalho, para o tratamento do contato térmico imperfeito, propõe-se aplicar um método de decomposição de domínios (MDD) [19], [20] e em cada iteração procurar a solução via MEF em cada subdomínio (de fato, é possível aplicar métodos de aproximação diferentes em cada subdomínio). As ideias iniciais do MDD foram desenvolvidas por Schwarz [21] para regiões com subdomínios sobrepostos, e modificações posteriores foram introduzidas em [22] para regiões com uma quantidade arbitrária de subdomínios não sobrepostos. Nossa proposta introduz uma modificação no algoritmo de [22].

Este trabalho está organizado como segue: a seção 2 apresenta a formulação do problema da distribuição estacionária da temperatura em um meio condutivo periódico bifásico fibroso; a seção 3 contém as ideias básicas do MHA e a formulação dos problemas locais sobre a célula periódica; a seção 4 apresenta a combinação do MDD e do MEF na formulação variacional que permite a implementação em FreeFEM++ desta estratégia de solução dos problemas locais; a seção 5 contém os resultados da abordagem semianalítica proposta para três geometrias da fibra diferentes; as conclusões são apresentadas na seção 6.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho, considera-se o problema da distribuição estacionária da temperatura em compósitos condutivos bifásicos formados por fases constituintes isotrópicas organizadas como uma matriz de condutividade térmica $K^{(M)}$ contendo uma distribuição microperiódica de fibras paralelas idênticas de seção transversal arbitrária e condutividade térmica $K^{(I)}$. Ainda, considera-se que existe uma barreira térmica nas interfases. Dado que a heterogeneidade destes compósitos é bidimensional, sua caracterização geométrica pode ser obtida a partir da seção transversal à direção das fibras. O caráter microscópico da heterogeneidade é especificado pelo parâmetro geométrico ε, $0 < \varepsilon \ll 1$, que caracteriza a separação de escalas estruturais, sendo que a macroescala e a microescala são percorridas nas variáveis global $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e local $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$, respectivamente. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a região ocupada pela seção transversal do compósito, na qual as regiões ocupadas pelas seções transversais da matriz, as fibras e as interfases são Ω^ε_M, Ω^ε_I e Γ^ε, respectivamente, de maneira que $\mathbf{x} \in \Omega = \Omega^\varepsilon_M \cup \Omega^\varepsilon_I \cup \Gamma^\varepsilon$. A periodicidade da microestrutura é descrita pela replicação de uma célula básica $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, em que a matriz, a fibra e a interfase ocupam as regiões Y_M, Y_I e $\Gamma = \varepsilon^{-1}\Gamma^\varepsilon$, respectivamente, de maneira que $\mathbf{y} \in Y = Y_M \cup Y_I \cup \Gamma$, ver Fig. 1. Ainda, as interfases estão caracterizadas pelas condutâncias global β^ε, $\mathbf{x} \in \Gamma^\varepsilon$, e local $\beta = \varepsilon^{-1}\beta^\varepsilon$, $\mathbf{y} \in \Gamma$.

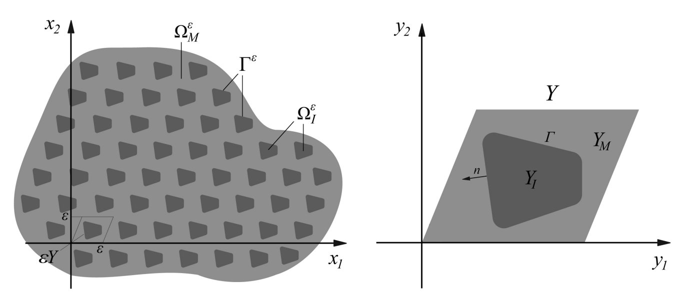

Fig. 1. Seção transversal de um compósito bifásico periódico formado por uma matriz contendo fibras paralelas idênticas de seção transversal arbitrária.

Para cada $\varepsilon > 0$, o problema da distribuição estacionária da temperatura $T^\varepsilon(\mathbf{x})$ nos compósitos descritos acima consiste em encontrar $T^\varepsilon \in H^1_{per}(Y^\varepsilon)$ tal que

$$-\nabla \cdot (K^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla T^\varepsilon(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega \backslash \Gamma^\varepsilon, \tag{1}$$

$$K^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla T^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = -\beta^\varepsilon \llbracket T^\varepsilon \rrbracket,\ \mathbf{x} \in \Gamma^\varepsilon, \tag{2}$$

$$\llbracket K^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla T^\varepsilon \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma^\varepsilon, \tag{3}$$

$$T^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{4}$$

em que $H^1_{per}(Y^\varepsilon) = \{T^\varepsilon \in H^1(\Omega) : T^\varepsilon \text{ é } Y^\varepsilon\text{-periódica}\}$, e $\llbracket \cdot \rrbracket$ é o operador de salto ao atravessar Γ^ε da matriz à fibra. Ainda, $f \in L^2(\Omega)$ é a densidade das fontes de calor, e $\mathbf{n}$ representa o vetor normal unitário exterior às fibras. O coeficiente $K^\varepsilon(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}/\varepsilon)$ é o tensor de segunda ordem da condutividade térmica, Y^ε-periódico, simétrico e definido positivo, ou seja, $K^\varepsilon_{ij} = K^\varepsilon_{ji}$, e existem constantes $\alpha_-, \alpha_+ \in \mathbb{R}^*_+$, $\alpha_- < \alpha_+$, tais que, para todo $\mathbf{x} \in \Omega \backslash \Gamma^\varepsilon$, $\alpha_-|\xi|^2 \leq K^\varepsilon(\mathbf{x})\xi \cdot \xi \leq \alpha_+|\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Observe que $K^\varepsilon(\mathbf{x})$ é constante por partes, ou seja, $K^\varepsilon|_{\Omega^\varepsilon_M} = K^{(M)}$ e $K^\varepsilon|_{\Omega^\varepsilon_I} = K^{(I)}$ e, consequentemente, para ε suficientemente pequeno, $K^\varepsilon(\mathbf{x})$ oscila rapidamente. Este fato, junto com a complexidade da geometria e a presença de descontinuidades nas interfases, faz com que a resolução analítica direta seja praticamente impossível. Por outro lado, a aplicação direta de um método numérico requereria uma discretização muito fina do domínio para capturar o caráter rapidamente oscilante do coeficiente, o qual aumentaria consideravelmente o custo computacional e comprometeria a convergência do método. Uma alternativa matematicamente rigorosa e eficiente para resolver estes problemas é o método de homogeneização assintótica, o qual será descrito a seguir.

III. MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA

O MHA, cujos fundamentos matemáticos podem ser encontrados em, por exemplo, [12], [13], é um dos métodos de homogeneização matemática para resolver problemas de valores de contorno/iniciais para equações diferenciais em derivadas parciais com coeficientes rapidamente oscilantes que modela o comportamento físico de meios heterogêneos que satisfazem a hipótese do contínuo e apresentam separação de escalas estruturais caracterizada pelo parâmetro pequeno ε. Sob tais condições, prova-se que o meio heterogêneo cumpre a hipótese de homogeneidade equivalente, isto é, que existe um meio homogêneo ideal modelado por um problema de valores de contorno/iniciais para equações diferenciais em derivadas parciais com coeficientes constantes que é o limite fraco quando $\varepsilon \to 0^+$ da sequência de problemas (1)-(4) indexada por ε. Tal convergência é o sentido da frase "homogeneização matemática". O problema limite para o meio homogêneo é chamado de problema homogeneizado e seus coeficientes são os chamados coeficientes efetivos do meio heterogêneo. Em particular, o MHA procura uma solução assintótica formal do problema (1)-(4) que, neste caso, é uma expansão assintótica da solução exata $T^\varepsilon(\mathbf{x})$ como segue:

$$T^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx T_0(\mathbf{x}) + \varepsilon N\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla T_0(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

em que $N(\mathbf{y}) = (N_1(\mathbf{y}), N_2(\mathbf{y}))$, e $T_0(\mathbf{x})$ é a solução do problema homogeneizado

$$-\nabla \cdot (K^h \nabla T_0(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{6}$$
$$T_0(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{7}$$

cujo coeficiente efetivo K^h é um tensor constante de segunda ordem e está rigorosamente definido mediante o processo assintótico. Neste caso, as componentes K^h_{ik} do tensor efetivo K^h são dadas por:

$$K^h_{ik} = \left\langle K_{ik}(\mathbf{y}) + K_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial N_k(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right\rangle, \tag{8}$$

em que $\langle \cdot \rangle = \int_Y (\cdot) dy$ é o operador de valor médio sobre a célula periódica Y. Ainda, as funções $N_k(\mathbf{y})$, $k = 1, 2$, são as soluções periódicas dos chamados problemas locais sobre a célula periódica Y:

$$\nabla \cdot (K(\mathbf{y}) \nabla (N_k(\mathbf{y}) + y_k)) = 0,\ \mathbf{y} \in Y \backslash \Gamma \tag{9}$$
$$K(\mathbf{y}) \nabla (N_k(\mathbf{y}) + y_k) \cdot \mathbf{n} = -\beta \llbracket N_k(\mathbf{y}) \rrbracket,\ \mathbf{y} \in \Gamma \tag{10}$$
$$\llbracket K(\mathbf{y}) \nabla (N_k(\mathbf{y}) + y_k) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0,\ \mathbf{y} \in \Gamma \tag{11}$$
$$\langle N_k(\mathbf{y}) \rangle = 0. \tag{12}$$

É possível provar (ver [13]) que a solução exata $T^\varepsilon(\mathbf{x})$ do problema original (1)-(4) converge no sentido fraco à solução $T_0(\mathbf{x})$ do problema homogeneizado (6), (7) quando $\varepsilon \to 0^+$: $\|T^\varepsilon - T_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Neste trabalho se presta atenção a solução dos problemas na célula periódica (9)-(12).

IV. SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS PROBLEMAS NA CÉLULA PERIÓDICA

Para abordar a condição de contato imperfeito na interfase, neste trabalho aplica-se uma variante do Método de Decomposição de Domínios (MDD), [19], [20]. A ideia básica destes métodos consiste em decompor a região de interesse em subdomínios, o qual permite aproximar a solução de maneira independente em cada subdomínio. Assim, a solução sobre a região como um todo pode ser obtida mediante subestruturação iterativa como mostra-se em [23] ou, como aqui, enlaçando os subdomínios mediante condições na interfase como é feito em [22] e [24].

Neste trabalho, a região primária é aquela ocupada pela célula periódica $Y = Y_M \cup Y_I \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^2$, em que M e I denotam a matriz e a fibra, respectivamente, e Γ é a interfase entre elas. Observe que Y_M e Y_I definem uma decomposição de Y em subdomínios conexos disjuntos.

A. Decomposição de domínios

A seguir, o MDD é aplicado ao problema local (9)-(12) para $k = 1$ para obter $N_1(\mathbf{y})$. Para obter $N_2(\mathbf{y})$, o desenvolvimento é similar. Para simplificar a notação, considere $u = N_1$ neste problema. Assim, tem-se que encontrar $u \in H^1_{per}(Y)$ que satisfaça (9)-(12). A ideia é resolver de maneira alternada o problema na matriz e na fibra. Seja $u^{(M)} = u|_{Y_M}$, $u^{(I)} = u|_{Y_I}$, $\mathbf{n}_M = -\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}_I = \mathbf{n}$. Para calcular $u^{(M)}$ e $u^{(I)}$ emprega-se a seguinte modificação do esquema iterativo de Lions [22].

Encontrar as sequências $\left\{u_n^{(M)}\right\}_{n \in N}$, $u_n^{(M)} \in H^1_{per}(Y_M)$, e $\left\{u_n^{(I)}\right\}_{n \in N}$, $u_n^{(I)} \in H^1(Y_I)$, conhecidos os termos iniciais $u_0^{(M)}$ e $u_0^{(I)}$, tais que

$$\nabla \cdot \left(K^{(M)} \nabla \left(u_{n+1}^{(M)} + y_1\right)\right) = 0,\ \mathbf{y} \in Y_M, \tag{13}$$
$$K^{(M)} \nabla \left(u_{n+1}^{(M)} + y_1\right) \cdot \mathbf{n}_M + \lambda u_{n+1}^{(M)} = \beta u_n^{(M)} + (\lambda - \beta)\, u_n^{(I)},\ \mathbf{y} \in \Gamma, \tag{14}$$

e

$$\nabla \cdot \left(K^{(I)} \nabla \left(u_{n+1}^{(I)} + y_1\right)\right) = 0,\ \mathbf{y} \in Y_I, \tag{15}$$
$$K^{(I)} \nabla \left(u_{n+1}^{(I)} + y_1\right) \cdot \mathbf{n}_I + (\lambda - \beta)\, u_{n+1}^{(I)} = (\lambda - \beta)\, u_{n+1}^{(M)},\ \mathbf{y} \in \Gamma. \tag{16}$$

O parâmetro $\lambda > 0$ é uma constante utilizada para controlar a convergência do processo iterativo definido por (13)-(16). Com este esquema tem-se que

$$K^{(M)} \nabla \left(u_{n+1}^{(M)} + y_1\right) \cdot \mathbf{n}_M + K^{(I)} \nabla \left(u_{n+1}^{(I)} + y_1\right) \cdot \mathbf{n}_I = \beta \left(u_n^{(M)} - u_{n+1}^{(M)}\right) + (\lambda - \beta) \left(u_n^{(I)} - u_{n+1}^{(I)}\right).$$

Logo, para (11) ser satisfeita, é necessário que

$$\left\| u_{n+1}^{(M)} - u_n^{(M)} \right\|_{L^2(Y)} \to 0 \quad \text{e} \quad \left\| u_{n+1}^{(I)} - u_n^{(I)} \right\|_{L^2(Y)} \to 0,$$

para $n \to \infty$, o qual fornece o critério de parada do processo iterativo.

B. Aproximação por elementos finitos com FreeFEM++

Neste trabalho, a solução numérica dos problemas na matriz (13), (14) e na fibra (15), (16) é obtida mediante a aplicação do MEF [14], [15], implementado no software livre FreeFEM++ [16]. Diferentemente de outros softwares comerciais, os quais focam em aplicações para engenharia e funcionam como caixa preta (sistema fechado de alta complexidade e estrutura interna desconhecida), o FreeFEM++ constrói a aproximação por elementos finitos partindo da formulação variacional do problema. Dado que a eficiência do MEF depende da ordem de aproximação atingida com as funções de interpolação definidas pelos elementos finitos e da consistência entre o modelo contínuo original e o modelo discreto dado pelo MEF, se propõe utilizar polinômios de interpolação lineares por partes definidos por elementos triangulares de três nós.

A formulação variacional do problema definido por (13), (14) é como segue. Seja $H^1_{per}(Y_M)$ o espaço das funções teste definido por

$$H^1_{per}(Y_M) = \left\{ v \in H^1(\Omega_M) : v \text{ é } Y_M\text{-periódica} \right\}.$$

Encontrar $u_{n+1}^{(M)} \in H^1_{per}(Y_M)$ tal que, para todo $v \in H^1_{per}(Y_M)$,

$$a\left(u_{n+1}^{(M)}, v\right) = l(v) \tag{17}$$

em que $a(.,.)$ é uma forma bilinear,

$$a\left(u_{n+1}^{(M)}, v\right) = \int_{Y_M} \nabla v \cdot \left(K^{(M)} \nabla \left(u_{n+1}^{(M)} + y_1\right)\right) d\mathbf{y} + \oint_{\Gamma} \lambda v u_{n+1}^{(M)} d\mathbf{s}, \quad (18)$$

e $l(.)$ é uma forma linear,

$$l(v) = \oint_{\Gamma} v \left(\beta u_n^{(M)} d\mathbf{s} + (\lambda - \beta)\, u_n^{(I)}\right) d\mathbf{s}. \quad (19)$$

Similarmente, a formulação variacional do problema definido por (15), (16) é: Dado $u_{n+1}^{(M)} \in H_{per}^1(Y_M)$ solução de (17), encontrar $u_{n+1}^{(I)} \in H^1(Y_I)$ tal que, para todo $w \in H^1(Y_I)$,

$$a\left(u_{n+1}^{(I)}, w\right) = l(w), \quad (20)$$

$$a\left(u_{n+1}^{(I)}, w\right) = \int_{Y_I} \nabla w \cdot \left(K^{(I)} \nabla \left(u_{n+1}^{(I)} + y_1\right)\right) d\mathbf{y} + \oint_{\Gamma} (\lambda - \beta)\, w u_{n+1}^{(I)} d\mathbf{s} \quad (21)$$

$$l(w) = \oint_{\Gamma} (\lambda - \beta)\, w u_{n+1}^{(M)} d\mathbf{s}. \quad (22)$$

A discretização Y_M^δ da região Y_M ocupada pela matriz na célula básica mediante uma malha de elementos finitos de dimensão δ leva a considerar o espaço funcional $H_{per}^1(Y_M^\delta) \subset H_{per}^1(Y_M)$. Logo, a aproximação $\tilde{u}_{n+1}^{(M)} \in H_{per}^1(Y_M^\delta)$ via FEM de $u_{n+1}^{(M)} \in H_{per}^1(Y_M)$ é tal que, para todo $v \in H_{per}^1(Y_M^\delta)$,

$$a\left(\tilde{u}_{n+1}^{(M)}, v\right) = l(v). \quad (23)$$

Analogamente, da formulação variacional (20) tem-se que a aproximação $\tilde{u}_{n+1}^{(I)} \in H^1(Y_I^\delta) \subset H^1(Y_I)$ via FEM de $u_{n+1}^{(I)}$ é tal que, para todo $w \in H^1(Y_I^\delta)$,

$$a\left(\tilde{u}_{n+1}^{(I)}, w\right) = l(w). \quad (24)$$

FreeFEM++ é utilizado para a aplicação do MEF. Este é um software livre, o que permite que os códigos desenvolvidos sejam disponibilizados para toda a comunidade científica. Sua particularidade consiste em trabalhar direitamente com a discretização da formulação variacional associada dada por uma forma bilinear $a(u, v)$, uma forma linear $l(v)$, e condições de contorno definidas parametricamente, a partir da qual FreeFEM++ constrói o sistema de equações lineares correspondente (para mais detalhes, ver [16]). Para resolver o sistema de equações lineares resultante, FreeFEm++ utiliza fundamentalmente três métodos: CG (método iterativo de gradiente conjugado para matrizes simétricas definidas positivas), UMFPACK (método direto baseado em fatoração) e GMRES (método iterativo do resíduo mínimo generalizado para matrizes de grandes dimensões e com poucos elementos não nulos). Neste trabalho, utiliza-se GMRES.

V. Alguns Resultados Numéricos

Os resultados numéricos apresentados a seguir foram obtidos utilizando um processador Intel Core i7-3632QM @ 2.20GHz, com 6 GB RAM, e 64-bits OS.

Considera-se um compósito formado por uma matriz isotrópica de condutividade $K^{(M)}$ reforçada por fibras com condutividade $K^{(I)}$ e seção transversal dada pelo interior da superelipse $|\frac{x}{a}|^n + |\frac{y}{b}|^n = 1$, em que os comprimentos a e b dos semieixos e o expoente n, $a, b, n \in R_+^*$, determinam seu formato ($n = 1$ é o losango, $n = 2$ é a elipse, e $n \to \infty$ é o retângulo). Aqui, consideram-se os três casos típicos, a saber, $n < 1$, $1 < n < 2$ e $n > 2$, para $a = b$, ver Fig. 2. O comportamento efetivo deste tipo de compósito é isotrópico.

A discretização da célula periódica deste compósito foi realizada por elementos finitos triangulares de três nós lineares contínuos por partes. A Fig. 3 apresenta a discretização da célula básica com fibra de seção transversal superelíptica para $n = 0.7$, $n = 1.3$ e $n = 4$ com semieixos $a = b = 0.5$. Observa-se a maior densidade de elementos nas regiões próximas aos vértices.

As soluções dos problemas locais $N_k(\mathbf{y})$, $k = 1, 2$, foram obtidas pelo método de decomposição de domínios descrito acima, aplicando o método de elementos finitos em cada iteração. As Figs. 4 e 5 apresentam o comportamento destas soluções locais $N_1(\mathbf{y})$ e $N_2(\mathbf{y})$, respectivamente, para as três geometrias da seção transversal da fibra descritas acima para vários valores do número de Biot. As colunas correspondem a $n = 0.7$, $n = 1.3$ e $n = 4$, e as linhas a $Bi = 10^k$ com $k = -3, 1, 3$, respectivamente. Os valores correspondentes da condutividade efetiva normalizada $K_{11}^h/K^{(M)}$ são apresentados na Tabela I.

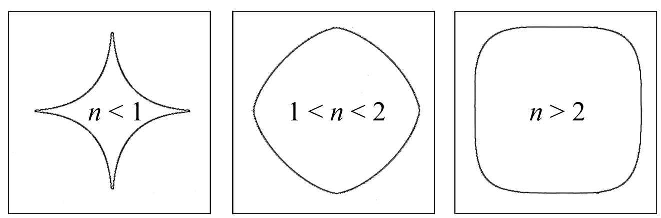

Fig. 2. Célula quadrada com fibra de seção transversal superelíptica para $a = b$ e $n < 1$, $1 < n < 2$ e $n > 2$.

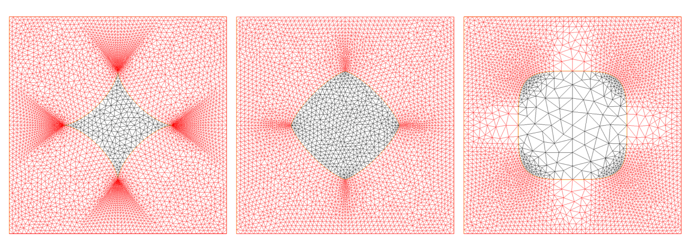

Fig. 3. Discretização por elementos finitos da célula básica com fibra de seção transversal superelíptica com $a = b = 0.5$ e $n = 0.7$, $n = 1.3$ e $n = 4$.

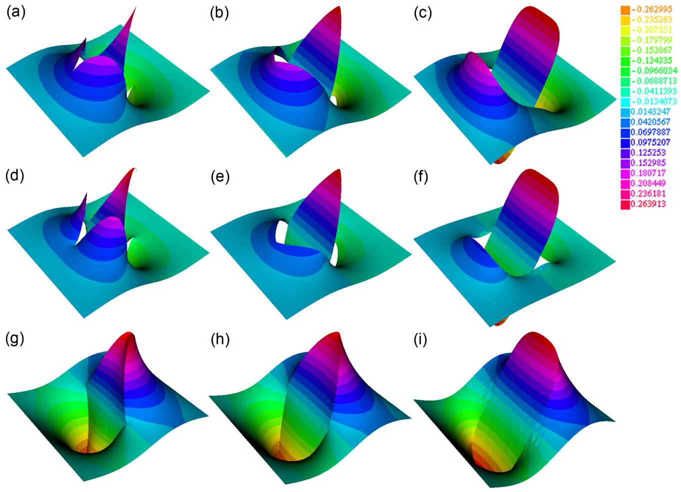

Fig. 4. Solução local $N_1(\mathbf{y})$ para fibra de seção transversal superelíptica.

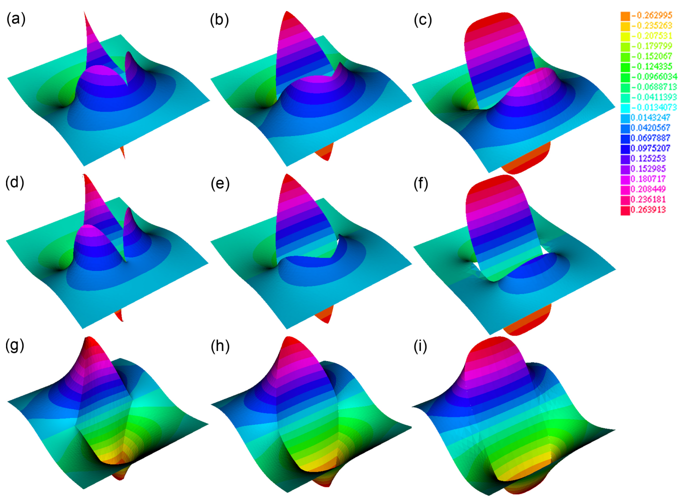

Fig. 5. Solução local $N_2(\mathbf{y})$ para fibra de seção transversal superelíptica.

Tabela I
ESTIMAÇÕES DE $K_{11}^h/K^{(M)}$ (FIBRA SUPERELÍPTICA)

k	$n = 0.7$	$n = 1.3$	$n = 4$
-3	0.797487	0.723803	0.620335
0	0.936109	0.912538	0.900320
3	1.055890	1.109740	1.167200

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvida uma combinação do método de decomposição de domínios com o método de elementos finitos para resolver numericamente os problemas locais que surgem da aplicação do método de homogeneização assintótica. Ao melhor do nosso conhecimento, tal abordagem semianalítica é original, e permitiu a obtenção das propriedades efetivas de compósitos condutivos formados por uma matriz contendo uma distribuição periódica de fibras de seção transversal arbitrária, sendo a célula básica de tais compósitos também de geometria arbitrária, e com uma barreira térmica nas interfases. A implementação destas técnicas analíticas e numéricas no software livre FreeFEM++ traz diversas vantagens, dentre elas: i) a discretização direta da formulação variacional do problema contribui fortemente tanto à diversidade de problemas que podem ser estudados quanto à maior precisão dos resultados obtidos; ii) não ser um software do tipo caixa preta permite um maior controle dos processos de resolução; iii) ser um software livre permite que os códigos desenvolvidos sejam disponibilizados para toda a comunidade científica; iv) é possível a integração com outros softwares como, por exemplo, Matlab®. Tendo evidenciado a potencialidade da abordagem semianalítica apresentada neste trabalho, várias aplicações e generalizações estão em estudo e/ou desenvolvimento.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido com suporte do projeto CAPES No. 88881.030424/2013-01. Os autores agradecem os úteis comentários dos revisores que contribuíram à melhor apresentação do trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] B. Moffit, "Composite Materials in Buildings and Constructions Applications", ACMA's Corrosion, Mining, Infrastructure and Architecture Conference, Denver, CO, May 2013.

[2] M. Machovský, *Composites Materials for Medical Applications*, Theses Doctoral, Tomas Bata University, Zlin, 167 p, 2013.

[3] F.B. Belgacem, C. Bernardi, F. Jelassi and M.M. Brahim, "Finite element methods for the temperature in composite media with contact resistance", Journal of Scientific Computing, Vol. 63, pp. 478-501, 2015.

[4] C. Cao, A. Yu and Q.H. Qin, "Evaluation of effective thermal conductivity of fiber-reinforced composites", International Journal of Architecture, Engineering and Construction, Vol. 1, pp. 14-29, 2012.

[5] C. Choi, *Impact of mass and bond energy difference and interface defects on thermal boundary conductance*, All Graduate Theses and Dissertations, Paper 4632, Utah State University, 2016.

[6] J.L. Gómez-Muñoz and J. Bravo-Castillero, "Calculation of effective conductivity of 2D and 3D composite materials with anisotropic constituents and different inclusion shapes in Mathematica", Computer Physics Communications Vo. 179, pp. 275-287, 2008.

[7] J.C. López-Realpozo, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero and F.J. Sabina, "Transport properties in fibrous elastic rhombic composite with imperfect contact condition", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, pp. 98-107, 2011.

[8] K. Pietrak, and T.S. Wisniewski, "A review of models for effective thermal conductivity of composite materials", Open Access Journal. Journal of Power Technologies Vol. 95, pp. 14-24, 2015.

[9] G. Bai, W. Jiang and L. Chen, "Effect of interfacial thermal resistance on effective thermal conductivity of MoSi2/SiC composites", Materials Transactions, Vol. 47, pp. 1247-1249, 2006.

[10] P.E. Devpura, R.S. Phelan and A. Prasher, "Size effects on the thermal conductivity of polymers laden with highly conductive filler particles", Microscale Thermophysical Engineering, Vol. 5, pp. 177-189, 2001.

[11] C.W. Nan, R. Birringer, D.R. Clarke and H. Gleiter, "Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance", Journal of Applied Physics, Vol. 81, pp. 6692-6699, 1997.

[12] N.S. Bakhvalov and G. Panasenko, *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

[13] A. Bensoussan, J.L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Amsterdam: North Holland. 1978

[14] A. Ern, J.L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, New York: Springer, 2004.

[15] M.G. Larson and F. Bengzon, *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.

[16] F. Hecht, "New development in FreeFem++", Journal of Numerical Mathematics Vol. 20, pp. 251–265, 2012.

[17] R.P. Rocha and M.E. Cruz, “Computation of the effective conductivity of unidirectional fibrous composites with an interfacial thermal resistance”, Numerical Heat Transfer: Part A: Applications, Vol. 39, pp. 179-203, 2001.

[18] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L.D. Marini, “Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems”, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.39, pp. 1749-1779, 2002.

[19] V. Dolean, P. Jolivet and F. Nataf, *An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory, and Parallel Implementation*, Philadelphia: SIAM, 2015.

[20] T. Mathew, *Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations*, Berlin Heidelberg: Springer, 2008.

[21] H.A. Schwarz, “Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren”, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Vol. 15, pp. 272-286, 1870.

[22] P.L. Lions, “On the Schwarz alternating method. III: a variant for nonoverlapping subdomains”, in Proceedings of the Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Philadelphia, PA: SIAM , Vol. 6, pp. 202-223, 1990.

[23] F. Jelassi, M. Azaïez and E.P. Del Barrio, “A substructuring method for phase change modelling in hybrid media”, Computers and Fluids, Vol. 88, pp. 81-92, 2013.

[24] M. Buffoni, H. Telib and A. Iollo, “Iterative methods for model reduction by domain decomposition” Computers and Fluids, Vol. 38, pp. 1160-1167, 2009.