

Análise do comportamento da variância *a posteriori* no ajustamento de observações com injunções

Um estudo de caso com aplicação geodésica

Eurico Lourenço Nicacio Junior¹

Álvaro Muriel Lima Machado²

^{1,2} Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas

Universidade Federal do Paraná

Curitiba, PR, Brasil

euriconicacio@ufpr.br¹, alvaroml@ufpr.br²

Resumo—Sabe-se que o ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados é uma técnica amplamente utilizada em soluções de engenharia, com atenção especial para sua utilização em aplicações geodésicas, cujas observações são obtidas com técnicas de levantamento. Trata-se de uma ferramenta deveras eficaz para mitigação e tratamento de erros embutidos em observações obtidas por procedimentos tipicamente experimentais como os citados, proporcionando uma solução única e ótima para o sistema de equações tratado. Através da inserção de injunções, ou seja, restrições aplicadas ao sistema de equações posteriormente ao cálculo do ajustamento, pode-se dar maior refinamento ao resultado do ajustamento, bem como adequá-lo à realidade do levantamento realizado. Todavia, deve-se verificar qual será o impacto da inserção de injunções ao sistema sobre a variância *a posteriori*, quando esta for comparada àquela obtida no ajustamento não-injuncionado. Tal verificação se faz necessária, sumariamente, pelo fato da variância *a posteriori* atuar como um indicador da qualidade do ajustamento realizado. Destarte, este trabalho apresenta uma análise realizada sobre o comportamento da variância *a posteriori* em um ajustamento por mínimos quadrados em um estudo de caso com aplicação geodésica, quando este sofre influência direta da inserção de injunções.

Palavras-chave— método dos mínimos quadrados; rede vertical local simulada; método paramétrico com injunções; variância *a posteriori*.

I. INTRODUÇÃO

O ajustamento de observações é uma técnica amplamente empregada pela Engenharia, principalmente pela Geodésia, devido à natureza experimental do processo de obtenção de suas observações. Esta característica do método de coleta de dados embute erros nos valores observados, uma vez que não é possível obter o verdadeiro valor da grandeza observada [1]. Consequentemente, demanda-se a existência de redundância (ou seja, repetição na obtenção de um dado) e ocasiona-se inconsistência no sistema de equações que descreve o objeto de estudo (isto é, o número de equações é superior ao número de parâmetros incógnitos que as compõem).

Com o intuito de solucionar a redundância e a inconsistência supracitadas, estimando parâmetros incógnitos que se relacionam com as observações realizadas por meio de um modelo matemático conhecido e previamente estipulado [2], é necessário utilizar técnicas de ajustamento aos dados observados. O ajustamento de observações, enquanto expansão do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), é justamente o ramo da matemática que tem por objetivo gerar uma solução única e ótima para problemas onde há superabundância do número de observações e inconsistência no sistema de equações lineares [3].

Quando da realização do ajustamento, por muitas vezes pode ser desejado ou mandatário abrir mão de restrições (do inglês, *constraints*, que também pode ser traduzido como injunções) impostas ao sistema de equações. Tal ação pode ser realizada sem grandes dificuldades [1], avaliando isoladamente os efeitos das injunções e aplicando-os posteriormente ao ajustamento realizado inicialmente.

De modo complementar à realização do ajustamento, a verificação de sua qualidade por meio de análise estatística também integra parte deveras importante do tratamento das observações. Isto porque há a necessidade de verificar quão adequado foi o ajustamento e se sua normalidade se encontra dentro de parâmetros pré-estabelecidos. Referência [1] ressalta que, com este intuito, uma boa maneira de analisar a qualidade de um ajustamento é comparar a variância da unidade de peso *a priori* (σ_0^2), normalmente arbitrada unitária sem perda de generalidade no início do ajustamento, com a variância da unidade de peso *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$), obtida após o ajustamento, analisando inclusive se a discrepância entre ambos, se esta existir, é significativa a um certo nível de confiança, por meio de um teste de hipótese baseado na distribuição chi-quadrado (χ^2).

Desta forma, constata-se a importância da análise da variância *a posteriori* em um ajustamento, ressaltando-se seu emprego no presente estudo: comparar a qualidade de ajustamento inicial não-injuncionado com ajustamentos posteriores injuncionados. Justifica-se, portanto, a importância do estudo ora apresentado.

II. MATERIAIS E MÉTODOS

Conforme relatado na introdução, o comportamento da variância *a posteriori* foi estudado com o emprego de dados de um estudo de caso em uma aplicação geodésica. Foram empregadas técnicas de modelagem e ajustamento específicas, bem como o foi uma técnica de análise dos resultados baseada em teste de hipótese. Ao longo deste item, discorre-se sobre estes aspectos.

A. Aplicação geodésica

Uma aplicação geodésica nada mais é do que uma situação experimental geradora de observações de interesse da área de Ciências Geodésicas. Para este estudo específico, adotou-se como aplicação o estudo de caso de ajustamento de uma rede vertical local simulada.

Foram selecionados pontos pertencentes à Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), integrantes do Banco de Dados Geodésicos (BDG) do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) [4].

B. Banco de Dados Geodésicos do IBGE

O Banco de Dados Geodésicos do IBGE é um repositório de informações discretas de estações de referência distribuídas ao longo do território nacional, de acordo com a rede à qual pertençam. O IBGE é o responsável pela obtenção, manutenção e disponibilização dos dados das seguintes redes integrantes do SGB: Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP), Rede Planimétrica (RP) e Rede Gravimétrica (RG). Para o contexto dos dados utilizados neste trabalho, foram utilizados dados da RAAP e de seu relatório de ajustamento simultâneo [5].

A rede em tela é composta por 69.614 referências de nível (RRNN), distribuídas de forma não uniforme por todo o Brasil, conforme apresentado na Fig. 1, que contém uma visualização de seu cartograma. Cada referência de nível (RN) é materializada como um marco geodésico em formato tronco-piramidal, com uma chapa metálica em sua parte superior, na qual constam suas informações de identificação.



Fig. 1. Extrato do cartograma da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB).

Para realizar o acesso ao BDG/IBGE [4], é possível acessar o relatório de cada RN, conhecendo-se sua localização ou seu número de referência (por exemplo: RN 2053D). No relatório, estão presentes todas as informações de interesse da comunidade de ciências geodésicas, tais como suas coordenadas geodésicas, seus dados de gravimetria – quando existirem – e, o ponto mais importante para este trabalho: sua altitude ortométrica. Trata-se de uma grandeza analisada pontualmente, vinculada a um ente físico da modelagem da superfície terrestre. A Fig. 2 apresenta um extrato de um relatório de RN. Note que a informação da altitude ortométrica é exibida de maneira bastante clara e acessível ao usuário do BDG/IBGE.

Relatório de Estação Geodésica		
Estação: 3279A	Nome de Estação: 3279A	Tipo: Referência de Nível - RN
Município: CUPITIBA		UF: PR
Última Visita: 19/08/2003	Situação Marco Principal: Bom	
Coordenada: ED: 8112304		
DADOS PLANIMÉTRICOS	DADOS ALTIMÉTRICOS	DADOS GRAVIMÉTRICOS
Latitude: 25° 27' 04" S	Altitude Ortométrica(m): 608,2332	Gravimetria(m/s²): 978,76155
Longitude: 48° 13' 54" W	Nivelamento Geométrico: 19/08	Distância: 1506/2003
Fonte: GPS Navegação	Fonte Altimétrica: 0,04	Data Medição: 15/06/2011
Origen: 3 Transformada	Datum: 1988/BR	Data Cálculo: 2011/02/11
Datum: SIRGAS2000	Data Medição: 19/08/2003	
Data Medição: 19/08/2003	Data Cálculo: 15/06/2011	
Data Cálculo: 15/06/2011		
Sigma Latitude(m): 7,183 803	DADOS ALTIMÉTRICOS	
Sigma Longitude(m): 877,803	Altitude Ortométrica(m): 908,2332	
UTM(E): -61	Fonte: Nivelamento Geométrico	
MC: -61	Sigma Altitude(m): 0,04	
	Datum: Imbituba	
	Data Medição: 19/08/2003	
	Data Cálculo: 15/06/2011	

Fig. 2. Extrato de relatório de Referência de Nível (RN); em destaque, os dados altimétricos da RN.

C. Área de estudo

Para a realização do ajustamento, foram selecionadas 08 (oito) RRNN, pertencentes à RAAP e internas ao campus do Centro Politécnico da UFPR. A decisão pela utilização dos dados das RRNN ocorreu devido ao fácil acesso sobre suas informações via *site* do IBGE [4], possibilitando que os autores mantivessem o foco no desenvolvimento teórico deste artigo e em seu principal objeto de estudo: a análise do comportamento da variância *a posteriori*. A quantidade de RRNN e a escolha pontual das estações adotadas ocorreu tendo em vista gerar uma melhor triangulação para determinação das equações do modelo matemático, abordado no item a seguir.

Na Fig. 3, pode-se verificar as estações selecionadas, com o destaque em cores ocorrendo da seguinte forma: em verde, a RN utilizada como ponto de partida e chegada da rede de nivelamento simulada (a saber: RN 2053D); em vermelho, 04 RRNN utilizadas como injunções no ajustamento (a saber: RRNN 3279B, 3279G, 3093A e 3279N); em azul, as 03 RRNN restantes utilizadas no ajustamento (a saber: RRNN 3278C, 3279A e 3279H). Como será mostrado no item E, para fins de análise, em um momento posterior tanto as RRNN em vermelho quanto as RRNN em azul foram utilizadas como injunções. Demais informações sobre as RRNN serão omitidas deste trabalho, para fins práticos, mas podem ser obtidas em seus respectivos relatórios no BDG/IBGE [4].

D. Modelagem matemática

Conforme já citado, para simular a realização de uma operação de nivelamento geométrico, utilizou-se os dados de altitude ortométrica de cada uma das RRNN listadas anteriormente, obtidos em seus respectivos relatórios por intermédio do site do IBGE [4].

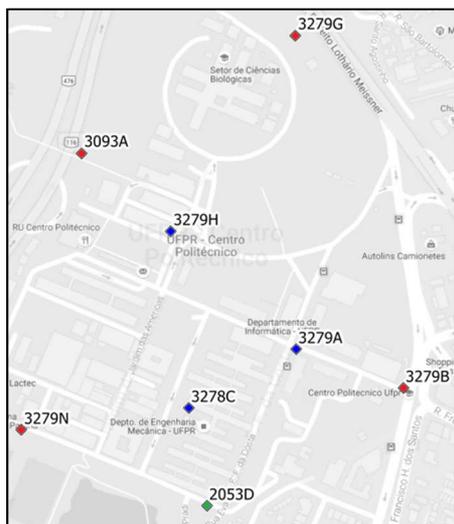


Fig. 3. Área de estudo com realce para RRNN utilizadas.

De posse desses dados, definiu-se o modelo matemático como segue: calculou-se, inicialmente, o desnível (ΔH) entre as RRNN, tomadas duas-a-duas e segundo arestas e triângulos gerados pela ferramenta de triangulação de Delaunay do software QGIS, conforme apresentado na Fig. 4. Observa-se, da figura citada, que foi possível então gerar 16 (dezesseis) equações para o ajustamento, mesmo número de arestas da triangulação usadas para determinação dos desníveis a serem considerados, atestando a redundância do sistema de equações.

A partir deste ponto, o conhecimento das altitudes ortométricas foi ignorado e os desníveis foram então tomados como observações para a realização do ajustamento. Adotou-se, na sequência, outro procedimento concernente à determinação das variâncias das observações: como os pontos utilizados já pertencem à RAAP, uma rede complexa e ajustada, não foi viável utilizar as precisões constantes de seus relatórios, para não configurar viés na análise. Foi necessário, então, obter novas variâncias para os desníveis utilizados através da geração de números aleatórios segundo uma distribuição normal.

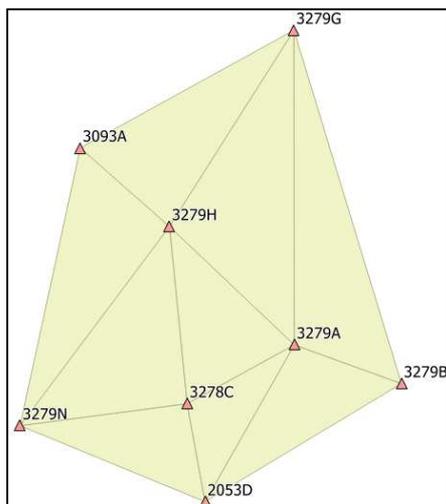


Fig. 4. Triangulação utilizada para determinação dos desníveis para o modelo matemático.

Esta ação foi tomada porque primou-se pela manutenção dos significados físico e prático da aplicação ora estudada, bem como buscou-se manter a imparcialidade na análise dos dados. Seguiu-se, para tanto, uma distribuição normal univariada positiva, com média $\mu \cong 0,0775 m$ e desvio-padrão $\sigma \cong 0,0046 m$. Estes valores de média e desvio-padrão da distribuição normal foram definidos após a realização de alguns testes sobre os números aleatórios, de tal forma que fosse possível, para todos os valores finais de variância obtidos, obter respectivos valores de desvio-padrão – ou precisões das medições, sob a óptica da realização da operação de nivelamento – coerentes com a precisão de equipamentos usualmente empregados para realizá-la.

Por fim, de posse dos dois conjuntos de dados – desníveis e variâncias – buscou-se determinar as altitudes ortométricas para a rede altimétrica local simulada. O próximo passo no procedimento que se detalha foi adotar uma das RRNN como ponto de partida e chegada para a rede de nivelamento simulada. Conforme já relatado no item B, a RN 2053D, destacada em verde na Fig. 3 e presente na porção centro-inferior da Fig. 4, foi escolhida com este propósito.

Feito isto, realizou-se o ajustamento propriamente dito em duas etapas: a primeira delas, aqui denominada “ajustamento completo pelo método paramétrico” e descrita no item E.1, referente ao ajustamento livre de todas as demais RRNN, para fins de determinação de variância *a posteriori* para comparativo; e a segunda, denominada “ajustamento pelo método paramétrico com injunções” e descrita no item E.2, referente ao ajustamento com a adoção gradual das RRNN da área de estudo, também segundo relatado no item E.2, em forma de injunções.

E. Ajustamento das observações

Para o cálculo dos ajustamentos, foram desenvolvidos algoritmos no software MATLAB. Seguindo o procedimento e a modelagem matemática descritos no item D, utilizou-se os dados presentes na Tabela I e na Tabela II para realizar os cálculos descritos nos itens a seguir, objetivando-se determinar as altitudes ortométricas por meio do ajustamento de observações pelo método paramétrico.

1) *Ajustamento completo pelo método paramétrico:* Conforme já citado, o método adotado para o ajustamento completo da rede vertical simulada foi o método paramétrico, devido ao formato com que a relação entre parâmetros e observações se articula, como modelado por (1), onde L_a representa o vetor dos valores observados ajustados e X_a representa o vetor dos parâmetros ajustados e F a função ou modelo matemático que os relaciona.

$$L_a = F(X_a) \quad (1)$$

A formulação básica para solucionar ajustamento sem injunções com tal método se dá por meio de (2), onde X é o vetor correção a ser aplicado aos parâmetros, A é a matriz das derivadas parciais do modelo funcional em relação aos parâmetros, P representa a matriz de pesos das observações, N e U são as chamadas matrizes normais e equivalentes aos

valores entre parênteses na última parte da equação, e L é o vetor que satisfaz a equação $AX + L = 0$ [1].

$$X = -N^{-1}U = -(A^T P A)^{-1}(A^T P L) \quad (2)$$

Tendo esta base teórica, utilizou-se os dados constantes na Tabela I para determinar os valores das altitudes ortométricas das RRNN por meio do ajustamento.

TABELA I. DADOS PARA CÁLCULO DO AJUSTAMENTO COMPLETO

Dados para cálculo do ajustamento completo		
Trecho	Desnível (m)	Variância (m ²)
2053D - 3279N	4,6863	0,1147
3279N - 3093A	8,2689	0,1069
3279G - 3093A	22,9492	0,0809
3279G - 3279B	6,6741	0,2944
3279B - 2053D	3,3199	0,1438
2053D - 3279A	6,1501	0,0325
3279B - 3279A	9,4700	0,0755
3278C - 3279N	2,0407	0,1370
2053D - 3278C	2,6456	0,1711
3279N - 3279H	1,1354	0,0102
3278C - 3279H	3,1761	0,0241
3279H - 3279A	0,3284	0,0319
3279G - 3279H	15,8157	0,0313
3279G - 3279A	16,1441	0,0865
3278C - 3279A	3,5045	0,0030
3279H - 3093A	7,1335	0,0165

2) *Ajustamento pelo método paramétrico com injunções*: A aplicação de injunções foi realizada num momento posterior, justamente para gerar dados para embasar a análise comparativa. Ainda segundo a referência citada anteriormente, a solução de um ajustamento pelo método paramétrico com injunções é dada por (3), onde o primeiro conjunto de equações normais (N e U) se refere ao ajustamento inicial, o segundo conjunto de equações normais (N_C e U_C) se refere às equações de condição das injunções consideradas, C é a matriz das derivadas parciais das equações de condição do modelo funcional da injunção em relação aos parâmetros, e ε representa o erro de fechamento do modelo, sendo igual a diferença entre os valores calculado e observado ($\varepsilon = Valor_{calculado} - Valor_{observado}$). Note que a adoção de um novo conjunto de observações demanda a existência de uma nova matriz de pesos a elas associada (P_C), também presente na obtenção de (3).

$$X = -(N + N_C)^{-1}(U + U_C) \quad (3)$$

$$onde: \begin{cases} N = A^T P A \\ U = A^T P L \end{cases} e \begin{cases} N_C = C^T P_C C \\ U_C = C^T P_C \varepsilon \end{cases}$$

A partir deste embasamento teórico, utilizou-se os dados constantes na Tabela II para realizar o ajustamento com os valores das RRNN injunccionados.

TABELA II. DADOS PARA CÁLCULO DO AJUSTAMENTO COM INJUNÇÕES

Dados para cálculo do ajustamento com injunções		
RN	H (m)	Variância (m ²)
3279N	909,6970	(*)
3093A	901,4281	(*)
3279G	924,3773	(*)
3279B	917,7032	(*)
3278C	911,7377	(*)
3279H	908,2332	(*)

Conforme exibido no item III, apesar do intuito principal do artigo ser voltado para as injunções referentes à linha limítrofe da área de estudo, adotou-se uma inserção gradual de injunções (de uma a seis injunções) para viabilizar a análise progressiva do modelo e da variância *a posteriori* obtida em cada ajustamento. Observe, ainda na Tabela II, a existência de um asterisco (*) na coluna referente à variância das injunções. Tal representação é utilizada por não ter sido adotado um valor pontual para tal propriedade, mas sim por ter sido realizada uma variação iterativa de tais variâncias, simultaneamente em todas as injunções, entre os valores de $\sigma_{inj}^2 = 0,0001$ e $\sigma_{inj}^2 = 1$, segundo intervalos $\Delta(\sigma_{inj}^2) = 0,0001$, totalizando 1.000 (mil) iterações em cada ajustamento.

F. Variância a posteriori

Conforme discorrido na introdução, a variância *a posteriori* configura característica do ajustamento realizado, enquanto fator que relaciona as observações realizadas e as ajustadas, a qual é capaz de fornecer informações sobre a qualidade do ajustamento realizado. Esta diferencia-se da variância *a priori* basicamente por dois motivos: o primeiro deles, como já relatado, concentra-se no fato da variância *a priori* ser arbitrada quando do início do ajustamento – normalmente arbitrada unitária ($\sigma_0^2 = 1$) – para viabilização da utilização da técnica e sem perda de generalidade. Isto porque a obtenção da matriz de pesos das observações [P] é realizada por intermédio de (4), onde σ_0^2 é justamente a variância *a priori* e Σ_{L_b} é a matriz variância (diagonal) dos valores observados

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1} \quad (4)$$

O segundo ponto que é importante para compreensão da diferença entre a variância *a priori* e a variância *a posteriori* relaciona-se à noção temporal de sua obtenção. A variância *a priori* é, de fato, obtida no início do ajustamento. A variância *a posteriori*, por sua vez, é obtida ao término do ajustamento,

após a obtenção das observações ajustadas, com ou sem injunção, para benefício do entendimento e da verificação da qualidade da operação realizada.

Seguindo esta ideia, para o cálculo das variâncias *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$), novamente foram desenvolvidos algoritmos no *software* MATLAB. O procedimento matemático, todavia, seguiu o preconizado nas fórmulas tradicionais de Uotila para obtenção da variância *a posteriori*, conforme consta em (5) e (6), no ajustamento completo e injuncionado, respectivamente [1]. Nas referidas equações, V representa o vetor dos resíduos, P representa novamente a matriz de pesos das observações e ν é o número de graus de liberdade para os ajustamentos completo (ν_{completo}) e injuncionado (ν_{inj}); ν , por sua vez, depende de n , que é o número de equações de observação, de u , que é o número de parâmetros, e de k , que é o número de equações de injunção, quando ocorrem.

$$\hat{\sigma}_0^2_{\text{completo}} = \frac{V^T P V}{\nu_{\text{completo}}} = \frac{V^T P V}{n - u} \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}_0^2_{\text{injuncionado}} = \frac{V^T P V}{\nu_{\text{inj}}} = \frac{V^T P V}{n - u + k} \quad (6)$$

Ressalta-se ainda que uma boa análise para a comparação entre a variância *a priori* (σ_0^2) com a variância *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$), se dá como segue [1]:

- $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$: a qualidade das observações é pior do que se supunha, tendo elas sido superestimadas;
- $\hat{\sigma}_0^2 < \sigma_0^2$: a qualidade das observações é melhor do que se supunha, tendo elas sido subestimadas;

Considerando a adoção arbitrária de valor unitário para a variância *a priori* (σ_0^2), conforme já citado anteriormente, a análise final baseia-se na comparação da variância *a posteriori* exatamente com o valor unitário e sua tendência a alcançá-lo.

G. Teste de hipótese

Com o objetivo de realizar uma análise estatística mais aprofundada, adotou-se como abordagem o desenvolvimento do teste de hipótese global qui-quadrado. Isto porque normalmente, em observações geodésicas, postula-se que o vetor de observações tem uma função de distribuição de probabilidade do tipo normal, com certa média e variância, sendo que estes dois parâmetros a definem totalmente [5].

A adoção de tal teste deu-se, sumariamente, por recomendação em bibliografia sobre o tema [1,6], haja vista a aplicação do teste em questão como estimativa por intervalo para a variância, a facilidade de manuseio do teste, a modelagem como distribuição normal supracitada e sua possibilidade de interpretação como intervalo de confiança e significância. Sua aplicação em hipóteses conforme descrito em (7) [1].

$$\begin{cases} H_0: \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \text{ (hipótese básica)} \\ H_1: \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (hipótese alternativa)} \end{cases} \quad (7)$$

Considerando-se o viés de análise proposto neste artigo, buscou-se verificar, para cada ajustamento injuncionado e para cada valor de variância das injunções, qual o nível de confiança $(1 - \alpha)$ abrangido pelo modelo. Abreviando a teoria por motivo de necessidade, em cada caso comparou-se o valor de χ^{*2} , calculado por intermédio de (8), na qual ν representa o número de graus de liberdade obtido conforme discorrido no subitem anterior e expresso em (5) e (6), com valores de α que tornem (9) verdadeira e, conseqüentemente, ocasionem a não-rejeição da hipótese básica H_0 [7].

$$\chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \nu \quad (8)$$

$$\chi_{\nu, \alpha/2}^2 < \chi^{*2} < \chi_{\nu, 1-\alpha/2}^2 \quad (9)$$

III. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Conforme relatado, para a obtenção dos resultados, utilizou-se os dados e a metodologia exposta ao longo do item II. Foi necessário, ainda, uma divisão dos ajustamentos realizados em etapas, como segue:

- Etapa A: ajustamento completo pelo método paramétrico, conforme descrito em II.E.1;
- Etapa B: ajustamento pelo método paramétrico com 01 (uma) injunção;
- Etapa C: ajustamento pelo método paramétrico com 02 (duas) injunções;
- Etapa D: ajustamento pelo método paramétrico com 03 (três) injunções;
- Etapa E: ajustamento pelo método paramétrico com 04 (quatro) injunções;
- Etapa F: ajustamento pelo método paramétrico com 05 (cinco) injunções;
- Etapa G: ajustamento pelo método paramétrico com 06 (seis) injunções;

Apesar da proposta inicial do artigo estar calcada apenas nas etapas A e E supracitadas, devido a sua maior frequência de ocorrência em aplicações geodésicas como a estudada, as demais etapas foram utilizadas para dar maior abrangência à análise. De posse dos dados, do modelo e do algoritmo para solucioná-lo, seguindo a variação iterativa da variância das injunções entre $\sigma_{inj}^2 = 0,0001$ e $\sigma_{inj}^2 = 1$, foi possível obter diferentes valores de variância *a posteriori* para o ajustamento.

A primeira análise considerada foi acerca da geração aleatória das variâncias dos valores tomados como observações (desníveis entre os pontos) mas que, na verdade, foram obtidos a partir de altitudes ortométricas precisas, oriundas de uma rede altimétrica de alta precisão. Para verificar a consistência da abordagem, foram gerados ao todo 10.000 (dez mil) conjuntos de 16 (dezesesseis) variâncias, conforme os apresentados na Tabela I. Não foi realizada qualquer filtragem dos dados para remoção de eventuais inconsistências e valores *outliers*,

justamente para verificar também a validade deste tipo de abordagem em aplicações similares. Constatou-se que 5,19% dos conjuntos gerados forneceram valores tendenciosos para a variância *a posteriori* (inferiores a 1 ou superiores a 15). Verificou-se, ainda, que 84,84% dos conjuntos gerados randomicamente forneceram valores de variância *a posteriori* iguais ou superiores àquele adotado como padrão e oriundos da primeira iteração do algoritmo ($\hat{\sigma}_{0A}^2 = 2,6243$). Por fim, atestou-se que, aplicando-se o teste de Anderson-Darling a cada um dos 10.000 (dez mil) conjuntos de 16 (dezesseis) variâncias geradas aleatoriamente, confirma-se a aderência dos mesmos à distribuição normal. Sendo assim, o estudo apresenta resultados estatisticamente não-tendenciosos e aceitáveis no que diz ao aspecto aleatório da geração das variâncias das observações.

Como próximo passo, os principais resultados das variâncias *a posteriori* encontram-se dispostos na Tabela III, em função da variância das injunções empregadas (σ_{inj}^2) e divididos de acordo com a etapa de ajustamento (B a G). Observe que os valores da etapa A encontram-se omitidos da Tabela III, para evitar redundância. Isto porque, para a referida etapa de ajustamento, não houve atuação acerca das variâncias das injunções, unicamente pelo fato do ajustamento não apresentar injunções. Todavia, para tal ajustamento, obteve-se o valor de variância *a posteriori* $\hat{\sigma}_{0A}^2 = 2,6243 [m^2]$, conforme já citado anteriormente.

Ainda a respeito da Tabela III, é possível verificar que os valores de variância das injunções (σ_{inj}^2) forma dispostos de maneira crescente e segundo um espaçamento uniforme, dentro de intervalos específicos, excetuando-se um valor $\sigma_{inj}^2 = 0,0032$. Destacou-se tal valor por ser a variância obtida para cada desnível ao realizar a propagação das variâncias verdadeiras de cada altitude ortométrica utilizada para seu cálculo ($\sigma_H^2 = 0,0016 m^2$), consonante aos relatórios das RN.

TABELA III. VARIÂNCIA A POSTERIORI OBTIDA EM CADA UM DOS AJUSTAMENTOS

σ_{inj}^2 (m^2)	$\hat{\sigma}_0^2$ (m^2), em cada um dos ajustamentos					
	B	C	D	E	F	G
0,0001	2,4329	2,4520	2,4229	2,2365	2,0768	1,9383
0,0032	2,4322	2,4491	2,4183	2,2323	2,0728	1,9347
0,0050	2,4318	2,4471	2,4154	2,2296	2,0703	1,9323
0,0100	2,4308	2,4424	2,4084	2,2232	2,0644	1,9269
0,0500	2,4238	2,4101	2,3653	2,1843	2,0283	1,8948
0,1000	2,4167	2,3794	2,3274	2,1508	1,9974	1,8684
0,3000	2,3996	2,3079	2,2365	2,0715	1,9246	1,8073
0,5000	2,3906	2,2709	2,1846	2,0258	1,8826	1,7709
0,6000	2,3876	2,2582	2,1658	2,0090	1,8671	1,7571
0,7000	2,3851	2,2479	2,1500	1,9947	1,8540	1,7452
0,8000	2,3831	2,2394	2,1366	1,9825	1,8428	1,7349
0,9000	2,3814	2,2322	2,1251	1,9719	1,8330	1,7258
1,0000	2,3799	2,2262	2,1152	1,9627	1,8245	1,7177

Para facilitar a visualização dos resultados e seu comportamento contínuo ao longo da faixa estudada, expõe-se aqui o gráfico presente na Fig. 5. É possível verificar, por uma análise conjugada da Tabela III e da Fig. 5, que quanto maior o número de injunções impostas ao ajustamento, maior será sua aproximação do valor unitário ($\hat{\sigma}_0^2 \rightarrow 1$), ou seja, sua tendência a se igualar à variância *a priori*, indicando caso ótimo do ajustamento.

A única exceção para a tendência geral das variâncias *a posteriori* ocorre com as etapas B e C, que representam ajustamento com uma e com duas injunções, respectivamente; nota-se que para valores da variância das injunções no intervalo $0,0001 m^2 < \sigma_{inj}^2 < 0,0271 m^2$, os resultados da variância *a posteriori* com uma única injunção são melhores (leia-se, mais próximos da variância *a priori*) do que com duas injunções (linhas em laranja e amarelo no gráfico da Fig. 5). Apesar de não haver justificativa aparente, estima-se que tal fato se dê por questões específicas de modelagem e condicionamento do sistema. Como tal condição se manteve mesmo com a alteração da ordem de inserção das injunções, e como a representatividade do intervalo é pequena dentro de toda a faixa estudada (aproximadamente 2,8% do intervalo completo), conclui-se que tal aspecto pontual não vem a depor contra os experimentos e resultados ora apresentados.

Abordando, agora, os testes de hipótese realizados, é possível observar na Tabela IV e na Fig. 6 o comportamento dos intervalos de confiança ($1 - \alpha$) para os quais a hipótese básica é válida. Novamente, omitiu-se da tabela principal o valor obtido para a etapa A, pois não houve alteração com a iteração da variância das injunções, uma vez que tal etapa de ajustamento não possui injunção. Entretanto, para tal ajustamento, obteve-se o valor de nível de confiança ($1 - \alpha$) = 97,7351%, conforme pode ser visto no gráfico da Fig. 6.

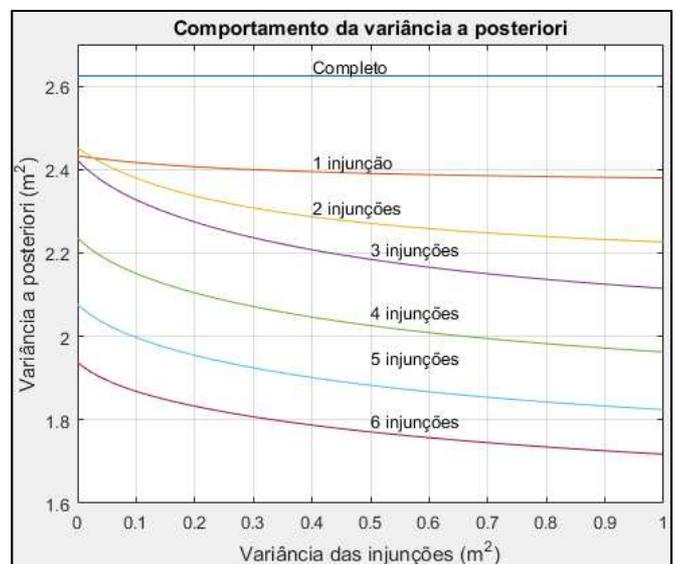


Fig. 5. Comportamento contínuo da variância *a posteriori* em cada etapa de ajustamento, em função da variância das injunções.

TABELA IV. NÍVEL DE CONFIANÇA EM CADA UM DOS AJUSTAMENTOS

Nível de confiança em cada um dos ajustamentos, em função da variância das injunções						
σ_{inj}^2 (m ²)	Nível de confiança (1 - α), (%), em cada um dos ajustamentos					
	B	C	D	E	F	G
0,0001	99,1818	99,6171	99,8427	99,9577	99,9895	99,9976
0,0032	99,1827	99,6192	99,8442	99,9581	99,9896	99,9976
0,0050	99,1832	99,6206	99,8451	99,9584	99,9897	99,9976
0,0100	99,1846	99,6239	99,8473	99,9591	99,9899	99,9977
0,0500	99,4941	99,6457	99,8605	99,9629	99,9909	99,9979
0,1000	99,2034	99,6659	99,8714	99,9660	99,9917	99,9981
0,3000	99,2259	99,7089	99,8948	99,9724	99,9934	99,9985
0,5000	99,2376	99,7295	99,9066	99,9757	99,9943	99,9987
0,7500	99,2460	99,7441	99,9153	99,9781	99,9949	99,9988
1,0000	99,2512	99,7530	99,9208	99,9797	99,9953	99,9989

É possível verificar que, mesmo com pequena disparidade entre os níveis de confiança, chegando ao valor máximo de aproximadamente 2,26% para um mesmo valor de variância de injunção (diferença entre níveis de confiança das etapas A e G, para $\sigma_{inj}^2 = 1 \text{ m}^2$), todos os valores obtidos foram superiores aos tradicionais 95% adotados como referência para testes de hipótese similares em aplicações geodésicas [1], aumentando com o incremento da quantidade de injunções atribuídas ao ajustamento. Novamente, constata-se que melhores resultados de níveis de confiança estão associados com maior quantidade de condições particulares impostas ao ajustamento.

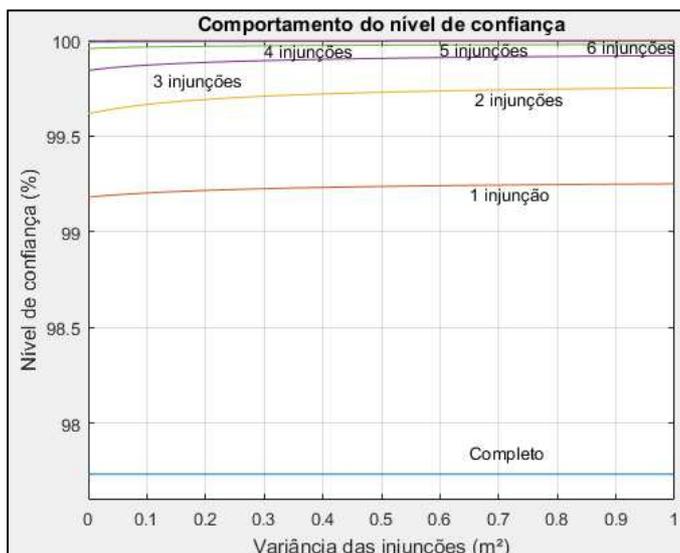


Fig. 6. Comportamento do nível de confiança em cada etapa de ajustamento, em função da variância das injunções.

Destarte, após as análises realizadas sobre o estudo de caso ora apresentado, verifica-se que, tomada uma aplicação geodésica similar à utilizada, bem como tomadas uma

abordagem e uma modelagem matemática similares, o ajustamento injunção é capaz de fornecer melhores valores de variância *a posteriori*, e consequentemente melhor qualidade de ajustamento, do que aquele prejudicado de tal condição, sendo tal melhoria gradativa à inserção de novas e mais precisas condições particulares – as injunções propriamente ditas.

Para o caso particular da proposta inicial do artigo, considerando o viés prático já mencionado anteriormente, a aplicação de injunções nos limites da área de estudo mostrou-se de fato benéfico e deve ser empregado sempre que as condições de execução permitirem. Recomenda-se, no entanto, a realização de estudos voltados à descoberta de condicionantes e à imposição de limites generalizados, se houverem, para as suposições adotadas e para as conclusões ora alcançadas, expandindo o estudo de caso para abordagens mais genéricas de aplicações geodésicas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Exército Brasileiro, especialmente ao Departamento de Ciência e Tecnologia (DCT) e à Diretoria de Serviço Geográfico (DSG), pela concessão de dedicação integral ao primeiro autor para realização de seu mestrado, possibilitando também aperfeiçoamento e produção científica em áreas correlatas, como a presente.

Os autores agradecem ao PPGCG-UFPR – Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela estrutura, equipamentos e recursos humanos integrados que possibilitaram a execução deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] C. Gemael, A. M. L. Machado e R. Wandresen, "Introdução ao ajustamento de observações – aplicações geodésicas.", 2ª ed. Ed UFPR, Curitiba, Brasil, 2015.
- [2] P. J. G. Teunissen, "Testing Theory: an introduction", 2ª ed. Ed VSSD, Delft, Países Baixos, 2006.
- [3] Q. Dalmolin, "Ajustamento por Mínimos Quadrados", 2ª ed. Ed UFPR, Curitiba, Brasil, 2004.
- [4] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, "Banco de Dados Geodésicos – Modo Textual". [Online]. Disponível: http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/bdgpesq_googlemap_s.php. Acessado: Aug. 10, 2016.
- [5] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, "Ajustamento Simultâneo da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro - Relatório". [Online]. Disponível: ftp://geoftp.ibge.gov.br/informacoes_sobre_posicionamento_geodesico/r_ede_altimetrica/relatorio/relatorioajustamento.pdf. Acessado: Aug. 10, 2016.
- [6] R. R. Steeves e C. S. Fraser, "Statistical Post-Analysis of Least Square Adjustment Results" in Papers for the CISM Adjustment and Analysis Seminars, Canadian Institute of Geomatics, 1983.
- [7] F. J. B. Mendonça, S. J. A. Garnés, C. M. Pereira, J. A. Barroso Neto e W. D. A. Melo, "Análise do ajustamento por Mínimos Quadrados de uma trileração topográfica com injunções nos planos UTM e Topocêntrico", in III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, Recife, Brasil, 2010. pp. 001 – 009. Disponível: https://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOIII/IIISIMGEO_CD/artigos/Cad_Geo_d_Agrim/Geodesia%20e%20Agrimensura/A_109.pdf