

Aplicação do Método de Comprimento de Arco em problema não linear de treliça espacial

Luiz Antonio Farani de Souza

Curso de Engenharia Civil

UTFPR

lasouza@utfpr.edu.br

Resumo— Neste trabalho é implementado o algoritmo de Comprimento de Arco de Riks-Wempner para a solução de uma treliça espacial com não linearidade geométrica, cuja trajetória de equilíbrio apresenta pontos limites com os fenômenos de *snap-through* e *snap-back*. São comparados métodos diretos e iterativos para a solução do sistema de equações lineares gerado a cada iteração da formulação de Elementos Finitos.

Palavras-chave— formulação posicional; treliça espacial; não linearidade geométrica; gradiente conjugado.

I. INTRODUÇÃO

Uma dificuldade inerente ao método convencional de Newton - Raphson, que tem como estratégia a manutenção do parâmetro de Força Constante durante o ciclo iterativo, é a solução próxima a pontos limites na trajetória de equilíbrio divergir devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente, ou simplesmente porque para o nível de força estabelecido não há solução [1]. A formulação de Elementos Finitos Posicional é uma abordagem alternativa para problemas não lineares. Desenvolvida originalmente por [2], essa formulação considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear em vez dos deslocamentos [3]. Neste artigo, faz-se uma análise estática não linear com o *software* Matlab, utilizando essa formulação, num problema de treliça espacial com não linearidade geométrica encontrado na literatura, com o objetivo de validar o código computacional desenvolvido. A solução do problema estrutural é obtida com o método de Newton - Raphson Modificado associado à técnica de continuação Comprimento de Arco criada por Riks [4]-[5] e Wempner [6]. Em adição, o sistema de equações lineares gerado da discretização por Elementos Finitos durante o ciclo iterativo é resolvido com métodos diretos (Fatoração LU e Eliminação de Gauss) e métodos iterativos (Gradiente Conjugado - GC, Gradiente Conjugado Quadrado - GCQ, Gradiente Bi-Conjugado Quadrado - GCBQ e Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado - GCBE). No método do Comprimento de Arco incrementa-se simultaneamente a força e as coordenadas. Para tal, uma nova equação ou restrição é adicionada ao sistema de equações de equilíbrio e, por consequência, uma nova incógnita - o fator de força λ .

II. MÉTODO DE SOLUÇÃO

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural pode ser descrita pela equação [7]:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}, \quad (1)$$

sendo \mathbf{g} o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos nós

da estrutura - \mathbf{a}), e λ o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A estimativa para o vetor de deslocamentos residuais $\delta \mathbf{u}$ é determinada pelo seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (2)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Os parâmetros incrementais de força ($\Delta \lambda$) e de deslocamentos ($\Delta \mathbf{u}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são avaliados, respectivamente, por:

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (4)$$

Os parâmetros totais de força (λ) e de deslocamentos (\mathbf{u}) são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \Delta \lambda^{(k)}, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (6)$$

Para a solução do problema não linear, é utilizado o algoritmo de Riks-Wempner com o Método de Newton-Raphson Modificado, em que a matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}) é calculada uma única vez no início de cada passo força (o algoritmo é apresentado na Fig. 1). O critério de convergência é expresso pela norma da força residual normalizada pela norma da força total aplicada:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_r\|. \quad (7)$$

III. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Considere a treliça espacial com 12 barras, conforme ilustrada na Fig. 2, cuja rigidez axial adimensional das barras $EA = 1,0$. Os três nós do topo da treliça são livres e os restantes fixos. Esta estrutura foi estudada por [8] e [3]. Os parâmetros considerados nas simulações são: comprimento de arco inicial $\Delta l = 0,1$; número máximo de ciclos $n_{\text{máx}} = 76$; número máximo de iterações em cada ciclo $i_{\text{máx}} = 10$; número de iterações desejadas $N_d = 2$; e tolerância $\text{tol} = 10^{-4}$. Na Fig. 3 é apresentada a trajetória de equilíbrio (deslocamento vertical v no nó 7 *versus* fator de força) com vários pontos limites de força (*snap-throughs*) e pontos de viragem (*snap-backs*). O ponto limite de força é um ponto extremo (ponto de máximo ou mínimo) no caminho de equilíbrio, em que a tangente é horizontal; e o ponto de viragem é um ponto no caminho de equilíbrio cuja tangente é vertical. Quando a estrutura atinge os pontos críticos, a mesma pode tornar-se instável; por isso, a identificação deles é de grande importância para um projeto de engenharia. Na Tabela I aparecem os tempos de processamento obtidos com os métodos diretos Eliminação de Gauss e

Fatoração LU e os métodos iterativos GC, GCQ, GCBQ e GCBE. Para a solução do problema estrutural não linear num procedimento incremental e iterativo, o sistema de equações lineares decorrente da formulação do MEF é resolvido a cada iteração no passo de força corrente até que se atinja a convergência sendo, em geral, o processo que demanda maior esforço computacional durante a simulação. Nas análises com os métodos implementados não houve problemas de instabilidade numérica. O método direto Fatoração LU apresentou o menor tempo de processamento.

1. $u = 0, \Delta u = 0, \lambda = 0$	14. $\delta \lambda = (\Delta u_1^T \delta u_2) / (\Delta u_1^T \delta u_1)$
2. Para $n = 1, \dots, N_{\text{máx}}$	15. $\delta u = \delta u_g + \delta \lambda \delta u_r$
3. Computar K	16. $\Delta u = \Delta u + \delta u$
4. $\delta u_r = K^{-1} F_r$	17. $\Delta \lambda = \Delta \lambda + \delta \lambda$
5. $\Delta \lambda = \Delta l / \ \Delta u_1\ $	18. $g = (\lambda + \Delta \lambda) F_r - F_{\text{int}}(u + \Delta u)$
6. Se $\Delta u^T \delta u_r < 0$	19. Se $\ g\ \leq \text{tol} \ F_r\ $
7. $\Delta \lambda = -\Delta \lambda$	20. Terminar a execução do Para
8. Fim-Se	21. Fim-Se
9. $\Delta u_1 = \Delta \lambda \delta u_r$	22. Fim-Para
10. $\Delta u = \Delta u_1$	23. $u = u + \Delta u$
11. $g = (\lambda + \Delta \lambda) F_r - F_{\text{int}}(u + \Delta u)$	24. $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$
12. Para $i = 1, \dots, I_{\text{máx}}$	25. $\Delta l = \Delta l (N d / i)^{0.5}$
13. $\delta u_g = K^{-1} g$	26. Fim-Para

Fig. 1. Algoritmo de Comprimento de Arco de Riks-Wempner.

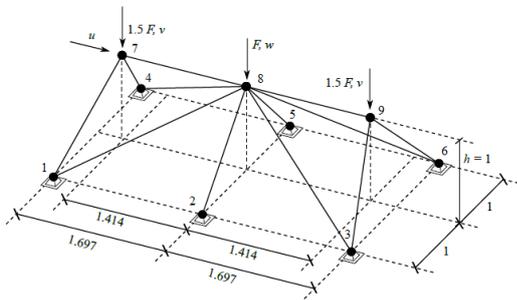


Fig. 2. Treliça espacial de 12 barras. Fonte: adaptado de [3].

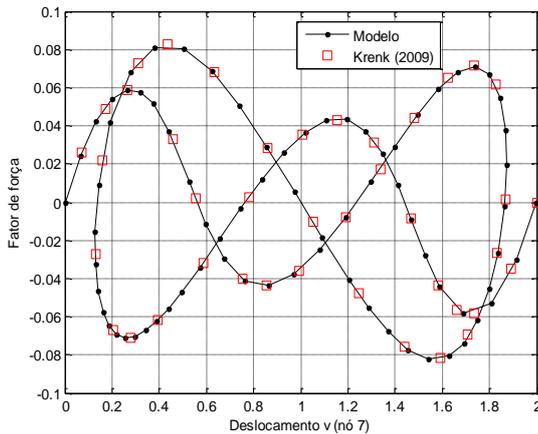


Fig. 3. Trajetórias de equilíbrio.

O método de Newton-Raphson Modificado pode ser bem eficiente quando se usa Fatoração LU para resolver os sistemas lineares, visto que a matriz de rigidez tangente é fatorada uma única vez no início do passo de força (primeira iteração), e a mesma fatoração é reaproveitada para resolver os sistemas lineares das iterações seguintes do ciclo. Dentre os métodos

iterativos, o método GC conseguiu o melhor desempenho; no entanto, pode apresentar instabilidade numérica quando o sistema linear for mal condicionado. Para solucionar essa questão, tem-se utilizado técnicas de pré-condicionadores que visam melhorar o condicionamento do problema e acelerar a convergência do método.

TABELA I. TEMPO DE PROCESSAMENTO EM SEGUNDOS.

GCBE	0,222172
GCBQ	0,237679
GCQ	0,238632
GC	0,21754
Gauss	0,217683
LU	0,214861

IV. CONCLUSÃO

O código computacional desenvolvido mostrou-se eficiente devido à simplicidade de implementação e ao razoável desempenho no exemplo numérico estudado demonstrando, assim, potencialidade na sua aplicação em análises não lineares de treliças espaciais. Evidencia-se a necessidade da utilização de um método incremental-iterativo para a solução adequada de problemas com não linearidade geométrica. O programa desenvolvido conseguiu obter o caminho completo de equilíbrio da estrutura, identificando e ultrapassando pontos críticos de força e de viragem existentes. Ademais, é de grande importância na análise estrutural o projetista calculista estimar a capacidade resistente última da estrutura, quanto ao carregamento de colapso e ao deslocamento máximo correspondente.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao apoio da UTFPR.

REFERÊNCIAS

- [1] R. A. M. Silveira, G. Rocha, e P. B. Gonçalves, "Estratégias numéricas para análises geometricamente não lineares", XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, 1999.
- [2] H. B. Coda, "Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF", Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [3] E. G. M. Lacerda, "Análise não linear de treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional", Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.
- [4] E. Riks, "The application of newton's method to the problem of elastic stability", Journal of Applied Mechanics, vol. 39, pp. 1060-1065, 1972.
- [5] E. Riks, "Incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", International journal of solids and structures", vol. 15, pp. 529-551, 1979.
- [6] G. Wempner, "Discrete approximation related to nonlinear theories of solids", International Journal of Solids and Structures, vol. 7, pp. 1581-1599, 1971.
- [7] M. A. Crisfield, "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", vol. 1, Essentials. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [8] S. Krenk, "Non-linear modeling analysis of solids and structures. Cambridge". UK: Cambridge, 2009.