

Análise Isogeométrica aplicado ao problema de concentração de tensões

Diego Cadena de Almeida
PPGMNE-UFPR
Universidade Federal do Paraná
Curitiba-PR, Brasil
diegoepc@gmail.com

Roberto Dalledone Machado, Marcos Arndt
PPGMNE-UFPR
Universidade Federal do Paraná
Curitiba-PR, Brasil
rdm@ufpr.br, arndt@ufpr.br

Resumo—Neste trabalho a Análise Isogeométrica (AIG) é aplicada ao problema clássico de uma chapa com furo circular sob tensão. Afim de avaliar as concentrações de tensões ao redor do furo utiliza-se a formulação da AIG baseada nas funções NURBS junto com os refinamentos h,p,k. Nota-se que a AIG consegue representar muito bem a concentração de tensões ao redor do furo, além de reter a exata geometria em todos os níveis de discretização.

Palavras-chave—Análise Isogeométrica; NURBS; Concentração de Tensões.

I. INTRODUÇÃO

Análise Isogeométrica (AIG) foi introduzida por [1] como um novo método para análise de problemas governados por equações diferenciais parciais, baseado no uso das funções NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) e no conceito isoparamétrico. O método apresenta características comuns ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e tem como principal objetivo fazer uma ligação entre a indústria CAD (*Computer Aided Design*) e a indústria de softwares de análise computacional. Foram testadas diversas aplicações utilizando a AIG, como em problemas da mecânica dos sólidos, vibrações, propagações de ondas, regimes transientes, mecânica dos fluidos, iteração fluido-estrutura, nos quais foram obtidos ótimos resultados que comprovam a eficiência do método. Além dos refinamentos h e p, semelhantes ao do MEF, foi proposto também um novo esquema de refinamento, o refinamento k.

Além das funções NURBS, novas formulações surgiram para serem utilizadas na AIG. Em [2] é proposto o uso das funções T-splines afim de corrigir algumas deficiências relacionadas às NURBS, principalmente pelo fato de permitirem refinamentos locais, e solucionarem problemas de vazios e sobreposições de malhas.

Neste trabalho emprega-se a Análise Isogeométrica para o estudo de problemas de concentração de tensões no regime elástico-linear

II. NURBS

A compreensão das funções NURBS se inicia com o estudo das funções B-splines.

As funções B-splines são definidas a partir de um vetor de nós, ou *knot vector*. Um vetor de nós, em uma dimensão, é um conjunto não decrescente de coordenadas no espaço paramétrico, escrito como $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, onde $\xi_i \in \mathbb{R}$ é o i-ésimo nó, i o índice do nó que varia de $i=1, 2, \dots, n+p+1$, p a ordem do polinômio, e n o número de funções base que compreendem as B-splines. As funções de base B-spline são definidas recursivamente com a utilização da fórmula de Cox-de Boor. Inicia-se, primeiramente, pelas funções definidas por partes de ordem p = 0:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{para os demais casos} \end{cases} \quad (1)$$

e segue-se na sequência, para as ordens p=1,2,3,..., cujas funções são definidas da seguinte maneira:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

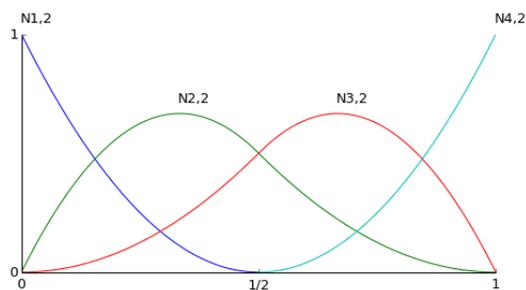


Figura 1. Funções B-splines geradas com base no vetor de nós $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ e $p = q = 2$

A grande vantagem das funções NURBS vista pela indústria CAD, é que estas permitem representar as mais variadas entidades geométricas como círculos, elipses, entre outros. As formas geométricas baseadas em NURBS são obtidas através de projeções das geometrias geradas com as B-Splines no espaço \mathbb{R}^{d+1} para um espaço \mathbb{R}^d . Os pontos de controle no espaço \mathbb{R}^d são obtidos pela projeção dos pontos de controle dada por [3]:

$$(B_i)_j = (B_i^w)_j/w_i, \quad j = 1, \dots, d, \quad (3)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (4)$$

onde $(B_i)_j$ é a j -ésima componente do vetor B_i , e w_i é referido como o i -ésimo peso.

Portanto, as funções bases racionais e as curvas NURBS são dadas por:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}}, \quad (5)$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i \quad (6)$$

As superfícies e sólidos racionais podem ser definidos de forma análoga em termos de funções racionais:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}}, \quad (7)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{k}=1}^l N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)L_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}}, \quad (8)$$

III. ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Segundo [3] existem duas definições de malhas na AIG, as malhas de controles e as malhas físicas. Os pontos de controle definem a malha de controle, e a malha de controle interpola estes pontos de controle. A malha física é uma decomposição da geometria atual e há dois importantes elementos que a compõem, os chamados *patches* e os *knot spans*. Os *patches* são imagens das malhas retangulares do espaço paramétrico mapeadas no espaço físico, e podem ser entendidos como um macro elemento ou subdomínio. Os *patches*, por sua vez, podem ser decompostos nos *knot spans*. *Knot span* é um intervalo de valores paramétricos entre dois sucessivos nós em que são definidas as funções bases, e podem ser entendidos como micro elementos porque são as menores entidades.

Uma configuração esquemática da Análise Isogeométrica pode ser vista na Figura 2. No espaço indicial é possível observar os elementos que possuem áreas não nulas destacados na cor verde, além disso tem-se o início do suporte das funções NURBS destacadas pela numeração global escrita na cor vermelha. No espaço paramétrico pode-se observar os *knot spans* e os elementos formados pela intersecção destes, e também as funções B-Splines nas direções ξ e η . No espaço físico observa-se o mapeamento dos elementos do espaço paramétrico, dado pela combinação linear dos pontos de controle e das funções NURBS. O domínio auxiliar é o local onde são escolhidos os pontos de integração para a integração numérica.

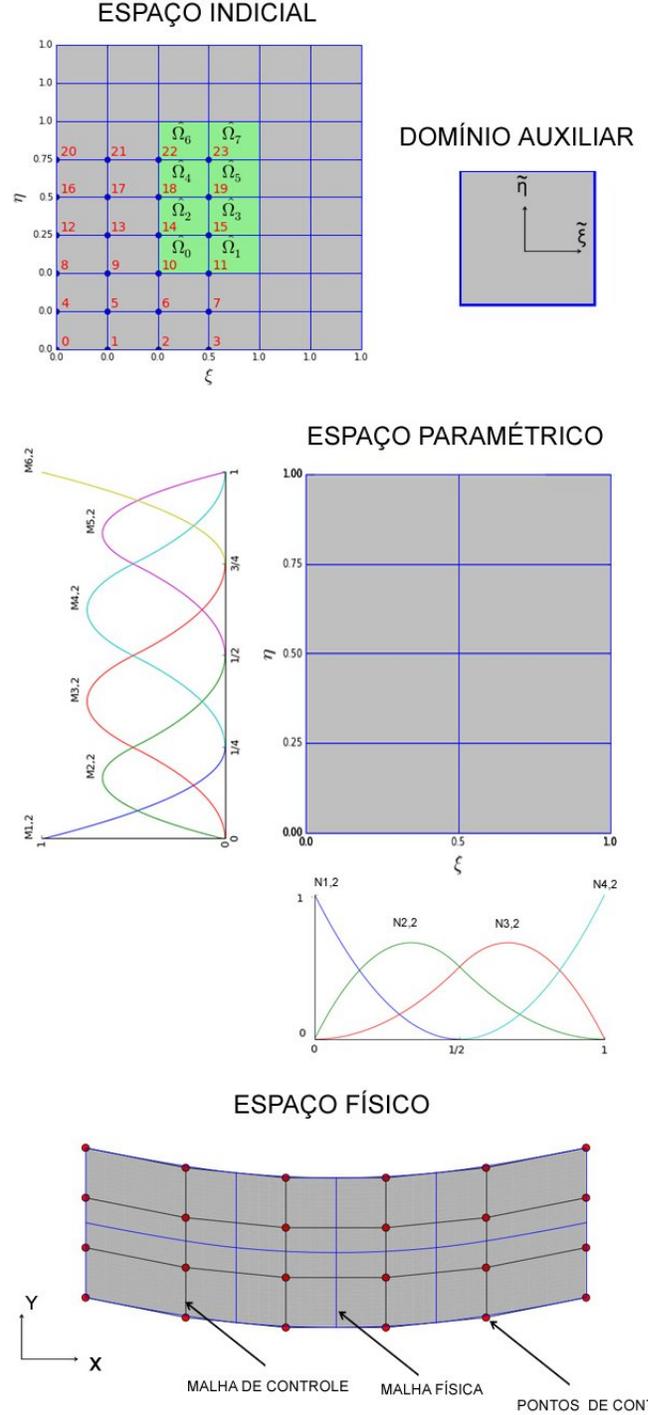


Figura 2. Configuração Esquemática da Análise Isogeométrica

A. Mapeamento

O mapeamento do espaço paramétrico $\hat{\Omega}$ para o espaço físico Ω é realizado conforme:

$$\mathbf{x}(\xi) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \\ z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^{e_n} R_a(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_a^e \\ y_a^e \\ z_a^e \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde x_a^e, y_a^e, z_a^e são as componentes do ponto de controle B_a, R_a as funções NURBS locais que possuem suporte no elemento $\hat{\Omega}^e$, e e_{en} o número de funções locais.

Na Análise Isogeométrica utiliza-se o conceito isoparamétrico, no qual as funções base que definem a geometria do elemento são utilizadas para aproximação do campo que se deseja conhecer. Assim sendo, o campo de deslocamento pode ser construído de maneira similar:

$$u^h(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n_{np}} R_A(\xi, \eta) u_A \quad (10)$$

onde $\hat{u}^h : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, u_A são as variáveis de controle, R_A são as funções globais, e n_{np} o número de funções globais.

O mapeamento do domínio auxiliar $\hat{\Omega}^e$ para o espaço paramétrico $\hat{\Omega}$ é realizado com as seguintes equações:

$$\xi = \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)\tilde{\xi} + (\xi_{i+1} + \xi_i)}{2} \quad (11)$$

$$\eta = \frac{(\eta_{j+1} - \eta_j)\tilde{\eta} + (\eta_{j+1} + \eta_j)}{2} \quad (12)$$

A matriz Jacobiana do mapeamento do domínio auxiliar para o domínio físico é dada por:

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{\xi}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{\xi}} \frac{d\tilde{\xi}}{d\xi} = \begin{bmatrix} x, \xi & x, \eta \\ y, \xi & y, \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi, \tilde{\xi} & 0 \\ 0 & y, \tilde{\eta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

e o Jacobiano dado pelo determinante da matriz Jacobiana:

$$J = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{\xi}} \right| \quad (14)$$

B. Matriz de Rigidez e de Força

Com base nas equações de equilíbrio do estado plano de tensões [4] - [5] dada elas expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_1 &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_2 &= 0 \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (15)$$

das devidas condições geométricas de contorno:

$$\begin{aligned} u &= g_1 \quad \text{em } \Gamma_{D_x} \\ v &= g_2 \quad \text{em } \Gamma_{D_y} \end{aligned} \quad (16)$$

e condições mecânicas de contorno:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= h_1 \quad \text{em } \Gamma_{N_x} \\ \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x &= h_2 \quad \text{em } \Gamma_{N_y} \end{aligned} \quad (17)$$

Obtêm se a a forma fraca de Galerkin pela seguinte expressão:

$$t \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} (\mathbf{B} \mathbf{u}) d\Omega = t \int_{\Omega} \mathbf{R} \mathbf{f} d\Omega + t \int_{\Gamma_h} \mathbf{R} \mathbf{h} d\Gamma \quad (18)$$

A qual pode ser representada pelo sistema de equações:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (19)$$

onde:

$$\mathbf{K} = t \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (20)$$

$$\mathbf{F} = t \int_{\Omega} \mathbf{R} \mathbf{f} d\Omega + t \int_{\Gamma_h} \mathbf{R} \mathbf{h} d\Gamma \quad (21)$$

Sendo $\mathbf{R}, \mathbf{f}, \mathbf{h}$, as funções NURBS, as forças de corpo e as forças de superfície, respectivamente.

Sendo \mathbf{B} a matriz composta por:

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} R_{a,x} & 0 \\ 0 & R_{a,y} \\ R_{a,y} & R_{a,x} \end{bmatrix} \quad (22)$$

e \mathbf{D} a matriz com as relações constitutivas [6] representada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

C. Integração Numérica

A integração numérica é realizada por quadratura de Gauss com base em um elemento no domínio auxiliar de coordenadas $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$

D. Refinamento h

No refinamento h um novo nó $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ é inserido dentro do vetor de nós $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$. As novas $n+1$ funções bases *B-Splines* são formadas recursivamente segundo o novo vetor de nós $\bar{\Xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$. Os novos $n+1$ pontos de controle, $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$ são formadas a partir dos pontos de controles originais $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, dado por:

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 + \alpha_i) B_{i-1} \quad (24)$$

onde:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0, & k+1 \leq i \leq n+p+2 \end{cases} \quad (25)$$

Em [1] é proposto uma técnica para seleção do nó que deve ser inserido dentro do vetor de nós, que consiste numa combinação da iteração de Newton para encontrar os nós $\bar{\xi}_1$ e $\bar{\xi}_2$ através do procedimento de inversão do ponto [7], e a utilização de uma média ponderada dada por:

$$\bar{\xi} = \frac{\left\| \frac{dx}{d\xi} \right|_{(\bar{\xi}_1, \eta_1)} \left\| \bar{\xi}_1 + \left\| \frac{dx}{d\xi} \right|_{(\bar{\xi}_2, \eta_{m+q+1})} \left\| \bar{\xi}_2}{\left\| \frac{dx}{d\xi} \right|_{(\bar{\xi}_1, \eta_1)} \left\| + \left\| \frac{dx}{d\xi} \right|_{(\bar{\xi}_2, \eta_{m+q+1})} \left\|} \quad (26)$$

Dessa maneira obtêm-se uma malha melhor distribuída dentro de um *patch*. Como pode ser comparado nas Figuras 3 e 4.

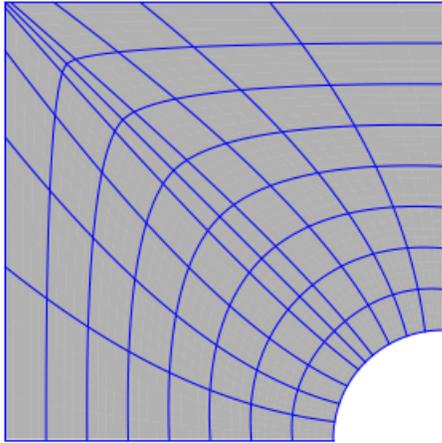


Figura 3. Refinamento h

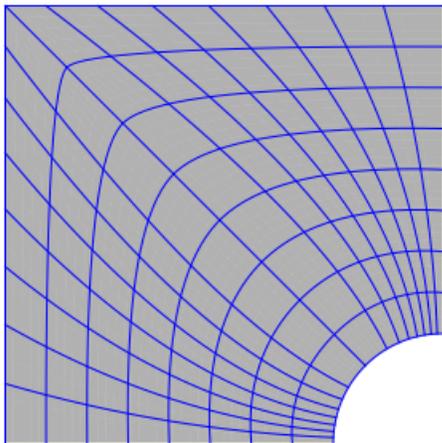


Figura 4. Refinamento h com escolha do melhor local para inserir o nó $\bar{\xi}$

E. Refinamento p

No refinamento p a ordem das funções são elevadas. Durante o refinamento, cada nó dentro de um vetor de nós tem a sua multiplicidade aumentada, afim de que a continuidade C^{p-k} das funções *B-splines* sejam preservadas.

F. Refinamento k

O refinamento k é uma combinação de seguidos refinamentos p e então de refinamentos h. Aplica-se o refinamento, elevando-se a ordem das funções *B-Spline* e inserindo-se um novo nó, dentro do vetor de nós, logo na sequência. Com isso elevam-se as funções de ordem p para q, e a continuidade de C^{p-1} para C^{q-1} . Segundo [8] o refinamento k, diferente dos

refinamentos h e p, não se aproveita do refinamento anterior para uma posterior nova etapa de refinamento, pois sempre parte da malha mais grosseira, ou malha inicial, a cada nível de refinamento. Ou seja, só se torna possível a manutenção da continuidade C^{p-1} ao longo do domínio, se o refinamento k partir de um único elemento.

IV. RESULTADOS

Foi estudado o problema de uma chapa com furo circular sob tensão. A configuração do problema pode ser vista na Figura 5.

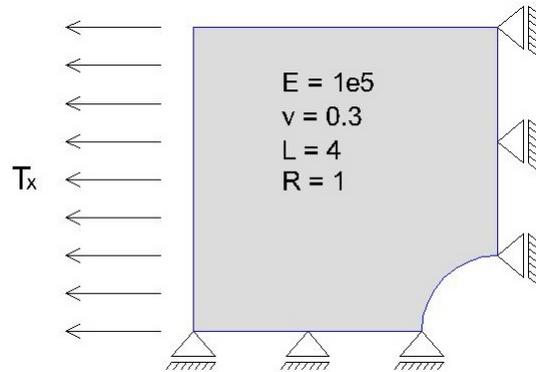


Figura 5. Chapa com furo circular sob tensão

O resultado obtido com a formulação da AIG pode ser observado na Figura 6.

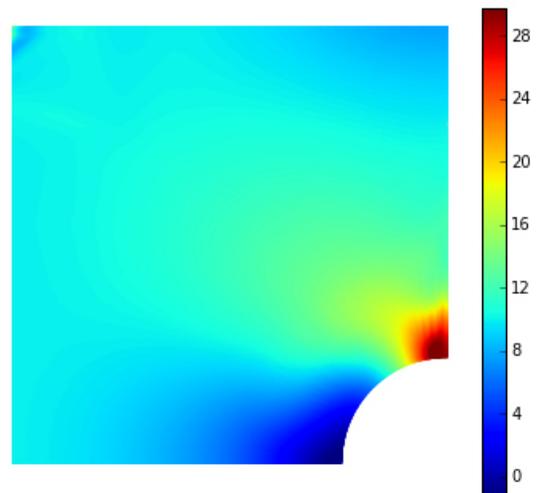


Figura 6. Resultado obtido com a AIG baseada nas funções NURBS

V. CONCLUSÃO

Com a Análise Isogeométrica foi possível obter uma boa representação da concentração de tensão ao redor do furo circular. Observou-se que com o refinamento k tem-se uma menor propagação dos graus de liberdade quando comparado com o refinamento hp. No refinamento k a continuidade das

funções passam de C^{p-1} para C^{q-1} quando a ordem das funções são elevadas de p para q , no entanto, isso somente é válido quando o refinamento parte de uma malha grosseira, formada por um único elemento, caso contrário os nós internos tem sua multiplicidade aumentada afim de se manter a continuidade inicial das funções.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) durante o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, n.39-41, 2005
- [2] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, et al. *Isogeometric analysis using T-splines*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, 2010.
- [3] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley and Sons, 2009.
- [4] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1970.
- [5] T. J. R. Hughes *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. United States of America: Dover Publications, 2000.
- [6] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [7] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS book*. Springer, 1997.
- [8] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, A. Reali, *Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, 2007.