

Análise de Vigas sobre Base Elástica com o Método dos Elementos de Contorno

Eduardo Henrique Viecilli Martins de Mello
José Antonio Marques Carrer
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil
eduardo.mello@ufpr.br; carrer@ufpr.br

Raphael Fernando Scuciato
Departamento de Construção Civil
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil
raphael.scuciato@ufpr.br

Resumo—Este trabalho desenvolve uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise estática do problema de vigas sobre base elástica. Essa análise é feita com a formulação baseada na teoria clássica de vigas (teoria de Euler-Bernoulli). São desenvolvidas equações para o cálculo de deslocamento, rotação, momento fletor e esforço cortante para pontos no domínio da viga.

Palavras-chave—viga sobre base elástica, Método dos Elementos de Contorno, teoria de Euler-Bernoulli.

I. INTRODUÇÃO

Vigas são elementos estruturais presentes na engenharia. O cálculo de sua deformação e esforços internos é utilizado para seu dimensionamento e verificação. Esse cálculo pode ser feito com a teoria clássica de vigas, ou teoria de Euler-Bernoulli, que adota algumas hipóteses. Essas hipóteses, encontradas em [1] e [2], assumem que: (i) a viga é prismática e possui um eixo central reto; (ii) a seção transversal da viga possui um eixo de simetria; (iii) as seções perpendiculares ao eixo central reto permanecem planas após a deformação; e (iv) as deformações transversais são pequenas.

Quatro tipos comuns de vigas são a biapoiada, biengastada, engastada-apoiada e engastada-livre. Cada tipo de apoio impõe condições de contorno diferentes, conforme [1], [3] e [4].

A base elástica, presente em toda a extensão da viga, agrega uma característica ao problema: a constante de rigidez da mola. Com a consideração da base elástica, vigas apoiadas sobre o solo, ou vigas baldrame, podem ser analisadas. Nesses casos, a constante da mola representa o efeito do solo na estrutura [5].

II. VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA

A equação unidimensional da viga sobre base elástica obtida com a teoria clássica (ou de Euler-Bernoulli) é

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + ku = q, \quad (1)$$

onde $u = u(x)$ é o deslocamento transversal, $q = q(x)$ é o carregamento externo, k é a constante de mola associada à base elástica, E é o módulo de elasticidade longitudinal, I é a inércia da seção transversal da viga e x é a coordenada espacial. Neste problema, $0 \leq x \leq L$, onde L é o vão da viga. A obtenção desta formulação pode ser vista em [5] e em [6].

As propriedades citadas anteriormente podem ser visualizadas na Fig. 1.

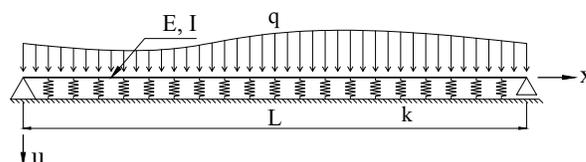


Figura 1. Arranjo esquemático de viga sobre base elástica

As condições de contorno essenciais do problema são

$$u(0), u(L), \theta(0) = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} \quad \text{e} \quad \theta(L) = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L}. \quad (2)$$

Em (2), θ é a rotação da seção transversal após a deformação.

As condições de contorno naturais do problema são

$$M(0) = -EI \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=0}, \quad M(L) = -EI \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=L}, \quad (3)$$
$$Q(0) = -EI \left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_{x=0} \quad \text{e} \quad Q(L) = -EI \left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_{x=L}.$$

Em (3), M é o momento fletor e Q é a força cortante após a deformação.

Cada tipo de apoio define quais condições de contorno são conhecidas. No apoio simples, por exemplo, o deslocamento e o momento fletor são conhecidos enquanto que no engaste o deslocamento e a rotação são conhecidas. Estes e outros tipos de apoio podem ser vistos em [1] e [4].

III. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A abordagem do Método dos Elementos de Contorno (MEC) simplifica a solução do problema, pois trabalha somente com a discretização do contorno [7]. Como a formulação desenvolvida é unidimensional, os contornos se resumem aos extremos da viga estudada. Especificamente, para uma viga de comprimento L , o contorno será constituído dos nós $x = 0$ e $x = L$. Após a obtenção dos valores das incógnitas no contorno, o cálculo de deslocamentos, rotações, momentos fletores e forças cortantes para os pontos internos são obtidos numa etapa de pós-processamento.

A formulação do MEC pode ser obtida partindo da aplicação da técnica de resíduos ponderados em (1). A partir daqui, u refere-se à solução aproximada.

Para o desenvolvimento da formulação, foi considerada uma viga apoiada-apoiada, que contém deslocamentos e momentos fletores prescritos nos nós do contorno, ou seja, $u(0) = \hat{u}(0)$, $u(L) = \hat{u}(L)$, $M(0) = \hat{M}(0)$ e $M(L) = \hat{M}(L)$.

O resultado é

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^4 u}{dx^4} + ku \right) w dx + (u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (M - \hat{M}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=0} + (u - \hat{u}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=L} + (M - \hat{M}) \bar{\bar{\bar{w}}} \Big|_{x=L} = \int_0^L q w dx, \quad (4)$$

onde w , \bar{w} , $\bar{\bar{w}}$, $\bar{\bar{\bar{w}}}$ e $\bar{\bar{\bar{\bar{w}}}}$ são as funções de ponderação.

A escolha das funções de ponderação é

$$\bar{w} = -EI \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad \bar{\bar{w}} = EI \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad \bar{\bar{\bar{w}}} = \frac{dw}{dx} \quad \text{e} \quad \bar{\bar{\bar{\bar{w}}}} = -\frac{dw}{dx}. \quad (5)$$

Transformando a primeira integral de (4) com a integração por partes, dividindo por EI e considerando as igualdades em (2), (3) e (5) chega-se a

$$\begin{aligned} & -\frac{Q}{EI} w \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{\hat{M}}{EI} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}^{x=L} + \theta \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & -\hat{u} \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left(\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{k}{EI} w \right) u dx = \int_0^L \frac{q}{EI} w dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Ao retirar a indicação dos valores prescritos em (6), a expressão se torna geral, para todo tipo de viga.

A escolha da solução fundamental como a função de ponderação w é a principal característica do MEC [7]. A solução fundamental, que não depende das condições de contorno, para este problema é a que atende a seguinte igualdade

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{k}{EI} w = \delta(x - \xi), \quad (7)$$

onde o lado direito da equação contém uma função delta de Dirac aplicada em $x = \xi$. O ponto ξ é denominado ponto fonte e um ponto x do domínio é denominado ponto campo.

Ao aplicar esta igualdade em (6), a integral que envolve u é cancelada devido às propriedades da função delta de Dirac.

A solução de (7) pode ser encontrada em [8] e é

$$w = u^*(\xi, x) = \frac{1}{2a^3} \exp\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}r\right) \sin\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (8)$$

onde $r = |\xi - x|$ e $a = \sqrt[4]{k/EI}$.

Substituindo (8) em (6), chega-se a

$$\begin{aligned} u(\xi) = & \frac{Q}{EI} u^* \Big|_{x=0}^{x=L} - \frac{M}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=L} - \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \Big|_{x=0}^{x=L} + \\ & u \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^\xi \frac{q}{EI} u^* dx + \int_\xi^L \frac{q}{EI} u^* dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Ao substituir $\xi = 0$ e $\xi = L$ em (9), duas equações são obtidas. Porém, elas não são suficientes para solucionar o problema.

Derivando (9) em relação a ξ , resulta em

$$\begin{aligned} \theta(\xi) = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Q}{EI} u^* \right) \Big|_{x=0}^{x=L} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^\xi \frac{q}{EI} u^* dx \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_\xi^L \frac{q}{EI} u^* dx \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Escrevendo (10) em $\xi = 0$ e $\xi = L$, outras duas equações são obtidas, possibilitando a solução do problema.

Ao resolver o sistema de equações, todos as variáveis (u , θ , M e Q) ficam conhecidas no contorno. Assim, pode-se calcular o valor destas para os pontos internos do domínio.

O deslocamento e a rotação são calculados substituindo ξ pela coordenada de interesse em (9) e (10). O momento fletor e a força cortante, que são de grande interesse para o dimensionamento de vigas, são obtidos com um procedimento análogo ao utilizado na obtenção de (10).

Ao derivar (9) duas vezes em relação a ξ e considerar a igualdade em (3), tem-se

$$\begin{aligned} EIM(\xi) = & -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{Q}{EI} u^* \right) \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(u \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\int_0^\xi \frac{q}{EI} u^* dx \right) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\int_\xi^L \frac{q}{EI} u^* dx \right), \end{aligned} \quad (11)$$

que é a equação do momento fletor para um ponto ξ pertencente ao domínio. Para a força cortante, deriva-se (9) três vezes em relação a ξ e, considerando a igualdade em (3), chega-se a

$$\begin{aligned} EIQ(\xi) = & -\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(\frac{Q}{EI} u^* \right) \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & + \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(\theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(u \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(\int_0^\xi \frac{q}{EI} u^* dx \right) - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(\int_\xi^L \frac{q}{EI} u^* dx \right). \end{aligned} \quad (12)$$

IV. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com a formulação descrita anteriormente, todo tipo de viga em equilíbrio pode ser calculado. As vigas analisadas foram a biapoiada, ou apoiada-apoiada, com apoio simples nos dois nós do contorno e a biengastada, ou engastada-engastada, com engaste nos dois nós do contorno. Os resultados obtidos, adotando $L = 2$ m, $q = 32,75$ kN/m, $k = 1$ kN/m, $E = 210$ GPa, $I = 1,893 \times 10^{-4}$ m⁴ e 19 pontos internos, foram comparados com a solução analítica, disponível em [5].

A. Apoiada-Apoiada

As Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4 e Fig. 5 representam, respectivamente, o deslocamento, a rotação, o momento fletor e a força cortante ao longo da viga biapoiada.

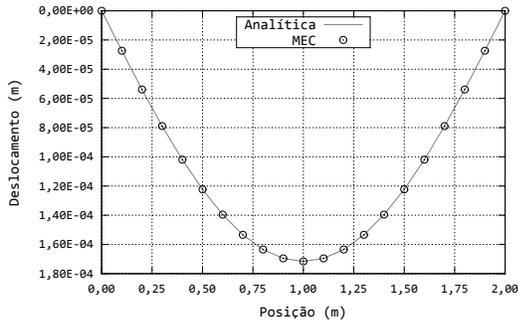


Figura 2. Deslocamento transversal para a viga apoiada-apoiada.

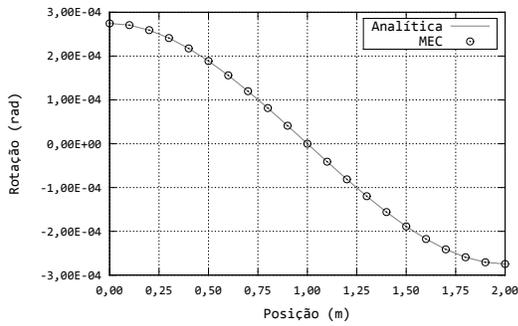


Figura 3. Rotação para a viga apoiada-apoiada.

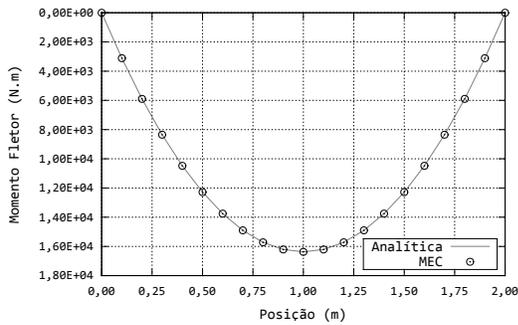


Figura 4. Momento fletor para a viga apoiada-apoiada.

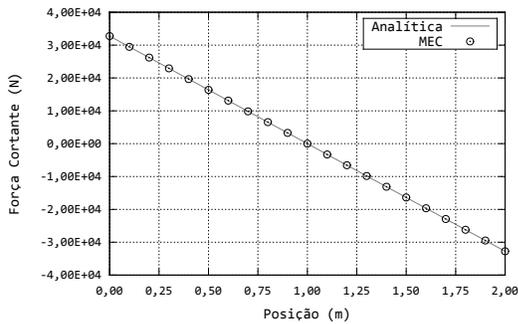


Figura 5. Força cortante para a viga apoiada-apoiada.

B. Engastada-Engastada

As Fig. 6, Fig. 7, Fig. 8 e Fig. 9 representam, respectivamente, o deslocamento, a rotação, o momento fletor e a força cortante ao longo da viga biengastada.

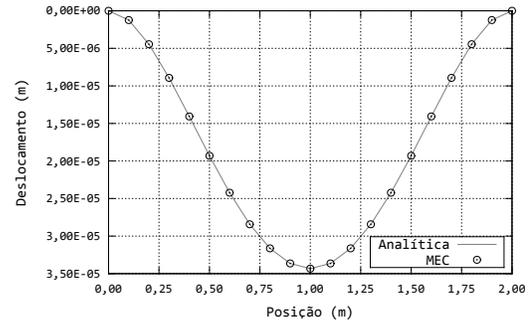


Figura 6. Deslocamento transversal para a viga engastada-engastada.

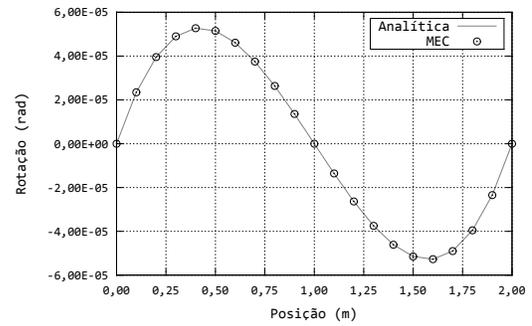


Figura 7. Rotação para a viga engastada-engastada.

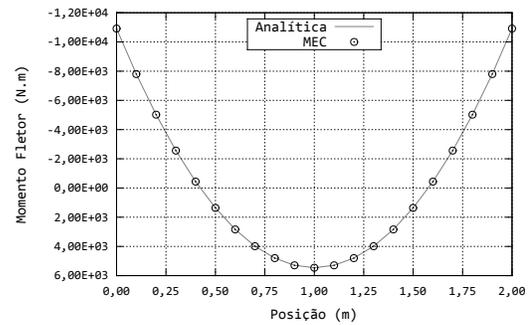


Figura 8. Momento fletor para a viga engastada-engastada.

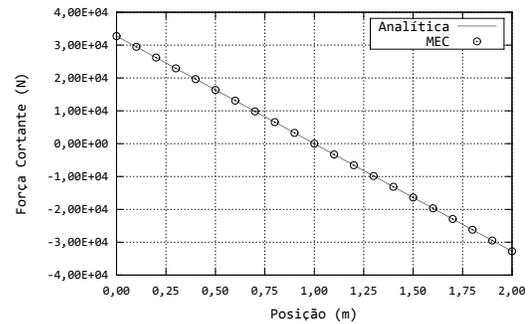


Figura 9. Força cortante para a viga engastada-engastada.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da análise das Fig. 2 até Fig. 9, percebe-se que bons resultados foram obtidos com o MEC, desde o cálculo de deslocamentos até o de forças cortantes.

Assim, partindo desta formulação, podem ser analisados outros problemas encontrados frequentemente na engenharia, tais como vigas contínuas e análise dinâmica de vigas.

AGRADECIMENTOS

À Fundação de Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro dado ao primeiro autor, por meio da bolsa de mestrado.

REFERÊNCIAS

- [1] H. B. Hibbeler, *Resistência dos Materiais*, 7^a ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
- [2] W. A. Nash, *Resistência dos Materiais*, 2^a ed. São Paulo:McGraw-Hill, 1982.
- [3] J. R. R. Craig, *Mecânica dos Materiais*, 2^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- [4] F. P. Beer, E. R. Johnston Jr., J. T. Dewolf, D. F. Mazurek, *Mecânica dos materiais*, 5^a ed. McGraw Hill Brasil, 2003.
- [5] M. Hetényi, *Beams on Elastic Foundation*, 1st ed. Ann Harbor, Michigan: University of Michigan Press, 1946.
- [6] K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, 1st ed. New York: Dover Publications, Inc. 1991.
- [7] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, 1st ed. Berlin:Springer-Verlag, 1984.
- [8] L. Debnath, D. Bhatta, *Integral Transform and their Applications*, 2nd ed. Taylor & Francis, 2007.